



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JULIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS
EXATAS



Trabalho de Conclusão de Curso
Curso de Graduação em Física

Sistemas de Muitos Corpos Interagentes por um Potencial Escalar e Vetorial

Pedro Henrique Lopes Nanzer

Prof. Dr. Luiz Antônio Barreiro

Rio Claro-SP
2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

PEDRO HENRIQUE LOPES NANZER

SISTEMAS DE MUITOS CORPOS INTERAGENTES POR UM
POTENCIAL ESCALAR E VETORIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas -
Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para
obtenção do grau de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2024

N193s Nanzer, Pedro Henrique Lopes
 Sistemas de muitos corpos interagentes por um
 potencial escalar e vetorial / Pedro Henrique Lopes
 Nanzer. -- Rio Claro, 2024
 62 p. : il., tabs.

 Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) -
 Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de
 Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
 Orientadora: Luiz Antonio Barreiro

 1. Física nuclear. 2. Hadrodinâmica Quântica. 3. Teoria
 de Campos Efetivos. 4. Mecânica Estatística. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados
fornecidos pelo autor(a).

PEDRO HENRIQUE LOPES NANZER

SISTEMAS DE MUITOS CORPOS INTERAGENTES POR UM
POTENCIAL ESCALAR E VETORIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas -
Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para
obtenção do grau de Bacharel em Física.

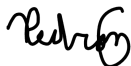
Comissão Examinadora

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro (orientador)

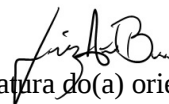
Prof. Dr. Gastão Inacio Krein

Prof. Dr. Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Rio Claro, 18 de outubro de 2024.



Assinatura do(a) aluno(a)



assinatura do(a) orientador(a)

Agradecimentos

O seguinte trabalho foi fomentado no processo nº 2023/01177-3, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do(s) autor(es) e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

Quero agradecer meu professor de física do ensino médio, Anderson Palmieri, sem a aula de gravitação universal eu não teria entrado nesse curso e não teria conseguido finaliza-lo, na mesma linha agradeço meu professor de Matemática Marcelino Tavares, que foi o primeiro que me ensinou que só faz sentido a utilização de uma equação ao saber sua origem e demonstração.

Quero agradecer meu pai, Marco Antonio por sempre tentar responder minhas perguntas mais complexas, mesmo quando ele não sabe a resposta, e minha mãe Maria Leonor, por ser sempre um exemplo de força e superação, ambos sempre contribuíram muito na minha educação, sempre fizeram disso uma prioridade, se cheguei até aqui foi pelo apoio incondicional desses dois. Agradeço minha irmã Samanta por sempre ser atenciosa comigo e ficar me lembrando que devem existir momentos de descanso, mesmo quando eu esqueço que eles existem. Agradeço meu irmão Gabriel por sempre me dar carona para Rio Claro, ou o contrário, me buscar de Rio Claro, assim me permitindo focar mais em meus projetos. Agradeço meu cunhado Lucas também, que por mais que saiba pouco sobre física sempre tem interesse em me perguntar e discutir esses temas comigo.

Quero agradecer ao meu orientador Luiz Antônio Barreiro, que me respondeu mesmo quando eu estava no primeiro ano, e me permitiu estudar as interações mais fundamentais da matéria, nossa colaboração já tem praticamente 3 anos, um estudo que permitiu esse trabalho. Nessa mesma linha agradeço todos do grupo de pesquisa de Sistemas Quânticos de muitos corpos, que permitiu um desenvolvimento coordenado do projeto, em especial entre os membros do grupo agradeço a Lucas Colmanetti, que sempre me ajudou na minha graduação, em matérias e conselhos.

Agradeço demais membros da banca, professor Ricardo Paupitz por ter sugerido algumas coisas ao projeto, principalmente relacionadas a mecânica estatística, agradeço ao professor Gastão Krein pelo interesse no projeto. Alguns professores não membros da banca mas que merecem agradecimento são o professor Alexandre Mesquita por sempre me auxiliar em trâmites burocráticos e o professor Flórian Gunther por sempre ter me mostrado a forma mais rigorosa da física. Agradeço também meu professor de Calculo II Luís Renato, por mostrar que a matemática pode sim representar a natureza. Agradeço também o técnico André por sempre ser gentil e me ajudar em tudo que podia.

Quero agradecer alguns amigos que sempre me ajudaram e foram suporte em toda minha graduação, agradeço Guilherme Cauet por sempre me apoiar em todas as malquices que eu resolvo me meter, agradeço ao meu amigo Luis Antonio Deviechi Rocha por sempre me ajudar a sorrir mesmo no meu dia mais triste, também meu amigo Eduardo

Gomes Lacerda por sempre perguntar sobre o andamento deste projeto. Ao meu amigo Gabriel Oliveira e a minha amiga Isadora Galvão por sempre conversar e auxiliar com física na área de partículas. Quero dar um agradecimento especial a Gustavo Del Duque por passar esses últimos 3 anos me aguentando na mesma casa e sempre me ajudando da forma que podia, a Antony Morangon por ser meu grande amigo e companheiro de Física, conversando sobre qualquer assunto relacionado a física e dando seus pitacos aqui e acolá, principalmente quando envolve programação. Agradeço também a minha grande amiga Isabella Marchi por ler esse trabalho e me auxiliar com sua confecção e também por sempre estar preocupada com como estou.

Finalmente quero agradecer alguns amigos de Piracicaba que sempre me apoiaram em meu desenvolvimento pessoal e profissional, Gabriel Lima, Renan Morelli e Victor Teodoro.

Resumo

A física nuclear tem como grande objetivo a descrição dos núcleos atômicos e a matéria que o constitui (núcleons). Para conseguir descrever de forma satisfatória o sistema, diversos modelos foram desenvolvidos, por exemplo o modelo de gás de Fermi. Porém é fato que a maioria desses modelos não consegue descrever com precisão todas as características da matéria nuclear. Para o caso de muitos corpos, o estudo da matéria nuclear é muito complexo, sendo necessário a utilização de uma teoria de campos efetivos. Para abordar essas questões, Walecka propôs um modelo dentro do escopo da Hadrodinâmica Quântica, um modelo que estuda uma matéria teórica formada por muitos hádrons, com densidade bariônica e densidade de energia bem definida. Esse modelo utiliza conceitos de teoria de campos e mecânica estatística permitindo o cálculo de grandezas termodinâmicas como a densidade de energia e a pressão que o sistema exerce, tanto para temperatura diferente de zero quanto para temperatura igual a zero. Para então determinar essas grandezas termodinâmicas, serão utilizadas equações teóricas que podem ser solucionadas numericamente com técnicas de computação. Para esse trabalho será utilizado o software *Mathematica*, onde foi feita a análise dos resultados e os gráficos que os descrevem. Os resultados encontrados, por sua vez, demonstram como mesmo à temperatura igual a zero existe pressão e energia para a matéria nuclear, como o esperado devido ao princípio da exclusão de Pauli. Observou-se também como a densidade de energia varia com a temperatura e com o potencial químico, influenciando a distribuição de Fermi-Dirac nos resultados. Assim, este trabalho explora o modelo de Walecka em detalhes, destacando suas particularidades e sua relevância para o estudo de sistemas nucleares complexos.

Palavras-chave: Física Nuclear, Hadrodinâmica Quântica, Teoria de Campos Efetivos, Mecânica Estatística.

Abstract

Nuclear physics aims to describe atomic nuclei and the matter that constitutes them (nucleons). Various models, such as the Fermi gas model, have been developed to provide a satisfactory description of these systems. However, most of these models fail to accurately capture all the characteristics of nuclear matter, particularly in many-body systems, where the study of nuclear matter becomes highly complex, requiring the use of mean field theory. To address these challenges, Walecka proposed a model within the framework of Quantum Hadrodynamics. This model investigates a theoretical matter composed of many hadrons with well-defined baryon density and energy density. It uses concepts from field theory and statistical mechanics, allowing the calculation of thermodynamic quantities such as energy density and pressure, both at zero and non-zero temperatures. In this work, these thermodynamic quantities were determined using theoretical equations solved numerically with computational techniques. The Mathematica software was employed for the analysis and graphical representation of the results. The findings demonstrate that even at zero temperature, nuclear matter exhibits pressure and energy, as expected due to the Pauli exclusion principle. Additionally, the study shows how energy density varies with temperature and chemical potential, influencing the Fermi-Dirac distribution. Thus, this work thoroughly explores the Walecka model, highlighting its specific features and its relevance to the study of complex nuclear systems.

Keywords: Nuclear Physics, Quantum Hadrodynamics, Mean Field Theory, Statistical Mechanics.

Lista de Figuras

1	Representação gráfica de dois sistemas de coordenadas inerciais S e $\bar{S}$	12
2	Representação gráfica da distribuição de Fermi-Dirac, valores genéricos para a energia e temperatura.	34
3	Representação da probabilidade do gás de Fermi para diferentes modos normais.	36
4	Gráfico demonstrativo da razão massa aparente e massa da matéria nuclear em relação ao momento de Fermi.	51
5	Gráfico da densidade de energia sobre a densidade bariônica menos a massa da matéria nuclear em relação ao momento de Fermi.	52
6	Equação de estado para a matéria nuclear.	52
7	Gráfico da razão entre a massa aparente e a energia termodinâmica para a matéria nuclear. Está indicado o ponto em que a massa aparente atinge metade do valor da massa bariônica.	59

Sumário

1	Introdução	10
2	Revisão Bibliográfica	11
2.1	Relatividade especial	11
2.2	Notações e Definições	13
2.3	Eletromagnetismo Relativístico	15
2.4	Equação de Klein-Gordon	18
2.5	Equação de Dirac	19
2.6	Equação de Proca	22
2.7	Teoria de Campos	23
2.8	Termodinâmica	26
2.9	Mecânica Estatística	29
2.10	Ensemble Grande-Canônico	30
2.11	A distribuição de Fermi-Dirac	32
2.12	Gás Ideal de Fermi	33
3	Matéria Nuclear a Temperatura igual a Zero	39
3.1	Equações de Movimento	39
3.2	Método Variacional	40
3.3	Campo Médio	41
3.4	Cálculo das Densidades	43
3.5	Equações para a Densidade de Energia e para a Pressão	47
3.6	Resultados Numéricos	50
4	Matéria Nuclear a Temperatura diferente de Zero	53
4.1	Descrição Termodinâmica da Matéria Nuclear	53
4.2	Cálculo do Potencial Termodinâmico	54
4.3	Equações de Estado dependentes da Temperatura	56
4.4	Uma solução para Densidade Bariônica igual a Zero	58
5	Conclusão	60
	Referências	61

1 Introdução

A tecnologia nuclear é utilizada em várias áreas, como na geração de energia e na medicina. O entendimento de sistemas nucleares faz parte da ciência de ponta e está relacionado diretamente com a inovação tecnológica.

Existem muitos modelos cujo objetivo é explicar sistemas nucleares, um dos mais robustos para a descrição de um sistema de muitos corpos é a chamada matéria nuclear descrita por Walecka [1].

A matéria nuclear é considerada um sistema hipotético de muitos corpos, com uma densidade bem definida. Para entender o funcionamento desse tipo de matéria, é necessário ter conhecimentos básicos sobre física nuclear, teoria de campos e mecânica estatística. Portanto, seu estudo é muito interessante para quem está iniciando a entender esses assuntos e o presente texto tem como um dos objetivos esmiuçar esses temas para auxiliar os futuros estudantes de física nuclear.

Do ponto de vista quântico, a matéria nuclear pode ser descrita como um sistema de infinitos núcleons (componentes do núcleo atômico), onde a interação nuclear pode ser descrita por dois tipos de potenciais. Um potencial escalar de atração σ (um méson¹ de spin 0) que é o potencial mais forte até cerca de 1 fm (10^{-15} m), porém para distâncias menores que 1 fm é utilizado um potencial vetorial repulsivo ω_μ (um méson de spin 1) [1]. Como a interação nuclear é muito mais forte que a interação eletromagnética (ainda mais quando são tomados infinitos núcleons), a interação eletromagnética será ignorada. Também será tomado o número de prótons Z iguais ao de nêutrons N , de maneira que a única forma de diferenciação entre eles (a diferença de massa é desprezível) é pelo isospin.

Já do ponto de vista estatístico, a matéria nuclear pode sofrer variações de suas propriedades termodinâmicas (pressão, densidade de energia, etc.) devido à mudança de temperatura.

É possível então determinar propriedades termodinâmicas do sistema, tanto para temperatura igual a zero (que será feito a partir de equações de teoria de campos como a definição de tensor energia-momentum), quanto para temperatura diferente de zero, a partir de equações da mecânica estatística como a distribuição de Fermi-Dirac.

Antes de iniciar de fato o estudo das propriedades termodinâmicas, será necessária uma revisão dos princípios fundamentais que estabelecerão essa teoria. Para entender então tópicos de teoria de campos será necessário entender primeiramente conceitos de relatividade especial, bem como a mecânica quântica. Uma revisão de mecânica estatística e o formalismo do ensemble grande canônico, também será feita.

¹Méson é um tipo de partícula que faz parte da classe dos hádrons junto com os bárions, uma das características dos mésons é ter um spin inteiro e ser formado por um par quark-antiquark.

2 Revisão Bibliográfica

Antes de começar, haverá uma visitação da teoria para facilitar o entendimento do trabalho.

Será feita uma revisão básica de relatividade com o intuito de explicar a base da teoria relativística utilizada, bem como a notação de Einstein e as unidades naturais. Também algumas definições de eletromagnetismo relativístico serão abordadas para descrever o méson vetorial ω_μ .

Após entender a notação relativística, serão estudadas as equações que descrevem a mecânica quântica do sistema, lembrando que será analisada uma mecânica relativística, portanto a mecânica quântica também será. Serão vistas três equações muito importantes para esse tipo de sistema, a equação de Klein-Gordon, que será utilizada para descrever o méson escalar σ , a equação de Dirac, que será utilizada para descrever os férmions ψ , e a equação de Proca que baseada, no Eletromagnetismo, descreverá o méson vetorial ω_μ .

Por fim, o estudo foi inteiramente baseado em uma dinâmica de muitos corpos microscópicos. Como tal, existirão macroscopicamente quantidades termodinâmicas relacionadas com a estatística do sistema, como a temperatura, entropia, etc. Portanto, será feito um estudo intensivo dessas propriedades, para então conseguir descrever matematicamente como a matéria nuclear sofre mudanças devido a temperatura.

2.1 Relatividade especial

Até meados do século XIX, acreditava-se que existia um meio invisível que permeava todos os corpos, chamado de *éter*. Era imaginado que as ondas eletromagnéticas eram propagadas neste meio, a partir de transformações simples, como as transformações de Galileu [2], poderia ser determinada a variação da velocidade da luz.

Porém, conforme o experimento de Michelson-Morley [3] demonstrou, aparentemente não existe *éter*. Albert Einstein formulou alguns postulados para descrever então uma mecânica que considera velocidade da luz e a não existência desse meio.

Os postulados são [2]:

1. O princípio da Relatividade: As leis da Física valem para todos os sistemas inerciais²
2. A velocidade da luz: A velocidade da luz é a mesma em todos os sistemas inerciais.

Para que ambos os postulados sejam respeitados, foi necessária a criação do que hoje é chamado de transformação de Lorentz, que pode ser definida como [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ \bar{x}^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ \bar{x}^2 = x^2 \\ \bar{x}^3 = x^3 \end{array} \right.$$

²Entenda aqui sistemas inerciais como sistemas que mantém velocidade constante entre si.

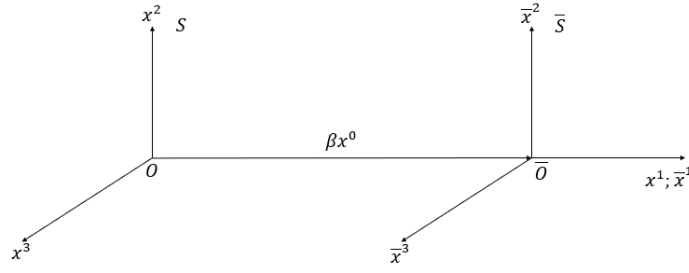


Figura 1: Representação gráfica de dois sistemas de coordenadas inerciais S e $\bar{S}$.

em que x^1, x^2, x^3 representam as coordenadas espaciais (sendo x^1 o eixo cujo o movimento está ocorrendo), e x^0 a coordenada temporal (velocidade da luz multiplicada pelo tempo), γ por sua vez é chamado fator de Lorentz e é definido por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1)$$

β por sua vez é a velocidade do corpo dividida pela velocidade da luz. Por uma questão de notação, uma grandeza a qualquer é escrita como a para um sistema de coordenadas S e como $\bar{a}$ para um sistema de coordenadas $\bar{S}$, ambos os sistemas são inerciais entre si. Uma representação gráfica do problema pode ser vista na figura 1.

As transformações podem também ser escritas na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

que, por sua vez, para compactar a expressão, pode ser escrita em uma única equação,

$$\bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu x^\nu$$

onde a matriz transformação de Lorentz Λ_ν^μ é definida por,

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

para suprimir ainda mais, será retirada o símbolo de somatório utilizando assim a notação de Einstein,

$$\bar{x}^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu. \quad (3)$$

As transformações definidas em (3) demonstram como quatro grandezas inter-relacionadas se transformam, o que permite a definição de um conceito novo: o de quadri-vetores. Quadri-vetores são como vetores comuns no espaço euclidiano, porém têm uma componente a mais relacionada ao tempo. No caso proposto, o quadri-vetor espaço é dado por,

$$x^\mu = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{x}) \quad (4)$$

onde c é a velocidade da luz e t o tempo transcorrido. O espaço em que são trabalhados os quadri-vetores é chamado espaço de Minkowski.

O quadri-vetor velocidade pode ser calculado derivando pelo tempo a equação (4),

$$v^\mu = \frac{d}{dt}x^\mu = (c, \vec{v})$$

porém essa grandeza não é muito interessante, pois as transformações de coordenadas nessa base são muito trabalhosas [2]. Será introduzido então o quadri-vetor velocidade própria, onde a derivada do espaço é tomada em relação ao tempo próprio τ , isto é, o espaço do sistema S é derivado pelo tempo do sistema $\bar{S}$,

$$\eta^\mu = \frac{d}{d\tau}x^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma v^\mu. \quad (5)$$

Com a definição de um quadri-vetor velocidade própria, pode-se definir um quadri-vetor momento,

$$p^\mu = m\eta^\mu \quad (6)$$

o termo temporal (0) da equação (6) multiplicado por c , é chamado muitas vezes de massa relativística [2] pois representava inicialmente o que Einstein acreditava ser ao aumento da massa de um corpo devido sua velocidade. Atualmente é muito mais usual observar a posição temporal do quadri-vetor momento como sendo a Energia dividida pela velocidade da luz, portanto

$$E = \gamma mc^2. \quad (7)$$

2.2 Notações e Definições

Agora que as principais ferramentas de relatividade especial foram desenvolvidas, serão mostradas as principais notações que serão utilizadas nesse trabalho.

Para facilitar o trabalho aqui escrito, será utilizado o sistema de unidades naturais [4], então a partir daqui tomarei $c = \hbar = 1$. Para transformar as grandezas obtidas em unidades naturais, para grandezas do SI, deve ser feita uma análise dimensional do problema.

Observe que na equação (4) e nas demais equações com quadrivetores, como as equações (5-6), foi utilizada uma notação sobrescrita. Esse tipo de grandeza é chamada contravariante [5] a^μ e existe uma grandeza análoga chamada covariante: um quadrivetor covariante a_μ qualquer se relaciona com sua parte contravariante³ pela seguinte propriedade

$$a_\mu = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^0 \\ -a^1 \\ -a^2 \\ -a^3 \end{bmatrix} = (a^0, -\vec{a}) \quad (8)$$

portanto, o produto escalar para quadrivetores pode ser definido como,

$$a^\mu \cdot b^\mu = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \quad (9)$$

essa definição de produto escalar é interessante pois não muda por transformações de Lorentz [4], o que permite o cálculo de uma quantidade invariante para o espaço-tempo independente do referencial, utilizando a equação (4) e a (9), pode ser definido o chamado intervalo de espaço-tempo,

$$r^2 = x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (10)$$

Por notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

a matriz ao meio é chamado de tensor métrica de Bjorken-Drell⁴ [6],

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

esse tensor é interessante pois permite transformar um vetor contravariante em um vetor covariante e vice versa⁵,

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu.$$

³Neste espaço é claro, chamado de espaço de Minkowski, diferentes espaços têm diferentes definições.

⁴O tensor métrica tem essa forma para um espaço plano, caso o problema seja trabalhado em um espaço curvo, o tensor métrica tem outra forma.

⁵Note que $g^{\mu\nu}$ deve ser o tensor inverso de $g_{\mu\nu}$, no caso do espaço plano ambos os tensores são iguais.

Outra grandeza muito interessante para ser calculada com o produto escalar é a grandeza invariante a partir do quadri vetor do momento,

$$p^\mu p_\mu = (E, \gamma \vec{p}) \cdot (E, -\gamma \vec{p}) = (E)^2 - (\vec{p} \cdot \vec{p}) = m^2$$

rearranjando os termos, obtém-se,

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (12)$$

essa forma é muito mais famosa e simples de lidar que (7) e (6), pois elimina o fator de Lorentz. Além disso, caso seja obtida a energia é fácil calcular o módulo do momento e caso se conheça o módulo do momento, é fácil calcular a energia.

Também será utilizada uma notação mais compacta para operadores diferenciais: a derivada parcial pode ser escrita de outra forma como derivada covariante,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

note que a derivada contravariante pode ser encontrada aplicando o tensor métrica (11),

$$\partial^\mu \equiv g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

a partir dessa subseção, essa notação será utilizada a todo momento e o mesmo pode ser dito para a derivada total,

$$d_\mu \equiv \frac{d}{dx^\mu}.$$

2.3 Eletromagnetismo Relativístico

Diferente da mecânica, o eletromagnetismo já é coerente com a relatividade especial. Independente do referencial, as leis do eletromagnetismo serão as mesmas⁶ [2], então não haverá necessidade de modificar as equações já conhecidas do eletromagnetismo, apenas entender as mesmas leis com uma notação mais profunda e compacta.

Assim como dito na seção anterior, para facilitar a utilização do eletromagnetismo usarei as unidades de Heaviside-Lorentz [4]. Nesse tipo de unidade, a permissividade elétrica do vácuo ε_0 é tomada como um⁷, nesse caso, como $c = 1$ e utilizando o fato bem conhecido que $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, então a permeabilidade magnética do vácuo também deve ser um.

Para interpretar o eletromagnetismo com o formalismo da relatividade primeiramente vamos interpretar as equações de Maxwell,

⁶Claro em um referencial alguns fenômenos serão interpretados como magnéticos e em outros referenciais podem ser interpretados como elétricos, mas de toda forma as leis são as mesmas.

⁷As unidades de carga também mudam para manter a coerência com a constante de estrutura fina.

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ b) \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ c) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ d) \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \end{array} \right.$$

$a)$ é a lei de Gauss para campos magnéticos e representa a inexistência de monopolos magnéticos, $b)$ é a lei de Faraday, ela implica que um campo magnético variável no tempo gera um campo elétrico, $c)$ é a lei de Gauss para o campo elétrico, ela implica que a carga total imersa em uma superfície pode ser determinada pela integral de superfície do campo elétrico, $d)$ é a lei de Ampère com a corrente de deslocamento de Maxwell. Observando as equações, pode-se notar que $a)$ e $b)$ são duas equações homogêneas, enquanto $c)$ e $d)$ são equações inhomogêneas.

Para simplificar ainda mais a notação, será construído o que é chamado de tensor eletromagnético. O tensor eletromagnético é usado, pois quando é mudado o referencial alguns efeitos elétricos se tornam magnéticos e vice-versa [2], portanto não se pode tratar $\vec{E}$ e $\vec{B}$ como quadrivetores separados, eles devem ser uma entidade só:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

o tensor tem as seis componentes dos campos e é antissimétrico, o que permite uma construção mais robusta com a ideia de transformação de Lorentz [2] da relatividade.

Devido a antissimetria do sistema, pode-se construir um tensor dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$ que será escrito como,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

o termo $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ é chamado de símbolo de Levi-Civita e é um tensor relacionado a permutação [5],

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & E^1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Aplicando ∂_μ em (13) chega-se em

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

em que J^ν é o quadrivetor definido como,

$$J^\nu = (\rho, \vec{J}) \quad (15)$$

a equação (15) representa um quadrivetor densidade de corrente eletromagnética, note que essa representação implica na equação da continuidade na forma quadrivetorial.

Agora ao aplicar ∂_μ em (14), obtém-se que,

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

portanto, agora temos em mãos duas equações diferenciais, uma homogênea e uma não homogênea, que representam todas as equações de Maxwell com uma notação relativística,

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \\ b) \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \end{array} \right. \quad (16)$$

Para determinar a solução para as equações diferenciais (16), é definido o potencial quadrivetorial eletromagnético A^μ ,

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A}) \quad (17)$$

com

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi$$

pode-se escrever o resultado anterior de forma mais compacta usando o tensor eletromagnético e o rotacional quadrivetorial,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (18)$$

É interessante adicionar um termo de calibre na definição do potencial eletromagnético⁸, e assim os valores do campo magnético e elétrico se mantêm os mesmos, considere um escalar λ fazendo a seguinte substituição,

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \lambda$$

perceba que o termo não modifica a física envolvida, $F^{\mu\nu}$ se mantém o mesmo já que λ é escalar.

Substituindo (18) em (16) observamos que

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = J^\nu$$

como pode-se escolher qualquer valor para λ , é interessante tomar algum que faça $\partial_\mu A^\mu =$

⁸um escalar que desaparece quando é aplicado os potenciais nas equações de Maxwell [2] devido a natureza dos operadores diferenciais

0, o valor desse escalar é chamado de calibre de Lorentz.

A escolha de calibre leva finalmente a equação,

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\mu = J^\mu$$

essa equação é a equação de Poisson vetorial da eletrodinâmica em notação relativística, as soluções dessa equação são chamadas de potencial de Liénard-Wiechert [2]. Considerando o vácuo, obtém-se,

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (19)$$

onde (19) é a equação de Laplace para a eletrodinâmica em notação relativística.

Em mãos de uma notação mais robusta para a física clássica, agora serão tratados de problemas quânticos.

2.4 Equação de Klein-Gordon

A mecânica quântica é uma generalização da mecânica clássica para o mundo microscópico, assim como a mecânica relativística é uma generalização da mecânica clássica para velocidades muito próximas da luz. O problema que será desenvolvido se aproxima de ambos os casos.

Para descrever o sistema de trabalho serão desenvolvidas algumas equações que explicam a matéria nesse estado, a primeira delas a ser comentada é a equação de Klein-Gordon que descreve o movimento de uma partícula ϕ sem spin.

Os operadores momento e o Hamiltoniano na mecânica quântica podem ser escritos na seguinte forma dentro do espaço de posições [7],

$$\hat{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}, \quad \hat{H} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$$

utilizando a equação para a energia relativística (12) e lembrando que o autovalor do Hamiltoniano pela equação de Schrödinger é a própria energia, obtém-se

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = (-\nabla^2 + m^2)\phi,$$

rearranjando os termos,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi = 0$$

utilizando a notação de covariantes e contravariantes chega-se na conhecida equação de Klein-Gordon,

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0. \quad (20)$$

A equação de Klein-Gordon foi uma das primeiras equações descobertas durante o começo da mecânica quântica de campos. Até hoje ela é muito útil para diversos problemas que envolvem partículas cujo o spin seja nulo. Porém, ao se calcular a densidade de probabilidade para uma solução dessa equação, ela pode resultar em um valor negativo, o que é absurdo. Felizmente para o caso de partículas sem spin, esse problema pode ser solucionado [8]. No entanto, para partículas com spin será necessária a utilização de outro tipo de equação, a equação de Dirac.

2.5 Equação de Dirac

A dedução da equação de Dirac é um tema muito complexo, ela depende de um conhecimento sobre teoria de grupos [5]: o grupo $SU(2)$ sobre spins, o grupo $SO(3)$ de rotações e o grupo de Lorentz da relatividade especial.

A referência [8] tem uma seção inteira que se trata da dedução e demonstração da equação de Dirac. Como é muito extenso ela não será demonstrada nesse trabalho mas será comentada de forma conceitual as idéias que trouxeram essa equação à tona.

A equação de Klein-Gordon (20) foi determinada a partir da equação de energia relativística e as noções de operadores da mecânica quântica. A equação de Dirac surge num contexto muito mais profundo. Como dito na seção anterior, a equação de Klein-Gordon inicialmente foi pensada para partículas sem spin, já a equação de Dirac foi pensada para partículas com spin semi-inteiro. Portanto, a dedução dessa equação nasce da necessidade de incluir o spin em um contexto relativístico.

Para tanto se compara o que foi feito para a mecânica quântica não relativística. É observado como o grupo que muda as coordenadas de um espinor (grupo $SU(2)$) com o grupo de rotações de coordenadas cartesianas (grupo $SO(3)$). Os operadores momento angular J_i podem gerar as matrizes de rotações em coordenadas cartesianas [5], agora as matrizes de Pauli por sua vez podem gerar as matrizes que mudam as coordenadas dos espinores, então se relaciona as três coordenadas cartesianas com as duas possíveis coordenadas de espinores, spin *up* ($\uparrow$) e spin *down* ($\downarrow$).

Em um contexto relativístico, não existe apenas mudança de coordenadas por rotação, mas existe também por transformações de Lorentz. A matriz transformação de Lorentz da equação (2) comprova isso, essa transformação define um grupo, o grupo de Lorentz, que pode ser gerado a partir do operador K_i . Este operador é o análogo a um momento angular para um *boost* [5], que pode ser entendido como um "ângulo imaginário puro" no espaço de Minkowski. Pela geração desse novo grupo, o espaço de espinor recebe dois espinores a mais, mas não é como se houvesse dois spins no espaço cartesiano e dois no espaço de Minkowski, é um amalgama de ambos os grupos que gera esses quatro spins.

A partir disso, pode-se convencionar partículas e antipartículas, pois dois pares de spin estão relacionados a uma partícula, e os outros dois restantes estão relacionados a antipartículas. Portanto, na dedução da equação de Dirac, se encontra naturalmente a

existência do Spin, por sua vez, a existência de antipartículas.

Com esse contexto finalmente têm-se a equação de Dirac,

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi = 0 \quad (21)$$

em que γ_μ são as famosas matrizes de Dirac,

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} ; \gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde I representa a matriz identidade e σ_i são as matrizes de Pauli [5]. É interessante reescrever as matrizes de Dirac em outras duas matrizes também, β e $\vec{\alpha}$

$$\gamma^0 = \beta; \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \quad (23)$$

dessa forma pode-se reescrever a equação (21) de outra maneira [1],

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\psi + m\beta\psi$$

o operador Hamiltoniano para a equação de Dirac é dado por $\hat{H} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$. Reescrevendo a equação de autoenergias, tem-se então⁹,

$$(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m\beta)\psi = E\psi \quad (24)$$

a solução dessa equação é dado por,

$$\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} a_{\vec{k}s} e^{-iEt} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} u(\vec{k})$$

onde $u(\vec{k})$ é o espinor relacionado ao momento k , $a_{\vec{k}s}$ é um operador relacionado a criação de partículas. Fazendo a substituição em (24), temos que

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m)u(\vec{k}) = Eu(\vec{k}).$$

Multiplicando por $(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m)$, que retorna para (12),

$$E^{(\pm)}(k) = \pm E(k) = \pm\sqrt{k^2 + m^2}$$

a equação acima é interessante pois demonstra que a equação de Dirac pode assumir dois valores diferentes de energia, sendo uma positiva e a outra negativa. Mas o que é uma energia negativa? Dirac chegou a conclusão que deveria ser uma partícula idêntica a

⁹Note que nesses argumentos não foram levados em conta um potencial, está sendo trabalhado uma partícula livre até o presente momento.

partícula de energia positiva, porém com carga contrária, de forma que essa partícula seria uma antipartícula da original, essa ideia inicialmente considerada absurda, posteriormente foi comprovada pela descoberta do pósitron, a antipartícula do elétron.

Pode-se escrever o espinor, como

$$u(\vec{k}) = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (25)$$

onde ξ e η na equação são matrizes colunas de duas componentes cada, os valores dessas matrizes podem ser encontrados analisando a equação de autovalores para o espinor, portanto a solução para uma partícula é

$$\psi^{(+)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} a_{\vec{k}s} e^{-iEt} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} u(\vec{k})$$

onde

$$u(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E(k) + m}{2E(k)}} \begin{bmatrix} \xi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{E(k)+m} \xi \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Existem duas possíveis partículas geradas pelos valores de ξ , $\xi^\uparrow = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e por $\xi^\downarrow = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, essas duas possibilidades é o que é interpretado como spin, $\vec{\sigma}$ é o vetor construído a partir das matrizes de Pauli σ_i .

Agora para uma antipartícula tem-se que a função de onda é dada por,

$$\psi^{(-)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} b_{\vec{k}s}^\dagger e^{iEt} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} v(\vec{k})$$

$b_{\vec{k}s}^\dagger$ é o operador de criação de antipartículas, já $v(\vec{k})$ é o espinor para a antipartícula, como em (25), que pode ser escrito como,

$$v(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E(k) + m}{2E(k)}} \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{E(k)+m} \xi \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (27)$$

onde em (27) temos que os valores de ξ podem ser $\xi^\uparrow$ ou $\xi^\downarrow$, novamente demonstrando a ideia de spin para antipartículas como para partículas.

A solução geral para a equação de Dirac para uma partícula livre é a superposição de ambas as soluções, $\psi^{(+)}$ e $\psi^{(-)}$, somando também todos os possíveis estados de spin [1],

$$\psi = \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[a_{\vec{k}s} e^{-iEt} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} u(\vec{k}) + b_{\vec{k}s}^\dagger e^{iEt} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} v(\vec{k}) \right]. \quad (28)$$

Os operadores de criação de partículas e de antipartículas funcionam de forma equivalente aos operadores $a^\dagger$ e a para um oscilador harmônico [7]. De maneira equivalente à

ideia de segunda quantização e de operadores de criação e aniquilação para elétrons [9], nesse contexto existe um estado de vácuo $|\Psi_0\rangle$ que, quando esses operadores atuam nesse estado ele recebe a partícula de momento $\vec{k}$ e spin s ($a_{\vec{k}s}$). O mesmo pode ser dito para uma antipartícula de momento $\vec{k}'$ e spin s' ($b_{\vec{k}'s'}^\dagger$). Note que, como são operadores, existem os adjuntos deles, no caso de partículas, o operador de destruição de partículas $a_{\vec{k}s}^\dagger$, e o operador de destruição de antipartículas $b_{\vec{k}s}$.

Como está sendo tratado de férmions, existe um momento máximo determinado como k_F , e além disso, eles devem seguir o princípio da exclusão de Pauli. Pensando nessas questões e usando como base o trabalho de [1], esses operadores seguem as seguintes propriedades de anti-comutação:

$$\{a_{\vec{k}'s'}, a_{\vec{k}s}^\dagger\} = \delta(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{s's} \quad (29)$$

$$\{b_{\vec{k}'s'}, b_{\vec{k}s}^\dagger\} = \delta(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{s's} \quad (30)$$

$$\{a_{\vec{k}'s'}, a_{\vec{k}s}\} = 0 \quad (31)$$

$$\{a_{\vec{k}'s'}, b_{\vec{k}s}\} = 0 \quad (32)$$

no caso da matéria nuclear, o estado de vácuo $|\Psi_0\rangle$ deve seguir as seguintes possibilidades:

$$a_{\vec{k}s} |\Psi_0\rangle = 0, \quad |\vec{k}| > k_F \quad (33)$$

$$a_{\vec{k}s}^\dagger |\Psi_0\rangle = 0, \quad |\vec{k}| < k_F \quad (34)$$

$$b_{\vec{k}s}^\dagger |\Psi_0\rangle = 0, \quad \forall |\vec{k}|. \quad (35)$$

2.6 Equação de Proca

Foram desenvolvidas equações que descrevem partículas de spin semi-inteiro (equação de Dirac), e partículas de spin 0 (equação de Klein-Gordon). Mas e para partículas de Spin 1?

O fóton tem spin igual a 1, as equações que descrevem o fóton são as equações de Maxwell dadas em (16), que no caso de inexistência de correntes, é escrito em termos de um potencial que pode ser calculado com (19). Portanto, pode ser descrita uma partícula de spin 1.

Porém, o fóton tem massa nula, não representa a grande maioria das partículas. Mas que equação descreveria uma partícula de spin 1 mas com massa ("um fóton massivo")?

Esse tipo de situação é descrita pela equação de Proca [8], que representa as equações de Maxwell exibidas com termos de massa¹⁰, ou seja,

¹⁰E também sem termos de corrente.

$$\begin{cases} a) F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ b) \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \end{cases} \quad (36)$$

caso tomado o divergente em $b)$ de (36),

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = 0$$

que caso $m^2 \neq 0$ encontra-se $\partial_\nu A^\nu = 0$ que é exatamente o calibre de Lorentz. Substituindo $a)$ em $b)$ encontra-se que,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) A^\mu = 0, \quad (37)$$

a equação (37) demonstra como o potencial funciona para partículas de massa, e portanto pode ser utilizado para descrever mésons massivos de spin 1.

2.7 Teoria de Campos

Agora que se sabe as equações que descrevem o movimento das partículas que serão tratadas, vamos deduzir o formalismo que consegue descrever a dinâmica do sistema. Em um sistema de partículas, a descrição faz o uso de uma lagrangiana L [10], a partir dessa lagrangiana, pode-se determinar as equações de movimento que governam o sistema.

Nesse projeto não é utilizada uma Lagrangiana de fato, mas sim uma densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}$ [11], a utilização dessa densidade surge do fato que não está sendo tratado de um sistema de muitas partículas discretas em si¹¹, mas de campos. A transformação de uma densidade lagrangiana para uma lagrangiana comum é,

$$L = \int \mathcal{L} d^3x$$

como a ação é descrita como a integral em relação ao tempo da lagrangiana, tem-se que,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int \mathcal{L} d^3x dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} d^4x.$$

Como se sabe, a dinâmica do sistema obedece a relação que minimiza a ação, portanto

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} d^4x = 0$$

como a densidade lagrangiana descreve a dinâmica do sistema, ela deve depender do

¹¹O trabalho em si trabalha com um sistema de muitos corpos, mas não é interessante tratar sua descrição como muitos corpos, faz mais sentido tratar as infinitas partículas como um "campo", isto é, um sistema contínuo.

campo¹² ϕ e também de suas derivadas $\partial_\mu \phi$, portanto, reescrevendo a variação em formas de diferenciais,

$$\int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] = 0$$

note que, devido ao teorema de Clairaut-Schwarz [5], $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta \phi)$. Já pela regra do produto,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi)$$

reescrevendo o segundo termo da integral utilizando ambas propriedades,

$$\int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right] = 0$$

para encontrar a equação diferencial que governa $\mathcal{L}$, deve-se resolver a integral. Primeiramente observe a integral à direita, uma integral de hiper-volume. Devido ao teorema do divergente (note que ∂_μ atua como um divergente), pode ser escrito como uma integral de hiper-superfície,

$$\int_{t_1}^{t_2} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) d^4x = \oint_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \cdot \partial^\mu \sigma$$

essa integral representa o fluxo que o campo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi$ provoca, evidentemente como não existe sorvedouros de Lagrangiana¹³ a solução dessa integral é zero, não sendo relevante na demonstração.

Observando agora o termo a direita,

$$\int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right] = 0$$

como $\delta \phi$ é infinitesimal mas $\neq 0$, implica então que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (38)$$

a equação (38) é conhecida como a equação de Euler-Lagrange para campos. A ideia principal é que em um modelo de campos, a densidade lagrangiana é modelada e a partir da equação de Euler-Lagrange. São obtidas então as equações que governam o movimento dos campos.

Agora serão vistas as constantes do movimento que governam o sistema. Tome a

¹²Na descrição aqui foi utilizado apenas um campo ϕ a dedução para vários campos é análoga, com um somatório sobre todos os campos.

¹³Não existe um ente que atue como princípio ou fim de uma lagrangiana, ela deve ser pensada como uma função contínua e monótona em todo o espaço.

derivada total de $\mathcal{L}$

$$d_\alpha \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\alpha \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\alpha (\partial_\mu \phi) + \partial_\alpha \mathcal{L}$$

utilizando a equação de (38) pode-se substituir o primeiro termo, fazendo o uso do teorema de Clairaut-Schwarz para comutar as derivadas tem-se,

$$d_\alpha \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \partial_\alpha \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\partial_\alpha \phi) + \partial_\alpha \mathcal{L}$$

utilizando a regra do produto,

$$d_\alpha \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\alpha \phi \right) + \partial_\alpha \mathcal{L}$$

considerando a homogeneidade no espaço-tempo¹⁴, isto é, $\partial_\alpha \mathcal{L} = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\alpha \phi \right) - d_\alpha \mathcal{L} &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\alpha \phi \right) - d_\mu \delta_\alpha^\mu \mathcal{L} = 0 \\ \implies d_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\alpha \phi - \delta_\alpha^\mu \mathcal{L} \right) &= 0 \end{aligned}$$

portanto se, o espaço-tempo for homogêneo, a grandeza entre parentes deve representar uma constante ao movimento (sua derivada é igual a zero). Essa grandeza é chamada de Tensor Energia-Momentum,

$$T_\alpha^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\alpha \phi - \delta_\alpha^\mu \mathcal{L}$$

normalmente é mais interessante denotar o tensor da forma contravariante, para tal só é necessário multiplicar o tensor pelo tensor métrica (11),

$$T^{\mu\nu} = g^{\nu\alpha} T_\alpha^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (39)$$

em forma covariante,

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

O tensor representa diferentes grandezas do sistema [1], por exemplo, a densidade hamiltoniana $\mathcal{H}$ é dada por,

$$\mathcal{H} = T_{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (40)$$

a partir do operador densidade hamiltoniana, é possível determinar a densidade de energia

¹⁴Por isso não existe sorvedouros de Lagrangiana, pois se existisse o espaço-tempo não seria homogêneo.

média do sistema.

Pode-se também definir a densidade de momento canônico a partir da densidade lagrangiana,

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

de forma que a densidade hamiltoniana pode ser escrita como,

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

que é a forma comumente vista da hamiltoniana, como uma transformada de Legendre da lagrangiana [10].

Para finalizar essa discussão será introduzido outra grandeza importante que pode ser calculada a partir do Tensor Energia-Momentum. A pressão que um campo pode exercer, é calculada como

$$p = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle \quad (41)$$

a utilização de grandezas desse tipo, as grandezas termodinâmicas, serão de muita importância no andamento do projeto por lidar com um sistema de muitos corpos. Para tanto a partir de agora, serão introduzidos conceitos de termodinâmica.

2.8 Termodinâmica

A termodinâmica é uma área do conhecimento cujo objetivo principal é a descrição macroscópica de um sistema de muitas partículas microscópicas. Num contexto clássico a importância principal está no fato que a mecânica clássica e o eletromagnetismo não conseguem explicar com satisfação um sistema desse tipo sem recorrer à termodinâmica.

Isso ocorre pois as grandezas ditas como não observáveis (medidas apenas através da termodinâmica), começam aparecer quando existe um sistema de muitos corpos. As leis da termodinâmica nesse contexto tem o objetivo de explicar essas pontas soltas que não são explicadas por demais teorias clássicas.

A primeira lei da termodinâmica é conhecida como princípio da conservação de energia,

$$dU = TdS - pdV + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} dN_{\alpha} \quad (42)$$

o diferencial exato dU é chamado de variação de energia interna. O termo TdS é chamado de calor e é uma variável não observável que só pode ser representado pela termodinâmica, onde T é chamado de temperatura e dS é a variação de entropia. Já $-pdV$ é o termo de trabalho mecânico que existe devido às leis da mecânica clássica, p é a pressão gerada pelo sistema e dV é a variação de volume. Já o termo $\mu_{\alpha} dN_{\alpha}$, se refere ao trabalho químico, relacionado às interações químicas, onde μ_{α} é o potencial químico do α -ésimo átomo (molécula ou partícula), e dN_{α} é a variação da quantidade do α -ésimo átomo (molécula ou

partícula).

A equação (42) é interessante pois, a partir dela, é possível determinar o que é chamado de estado de equilíbrio. Caso um sistema termodinâmico interaja com outro, suas propriedades intensivas irão se modificar até que seja determinado um estado em que as propriedades do sistema saturem, isto é, se tornem constantes. Experimentalmente, é determinado que o valor encontrado para o equilíbrio termodinâmico deve ser o que minimiza a energia interna U , portanto o valor para que ambos os sistemas encontrem o equilíbrio se dá quando $dU = 0$.

Já a segunda lei da termodinâmica afirma sumariamente que a grandeza S (a entropia), em um sistema termodinâmico cujo os sub-sistemas estão interagindo, deve ter sempre uma variação crescente ou igual a zero,

$$dS \geq 0 \quad (43)$$

um dos postulados da definição de entropia é que ela deve ser crescente monotonicamente com a energia [12], portanto a definição de equilíbrio termodinâmico que anteriormente foi calculado com a minimização da energia, pode ser agora entendido como a maximização da entropia. É claro nesse caso utilizando (42) na forma entrópica (apenas isole dS na equação anterior),

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \sum_{\alpha} \frac{\mu_{\alpha}}{T}dN_{\alpha}. \quad (44)$$

Potenciais Termodinâmicos

Até agora os sistemas termodinâmicos são caracterizados por grandezas intensivas e extensivas, e essas grandezas se relacionam através das leis (42) e (43), enquanto os subsistemas se transformam até atingir o equilíbrio.

Porém, como dito anteriormente, a equação (42) pode ser reescrita em termos da entropia (44), e a escolha de qual equação utilizar cabe ao sistema e a facilidade de resolver esse sistema por esse método.

Pensando nesse método, foi criado o que é chamado de potenciais termodinâmicos, que são outras formas de representar a equação (42). Para determinar esses potenciais são feitas as transformações de Legendre [12]. Serão discutidos brevemente alguns dos potenciais mais importantes para termodinâmica e em especial para esse trabalho.

Considerando um reservatório de temperatura ¹⁵ em contato com o sistema de estudo, observando o diferencial

$$d(TS) = TdS + SdT$$

como a temperatura é constante $dT = 0$, portanto $d(TS) = TdS$, utilizando o princípio

¹⁵Isto é um sistema muito maior em contato com o sistema de estudo, de forma que a troca de calor mantenha a temperatura do sistema de estudo como a temperatura do reservatório, ou seja um valor constante

de minimização de energia e maximização da entropia e a equação (42), obtém-se que

$$dU - TdS = d(U - TS) = 0$$

portanto existe uma grandeza que é minimizada nesse tipo de sistema. Será chamada de energia livre de Helmholtz, que será escrita como F , considerando a relação de Euler da termodinâmica [12],

$$F = U - TS = -pV + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} N_{\alpha} \quad (45)$$

já o diferencial (no caso geral com a temperatura não constante) será dado por,

$$dF = dU - d(TS) = -SdT - pdV + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} dN_{\alpha}. \quad (46)$$

Para um reservatório de pressão¹⁶ em contato com o sistema de estudo, temos o diferencial

$$d(pV) = pdV + Vdp$$

como a pressão é constante, $dp = 0$, portanto $d(pV) = pdV$. Pode-se utilizar o princípio de minimização de energia, considerando que no equilíbrio volume deve se tornar constante e a equação (42), obtém-se

$$dU + pdV = d(U + pV) = 0$$

portanto, existe uma grandeza que é minimizada nesse tipo de sistema e será chamada de Entalpia (H), considerando a relação de Euler da termodinâmica [12],

$$H = U + pV = TS + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} N_{\alpha} \quad (47)$$

já o diferencial (no caso geral com a pressão não constantes) será dado por,

$$dH = dU + d(pV) = TdS + Vdp + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} dN_{\alpha}. \quad (48)$$

Utilizando um caso que combine tanto o caso da energia de Helmholtz e a entalpia, obtem-se a energia livre de Gibbs,

$$G = U - TS + pV = \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} N_{\alpha} \quad (49)$$

¹⁶Isto é, um sistema muito maior em contato com o sistema de estudo, de forma que a troca de trabalho mantenha a pressão do sistema de estudo como o valor da pressão do reservatório, ou seja um valor constante.

já o diferencial será dado por,

$$dG = dU - d(TS) + d(pV) = -SdT + Vdp + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} dN_{\alpha}. \quad (50)$$

O potencial de fato mais importante para este trabalho é o grande potencial termodinâmico¹⁷, também conhecido como o potencial de Landau. Considere um reservatório de potencial químico e de temperatura, mantendo sempre T e μ constantes¹⁸. Para este caso, temos que a seguinte grandeza é minimizada,

$$d(U - TS - \mu N) = 0$$

Portanto, definimos o grande potencial termodinâmico (Φ),

$$\Phi = U - TS - \mu N = -pV \quad (51)$$

o diferencial relacionado ao grande potencial termodinâmico é,

$$d\Phi = dU - d(TS) - d(\mu N) = -SdT - pdV - Nd\mu. \quad (52)$$

Esse potencial será muito útil na descrição do sistema de um gás de férmions, que por sua vez, corresponde ao limite clássico da matéria nuclear que será estudada [1].

2.9 Mecânica Estatística

O problema da termodinâmica, é que para determinar as equações de estado que relacionam as grandezas extensivas e intensivas, necessariamente precisa-se de equações que foram determinadas experimentalmente. No contexto de física teórica isso não é muito interessante, pois para qualquer sistema idealizado não é possível determinar as equações termodinâmicas que o descrevem.

O ideal seria que, a partir do funcionamento microscópico, inferíssemos o funcionamento macroscópico. Para solucionar esse problema, foi criada a mecânica estatística, cuja ideia é exatamente essa, a partir do microscópico determinar a termodinâmica do sistema.

Porém como imaginado, o micro é extremamente complexo, devido à grande quantidade de partículas, portanto, será necessário utilizar conceitos estatísticos, dado que a média dos eventos permite entender o sistema como um todo.

Para conseguir descrever com facilidade esses tipos de sistemas físicos, serão necessárias algumas considerações [13]:

1. Especificações do *ensemble* do sistema (ou seja a especificação dos estados micros-

¹⁷Relacionado com ensemble grande canônico da mecânica estatística.

¹⁸Nesse caso estou tomando um sistema com uma única substância $\alpha = 1$.

cópicos do sistema). Essas especificações serão necessárias para determinar a distribuições de partículas;

2. O postulado fundamental da mecânica estatística, diz que um sistema em equilíbrio não tem nenhuma preferência por um micro-estado específico, de forma que todos os micro-estados possíveis são igualmente prováveis (desde que o número de micro-estados seja muito grande), isso permite que a função densidade de probabilidade que é uma grandeza discreta, possa ser considerada contínua, facilitando o processo;
3. Estabelecimento de uma conexão com a termodinâmica, transformando os conceitos estatísticos microscópicos na conhecida teoria termodinâmica macroscópica;

Para determinar as especificações Ω do sistema, existem duas formas. Na mecânica quântica devido a quantização de energia a probabilidade deve ser discreta, não contínua. E portanto pode ser determinada apenas com as equações básicas da probabilidade (como arranjo e combinação). Já no contexto da mecânica clássica será necessário obter a área (volume ou hiper-volume) de um espaço de fases que descreve o sistema proposto.

A conexão com a termodinâmica é estabelecida com a função da entropia definida em (43). A partir da entropia, poderão ser determinado demais equações que descrevem o sistema. A fim de determinar a entropia fazendo uso dos micro-estados (Ω), define-se a equação¹⁹ [14],

$$S = \ln \Omega. \quad (53)$$

Existem alguns *ensembles* muito importantes e que servem como base para descrição de sistemas termodinâmicos mais complexos, como o *ensemble* micro-canônico, o *ensemble* canônico e o mais importante para o trabalho: o *ensemble* grande-canônico.

2.10 Ensemble Grande-Canônico

Considere um sistema em contato com um reservatório termodinâmico que troca calor e partículas, porém mantendo sempre a temperatura T e o potencial químico μ constantes. A energia do sistema deve ser U_0 e o número de partículas N_0 . Com base no postulado fundamental da mecânica estatística [13], a probabilidade de ser encontrado o estado S dentro de todos os j microestados é dado por,

$$P_j = c\Omega(U_0 - U_j, N_0 - N_j)$$

onde c é uma constante de normalização e Ω é o número de estados microscópicos acessíveis.

¹⁹Aqui foi escolhido o sistema de unidades naturais onde $k_B = 1$ e portanto não precisa ser levado em consideração nessa equação, caso não seja utilizado unidades naturais $S = k_B \ln \Omega$.

Expandindo em $\ln$ e em série de potências obtém-se que

$$\ln P_j = A + \left[\frac{\partial \ln \Omega}{\partial U} \right]_{U_0, N_0} (-U_j) + \left[\frac{\partial \ln \Omega}{\partial N} \right]_{U_0, N_0} (-N_j) + \dots$$

onde $A = \ln c$, lembrando da definição estatística da entropia (53), portanto,

$$\frac{\partial \ln \Omega}{\partial U} = \frac{1}{T} \quad e \quad \frac{\partial \ln \Omega}{\partial N} = -\frac{\mu}{T}$$

aplicando esses termos na expansão e desprezando demais termos que são muito pequenos,

$$\ln P_j = A - \frac{U_j}{T} + \frac{\mu N_j}{T}$$

portanto chega-se finalmente que ($c = 1/Z_G$),

$$P_j = \frac{1}{Z_G} e^{-\frac{U_j - \mu N_j}{T}},$$

a função de grande partição Z_G é dado por

$$Z_G = \sum_j e^{-\frac{U_j - \mu N_j}{T}}, \quad (54)$$

portanto, a equação (54) é uma forma de normalizar a função probabilidade.

Observando a equação (54), ela pode ser reescrita como

$$Z_G = \sum_{N_j=0}^{N_0} e^{\frac{\mu N_j}{T}} \sum_{U_j=0}^{U_0} e^{-\frac{U_j}{T}},$$

o último termo é também chamado de função de partição (Z) [15], então

$$Z_G = \sum_{N_j=0}^{N_0} \exp \left\{ \frac{\mu N_j + T \ln Z}{T} \right\}$$

como demais termos são considerados muito pequenos podemos aproximar para o termo máximo

$$Z_G = \exp \left\{ -\frac{-\mu N_0 - T \ln Z}{T} \right\}$$

o termo $-T \ln Z$ pode ser visto como a própria energia livre de Helmholtz (45) [13], então

$$Z_G = \exp \left\{ -\frac{F - \mu N_0}{T} \right\}$$

pode-se ver que o termo $F - \mu N_0$ é na realidade o grande potencial termodinâmico Φ

(51). Finalmente, pode-se obter

$$\Phi = -T \ln Z_G. \quad (55)$$

Portanto, a conexão com a termodinâmica é feita e pode-se calcular a grande função de partição a partir dos sistemas microscópicos e da equação (54). E com esses resultados calcula-se o grande potencial termodinâmico através da equação (55), e a partir da equação (51) e (52) determina-se as grandezas termodinâmicas.

Em um caso quântico, o somatório em (54) pode ser substituído pelo traço da função exponencial [16],

$$Z_G = \text{Tr} \exp \left[-\frac{\hat{H} - \mu \hat{N}}{T} \right] \quad (56)$$

note que como o valor médio do operador hamiltoniano é a energia interna e o valor médio do operador número é o número de partículas, ambas as formas de se escrever são válidas.

2.11 A distribuição de Fermi-Dirac

Um sistema quântico de N partículas (um gás), pode ser descrito pela seguinte função de onda,

$$\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N)$$

onde q_i representa as coordenadas generalizadas da i -ésima partícula, ψ obedece a equação de Schrödinger. Uma propriedade interessante de sistemas quânticos de Férmions, isto é, partículas de spin semi-inteiro, é que essa função de onda deve obedecer a propriedade de anti-simetria,

$$\psi(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots, q_N) = -\psi(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_i, \dots, q_N).$$

Pelo princípio da exclusão de Fermi, não deve haver duas partículas com o mesmo estado quântico, a estatística relacionada a esse tipo de probabilidade é chamada de estatística de Fermi-Dirac.

Devido à simetria da função de onda, o sistema pode ser caracterizado pelo número de partículas n_j , em que j representa o estado em que a partícula está. É evidente que, que para férmions, n_j é 0 ou 1. O número total de partículas N , deve-se somar todos os j estados dos n_j estados,

$$N = \sum_j n_j \quad (57)$$

assim, para determinar a energia total U por exemplo, é necessário somar a quantidade u_j vezes n_j onde u_j é a energia de cada estado,

$$U = \sum_j u_j n_j. \quad (58)$$

Considere o ensemble grande canônico, a grande função de partição vista na equação (54), reescrevendo em função de (57) e (58),

$$Z_G = \sum_{n_1, n_2, \dots} \exp \left\{ -\frac{u_1 n_1 + u_2 n_2 + \dots - \mu n_1 - \mu n_2 - \dots}{T} \right\} = \sum_{n_1, n_2, \dots} \exp \left\{ -\frac{(u_1 - \mu) n_1 + (u_2 - \mu) n_2 + \dots}{T} \right\}$$

separando em um produtório,

$$Z_G = \prod_j \left[\sum_n \exp \left\{ -\frac{(u_j - \mu) n}{T} \right\} \right].$$

Utilizando a definição estatística de grande potencial termodinâmico (55), pode se determinar o número médio de partículas por estado,

$$\langle n_j \rangle = -T \frac{\partial}{\partial u_j} \ln Z_G. \quad (59)$$

Como n só pode ser 0 ou 1,

$$\sum_{n=0}^1 \exp \left\{ -\frac{(u_j - \mu) n}{T} \right\} = 1 + \exp \left\{ -\frac{(u_j - \mu)}{T} \right\}$$

aplicando esse resultado em (59) e na grande função de partição Z_G ,

$$\langle n_j \rangle = \frac{1}{\exp \{ (u_j - \mu)/T \} + 1}. \quad (60)$$

A equação (60) é conhecido como distribuição de Fermi-Dirac, que será muito útil na descrição do gás de Férmions. A representação gráfica pode ser vista na figura 2, para temperatura tendendo a zero, a distribuição de Fermi-Dirac se aproxima de uma função degrau.

2.12 Gás Ideal de Fermi

Considere a equação de Schrödinger independente do tempo²⁰,

$$\left[-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi = u \psi$$

²⁰Será utilizado aqui brevemente uma mecânica quântica não relativística.

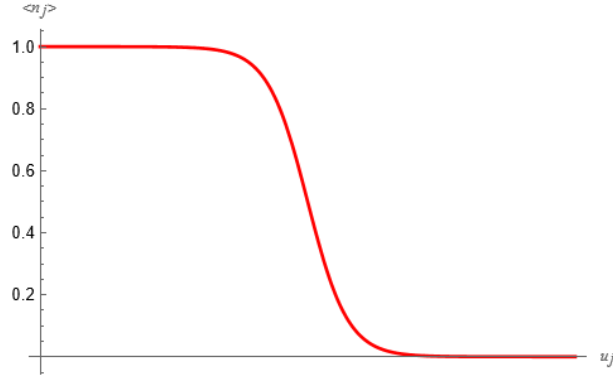


Figura 2: Representação gráfica da distribuição de Fermi-Dirac, valores genéricos para a energia e temperatura.

suponha que o gás esteja preso em um poço de potencial, de forma que o potencial possa ser descrito como,

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ \infty, & x > a, y > a, z > a \end{cases}$$

portanto, nos contornos ($x = 0$ ou $x = a$, $y = 0$ ou $y = a$, $z = 0$ ou $z = a$), $\psi = 0$, aplicando os contornos e o valor do potencial tem-se que,

$$\nabla^2 \psi = -2mu \psi \implies \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -2mu \psi$$

aplicando o método de separação de variáveis,

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

solucionando a EDP

$$Y(y)Z(z)\frac{d^2 X}{dx^2} + X(x)Z(z)\frac{d^2 Y}{dy^2} + X(x)Y(y)\frac{d^2 Z}{dz^2} = -2mu X(x)Y(y)Z(z)$$

dividindo todos os termos por ψ ,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -2mu \implies \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\left(2mu + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}\right)$$

a única forma de solucionar essa EDP é igualar ambos os lados a uma constante, nesse caso será chamada de α , portanto

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -(2mu + \alpha) Z$$

essa EDO é conhecida como a equação do oscilador harmônico, que tem solução conhecida

$$Z(z) = A_z \sin \left(z \sqrt{2mu + \alpha} \right) + B_z \cos \left(z \sqrt{2mu + \alpha} \right)$$

aplicando as condições de contorno ($z = 0 \implies Z = 0$ e $z = a \implies Z = 0$), portanto $B_z = 0$ e $\sqrt{2mE + \alpha} = n_z \pi / a$, portanto

$$Z(z) = A_z \sin \frac{n_z \pi z}{a}$$

e claramente

$$\alpha = \frac{n_z^2 \pi^2}{a^2} - 2mu$$

aplicando o valor de α na EDP para encontrar X e Y ,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{n_z^2 \pi^2}{a^2} - 2mu$$

tomando $1/Y \cdot d^2 Y / dy^2 = \beta$, uma constante

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = - \left(2mu - \frac{n_z^2 \pi^2}{a^2} + \beta \right) X$$

a solução analogamente,

$$X(x) = A_x \sin \left(x \sqrt{2mu - \frac{n_z^2 \pi^2}{a^2} + \beta} \right) + B_x \cos \left(x \sqrt{2mu - \frac{n_z^2 \pi^2}{a^2} + \beta} \right)$$

aplicando as condições de contorno ($x = 0 \implies X = 0$ e $x = a \implies X = 0$), então $B_x = 0$ e $\sqrt{2mu - \frac{n_z^2 \pi^2}{a^2} + \beta} = n_x \pi / a$, portanto

$$X(x) = A_x \sin \left(\frac{n_x \pi x}{a} \right)$$

e

$$\beta = \frac{n_z^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n_x^2 \pi^2}{a^2} - 2mu$$

finalmente tomando $1/Y \cdot d^2 Y / dy^2 = \beta$,

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = - \left(2mu - \frac{n_z^2 \pi^2}{a^2} - \frac{n_x^2 \pi^2}{a^2} \right) Y$$

cujas a solução já foi vista,

$$Y(y) = A_y \sin \left(y \sqrt{2mu - \frac{n_z^2 \pi^2}{a^2} - \frac{n_x^2 \pi^2}{a^2}} \right) + B_y \cos \left(y \sqrt{2mu - \frac{n_z^2 \pi^2}{a^2} - \frac{n_x^2 \pi^2}{a^2}} \right)$$

aplicando as condições de contorno ($y = 0 \implies Y = 0$ e $y = a \implies Y = 0$), então $B_y = 0$ e $\sqrt{2mu - \frac{n_z^2\pi^2}{a^2} - \frac{n_x^2\pi^2}{a^2}} = n_y\pi/a$, portanto

$$Y(y) = A_y \sin\left(\frac{n_y\pi y}{a}\right)$$

e a relação entre os modos normais e a energia pode ser determinada,

$$u = \frac{n_z^2\pi^2}{2ma^2} + \frac{n_x^2\pi^2}{2ma^2} + \frac{n_y^2\pi^2}{2ma^2}. \quad (61)$$

Finalmente a solução geral pode ser determinada. Reescrevendo o produto de todas as constantes como A , obtém-se então,

$$\psi(x, y, z) = A \sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_y\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n_z\pi z}{a}\right)$$

utilizando o critério de normalização,

$$\int |\psi|^2 d^3x = A^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right) dx \int_0^a \sin^2\left(\frac{n_y\pi y}{a}\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{n_z\pi z}{a}\right) dz = 1$$

a solução de cada integral pode ser verificada e é $\frac{a}{2}$, então

$$A^2 \left(\frac{a}{2}\right)^3 = 1 \implies A = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2}$$

portanto a solução geral e normalizada,

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_y\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n_z\pi z}{a}\right).$$

no caso unidimensional o quadrado da função de onda que representa a densidade de probabilidade pode ser visto na figura 3. Note como diferentes modos normais interferem no período da onda, e logo em sua energia total.

Utilizando a notação de vetor de onda (em que no presente texto é equivalente ao

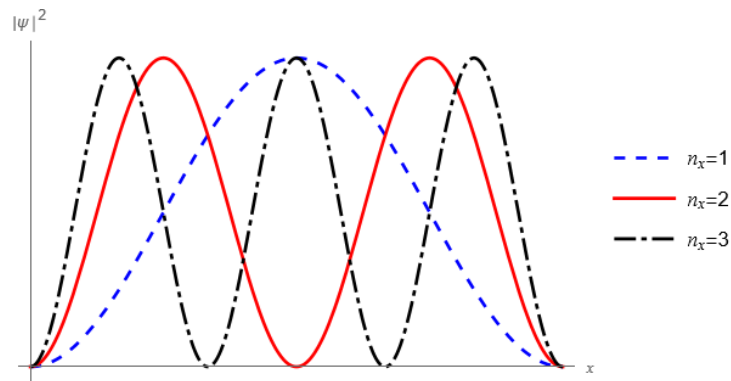


Figura 3: Representação da probabilidade do gás de Fermi para diferentes modos normais.

momento), pode-se reescrever

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = \left(\frac{n_x \pi}{a}, \frac{n_y \pi}{a}, \frac{n_z \pi}{a} \right) \quad (62)$$

portanto a partir de (62) pode-se determinar a partir do momento os valores dos modos normais

$$n_j = \frac{a}{\pi} k_j$$

então a diferencial de dn_j pode ser escrita como,

$$dn_j = \frac{a}{\pi} dk_j$$

portanto, o volume do espaço de modos (que representam em nosso caso o número de estados possíveis) pode ser escrito como,

$$dn_x dn_y dn_z = \frac{a^3}{\pi^3} dk_x dk_y dk_z$$

como os valores $n_j > 0$, então só será necessário metade dos valores para cada dn_j , generalizando a^3 , para qualquer volume V , obtém-se,

$$\rho_k d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k \quad (63)$$

onde ρ_k representa a densidade de estados. A ideia é utilizar a expressão (63) para obter o número de partículas como uma função contínua, ao invés de discreta.

Por exemplo, considerando a estatística de Fermi-Dirac (60), pode-se determinar o número de partículas B a partir de,

$$B = \sum_j \langle n_j \rangle$$

o problema na seguinte equação é que ela é feita sobre uma soma discreta, o que com certeza é muito trabalhoso pois seria necessário saber todos os possíveis estados. Transformando essa soma discreta em uma integral utilizando a equação (63),

$$B = \int \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\gamma}{\exp\{(u(k) - \mu)/T\} + 1} d^3k$$

onde γ representa a multiplicidade do spin, note que devido a equação (61) e a (62), a energia é esfericamente distribuída no espaço de momento, de forma que pode-se aplicar coordenadas esféricas na solução da integral, e $u(k) = k^2/2m$. Portanto a solução para o número de partículas:

$$B = \gamma \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{\exp\{(k^2/2m - \mu)/T\} + 1} dk. \quad (64)$$

O mesmo pode ser feito para a energia E ,

$$E = \sum_j \langle n_j \rangle u_j$$

transformando a soma discreta em uma integral contínua,

$$E = \gamma \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4/2m}{\exp\{(k^2/2m - \mu)/T\} + 1} dk. \quad (65)$$

Essas equações são um modelo inicial da matéria nuclear, que para quantidades pequenas de prótons e nêutrons, razoavelmente serve. Para quantidades maiores de energia será necessário o estudo do modelo de Walecka.

Para o caso das grandezas em termos do volume, a equação (64) e a equação (65) podem ser escritas como a densidade bariônica (ρ_B) e densidade de energia ($\mathcal{E}$),

$$\rho_B = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{\exp\{(k^2/2m - \mu)/T\} + 1} dk, \quad (66)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2m} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{\exp\{(k^2/2m - \mu)/T\} + 1} dk. \quad (67)$$

3 Matéria Nuclear a Temperatura igual a Zero

Agora após serem retomados os principais conceitos relacionados a teoria de campos e termodinâmica, será falado do modelo de Walecka em si.

Como dito anteriormente, o modelo descreve a interação nuclear em um sistema de infinitos núcleons. As partículas que intermedeiam essa interação são: um méson de spin 0 e portanto uma partícula de campo escalar (σ), e um méson com spin 1 e portanto uma partícula de campo vetorial (ω_μ). A parte vetorial é responsável pela repulsão entre os férmions ao estarem muito perto um dos outros, já a parte escalar é responsável pela atração entre os núcleons.

Entender como funciona um sistema desse tipo é o principal objetivo desta seção. Nesse momento será considerado um sistema com temperatura $T = 0$, de forma que as equações de movimento podem ser determinadas com uma densidade Lagrangiana, e a partir dessas equações de movimento, será determinar a forma do tensor energia-momentum. Em mãos desse tensor é possível calcular a densidade de energia ($\mathcal{E}$) e a pressão (p).

Para calcular o valor da densidade de energia do sistema temos que utilizar o valor 00 do tensor (39), portanto

$$\mathcal{E} = \langle T_{00} \rangle$$

já para calcular a pressão usando a equação (41),

$$p = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle$$

agora para determinar essas quantidades termodinâmicas será necessário o cálculo das equações de movimento.

3.1 Equações de Movimento

Para obter a densidade lagrangiana total do sistema de Walecka, deve-se obter as equações do movimento individual de cada campo, assim como as equações associadas às trocas mesônicas ($N - N$).

A interação escalar pode ser representada pela seguinte densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{N\sigma} = \bar{\psi}\sigma\psi$$

já a interação vetorial pode ser representada pela seguinte densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{N\omega} = \bar{\psi}\gamma_\mu\omega^\mu\psi$$

os núcleons são férmions, isto é, partículas de spin 1/2, e assim obedecem a equação de

Dirac (21) e a densidade Lagrangiana é a de Dirac [8],

$$\mathcal{L}_N = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi$$

os mésons escalares σ tem spin 0, então eles obedecerão a equação de Klein-Gordon (20), e portanto será utilizada a lagrangiana de Klein-Gordon [8],

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2)$$

já os méson vetorial ω_μ tem spin 1 e portanto é uma partícula que obedece a equação de Proca (36), e sua densidade Lagrangiana será a de Proca [8],

$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu.$$

Agora para determinar a densidade Lagrangiana total, deve-se somar todas as equações já descritas, portanto a densidade total é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_\omega\omega_\mu) - (M - g_\sigma\sigma)]\psi + \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu \end{aligned} \quad (68)$$

a partir da equação (68) e da equação (39) pode-se calcular o tensor Energia-Momentum e assim obter as equações de estado do sistema.

3.2 Método Variacional

Ao ser utilizada a equação (68) e aplicada a equação de Euler-Lagrange (38), para o campo $\bar{\psi}$, obtém-se

$$[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_\omega\omega_\mu) - (M - g_\sigma\sigma)]\psi = 0 \quad (69)$$

a equação (69) é uma equação de Dirac com termos a mais relacionados aos campos (vetorial e escalar), agora para o campo σ ,

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\sigma^2)\sigma = g_\sigma\bar{\psi}\psi \quad (70)$$

na equação (70) tem-se uma equação de Klein-Gordon com uma fonte escalar ($\bar{\psi}\psi$), já para o méson vetorial (ω_μ),

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2\omega^\nu = g_\omega\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (71)$$

finalmente aqui temos na equação (71) uma equação de Proca com uma fonte vetorial ($\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$). Essa fonte vetorial é uma corrente de probabilidade [1], que será definida como corrente bariônica,

$$J_B^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (72)$$

essa quantidade é conservada, de forma que

$$\partial_\mu J_B^\mu = 0.$$

Calculando o tensor Energia-Momentum para a matéria nuclear (68) obtém-se que,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[-\partial_\alpha \sigma \partial^\alpha \sigma + m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - m_\omega^2 \omega_\alpha \omega^\alpha \right] g_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\nu \psi + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \partial_\nu \omega^\alpha F_{\alpha\mu}. \quad (73)$$

3.3 Campo Médio

As equações apresentadas até agora têm alguns problemas relacionados à dificuldade de encontrar uma solução própria, são todas equações não lineares de difícil resolução. Uma forma de resolver esse tipo de problema é considerar sistemas de alta densidade bariônica. Nesse estado os, campos mesônicos são aproximadamente constantes.

Fazendo a aproximação de campo médio obtém-se,

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle = \sigma_0$$

$$\omega_\mu \rightarrow \langle \omega_\mu \rangle = \delta_{\mu 0} \omega_0$$

σ_0 e ω_0 são constantes e não dependem da posição e do tempo. Só é interessante a parte temporal de ω_μ , pois em um sistema uniforme e homogêneo não existe uma direção preferencial no espaço (isotropia).

A equação (70) no campo médio torna-se,

$$m_\sigma^2 \sigma_0 = g_\sigma \langle \bar{\psi}\psi \rangle = g_\sigma \rho_\sigma \quad (74)$$

onde é definido a quantidade densidade escalar (ρ_σ), já a equação (71),

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \langle \bar{\psi}\gamma^0\psi \rangle = g_\omega \langle \psi^\dagger\psi \rangle = g_\omega \rho_B \quad (75)$$

aqui é definido a densidade bariônica ($\rho_B = J_B^0 = B/V$).

Já para a equação (69),

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 \omega_0 - (M - g_\sigma \sigma_0)]\psi = 0 \quad (76)$$

definindo a massa aparente $M^* = M - g_\sigma \sigma_0$, em analogia a solução da equação de Dirac (24) obtém-se,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} - g_\omega\omega_0\psi = (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta M^*)\psi$$

usando o método de separação de variáveis,

$$\psi = \chi(\vec{x})\tau(t)$$

substituindo na equação, e separando as variáveis obtém-se que,

$$\frac{1}{\tau} \left(i\frac{d}{dt} - g_\omega\omega_0 \right) \tau = \frac{1}{\chi} \left[-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta M^* \right] \chi$$

podemos igualar ambas as equações a uma constante, que nesse caso vai ser denotada como²¹ E^* ,

$$\left(i\frac{d}{dt} - g_\omega\omega_0 \right) \tau = E^* \tau$$

$$\left[-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta M^* \right] \chi = E^* \chi.$$

Então, pode-se determinar as equações de movimento para τ e χ ,

$$\tau(t) = \exp[-i(E^* + g_\omega\omega_0)t] \quad (77)$$

$$\chi_\lambda^{(+)}(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} a_{k\lambda} u_\lambda(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (78)$$

$$\chi_\lambda^{(-)}(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} b_{k\lambda}^\dagger v_\lambda(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (79)$$

o λ representa em (78) e em (79) o spin da partícula e da antipartícula respectivamente, já u_λ e v_λ são o espinor da partícula e da antipartícula respectivamente, $a_{k\lambda}$ é um operador de criação de partículas (logo $a_{k\lambda}^\dagger$ é de destruição de partículas) já $b_{k\lambda}^\dagger$ é um operador de criação de antipartículas (já $b_{k\lambda}$ é o de criação), em analogia ao que foi feito em (28).

Substituindo as soluções de χ em na equação de autovalores,

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*] u_\lambda(\vec{k}) = E^* u_\lambda(\vec{k})$$

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{k} - \beta M^*] v_\lambda(\vec{k}) = -E^* v_\lambda(\vec{k})$$

aplicando duas vezes o operador,

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*]^2 u_\lambda(\vec{k}) = (E^*)^2 u_\lambda(\vec{k})$$

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{k} - \beta M^*]^2 v_\lambda(\vec{k}) = (E^*)^2 v_\lambda(\vec{k})$$

²¹A escolha da notação E^* representa a energia aparente do sistema, essa escolha é devido como os campos modificam a energia do sistema a energia total na realidade é $E^* + g_\omega\omega_0$, esse termo estará relacionado com o pacote de onda propagado.

utilizando os valores das matrizes α e β na equação (23), encontra-se,

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*]^2 = [\vec{\alpha} \cdot \vec{k} - \beta M^*]^2 = |\vec{k}|^2 + (M^*)^2$$

portanto,

$$E^* = \pm \sqrt{k^2 + (M^*)^2}. \quad (80)$$

Podemos adotar qualquer sinal para o valor de E^* , por convenção utilizaremos o valor positivo. Note a similaridade com a equação (12), é de fato curioso, como se M^* fosse uma massa generalizada para os núcleons devido a ação dos campos bosônicos, $\vec{k}$ seria análogo ao momentum dos núcleons, assim como a constante E^* seria análogo à energia dos núcleons.

Portanto, a solução para as partículas é

$$\psi_\lambda^{(+)}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} a_{k\lambda} u_\lambda(\vec{k}) e^{i[\vec{k} \cdot \vec{x} - (E^* + g_\omega \omega_0)t]}$$

já para antipartículas,

$$\psi_\lambda^{(-)}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} b_{k\lambda}^\dagger v_\lambda(\vec{k}) e^{-i[\vec{k} \cdot \vec{x} - (E^* - g_\omega \omega_0)t]}$$

uma solução generalizada para a matéria nuclear pode ser obtida somando ambas as soluções, somando todos os espaços possíveis de spin λ assim como em (28),

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(a_{k\lambda} u_\lambda(\vec{k}) e^{i[\vec{k} \cdot \vec{x} - (E^* + g_\omega \omega_0)t]} + b_{k\lambda}^\dagger v_\lambda(\vec{k}) e^{-i[\vec{k} \cdot \vec{x} - (E^* - g_\omega \omega_0)t]} \right) \quad (81)$$

a equação (81) representa o campo para os férmions da matéria nuclear. Com os valores de ψ pode-se determinar a densidade ρ_σ e ρ_B .

3.4 Cálculo das Densidades

Relembrando as relações de anti-comutação para os operadores de criação e destruição de partículas e antipartículas (29-32),

$$\{a_{k',\lambda'}, a_{k,\lambda}^\dagger\} = a_{k',\lambda'} a_{k,\lambda}^\dagger + a_{k,\lambda}^\dagger a_{k',\lambda'} = \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{\lambda'\lambda}$$

$$\{b_{k',\lambda'}, b_{k,\lambda}^\dagger\} = b_{k',\lambda'} b_{k,\lambda}^\dagger + b_{k,\lambda}^\dagger b_{k',\lambda'} = \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{\lambda'\lambda}$$

$$\{b_{k',\lambda'}, b_{k,\lambda}\} = b_{k',\lambda'} b_{k,\lambda} + b_{k,\lambda} b_{k',\lambda'} = 0$$

$$\{a_{k',\lambda'}, b_{k,\lambda}\} = a_{k',\lambda'} b_{k,\lambda} + b_{k,\lambda} a_{k',\lambda'} = 0.$$

Todos os núcleons devem preencher os níveis de momentos de estado $\vec{k}$, até um momento máximo k_F , denominado momento de Fermi. Portanto as relações ao estado fun-

damental da matéria nuclear (Ψ_0) são dados pelas equações (33-35),

$$a_{k,\lambda} |\Psi_0\rangle = 0 \quad |\vec{k}| > k_F$$

$$a_{k,\lambda}^\dagger |\Psi_0\rangle = 0 \quad |\vec{k}| < k_F$$

$$b_{k,\lambda}^\dagger |\Psi_0\rangle = 0 \quad \forall |\vec{k}|$$

Utilizando esses operadores, e a definição de ψ encontrada em (81) pode-se calcular a densidade bariônica (ρ_B) e a densidade escalar (ρ_σ).

Cálculo da Densidade Bariônica

Calculando o conjugado hermitiano de ψ a partir da equação (81),

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^{3/2}} & \left(a_{k'\lambda'}^\dagger u_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') e^{-i[\vec{k}' \cdot \vec{x} - (E^* + g_\omega \omega_0)t]} + \right. \\ & \left. + b_{k'\lambda'} v_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') e^{i[\vec{k}' \cdot \vec{x} - (E^* - g_\omega \omega_0)t]} \right) \end{aligned} \quad (82)$$

fazendo o produto entre $\psi^\dagger$ e ψ , obtém-se

$$\begin{aligned} \rho_B = \langle \psi^\dagger \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda', \lambda} \int d^3 k d^3 k' \times \\ \times \langle \Psi_0 | \left(a_{k'\lambda'}^\dagger a_{k\lambda} u_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') u_\lambda(\vec{k}) e^{i[(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x} - (E^*(\vec{k}) - E^*(\vec{k}'))t]} + \right. \\ \left. + b_{k'\lambda'} b_{k\lambda}^\dagger v_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') v_\lambda(\vec{k}) e^{-i[(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x} - (E^*(\vec{k}) - E^*(\vec{k}'))t]} \right) | \Psi_0 \rangle \end{aligned}$$

os termos cruzados somem pois os espinores são ortogonais entre si, como foi tomado que não há antipartículas na relação (35), o termo relacionado aos operadores $b_{k\lambda}^\dagger$ se torna zero no vácuo,

$$\rho_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda', \lambda} \int d^3 k d^3 k' \left(\langle a_{k'\lambda'}^\dagger a_{k\lambda} \rangle u_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') u_\lambda(\vec{k}) e^{i[(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x} - (E^*(\vec{k}) - E^*(\vec{k}'))t]} \right)$$

utilizando as relações de anti-comutação $\{a_{k',\lambda'}, a_{k,\lambda}^\dagger\}$,

$$a_{k'\lambda'}^\dagger a_{k\lambda} = \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{\lambda'\lambda} - a_{k\lambda} a_{k'\lambda'}^\dagger$$

então,

$$\begin{aligned} \rho_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda', \lambda} \int d^3 k d^3 k' \left(\langle \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{\lambda'\lambda} - a_{k\lambda} a_{k'\lambda'}^\dagger \rangle u_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') u_\lambda(\vec{k}) \times \right. \\ \left. \times e^{i[(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x} - (E^*(\vec{k}) - E^*(\vec{k}'))t]} \right) \end{aligned}$$

o termo $a_{k\lambda}a_{k'\lambda'}^\dagger$ vai a zero ao ser aplicado o valor médio devido a equação (34) para $|\vec{k}| < k_F$, e para $|\vec{k}| > k_F$ vai para zero devido a equação (35),

$$\rho_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda', \lambda} \int d^3k d^3k' \left(\left\langle \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{\lambda'\lambda} \right\rangle u_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') u_\lambda(\vec{k}) e^{i[(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x} - (E^*(\vec{k}) - E^*(\vec{k}'))t]} \right)$$

aplicando o delta de Dirac e o delta de Kronecker, utilizando também Θ a função degrau de Heaviside [5] visto que só é fisicamente relevante soluções com momento máximo até k_F ,

$$\rho_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3k \left(u_{\lambda}^\dagger(\vec{k}) u_{\lambda}(\vec{k}) \Theta(k_F - |\vec{k}|) \right).$$

Para simplificar a equação, será utilizada uma constante multiplicativa relacionada a degenerescência spin e iso-spin [17],

$$\gamma = \sum_{\lambda} u_{\lambda}^\dagger(\vec{k}) u_{\lambda}(\vec{k})$$

para matéria de nêutrons $\gamma = 2$, já que existem dois sentidos de spin, já para a matéria nuclear $\gamma = 4$, pois além dos sentidos de spin, existem sentidos de isospin do próton e do nêutron.

A forma geral portanto, é

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \left(\Theta(k_F - |\vec{k}|) \right)$$

considerando que o momento em uma distribuição isotrópica deve ser esfero-simétrico, a integral pode ser solucionada como,

$$\int \Theta(k_F - |\vec{k}|) d^3k = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{k_F} k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi = \int_0^{k_F} k^2 dk \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3} \pi k_F^3.$$

Portanto a densidade bariônica é dada por:

$$\rho_B = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \quad (83)$$

a solução de ρ_B é muito interessante, pois demonstra que a densidade bariônica (isto é o número de bárions por volume), deve crescer com o cubo do momento máximo do sistema. Portanto o valor de k_F interfere na estabilidade da matéria nuclear, e deve ter um valor específico para manter o sistema coeso. Note também que a solução encontrada é análoga à densidade bariônica para o gás de Fermi para $T \rightarrow 0$ na equação (66).

Cálculo da Densidade Escalar

Como visto na equação (74) a densidade escalar é definida como,

$$\begin{aligned} \rho_\sigma = \langle \bar{\psi} \psi \rangle &= \langle \psi^\dagger \gamma^0 \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda', \lambda} \int d^3k d^3k' \times \\ &\times \langle \Psi_0 | \left(a_{k'\lambda'}^\dagger a_{k\lambda} u_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \gamma^0 u_\lambda(\vec{k}) e^{i[(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x} - (E^*(\vec{k}) - E^*(\vec{k}'))t]} + \right. \\ &\left. + b_{k'\lambda'} b_{k\lambda}^\dagger v_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \gamma^0 v_\lambda(\vec{k}) e^{-i[(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x} - (E^*(\vec{k}) - E^*(\vec{k}'))t]} \right) | \Psi_0 \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando novamente as propriedades de anti-comutação (29-32) assim como as suas relações com o vácuo (33-35), pode-se simplificar a densidade escalar em analogia ao que foi feito em (83),

$$\rho_\sigma = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3k \left(u_\lambda^\dagger(\vec{k}) \gamma^0 u_\lambda(\vec{k}) \Theta(k_F - |\vec{k}|) \right).$$

Até agora os espinores $u_\lambda(\vec{k})$ e $v_\lambda(\vec{k})$ não eram relevantes para o cálculo, porém ao operar com o tensor γ^0 , eles passam a se tornar relevantes. Serão retomadas algumas propriedades dessas grandezas.

O tensor γ^0 é dado por (22),

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

com uma analogia ao feito na equação (25) serão utilizados os espinores. Os spins podem ser $\uparrow$ ou $\downarrow$, por usualidade será utilizado $\uparrow$, mas ambos funcionam para nosso processo [17], definindo então os espinores

$$u_{\lambda\uparrow}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (84)$$

$$u_{\lambda\uparrow}^\dagger(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{bmatrix}, \quad (85)$$

$$v_{\lambda\uparrow}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{bmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

$$v_{\lambda\uparrow}^\dagger(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{bmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (87)$$

relembrando que E^* é dado pela parte positiva de (80).

Utilizando as equações (84-87), obtém-se

$$u_\lambda^\dagger(\vec{k})\gamma^0 u_\lambda(\vec{k}) = \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}$$

substituindo o produto na equação da densidade escalar e retirando os fatores de somatório que representa a degenerescência de spin-isospin (γ),

$$\rho_\sigma = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \Theta(k_F - |\vec{k}|).$$

a densidade escalar total é:

$$\rho_\sigma = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (88)$$

3.5 Equações para a Densidade de Energia e para a Pressão

Retornando ao tensor de Energia-Momentum da equação (73) construído, aplicando o campo médio para σ e ω_μ obtém-se então,

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi \rangle - \frac{1}{2} [m_\omega^2\omega_0^2 - m_\sigma^2\sigma_0^2] g_{\mu\nu}. \quad (89)$$

Com esse tensor e os resultados de densidades bariônica e escalar pode-se determinar as expressões de densidade de energia e para a pressão.

A densidade de Energia

Como dito anteriormente na equação (40), pode-se determinar o valor da densidade de energia a partir da componente 00 do valor esperado do tensor de energia-momentum. Aplicando esse raciocínio para (89),

$$\mathcal{E} = \langle i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \rangle - \frac{1}{2} [m_\omega^2\omega_0^2 - m_\sigma^2\sigma_0^2] g_{00},$$

já que $g_{00} = 1$,

$$\mathcal{E} = \langle i\psi^\dagger\partial_0\psi \rangle - \frac{1}{2} [m_\omega^2\omega_0^2 - m_\sigma^2\sigma_0^2].$$

Os valores médios dos mésons podem ser determinados a partir das equações (74-75) e da definição de M^* ,

$$\mathcal{E} = \langle i\psi^\dagger\partial_0\psi \rangle - \frac{1}{2} \left[\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_B^2 - \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 \right].$$

Para obter o primeiro termo da densidade de energia deve-se usar o resultado obtido em (77),

$$i\partial_0\psi = [E^*(k) + g_\omega\omega_0]\psi$$

aplicando por sua vez o valor médio no primeiro termo,

$$\langle \psi^\dagger [E^*(k) + g_\omega\omega_0] \psi \rangle = \langle \psi^\dagger E^*(k) \psi \rangle + g_\omega\omega_0 \langle \psi^\dagger \psi \rangle$$

o segundo termo na equação acima claramente é proporcional a densidade bariônica, que foi calculada em (83). Calculando agora o primeiro termo

$$\begin{aligned} \langle \psi^\dagger E^*(k) \psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda', \lambda} \int d^3k d^3k' \times \\ &\times \langle \Psi_0 | \left(a_{k'\lambda'}^\dagger a_{k\lambda} u_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') u_\lambda(\vec{k}) e^{i[(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x} - (E^*(\vec{k}) - E^*(\vec{k}'))t]} + \right. \\ &\left. + b_{k'\lambda'} b_{k\lambda}^\dagger v_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') v_\lambda(\vec{k}) e^{-i[(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x} - (E^*(\vec{k}) - E^*(\vec{k}'))t]} \right) E^*(k) | \Psi_0 \rangle \end{aligned}$$

que aplicando novamente as propriedades (29-32) assim como as suas relações com o vácuo (29-32),

$$\langle \psi^\dagger E^*(k) \psi \rangle = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \sqrt{k^2 + (M^*)^2} \Theta(k_F - k).$$

Utilizando todos os parâmetros aqui descritos, obtém-se uma descrição para a densidade de energia,

$$\mathcal{E} = \frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} \rho_B^2 + \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \sqrt{(M^*)^2 + k^2}. \quad (90)$$

A pressão p

Com base nas equações (41) e (89), determina-se que a pressão deve ser dada por,

$$p = -\frac{1}{3} \left[\langle i\bar{\psi} \gamma_i \partial_i \psi \rangle + \frac{1}{2} (m_\omega^2 \omega_0^2 - m_\sigma^2 \sigma_0^2) g_{ii} \right]$$

como²² $g_{ii} = -3$ na equação e trocando os valores dos campos bosônicos constantes pelas suas definições dadas em (74-75),

$$p = \frac{1}{2} \left[\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_B^2 - \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 \right] - \frac{1}{3} \langle i\bar{\psi} \gamma_i \partial_i \psi \rangle.$$

Para conseguir calcular o segundo termo deve-se considerar a definição de γ_μ em (22)

²²Lembrando que nesse projeto é utilizado a notação de Einstein, portanto aqui é somado de $i = 1$ a 3 .

e a definição de derivada covariante,

$$\gamma_\mu \partial_\mu = \gamma_0 \partial_0 - \gamma_i \partial_i = \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} - \gamma_0 \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}$$

reescrevendo assim,

$$p = \frac{1}{2} \left[\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_B^2 - \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 \right] - \frac{1}{3} \langle i\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi \rangle.$$

Para calcular o gradiente de ψ deve-se a considerar a equação (81), portanto

$$\vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t) = \sum_\lambda \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} i\vec{k} \left(a_{k\lambda} u_\lambda(\vec{k}) e^{i[\vec{k} \cdot \vec{x} - (E^* + g_\omega \omega_0)t]} - b_{k\lambda}^\dagger v_\lambda(\vec{k}) e^{-i[\vec{k} \cdot \vec{x} - (E^* - g_\omega \omega_0)t]} \right)$$

calculando o valor médio,

$$\begin{aligned} \langle i\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi \rangle &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda', \lambda} \int d^3 k d^3 k' \times \\ &\times \langle \Psi_0 | \left(a_{k'\lambda'}^\dagger a_{k\lambda} u_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \vec{\alpha} \cdot \vec{k} u_\lambda(\vec{k}) e^{i[(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x} - (E^*(\vec{k}) - E^*(\vec{k}'))t]} + \right. \\ &\left. - b_{k'\lambda'} b_{k\lambda}^\dagger v_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \vec{\alpha} \cdot \vec{k} v_\lambda(\vec{k}) e^{-i[(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x} - (E^*(\vec{k}) - E^*(\vec{k}'))t]} \right) | \Psi_0 \rangle, \end{aligned}$$

como feito anteriormente,

$$\langle i\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_\lambda \int d^3 k \left(u_\lambda^\dagger(\vec{k}) \vec{\alpha} \cdot \vec{k} u_\lambda(\vec{k}) \Theta(k_F - |\vec{k}|) \right).$$

Para resolver a integral, deve-se utilizar as relações entre os espinores que foram definidos nas equações (84-87),

$$u_\lambda^\dagger(\vec{k}) \vec{\alpha} \cdot \vec{k} u_\lambda(\vec{k}) = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}$$

como feito anteriormente, vamos retirar da integral o somatório de spin e isospin (γ), aplicando a relação encontrada para o valor médio,

$$\langle i\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi \rangle = -\frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}$$

Aplicando os resultados obtidos em (74-75) para o valor médio dos campos na expressão total da pressão, obtém-se finalmente o valor geral para a pressão,

$$p = \frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} \rho_B^2 - \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \frac{k^2}{\sqrt{(M^*)^2 + k^2}}. \quad (91)$$

O problema de M^*

Na subseção anterior foram definidas as expressões de algumas grandezas que serão úteis: a densidade de energia (90) e a pressão (91). Observando ambas as equações, nota-se notar uma certa similaridade entre ambas, ambas dependem de constantes determinadas experimentalmente, como $g_\sigma, m_\sigma, g_\omega, m_\omega$, e dependem também de outras grandezas que variam conforme o sistema, como por exemplo M^* (massa aparente) e k_F (momento de Fermi).

Como há duas variáveis que dependem do tipo de sistema, existe uma tendência a considerar a densidade de energia e a pressão como funções de duas variáveis independentes e assim determinar os valores numéricos associados a essas funções. Mas isso é inválido! É fato que a massa aparente também depende do valor de k_F e portanto as equações vistas até agora devem ter uma forma com uma única variável.

Para tentar encontrar essa forma primeiramente considere a definição de M^* vista na equação (76),

$$M^* = M - g_\sigma \sigma_0$$

σ_0 pode ser determinado a partir da equação (74), portanto

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \rho_\sigma$$

a definição de ρ_σ é conhecida e foi encontrada na subseção 3.4, sendo a equação (88) a sua representação,

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (92)$$

Perceba que a equação (92) é transcendental, isto é, não existe uma solução analítica para M^* , de forma que as densidades de pressão e energia não têm uma forma mais geral de ser escrita em termos apenas de k_F .

Mas conforme dito anteriormente, não se pode simplesmente tratar como se fossem duas variáveis independentes, já que M^* é acoplada a k_F . Por sorte, a equação (92) é auto-consistente, isto é, pode ser utilizada para encontrar uma solução numérica de M^* . A partir de um valor inicial arbitrário [1], para todo k_F que for interessante estudar, pode-se calcular numericamente os valores da densidade de energia e para a pressão.

3.6 Resultados Numéricos

Serão utilizados dados numéricos obtidos de estrelas de Nêutrons [18], para calcular M^* , $\mathcal{E}$ e p . Considere que $g_\sigma = 9,573 \text{ MeV}$, $g_\omega = 11,665 \text{ MeV}$, $m_\sigma = 550 \text{ MeV}$, $m_\omega = 782,6 \text{ MeV}$, $M = 939 \text{ MeV}$ e $\gamma = 4$.

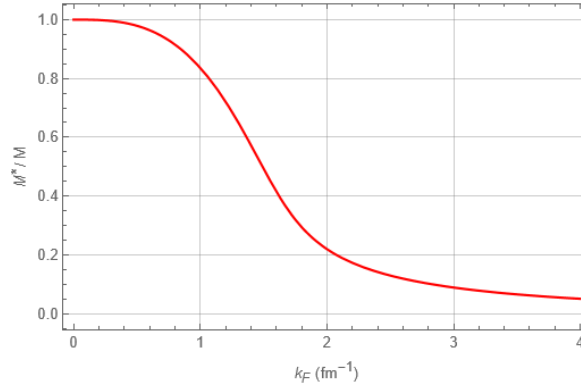


Figura 4: Gráfico demonstrativo da razão massa aparente e massa da matéria nuclear em relação ao momento de Fermi.

Massa Aparente

Considerando a equação (92), pode-se calcular a partir de métodos numéricos, os valores de M^* para cada k_F . Os valores foram computadorizados pelo software *Mathematica*, utilizando M como valor inicial de M^* , e k_F de 0,01 até 5 fm^{-1} com passo de 0,01. A partir dos pontos encontrados, foi feita uma interpolação desses pontos, como pode ser visto na figura 4.

Curiosamente, para valores baixos de k_F a massa aparente dos núcleons é aproximadamente igual a massa dos núcleons, o que demonstra como para baixos valores de momentum máximo a interação dominante é de repulsão e não a de atração.

Porém, conforme k_F aumenta, a massa aparente cai e satura muito próximo de zero, portanto, é como se em um sistema com momento máximo muito elevado, a interação dominante fosse a de atração.

Densidade de Energia

Com os valores de M^* para cada k_F é possível determinar o valor da densidade de energia a partir da equação (90).

A curva esperada pode ser vista na figura 5, onde é representada a densidade de energia dividida pela densidade bariônica menos a massa em função de k_F .

Os resultados parecem seguir a lógica esperada, pois é conhecido da literatura [1] que para altas densidades de matéria, o ponto mínimo da relação da energia E , o número de bárions B e massa nuclear M é dada por,

$$\left(\frac{E - BM}{B} \right)_0 = -15,75 \text{ MeV}, \quad (93)$$

ao inspecionar a figura , pode-se encontrar um ponto de mínimo muito próximo, sendo este aproximadamente a $-15,77 \text{ MeV}$. Como se sabe, o valor mínimo é o valor termodinamicamente mais estável. Lembrando que $\rho_B = B/V$, assim como $\mathcal{E} = E/V$, onde

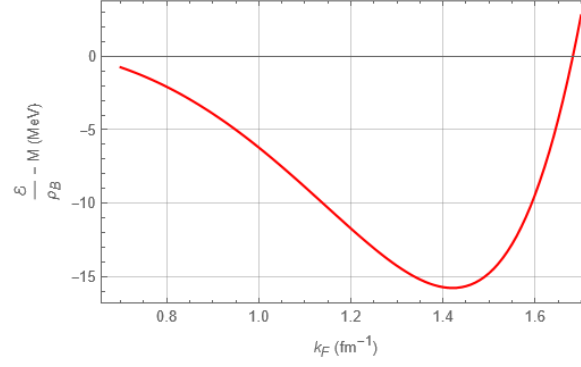


Figura 5: Gráfico da densidade de energia sobre a densidade bariônica menos a massa da matéria nuclear em relação ao momento de Fermi.

V representa o volume do sistema, portanto a equação (93) é equivalente aos valores da curva.

E com esse valor teórico, também pode ser observado o valor de k_F para a matéria nuclear, e assim determinar M^* e demais funções para o caso específico da matéria nuclear,

$$k_F^0 = 1,42 \text{ fm}^{-1}$$

no caso de M^* para k_F^0 é de cerca 0,56 vezes a massa da matéria nuclear.

Pressão

É possível utilizar a equação (91) em função da (90), esse tipo de equação é denominado equação de estado e é uma forma de representar grandezas termodinâmicas relacionados ao sistema. Os valores encontrados podem ser vistos na figura 6. Conforme a pressão aumenta, existe uma descontinuidade na função, isso pode ser explicado por uma transição de fase, similar ao encontrado em uma transição líquido-gás na equação de estado de Van der Waals [17].

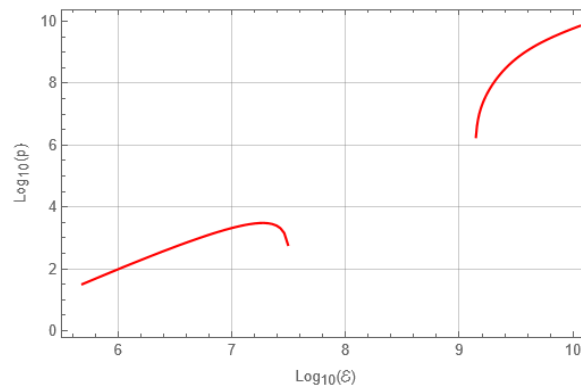


Figura 6: Equação de estado para a matéria nuclear.

4 Matéria Nuclear a Temperatura diferente de Zero

Em um primeiro momento, foi considerada a matéria nuclear em temperatura igual a zero, mas como se sabe, esse tipo de matéria para muitos corpos exibe uma descrição estatística e termodinâmica como foi visto nas seções 2.8 e 2.9. Portanto essa subseção tem como objetivo trabalhar os casos anteriores mas para matéria nuclear com temperatura diferente de zero.

4.1 Descrição Termodinâmica da Matéria Nuclear

A matéria nuclear é um sistema hipotético com infinitos férmions, portanto é um sistema aberto, que permite troca de matéria e energia (decaimentos por exemplo). O ensemble estatístico ideal para esse tipo de sistema é o ensemble grande-canônico citado na seção 2.10, a grande função de partição (Z_G) pode ser calculada como na equação (56),

$$Z_G = \text{Tr} \exp \left[-\frac{\hat{H} - \mu \hat{B}}{T} \right]$$

onde μ representa o potencial químico, $\hat{H}$ o operador Hamiltoniano, $\hat{B}$ o operador número de bárions e T a temperatura. Como o operador traço pode ser feito em relação a qualquer base, será utilizada a base $|\Psi_0\rangle$ que é o vácuo para a matéria nuclear.

Para fazer a conexão com a termodinâmica, será utilizado o grande potencial termodinâmico que pode ser escrito em termos da grande função de partição como foi observado na equação (55),

$$\Phi = -T \ln Z_G$$

como são utilizadas com muito mais frequência as densidades nesse trabalho, será usado o grande potencial dividido pelo volume,

$$\phi = -\frac{1}{V} T \ln Z_G$$

utilizando a propriedade dos logaritmos de transformar uma multiplicação por uma exponencial do argumento, pode-se finalmente escrever a densidade de grande potencial termodinâmico em termos da densidade hamiltoniana e densidade bariônica²³,

$$\phi = -T \ln \left[\text{Tr} \exp \left(-\frac{\mathcal{H} - \mu \hat{\rho}_B}{T} \right) \right]. \quad (94)$$

A partir do potencial termodinâmico (94), pode-se determinar as demais grandezas

²³Aqui está denotado a densidade bariônica com o chapéu pois estou me referindo ao operador densidade bariônica, não a densidade em si, que é o valor médio da densidade bariônica

termodinâmicas, pois o potencial segue a equação (52)

$$\phi = -p = \mathcal{E} - T\mathcal{S} - \mu\rho_B \quad (95)$$

onde $\mathcal{S}$ é a densidade de entropia, diferenciando (95),

$$d\phi = -\mathcal{S}dT - \rho_B d\mu. \quad (96)$$

Note que devido a (96),

$$\frac{\partial\phi}{\partial\omega_0} = 0 \quad (97)$$

assim como,

$$\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_0} = 0 \quad (98)$$

portanto os potenciais não dependem explicitamente dos campos, e deve ser conservado mesmo com variações deles. O valor da pressão p pode ser determinado a partir de (95) sendo igual a $-\phi$, já a densidade de entropia pode ser avaliada a partir da equação (96),

$$\mathcal{S} = -\frac{\partial\phi}{\partial T} \quad (99)$$

já a densidade bariônica,

$$\rho_B = -\frac{\partial\phi}{\partial\mu} \quad (100)$$

a densidade de energia pode ser calculada utilizando a equação (95),

$$\mathcal{E} = T\mathcal{S} - p + \rho_B\mu = \phi - \frac{\partial\phi}{\partial T}T - \frac{\partial\phi}{\partial\mu}\mu \quad (101)$$

portanto, a partir dos estados microscópicos do sistema podem ser determinadas as equações que descrevem o sistema macroscópico.

4.2 Cálculo do Potencial Termodinâmico

Para conseguir calcular as grandezas termodinâmicas deve-se primeiramente calcular o potencial da equação (94), lembrando que $\mathcal{H} = T_{00}$ como descrito na equação (40) e $\hat{\rho}_B = \psi^\dagger\psi$ devido a equação (72),

$$\phi = -T \ln \left[\text{Tr} \exp \left(-\frac{T_{00} - \mu\psi^\dagger\psi}{T} \right) \right]$$

aplicando a teoria do campo médio, evidencia-se que notar que a derivada temporal dos campos se iguala a zero, portanto a equação pode ser simplificada [19],

$$\phi = -T \ln \left[\text{Tr} \exp \left(\frac{\mathcal{L} + \mu\psi^\dagger\psi}{T} \right) \right]$$

onde $\mathcal{L}$ é dado por (68). Utilizando a teoria do campo médio e reescrevendo se obtém,

$$\phi = -T \ln \left[\exp \left(\frac{\langle \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu + \gamma_0(\mu - g_\omega \omega_0) - (M - g_\sigma \sigma)] \psi \rangle - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2}{T} \right) \right]$$

retirando os termos constantes da exponencial,

$$\phi = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - T \ln \left[\exp \left(\frac{\langle \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu + \gamma_0(\mu - g_\omega \omega_0) - (M - g_\sigma \sigma)] \psi \rangle}{T} \right) \right]$$

o termo $M - g_\sigma \sigma_0$ é a massa aparente M^* , em analogia o termo $\mu - g_\omega \omega_0$ pode ser identificado como o potencial químico aparente μ^* . Calculando o valor médio da expressão na exponencial anterior se obtém o autovalor da energia menos o potencial químico. Considerando a soma de todos os possíveis momentos, bem como o princípio da exclusão de Pauli, a equação pode ser simplificada, então

$$\phi = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - \frac{T\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ \ln \left[1 + e^{\left(-\frac{E^* - \mu^*}{T}\right)} \right] + \ln \left[1 + e^{\left(-\frac{E^* + \mu^*}{T}\right)} \right] \right\} \quad (102)$$

note que existem duas distribuições simétricas, uma com inverso do potencial químico aparente da outra, esses termos representam a distribuição de partículas e anti-partículas, para partículas tem-se um potencial químico aparente de μ^* já para anti-partículas tem-se um potencial químico de $-\mu^*$.

Aplicando os valores para os campos mesônicos calculados em termos das densidades (74-75), a equação (102) já é suficiente para determinar as equações de estado para o modelo. Mas existe uma forma mais elegante de escrever essa equação. Para tal, será focado totalmente na integral,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty 4\pi k^2 dk \left\{ \ln \left[1 + e^{\left(-\frac{E^* - \mu^*}{T}\right)} \right] + \ln \left[1 + e^{\left(-\frac{E^* + \mu^*}{T}\right)} \right] \right\} = \\ & = \frac{4}{3}\pi \int_0^\infty 3k^2 dk \left\{ \ln \left[1 + e^{\left(-\frac{E^* - \mu^*}{T}\right)} \right] + \ln \left[1 + e^{\left(-\frac{E^* + \mu^*}{T}\right)} \right] \right\} \end{aligned}$$

essa integral pode ser tomada por partes, tomando $dv = 3k^2 dk$ e u a expressão entre chaves, se obtém que²⁴,

$$-\frac{4}{3}\pi \int_0^\infty k^3 \frac{\partial}{\partial k} \left\{ \ln \left[1 + e^{\left(-\frac{E^* - \mu^*}{T}\right)} \right] + \ln \left[1 + e^{\left(-\frac{E^* + \mu^*}{T}\right)} \right] \right\} dk$$

utilizando a regra da cadeia e a definição de E^* (80),

$$\frac{\partial}{\partial k} = \frac{\partial E^*}{\partial k} \frac{\partial}{\partial E^*} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \frac{\partial}{\partial E^*}$$

²⁴O termo uv é igual a zero.

calculando então a derivada, e reescrevendo novamente o diferencial como um diferencial de volume,

$$\frac{1}{3T} \int d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \left[\frac{1}{\exp\left(\frac{E^*(k) - \mu^*}{T}\right) + 1} + \frac{1}{\exp\left(\frac{E^*(k) + \mu^*}{T}\right) + 1} \right]$$

aplicando então os campos mesônicos e a nova forma de escrever a integral,

$$\phi = -\frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} \rho_B^2 + \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (M - M^*)^2 - \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] \quad (103)$$

onde os n 's representam a estatística de Fermi-Dirac (60), para partículas

$$n_k(T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E^*(k) - \mu^*}{T}\right) + 1} \quad (104)$$

e para anti-partículas,

$$\bar{n}_k(T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E^*(k) + \mu^*}{T}\right) + 1}. \quad (105)$$

Em mãos da equação (103) e devido a (95), pode-se escrever p como $-\phi$, portanto

$$p = \frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} \rho_B^2 - \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] \quad (106)$$

note que para temperatura igual a zero a expressão (106) retorna a equação (91), por isso foi escolhido modificar a forma da integral de (102), para tornar explícito que o termo de pressão dependente da temperatura é o termo original da temperatura com as distribuições de Fermi-Dirac.

4.3 Equações de Estado dependentes da Temperatura

Em mãos do grande potencial termodinâmico pode-se determinar as equações de estado.

Utilizando a equação (100) com o potencial da equação (102), pode-se então determinar a equação de estado relacionada a ρ_B . Perceba que o potencial não depende explicitamente de μ até a integral, ao mesmo tempo que a derivada parcial em relação μ é a mesma que em relação a μ^* , portanto

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_k(T) - \bar{n}_k(T)] \quad (107)$$

onde novamente os n 's representam a estatística de Fermi-Dirac (104-105). Note a semelhança com o encontrado para temperatura igual zero (83) bem como resgata o resultado para o gás de Fermi (66), mas agora com duas distribuições de Fermi-Dirac.

Agora utilizando a equação (99) pode-se determinar a densidade de entropia utilizando novamente o potencial da equação (102). Derivando a equação em relação a T e tomando o oposto,

$$\mathcal{S} = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\frac{E^*(k) - \mu^*}{T} n_k(T) + \frac{E^*(k) + \mu^*}{T} \bar{n}_k(T) + \ln\left(1 + e^{-\frac{E^*(k) - \mu^*}{T}}\right) + \ln\left(1 + e^{-\frac{E^*(k) + \mu^*}{T}}\right) \right]. \quad (108)$$

Finalmente, utilizando a equação (101), pode-se determinar a densidade de energia, com auxílio das equações (102), (107) e (108)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k [(E^*(k) + g_\omega \omega_0) n_k(T) + (E^*(k) - g_\omega \omega_0) \bar{n}_k(T)]$$

o termo integrado pode ser separado em duas integrais diferentes,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{g_\omega \omega_0 \gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_k(T) - \bar{n}_k(T)] + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k E^*(k) [n_k(T) + \bar{n}_k(T)]$$

a primeira integral da esquerda para a direita pode ser identificada claramente como a densidade bariônica (107). Utilizando os valores de ω_0 e σ_0 das equações (74) e (75) e a definição de $E^*(k)$ da equação (80),

$$\mathcal{E} = \frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} \rho_B^2 + \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \sqrt{k^2 + (M^*)^2} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] \quad (109)$$

a densidade de energia da equação (109) é idêntica, com exceção da estatística de Fermi-Dirac, à encontrada para a densidade de energia (90).

A semelhança das equações de estado para temperatura igual e diferente de zero não é por acaso, a distribuição de Fermi-Dirac a temperatura tendendo à zero, deve ser uma função degrau, por isso no caso de temperatura igual a zero foi integrado até um momento máximo k_F . No caso de temperatura diferente de zero, essa restrição é retirada, devido a estatística de Fermi-Dirac, podendo ser integrada em todo o espaço dos momentos.

O problema de M^*

Note novamente que todas as equações de estado dependem explicitamente de M^* . Por sua vez, M^* deve depender da temperatura, então como modelar a massa aparente com a temperatura?

Um primeiro passo pode ser analisar a equação (98). Como M^* depende de σ_0 , pode se escrever a condição de outra maneira,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_0} = \frac{\partial M^*}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial M^*} = -g_\sigma \frac{\partial \phi}{\partial M^*} \implies \frac{\partial \phi}{\partial M^*} = 0$$

aplicando essa condição para o potencial termodinâmico (102) e lembrando que devido ao campo médio (74),

$$\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 = \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2}(M - M^*)^2$$

logo

$$-\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2}(M - M^*) - \frac{T\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\partial}{\partial M^*} \left\{ \ln \left[1 + e^{\left(-\frac{E^* - \mu^*}{T}\right)} \right] + \ln \left[1 + e^{\left(-\frac{E^* + \mu^*}{T}\right)} \right] \right\} = 0$$

a derivada pode ser reescrita,

$$\frac{\partial}{\partial M^*} = \frac{\partial E^*}{\partial M^*} \frac{\partial}{\partial E^*} = \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \frac{\partial}{\partial E^*}$$

derivando em relação a E^* como já foi feito anteriormente para o caso da pressão, se obtém,

$$-\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2}(M - M^*) + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] = 0$$

reescrevendo,

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)]. \quad (110)$$

A equação (110) se diferencia da equação (92) novamente pela utilização da distribuição de Fermi-Dirac, portanto pode se afirmar com exatidão que a diferença do modelo de Walecka para temperatura igual a zero e diferente de zero é a utilização da estatística de Fermi-Dirac que permite a utilização da temperatura.

As soluções numéricas das equações (107), (109), (106), (110) são muito complexas, percebe-se que primeiramente todas as integrais são de difícil resolução, de forma que não podem ser resolvidas de forma exata, apenas numericamente. Além desse fator, todas as equações dependem de²⁵ ρ_B e M^* , devido a definição da estatística de Fermi-Dirac (104-105). Mesmo as equações (107) e (110) não são auto-consistentes, mas sim acopladas, encontrar soluções numéricas para (107) e (110) é de grande importância, pois assim será possível determinar as funções termodinâmicas que descrevem o sistema.

4.4 Uma solução para Densidade Bariônica igual a Zero

Como dito anteriormente, (107) e (110) são equações acopladas entre si, o que torna sua resolução muito difícil. Para encontrar uma solução no momento tome um sistema hipotético em que a densidade bariônica é nula, isso parece muito contra-intuitivo, como a matéria nuclear é infinita ela deve haver alguma densidade, pois está sendo analisada uma matéria de forma de *bulking*, não como uma matéria espaçada suficiente de forma a

²⁵Pela definição de $\mu^* = \mu - g_\omega \omega_0$ portanto pela teoria de campo médio, $\mu^* = \mu - g_\omega^2 \rho_B / m_\omega^2$.

ter alguma densidade igual a zero. Se for assumido que o número de bárions e anti-bárions é o mesmo, então mesmo que a matéria nuclear seja extremamente densa no sentido de massa, a densidade bariônica pode ser igual zero.

Para entender o comportamento da curva da massa aparente se dá, é interessante avaliar esse caso específico exatamente para eliminar algumas variáveis. Tome a (107) para $\rho_B = 0$,

$$\frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_k(T) - \bar{n}_k(T)] = 0 \implies n_k(T) = \bar{n}_k(T)$$

o que evidencia novamente a escolha de mesmo número de partículas e anti-partículas, note que, usando as definições da distribuição de Fermi-Dirac das equações (104) e (105), a única forma dessa igualdade ser satisfeita é para $\mu = -\mu$, que por sua vez só é possível quando $\mu = 0$. Dessa forma, elimina-se uma variável da equação e o sistema se torna bem mais simples.

Com a escolha de densidade bariônica sendo igual a zero, a equação da massa aparente (110) que antes estava acoplada a valores específicos de ρ_B , se torna auto-consistente. Portanto, pode novamente ser determinada numericamente.

A solução encontrada pode-ser vista na figura 7, note como ela condiz com o valor da literatura [1]. A massa aparente se mantém aproximadamente constante, até perto de uma temperatura de 130 MeV , então começa a diminuir vertiginosamente conforme o aumento da temperatura. Perto de uma temperatura de 200 MeV a massa aparente se torna metade do valor da massa bariônica de fato, como indicado na figura, a partir de uma temperatura de 250 MeV o valor da massa volta a se estabilizar e cair mais devagar. O gráfico foi confeccionado utilizando o software *Mathematica*.

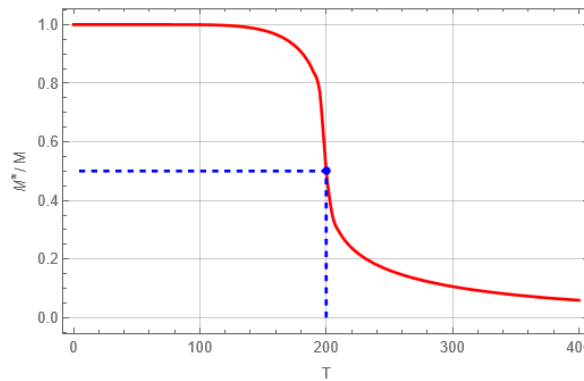


Figura 7: Gráfico da razão entre a massa aparente e a energia termodinâmica para a matéria nuclear. Está indicado o ponto em que a massa aparente atinge metade do valor da massa bariônica.

5 Conclusão

O trabalho consegue mostrar os passos de desenvolvimento e cálculo das propriedades de uma teoria de muitos corpos. Em um primeiro momento foi mostrado todo o arcabouço físico e matemático necessário para o desenvolvimento e entendimento da teoria.

No caso da temperatura igual a zero foi possível determinar as equações que regem a interação de muitos núcleons, permitindo assim a determinação da densidade de energia e pressão, bem como o momento de fermi do sistema.

Para temperatura diferente de zero, foi observado como a estatística de Fermi-Dirac pode interferir nas grandezas obtidas anteriormente, não havendo mais a necessidade de um momento máximo. Também foi demonstrado como todas as grandezas são obtidas a partir de um formalismo estatístico utilizando a grande função de partição.

Portanto, desde que as constantes de acoplamento g_ω e g_σ sejam bem escolhidas, o modelo de Walecka consegue representar com certa exatidão os aspectos termodinâmicos da matéria nuclear.

O modelo de Walecka possui limitações e continua sendo explorado e modificado, uma versão mais atual desse modelo leva em consideração parâmetros não lineares, como pode ser visto em [18], artigos mais atuais como em [20] levam em conta esses parâmetros para a descrição do modelo.

Referências

- [1] Brian D Serot. Advance in nuclear physics. *The Relativistic Nuclear Many-Body Problem*, 16, 1986.
- [2] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023.
- [3] Paul Allen Tipler and Ralph Llewellyn. *Modern physics*. Macmillan, 2003.
- [4] Mark Thomson. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [5] Hans J Weber and George B Arfken. *Essential mathematical methods for physicists, ISE*. Elsevier, 2003.
- [6] J.B. Neto. *Teoria de campos e a natureza: Parte quântica*. Editora Livraria da Física, 2017.
- [7] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe. Quantum mechanics, volume 1. *Quantum Mechanics*, 1:898, 1986.
- [8] Lewis H Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.
- [9] Attila Szabo and Neil S Ostlund. *Modern quantum chemistry: introduction to advanced electronic structure theory*. Courier Corporation, 2012.
- [10] Herbert Goldstein, Charles Poole, John Safko, and Stephen R Addison. *Classical mechanics*. American Association of Physics Teachers, 2002.
- [11] Lev Davidovich Landau. *The classical theory of fields*, volume 2. Elsevier, 2013.
- [12] Herbert B Callen. Thermodynamics and an introduction to thermostatistics, 1998.
- [13] Sílvia RA Salinas. *Introdução a física estatística vol. 09*. Edusp, 1997.
- [14] S. A. Kononogov M. I. Kalinin. Boltzmann’s constant, the energy meaning of temperature, and thermodynamic irreversibility. *Springerlink*, 48(7):632–636, 2005.
- [15] Edson Denis Leonel. *Fundamentos da física estatística*. Editora Blucher, 2021.
- [16] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Quantum mechanics, volume 3: fermions, bosons, photons, correlations, and entanglement*. John Wiley & Sons, 2019.
- [17] Veronica Antocheviz Dexheimer. Compressibilidade da matéria nuclear em estrelas de nêutrons. 2006.
- [18] Norman K Glendenning. *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer, 2012.

-
- [19] Joseph I Kapusta and Charles Gale. *Finite-temperature field theory: Principles and applications*. Cambridge university press, 2007.
- [20] Wei-bo He, Guo-yun Shao, and Chong-long Xie. Speed of sound and liquid-gas phase transition in nuclear matter. *Physical Review C*, 107(1):014903, 2023.