



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

MASTRA DO

**ANÁLISE DE SOBRE-SINAL E REAÇÃO REVERSA
EM SISTEMAS DE CONTROLE LINEARES
CONTÍNUOS NO TEMPO**

KLEBER ALVES

Ilha Solteira - SP

1210001548



unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

***ANÁLISE DE SOBRE-SINAL E REAÇÃO REVERSA EM
SISTEMAS DE CONTROLE LINEARES CONTÍNUOS
NO TEMPO***

Kleber Alves

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo
Co-Orientadora: Profa. Dra. Célia Aparecida dos Reis

Ilha Solteira, Dezembro de 2004.

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da FEIS/UNESP

Alves, Kleber

A474a Análise de sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares contínuos no tempo / Kleber Alves. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2004
85 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2004

Orientador: Gilberto Pechoto de Melo

Co-orientador: Célia Aparecida dos Reis

Bibliografia: p. 84-85

1. Análise de sistemas. 2. Controle. 3. Teoria do controle. ✓

30504074

Análise de Sobre-Sinal e Reação Reversa em Sistemas de Controle Lineares Contínuos no Tempo

Kleber Alves

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO
DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

NA ÁREA DE CONHECIMENTO MECÂNICA DOS SÓLIDOS E APROVADA
EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. João Batista Aparecido
Vice-Coordenador

1210001548



COMISSÃO EXAMINADORA:

Bélia App. dos Reis

Profª Drª Célia Aparecida dos Reis – Co-Orientadora

Insc. 055/05-NRD 026

Prof. Dr. José Jaime da Cruz

Prof. Dr. José Jaime da Cruz

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÊC. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
10.03.05	30.04.05
REGISTRADO POR	TOMBO
Ailza	Te. 1548
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Doação Autor R\$ 10,00	A474a

Ilha Solteira – SP, dezembro de 2004

Co Sys 322958
Sys 58859

BCPLS - FEIS - UNESP



DEDICATÓRIA

**À Deus, aos meus pais Osvaldino Sebastião Alves
e Antônio Millan Alves, e aos meus irmãos João Alves e
Tânia Maria Alves, pelo constante apoio e incentivo em
todos os momentos.**



AGRADECIMENTOS

À Deus que tudo pode, em Quem tenho crido.

À minha co-orientadora Profa. Dra. Célia Aparecida dos Reis, excelente profissional, que me deu todo apoio, incentivo, pela amizade e ensinamentos prestados durante a realização deste trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo, excelente profissional, que me deu todo apoio, incentivo, ensinamentos prestados durante a realização deste trabalho e pela amizade.

Aos técnicos e secretárias do departamento de engenharia mecânica (DEM/FEIS) e PPGEM em especial Adelaide Amaral dos Santos Passipieri, Elias Amaral dos Santos, Aparecido Carlos Gonçalves e Onilda Naves de Oliveira Akasaki, pelo apoio.

Aos colegas de pós-graduação, que participaram diretamente e indiretamente, a instituição UNESP/FEIS e ao programa de pós-graduação em engenharia mecânica PPGEM.

Aos eternos amigos que colaboraram com apoio, em várias situações.

À todos que direta ou indiretamente colaboraram na execução deste trabalho.



**“Há momentos na vida em que sentimos tanto a falta de alguém que o
que mais queremos é tirar esta pessoa de nossos sonhos e abraçá-la.**

Sonhe com aquilo que você quiser.

**Seja o que você quer ser, porque você possui apenas uma vida e
nela só se tem uma chance de fazer aquilo que se quer.**

Tenha felicidade bastante para fazê-la doce.

Dificuldades para fazê-la forte.

Tristeza para fazê-la humana.

E esperança suficiente para fazê-la feliz...”

Clarice Lispector

Há momentos na vida...



Sumário

Resumo.....	vii
Introdução.....	9
Capítulo 01	11
1- Resultados relativos a extremos.....	11
2- Resultados relativos a sobre-sinal e reação reversa.....	18
2.1- O sobre-sinal em sistemas contínuos.....	18
2.2- Sistemas contínuos no tempo e de fase não mínima.....	22
2.3- Reação reversa do tipo r_u estendido na resposta a degrau.....	27
Capítulo 02.....	30
1. Formas gerais da função de transferência.....	30
2. Determinação e classificação de pontos críticos.....	34
2.1. Sistemas de terceira ordem, com um zero real e três pólos reais distintos.....	35
2.2. Sistemas de terceira ordem, com um zero real e um pólo real de multiplicidade três.....	45
2.3. Sistemas de terceira ordem, com dois zeros reais distintos e três pólos reais distintos.....	50
2.4. Sistemas de terceira ordem, com um zero real duplo e três pólos distintos...61	
2.5. Sistemas de terceira ordem, com um zero real duplo e um pólo real triplo...68	
Capítulo 03.....	75
3.1. Sistemas de controle lineares com um zero real de multiplicidade m e n pólos reais distintos.....	76
Conclusões.....	83
Referências Bibliográficas.....	84



Resumo

Trata este trabalho da determinação de condições necessárias e suficientes para a análise e determinação de extremos, sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares estáveis, contínuos no tempo, monovariáveis, com pólos e zeros reais.

Efetuuou-se, inicialmente, um estudo de sistemas de controle lineares estáveis e contínuos no tempo, de terceira ordem, com pólos e zeros reais, visando a determinação de extremos, sobre-sinal e reação reversa da resposta a uma entrada degrau unitário, levando-se em conta as posições relativas dos pólos e zeros do sistema.

Com base nos resultados obtidos, obteve-se uma generalização para sistemas de controle lineares estáveis, contínuos no tempo, com n pólos e um zero real de multiplicidade m , para os quais determinou-se o número exato de extremos.

Abstract

It deals with this work from determination of necessary and enough conditions for the analysis and determination of extrema, overshoot and undershoot in steady, continuous linear systems of control in the time, mono variable, with pole real and zero real. It was effected, initially, a study of steady and continuous linear systems of control in the time, of third order, with real poles and real zeros, aiming at the determination of extremities, overshoot and undershoot of the reply to an step-respons, taking in account the relative positions of the polar regions and zeros of the system. On the basis of the gotten results, a generalization for steady, continuous linear systems of control was gotten in the time, with n polar regions and a real zero of multiplicity m , for which the accurate number of extremities was determined.



Introdução

Atualmente os sistemas de controle automático encontram-se difundidos em todas as sociedades desenvolvidas. Tais sistemas agem como elemento catalisador na promoção do desenvolvimento e do progresso. O controle automático é essencial no estudo de sistemas de veículos espaciais, guiamento de mísseis, pilotagem de aviões, robóticos e outros, além de ser aplicado em modernos processos industriais e de fabricação, sistemas biológicos, biomédicos, econômicos e socioeconômicos (Franklin, 1991; Dorf, 1995; Ogata, 1998).

No processo de verificação da qualidade de um sistema de controle linear, são empregados, entre outros meios, a resposta a degrau, a resposta em frequência e a estabilidade e suas margens. “A resposta a degrau é muito utilizada, por ser de fácil verificação experimental e por corresponder a excitar todos os modos de oscilação do sistema” (Castrucci et al, 1991). Os índices de qualidade mais comuns são: o sobre-sinal, o tempo de subida, o tempo de acomodação entre outros índices de desempenho.

Existem alguns problemas como o de controle do eixo de máquinas ferramentas e os de controle de um robô, os quais necessitam seguir uma trajetória pré-definida, onde a resposta a degrau não pode apresentar extremos. Desta forma, o estudo de condições que permitam avaliar extremos, sobre-sinal e reação reversa na resposta a degrau é de grande importância na teoria de controle, de acordo com Ogata (1998), El-Khoury et al (1993), Howell (1997), Rachid (1995), Leon de La Barra (1994), Leon de La Barra e Fernandez (1994-a), Reis et al (2003, 2002, 2001), Silva e Reis (2001).

Muitas contribuições teóricas recentes têm sido feitas no sentido de clarificar a influência dos zeros e das localizações de pólos e zeros da planta na parte transiente da resposta a degrau (El-Khoury, 1993; Rachid, 1995; Howell, 1997; Goodwin, 1999; Leon de la Barra, 1994, 1994-a; Lin e Fang, 1997, Moore, 1990; Reis, 2001, 2002, 2003, 2004; Silva, 2001). Apesar de valiosas, tais contribuições ainda não oferecem um quadro claro de como e quais variações extensas nas localizações de pólos e zeros podem influenciar a determinação de extremos, sobre-sinal e a reação reversa.



A determinação de condições necessárias e suficientes para a determinação de extremos, sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares estáveis, contínuos no tempo e de ordem elevada, é um problema difícil de se resolver, devido ao fato da resposta a degrau ser uma função transcendental. Por exemplo, o problema de se determinar o número exato de extremos da resposta a degrau permanece em aberto (El-Khoury, 1993).

Neste trabalho, será apresentada uma análise dos pontos críticos, extremos, sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares estáveis, contínuos no tempo, monovariáveis, com pólos e zeros reais, com o objetivo de se determinar condições necessárias e suficientes para a obtenção de extremos, sobre-sinal e reação reversa em tais sistemas. Acredita-se que as caracterizações obtidas são de grande importância na teoria de controle, já que permitem uma visão mais esclarecida das condições que possibilitam avaliar pontos críticos, extremos, sobre-sinal e reação reversa, além de clarificar um pouco mais a influência dos zeros e localizações de pólos e zeros da planta, na parte transiente da resposta a degrau.

Este trabalho está organizado como segue. No Capítulo 01, apresentam-se alguns resultados existentes na literatura referente a extremos, sobre-sinal e reação reversa. No Capítulo 02, apresentam-se as análises relativas a pontos críticos, extremos, sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares estáveis, contínuos no tempo, monovariáveis, de terceira ordem e com pólos e zeros reais. No Capítulo 03, apresenta-se uma generalização dos resultados obtidos relativos a extremos, para sistemas de controle linear estáveis, contínuos no tempo, monovariáveis, com n pólos reais distintos e um zero real de multiplicidade m . No Capítulo 04, apresentam-se as conclusões do trabalho e em seguida as Referências Bibliográficas.



Capítulo 01

Neste capítulo, serão apresentados alguns resultados relativos a extremos, sobre-sinal e reação reversa, encontrados na literatura.

1. Resultados Relativos a Extremos.

O efeito dos zeros na resposta a degrau de sistemas de controle lineares invariantes no tempo, tem merecido a atenção de pesquisadores desde os anos 30 (Reis et al, 2002).

É fato conhecido que quando os pólos da função de transferência são reais e negativos, a resposta a degrau apresenta um número finito de extremos. Widder (1934) prova que o número de zeros da função de transferência, no intervalo de convergência da transformada, é pelo menos igual ao número de extremos que podem ocorrer na resposta a degrau de um sistema linear estável, contínuo no tempo.

El-Khoury (1993), fornece limitantes superiores para o número de extremos na resposta a degrau unitário de sistemas de controle reais com pólos e zeros reais. Além disso, caracteriza a localização dos zeros e sua influência no número de extremos da resposta a degrau. Mais precisamente, considera-se o sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, monovariável, com pólos reais distintos e zeros reais, descrito pela função de transferência, com ganho g :

$$G(s) = g \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - \lambda_j)} \quad (1.1)$$

sendo que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$ são os pólos de $G(s)$ e z_i , $i = 1, 2, \dots, m$ seus zeros. $G(s)$ em (1.1) é estritamente própria e sem cancelamento de pólos e zeros. O pólo λ_n é o pólo dominante e o pólo λ_1 é o pólo mais rápido.

A resposta a degrau de $G(s)$ em (1.1) é definida como

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right], \quad t \in [0, +\infty) \quad (1.2)$$

com a condição inicial nula, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0, \dots, y^{(n)}(0) = 0$, onde L^{-1} é o operador transformada inversa de Laplace.

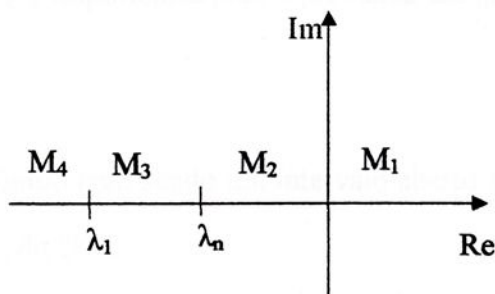
A definição de extremo local na resposta a degrau, apresentada a seguir, é encontrada em El-Khoury (1993):

Definição 1.1: A função $y(t)$ tem um **extremo local** em t^* se existe $\varepsilon > 0$ tal que $[y(t^*) - y(t^* - \tau)][y(t^*) - y(t^* + \tau)] > 0, \forall \tau \in (0, \varepsilon)$.

Definição 1.2: Seja $\eta \geq 0$ o número de extremos locais de $y(t)$ para $t > 0$.

Para a discussão a seguir, é conveniente classificar os zeros da função de transferência (1.1), em quatro diferentes conjuntos, a saber:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{z : G(z) = 0, 0 < z < +\infty\} \\ M_2 &= \{z : G(z) = 0, \lambda_n < z < 0\} \\ M_3 &= \{z : G(z) = 0, \lambda_1 < z < \lambda_n\} \\ M_4 &= \{z : G(z) = 0, -\infty < z < \lambda_1\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$



Em adição, seja $m_i = 1, 2, 3, 4$ o número de zeros pertencentes a uma dada classe M_i , tal que $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

Segundo El-Khoury (1993), o conhecimento de um limitante superior para o número de extremos é frequentemente mais importante do que o conhecimento de um limitante inferior, pois quando o limitante superior é igual a zero, isso garante que a resposta a degrau não apresenta extremos.

O limitante inferior para η já foi determinado por Widder (1934), mediante o seguinte resultado:

Teorema 1.1: (Teorema do Limitante Inferior) O número de zeros de uma função de transferência $G(s)$, no intervalo de convergência da transformada é no máximo igual ao número de extremos locais, ou equivalentemente, $\eta \geq m_1 + m_2$.

Prova: Veja Widder (1934).

Pelo Teorema 1.1, conclui-se que os zeros localizados nas classes M_1 e M_2 causam extremos.

Uma estratégia para a determinação de limitantes superiores para η faz uso do relacionamento entre a resposta a degrau e a resposta ao impulso $g(t)$ de $G(s)$, isto é:

$$y(t) = \int_0^t g(x) dx,$$

onde $g(t) = L^{-1}[G(s)]$, já que $y(t)$ tem um extremo toda vez que $g(t)$ muda de sinal. Assim, o número de zeros de $g(t)$ para $t > 0$, é igual ao número de extremos de $y(t)$. Portanto, o problema de se determinar limitantes superiores para o número de extremos de $y(t)$, é equivalente ao problema de se determinar um limitante superior para o número de zeros positivos de $g(t)$.

As definições que se seguem, são importantes para o problema em questão (El- Khoury, 1993).

Definição 1.3: Um **pólo suporte** é definido com sendo um intervalo aberto $(\lambda_{i-1}, \lambda_i)$, entre dois pólos consecutivos e distintos $\lambda_{i-1} < \lambda_i$, de $G(s)$.

Definição 1.4: Seja p o número de pólos suportes contendo um número ímpar de zeros de $G(s)$.

Definição 1.5: Seja x um inteiro. Então a **paridade de** $(x) = 0$ se x é par e a **paridade de** $(x) = 1$ se x é ímpar.

El-Khoury (1993) apresenta um limitante superior para o numero de extremos de $y(t)$, a saber:



Teorema 1.2: (Teorema do Limitante Superior) O número de extremos de $y(t)$ para $t > 0$ é limitado superiormente por $m_1 + m_2 + m_3 - p$, ou equivalentemente, $\eta \leq m_1 + m_2 + m_3 - p$.

Prova: Veja El-Khoury, (1993).

Os Teoremas 1.1 e 1.2 podem ser combinados e fornecem limitantes superiores e inferiores para o número de extremos, com o resultado a seguir.

Teorema 1.3: (Teorema Geral de Limitação)

- i) $m_1 + m_2 \leq \eta \leq m_1 + m_2 + m_3 - p$;
- ii) paridade $(\eta) = \text{paridade}(m_1 + m_2) = \text{paridade}(m_1 + m_2 + m_3 - p)$.

Prova: Veja El-Khoury, (1993).

Observam-se, do Teorema 1.3, os seguintes resultados práticos:

- i) Zeros localizados à esquerda do pólo mais rápido, isto é, localizados no conjunto M_4 , não influenciam no número de extremos;
- ii) Para um sistema sem zeros com apenas pólos reais, não existe a possibilidade de ocorrerem extremos;
- iii) Zeros localizados entre o pólo mais rápido, λ_1 , e o pólo dominante, λ_n , podem influenciar na ocorrência de extremos.

Esses resultados são aplicáveis às funções de transferência estáveis com zeros reais e pólos reais distintos. Embora seja um resultado importante, o problema da determinação do número exato de extremos da resposta a degrau permanece em aberto.

Rachid (1995) trata o problema dos extremos que podem ocorrer na resposta a degrau de um sistema linear estável com zeros e pólos reais. Para isso apresenta uma condição suficiente sobre os zeros, para evitar extremos, usando a configuração de pólos e zeros da função de transferência.

Para melhor compreensão, considere sem perda de generalidade, um sistema linear estável descrito pela função de transferência com ganho unitário.

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s)}{\prod_{j=1}^n (1 + T_j s)} \quad (1.4)$$

com zeros $z_i = \frac{-1}{\tau_i} < 0$ e os pólos $\lambda_j = \frac{-1}{T_j} < 0$. Assume-se, também, que $G(s)$ é de fase mínima e sem cancelamento de pólos e zeros.

O lema a seguir, encontrado em Rachid, (1995), fornece uma decomposição da função de transferência dada em (1.4).

Lema 1.1: A função de transferência $G(s)$, dada em (1.4), pode sempre ser reescrita sob a forma

$$G(s) = \prod_{i=1}^{r_1} G_{1i}(s) \prod_{j=1}^{r_2} G_{2j}(s) \quad (1.5)$$

com $G_{1i}(s) = \frac{1}{1 + T_{1i}s}$, $G_{2j}(s) = \frac{1 + \tau_{2j}(s)}{1 + T_{2j}(s)}$ e $r_1 + r_2 = n$.

O teorema a seguir, fornece uma condição suficiente para a determinação de extremos na resposta a degrau do sistema de controle (1.4).

Teorema 1.4: A resposta a degrau do sistema dado por (1.4), não apresenta extremos para $t \neq 0$ se o arranjo (1.5), no Lema 1.1, pode ser tomado de maneira que valiam as condições $\tau_{2i} < T_{2j}$, para j pertencente a $[1, r_2]$.

Prova: Veja Rachid (1993).

Do Teorema 1.4, têm-se os resultados práticos:

- i) Se o sistema (1.4) não possui zeros, a resposta a degrau não apresenta extremos para $t > 0$, mas se o sistema (1.4) possui apenas um zero finito z real, sua resposta não tem extremos se existe um pólo λ real, tal que $z < \lambda$;
- ii) Quando o sistema (1.4) tiver dois zeros distintos e finitos, z_1 e z_2 , não ocorrem extremos na resposta a degrau se existir dois pólos reais p_1 e p_2 , tais que $z_1 < \lambda_1$ e $z_2 < \lambda_2$. Note que não é

uma condição necessária que λ_1 e λ_2 sejam distintos, mas se $\lambda_1 = \lambda_2$, a multiplicidade de λ_1 deve ser no mínimo 2.

Rachid mostra que a existência de extremos na resposta a degrau está diretamente relacionada com a configuração de pólos e zeros da função de transferência (1.4). Assim, o Teorema 1.4, apresenta uma condição suficiente para assegurar que não ocorra sobre-sinal na resposta a degrau de um sistema de controle como em (1.4), tornando mais claro o problema do relacionamento de pólos e zeros para a não ocorrência de extremos na resposta a degrau.

Reis e Silva (2001) apresentam uma condição necessária e suficiente para um sistema de segunda ordem, com dois zeros reais distintos z_1 e z_2 , e dois pólos reais distintos λ_1 e λ_2 , apresentar extremos. Considera-se o sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, cuja função de transferência seja dada por:

$$G(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \quad (1.6)$$

Tem-se, então, o seguinte resultado.

Teorema 1.5: O sistema cuja função de transferência é dada por (1.6) possui extremos se e somente se ocorre uma das seguintes condições:

- i) $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < z_2$ e $\lambda_1 + \lambda_2 > z_1 + z_2$;
- ii) $(\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2$ ou $\lambda_1 < z_1 < z_2 < \lambda_2)$ e $\lambda_1 + \lambda_2 < z_1 + z_2$;

O Teorema 1.5 apresenta uma condição necessária e suficiente para a ocorrência de extremos na resposta a degrau de sistemas lineares de segunda ordem, contínuos no tempo, com pólos e zeros reais distintos sendo, portanto, uma complementação ao resultado de Rachid (1995). Reis et al (2002), mostram que para a classe de sistemas de controle lineares estáveis, contínuos no tempo, com um pólo real de multiplicidade três e um zero real de multiplicidade dois, ocorrem situações semelhantes do Teorema 1.5. Para a apresentação de tais resultados seja $G(s)$ com pólos e zeros reais, dada por:

$$G(s) = -\frac{\lambda^3}{z^2} \frac{(s - z)^2}{(s - \lambda)^3} \quad (1.7)$$

Tem-se, então, o seguinte resultado.

Teorema 1.6: O sistema (1.7) possui extremos se e somente se $\lambda < z$.

Prova: Veja Reis, et all (2002).

Corolário 1.1: O sistema (1.7) não possui extremos se e somente se $z < \lambda$.

Prova: Veja Reis, et all (2002).

Uma extensão dos resultados apresentados nos Teoremas 1.5 e 1.6 foi obtida por Reis et all (2003), para sistemas de controle lineares contínuos no tempo, de ordem $n \geq 2$ com um zero real e pólos reais distintos, em termos das localizações de pólos e zeros da correspondente função de transferência.

Considera-se o sistema de controle linear contínuo no tempo, monovariável e estável descrito pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{(Ts+1)}{\prod_{j=1}^n (\tau_j s + 1)} \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{(-Ts+1)}{\prod_{j=1}^n (\tau_j s + 1)} \quad (1.8)$$

sendo que $n \geq 2$, e:

- T é uma constante real estritamente positiva;
- $\tau_j > 0$, $j=1, 2, \dots, n$ são as constantes de tempo do sistema;
- $z = -1/T$, é o zero de $G(s)$ se $z < 0$ ou $z = 1/T$ se $z > 0$;
- $\lambda_j = -1/\tau_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ são os pólos de $G(s)$;
- $\lambda_j \neq \lambda_i$, $\lambda_j \neq z$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Considera-se, ainda, sem perda de generalidade, que:

$\lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < 0$ e que o tempo t pertença ao intervalo $(0, +\infty)$.

Observe-se que $G(s)$ pode ser escrita, na forma de pólos e zeros, do seguinte modo:

$$G(s) = \frac{(-1)^{n+1} \prod_{j=1}^n \lambda_j}{z} \frac{(s-z)}{\prod_{j=1}^n (s-\lambda_j)}. \quad (1.9)$$

Tem-se, então, o seguinte resultado.



Teorema 1.7: Considera-se o sistema de controle linear contínuo no tempo, monovariável, com n pólos reais distintos e com um zero real, estável descrito pela função de transferência (1.8), e a correspondente resposta a uma entrada degrau unitário $y(t)$. Têm-se, então, os seguintes resultados:

- (a) $y(t)$ não apresenta extremos se e somente se $z < \lambda_n$;
- (b) $y(t)$ apresenta um ponto de máximo relativo se e somente se $\lambda_n < z < 0$;
- (c) $y(t)$ apresenta um ponto de mínimo relativo se e somente se $\lambda_n < 0 < z$;

Prova: Veja Reis et al (2003).

Observa-se que o item (a) do Teorema 1.7 coincide com os resultados obtidos por Rachid (1995) e os itens (b) e (c) complementam tais resultados, além de fornecer a classificação dos pontos críticos.

2. Resultados relativos à sobre-sinal e reação reversa.

Na seção 01 foram apresentados os resultados encontrados na literatura relativos a extremos da resposta a degrau. Tais contribuições apesar de importantes, não oferecem um quadro claro de como e quais variações extensas nas localizações de pólos e zeros podem influenciar o sobre-sinal ou overshoot e a reação reversa ou undershoot. Por exemplo, o problema de se determinar o número exato de extremos na resposta a degrau permanece em aberto (El- Khouiry, 1993). Além disso, não é possível efetuar a classificação desses extremos. Daí, a importância de se determinar condições necessárias e suficientes para a determinação de extremos, sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares contínuos no tempo.

2.1.O sobre-sinal em sistemas contínuos

Quando o sistema de controle apresenta pólos e zeros reais, a resposta a degrau é uma combinação de exponenciais, daí a dificuldade e até mesmo a impossibilidade da determinação direta de extremos e conseqüentemente a classificação dos mesmos. Isto justifica a escassez de resultados relativos à determinação de sobre-sinal em sistemas de controle lineares contínuos no tempo.



Para a discussão apresentada, neste trabalho, será utilizada a seguinte definição de sobre-sinal, encontrada em Ogata (1998).

Definição 1.6: O sobre-sinal é uma indicação do maior valor acima do valor de regime durante a evolução do transitório, dado em porcentagem, isto é, $Mp = \frac{y(t_m) - y(\infty)}{y(\infty)} 100\%$, onde:

- $y(t_m)$ é o valor máximo de $y(t)$;
- $y(\infty)$ é o valor de regime de $y(t)$.

Lin e Fang (1997), consideram um sistema linear de terceira ordem SISO com uma função de transferência não estritamente própria dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = K \frac{cs^3 + bs^2 + as + 1}{ps^3 + qs^2rs + 1}, \quad (1.10)$$

onde K pode ser assumido sem perda de generalidade igual a um. Mediante o uso dos coeficientes de (1.10), são obtidas condições necessárias e suficientes para um tal sistema não apresentar sobre-sinal na resposta a degrau, quando os pólos são reais.

No caso de pólos complexos, uma condição suficiente e duas condições necessárias são obtidas para uma tal classe de sistemas não apresentar sobre-sinal.

Reis e Silva (2001) obtêm condições necessárias e suficientes para a existência de sobre-sinal em sistemas de controle linear contínuos no tempo, dado por (1.6). Tais resultados são apresentados pelo teorema a seguir.

Teorema 1.8: Sob as hipóteses do Teorema 1.5, o sistema (1.6) apresenta sobre-sinal se e somente se $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < z_2$ e $\lambda_1 + \lambda_2 > z_1 + z_2$.

Prova: Veja Reis, et al (2001).

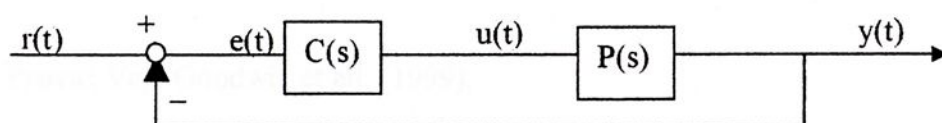
Resultados análogos aos obtidos no Teorema 1.8 também foram obtidos para sistemas de controle de segunda ordem com um zero real e pólos reais. Além disso, uma expressão analítica para o cálculo direto do sobre-sinal foi fornecida em Reis e Silva (2001) e Reis (1994).



Reis et al (2003) efetuam a análise, em termos de sobre-sinal, de um sistema de controle linear contínuo no tempo de ordem n , monovariável e estável descrito pela função de transferência dada em (1.9), e apresenta o seguinte resultado.

Corolário 1.2: Sejam o sistema de controle linear contínuo no tempo, monovariável, com n pólos reais distintos e com um zero real, estável descrito pela função de transferência (1.9), e $y(t)$, sua resposta a uma entrada degrau correspondente. Tem-se, então, que $y(t)$ apresenta sobre-sinal se e somente se $\lambda_n < z < 0$;

Considere o sistema de controle linear, invariante no tempo com realimentação unitária mostrado na figura abaixo:



sendo:

$P(s)$ função de transferência da planta, estritamente própria;

$C(s)$ função de transferência do controlador;

$r(t)$ sinal de referência;

$e(t)$ sinal de erro;

$u(t)$ sinal de entrada na planta;

$y(t)$ sinal de saída da planta.

Seja $G(s) = \frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)}$ a função de transferência entre o sinal de referência $r(t)$ e o

sinal de saída da planta $y(t)$.

Para um sistema de controle linear, invariante no tempo, com realimentação unitária, como na figura acima, Goodwin et al (1999), apresenta limitações fundamentais que surgem da presença de zeros complexos, estáveis, no eixo ou próximo do eixo $j\omega$. A estabilidade desta classe de sistemas de controle é usada em conjunção com a transformada de Laplace para mostrar que as restrições no domínio do tempo devem ser satisfeitas pela resposta a degrau do sistema.

De Goodwin et al (1999), tem-se o seguinte resultado:

Teorema 1.9: Considere um sistema contendo pólos e zeros satisfazendo as seguintes condições:

- (i) A função de transferência, $G(s)$, tem pelo menos um par de zeros próximos ou no eixo $-j\omega$ em $z = -\sigma \pm j\omega_0$, ($\sigma \geq 0$, $\omega_0 > 0$);
- (ii) Todos os pólos da função de transferência têm a parte real maior que $-\alpha$ ($\alpha > \sigma$);

Sob estas condições, a resposta do sistema está sujeita às seguintes restrições:

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha t} (\cos \omega_0 t) [y_{ss} - y(t)] dt = \frac{-\sigma G(0)}{\sigma^2 + \omega_0^2},$$

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha t} (\sin \omega_0 t) [y_{ss} - y(t)] dt = \frac{\omega_0 G(0)}{\sigma^2 + \omega_0^2},$$

sendo $y_{ss} = G(0)$.

Prova: Veja Goodwin et al, (1999).

Como $\sigma \rightarrow 0$, as equações do Teorema 1.9 reduzem para

$$\int_0^{\infty} (\cos \omega_0 t) [y_{ss} - y(t)] dt = 0$$

$$\int_0^{\infty} (\sin \omega_0 t) [y_{ss} - y(t)] dt = \frac{G(0)}{\omega_0}$$

Para ilustrar a importância desses resultados, considera-se uma planta com dois zeros complexos sobre o eixo $j\omega$, em $\pm j\omega$. Seja τ tal que $e_y(t) = 0$, para todo $t > \tau$. Assuma que

$\omega_0 \tau \ll \frac{\pi}{2}$. Então, usando expansão de Taylor para $\cos \omega_0 t$ e para $\sin \omega_0 t$, as equações seguem:

$$\int_0^{\tau} (y_{ss} - y(t)) dt \cong 0$$

$$\int_0^{\tau} (y_{ss} y(t)) t dt \cong \frac{G(0)}{\omega_0^2}$$

Se $\omega_0 \tau < \frac{\pi}{2}$ então da primeira equação acima, segue que $y_{ss} - y(t)$ terá sinais positivos e

negativos, e o sistema apresentará sobre-sinal na resposta a degrau. Mas se o valor de ω_0 é

pequeno, a segunda equação acima indica que o primeiro instante de $y_{ss} - y(t)$ será muito grande.

Porém, se o valor de ω_0 é pequeno e $\omega_0 \tau < \frac{\pi}{2}$ então

$$\int_0^{\tau} \|y_{ss} - y(t)\|_{\infty} t dt \geq \int_0^{\tau} (y_{ss} - y(t)) t dt \cong \frac{P(0)}{\omega_0^2}$$

e então $\|y_{ss} - y(t)\|_{\infty} \geq \frac{2P(0)}{\omega_0^2 \tau^2}$. Assim, $y_{ss} - y(t)$ terá uma grande amplitude em algum tempo.

Na próxima seção apresentam-se resultados encontrados na literatura sobre reação reversa em sistemas de controle lineares contínuos no tempo, e fase não mínima.

2.2. A reação reversa em sistemas contínuos no tempo e de fase não mínima

Um sistema de controle linear é chamado de fase mínima, se todos os seus zeros estão localizados no semi-plano aberto esquerdo. Já os de fase não mínima ou sistemas de reação reversa são os sistemas estáveis para os quais a função de transferência $G(s)$ apresenta zeros no semiplano aberto direito do plano s (R.H.P.). Tais sistemas são identificados da seguinte forma: na aplicação de um degrau na entrada, a saída inicialmente começa em direção contrária ao valor de regime (Reis et al 2002). De acordo com Mita e Yoshida (1981) e Leon de La Barra (1994), tais sistemas podem apresentar uma das características: reação reversa inicial ou do tipo A, reação reversa do tipo B e reação reversa do tipo r_u . Assim, para uma caracterização da reação reversa, considera-se um sistema de controle racional SISO (single input, single output), com a função de transferência $G(s)$ contínua no tempo, estritamente própria, assintoticamente estável, de fase mínima e sem zeros na origem. Leon de La Barra (1994) apresenta as seguintes definições:

Definição 1.7: Seja $G(s)$ como em (1.1) e com ganho não nulo k , e $y(t)$ a sua resposta a degrau unitário. Então diz-se que $y(t)$ apresenta **reação reversa inicial** se $y(t)k < 0$ para todo t tal que $0 < t < t_1$.

Mita e Yoshida (1981) apresentam as definições de reação reversa do **tipo A** e do **tipo B**.

B.



Definição 1.8: Seja $y(t)$, $t \geq 0$, a resposta a degrau escalar no tempo, suficientemente suave, de um sistema dinâmico e assuma que $y(0) = 0$ e se $y^{(n)}$ é a n -ésima derivada de $y(t)$, então:

(a) existe um inteiro positivo e finito n tal que:

$$y(+0) = \dots = y^{(n-1)}(t)|_{t=+0} = 0 \quad \text{e} \quad y^{(n)}(t)|_{t=+0} \neq 0; \quad (1.11)$$

(b) O valor de regime de $y(t)$ existe e é diferente de zero.

Então se diz que $y(t)$ possui **reação reversa do tipo A** se $y^{(n)}(+0)y(\infty) < 0$.

De Vidyasagar (1986), a relação $y^{(n)}(+0)y(\infty) < 0$ é uma versão matemática natural do fato da resposta a degrau inicialmente começar em direção contrária ao valor de regime. A esse fenômeno, dá-se o nome de **reação reversa inicial**.

Definição 1.9: Se não existe reação reversa inicial e existe um intervalo (a, b) tal que $y(t)y(\infty) < 0$ para todo t pertencente a (a, b) , então diz-se que $y(t)$ apresenta **reação reversa do tipo B**.

De la Barra (1994), segue a definição de reação reversa do tipo r_u na resposta a degrau.

Definição 1.10: Seja $G(s)$ como em (1.1) e com ganho não nulo k , e $y(t)$ a sua resposta no domínio do tempo a um degrau unitário e positivo. Então se diz que $y(t)$ apresenta **reação reversa do tipo r_u** para $t > 0$ se as seguintes três condições são satisfeitas:

Existem exatamente r_u valores diferentes de t , $0 < t_1 < \dots < t_{r_u} < +\infty$ tais que:

$$\text{i) } y(t_i)k < 0, i = 1, \dots, r_u, \quad (1.12)$$

$$\text{ii) } \dot{y}(t)|_{t=t_i} = 0, i = 1, \dots, r_u, \quad (1.13)$$

$$\text{iii) } k\ddot{y}(t)|_{t=t_i} > 0, i = 1, \dots, r_u. \quad (1.14)$$

A reação reversa do tipo B ocorre se não existe reação reversa inicial e existe um intervalo aberto onde a resposta a degrau tem sinal oposto ao valor de regime. Já a reação reversa do tipo r_u (Leon de la Barra (1994)), fornece uma descrição mais detalhada do fenômeno da

reação reversa, mediante especificação do número de vezes que a resposta a degrau apresenta reação reversa para $t > 0$.

Para a análise de reação reversa, é importante o conhecimento do número de mudanças de sinais de $y(t)$, já que a resposta a degrau apresenta reação reversa quando $y(t)$ muda de sinal, isto é, $y(t_0) < 0$ para $t_0 \in [0, +\infty)$.

Considerando-se $\tilde{g}(t)$ a resposta ao impulso de $\tilde{G}(s) = \frac{G(s+a)}{(s+a)}$, tem-se que $\tilde{g}(t) =$

$L^{-1}[\tilde{G}(s)] = y(t)e^{-at}$, para $a > 0$ suficientemente pequeno tal que $\tilde{G}(s)$ não apresenta zeros na origem do plano s . Assim, o número de mudanças de sinais de $y(t)$ é exatamente igual ao número de mudanças de sinais de $\tilde{g}(t)$ e, portanto as informações relativas à mudança de sinais de $\tilde{g}(t)$ são importantes para a determinação da reação reversa em $y(t)$.

Leon de La Barra (1994) fornece um limitante inferior para o número de mudanças de sinais da resposta ao impulso $g(t)$, de $G(s)$, em função do número de zeros reais de $G(s)$, localizados estritamente à direita de seu pólo dominante, o qual é apresentado a seguir. Para tal, considere as seguintes hipóteses:

Hipótese 1: Considere um sistema racional SISO caracterizado pela função de transferência continua no tempo $G(s)$. $G(s)$ é também estritamente própria, assintoticamente estável e de fase não mínima, não possuindo zeros na origem do plano complexo.

Teorema 1.10: Se $g(t) \leftrightarrow G(s)$ constituem um par de Transformada de Laplace, com $G(s)$ sendo uma função de transferência assintoticamente estável, estritamente própria com apenas zeros reais e pólos reais simples, mas não necessariamente de fase não mínima. O número de mudanças de sinais de $g(t)$ para $t > 0$ será limitado inferiormente pelo número de zeros de $G(s)$ localizados estritamente à direita do pólo dominante.

Prova: Veja la Barra (1994).

Sob as hipóteses do Teorema 1.10 e a Hipótese 1, é possível estabelecer um resultado mais forte que o teorema anterior. Para tal, considere m_i , $i = 1, 2, 3$, e p conforme na definição 1.4.

Teorema 1.11: Se $g(t) \leftrightarrow G(s)$ constitui um par de Transformada de Laplace, o número de mudanças de sinais de $g(t)$ para $t > 0$ será menor ou igual a $m_1 + m_2 + m_3 - p$.

Prova: Veja la Barra (1994).

O Teorema seguinte estabelece uma condição necessária e suficiente para a resposta a uma entrada degrau de uma planta SISO estável, apresentar reação reversa inicial, encontrado em Vidyasagar (1986).

Teorema 1.12: Um sistema tem reação reversa inicial se e somente se sua função de transferência tem um número ímpar de zeros no semiplano direito.

De acordo com Porter (1987), este fato foi provado por Norimatsu e Ito em 1961. Além disso, Mita e Yoshida (1981) também provaram tal resultado como um corolário de um teorema mais geral relativo ao fenômeno da reação reversa em plantas MIMO (Multiple Input, Multiple Output) estáveis.

Leon de la Barra (1994) contribui para uma caracterização posterior, fornecendo novos esclarecimentos das correlações entre zeros do semiplano aberto direito de uma função de transferência escalar contínua no tempo, e a natureza da reação reversa na sua resposta a degrau, com o seguinte teorema.

Teorema 1.13: Seja $G(s)$ como definida anteriormente, com ganho $k = 1$, e m_1 zeros reais no semiplano aberto direito. Então $y(t)$ apresentará pelo menos reação reversa do tipo r_u para $t > 0$, com r_u dado explicitamente por

$$r_u = \text{int} \left[\frac{m_1 + 1}{2} \right] \quad (1.15)$$

onde $\text{int} [.]$ denota a parte inteira.

Prova: Veja la Barra (1994).



É claro que se m_1 é par, $y(t)$ não apresenta reação reversa inicial (Vidyasagar (1986)). Então $y(t)$ será inicialmente positiva, revertendo necessariamente o seu sinal depois. Por outro lado, se m_1 é ímpar, o sinal inicial de $y(t)$ será sempre oposto ao sinal de seu valor de regime, determinando assim, reação reversa inicial. Este Teorema também é válido para plantas tendo pólos complexos conjugados. Sob as hipóteses adicionais relativas à configuração pólo-zero de $G(s)$, é possível estabelecer um resultado mais forte que o teorema anterior. Para tal, sejam m_1, m_2, m_3, m_4 e p como em (1.3) e na Definição 1.5.

Corolário 1.3: Se em adição ao Teorema 1.13, $G(s)$ tem somente zeros reais e pólos reais simples que satisfazem a condição $p = m_3$, junto com $m_2 \leq 1$, então $y(t)$ apresentará exatamente reação reversa do tipo r_u para $t > 0$, com r_u como no Teorema 1.13.

O Corolário 1.3 fornece, para uma classe maior de sistemas contínuos no tempo e de fase não mínima, o número exato de vezes que a resposta a degrau associada apresenta reação reversa. A sua principal limitação está no fato que plantas com pólos complexos conjugados não estão incluídos na classe anteriormente referida.

Em Reis et al.(2002), encontra-se as observações com relação à reação reversa:

- Os resultados relativos à reação reversa até então discutidos, relacionam os efeitos na resposta a degrau causados por zeros de fase não mínima. No entanto, zeros do semiplano aberto esquerdo também podem causar extremos que acarretam reação reversa. Por exemplo, considere o sistema de fase mínima cuja função de transferência $G(s)$ seja dada por (1.7), com $z = -0,1$ e $p = -1$. Pelo Teorema 1.6, como $\lambda < z$, $G(s)$ possui extremos. Mediante a análise da resposta a degrau $y(t)$, nota-se a existência de um ponto de mínimo negativo e um de máximo. Dessa forma, a reação reversa apresentada por $y(t)$ é devido ao zero $z = -0,1$, que é um zero real negativo. Portanto, o sistema (1.7) é uma classe de sistemas de fase mínima apresentando o efeito da reação reversa.
- Outro ponto é que a resposta a degrau $y(t)$ do sistema caracterizado pela função de transferência contínua no tempo pode apresentar reação reversa em $t = t_0$ mas não satisfazendo a condição (iii) da Definição 1.10.

Dessa forma, Silva et al (2001) e Reis e Silva (2002) apresentam uma análise mais detalhada desse fato, e fornecem uma caracterização mais apurada do fenômeno da reação reversa do tipo r_u , a qual será apresentada a seguir.

2.3. Reação reversa do tipo r_u estendido na resposta a degrau.

Os resultados apresentados, a seguir, encontram-se em Silva et al (2001).

A definição de reação reversa do tipo r_u , caracteriza o número de vezes que a resposta a degrau apresenta reação reversa, considerando o número de mínimos locais negativos de $ky(t)$. É fácil ver que (1.12)-(1.14) são suficientes para a existência de um mínimo local negativo em $t = t_i$, mas em particular (1.14) não é necessária. Considere por exemplo que as condições (i) e (ii) da Definição 1.10 são verificadas em $t = t_i$ e que $\ddot{y}(t) = 0$. Suponha que existe uma constante positiva δ_i tal que para todo $t \in (t_i - \delta_i, t_i)$, tal que $k\dot{y}(t) < 0$, e que para todo $t \in (t_i, t_i + \delta_i)$ tem-se $k\dot{y}(t) > 0$, respectivamente. Então, existe um mínimo local de $ky(t)$ em $t = t_i$ (Courant, (1965), pp. 242). Silva et al (2001) encontram um exemplo dessa situação, o qual é apresentado a seguir.

Exemplo 1: Considere a função de transferência $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{(s - z_0)(s - \tilde{z})(s - z) \prod_{i=1}^7 (s - z_i)(s - \bar{z}_i)}{(s+1)^6 [(s+1)^2 + \pi^2]^2 [(s+1)^2 + 4\pi^2]^4} \quad (1.16)$$

sendo que $z_i, \bar{z}_i$, $i = 1, \dots, 7$ são os zeros complexos conjugados de $G(s)$ e $z_0, z, \tilde{z}$ são os zeros reais. Os valores de $z_0, z, \tilde{z}$ e z_i , $i = 1, \dots, 7$ são dados por $z_0 = -0,000699416$, $z = 1,41185$, $\tilde{z} = 24,4088$, $z_1 = -3,13916 + 7,79002j$, $z_2 = -1,3386 + 5,07124j$, $z_3 = -1,26717 + 2,83482j$, $z_4 = -0,485231 + 3,31632j$, $z_5 = -0,0500769 + 7,17647j$, $z_6 = -0,0449459 + 5,68491j$ e $z_7 = 0,350259 + 2,57319j$. Observa-se que $G(s)$ tem ganho $k = 1$. Silva et al (2001) mostra que $y(1) = -2\pi + 1 < 0$, $\dot{y}(1) = 0$ e $\ddot{y}(1) = 0$, respectivamente. Então, a condição (iii) na Definição 1.10 não é satisfeita em $t = 1$, mas a resposta a degrau exibe reação reversa do tipo B.

Mediante os resultados obtidos no Exemplo 1, observa-se a necessidade de uma caracterização mais geral de reação reversa múltipla na resposta a degrau. Tal caracterização, dada a seguir, é conhecida como reação reversa do tipo r_u estendida.

Definição 1.11: Seja $G(s)$ como na Hipótese 1 e com ganho não nulo k . Seja $y(t)$ a resposta a um degrau unitário e positivo. Então se diz que $y(t)$ apresenta **reação reversa do tipo r_u estendido** para $t > 0$ se as seguintes três condições são satisfeitas:

Existem exatamente r_{ue} valores diferentes de t , $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{r_{ue}} < +\infty$ tais que:

$$i) y(t_i)k < 0, i = 1, \dots, r_{ue}, \quad (1.17)$$

$$ii) \dot{y}(t)|_{t=t_i} = 0, i = 1, \dots, r_{ue}, \quad (1.18)$$

$$iii) k\ddot{y}(t)|_{t=t_i} > 0, i = 1, \dots, r_{ue}. \quad \text{ou} \quad (1.19)$$

$$\ddot{y}(t)|_{t=t_i} = 0 \text{ e existe uma constante positiva } \delta_i \text{ tal que,} \quad (1.20)$$

$$k\dot{y}(t) < 0, \text{ para todo } t \in (t_i - \delta_i, t_i) \text{ e} \quad (1.21)$$

$$k\dot{y}(t) > 0 \text{ para todo } t \in (t_i, t_i + \delta_i), i = 1, \dots, r_{ue}. \quad (1.22)$$

Teorema 1.13: Seja $G(s)$ como na Hipótese 1, com ganho unitário e m_1 zeros reais no semiplano aberto direito. Então $y(t)$ apresentará pelo menos reação reversa do tipo r_u estendido para $t > 0$ com r_{ue} no sentido da Definição (1.11), e dado por $r_{ue} = \text{int} \left[\frac{m_1 + 1}{2} \right]$, onde $\text{int} [.]$ denota a parte inteira.

Prova: Veja Silva et al (2001).

Os resultados apresentados nas seções 2.1, 2.2 e 2.3, apesar de bastante valiosas, ainda não oferecem um quadro claro de como e quais variações extensas nas localizações de pólos e zeros podem influenciar o sobre-sinal e a reação reversa. Além da não existência de técnicas que permitam determinar e classificar os extremos da resposta a degrau, faltam condições necessárias e suficientes para a determinação de sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares estáveis contínuos no tempo.

Sendo assim, o que se propõe neste trabalho, é a obtenção de uma generalização do resultado obtido em Reis et al (2003) para sistemas de ordem n com um zero real, isto é, pretende-se considerar sistemas de controle lineares com n pólos e m zeros. Para tal, será efetuada inicialmente, uma análise em sistemas de controle lineares de terceira ordem, com pólos e zeros reais, baseada nos resultados obtidos em Reis et al (2004-a), quando se considera um sistema de controle linear de terceira ordem com pólos e zeros reais estáveis. A idéia é analisar o comportamento de sistemas de ordem baixa para obter, se possível, generalizações desses resultados para sistemas de ordem elevada, levando-se em conta a configuração pólo-zero de $G(s)$. Isto é o que será descrito nos Capítulos II e III, a seguir.



Capítulo 02

Neste capítulo são apresentados os estudos efetuados relativos a sistemas de controle lineares estáveis, contínuos no tempo, de terceira ordem, com pólos reais e no máximo dois zeros reais, com o objetivo de se determinar condições necessárias e suficientes para a análise de pontos críticos, sobre-sinal e resposta inversa em tais sistemas. Ressalta-se que tais estudos estarão pautados nos resultados obtidos em Reis et al (2004), onde se considerou um sistema de controle de terceira ordem com dois zeros reais distintos.

1. Formas gerais da função de transferência $G(s)$ de um sistema de terceira ordem.

Considera-se o sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, monovariável, com pólos e zeros reais, na forma das constantes de tempo, descrito pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^2 (T_i s + 1)^{l_i}}{\prod_{j=1}^3 (\tau_j s + 1)^{r_j}} \quad (2.1)$$

sendo que:

- $r_j, j = 1, 2, 3$, é a multiplicidade dos pólos de $G(s)$ e $\sum r_j = 3$;
- $l_i, i = 1$ ou 2 , é a multiplicidade dos zeros de $G(s)$ e $\sum l_i = 2$;
- $T_i > 0, i = 1, 2$, são constantes reais;
- $\tau_j > 0, j = 1, 2, 3$ são as constantes de tempo do sistema;
- $z_i = \frac{-1}{T_i}, i = 1, \dots, 2$ são os zeros de $G(s)$;
- $\lambda_j = \frac{-1}{\tau_j}, j = 1, 2, 3$ são os pólos de $G(s)$;
- $\lambda_j \neq z_i, \forall i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Observa-se que a multiplicidade dos pólos e zeros de $G(s)$, em (2.1), pode ser diferente de um.

Considera-se que o tempo t pertença ao intervalo $[0, +\infty)$ e que:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 \text{ e } z_1 < z_2.$$

Quando $\Sigma l_i = 1$, têm-se as seguintes formas para $G(s)$, dada por (2.1), na forma de pólos e zeros:

$$\text{i) } G(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z} \frac{(s-z)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}, \lambda_i \neq \lambda_j, z \neq \lambda_i, i, j = 1, 2, 3; \quad (2.2)$$

$$\text{ii) } G(s) = \frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{z} \frac{(s-z)}{(s-\lambda_1)^2 (s-\lambda_2)}, \lambda_1 \neq \lambda_2; \quad (2.3)$$

$$\text{iii) } G(s) = \frac{\lambda^3}{z} \frac{(s-z)}{(s-\lambda)^3}, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda < 0. \quad (2.4)$$

Quando $\Sigma l_i = 2$, têm-se as seguintes formas para $G(s)$, dada por (2.1), na forma de pólos e zeros:

$$\text{iv) } G(s) = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z_1 z_2} \frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}, z_1 \neq z_2 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3; \quad (2.5)$$

$$\text{v) } G(s) = -\frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{z_1 z_2} \frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-\lambda_1)^2 (s-\lambda_2)}, z_1 \neq z_2 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2; \quad (2.6)$$

$$\text{vi) } G(s) = -\frac{\lambda^3}{z_1 z_2} \frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-\lambda)^3}, z_1 \neq z_2 \neq \lambda; \quad (2.7)$$

$$\text{vii) } G(s) = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z^2} \frac{(s-z)^2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}, z \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3; \quad (2.8)$$

$$\text{viii) } G(s) = -\frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{z^2} \frac{(s-z)^2}{(s-\lambda_1)^2 (s-\lambda_2)}, z \neq \lambda_1 \neq \lambda_2; \quad (2.9)$$

$$\text{vi) } G(s) = -\frac{\lambda^3}{z^2} \frac{(s-z)^2}{(s-\lambda)^3}, z \neq \lambda. \quad (2.10)$$

As respostas a uma entrada a degrau unitário de $G(s)$, dada por (2.1), nas formas (2.2) – (2.10) são dadas, respectivamente, por:

$$\text{i) } y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} \quad (2.11)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \text{a) } c_1 &= \frac{\lambda_2 \lambda_3}{z} \frac{(\lambda_1 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, \\ \text{b) } c_2 &= -\frac{\lambda_1 \lambda_3}{z} \frac{(\lambda_2 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \\ \text{c) } c_3 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z} \frac{(\lambda_3 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\text{ii) } y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.13)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \text{a) } c_1 &= -1 - \frac{\lambda_1^2 (\lambda_2 - z)}{z(\lambda_1 - \lambda_2)^2}, \\ \text{b) } c_2 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - z)}{z(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ \text{c) } c_3 &= \frac{\lambda_1^2 (\lambda_2 - z)}{z(\lambda_1 - \lambda_2)^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\text{iii) } y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_3 t^2 e^{\lambda t}, \quad (2.15)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \text{a) } c_1 &= -1, \\ \text{b) } c_2 &= \lambda, \\ \text{c) } c_3 &= \frac{\lambda^2 (\lambda - z)}{2z}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\text{iv) } y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t}, \quad (2.17)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \text{a) } c_1 &= -\frac{\lambda_2 \lambda_3}{z_1 z_2} \frac{(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, \\ \text{b) } c_2 &= \frac{\lambda_1 \lambda_3}{z_1 z_2} \frac{(\lambda_2 - z_1)(\lambda_2 - z_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \\ \text{c) } c_3 &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} \frac{(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\text{v)} y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.19)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \text{a)} c_1 &= -1 + \frac{\lambda_1^2 (\lambda_2 - z_1)(\lambda_2 - z_2)}{z_1 z_2 (\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \\ \text{b)} c_2 &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{z_1 z_2 (\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ \text{c)} c_3 &= -\frac{\lambda_1^2 (\lambda_2 - z_1)(\lambda_2 - z_2)}{z_1 z_2 (\lambda_2 - \lambda_1)^2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\text{vi)} y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 t^2 e^{\lambda_1 t}; \quad (2.21)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \text{a)} c_1 &= -1, \\ \text{b)} c_2 &= \frac{\lambda(z_1 z_2 - \lambda^2)}{z_1 z_2}, \\ \text{c)} c_3 &= -\frac{\lambda^2 (\lambda - z_1)(\lambda - z_2)}{2 z_1 z_2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\text{vii)} y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t}, \quad (2.23)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \text{a)} c_1 &= -\frac{\lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, \\ \text{b)} c_2 &= \frac{\lambda_3 \lambda_1 (\lambda_2 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \\ \text{c)} c_3 &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\text{viii)} y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.25)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \text{a)} c_1 &= -1 + \frac{\lambda_1^2 (\lambda_2 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2}, \\ \text{b)} c_2 &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_2)}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$c) \ c_3 = -\frac{\lambda_1^2 (\lambda_2 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2}.$$

$$\text{ix) } y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 t^2 e^{\lambda_1 t}, \quad (2.27)$$

sendo que:

$$a) \ c_1 = -1,$$

$$b) \ c_2 = -\frac{\lambda(\lambda^2 - z^2)}{z^2}, \quad (2.28)$$

$$c) \ c_3 = -\frac{\lambda^2 (\lambda - z)^2}{2z^2}.$$

As próximas seções têm como objetivos a determinação de condições necessárias e suficientes para a determinação e classificação dos pontos críticos das respostas a degrau unitário de $G(s)$, dada por (2.1) nas formas (2.2) – (2.10), além da determinação de sobre-sinal e reação reversa.

Neste trabalho, não foram analisadas as classes de sistemas descrito pela função de transferência dada em (2.1), nas formas (2.3) (2.6) e (2.9).

2. Determinação, classificação de pontos críticos, análise de sobre-sinal e reação reversa.

Nesta seção serão apresentadas condições necessárias e suficientes para a determinação e classificação dos pontos críticos de $y(t)$, dadas por (2.11) – (2.28).

Além disso, quando possível, serão determinadas condições necessárias e suficientes para obtenção de sobre-sinal e reação reversa.

Observa-se que, neste trabalho, considera-se as funções de transferência $G(s)$, na forma das constantes de tempo, e portanto, em termos de sobre-sinal, de acordo com a definição 1.6, tem-se que:

$$Mp = (y(t_m) - 1)100\%.$$

Vale lembrar que, $y(t)$ apresenta sobre-sinal se e somente se $y(t_0) - 1 > 0$, onde $y(t_0)$ é o valor máximo relativo de $y(t)$ em t_0 .

2.1. Sistemas de terceira ordem, com um zero real simples e três pólos reais distintos.

Considere o sistema de controle linear (2.1), na forma (2.2). A resposta a uma entrada degrau unitário deste sistema, dada por (2.11), tem expressão:

$$y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t},$$

sendo que os coeficientes c_i , $i = 1, 2, 3$, dados por (2.12), são:

$$c_1 = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{z} \frac{(\lambda_1 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$c_2 = -\frac{\lambda_1 \lambda_3}{z} \frac{(\lambda_2 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)},$$

$$c_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z} \frac{(\lambda_3 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}.$$

Então, de (2.11), tem-se que:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + c_3 \lambda_3 e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t} = 0. \quad (2.29)$$

Em (2.29), fazendo:

$$k_i = c_i \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3 \text{ e } \beta_j = \lambda_j - \lambda_1, \quad j = 2, 3, \quad (2.30)$$

e substituindo (2.30) em (2.29), obtêm-se:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{k_2}{k_1} e^{\beta_2 t} + \frac{k_3}{k_1} e^{\beta_3 t} = 0. \quad (2.31)$$

Em (2.31) definindo:

$$\alpha_i = \frac{k_i}{k_1}, \quad i = 2, 3, \quad (2.32)$$

e substituindo (2.32) em (2.31), segue que:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha_2 e^{\beta_2 t} + \alpha_3 e^{\beta_3 t} = 0. \quad (2.33)$$

Seja $f(t)$ a função definida, a partir de (2.33), como:

$$f(t) = 1 + \alpha_2 e^{\beta_2 t} + \alpha_3 e^{\beta_3 t}. \quad (2.34)$$

De (2.33) e (2.34), nota-se que os pontos críticos de $y(t)$ são os pontos t_0 pertencentes a $[0, +\infty)$ para os quais $f(t_0) = 0$. Além disso, observa-se que:

$$f(t) = \frac{y'(t)}{k_1 e^{\lambda_1 t}}. \quad (2.35)$$

Têm-se, então, os seguintes resultados principais que fornecem condições necessárias e suficientes para a determinação e classificação dos extremos de $y(t)$, dada por (2.11), além de condições necessárias e suficientes para a existência de sobre-sinal e reação reversa em tais sistemas.

Teorema 2.1: Seja $y(t)$, dada por (2.11), a resposta degrau unitário do sistema (2.2). Então:

- i) $y(t)$ apresenta um único extremo relativo em t_0 se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$;
- ii) $y(t)$ apresenta um ponto de máximo relativo em t_0 se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$;
- iii) $y(t)$ apresenta um ponto de mínimo relativo em t_0 se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$;
- iv) $y(t)$ não apresenta extremo relativo se e somente se $z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$.

Teorema 2.2: Seja $y(t)$, dada por (2.11), a resposta a degrau de um sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, com um zero real simples z , e três pólos reais distintos, λ_1, λ_2 e λ_3 .

Tem-se, então que:

- i) $y(t)$ apresenta sobre-sinal se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$ e $t_0 > \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)}{\lambda_1(\lambda_3 - z)} \right]$;
- ii) $y(t)$ apresenta reação reversa inicial se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$.

Corolário 2.1: A resposta a degrau $y(t)$, dada por (2.11), não apresenta sobre-sinal e nem reação reversa se e somente se $z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$.

Para as provas dos Teoremas 2.1 e 2.2 e do Corolário 2.1, necessitam-se de alguns resultados, os quais serão apresentados a seguir.

Lema 2.1: A função $f(t)$ apresenta um único ponto crítico $t_0 \in [0, \infty)$ se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z$.

Prova: De (2.34), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 f'(t) = 0 &\Leftrightarrow f'(t) = \alpha_2 \beta_2 e^{\beta_2 t} + \alpha_3 \beta_3 e^{\beta_3 t} = 0 \Leftrightarrow \\
 e^{(\beta_3 - \beta_2)t} &= -\frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_3 \beta_3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\beta_3 - \beta_2} \ln \left(-\frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_3 \beta_3} \right) \Leftrightarrow \\
 -\frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_3 \beta_3} &> 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda_2 - z}{\lambda_3 - z} > 1 \Leftrightarrow \\
 \lambda_2 < \lambda_3 < z &\Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z.
 \end{aligned}$$

Observação: O resultado do Lema 2.1 independe se z ser positivo ou negativo.

Lema 2.2:

- i) $\alpha_3 > 0$ e $k_1 < 0$ se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$;
- ii) Se $\alpha_3 > 0$ e $k_1 < 0$ então $y(t)$, dada por (2.11) e (2.12), apresenta um único extremo relativo em $t_0 \in (0, +\infty)$. Além disso, t_0 é um ponto de máximo relativo.

Prova: Para a prova de (i), de (2.30) e (2.32), tem-se que:

$$\alpha_3 > 0 \Leftrightarrow \frac{k_3}{k_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{c_3 \lambda_3}{c_1 \lambda_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{c_3}{c_1} > 0 \Leftrightarrow c_3 > 0 \text{ e } c_1 > 0 \text{ ou } c_3 < 0 \text{ e } c_1 < 0.$$

Agora, $k_1 < 0 \Leftrightarrow c_1 \lambda_1 < 0 \Leftrightarrow c_1 > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \alpha_3 > 0 \text{ e } k_1 < 0 &\Leftrightarrow c_3 > 0 \text{ e } c_1 > 0 \Leftrightarrow \\
 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z} \frac{(\lambda_3 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} &> 0 \text{ e } \frac{\lambda_2 \lambda_3}{z} \frac{(\lambda_1 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} > 0 \Leftrightarrow \\
 \frac{(\lambda_3 - z)}{z} > 0 \text{ e } \frac{(\lambda_1 - z)}{z} &> 0.
 \end{aligned}$$

Se $z > 0$, $(\lambda_3 - z) > 0$ e $(\lambda_1 - z) > 0 \Leftrightarrow \lambda_3 > z$ e $\lambda_1 > z \Leftrightarrow z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$, o que é absurdo, pois $z > 0$.

Se $z < 0$, $(\lambda_3 - z) < 0$ e $(\lambda_1 - z) < 0 \Leftrightarrow \lambda_3 < z$ e $\lambda_1 < z \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$.

Para a prova de (ii), de (2.35), tem-se que $f(0) = 0$ e como $\alpha_3 > 0$ segue que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. A

Figura 01, dada a seguir, mostra as possibilidades para o gráfico de $f(t)$.

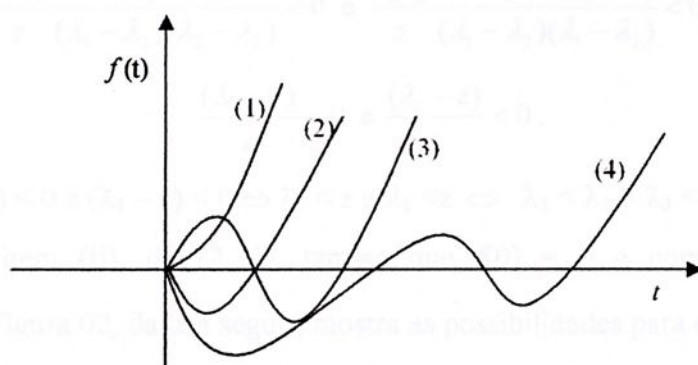


Figura 01 – Possíveis formas para o gráfico de $f(t)$, dada em (2.34).

Pelo Lema 2.1, $f(t)$ apresenta um único ponto crítico, ou seja, existe um único t^* pertencente a $[0, +\infty)$ tal que $f'(t^*) = 0$. Assim, existe um único t_0 pertencente a $(0, +\infty)$ tal que $f(t_0) = 0$. Logo as formas (1), (3) e (4) do gráfico de $f(t)$ na Figura 01 não ocorrem, o que implica na existência de um único ponto crítico t_0 de $y(t)$, ou seja, existe um único $t_0 \in (0, +\infty)$ tal que $y'(t_0) = 0$.

Mas $f(t) = \frac{y'(t)}{k_1 e^{\lambda_1 t}}$. Como $k_1 < 0$ e $f(t) < 0$ para $t < t_0$, como mostra a forma (2) da Figura 01, então $y'(t) > 0$ para $t < t_0$. Assim $y(t)$ é crescente para $t < t_0$. Se $t > t_0$, como $k_1 < 0$ e $f(t) > 0$ implica que $y'(t) < 0$ para $t > t_0$. Sendo assim, $y(t)$ é decrescente para $t > t_0$. Portanto, $y(t)$ possui um máximo relativo em t_0 e o item (ii) está provado.

Lema 2.3:

- i) $\alpha_3 > 0$, $k_1 > 0$ e $z > 0$ se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$;
- ii) Se $\alpha_3 > 0$ e $k_1 > 0$ então $y(t)$ apresenta um único extremo t_0 . Além disso, t_0 é um mínimo relativo.

Prova: Para a prova de (i), segue de (2.30) e (2.32) que:

$$\alpha_3 > 0 \Leftrightarrow \frac{k_3}{k_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{c_3 \lambda_3}{c_1 \lambda_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{c_3}{c_1} > 0 \Leftrightarrow c_3 > 0 \text{ e } c_1 > 0 \text{ ou } c_3 < 0 \text{ e } c_1 < 0.$$

Agora, $k_1 > 0 \Leftrightarrow c_1 \lambda_1 > 0 \Leftrightarrow c_1 < 0$.

Assim,

$$\alpha_3 > 0 \text{ e } k_1 > 0 \Leftrightarrow c_3 < 0 \text{ e } c_1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{z} \frac{(\lambda_3 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} < 0 \text{ e } \frac{\lambda_2 \lambda_3}{z} \frac{(\lambda_1 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\lambda_3 - z)}{z} < 0 \text{ e } \frac{(\lambda_1 - z)}{z} < 0.$$

Como $z > 0$, $(\lambda_3 - z) < 0$ e $(\lambda_1 - z) < 0 \Leftrightarrow \lambda_3 < z$ e $\lambda_1 < z \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$.

Para a prova do item (ii), de (2.35), tem-se que $f(0) = 0$ e como $\alpha_3 > 0$ segue que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. A Figura 02, dada a seguir, mostra as possibilidades para o gráfico de $f(t)$.

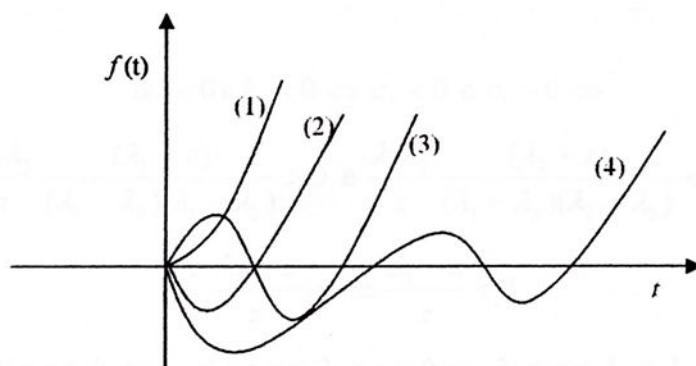


Figura 02 – Possíveis formas para o gráfico de $f(t)$.

Pelo Lema 2.1, $f(t)$ apresenta um único ponto crítico, ou seja, existe um único t^* pertencente a $[0, +\infty)$ tal que $f'(t^*) = 0$, portanto as formas (1), (3) e (4) para o gráfico de $f(t)$, dadas na Figura 02, não ocorrem. Assim, existe um único t_0 pertencente a $[0, +\infty)$ tal que $f(t_0) = 0$, o que implica na existência de um único ponto crítico de $y(t)$ em t_0 , ou seja, existe um único $t_0 \in [0, +\infty)$ tal que $y'(t_0) = 0$.

Mas $f(t) = \frac{y'(t)}{k_1 e^{\lambda_1 t}}$. Como $k_1 > 0$ e pela Figura 02, $f(t) < 0$ para $t < t_0$, então $y'(t) < 0$ para $t < t_0$. Assim $y(t)$ é decrescente para $t < t_0$. Se $t > t_0$, como $k_1 > 0$ e $f(t) > 0$, implica que $y'(t) > 0$ para $t > t_0$, sendo assim, $y(t)$ é crescente para $t > t_0$. Portanto, t_0 é um ponto de mínimo relativo de $y(t)$, o que prova o item (ii).

Lema 2.4:

- i) $\alpha_3 < 0$ e $k_1 < 0$ se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$;
- ii) $\alpha_3 < 0$ e $k_1 > 0$ se e somente se $z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$;

iii) Se $\alpha_3 < 0$ e $k_1 < 0$ ou $\alpha_3 < 0$ e $k_1 > 0$, então $y(t)$ não apresenta extremos.

Prova: Para a prova do item (i), segue de (2.32) que:

$$\alpha_3 < 0 \Leftrightarrow \frac{c_3 \lambda_3}{c_1 \lambda_1} < 0 \Leftrightarrow \frac{c_3}{c_1} < 0 \Leftrightarrow c_3 < 0 \text{ e } c_1 > 0 \text{ ou } c_3 > 0 \text{ e } c_1 < 0.$$

Agora,

$$k_1 < 0 \Leftrightarrow c_1 \lambda_1 < 0 \Leftrightarrow c_1 > 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha_3 < 0 \text{ e } k_1 < 0 &\Leftrightarrow c_3 < 0 \text{ e } c_1 > 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{\lambda_2 \lambda_3}{z} \frac{(\lambda_1 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} > 0 \text{ e } \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z} \frac{(\lambda_3 - z)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} < 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{\lambda_3 - z}{z} > 0 \text{ e } \frac{\lambda_1 - z}{z} < 0. \end{aligned}$$

$$\lambda_1 - z < 0, \lambda_3 - z > 0 \text{ e } z < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < z \text{ e } z < \lambda_3 \text{ e } z < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 \text{ ou } \lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0.$$

Portanto,

$$\alpha_3 < 0 \text{ e } k_1 < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 \text{ ou } \lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0.$$

Para a prova do item (ii), de (2.30) e (2.32), segue que:

$$\alpha_3 < 0 \Leftrightarrow \frac{c_3 \lambda_3}{c_1 \lambda_1} < 0 \Leftrightarrow \frac{c_3}{c_1} < 0 \Leftrightarrow c_3 < 0 \text{ e } c_1 > 0 \text{ ou } c_3 > 0 \text{ e } c_1 < 0.$$

Agora, $k_1 > 0 \Leftrightarrow c_1 \lambda_1 > 0 \Leftrightarrow c_1 < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \alpha_3 < 0 \text{ e } k_1 > 0 &\Leftrightarrow c_3 > 0 \text{ e } c_1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_3 - z}{z} < 0 \text{ e } \frac{\lambda_1 - z}{z} > 0 \Leftrightarrow \lambda_3 - z > 0, \lambda_1 - z > 0 \text{ e } \\ z < 0 &\Leftrightarrow \lambda_3 < z, \lambda_1 < z \text{ e } z < 0 \Leftrightarrow z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0. \end{aligned}$$

Para a prova do item (iii), se $\alpha_3 < 0$ e $k_1 < 0$, pelo item (i), tem-se que $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$ e assim $m_1 = m_2 = 0$ e $m_3 = p = 1$, pelo Teorema 1.3 do Capítulo 01, $\eta = 0$.

Assim, $y(t)$ não apresenta extremos.

Se $\alpha_3 < 0$ e $k_1 > 0$, pelo item (ii), tem-se que $z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ e assim $m_1 = m_2 = m_3 = p = 0$, pelo Teorema 1.3 do Capítulo 01, $\eta = 0$. Assim, $y(t)$ não apresenta extremos.

Observação: O item (iii) também pode ser provado pelo Teorema 1.4, descrito no Capítulo 01, pois z está relacionado com λ_3 . Dessa forma, segundo Rachid (1995), $y(t)$ não apresenta extremos.

Prova do Teorema 2.1: As provas dos itens (i), (ii) e (iii), seguem dos Lemas 2.2 e 2.3. A prova do item (iv), segue do item (iii), do Lema 2.4.

Prova do Teorema 2.2: Para a prova do item (i), inicialmente seja t_0 um ponto de máximo relativo de $y(t)$. Agora, $y(t)$ apresenta sobre-sinal em t_0 se e somente se $y(t_0) - 1 > 0$.

$$y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow c_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 e^{\lambda_2 t_0} + c_3 e^{\lambda_3 t_0} > 0. \quad (2.36)$$

Mas,

$$y'(t_0) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} + c_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 t_0} = 0,$$

daí,

$$c_2 e^{\lambda_2 t_0} = -\frac{c_1 \lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1 t_0} - \frac{c_3 \lambda_3}{\lambda_2} e^{\lambda_3 t_0}. \quad (2.37)$$

A substituição de (2.37) em (2.36), fornece:

$$y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2} c_1 e^{\lambda_1 t_0} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_2} c_3 e^{\lambda_3 t_0} > 0.$$

Substituindo os valores dos coeficientes c_i , $i = 1$ e 3 , na expressão acima, tem-se:

$$y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)}{z(\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_1 t_0} + \frac{\lambda_1(\lambda_3 - z)}{z(\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_3 t_0} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z(\lambda_1 - \lambda_3)} [-\lambda_3(\lambda_1 - z)e^{\lambda_1 t_0} + \lambda_1(\lambda_3 - z)e^{\lambda_3 t_0}] > 0.$$

Como $\lambda_1 - \lambda_3 < 0$, se $z < 0$, segue que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$, então:

$$-\lambda_3(\lambda_1 - z)e^{\lambda_1 t_0} + \lambda_1(\lambda_3 - z)e^{\lambda_3 t_0} > 0 \Leftrightarrow$$

$$-\lambda_3(\lambda_1 - z) + \lambda_1(\lambda_3 - z)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t_0} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(\lambda_3 - z)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t_0} > \lambda_3(\lambda_1 - z)$$

se $\lambda_1(\lambda_3 - z) < 0 \Leftrightarrow (\lambda_3 - z) > 0 \Leftrightarrow \lambda_3 > z$ o que implica, pelo Teorema 1.4, do Capítulo 01, que $y(t)$ não apresenta extremos. Se $\lambda_1(\lambda_3 - z) > 0 \Leftrightarrow (\lambda_3 - z) < 0$, tem-se:

$$y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t_0} > \frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)}{\lambda_1(\lambda_3 - z)} \Leftrightarrow$$

$$t_0 > \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)}{\lambda_1(\lambda_3 - z)} \right] e^{\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)}{\lambda_1(\lambda_3 - z)}} > 1 \Leftrightarrow$$

$$t_0 > \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)}{\lambda_1(\lambda_3 - z)} \right] e^{\lambda_3(\lambda_1 - z) > \lambda_1(\lambda_3 - z)} \Leftrightarrow$$

$$t_0 > \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)}{\lambda_1(\lambda_3 - z)} \right] e^{\lambda_3\lambda_1 - \lambda_3z - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1z} > 0 \Leftrightarrow$$

$$t_0 > \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)}{\lambda_1(\lambda_3 - z)} \right] e^{z(\lambda_1 - \lambda_3)} > 0 \text{ e } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0.$$

Portanto, $y(t)$ apresenta sobre-sinal em t_0 se e somente se $t_0 > \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)}{\lambda_1(\lambda_3 - z)} \right] e^{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0}$.

$\lambda_3 < z < 0$.

Para a prova do item (ii), para $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$, tem-se pelo Teorema 1.11 do Capítulo 01, que $y(t)$ apresenta reação reversa inicial.

Prova do Corolário 2.1: Segue diretamente do item (iv) do Teorema 2.1.

Apresentam-se, a seguir, exemplos de aplicação dos resultados anteriormente obtidos.

Exemplo 01: Considere $G(s)$, dada por:

$$G(s) = \frac{(s+1)}{\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{3}s+1\right)\left(\frac{1}{4}s+1\right)}. \quad (2.38)$$

$G(s)$ possui zero $z = -1$ e pólos $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = -2$. Pelo Teorema 2.1, $y(t)$ apresenta um único extremo relativo, classificado como um ponto de máximo relativo. Pelo Teorema 2.2, como $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$ e $t_0 > 0,2027$, $y(t)$ apresenta sobre-sinal. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$, deste sistema, do qual se depreende tais resultados.

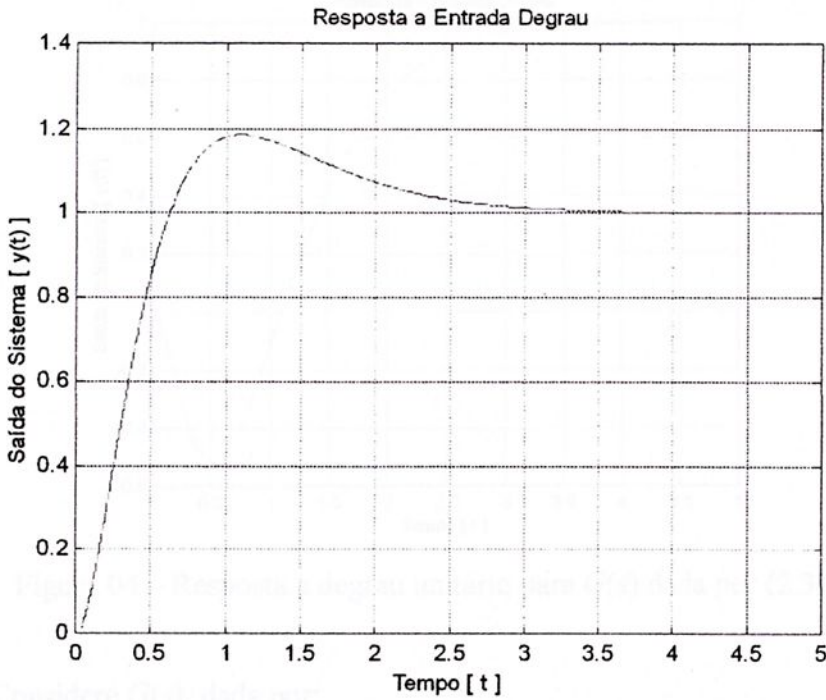


Figura 03 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.38).

Exemplo 02: Considere $G(s)$, dada por:

$$G(s) = \frac{(-s+1)}{(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{3}s+1)(\frac{1}{4}s+1)}. \quad (2.39)$$

$G(s)$ possui zero $z = 1$ e pólos $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = -2$. Pelo Teorema 2.1, $y(t)$ apresenta um único extremo relativo, classificado como um ponto de mínimo relativo. Pelo Teorema 2.2, como $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$, $y(t)$ apresenta reação reversa inicial. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$, deste sistema, do qual se depreende tais resultados.

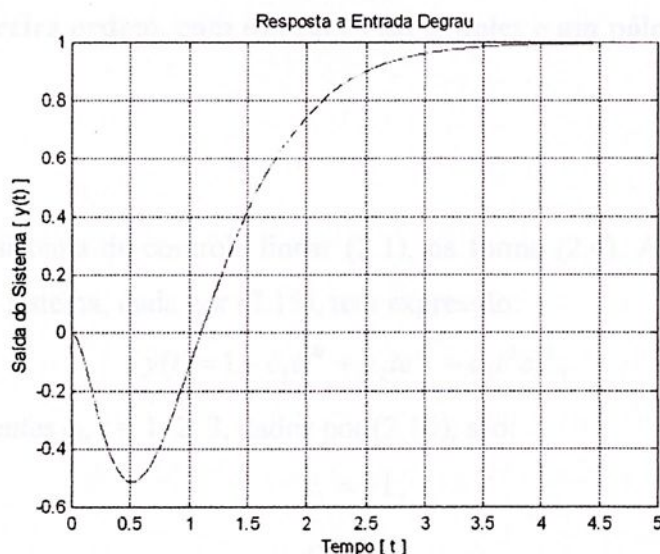


Figura 04 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.39).

Exemplo 03: Considere $G(s)$, dada por:

$$G(s) = \frac{\left(\frac{1}{3}s + 1\right)}{\left(\frac{1}{2}s + 1\right)\left(\frac{1}{4}s + 1\right)\left(\frac{1}{5}s + 1\right)}. \quad (2.40)$$

$G(s)$ possui zero $z = -3$ e pólos $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_3 = -2$. Pelo Teorema 2.1, $y(t)$ não apresenta extremos. Pelo Corolário 2.1, como $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$, $y(t)$ não apresenta reação reversa inicial e nem sobre-sinal. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$, deste sistema, do qual se depreende tais resultados.

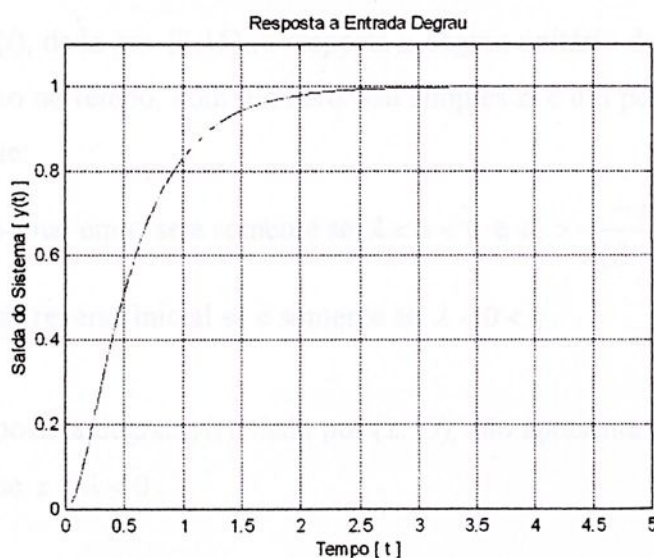


Figura 05 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.40).

2.2. Sistemas de terceira ordem, com um zero real simples e um pólo real de multiplicidade três.

Considere o sistema de controle linear (2.1), na forma (2.4). A resposta a uma entrada degrau unitário deste sistema, dada por (2.15), tem expressão:

$$y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_3 t^2 e^{\lambda t},$$

sendo que os coeficientes c_i , $i = 1, 2, 3$, dados por (2.16), são:

$$c_1 = -1,$$

$$c_2 = \lambda,$$

$$c_3 = \frac{\lambda^2(\lambda - z)}{2z}.$$

De Reis et al (2002), têm-se os seguintes resultados principais:

Teorema 2.3: Seja $y(t)$, dada por (2.15), a resposta a degrau unitário do sistema (2.4). Então:

- i) $y(t)$ apresenta um único extremo relativo se e somente se $\lambda < z$;
- ii) $y(t)$ apresenta um ponto de máximo relativo se e somente se $\lambda < z < 0$;
- iii) $y(t)$ apresenta um ponto de mínimo relativo se e somente se $\lambda < 0 < z$;
- iv) $y(t)$ não apresenta extremos relativos se e somente se $z < \lambda < 0$.

Teorema 2.4: Seja $y(t)$, dada por (2.15), a resposta a degrau unitário de um sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, com um zero real simples z , e um pólo real de multiplicidade três. Tem-se, então que:

- i) $y(t)$ apresenta sobre-sinal em t_0 se e somente se $\lambda < z < 0$ e $t_0 > \frac{-z}{\lambda(\lambda - z)}$;
- ii) $y(t)$ apresenta reação reversa inicial se e somente se $\lambda < 0 < z$.

Corolário 2.2: A resposta a degrau $y(t)$, dada por (2.15), não apresenta sobre-sinal e nem reação reversa se e somente se $z < \lambda < 0$.

Prova do Teorema 2.3: Para a prova do item (i), tem-se de (2.15), que $y(t)$ apresenta extremo em t_0 se e somente se

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow y'(t) = c_1 \lambda e^{\lambda t} + c_2 \lambda t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + c_3 \lambda t^2 e^{\lambda t} + 2c_3 t e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(c_1 \lambda + c_2 + c_2 \lambda t + 2c_3 t + c_3 \lambda t^2) e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$c_3 \lambda t^2 + (c_2 \lambda + 2c_3) t + c_1 \lambda + c_2 = 0.$$

Substituindo os valores de c_1 , c_2 e c_3 , dados em (2.16), tem-se que:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda^3(\lambda - z)}{2z} t_0^2 + \frac{\lambda^3}{z} t_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda^3}{z} t \left\{ 1 + \frac{(\lambda - z)}{2} t \right\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$t \left[\frac{2 + (\lambda - z)t}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } \frac{2 + (\lambda - z)t}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = 0 \text{ ou } t = \frac{-2}{\lambda - z}.$$

Como $y(t)$ apresenta extremo em t_0 , para t_0 pertencente a $(0, +\infty)$, então $t_0 = \frac{-2}{\lambda - z}$ é o único extremo relativo de $y(t)$ se e somente se $\lambda < z$.

Para a prova do item (ii), suponha inicialmente que $\lambda < z < 0$. Seja $f(t)$ definida por

$$f(t) = \frac{\lambda^3(\lambda - z)}{2z} t^2 + \frac{\lambda^3}{z} t. \quad (2.41)$$

Note-se que, $y'(t) = f(t)e^{\lambda t}$. Além disso, $y'(t) = 0$ se e somente se $f(t) = 0$. Como $\lambda < z < 0$, $f(t)$ tem concavidade voltada para baixo e portanto seu gráfico é dado pela Figura 06, dada a seguir.

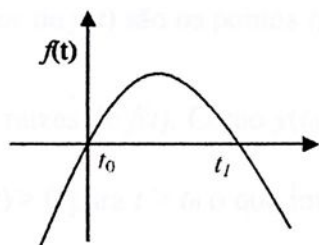


Figura 06 – Gráfico de $f(t)$, dado em (2.41)

Assim, $f(t) > 0$ para $t_0 < t < t_1$ o que implica $y'(t) > 0$ para $t_0 < t < t_1$. Portanto $y(t)$ é crescente neste intervalo. Agora $f(t) < 0$ para $t > t_1$, o que implica que $y'(t) < 0$ para $t > t_1$. Assim $y(t)$ é decrescente para $t > t_1$. Portanto, t_1 é um ponto de máximo relativo de $y(t)$.

Suponha agora que $y(t_0)$ seja o valor máximo de $y(t)$ em t_0 . Seja $f(t)$ dada por (2.41). Como

$y'(t) = f(t)e^{\lambda t}$, então $f(t) = \frac{y'(t)}{e^{\lambda t}}$ e os pontos críticos de $y(t)$ são os pontos $t_0 \in (0, +\infty)$ tais que

$f(t_0) = 0$. Pelo item (i), tem-se $t_0 = 0$ e $t_1 = \frac{-2}{\lambda - z}$ são raízes de $f(t)$. Como $y(t_0)$ é máximo relativo,

$y'(t) > 0$ para $t < t_0$ e então $f(t) > 0$ para $t < t_0$. Além disso, $y'(t) < 0$ para $t > t_0$ o que implica que $f(t) < 0$ para $t > t_0$. Portanto $f(t)$ tem concavidade voltada para baixo, o que implica que:

$$\frac{\lambda^3(\lambda - z)}{2z} < 0. \text{ Como } \lambda < 0, \text{ e pelo item (i), } (\lambda - z) < 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda - z) > 0. \text{ Portanto, } z < 0 \text{ o que}$$

implica $\lambda < z < 0$, o que prova o item (ii). Para a prova do item (iii), considere inicialmente que $\lambda < 0 < z$. Seja $f(t)$ dada por (2.41). Como $\lambda < z < 0$, $f(t)$ tem a forma da Figura 07 a seguir, com raízes em $t = 0$ e $t = t_0$.

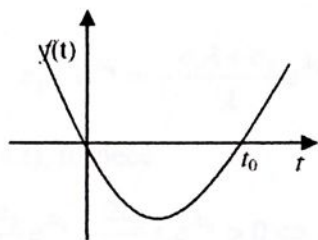


Figura 07 – Gráfico de $f(t)$, dado em (2.41)

Assim, $f(t) < 0$ se $0 < t < t_0$ o que implica $y'(t) < 0$ para $0 < t < t_0$. Portanto, $y(t)$ é decrescente neste intervalo. Agora $f(t) > 0$ para $t > t_0$, o que implica que $y'(t) > 0$ para $t > t_0$. Assim $y(t)$ é crescente para $t > t_0$. Portanto, t_0 é um ponto de mínimo relativo de $y(t)$. Suponha agora que $y(t_0)$ seja o valor mínimo relativo de $y(t)$ em t_0 . Seja $f(t)$ dada por (2.41). Como $y'(t) = f(t)e^{\lambda t}$, então

$$f(t) = \frac{y'(t)}{e^{\lambda t}} \text{ e os pontos críticos de } y(t) \text{ são os pontos } t_0 \in (0, +\infty) \text{ tais que } f(t_0) = 0. \text{ Pelo item (i),}$$

tem-se $t_0 = 0$ e $t_1 = \frac{-2}{\lambda - z}$ são raízes de $f(t)$. Como $y(t_0)$ é mínimo relativo, $y'(t) < 0$ para $t < t_0$

então $f(t) < 0$ para $t < t_0$ e $y'(t) > 0$ para $t > t_0$ o que implica que $f(t) > 0$ para $t > t_0$. Portanto $f(t)$

tem concavidade voltada para cima, o que implica que $\frac{\lambda^3(\lambda - z)}{2z} > 0$. Como $\lambda < 0$, e pelo item

(i), $(\lambda - z) < 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda - z) > 0$. Portanto, $z > 0$ o que implica $\lambda < 0 < z$, o que prova o item (iii).

Para a prova do item (iv), considere inicialmente que $z < \lambda < 0$. Segue do Teorema 1.3, do Capítulo 01, que $m_1 = m_2 = m_3 = p = 0$, e assim $\eta = 0$. Portanto $y(t)$ não apresenta extremos.

Suponha, agora, que $y(t)$ não apresenta extremos, isto é, $\eta = 0$. Pelo Teorema 1.3, do Capítulo

01, $m_1 + m_2 \leq \eta \leq m_1 + m_2 + m_3 - p$, o que implica que $m_1 + m_2 = 0$ e $m_1 + m_2 + m_3 - p = 0$.

Assim, $m_1 = -m_2 = 0$, e pelo fato do sistema apresentar apenas um pólo de multiplicidade três, $m_3 = p = 0$. Portanto, $z < \lambda < 0$.

Prova do Teorema 2.4: Para a prova do item (i), seja t_0 um ponto de máximo relativo de $y(t)$. Agora, $y(t)$ apresenta sobre-sinal em t_0 se e somente se:

$$y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow c_1 e^{\lambda t_0} + c_2 t_0 e^{\lambda t_0} + c_3 t_0^2 e^{\lambda t_0} > 0. \quad (2.42)$$

Mas

$$y'(t_0) = c_1 \lambda e^{\lambda t_0} + c_2 t_0 e^{\lambda t_0} + c_2 \lambda t_0 e^{\lambda t_0} + 2c_3 t_0 e^{\lambda t_0} + c_3 \lambda t_0^2 e^{\lambda t_0} = 0$$

e daí,

$$c_3 t_0^2 e^{\lambda t_0} = -\frac{c_1 \lambda + c_2}{\lambda} e^{\lambda t_0} - \frac{c_2 \lambda + 2c_3}{\lambda} t_0 e^{\lambda t_0}. \quad (2.43)$$

A substituição de (2.43) em (2.42), fornece:

$$\begin{aligned} y(t_0) - 1 > 0 &\Leftrightarrow -\frac{c_2}{\lambda} e^{\lambda t_0} - \frac{2c_3}{\lambda} t_0 e^{\lambda t_0} > 0 \Leftrightarrow -e^{\lambda t_0} - \frac{\lambda(\lambda - z)}{z} t_0 e^{\lambda t_0} > 0 \Leftrightarrow \\ -e^{\lambda t_0} \left[1 + \frac{\lambda(\lambda - z)}{z} t_0 \right] &> 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{\lambda(\lambda - z)}{z} t_0 < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda(\lambda - z)}{z} t_0 < -1 \text{ e } z < 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\lambda(\lambda - z)}{z} t_0 < -1 \text{ e } z < 0 &\Leftrightarrow \\ t_0 > \frac{-z}{\lambda(\lambda - z)} \text{ e } \lambda < z < 0 \end{aligned}$$

e então o item (i) está provado. Para a prova do item (ii), segue diretamente do Teorema 1.12, do Capítulo 01.

Prova do Corolário 2.2: Segue diretamente do item (iv) do Teorema 2.3.

Apresentam-se, a seguir, exemplos de aplicação dos resultados anteriormente obtidos nos Teoremas 2.3 e 2.4.

Exemplo 04: Considere $G(s)$, dada por:

$$G(s) = \frac{(s+1)}{\left(\frac{1}{3}s+1\right)^3}. \quad (2.44)$$

$G(s)$ possui zero $z = -1$ e pólo $\lambda = -3$. Pelo Teorema 2.3, $y(t)$ apresenta um único extremo relativo, classificado como um ponto de máximo relativo. Pelo Teorema 2.4, como $\lambda < z < 0$ e $t_0 > 0,1667$, $y(t)$ apresenta sobre-sinal. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$, deste sistema.

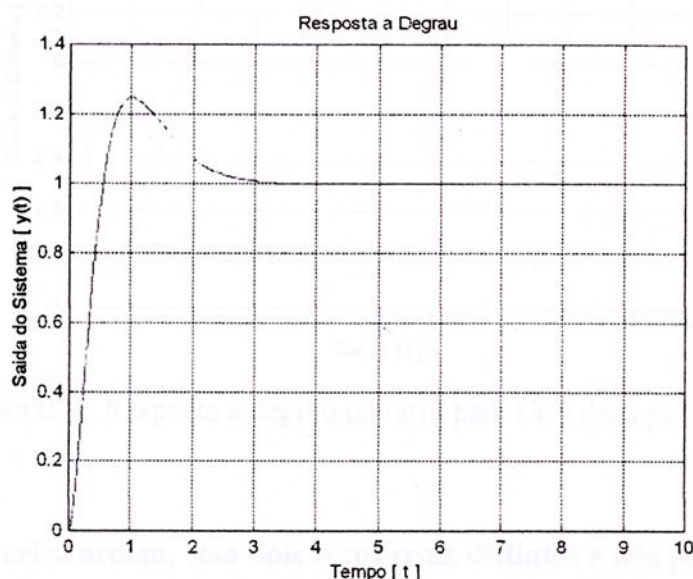


Figura 08 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.44).

Exemplo 05: Considere $G(s)$, dada por:

$$G(s) = \frac{(-s+1)}{\left(\frac{1}{4}s+1\right)^3}. \quad (2.45)$$

$G(s)$ possui zero $z = 1$ e pólo $\lambda = -4$. Pelo Teorema 2.3, $y(t)$ apresenta um único extremo relativo, classificado como um ponto de mínimo relativo. Pelo Teorema 2.4, como $\lambda < 0 < z$, $y(t)$ apresenta reação reversa inicial. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$, deste sistema.

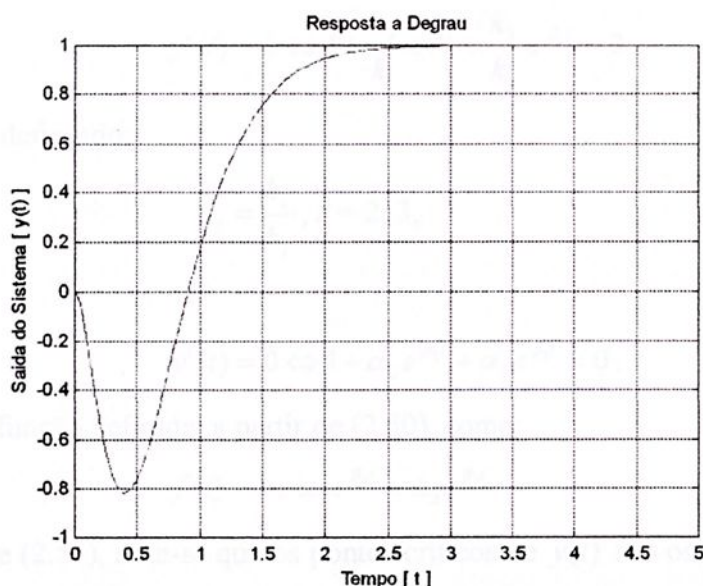


Figura 09 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.45).

2.3. Sistemas de terceira ordem, com dois zeros reais distintos e três pólos reais distintos.

Considere o sistema de controle linear (2.1) na forma (2.5). A resposta a uma entrada degrau unitário desse sistema, dada por (2.17), tem expressão:

$$y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t},$$

sendo que os coeficientes, dados por (2.18), são:

$$c_1 = -\frac{\lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{z_1 z_2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$c_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_2 - z_1)(\lambda_2 - z_2)}{z_1 z_2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)},$$

$$c_3 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)}{z_1 z_2 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}.$$

Então, de (2.18), tem-se que:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + c_3 \lambda_3 e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t} = 0. \quad (2.46)$$

Em (2.46), fazendo:

$$k_i = c_i \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \beta_j = \lambda_j - \lambda_1, \quad j = 2, 3, \quad (2.47)$$

e substituindo (2.47) em (2.46), obtêm-se:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{k_2}{k_1} e^{\beta_2 t} + \frac{k_3}{k_1} e^{\beta_3 t} = 0. \quad (2.48)$$

Em (2.48) definindo:

$$\alpha_i = \frac{k_i}{k_1}, i = 2, 3, \quad (2.49)$$

segue que:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha_2 e^{\beta_2 t} + \alpha_3 e^{\beta_3 t} = 0. \quad (2.50)$$

Seja $f(t)$ a função definida, a partir de (2.50), como:

$$f(t) = 1 + \alpha_2 e^{\beta_2 t} + \alpha_3 e^{\beta_3 t}. \quad (2.51)$$

De (2.50) e (2.51), nota-se que os pontos críticos de $y(t)$ são os pontos t_0 pertencentes a $[0, +\infty)$ para os quais $f(t_0) = 0$. Além disso, observa-se que:

$$f(t) = \frac{y'(t)}{k_1 e^{\lambda_1 t}}. \quad (2.52)$$

Têm-se, então, os seguintes resultados principais, que fornecem condições necessárias e suficientes para a determinação dos extremos, sobre-sinal e reação reversa em $y(t)$ dada por (2.17). Estes resultados podem ser encontrados em Reis, et al (2004). Neste trabalho, serão apresentadas as provas dos resultados que complementam o trabalho de Reis et al (2004).

Teorema 2.5: Seja $y(t)$, dado por (2.17), a resposta a degrau unitário do sistema (2.5). Então:

- i) $y(t)$ apresenta um único extremo relativo em t_0 se e somente se $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < z_2 < 0$ ou $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_2$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_2$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < 0 < z_2$;
- ii) t_0 é um ponto de máximo relativo de $y(t)$ se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2 < 0$ ou $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2 < 0$;
- iii) t_0 é um ponto de mínimo relativo de $y(t)$ se e somente se $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_2$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_2$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < 0 < z_2$.

Teorema 2.6: Seja $y(t)$, dada por (2.17), a resposta a degrau unitário do sistema (2.5). Então:

- i) $y(t)$ pode apresentar zero extremos ou dois extremos se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3 < 0$. Além disso, se $\eta = 2$, então $y(t)$ apresenta um ponto de máximo relativo em t_0 e um ponto de mínimo relativo em t_1 ;
- ii) $y(t)$ apresenta exatamente dois extremos relativos em t_0 e t_1 se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < 0 < z_2$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_1 < z_2$. Além disso, t_0 é um ponto de máximo relativo de $y(t)$ e t_1 é um ponto de mínimo relativo de $y(t)$;
- iii) $y(t)$ não apresenta extremos relativos se e somente se $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < z_2 < \lambda_3 < 0$ ou $z_1 < \lambda_1 < z_2 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $z_1 < z_2 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$.

Teorema 2.7: Seja $y(t)$, dada por (2.17), a resposta a degrau unitário de um sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, com dois zeros reais simples, z_1 e z_2 , e três pólos reais distintos, λ_1 , λ_2 e λ_3 . Tem-se então, que $y(t)$ apresenta sobre-sinal se e somente se:

- i) $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2 < 0$;
- ii) $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_1 < z_2$, e ainda mais $t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right]$ e $\lambda_1 \lambda_3 > z_1 z_2$;
- iii) $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2 < 0$, $t_0 > \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right]$ e $\lambda_1 \lambda_3 < z_1 z_2$;
- iv) $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < 0 < z_2$, $t_0 > \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right]$ e $\lambda_1 \lambda_3 > z_1 z_2$;

Teorema 2.8: Seja $y(t)$, dada por (2.17), a resposta a degrau de um sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, com dois zeros reais z_1 e z_2 , e três pólos reais distintos, λ_1 , λ_2 e λ_3 . Tem-se, então que $y(t)$ dada por (2.17), apresenta reação reversa inicial se e somente se $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_2$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_2$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < 0 < z_2$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < 0 < z_2$.

Teorema 2.9: Seja $y(t)$, dada por (2.17), a resposta a degrau de um sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, com dois zeros reais distintos z_1 e z_2 , e três pólos reais distintos,

λ_1, λ_2 e λ_3 . Tem-se que, se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_1 < z_2$, então $y(t)$ dada por (2.17), apresenta reação reversa do tipo r_u estendido. Além disso, se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3 < 0$, então $y(t)$ pode apresentar reação reversa do tipo r_u estendido.

Corolário 2.3: A resposta a degrau $y(t)$ dada por (2.17), não apresenta sobre-sinal e nem reação reversa se $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < z_2 < \lambda_3 < 0$ ou $z_1 < \lambda_1 < z_2 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $z_1 < z_2 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < z_1 < z_2 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < z_2 < \lambda_3 < 0$.

Prova do Teorema 2.5: Encontra-se em Reis et all (2004).

Para a prova do Teorema 2.6, é necessário o seguinte resultado, também encontrado em Reis et all, (2004).

Lema 2.5:

- i) $\alpha_3 > 0$ e $k_1 > 0$ se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3 < 0$;
- ii) $y(t)$ pode apresentar até dois extremos se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3 < 0$;
- iii) Se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2 < 0$ então $y(t)$ apresenta dois extremos, t_0 e t_1 . Além disso, t_0 é um máximo relativo e t_1 um mínimo relativo de $y(t)$.

Prova: As provas dos itens (i) e (iii) encontram-se em Reis, et. all (2004). Para a prova do item (ii), suponha que $y(t)$ apresenta até dois extremos relativos. Assim, tem-se que $0 \leq \eta \leq 2$, e pelo Teorema 1.3 do Capítulo 01, tem-se que $m_1 + m_2 \leq \eta \leq m_1 + m_2 + m_3 - p$. Portanto,

$$m_1 + m_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2 = 0,$$

$$m_1 + m_2 + m_3 - p = 2 \Leftrightarrow m_3 - p = 2 \Leftrightarrow m_3 = 2 + p.$$

Se $p = 0$, então $m_3 = 2$ e assim, $\lambda_1 < z_1 < z_2 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3 < 0$. Mas $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < z_2 < \lambda_3 < 0$ não ocorre, pois pelo Teorema 1.4, do Capítulo 01, $y(t)$ não apresenta extremos, o que contradiz a hipótese. Se $p = 1$, então $m_3 = 3$, o que não acontece, pois $y(t)$ apresenta apenas dois zeros reais distintos. Suponha, agora, que $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3 < 0$, segue que $m_1 = m_2 = p = 0$ e $m_3 = 2$. Portanto $0 \leq \eta \leq 2$ e o resultado segue.

Prova do Teorema 2.6: As provas dos itens (ii) e (iii), encontram-se em Reis et al (2004). Para a prova do item (i), pelo Lema 2.5, tem-se que $y(t)$ pode apresentar até dois extremos se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3 < 0$, e pelo Teorema 1.3 do Capítulo 01, tem-se que a paridade $(\eta) = 0$, pois a paridade $(m_1 + m_2) = \text{paridade}(\eta) = \text{paridade}(m_1 + m_2 + m_3 - p)$. Assim, η assume apenas valores pares em $0 \leq \eta \leq 2$. Portanto $\eta = 0$ ou $\eta = 2$. Além disso, para $\eta = 2$, tem-se que $y(t)$ apresenta um ponto de máximo relativo de $y(t)$ em t_0 e um ponto de mínimo relativo de $y(t)$ em t_1 , pois se apresentasse dois pontos de máximos relativos ou dois pontos de mínimos relativos teria também um ponto de mínimo relativo ou um de máximo relativo, o que não ocorre, pois $\eta = 2$.

A resposta a degrau, $y(t)$ apresenta sobre-sinal em t_0 , onde t_0 é um ponto de máximo relativo de $y(t)$, se e somente se

$$y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow c_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 e^{\lambda_2 t_0} + c_3 e^{\lambda_3 t_0} > 0. \quad (2.53)$$

Mas

$$y(t_0) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} + c_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 t_0} = 0$$

e daí,

$$c_2 e^{\lambda_2 t_0} = -\frac{c_1 \lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1 t_0} - \frac{c_3 \lambda_3}{\lambda_2} e^{\lambda_3 t_0}. \quad (2.54)$$

Substituindo (2.54) em (2.53), tem-se que:

$$\begin{aligned} y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow y(t_0) &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2} c_1 e^{\lambda_1 t_0} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2} c_3 e^{\lambda_3 t_0} > 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{\lambda_3 (\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{z_1 z_2 (\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_1 t_0} - \frac{\lambda_1 (\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)}{z_1 z_2 (\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_3 t_0} > 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Prova do Teorema 2.7: A prova do item (i) segue do Teorema 6.1 de Reis et al (2004). Para a prova do item (ii), seja t_0 um ponto de máximo relativo de $y(t)$. Então, $y(t)$ apresenta sobre-sinal em t_0 se e somente se

$$\begin{aligned} y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow &\frac{\lambda_3 (\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{z_1 z_2 (\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_1 t_0} - \frac{\lambda_1 (\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)}{z_1 z_2 (\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_3 t_0} > 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{1}{z_1 z_2 (\lambda_1 - \lambda_3)} [\lambda_3 (\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2) e^{\lambda_1 t_0} - \lambda_1 (\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2) e^{\lambda_3 t_0}] > 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 - \lambda_3 < 0$, tem-se $z_1 z_2 > 0$ ou $z_1 z_2 < 0$.

1º Caso: $z_1 z_2 > 0$, com $z_1 < z_2 < 0$.

Assim,

$$y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)e^{\lambda_1 t_0} - \lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)e^{\lambda_3 t_0} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2) - \lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t_0} < 0 \Leftrightarrow$$

$$- \lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t_0} < -\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2).$$

Caso (a): $-\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2) > 0 \Leftrightarrow (\lambda_3 - z_1) > 0$ e $(\lambda_3 - z_2) > 0$ ou $(\lambda_3 - z_1) < 0$ e $(\lambda_3 - z_2) < 0$.

Mas $(\lambda_3 - z_1) > 0$ e $(\lambda_3 - z_2) > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3 < 0$ e $(\lambda_3 - z_1) < 0$ e $(\lambda_3 - z_2) < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 <$

$\lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2 < 0$, pois t_0 é ponto de máximo relativo de $y(t)$. Então

$$y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t_0} < \frac{-\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{-\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \Leftrightarrow$$

$$t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right] e^{\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)}} > 1 \Leftrightarrow$$

$$t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right] e^{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)} < \lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2) \Leftrightarrow$$

$$t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right] e$$

$$\lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_1 z_1 - \lambda_1 z_2 + z_1 z_2) - \lambda_1(\lambda_3^2 - \lambda_3 z_1 - \lambda_3 z_2 + z_1 z_2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right] e$$

$$\lambda_3 \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 z_1 - \lambda_1 \lambda_3 z_2 + \lambda_3 z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_3 z_1 + \lambda_1 \lambda_3 z_2 - \lambda_1 z_1 z_2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right] e^{\lambda_3 \lambda_1^2 + \lambda_3 z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_3^2 - \lambda_1 z_1 z_2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right] e^{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 \lambda_3 - z_1 z_2)} < 0.$$

Como $(\lambda_1 - \lambda_3) < 0$, implica que $\lambda_1 \lambda_3 - z_1 z_2 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_3 > z_1 z_2$.

Assim, $y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2 < 0$ e, além disso,

$$t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right] e^{\lambda_1 \lambda_3} > z_1 z_2.$$

Caso (b): $-\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2) < 0 \Leftrightarrow (\lambda_3 - z_1) > 0$ e $(\lambda_3 - z_2) < 0$ ou $(\lambda_3 - z_1) < 0$ e $(\lambda_3 - z_2) > 0$.

Como $(\lambda_3 - z_1) < 0$ e $(\lambda_3 - z_2) > 0$ não ocorre, pois $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$. Assim, só ocorre $(\lambda_3 - z_1) > 0$ e

$(\lambda_3 - z_2) < 0$ se e somente se $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1$

$< \lambda_3 < z_2 < 0$. Mas para $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < z_2 < 0$ não satisfaz a $t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right]$, para $t_0 > 0$.

2º Caso: $z_1 z_2 > 0$, com $0 < z_1 < z_2$.

Assim,

$$\begin{aligned} y(t_0) - 1 > 0 &\Leftrightarrow \lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)e^{\lambda_1 t_0} - \lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)e^{\lambda_3 t_0} < 0 \Leftrightarrow \\ &\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2) - \lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t_0} < 0 \Leftrightarrow \\ &-\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t_0} < -\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2). \end{aligned}$$

Logo, $-\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2) > 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} y(t_0) - 1 > 0 &\Leftrightarrow (\lambda_3 - z_1) > 0 \text{ e } (\lambda_3 - z_2) > 0 \text{ e } e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t_0} < \frac{-\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{-\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \Leftrightarrow \\ \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_1 < z_2 \text{ e } t_0 &< \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right] \text{ e } \frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} > 1 \Leftrightarrow \\ t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right] &\text{ e } (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 \lambda_3 - z_1 z_2) < 0 \text{ e } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_1 < z_2. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_1 < z_2 \text{ e } t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right] \text{ e}$$

$$\lambda_1 \lambda_3 > z_1 z_2.$$

3º Caso: $z_1 z_2 < 0$, com $z_1 < 0 < z_2$.

Assim,

$$\begin{aligned} y(t_0) - 1 > 0 &\Leftrightarrow \lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)e^{\lambda_1 t_0} - \lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)e^{\lambda_3 t_0} > 0 \Leftrightarrow \\ &\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2) - \lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t_0} > 0 \Leftrightarrow \\ &-\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t_0} > -\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2). \end{aligned}$$

Logo, $-\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2) > 0$, pois t_0 é ponto de máximo relativo $(\lambda_3 - z_1) > 0$ e $(\lambda_3 - z_2) > 0$ ou $(\lambda_3 - z_1) < 0$ e $(\lambda_3 - z_2) < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < 0 < z_2$. Mas $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < 0 < z_2$ não

satisfaz a $t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right]$, para $t_0 > 0$.

Assim, $y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_1 < z_2$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2 < 0$ e $t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{\lambda_1(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)} \right]$ e $\lambda_1 \lambda_3 > z_1 z_2$, o que prova o item (ii). As

provas dos itens (iii) e (iv) são feitas de forma análoga.

Prova do Teorema 2.8: Segue diretamente do Teorema 1.12 do Capítulo 01.

Prova do Teorema 2.9: Suponha que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_1 < z_2$. Defina

$$\tilde{G}(s) = \frac{G(s+a)}{(s+a)} = - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z_1 z_2} \frac{(s - (z_1 - a))(s - (z_2 - a))}{(s - (\lambda_1 - a))(s - (\lambda_2 - a))(s - (\lambda_3 - a))(s - (-a))},$$

para $a > 0$ suficientemente pequeno tal que $\tilde{G}(s)$ não possua zeros na origem do plano s e $z - a > 0$. Então,

$$\tilde{g}(t) = L^{-1}[\tilde{G}(s)] = y(t)e^{-at}.$$

Portanto

$$\tilde{g}(t) = y(t)e^{-at}.$$

Observa-se que os pólos e os zeros de $\tilde{G}(s)$ são respectivamente $z_1 - a$, $z_2 - a$ e o pólo dominante é $\lambda = -a$. Assim, tem-se que $\tilde{m}_2 = \tilde{m}_3 = \tilde{p} = 0$ e $\tilde{m}_1 = 2$, e pelo Teorema 1.10, do Capítulo 01, o número de mudanças de sinais de $\tilde{g}(t) = y(t)e^{-at}$ é pelo menos dois. Como $y(t)$ possui o mesmo número de mudanças de sinais de $\tilde{g}(t)$, então, tem-se que $y(t)$ apresenta pelo menos duas mudanças de sinais, e como $y(t)$ não apresenta reação reversa inicial, tem-se que $y(t)$ apresenta reação reversa do tipo r_u estendido para $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_1 < z_2$.

Observa-se que para $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2 < 0$, quando toma-se a suficientemente pequeno, os zeros z_i , $i = 1, 2$, se posicionam à esquerda do pólo dominante de $\tilde{G}(s)$, e não se aplica o Teorema 1.10, do Capítulo 01. Observa-se ainda, que o Teorema 1.13 do Capítulo 01, não se aplica pelo fato do sistema não apresentar ganho unitário.

Prova do Corolário 2.3: Segue diretamente do Teorema 1.12, do Capítulo 01.

Apresentam-se, a seguir, exemplos de aplicação dos resultados obtidos.

Exemplo 06: Considere $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{(\frac{1}{2}s+1)(2s+1)}{(\frac{1}{4}s+1)(\frac{1}{3}s+1)(s+1)} \quad (2.56)$$

$G(s)$ possui zeros $z_1 = -2$ e $z_2 = -0,5$, pólos $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = -1$. Pelo Teorema 2.5, $y(t)$ apresenta um único extremo relativo, classificados como um ponto de máximo relativo. Pelo Teorema 2.7, como $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < z_2 < 0$, $y(t)$ apresenta sobre-sinal. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$ deste sistema.

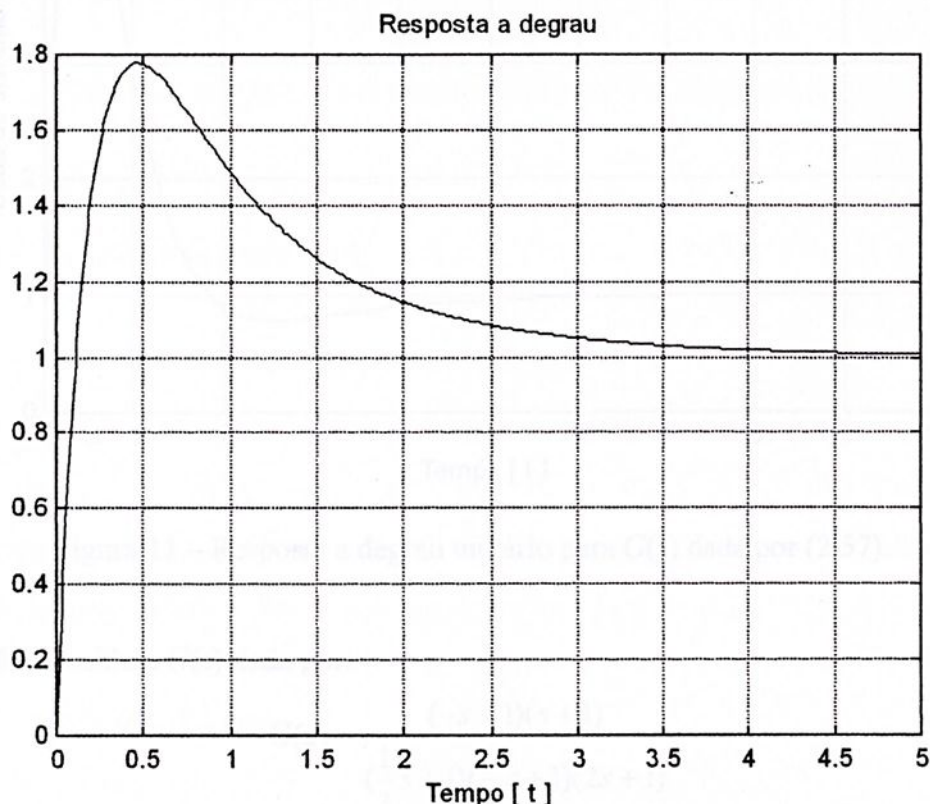


Figura 10 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.56).

Exemplo 07: Considere $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{(2s+1)(3s+1)}{(\frac{1}{3}s+1)(\frac{1}{2}s+1)(s+1)} \quad (2.57)$$

$G(s)$ possui zero $z_1 = -0,5$ e $z_2 = -0,33$, pólos $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -1$. Pelo Teorema 2.6, $y(t)$ apresenta exatamente dois extremos relativos, classificados como um ponto de máximo relativo e um ponto de mínimo relativo. Pelo Teorema 2.7, como $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2 < 0$, $t_0 <$

0,9486 e $\lambda_1 \lambda_3 > z_1 z_2$, então $y(t)$ apresenta sobre-sinal. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$ deste sistema.

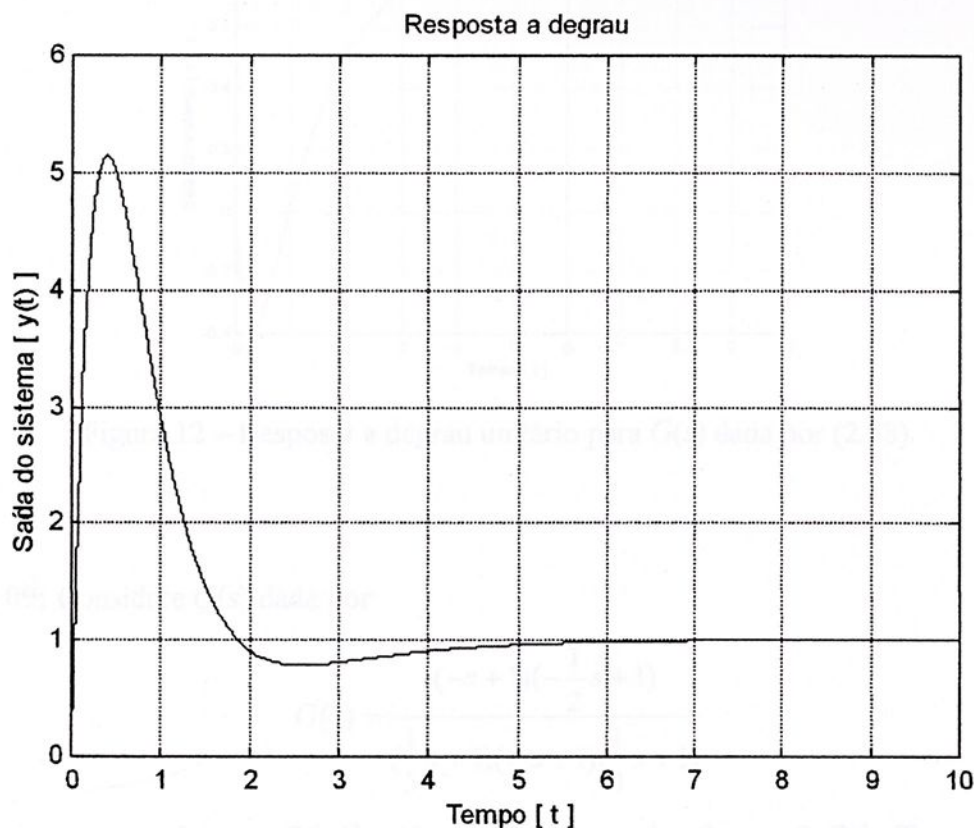


Figura 11 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.57).

Exemplo 08: Considere $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{(-s+1)(s+1)}{\left(\frac{1}{3}s+1\right)\left(\frac{1}{2}s+1\right)(2s+1)}. \quad (2.58)$$

$G(s)$ possui zeros $z_1 = -1$ e $z_2 = 1$, pólos $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -0,5$. Pelo Teorema 2.5, $y(t)$ apresenta um extremo relativo, classificado como um ponto de máximo relativo. Pelo Teorema 2.8, como $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < 0 < z_2$, então $y(t)$ apresenta reação reversa inicial. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$ deste sistema.

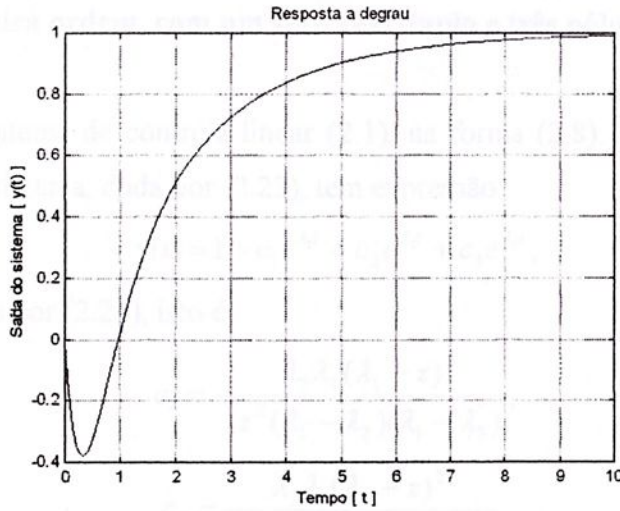


Figura 12 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.58).

Exemplo 09: Considere $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{(-s+1)(-\frac{1}{2}s+1)}{(\frac{1}{5}s+1)(\frac{1}{4}s+1)(\frac{1}{3}s+1)} \quad (2.59)$$

$G(s)$ possui zeros $z_1 = 1$ e $z_2 = 2$, pólos $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_3 = -3$. Pelo Teorema 2.6, $y(t)$ apresenta exatamente dois extremos relativos, classificados como um ponto de máximo relativo e um ponto de mínimo relativo. Pelo Teorema 2.9, como $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z_1 < z_2$, então $y(t)$ apresenta reação reversa do tipo r_u estendido. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$ deste sistema.

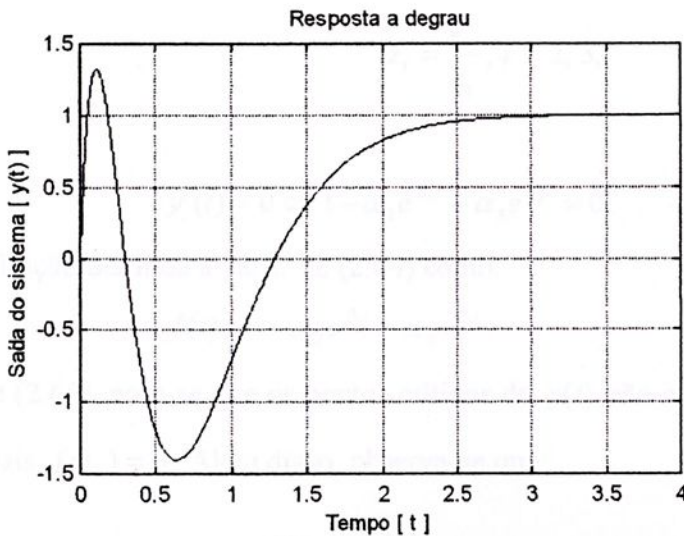


Figura 13 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.59).

2.4. Sistemas de terceira ordem, com um zero real duplo e três pólos reais distintos.

Considere o sistema de controle linear (2.1), na forma (2.8). A resposta a uma entrada degrau unitário desse sistema, dada por (2.23), tem expressão:

$$y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t},$$

e os coeficientes dados por (2.24), isto é :

$$c_1 = -\frac{\lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$c_2 = \frac{\lambda_3 \lambda_1 (\lambda_2 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)},$$

$$c_3 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}.$$

Então, de (2.23), tem-se que:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + c_3 \lambda_3 e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t} = 0. \quad (2.60)$$

Em (2.60), fazendo:

$$k_i = c_i \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \beta_j = \lambda_j - \lambda_1, \quad j = 2, 3; \quad (2.61)$$

e substituindo (2.61) em (2.60), obtém-se:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{k_2}{k_1} e^{\beta_2 t} + \frac{k_3}{k_1} e^{\beta_3 t} = 0. \quad (2.62)$$

Em (2.62) definindo:

$$\alpha_i = \frac{k_i}{k_1}, \quad i = 2, 3, \quad (2.63)$$

segue que:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha_2 e^{\beta_2 t} + \alpha_3 e^{\beta_3 t} = 0. \quad (2.64)$$

Seja $f(t)$ a função definida a partir de (2.64) como:

$$f(t) = 1 + \alpha_2 e^{\beta_2 t} + \alpha_3 e^{\beta_3 t}. \quad (2.65)$$

De (2.64) e (2.65), nota-se que os pontos críticos de $y(t)$ são os pontos t_0 pertencentes a $[0, +\infty)$ para os quais $f(t_0) = 0$. Além disso, observa-se que:

$$f(t) = \frac{y'(t)}{k_1 e^{\lambda_1 t}}. \quad (2.66)$$

Têm-se, então, os seguintes resultados principais que fornecem condições necessárias e suficientes para a determinação dos extremos, sobre-sinal e reação reversa em $y(t)$, dada por (2.23).

Teorema 2.10: Seja $y(t)$, dada por (2.23), a resposta a degrau unitário do sistema (2.8). Então:

- i) Se $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$ então $y(t)$ pode apresentar zero pontos de extremos ou dois pontos de extremos, t_0 e t_1 . Além disso, se $y(t)$ apresenta dois pontos de extremos t_0 e t_1 tem-se que t_0 é o ponto de máximo relativo de $y(t)$ e t_1 é ponto de mínimo relativo de $y(t)$;
- ii) $y(t)$ apresenta exatamente dois pontos de extremos, t_0 e t_1 se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z$. Além disso, t_0 é o ponto de máximo relativo de $y(t)$ e t_1 é ponto de mínimo relativo de $y(t)$;
- iii) $y(t)$ não apresenta extremos se e somente se $z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$.

Teorema 2.11: Seja $y(t)$, dada por (2.23), a resposta a degrau de um sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, com um zero real z duplo, e três pólos reais distintos. Tem-se:

- i) $y(t)$ pode apresentar sobre-sinal se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$ e, além disso, $t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)^2}{\lambda_1(\lambda_3 - z)^2} \right]$ e $\lambda_1 \lambda_3 > z^2$;
- ii) Se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$ então $y(t)$ apresenta reação reversa do tipo r_u estendido.

Corolário 2.4: A resposta a degrau $y(t)$ dada por (2.23), não apresenta sobre-sinal e nem reação reversa se $z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$.

Para as provas dos Teoremas 2.10 e 2.11 e do Corolário 2.4, necessitam-se de alguns resultados, os quais serão apresentados a seguir:

Lema 2.6: A função $f(t)$, dada por (2.66), apresenta um único ponto crítico se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$.

Prova: De (2.66), tem-se que:

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = \alpha_2 \beta_2 e^{\beta_2 t} + \alpha_3 \beta_3 e^{\beta_3 t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{(\beta_3 - \beta_1)t} = -\frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_3 \beta_3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\beta_3 - \beta_2} \ln \left(-\frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_3 \beta_3} \right) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_3 \beta_3} > 1 \Leftrightarrow \frac{(\lambda_2 - z)^2}{(\lambda_3 - z)^2} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{\lambda_2 - z}{\lambda_3 - z} \right| > 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda_2 - z}{\lambda_3 - z} > 1 \text{ ou } \frac{\lambda_2 - z}{\lambda_3 - z} < -1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z \text{ ou } \lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0,$$

o que prova o Lema 2.6.

Lema 2.7:

- i) $\alpha_3 > 0$ e $k_1 > 0$ se e somente se $z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z$;
- ii) Se $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$ então $y(t)$ pode apresentar zero extremos ou dois extremos relativos, t_0 e t_1 . Além disso, t_0 é um ponto de máximo relativo de $y(t)$ e t_1 é um ponto de mínimo relativo de $y(t)$;
- iii) Se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z$ então $y(t)$ apresenta exatamente dois extremos relativos, t_0 e t_1 . Além disso, t_0 é um ponto de máximo relativo de $y(t)$ e t_1 é um ponto de mínimo relativo de $y(t)$;
- iv) Se $z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$, $y(t)$ não apresenta extremos.

Prova: Para a prova do item (i), tem-se de (2.61) e (2.63) que:

$$\alpha_3 > 0 \Leftrightarrow \frac{k_3}{k_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{c_3 \lambda_3}{c_1 \lambda_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{c_3}{c_1} > 0 \Leftrightarrow c_3 > 0 \text{ e } c_1 > 0 \text{ ou } c_3 < 0 \text{ e } c_1 < 0.$$

Mas

$$k_1 > 0 \Leftrightarrow c_1 \lambda_1 > 0 \Leftrightarrow c_1 < 0.$$

Assim, $\alpha_3 > 0$ e $k_1 > 0 \Leftrightarrow c_1 < 0$ e $c_3 < 0$. Agora,

$$\begin{aligned} c_1 < 0 \text{ e } c_3 < 0 &\Leftrightarrow -\frac{\lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3)} < 0 \text{ e } -\frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_3)} < 0 \Leftrightarrow \\ &-(\lambda_1 - z)^2 < 0 \text{ e } -(\lambda_3 - z)^2 < 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 - z)^2 > 0 \text{ e } (\lambda_3 - z)^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &(\lambda_1 < z \text{ ou } \lambda_1 > z) \text{ e } (\lambda_3 > z \text{ ou } \lambda_3 < z). \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha_3 > 0$ e $k_1 > 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 < z \text{ ou } \lambda_1 > z) \text{ e } (\lambda_3 > z \text{ ou } \lambda_3 < z)$. Mas:

$$\lambda_1 > z \text{ e } \lambda_3 > z \Leftrightarrow z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0;$$

$$\lambda_1 < z \text{ e } \lambda_3 < z \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z;$$

$$\lambda_1 < z \text{ e } \lambda_3 > z \Leftrightarrow \lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 \text{ ou } \lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0;$$

$$\lambda_1 > z \text{ e } \lambda_3 < z \text{ não ocorre, pois } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

Dai, $\alpha_3 > 0$ e $k_1 > 0 \Leftrightarrow z < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$, o que prova o item (i). Para a prova de (ii), suponha que $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$. Então, tem-se que $m_1 = m_2 = p = 0$ e $m_3 = 2$. Pelo Teorema 1.3, descrito no Capítulo 01, $0 \leq \eta \leq 2$ e a paridade de $(\eta) = 0$. Assim η assume apenas valores pares em $0 \leq \eta \leq 2$, o que se conclui que $\eta = 0$ ou $\eta = 2$. Além disso, para $\eta = 2$, tem-se que $y(t)$ apresenta um ponto de máximo relativo em t_0 e um ponto de mínimo relativo em t_1 , pois se apresentasse dois máximos relativos, teria também um ponto de mínimo relativo, ou se apresentasse dois pontos de mínimos relativos, teria também um ponto de máximo relativo, o que não ocorre, pois $\eta = 2$. Para a prova do item (iii), se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z$, pode ocorrer que $z < 0$ ou $z > 0$. Suponha inicialmente que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$. Segue do Teorema 1.3, do Capítulo 01, que $m_1 = m_3 = p = 0$ e $m_2 = 2$. Assim, tem-se que $\eta = 2$. Suponha agora, que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$, segue do Teorema 1.3, do Capítulo 01, que $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = p = 0$. Assim, tem-se que $\eta = 2$. Em ambas as situações, $y(t)$ apresenta exatamente dois extremos. Como $k_1 > 0$ e $\alpha_3 > 0$, segue que $f(0) = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z^2 k_1} > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. A figura a seguir mostra o gráfico de $f(t)$.

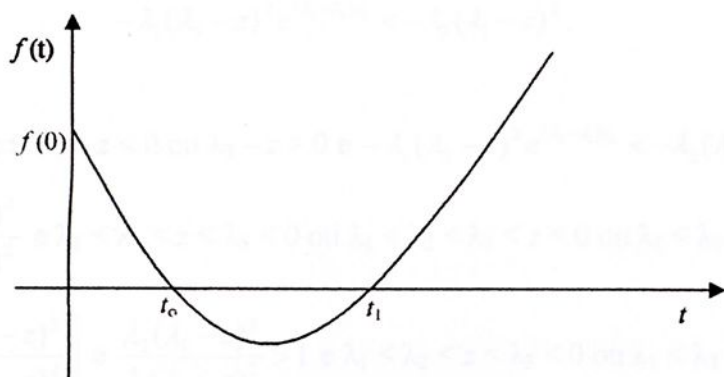


Figura 15 – Gráfico de $f(t)$.

Uma análise do gráfico de $f(t)$, segue que $f(t) > 0$ para $0 < t < t_0$ e o que implica que $y'(t) > 0$ para $0 < t < t_0$ e, portanto $y(t)$ é crescente neste intervalo, e para $t_0 < t < t_1$, $f(t) < 0$, o que implica que $y'(t) < 0$ e portanto $y(t)$ é decrescente. Assim, t_0 é um ponto de máximo relativo de $y(t)$. Para $t > t_1$ segue que $f(t) > 0$, o que implica que $y'(t) > 0$ para $t > t_0$ e, portanto $y(t)$ é crescente. Assim, t_1 é ponto de mínimo relativo de $y(t)$, o que prova o item (iii). Para a prova do item (iv), Segue diretamente do Teorema 1.4 do Capítulo 01.

Prova do Teorema 2.10: Parte da prova segue diretamente do Lema 2.7.

Prova do Teorema 2.11: Para a prova do item (i), seja t_0 um ponto de máximo relativo de $y(t)$. Então, $y(t)$ apresenta sobre-sinal em t_0 , onde t_0 é um ponto de máximo relativo se e somente se:

$$y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow c_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 e^{\lambda_2 t_0} + c_3 e^{\lambda_3 t_0} > 0. \quad (2.69)$$

Mas

$$y(t_0) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} + c_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 t_0} = 0$$

e daí,

$$c_2 e^{\lambda_2 t_0} = -\frac{c_1 \lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1 t_0} - \frac{c_3 \lambda_3}{\lambda_2} e^{\lambda_3 t_0}. \quad (2.70)$$

Substituindo (2.70) em (2.69), tem-se que:

$$\begin{aligned} y(t_0) &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2} c_1 e^{\lambda_1 t_0} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2} c_3 e^{\lambda_3 t_0} > 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{\lambda_3 (\lambda_1 - z)}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_1 t_0} - \frac{\lambda_1 (\lambda_3 - z)^2}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_3 t_0} > 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{1}{z^2 (\lambda_1 - \lambda_3)} [\lambda_3 (\lambda_1 - z)^2 e^{\lambda_1 t_0} - \lambda_1 (\lambda_3 - z)^2 e^{\lambda_3 t_0}] > 0 \Leftrightarrow \\ &\lambda_3 (\lambda_1 - z)^2 e^{\lambda_1 t_0} - \lambda_1 (\lambda_3 - z)^2 e^{\lambda_3 t_0} < 0 \Leftrightarrow \\ &-\lambda_1 (\lambda_3 - z)^2 e^{(\lambda_3 - \lambda_1) t_0} < -\lambda_3 (\lambda_1 - z)^2. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Dai,

$$\begin{aligned} y(t_0) - 1 > 0 &\Leftrightarrow \lambda_3 - z < 0 \text{ ou } \lambda_3 - z > 0 \text{ e } -\lambda_1 (\lambda_3 - z)^2 e^{(\lambda_3 - \lambda_1) t_0} < -\lambda_3 (\lambda_1 - z)^2 \Leftrightarrow \\ e^{(\lambda_3 - \lambda_1) t_0} &< \frac{\lambda_3 (\lambda_1 - z)^2}{\lambda_1 (\lambda_3 - z)^2} \text{ e } \lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0 \text{ ou } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0 \text{ ou } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z \Leftrightarrow \\ t_0 &< \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3 (\lambda_1 - z)^2}{\lambda_1 (\lambda_3 - z)^2} \right] \text{ e } \frac{\lambda_3 (\lambda_1 - z)^2}{\lambda_1 (\lambda_3 - z)^2} > 1 \text{ e } \lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0 \text{ ou } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0 \text{ ou } \lambda_1 \\ &< \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)^2}{\lambda_1(\lambda_3 - z)^2} \right] \text{ e } \lambda_3(\lambda_1 - z)^2 < \lambda_1(\lambda_3 - z)^2 \text{ e } \lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0 \text{ ou } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$$

$$0 \text{ ou } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z \Leftrightarrow$$

Logo, $y(t)$ apresenta sobre-sinal se e somente se e $\lambda_1 < \lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$ ou

$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$ e, além disso, $t_0 < \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \ln \left[\frac{\lambda_3(\lambda_1 - z)^2}{\lambda_1(\lambda_3 - z)^2} \right]$ e $\lambda_1 \lambda_3 > z^2$, o que prova o item (i).

Para a prova do item (ii), suponha que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$. Defina

$$\tilde{G}(s) = \frac{G(s+a)}{(s+a)} = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z^2} \frac{(s-(z-a))^2}{(s-(\lambda_1-a))(s-(\lambda_2-a))(s-(\lambda_3-a))(s+a)}$$

para $a > 0$, tomado suficientemente pequeno tal que $\tilde{G}(s)$ não tenha zeros na origem e $z-a > 0$.

Então,

$$\tilde{g}(t) = L^{-1}[\tilde{G}(s)] = y(t)e^{-at}.$$

Portanto

$$\tilde{g}(t) = y(t)e^{-at}$$

Observe que o pólo dominante de $\tilde{G}(s)$ é $\lambda = -a$. Assim, tem-se que $\tilde{m}_2 = \tilde{m}_3 = \tilde{p} = 0$ e $\tilde{m}_1 = 2$,

e pelo Teorema 1.10, do Capítulo 01, o número de mudanças de sinais de $\tilde{g}(t) = y(t)e^{-at}$ é pelo menos dois. Como $y(t)$ possui o mesmo número de mudanças de sinais de $\tilde{g}(t)$, então tem-se que $y(t)$ apresenta pelo menos duas mudanças de sinais, e como $y(t)$ não apresenta reação reversa inicial, tem-se que $y(t)$ apresenta reação reversa do tipo r_u estendido para $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$.

Prova do Corolário 2.4: Segue do Teorema 2.10.

Apresentam-se, a seguir, exemplos de aplicação dos resultados anteriormente obtidos.

Exemplo 10: Considere $G(s)$, dada por:

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{(\frac{1}{5}s+1)(\frac{1}{4}s+1)(\frac{1}{3}s+1)}. \quad (2.70)$$

$G(s)$ possui zero $z = -1$ e pólos $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_3 = -3$. Pelo Teorema 2.10, $y(t)$ apresenta exatamente dois extremos relativos, classificados como um ponto de máximo relativo e um ponto de mínimo relativo. Pelo Teorema 2.11, como $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z < 0$ e $t_0 < 0,43$, $y(t)$

apresenta sobre-sinal. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$, deste sistema .

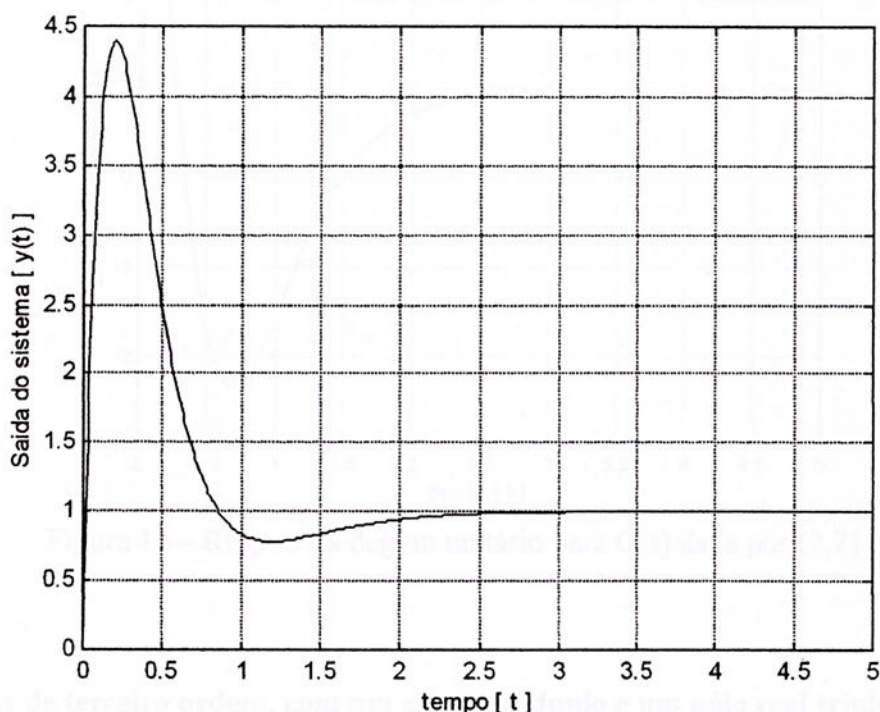


Figura 16 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.70).

Exemplo 11: Considere $G(s)$ seja dada por:

$$G(s) = \frac{(-s+1)^2}{(\frac{1}{5}s+1)(\frac{1}{4}s+1)(\frac{1}{3}s+1)}. \quad (2.71)$$

$G(s)$ possui zero $z = 1$ e pólos $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_3 = -3$. Pelo Teorema 2.10, $y(t)$ apresenta exatamente dois extremos relativos, classificados como um ponto de máximo relativo e um ponto de mínimo relativo. Pelo Teorema 2.11, como $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < z$, $y(t)$ apresenta reação reversa do tipo r_u estendido. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$, deste sistema.

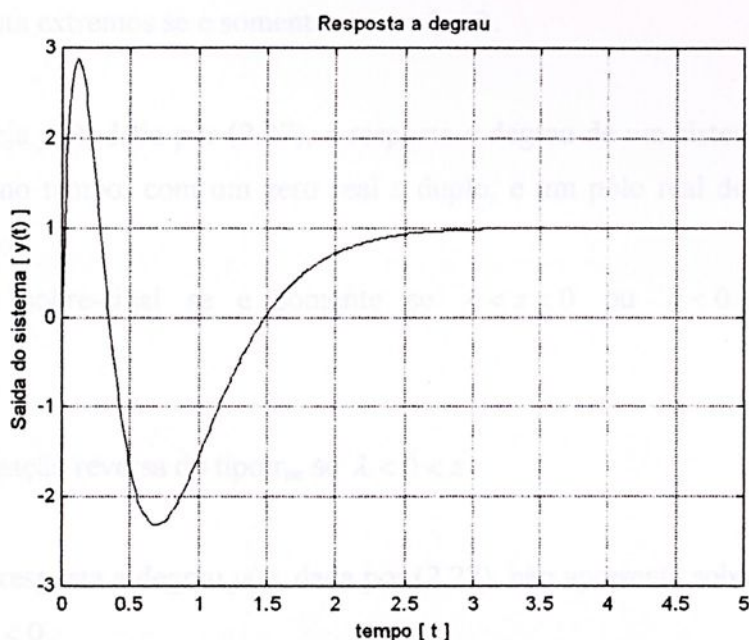


Figura 16 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.71).

2.5. Sistemas de terceira ordem, com um zero real duplo e um pólo real triplo.

Considere o sistema de controle linear (2.1), na forma (2.10). A resposta a uma entrada degrau unitário desse sistema, dada por (2.27), tem expressão:

$$y(t) = 1 + c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_3 t^2 e^{\lambda t}, \quad (2.72)$$

e os coeficientes dados por (2.28), isto é :

$$c_1 = -1,$$

$$c_2 = -\frac{\lambda(\lambda^2 - z^2)}{z^2},$$

$$c_3 = -\frac{\lambda^2(\lambda - z)^2}{2z^2}.$$

Observa-se que $c_3 < 0$. Têm-se, então, os seguintes resultados principais, que fornecem condições necessárias e suficientes para a determinação dos extremos, sobre-sinal e reação reversa em $y(t)$ dada por (2.27).

Teorema 2.12: Seja $y(t)$, dada por (2.27), a resposta a degrau unitário do sistema (2.10). Então:

- i) $y(t)$ apresenta exatamente dois extremos se e somente se $\lambda < z$. Além disso, t_0 é um ponto de máximo relativo de $y(t)$ e t_1 é um ponto de mínimo relativo de $y(t)$;

ii) $y(t)$ não apresenta extremos se e somente se $z < \lambda < 0$.

Teorema 2.13: Seja $y(t)$, dada por (2.27), a resposta a degrau de um sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, com um zero real z duplo, e um pólo real de multiplicidade três.

Tem-se, então que:

i) $y(t)$ apresenta sobre-sinal se e somente se $\lambda < z < 0$ ou $\lambda < 0 < z$ e, além disso,

$$t_0 < -\frac{(\lambda + z)}{\lambda(\lambda - z)};$$

ii) $y(t)$ apresenta reação reversa do tipo r_{ue} se $\lambda < 0 < z$.

Corolário 2.5: A resposta a degrau $y(t)$, dada por (2.27), não apresenta sobre-sinal e nem reação reversa se $z < \lambda < 0$.

Prova do Teorema 2.12: Para a prova do item (i), tem-se que $y(t)$ apresenta um extremo relativo em t_0 se e somente se

$$\begin{aligned} y'(t) &= 0 \Leftrightarrow \\ y'(t) &= c_1 \lambda e^{\lambda t} + c_2 \lambda t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + c_3 \lambda t^2 e^{\lambda t} + 2c_3 t e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow \\ (c_1 \lambda + c_2 + c_2 \lambda t + 2c_3 t + c_3 \lambda t^2) e^{\lambda t} &= 0 \Leftrightarrow \\ c_3 \lambda t_0^2 + (c_2 + 2c_3) t_0 + c_1 \lambda + c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Substituindo os coeficientes na igualdade acima, tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda^3(\lambda - z)^2}{2z^2} t^2 - \frac{\lambda^3(\lambda - z)}{z^2} - \frac{\lambda^3}{z^2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\lambda - z}{2} t^2 + 2t + \frac{1}{\lambda - z} &= 0 \Leftrightarrow \\ t_0 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{\lambda - z} \text{ e } t_1 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{\lambda - z}. \end{aligned}$$

Como só interessa pontos críticos em $(0, +\infty)$, tem-se que $y'(t) > 0$ se e somente se $t_0 > 0$ e $t_1 > 0$ se e somente se $\lambda < z$. Seja $f(t)$ definida por:

$$f(t) = -\frac{\lambda^3(\lambda - z)^2}{2z^2} t^2 - \frac{2\lambda^3(\lambda - z)}{z^2} - \frac{\lambda^3}{z^2}. \quad (2.73)$$

Note que $y'(t) = f(t)e^{\lambda t}$ e $f(t)$ é uma função quadrática com raízes $t_0 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{\lambda - z}$ e

$t_1 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{\lambda - z}$. Além disso, $y'(t_0) = 0$ se e somente se $f(t) = 0$. Suponha que $\lambda < z$. Então $f(t)$ tem

concavidade voltada para cima, pois $-\frac{\lambda^3(\lambda - z)^2}{2z^2} > 0$, e com o gráfico conforme a Figura 17, a

seguir:

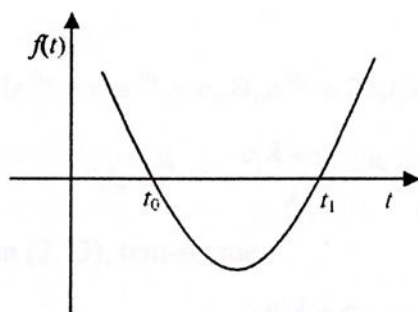


Figura 17 – Gráfico de $f(t)$, dado por (2.84).

Assim, $f(t) > 0$ para $0 < t < t_0$ o que implica que $y'(t) > 0$ para $0 < t < t_0$, portanto $y(t)$ é crescente neste intervalo. Agora, $f(t) < 0$ para $t_0 < t < t_1$, o que implica que $y'(t) < 0$ para $t_0 < t < t_1$. Assim, $y(t)$ é decrescente para $t_0 < t < t_1$. Portanto, t_0 é um ponto de máximo relativo de $y(t)$.

Agora, $f(t) > 0$ para $t > t_1$, o que implica que $y'(t) > 0$ para $t > t_1$, portanto $y(t)$ é crescente neste intervalo. Portanto, t_1 é um ponto de mínimo relativo de $y(t)$.

Suponha agora que $y(t)$ assuma o valor máximo em t_0 e assumo o valor mínimo em t_1 . Seja $f(t)$ dada por (2.75). Como $y'(t) = f(t)e^{\lambda t}$, então $f(t) = \frac{y'(t)}{e^{\lambda t}}$ e os pontos críticos de $y(t)$ são os

pontos t_0 e $t_1 \in (0, +\infty)$ tais que $f(t_0) = f(t_1) = 0$. Tem-se que $t_0 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{\lambda - z}$ e $t_1 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{\lambda - z}$ são

raízes de $f(t)$. Como $y(t_0)$ é máximo relativo, implica que $y'(t) > 0$ para $0 < t < t_0$ e então $f(t) > 0$ para $0 < t < t_0$, e $y'(t) < 0$ para $t_0 < t < t_1$, o que implica $f(t) < 0$ para $t_0 < t < t_1$ e como $y(t_1)$ é mínimo relativo, então $y'(t) < 0$ para $t_0 < t < t_1$ o que implica $f(t) < 0$ para $t_0 < t < t_1$ e $y'(t) > 0$ para $t > t_1$ e assim $f(t) > 0$ para $t > t_1$. Portanto $f(t)$ tem concavidade voltada para cima, e portanto

$$-\frac{\lambda^3(\lambda - z)^2}{2z^2} > 0 \Rightarrow -\lambda^3(\lambda - z)^2 > 0 \Rightarrow (\lambda - z)^2 > 0 \Rightarrow (\lambda - z)(\lambda - z) > 0 \Rightarrow \lambda - z > 0 \text{ ou } \lambda - z$$

$< 0 \Rightarrow \lambda - z < 0$ pois o caso $\lambda - z > 0$ implica na não existência de ponto crítico. No caso em

questão, $y(t)$ apresenta dois extremos. Logo $\lambda < z$. Para a prova do item (ii), segue do Teorema 1.4, do Capítulo 01, que para $z < \lambda < 0$, $y(t)$ não apresenta extremos.

Prova do Teorema 2.13: Para a prova do item (i), seja t_0 um máximo relativo de $y(t)$. Então $y(t)$ apresenta sobre-sinal em t_0 se e somente se:

$$y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow c_1 e^{\lambda t_0} + c_2 t_0 e^{\lambda t_0} + c_3 t_0^2 e^{\lambda t_0} > 0. \quad (2.73)$$

Mas,

$$y'(t_0) = c_1 \lambda e^{\lambda t_0} + c_2 e^{\lambda t_0} + c_2 \lambda t_0 e^{\lambda t_0} + 2c_3 t_0 e^{\lambda t_0} + c_3 \lambda t_0^2 e^{\lambda t_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$c_3 t_0^2 e^{\lambda t_0} = -\frac{c_1 \lambda + c_2}{\lambda} e^{\lambda t_0} - \frac{c_2 \lambda + 2c_3}{\lambda} t_0 e^{\lambda t_0}. \quad (2.74)$$

A substituição de (2.74) em (2.73), tem-se que:

$$y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow c_1 e^{\lambda t_0} + c_2 t_0 e^{\lambda t_0} - \frac{c_1 \lambda + c_2}{\lambda} e^{\lambda t_0} - \frac{c_2 \lambda + 2c_3}{\lambda} t_0 e^{\lambda t_0} > 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{c_2}{\lambda} e^{\lambda t_0} - \frac{2c_3}{\lambda} t_0 e^{\lambda t_0} > 0 \Leftrightarrow -\frac{e^{\lambda t_0}}{\lambda} (c_2 + 2c_3 t_0) > 0 \Leftrightarrow$$

$$c_2 + 2c_3 t_0 > 0 \Leftrightarrow \frac{-\lambda(\lambda^2 - z^2)}{z^2} - \frac{\lambda^2(\lambda - z)^2}{z^2} t_0 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-\lambda(\lambda - z)}{z^2} [(\lambda + z) + \lambda(\lambda - z)t_0] > 0.$$

Como t_0 é máximo relativo de $y(t)$, implica que $\lambda - z < 0$ e $(\lambda + z) + \lambda(\lambda - z)t_0 < 0$. Assim, $y(t_0) - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda < z < 0$ ou $\lambda < 0 < z$ e $(\lambda + z) + \lambda(\lambda - z)t_0 < 0$.

$$\lambda < z < 0 \text{ ou } \lambda < 0 < z \text{ e } (\lambda + z) + \lambda(\lambda - z)t_0 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda < z < 0 \text{ ou } \lambda < 0 < z \text{ e } \lambda(\lambda - z)t_0 < (\lambda + z) \Leftrightarrow$$

$$\lambda < z < 0 \text{ ou } \lambda < 0 < z \text{ e } t_0 < -\frac{(\lambda + z)}{\lambda(\lambda - z)}.$$

Assim, $y(t)$ apresenta sobre-sinal em t_0 se e somente se $\lambda < z < 0$ ou $\lambda < 0 < z$ e $t_0 < -\frac{(\lambda + z)}{\lambda(\lambda - z)}$,

o que prova o item (i). Para a prova do item (ii), considere a situação em que $\lambda < 0 < z$.

Defina

$$\tilde{G}(s) = \frac{G(s+a)}{(s+a)} = -\frac{\lambda^3}{z^2} \frac{(s - (z-a))^2}{(s - (\lambda-a))^3 (s+a)},$$

onde $a > 0$ é tomado suficientemente pequeno tal que $\tilde{G}(s)$ não tenha zeros na origem e $z - a > 0$. Então,

$$\tilde{g}(t) = L^{-1}[\tilde{G}(s)] = y(t)e^{-at}.$$

Portanto

$$\tilde{g}(t) = y(t)e^{-at}.$$

Observe que o pólo dominante de $\tilde{G}(s)$ é $\lambda = -a$. Assim, tem-se que $\tilde{m}_2 = \tilde{m}_3 = \tilde{p} = 0$ e $\tilde{m}_1 = 2$, e pelo Teorema 1.10, do Capítulo 01, o número de mudanças de sinais de $\tilde{g}(t) = y(t)e^{-at}$ é pelo menos dois. Como $y(t)$ possui o mesmo número de mudanças de sinais de $\tilde{g}(t)$, então tem-se que $y(t)$ apresenta pelo menos duas mudanças de sinais. Como $y(t)$ não apresenta reação reversa inicial, tem-se que $y(t)$ apresenta reação reversa do tipo r_u estendido para $\lambda < 0 < z$.

Prova do Corolário 2.5: Segue diretamente do Teorema 2.12.

Apresentam-se, a seguir, exemplos de aplicação dos resultados anteriormente obtidos.

Exemplo 12: Considere $G(s)$, dada por:

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{(\frac{1}{5}s+1)^3}. \quad (2.75)$$

$G(s)$ possui zero $z = -1$ e pólos em $\lambda = -5$. Pelo Teorema 2.12, $y(t)$ apresenta exatamente dois extremos relativos, classificados como um ponto de máximo relativo e um ponto de mínimo relativo. Pelo Teorema 2.13, como $\lambda < z < 0$, e $t_0 < 0,3$, $y(t)$ apresenta sobre-sinal. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$, deste sistema.

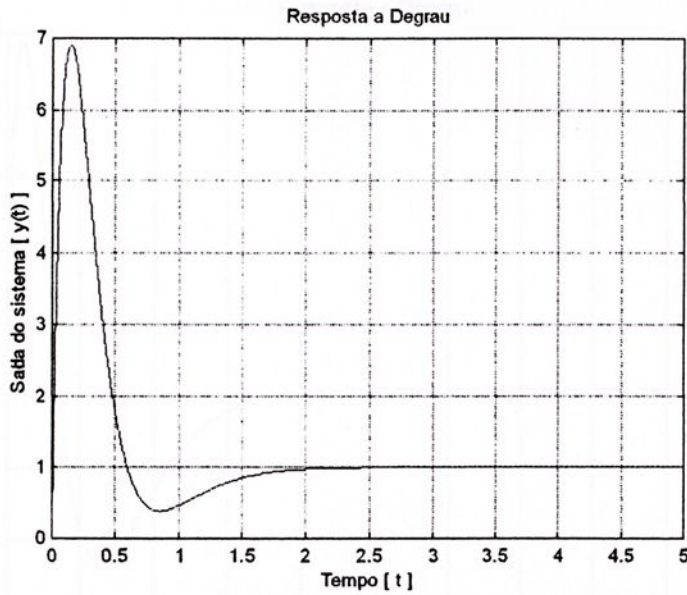


Figura 18 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.75).

Exemplo 13: Considere $G(s)$ seja dada por:

$$G(s) = \frac{(-3s + 1)^2}{\left(\frac{1}{5}s + 1\right)^3} \quad (2.76)$$

$G(s)$ possui zero $z = \frac{1}{3}$ e pólos em $\lambda = -5$. Pelo Teorema 2.12, $y(t)$ apresenta exatamente dois extremos relativos, classificados como um ponto de máximo relativo e um ponto de mínimo relativo. Pelo Teorema 2.13, como $\lambda < 0 < z$, $y(t)$ apresenta reação reversa do tipo r_u estendido. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$ deste sistema.

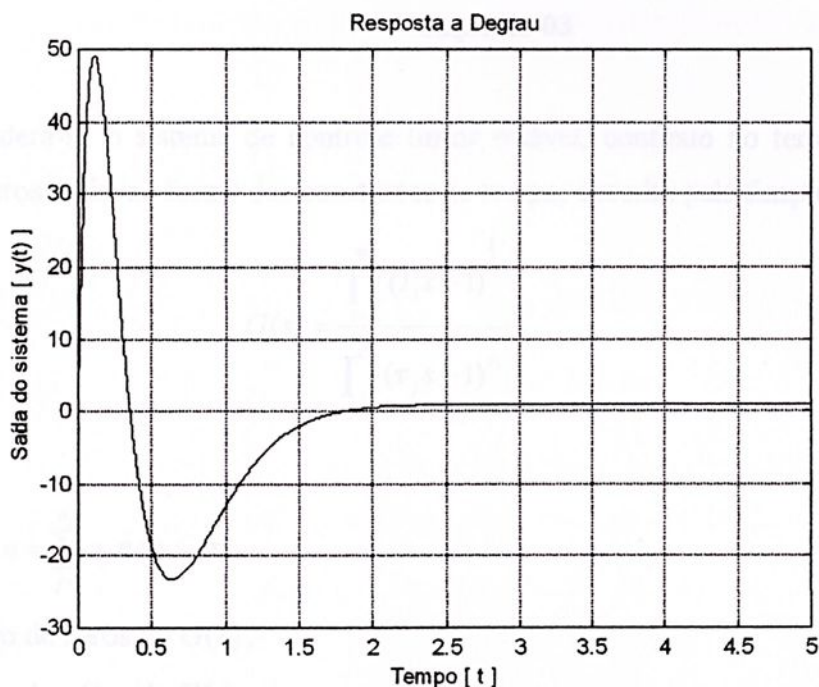


Figura 19 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (2.76).

Da análise realizada neste Capítulo, observa-se que a proximidade do pólo dominante tanto dos zeros quanto da origem, influencia no sobre-sinal na resposta a degrau do sistema. Como exemplo, para sistemas de controle lineares de terceira ordem com dois zeros reais distintos e três pólos reais distintos, tem-se que:

$$\lim_{z \rightarrow \lambda_1} y(t_0) - 1 = \frac{(\lambda_1 - z_1)}{z_1} e^{\lambda_1 t_0},$$

Logo, com z_1 bem próximo de λ_3 , o máximo valor de $y(t)$ em t_0 se aproxima de $\frac{(\lambda_1 - z_1)}{z_1} e^{\lambda_1 t_0}$, e

para z_1 próximo da origem, o valor do sobre-sinal cresce.

Nesse capítulo foi feito a análise em sistemas de controle lineares de terceira ordem, com pólos e zeros reais, baseada nos resultados obtidos em Reis et al (2004), quando se considera um sistema de controle linear de terceira ordem com pólos e zeros reais estáveis. A partir dos resultados obtidos, é possível analisar o comportamento de sistemas de ordem elevada, levando-se em conta a configuração pólo-zero de $G(s)$. Isto é o que será descrito no Capítulo III a seguir.

Capítulo 03

Considera-se o sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, monovariável, com pólos e zeros reais, na forma das constantes de tempo, descrito pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m_z} (T_i s + 1)^{l_i}}{\prod_{j=1}^{n_p} (\tau_j s + 1)^{r_j}} \quad (3.1)$$

sendo que:

- $m = \sum_{i=1}^{m_z} l_i$, $n = \sum_{j=1}^{n_p} r_j$ e $m < n$;
- m_z o número de zeros de $G(s)$;
- n_p o número de pólos de $G(s)$;
- $T_i > 0$, são constantes reais;
- $\tau_j > 0$, são as constantes de tempo do sistema;
- $z_i = \frac{-1}{T_i}$, $i = 1, \dots, m_z$ são os zeros de $G(s)$;
- $\lambda_j = \frac{-1}{\tau_j}$, $j = 1, \dots, n_p$ são os pólos de $G(s)$;
- $\lambda_j \neq z_i, \forall i, j$.

Considera-se que $t \in [0, +\infty)$ e que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n_p} < 0 \text{ e } z_1 < z_2 < \dots < z_{m_z}$$

sendo que os z_i 's podem assumir valores tanto positivos como negativos.

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas generalizações dos resultados para a determinação e classificação de extremos, obtidos no Capítulo 02, objetivando a análise de sobre-sinal e reação reversa, em sistemas de controle lineares estáveis, contínuos no tempo cuja função de transferência $G(s)$ seja dada por (3.1). Isso é o que será apresentado na próxima seção.

3.1. Sistemas de controle lineares com um zero real de multiplicidade m e n pólos reais distintos.

Considere o sistema de controle linear estável dado por (3.1), sendo $m_z = 1$, $l_i = m$, $r_j = 1$ e $n_p = n$. Então, $G(s)$ tem a forma:

$$G(s) = \frac{(Ts+1)^m}{\prod_{j=1}^n (\tau_j s + 1)}. \quad (3.2)$$

Tem-se que $G(s)$, em (3.2), na forma de pólos e zeros, pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{(-1)^{n+m} \prod_{j=1}^n \lambda_j}{z^m} \frac{(s-z)^m}{\prod_{j=1}^n (s-\lambda_j)}. \quad (3.3)$$

Observa-se que $G(s)$ dada por (2.1), nas formas (2.2) e (2.8) são casos particulares de (3.3), quando $m = 1$ e $m = 2$ respectivamente.

O lema, apresentado a seguir, fornece a resposta a uma entrada degrau unitário para a classe de sistemas, cuja função de transferência tem a forma (3.3).

Lema 3.1: A resposta a degrau da classe de sistemas de controle linear, cuja função de transferência seja dada por (3.3) e tem condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0, \dots, y^{(n-m)}(0) = K$,

sendo que $K = (-1)^{n+m} \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{z^m}$, tem a forma

$$y(t) = 1 + \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \quad (3.4)$$

na qual

$$i) \ c_1 = \frac{\lambda_2 \cdots \lambda_n}{z^m} (\lambda_1 - z)^m \frac{\prod_{2 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)}; \quad (3.5)$$

$$\text{ii) } c_k = (-1)^{k+1} \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{\lambda_k z^m} (\lambda_k - z)^m \frac{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \neq k}} (\lambda_j - \lambda_i)}{\prod_{1 \leq i < j} (\lambda_j - \lambda_i)}. \quad (3.6)$$

Prova:: Por hipótese, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, ..., $y^{(n-1)}(0) = K$, onde

$$K = (-1)^{n+m} \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{z^m};$$

Agora, basta observar que:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

sendo:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Temos $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$ (determinante de Vandermonde).

Por outro lado:

$$\Delta_1 = -\lambda_2 \dots \lambda_n V(\lambda_2, \dots, \lambda_n) + (-1)^{n+m} K V(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$\text{na qual } V(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Logo,

$$c_1 = \frac{\lambda_2 \dots \lambda_n}{z^m} (\lambda_1 - z)^m \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)},$$

o que prova (3.5). De maneira análoga, mostra-se que:

$$c_2 = -\frac{\lambda_1 \lambda_3 \cdots \lambda_n}{z^m} (\lambda_2 - z)^m \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n, i \neq 2} (\lambda_j - \lambda_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)}$$

.....

e

$$c_k = (-1)^{k+m} \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_i}{\lambda_k z^m} (\lambda_k - z)^m \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n, i \neq k} (\lambda_j - \lambda_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)},$$

o que prova o resultado desejado em (3.6).

Os Teoremas, apresentados a seguir, apresentam condições necessárias e suficientes para que a resposta a degrau do sistema (3.4), apresente extremos.

Teorema 3.1: Seja $y(t)$ a resposta a degrau da classe de sistemas de controle linear, cuja função de transferência seja dada por (3.3) e tem condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(0) = K$

Então:

- i) $y(t)$ apresenta no máximo m extremos relativos se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-m+1} < z < \lambda_{n-m+2} < \dots < \lambda_n < 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-m+2} < z < \lambda_{n-m+3} < \dots < \lambda_n < 0$, ..., $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} < z < \lambda_n < 0$. Além disso, η , o número de extremos de $y(t)$, assumirá apenas valores pares nos intervalos $0 \leq \eta \leq m$ ou $0 \leq \eta \leq m-1$;
- ii) $y(t)$ apresentará exatamente m extremos relativos se e somente se $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < z$.

Prova do Teorema 3.1: Para a prova do item (i), suponha que $y(t)$ apresenta no máximo m extremos relativos. Assim, tem-se que $0 \leq \eta \leq m$, e pelo Teorema 1.3 do Capítulo 01, tem-se que $m_1 + m_2 \leq \eta \leq m_1 + m_2 + m_3 - p$. Portanto,

$$m_1 + m_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2 = 0,$$

$$m_1 + m_2 + m_3 - p = m \Leftrightarrow m_3 - p = m \Leftrightarrow m_3 = m + p.$$

Se $p = 0$, então $m_3 = m$ e assim, $z < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{m-1} < z < \lambda_m < \dots < \lambda_n < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-m+1} < z < \lambda_{n-m+2} < \dots < \lambda_n < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-m+2} < z < \lambda_{n-m+3} < \dots < \lambda_n < 0$ ou, ..., ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} < z < \lambda_n < 0$, mas,

$z < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{m-1} < z < \lambda_m < \dots < \lambda_n < 0$ não ocorre, pois pelo Teorema 1.4, do Capítulo 01, $y(t)$ não apresenta extremos, o que contradiz a hipótese. Se $p = 1$, então $m_3 = m+1$, o que não acontece, pois o sistema apresenta um zero real de multiplicidade m . Suponha que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-m+1} < z < \lambda_{n-m+2} < \dots < \lambda_n < 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-m+2} < z < \lambda_{n-m+3} < \dots < \lambda_n < 0$, ..., $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} < z < \lambda_n < 0$, tem-se que $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = m$ e $p = 0$ ou $p = 1$, ou dependendo de m ser par ou ímpar, respectivamente. Assim, pelo Teorema 1.3, descrito no Capítulo 01, tem-se que $0 \leq \eta \leq m$ ou $0 \leq \eta \leq m-1$.

Pelo Teorema 1.3, do Capítulo 01, a paridade $(\eta) = \text{paridade}(m_1 + m_2) = \text{paridade}(m_1 + m_2 + m_3 - p)$ e então o resultado segue. Para a prova do item (ii), suponha que $y(t)$ apresenta exatamente m extremos. Assim, $\eta = m$, e pelo Teorema 1.3, do Capítulo 01, $m_1 + m_2 \leq \eta \leq m_1 + m_2 + m_3 - p$. Logo:

$$m_1 + m_2 = m \Leftrightarrow m_1 = m \text{ e } m_2 = 0 \text{ ou } m_1 = 0 \text{ e } m_2 = m$$

$$m_1 + m_2 + m_3 - p \Leftrightarrow m_3 = p = 0.$$

Assim, $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < z < 0$ ou $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0 < z$. Suponha agora que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < z < 0$, então $m_1 = m_3 = 0 = p$ e $m_2 = m$. Assim, pelo Teorema 1.3, descrito no Capítulo 01, $m \leq \eta \leq m$ o que implica que $\eta = m$. Portanto, $y(t)$ apresenta m extremos. Se $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0 < z$, então $m_1 = m$ e $m_2 = m_3 = 0 = p$. Assim, pelo Teorema 1.3, descrito no Capítulo 01, $m \leq \eta \leq m$ o que implica que $\eta = m$. Portanto, $y(t)$ apresenta m extremos, o que prova o Teorema 3.2.

Figura 01 – Resposta a degrau unitário para (3.1)

Corolário 3.1: Sob as hipóteses do Teorema 3.1, $y(t)$ não apresenta extremos se e somente se $z < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$, ... $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-m} < z < \lambda_{n-m+1} < \dots < \lambda_n < 0$.

Prova: Segue diretamente da aplicação do Teorema 1.4, do Capítulo 01.

Lema 3.1: Se $z < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0$ ou $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$, ...

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-m} < z < \lambda_{n-m+1} < \dots < \lambda_n < 0$, então $y(t)$ não apresentará sobre-sinal e nem reação reversa.

Prova: Segue diretamente do Corolário 3.1.

Apresentam-se, a seguir, exemplos de aplicação dos resultados anteriormente obtidos.

Exemplo 01: Considere $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{(s+1)^3}{(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{3}s+1)(\frac{1}{4}s+1)(2s+1)}$$

$G(s)$ possui zero $z = -1$ e pólos $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = -0,5$. Pelo Teorema 3.1, onde $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = 3$ e $p = 1$, número de extremos de $y(t)$ será exatamente dois extremos, pois $p = 1$ e $m_3 = 3$ e pela paridade $(\eta) = 0$. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$ deste sistema.

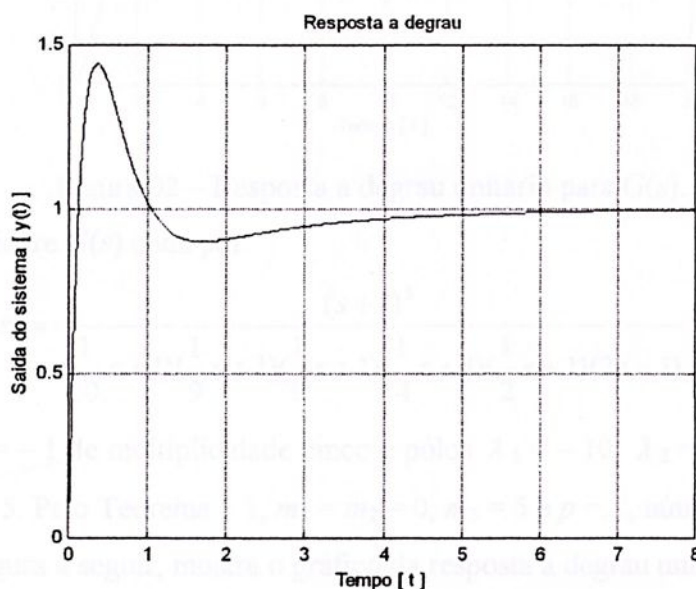


Figura 01 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$.

Exemplo 02: Considere $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{(\frac{1}{3}s+1)^3}{(\frac{1}{2}s+1)(s+1)(\frac{1}{4}s+1)(2s+1)}$$

$G(s)$ possui zero $z = -3$ e pólos $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -0,5$. Pelo Corolário 3.1, como $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < 0$, $y(t)$ não apresenta extremos. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$ deste sistema.

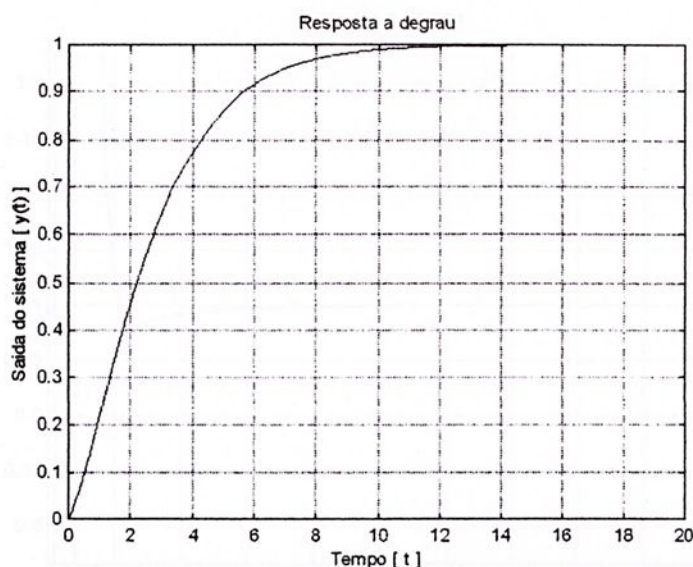
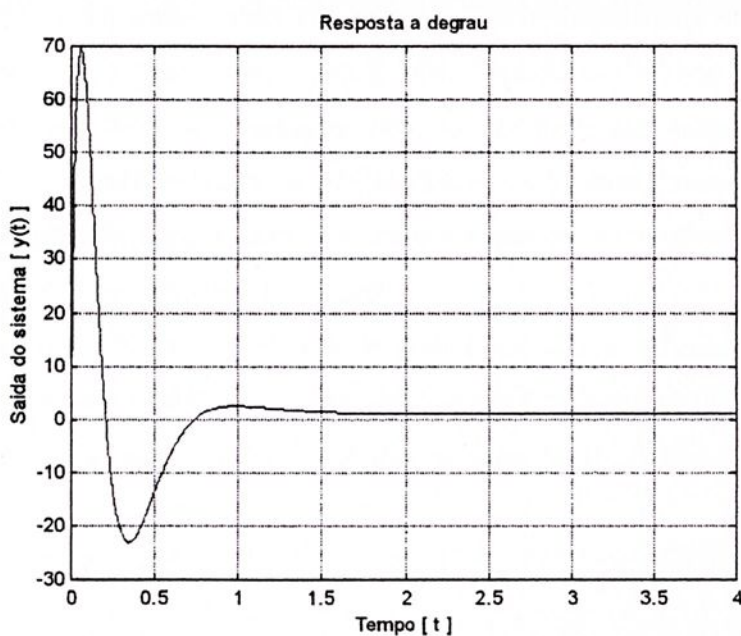


Figura 02 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$.

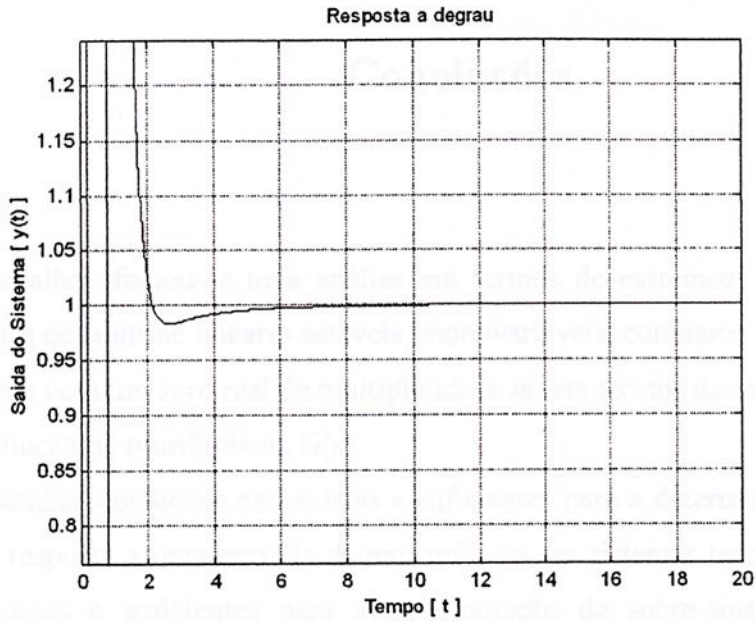
Exemplo 03: Considere $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{(s+1)^5}{\left(\frac{1}{10}s+1\right)\left(\frac{1}{9}s+1\right)\left(\frac{1}{8}s+1\right)\left(\frac{1}{4}s+1\right)\left(\frac{1}{2}s+1\right)(2s+1)}$$

$G(s)$ possui zero $z = -1$ de multiplicidade cinco e pólos $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -9$ e $\lambda_3 = -8$, $\lambda_4 = -4$, $\lambda_5 = -2$ e $\lambda_6 = 0,5$. Pelo Teorema 3.1, $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = 5$ e $p = 1$, número de extremos de $y(t)$ será $0 \leq \eta \leq 4$. A figura a seguir, mostra o gráfico da resposta a degrau unitário $y(t)$ deste sistema.



(a)



(b)

Figura 03 – Resposta a degrau unitário para $G(s)$.

Conclusões

Neste trabalho efetuou-se uma análise em termos de extremos, sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares estáveis, monovariáveis, contínuos no tempo, de terceira ordem e de ordem n com um zero real de multiplicidade m , em termos das posições relativas dos pólos e zeros da função de transferência $G(s)$.

Foram obtidas, condições necessárias e suficientes para a determinação e classificação dos extremos da resposta a uma entrada degrau unitário em sistemas terceira ordem, além de condições necessárias e suficientes para a determinação de sobre-sinal em tais sistemas. Condições necessárias e suficientes para a determinação de reação reversa inicial foram também obtidas. Com relação à reação reversa do tipo r_u estendido foram obtidas condições necessárias.

Apresentaram-se exemplos mostrando que a ocorrência de reação reversa está associada, também, a zeros de fase mínima. Provou-se, também, que a ocorrência de sobre-sinal está associada também a zeros de fase não mínima.

Baseado nos resultados obtidos para sistemas de terceira ordem, foram obtidas condições necessárias e suficientes para a determinação dos extremos da resposta a degrau de um sistema linear contínuo no tempo, com um zero real de multiplicidade m e com n pólos reais distintos.

Acredita-se que, com os resultados obtidos, foi dado um passo importante para um melhor entendimento da influência das posições relativas de pólos e zeros para a ocorrência de pontos críticos e extremos, para a análise e determinação de sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares e contínuos no tempo.

Observa-se que os resultados obtidos podem ter várias aplicações em engenharia de controle e podem, por exemplo, ser usados em projetos de controladores sem sobre-sinal e reação reversa, para a resposta a degrau de malha fechada de um sistema linear de fase mínima (Moore, 1990).

Referencias Bibliográficas

- DORF R. C. & BISHOP R. H.(1995). **Modern Control Systems**, 7 ed. Addison-Wesley, New York.
- EL-KHOURY, M.; CRISALLE, O. D.; LONGCHAMP, R. (1993). Influence of Zero Locations on the Number of Step-response Extrema. **Automatica**, vol. 29, no 6, pp. 1571-1574.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; ABBAS, E. N. (1991). **Feedback Control of Dynamic Systems**, 3ed. Addison-Wesley, New York.
- GOODWIN, G. C.; WOODYATT, A. R.; MIDDLETON, R. H.; SHIM, J. (1999). Fundamental Limitations due to jw-axis zeros in SISO Systems. **Automatica**, vol. 35, pp. 857 - 863.
- HOWELL, J. R. (1997). Some classes of Step-response Model Without Extrema. **Automatica**, vol. 33, no 7, p. 1427 - 1428.
- LEÓN DE LA BARRA, B.A. (1994). On undershoot in SISO systems. **IEEE Trans. Automat. Control**, vol. 39, no 3, pp. 578-581.
- LEÓN DE LA BARRA, B.A., FERNÁNDEZ, M. A. (1994-a). Transient Properties of Type m Continuous Time Scalar Systems. **Automática**, vol. 30, no 9, pp. 1495-1496.
- LIN, S. AND FANG, C., (1997), "Nonovershooting and Monotone Nondecreasing Step Response of a Third-Order SISO Linear System". **IEEE Trans. Automat. Control**, vol. 42, no 9, p. 1299-1303.
- MATLAB The Language of Technical Computing**, Version 5, 1997.
- MITA, T.; YOSHIDA, H. (1981). Undershooting Phenomenon and its Control in Linear Multivariable Servomechanisms, **IEEE Trans. Automat. Control**, vol. 26, no 2, pp. 402-407.
- MOORE, K. L AND BHATTACHARYYA, S. P, (1990), "A Technique for Choose Zero Locations for Minimal Overshoot". **IEEE Trans. Automat. Control**, vol. 35, no 5, pp. 577-580.
- OGATA, K. (1998) **Engenharia de Controle Moderno**. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro.
- RACHID, A. (1995). Some conditions on zeros to avoid step-response extrema. **IEEE Trans. Automat. Control**, vol. 40, no 8, pp. 1501-1503.
- REIS, C. A.; SILVA N. A. P. (2001). Condições Necessárias e Suficientes Para a Existência de Overshoot em Sistemas Lineares Contínuos e de Segunda Ordem. **Anais da 1a Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle**, São Carlos, S. P., pp.176-179.
- REIS, C. A., SILVA, N. A. P., TEIXEIRA, M. C. M.(2002). O Overshoot e o Undershoot em Sistemas de Controle Lineares Contínuos no Tempo: Um Tutorial. **Segundo Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2002)**, João Pessoa, PB.

REIS, C. A., ALVES, T. A. (2003). Determinação e Classificação dos Pontos Críticos em Sistemas de Controle Lineares de Terceira Ordem. **Anais do DINCON 2003, 2º Congresso Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle da SBMAC**, São José dos Campos, S.P., pag. 1576-1585.

REIS, C. A.; SILVA, N. A. P.; MESSAOUDI, A. (2004). Determinação de Overshoot e Undershoot em Sistemas de Controle Lineares Estáveis e Contínuos de Terceira Ordem com Pólos e Zeros Reais. **Anais do DINCON 2004, 3º Congresso Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle da SBMAC**, Ilha Solteira, SP.

REIS, C. A.; SILVA, N. A. P.; MESSAOUDI, A. (2004). O Sobressinal e a Resposta Inversa em Sistemas de Controle Lineares Contínuos no Tempo. **Publicação Aceita na Revista da C.B.A**

SILVA N. A. P., REIS, C. A. (2001), On The Definition of Type Ru Undershoot in The Step Response. **Anais da 1ª Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle**, São Carlos, S.P. pag. 170-175.

VIDYASAGAR, M. (1986). On Undershoot and Nonminimum Phase Zeros. **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. AC-31, no 5, pp. 440.

WIDDER, D. V. (1934). A Inversion of the Laplace Integral and the Related Moment Problem, **Trans. Am. Math. Soc.**, vol. 36, pp. 107 - 200





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Campus de Ilha Solteira
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica
Av. Brasil Centro, 56
CEP 15385-000 - Ilha Solteira - SP
www.dem.feis.unesp.br

