

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

1210001125



Nº 37

PROJETO DE CONTROLADORES PID COM
DESIGUALDADES LINEARES MATRICIAS
ALUNA: KARLA BOAVENTURA PIMENTA
ORIENTADOR: MARCELO C. M. TEIXEIRA

Te.1125

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA-FEIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEE

"PROJETO DE CONTROLADORES PID
COM DESIGUALDADES LINEARES
MATRICIAIS"

Karla Boaventura Pimenta

1210001125



Orientador
Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

"Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS/UNESP como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica"

Proc. 017/2000 ned-001/2000

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCNICO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA <i>24/01/2000</i>	DATA DE TOMBO <i>31/3/2000</i>
REGISTRADO POR <i>Karla</i>	TOMBO <i>1.125</i>
AQUISIÇÃO <i>Deacaf - autor</i> <i>R\$ 10,00</i>	CLASSIFICAÇÃO <i>P644-p</i>

3040205-

Ilha Solteira - SP, junho de 1999



“PROJETO DE CONTROLADORES PID COM DESIGUALDADES LINEARES MATRICIAIS”

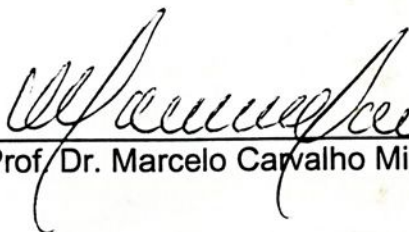
Karla Boaventura Pimenta

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA (ME).



Prof. Dr. Carlos Roberto Minussi - Coordenador

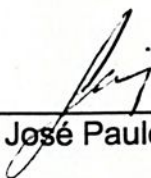
COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira - orientador



Profª Drª Vilma Alves de Oliveira



Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia

Ilha Solteira – SP, junho de 1999

“Agradeço a Deus, criador maior...
Pela coragem, força e paciência.”



“Agradeço aos incentivos encorajadores do meu pai Evandro,
minha mãe Lulia, e meus irmãos e sobrinhos, sempre
entendendo a dolorosa ausência.”



Minha caminhada tem um destino e uma direção, por isso devo medir meus passos, prestar atenção no que faço e no que fazem os que por mim também passam ou pelos quais passo eu...

Que eu não me iluda com o ânimo e o vigor dos primeiros trechos, porque chegará o dia em que os pés não terão tanta força e se ferirão no caminho e se cansarão mais cedo...

Todavia, quando o cansaço houver; que eu não desespere e acredite que ainda terei forças para continuar; principalmente quando houver quem me auxilie...

É oportuno que, em meu sorriso, eu me lembre que existe os que choram, que, assim, meu riso não ofenda a mágoa dos que sofrem: por outro lado, quando chegar a minha vez de chorar, que eu não deixe dominar pela desesperança, mas que eu entenda o sentido do sofrimento, que nivela, que me iguala, que torna todos os homens iguais...

Quando eu tiver tudo, farnel e coragem, água no cantil, e ânimo no coração, bota nos pés e chapéu na cabeça, e, assim, não temer o vento e o frio, a chuva e o tempo.

Que eu não me considere melhor do que aqueles que ficarão atrás, porque pode vir o dia em que nada terei mais para minha jornada e aquele, que ultrapassei na caminhada, me alcançarão e também poderão fazer como eu fiz e nada de fato fazer por mim, que eu ficarei no caminho sem concluí-lo...

Quando o dia brilhar; que eu tenha vontade de ver a noite em que a caminhada será mais fácil e mais amena; quando for noite, porém e a escuridão tornar mais difícil a chegada, que eu saiba esperar o dia como aurora, o calor como benção...

Que eu perceba que a caminhada sozinho pode ser mais rápida, mas muito mais vazia...

Quando eu tiver sede, que encontre a fonte no caminho, quando eu me perder, que ache a indicação, a seta, a direção...

Que eu não siga os que desviam, mas que ninguém se desvie seguindo os meus passos...

Que a pressa em chegar não me afaste da alegria de ver as flores simples que estão a beira da estrada, que eu não perturbe a caminhada de ninguém, que eu entenda que seguir faz bem, mas que, às vezes, é preciso Ter a bravura de voltar atrás e recomeçar e tomar outra direção...

Que eu não caminhe sem rumo, que eu não me perca nas encruzilhadas, mas que eu não tema os que assaltam-me os que embuçam, mas que eu vá aonde devo ir e, se eu cair no meio do caminho, que fique na lembrança de minha queda para impedir que outros caiam no mesmo abismo...

Que eu chegue, sim, mas, ainda mais importante, que eu faça chegar quem me perguntar; quem me pedir conselho, e acima de tudo, me seguir, confiando em mim!

Procuro expressar aqui, meus agradecimentos aos amigos conquistados, sempre companheiros confidentes, tanto nas horas difíceis quanto nos bons momentos, que foram muitos.

Agradecimento especial a Adenice Domingos do Santos Taveira, pela companhia nas tarefas mais árduas.

Agradeço aos professores que se esmeram na formação destes profissionais da educação.

Agradeço aos funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica e de toda Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.

Agradeço a CAPES, pelo incentivo financeiro.



Índice

Lista de figuras.....	I
Resumo.....	III
Abstract.....	IV

Capítulo I:	01
--------------------------	-----------

Introdução.....	01
-----------------	----

Capítulo II:	04
---------------------------	-----------

Projeto de controladores PID	04
2.1 – Introdução	04
2.2 – Controladores Industriais	05
2.3 – Sintonia de Controladores PID	07
2.4 – Projeto de Controladores PID	08

Capítulo III:	09
----------------------------	-----------

Projeto de controladores baseados em LMIs.....	09
3.1 – Introdução	09
3.2 – Conceitos básicos	10
3.3 – Desigualdades matriciais lineares	16
 Capítulo IV:	17
Projeto de controladores PID com LMIs	17
4.1 – Introdução	17
4.2 – Estabilidade	20
4.3 – Taxa de decaimento	24
4.4 – Robustez	28
4.5 – Restrição da entrada	34
4.6 – Restrição da saída	39
 Capítulo V:	46
Conclusões.....	46
 Referências bibliográfica	48
 Apêndice	50

Lista de figuras

Figura 2.1 - Diagrama de blocos de um sistema	05
Figura 4.1 - Controlador estático	18
Figura 4.2 - Diagrama de blocos de um motor corrente contínua.....	19
Figura 4.3 - Simulação do exemplo 1	24
Figura 4.4 - Simulação do exemplo 2	28
Figura 4.5 - Simulação do exemplo 3	33
Figura 4.6 - Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário	36
Figura 4.7 - Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário	37
Figura 4.8 - Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau nulo	37
Figura 4.9 - Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário	37
Figura 4.10 - Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário	38
Figura 4.11 - Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau nulo	38
Figura 4.12 - Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário	38
Figura 4.13 - Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário	39
Figura 4.14 - Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau nulo	39
Figura 4.15 - Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário	42
Figura 4.16 - Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário	42
Figura 4.17 - Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau nulo	43
Figura 4.18 - Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário	43
Figura 4.19 - Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário	43
Figura 4.20 - Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau nulo	44
Figura 4.21 - Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário	44



Figura 4.22 – Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário44

Figura 4.23 – Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau nulo45



Resumo

Esta dissertação apresenta um estudo sobre o projeto de controladores PID, propondo um método para a análise da estabilidade e para o projeto de controladores, utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities* - LMI). As técnicas de projeto também permitem a especificação do transitório através da taxa de decaimento e a especificação de restrições na entrada de controle e nas variáveis de estado do sistema controlado.



Abstract

This work presents a study on PID controllers design, proposing a method for the analysis of stability and for the controller design, using Linear Matrix Inequalities (LMI). The specification of the decay rate and the specification of constraints on control input and state variables of the controlled system are considered.



Capítulo I

INTRODUÇÃO

Utilizamos noções de controle, praticamente em tudo que fazemos: em situações naturais como acordar, pois se acordamos antes do horário de costume, fazemos uma verificação no relógio, vemos que ainda é cedo e voltamos a dormir. O mesmo acontece na hora do banho: abrimos a válvula, fazemos antes uma verificação, com as mãos para certificarmos que a água está na temperatura desejável, fazemos os ajustes necessários e agora sim a água está pronta para utilizarmos.

Na indústria também encontramos grandes aplicações para o controle, seja no controle de nível de líquido, de temperatura.

Atualmente, com toda tecnologia disponível, encontramos também um mercado bastante exigente, que procura por produtos confiáveis e com qualidade. O que leva as indústrias a apresentarem produtos e serviços de nível internacional, proporcionando ao ambiente industrial a necessidade de um controle pleno sobre máquinas e processos. O que, da mesma maneira exige um conhecimento mais avançado de seus profissionais, levando a engenharia de controle a fornecer soluções práticas e mesmo teóricas para atender o exigente mercado industrial.

E devido a esta eficiência nos processos de produção industrial, é possível



produzir produtos e serviços com menor tempo de produção, menor consumo de energia e maior precisão de ajustes e medidas.

Os controladores industriais microprocessados são peças fundamentais à produção industrial, proporcionando maior eficiência, maior confiabilidade e menor número de trabalhadores para atuação e supervisão de processos.

Com surgimento destacado na década de 80, os controladores industriais microprocessados podiam ser encontrados com esquemas de configuração diversos: Controlador PID e auto-ajuste de parâmetros (self-tuning), Controlador adaptativo de uso geral, Controlador PID adaptativo e Controlador PID entre outros; podendo ser encontradas todas estas funções em apenas um aparelho e outras de interesse industrial como a indicação de potência de saída, saída para alarme, tipo de entrada (sensor) configurável por software.

Os controladores PID têm recebido considerável atenção por parte de pesquisadores nas últimas quatro décadas, sendo empregados, no mínimo na metade dos controladores automáticos instalados na indústria, Ogata (1993).

Infelizmente ainda não foi encontrado nenhum método que resolve sozinho todos os problemas encontrados na indústria.

No capítulo II é apresentada a ação de controle do tipo PID nas formas contínua e discreta, também destacando os algoritmos mais conhecidos na literatura para a sintonia dos parâmetros PID. No capítulo III são apresentados conceitos de estabilidade de Lyapunov, necessários ao projeto de controladores PID baseados em LMI.

No capítulo IV está o trabalho desenvolvido propriamente dito, que pela literatura abordada, destacamos que é um trabalho inédito. A idéia básica foi interpretar o projeto de controladores PID como o projeto de controladores estáticos que realimentam as saídas disponíveis. Então, projetar os ganhos utilizando LMIs. Apresentamos um método, para a análise de estabilidade, e outros parâmetros para projeto de controladores, utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix*



Inequalities (LMI)). As técnicas de projeto também permitem a especificação do transitório através da taxa de decaimento e a especificação de restrições nos sinais de controle das entradas e das saídas.

A análise de estabilidade e o projeto de controle são reduzidos a problemas descritos por LMIs (Boyd et al., 1994). Numericamente, os problemas de LMIs podem ser resolvidos muito eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação matemática (Boyd et al., 1994).

A interpretação das análises de estabilidade e problemas de projeto de controle como problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar soluções para problemas originais.

No Capítulo V, apresentamos conclusões e sugestões para futuros trabalhos.



Capítulo II

PROJETO DE CONTROLADORES PID

2.1 - Introdução

Qualquer sistema de controle deve ser estável. Além da estabilidade absoluta, isto é se um sistema é estável ou instável, um sistema de controle deve ter uma estabilidade relativa razoável; assim, a resposta deve apresentar amortecimento razoável. Além disso, a velocidade de resposta deve ser razoavelmente rápida e o sistema de controle deve ser capaz de reduzir erros a zero ou a algum valor pequeno tolerável.

Sistema é um conjunto de componentes ou dispositivos que interagem entre si para desempenhar uma função específica. Para que o sistema atinja seu objetivo, é necessário que todos os seus componentes ou dispositivos desempenhem de forma eficiente sua função particular. Definido em função de variáveis de entrada e de saída, o sinal de entrada é o sinal de excitação do processo, e o sinal de saída é a variável controlada pelo sinal de excitação.



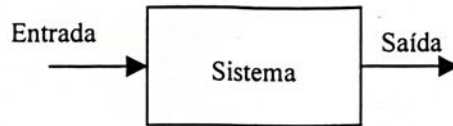


Figura 2.1 - Diagrama de blocos de um sistema.

Um sistema é classificado como sistema de controle quando a variável de entrada é constantemente manipulada para controlar a variável de saída em um valor particular, ou a uma taxa de variação pré-determinada.

2.1.1 - Objetivos dos Sistemas de Controle

Os sistemas dinâmicos são incapazes de transferir, instantaneamente, variações do sinal de entrada para sua saída, pelo motivo de armazenarem energia interna (mecânica, elétrica, térmica). Essa característica compromete o seu desempenho, a ponto de tornar sua resposta insatisfatória para determinadas aplicações, no que se refere a tempos e valores finais da resposta. É comum, por exemplo, dizer que o sistema é lento ou que apresenta erro na resposta.

Os sistemas de controle atuam com o objetivo de compensar os problemas ocasionados, por exemplo, pelas variações de energia nos sistemas dinâmicos, acelerando a resposta dos mesmos, a mudanças nos sinais de entrada, fazendo com que a saída alcance o valor desejado num espaço de tempo mínimo aceitável e com a melhor precisão possível.

2.2 - Controladores Industriais

Com a rapidez da evolução dos controladores industriais, é possível em pouco tempo obter automaticamente os parâmetros de um controlador necessário para manter o processo com um mínimo de erro em relação ao sinal de referência desejado.

Alguns controladores encontrados na indústria possuem modo de operação



simples como o dos controladores on-off. Eles podem ser implementados nas formas analógica ou digital, seu modo de funcionamento pode ser descrito da seguinte forma: na presença de um sinal de realimentação acima do sinal de referência desejado mantém o sinal atuante em um valor mínimo (ou zero) e conseqüentemente com nenhuma potência aplicada à planta e para um nível de realimentação abaixo do sinal de referência a potência é totalmente aplicada. A principal desvantagem deste controlador é a variação permanente da saída controlada em torno do sinal de referência desejado. Para diminuir a freqüência desta oscilação é acrescentado ao sistema um parâmetro conhecido como histerese, que equivale a uma região simétrica ao valor da referência desejada criando uma região onde a saída do controlador conserva seu valor atual até que o sinal de erro atuante tenha sido movido além do valor desta faixa. Desta forma, o valor da histerese será um comprometimento entre precisão desejada e a durabilidade do elemento atuador.

Outro controlador também muito disponível na indústria devido à sua simplicidade, é o controlador proporcional.

Se $E(s)$ for o sinal de erro e $U(s)$ a entrada da planta, este controlador apresenta a seguinte função de transferência:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_c.$$

Também de grande aplicação industrial, citamos o controlador de processos PID, que é uma soma das ações proporcional, integral e derivativa. A finalidade da ação integral, é eliminar o erro em regime estacionário para uma entrada de referência do tipo degrau. Esse controlador pode introduzir oscilação na resposta pelo aumento da ordem do sistema. A finalidade da ação derivativa é a de antecipar o erro atuante e produzir ação corretiva mais cedo (pois responde à taxa de variação do erro atual).

Os controladores PID apresentam a seguinte função de transferência:



$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) + T_d s.$$

2.3 - Sintonia de controladores PID

A sintonia adequada aos parâmetros dos controladores PID tem sido o principal problema com os controladores PID na indústria (Aström et. al. (1988)). A princípio esta sintonia era manual, utilizando gráficos como propostos por Zigler-Nichols, podendo produzir variação de valores de acordo com o operador, introduzindo nos aparelhos os valores conseguidos e feito um ajuste final por tentativa e erro. Outro método utilizado, mas de grande demora e difícil manuseio, pois depende do conhecimento do operador, é a ligação do aparelho em modo manual sem nenhum parâmetro inserido e ir ajustando cada parâmetro à medida que a saída do processo fosse aproximando-se da referência desejada. Esse método varia muito de operador para operador.

Alguns métodos disponíveis para se conseguir sintonizar os parâmetros operando-se diretamente no controlador são apresentados, por exemplo, nas revistas editadas pela Instrument Society of America (ISA).

O controle Proporcional-Integral-Derivativo (PID) de processos é, sem dúvida alguma, o método de controle mais aplicado na indústria, devido ao fato de uma ampla variedade de processos industriais poderem ser controlados com boa precisão e robustez com esta técnica e de sua atuação ser bem conhecida por engenheiros e técnicos. Esse fato justifica a busca de métodos eficientes de sintonia automática dos parâmetros dos controladores PID, para a obtenção de um maior rendimento da operação.

Várias técnicas de auto-sintonia para reguladores clássicos e simples como os PIDs, podem ser encontradas na literatura especializada. Motivado por duas razões principais: primeiro destacamos que um regulador simples é rápido, fácil de implementar e, de fácil sintonia; segundo, este regulador clássico é bem conhecido e aceito no ambiente industrial. Destacando que estes trabalhos têm encontrado aplicação industrial imediata.



2.4 – Projeto de Controladores PID

Quando é disponível o modelo matemático da planta, dada pela sua função de transferência, o projeto de controladores PID pode ser feito, por exemplo, utilizando técnicas do controle clássico: métodos de resposta em frequência e método do lugar das raízes (root locus) (Ogata, 1993; Kuo, 1995; Dorf and Bishop, 1995). Esta dissertação propõe o projeto de controladores PID, supondo conhecida a função de transferência da planta e acesso somente à saída da planta.



Capítulo III

PROJETO DE CONTROLADORES BASEADOS EM LMIs

3.1 – Introdução

Neste capítulo será apresentado um estudo abordando a estabilidade de sistemas complexos: variáveis de estado, entradas ou saídas, que indiferentemente interferem na complexidade do sistema, o qual para a sua resolução requer estratégias mais elaboradas em relação às requeridas para sistemas de primeira ordem. Será dada maior ênfase na abordagem do projeto de sistema de controle por espaço de estados, incluindo controlabilidade, observabilidade e análise da estabilidade de Lyapunov.

Alguns conceitos usuais, encontrados na literatura básica sobre o assunto, são apresentados de forma direta, constando como conhecimento necessário para um estudo sobre projeto de controladores baseados em LMIs. Foram pesquisados os livros que abordam a teoria de controle em geral, (Ogata, 1993; Kuo, 1995; Dorf and Bishop, 1995).



3.2 – Conceitos Básicos

3.2.1 – Espaço de estados

O espaço n -dimensional cujos eixos coordenados são o eixo x_1 , eixo x_2 , ..., eixo x_n é chamado de espaço de estados. Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

3.2.2 – Controlabilidade

Considere o sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (3.01)$$

$$y = Cx + Du, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (3.02)$$

Seja a lei de controle, dada por:

$$u = -Kx. \quad (3.03)$$

Um problema clássico de controle é a determinação, se possível, de K de modo que os pólos do sistema de malha fechada possam ser arbitrariamente posicionados.

Se o sistema for controlável, então pode-se posicionar os pólos de malha fechada arbitrariamente com a lei de controle $u = -Kx$. Isto é, alocar a estabilidade desejada.

Supondo que o sistema seja controlável, isto é:

$$\det[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \neq 0,$$



considere que os pólos desejados para a malha fechada são:

$$S = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n.$$

Então, defina:

$$\phi(S) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n),$$

$$\phi(S) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n,$$

e

$$\phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n.$$

Usando a fórmula de Ackermann para o cálculo de K , temos (Ogata, 1993):

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [B|AB|\dots|A^{n-1}B]^{-1} \phi(A).$$

3.2.3 – Observabilidade

Seja o sistema (3.01) e (3.02), rescrito:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3.01}$$

$$y = Cx + Du \tag{3.02}$$

onde:

u – é a entrada do sistema,

y – é a saída do sistema.

Note que:

$$y(0) = C \cdot x(0) + D \cdot u(0),$$

$$\dot{y}(0) = C \cdot \dot{x}(0) + D \cdot \dot{u}(0) = C \cdot (A \cdot x(0) + B \cdot u(0)) + D \cdot \dot{u}(0),$$

$$\dot{y}(0) = CA \cdot x(0) + CB \cdot u(0) + D \cdot \dot{u}(0),$$

$$\ddot{y}(0) = C \cdot \ddot{x}(0) + D \cdot \ddot{u}(0) = C \cdot (A \cdot \dot{x}(0) + B \cdot \dot{u}(0)) + D \cdot \ddot{u}(0),$$

$$\ddot{y}(0) = CA^2 \cdot x(0) + CAB \cdot u(0) + CB \cdot \dot{u}(0) + D \cdot \ddot{u}(0),$$

$\vdots$

$${}^{n-1}y(0) = CA^{n-1} \cdot x(0) + \dots,$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \vdots \\ {}^{n-1}y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) + Tc,$$

onde:

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

T_c = termos conhecidos.

Se $\mathcal{G}$ for inversível,

$$x(0) = \mathcal{G}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} - T_c,$$

e o sistema dado será observável. Se, $\mathcal{G}$ for inversível, então, $\det(\mathcal{G}) \neq 0$.

3.2.4 – Estabilidade de Lyapunov

A estabilidade assintótica de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ pode ser alcançada por dois métodos, descritos a seguir:

1 - Método Indireto:

- (i) Computando o polinômio característico de A ;
- (ii) Aplicando o critério de Routh-Hurwitz.

2 - Método Direto:

- (iii) Computando os autovalores de A .

O critério de estabilidade de Lyapunov na sua forma mais ampla pode determinar a estabilidade de sistemas não-lineares e/ou variantes no tempo.

No caso de sistemas lineares invariantes no tempo o critério de Lyapunov é uma alternativa para computar estabilidade assintótica sem computar os autovalores de A .

Também é um recurso para a determinação de leis de controle visando

desempenho ótimo.

3.2.4.1 - Conceitos básicos:

Matrizes positiva definidas e positiva semidefinidas.

- Uma matriz quadrada M no corpo dos complexos é hermitiana se:

$$M^* = M,$$

onde :

$$M^* = \text{é a matriz transposta conjugada de } M;$$

- Uma matriz quadrada M no corpo dos reais é simétrica se:

$$M' = M,$$

onde :

$$M' = \text{é a matriz transposta de } M.$$

Todos os autovalores de uma matriz hermitiana são reais e existe " P " tal que:

$$P^{-1} = P^* \text{ e } \hat{M} = PMP^*,$$

onde :

$\hat{M}$ é diagonal (assim seus autovalores estão na diagonal e apresenta todos autovalores reais).

Seja M hermitiana e,

$$\lambda_{\min} = \text{menor autovalor de } M,$$

$\lambda_{\max}$ = maior autovalor de M .

Então,

$$\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq x^* M x \leq \lambda_{\max} \|x\|^2, \forall x \in C^n,$$

onde:

$$\|x\|^2 \equiv \langle x, x \rangle \equiv x^* x = \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

Considere a definição:

Uma matriz hermitiana M é dita ser positiva definida se e somente se $x^* M x > 0$, para todo $x \in C^n$.

Uma matriz hermitiana M é dita ser positiva semidefinida se e somente se $x^* M x \geq 0$.

Uma matriz hermitiana M é definida (semidefinida positiva) se e somente se qualquer uma das seguintes condições forem satisfeita:

Todos os autovalores de M são positivos;

Todos os menores principais de M são positivos (principais menores são não negativos).

3.2.4.2 - Teorema de Lyapunov

Todos os autovalores de A têm parte real negativa, ou equivalentemente $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é assintoticamente estável se e somente se para qualquer matriz hermitiana N definida positiva, a equação matricial



$$A^*M+MA = -N.$$

tenha uma única solução que é a matriz hermitiana M sendo que M é positiva definida.

3.3 – Desigualdades Matriciais Lineares

Nos últimos anos, Desigualdades Matriciais Lineares, (LMI), têm recebido atenção considerável na área de análise e projeto de Controle (Trofino, 1998; Packard et. al., 1991; Tanaka et. al., 1998; Boyd et. al., 1994; Iwasaki and Skelton, 1994).

Numericamente, os problemas de LMIs podem ser resolvidos, muito eficientemente, por meio de algumas ferramentas poderosas, disponíveis na literatura de programação matemática (Boyd et. al., 1994).

A interpretação das análises de estabilidade e problemas de projeto de controle com problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar soluções para os problemas originais (Pietrobom, 1999).

A idéia do trabalho é utilizar os resultados disponíveis para o projeto de controladores, com realimentação estática da saída, através das ferramentas disponíveis utilizando LMIs, interpretando o problema do projeto de controladores PID, como o projeto de um controlador proporcional que realimenta a saída disponível.



Capítulo IV

PROJETO DE CONTROLADORES PID COM LMIS

4.1 – Introdução

Neste capítulo apresentamos resultados sobre o projeto de controladores PID com LMIs objetivando a estabilidade, uma taxa de decaimento conveniente, robustez paramétrica, restrição na entrada e restrição na saída.

A proposta principal deste capítulo, é abordar o problema de projeto de controladores PID, através do projeto de um controlador estático, como mostrado na figura 4.1, realimentando o vetor de saída disponível (y), composto pelas variáveis de estado disponíveis, que são: o próprio erro (e), sua derivada (w), sua integral (z); destacamos que $G(s)$ é a função de transferência da planta, e $u=[K_P K_D K_I]$ y a entrada da planta.

Com esta estrutura, pretende-se utilizar estes resultados, para o projeto de controladores estáticos com LMIs .

Pela literatura disponível não existe solução perfeita para esse problema (Iwasaki,



1999), mas são apresentados métodos que oferecem solução em certas situações.

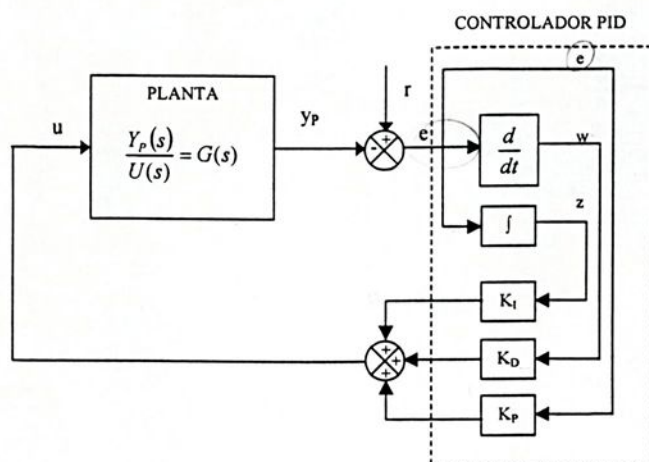


Figura 4.1 – Controlador estático.

O projeto de controlador PID com LMIs, será abordado da seguinte forma: inicialmente, será projetado, considerando como restrição inicial a estabilidade, e com o objetivo de se obter um sistema satisfatório, serão acrescentadas novas restrições a cada evolução do processo.

- Estabilidade.
- Estabilidade + taxa de decaimento.
- Estabilidade + taxa de decaimento + robustez.
- Estabilidade + taxa de decaimento + robustez + restrição na entrada.
- Estabilidade + taxa de decaimento + robustez + restrição na entrada + restrição na saída.

Exemplo – este exemplo será utilizado como referência em todo o desenvolvimento do

trabalho.

Podemos considerar como um exemplo ideal do estudo feito, um motor de corrente contínua, cujo diagrama de blocos é representado na figura 4.2.

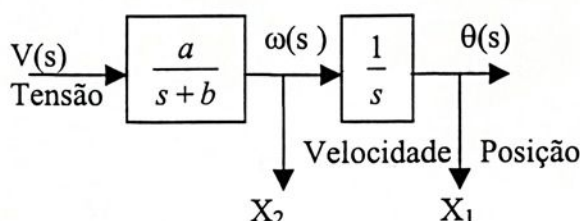


Figura 4.2 – Diagrama de blocos de um motor corrente contínua.

A função de transferência de um servomotor corrente contínua, é dada por:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s[L_a \cdot Js^2 + (L_a \cdot b + R_a \cdot J)s + R_a \cdot b + K \cdot K_b]},$$

Como a indutância L_a do circuito da armadura normalmente é pequena, ela pode ser desprezada. Se L_a for desprezada, então a função de transferência dada, se reduz a

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)},$$

onde:

$\theta(s)$ - é a saída do sistema.

$V(s)$ - é a entrada do sistema.

R_a - resistência da armadura, ohm.

L_a - indutância da armadura, henry.

K_b - constante de força contra eletromotriz.

b - coeficiente de atrito viscoso equivalente do motor e da carga referidos ao eixo do motor, $N \cdot m / (rad/s)$.

J - momento de inércia equivalente do motor e da carga referidos ao eixo do motor, $kg \cdot m^2$.

4.2 - Estabilidade

A característica mais importante do comportamento dinâmico de um sistema de controle é a estabilidade absoluta, isto é, se o sistema é estável ou instável. Um sistema de controle invariante no tempo e linear é estável, se a saída volta ao estado de equilíbrio quando o sistema é sujeito a uma perturbação.

Em Trofino (1998), foram apresentadas condições para análise e síntese de sistemas de controle com acesso parcial às variáveis de estado da planta, baseados nas noções de estabilidade, com função de Lyapunov quadrática e função de Lyapunov dependente de parâmetros do sistema. Nesta dissertação esses resultados foram aplicados no projeto de controladores Proporcional, Integral e Derivativo (PID), no que se relaciona a estabilidade, taxa de decaimento, robustez, restrição na entrada e restrição na saída.

Existem condições suficientes para a estabilidade de sistemas, que são derivadas usando funções Lyapunov quadráticas do tipo $V = x^T(t)Px(t)$, $P = P^T > 0$.

Então, seja o sistema da figura 4.1 dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx, \quad y = [e \quad w \quad z]^T,$$

e o controlador $u = K \cdot y = [K_P \quad K_D \quad K_I] \cdot y$. Assim,

$$\dot{x} = (A + B \cdot K \cdot C) \cdot x. \quad (4.01)$$

Dessa forma, a derivada de V será:

$$\dot{V} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x. \quad (4.02)$$

Como temos o $\dot{x}$ definido em (4.1), façamos a devida substituição:

$$\dot{V} = x^T P \cdot (A + B \cdot K \cdot C) \cdot x + [(A + B \cdot K \cdot C) \cdot x]^T P x. \quad (4.03)$$

Colocando o x^T e o x em evidência, definimos a derivada de V :

$$\dot{V} = x^T [P \cdot (A + B \cdot K \cdot C) + (A + B \cdot K \cdot C)^T P] \cdot x. \quad (4.04)$$

Para que $\dot{V} < 0$, qualquer que seja $x \neq 0$, devemos ter:

$$P \cdot (A + B \cdot K \cdot C) + (A + B \cdot K \cdot C)^T P < 0. \quad (4.05)$$

Multiplicando-se ambos os lados por P^{-1} , obtemos:

$$P^{-1} \cdot [P \cdot (A + B \cdot K \cdot C) + (A + B \cdot K \cdot C)^T P] \cdot P^{-1} < 0, \quad (4.06)$$

e considerando $P^{-1} = W$, segue a expressão final:

$$(A + B \cdot K \cdot C) \cdot W + W \cdot (A + B \cdot K \cdot C)^T < 0. \quad (4.07)$$

Condições para estabilidade

Para verificar a estabilidade do sistema, devemos satisfazer:

$$V(x(t)) > 0 \quad \text{e} \quad \dot{V}(x(t)) < 0.$$

Assim, (4.07) deve ser satisfeita para

$$W = W^T > 0.$$

O projeto do controlador PID se resume a determinação de K e W , tais que:



$$W = W^T > 0 \text{ e}$$

$$A \cdot W + W \cdot A^T + B \cdot K \cdot C \cdot W + W \cdot C^T \cdot K^T \cdot B^T < 0. \quad (4.08)$$

Note que a segunda equação é uma BMI (Bilinear Matrix Inequality) pois aparece o produto de W e K . Em Trofino (1998), foi incluída a restrição $M \cdot C = C \cdot W$. Assim e realizando as devidas substituições, obteremos:

$$A \cdot W + W \cdot A^T + B \cdot K \cdot M \cdot C + M \cdot C^T \cdot K^T \cdot B^T < 0. \quad (4.09)$$

Assumindo que $F = K M$, então, encontramos a seguinte equação de estabilidade:

$$A \cdot W + W \cdot A^T + B \cdot F \cdot C + C^T \cdot F^T \cdot B^T < 0, \quad (4.10)$$

que é uma LMI. Como desejamos encontrar um ponto de estabilidade que torne o sistema satisfatório, igualamos a equação de estabilidade a um escalar t multiplicado por uma matriz identidade I :

minimizar t

$$A \cdot W + W \cdot A^T + B \cdot F \cdot C + C^T \cdot F^T \cdot B^T < t \cdot I, \quad (4.11)$$

$$A \cdot W + W \cdot A^T + B \cdot F \cdot C + C^T \cdot F^T \cdot B^T - t \cdot I < 0.$$

Assim, as LMIs para o projeto do ganho K são as seguintes:

$$-A \cdot W - W \cdot A^T - B \cdot F \cdot C - C^T \cdot F^T \cdot B^T + t \cdot I > 0, \quad (4.12)$$

$$t < 0, \quad (4.13)$$

$$W > 0 \quad e \quad (4.14)$$

$$M \cdot C = C \cdot W. \quad (4.15)$$

Se existir solução, obtemos off-line:

$$K = [K_p \quad K_D \quad K_I] = F \cdot M^{-1}.$$

Exemplo 1

Um problema deste método é que a restrição de igualdade $MC=CW$ é forte, o que limita as situações onde existe solução. Para o exemplo 1, consideraremos a função de transferência da planta:

$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s}$. Assim o sistema da figura 4.1 com entrada u e saída

$y = [e \quad w \quad z]^T$ é descrito pelas matrizes (A, B, C) dadas na forma canônica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Realizando a simulação no software LMISol, com o objetivo de encontrar um ganho satisfatório, obtemos os seguintes resultados:

$$K = F \cdot M^{-1} = [4.4207 \quad 0.1688 \quad 1.6930].$$

Os autovalores da matriz $A + B \cdot K \cdot C$ são: $-0.8510 + 1.7035j$, $-0.8510 - 1.7035j$ e -0.4669 .

Foi também obtido $t = -0.4888$.

Com os ganhos obtidos,

$$K = [4.4207 \quad 0.1688 \quad 1.6930] = [K_p \quad K_D \quad K_I],$$

e também considerando como condição inicial $[0 \ 0 \ 0]$, o sistema da figura 4.1 foi simulado.

Considerando uma entrada degrau, utilizamos o software Matlab, e plotamos o $Y_p(t)$ x t .

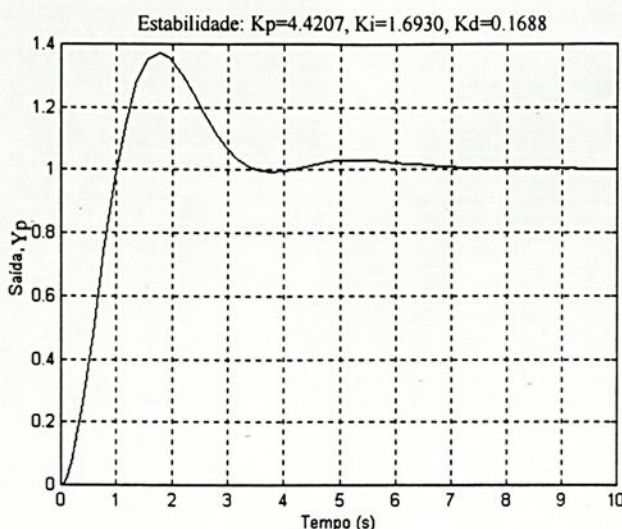


Figura 4.3 – Simulação do exemplo 1

4.3 – Taxa de Decaimento

Um exemplo prático descreve melhor o que almejamos: considere um módulo didático com um pêndulo invertido, onde é necessário limitar um prazo para que ele alcance estabilidade, coisa de poucos segundos; é onde aplicamos a taxa de decaimento, adotando um δ conveniente, caso contrário seria necessária sua preparação até alguns dias antes, para que no momento da exposição aos alunos ele alcance o ponto de equilíbrio.

É importante considerar não somente a estabilidade, mas também outros índices de desempenho de controle, tais com velocidade de resposta, que está relacionada com a taxa de decaimento.

Considerando o desenvolvimento das equações para estabilidade como básico, desenvolve-se a seguir o equacionamento para *taxa de decaimento*, sua implementação no LMISol e simulação no Matlab.

Tendo como condição que:

$$V(t) < e^{-\delta t} V(0) \quad (4.16)$$

então,

$$\dot{V}(t) < -\delta \cdot V(t). \quad (4.17)$$

Na medida que aumentamos o valor de δ , obtemos uma resposta transitória rápida, que geralmente resulta no aumento dos ganhos. Para valores reduzidos de δ o sistema fica mais lento.

A partir das funções Lyapunov quadráticas do tipo $V(x(t)) = x^T \cdot P \cdot x$, e da derivada de V dada em (4.4), mostrada a seguir, realizamos as substituições na equação (4.17).

$$\dot{V} = x^T [P \cdot (A + B \cdot K \cdot C) + (A + B \cdot K \cdot C)^T P] \cdot x.$$

Assim, na equação da estabilidade acrescida do termo escalar t (4.12), será necessário apenas acrescentar $\delta \cdot P$.

$$-A \cdot W - W \cdot A^T - B \cdot F \cdot C - C^T \cdot F^T \cdot B^T + t \cdot I - \delta \cdot P > 0 \quad (4.18)$$

Exemplificando, se quero um tempo de estabilização ≤ 2 s, qual deve ser o δ ideal?

Considere que $\dot{V} \leq -\frac{1}{T} V(x)$, $\forall x$ (Castrucci, 1981, pp. 62).

Como $V > 0$, $\forall x$ e $dt > 0$,

$$\frac{dV}{V} \leq -\frac{dt}{T}. \quad (4.19)$$

Integrando ambos os termos de 0 a t , tem-se:

$$\ln \frac{V(x(t))}{V(x(0))} \leq -\frac{t}{T}, \quad V(x(t)) \leq V(x(0)) e^{-t/T}.$$

Note que se,

$$P \cdot (A + B \cdot K \cdot C) + (A + B \cdot K \cdot C)^T P + \delta \cdot P < 0, \quad (4.20)$$

então

$$P \cdot \left(A + B \cdot K \cdot C + \frac{\delta}{2} \cdot I \right) + \left(A + B \cdot K \cdot C + \frac{\delta}{2} \cdot I \right)^T P < 0. \quad (4.21)$$

Portanto, todos autovalores de $A + B \cdot K \cdot C + (\delta/2) \cdot I$, devem ter parte real negativa.

Realmente, pois λ será autovalor de $A + B \cdot K \cdot C + (\delta/2) \cdot I$, se existir $v \neq 0$,

$$\left(A + B \cdot K \cdot C + \frac{\delta}{2} \right) \cdot v = \lambda \cdot v, \quad (4.22)$$

$$(A + B \cdot K \cdot C) \cdot v = \left(\lambda - \frac{\delta}{2} \right) \cdot v, \quad (4.23)$$

e assim os autovalores de $(A + B \cdot K \cdot C) + (\delta/2) = \lambda$, têm parte real negativa. Assim todos os autovalores de $(A + B \cdot K \cdot C)$ devem ter parte real menor do que $-\delta/2$.

Pelo critério de 2% para tempo de estabilização (t_s), para um sistema de segunda ordem, subamortecido, com dois pólos e sem zeros, (Ogata, pp. 215),

$$t_s = 4 \cdot T = \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n}. \quad (4.24)$$

Esta formula também é válida para o cálculo aproximado do tempo de estabilização para sistemas com um número maior de pólos do que dois, com pólos distintos e

possuindo partes reais menores do que $-\zeta \cdot \omega_n$.

Considerando $\zeta \cdot \omega_n = \frac{\delta}{2}$ e substituindo em (4.24), obtemos:

$$t_s = \frac{4}{\frac{\delta}{2}}, \quad \Rightarrow \quad t_s = \frac{8}{\delta} \text{ segundos.}$$

Portanto, se pretendemos determinar, um tempo de estabilização $t_s=2$ segundos, para o mesmo sistema adotado, qual deverá ser o δ ?

Solução:

$$t_s = \frac{8}{\delta}, \quad 2 = \frac{8}{\delta}, \quad \text{portanto,} \quad \delta = 4.$$

Exemplo 2

Para o exemplo 2, consideraremos a função de transferência: $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s}$, e na forma canônica, o sistema da figura 4.1 é dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideramos $\delta = 2$.

Realizando o projeto com software LMISol com as LMIs (4.12), (4.18), com o objetivo de encontrar um ganho satisfatório, obtemos os seguintes resultados:

$$K = F \cdot M^{-1} = [24.6313 \quad 5.3151 \quad 32.5846],$$

os autovalores da matriz $A + B \cdot K \cdot C$ são: $-2.9222 + 2.7380j$, $-2.9222 - 2.7380j$ e -1.4708 .

Foi também obtido $t = -0.0609$.

Com os ganhos obtidos,

$$K = [24.6313 \quad 5.3151 \quad 32.5846] = [K_p \quad K_D \quad K_I]$$

e também considerando como condição inicial $[0 \ 0 \ 0]$, o sistema da figura 4.1 foi simulado.

Considerando uma entrada degrau, utilizamos o software Matlab, e plotamos o $Y_p(t)$ x t ,

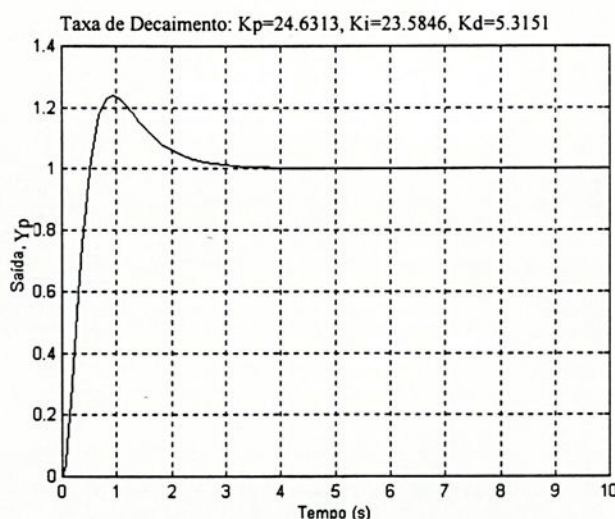


Figura 4.4 – Simulação do exemplo 2

Observe que o sistema atingiu o regime para $t_s \approx 4s$, o que está de acordo com a fórmula $t_s = 8/\delta$, pois adotamos $\delta = 2$.

4.4 – Robustez

Podemos exemplificar a aplicação da robustez paramétrica com o braço de um robô, supondo que ele tenha uma função simples, de carregar uma peça qualquer, do ponto x e armazenar no ponto y, podendo esta peça variar de peso, formato e tamanho. Através da robustez, definimos uma faixa de variação do peso, para que não comprometa a performance

do braço do robô. Considere a planta dada na figura 4.1,

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_n S^m + b_{n-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0} = \frac{Yp(s)}{U(s)},$$

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

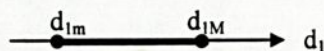
$$Yp = Cx,$$

$$Ap = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_1 & . & . & . & d_n \end{pmatrix},$$

$$Bp = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Cp = (C_1 \quad \dots \quad C_n).$$

Por exemplo, o elemento $d_i \in [d_{im}, d_{iM}]$, onde d_i é constante, $i = 1$.



Como queremos $PA_i + A_i^T P < 0$, defina:

$$A = \theta_1 \cdot A_1 + \theta_2 \cdot A_2, \tag{4.25}$$

onde:

$$\theta_1 \text{ e } \theta_2 \in [0, 1],$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 1,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_{1m} & d_2 & \dots & \dots & d_n \end{pmatrix} e$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_{1M} & d_2 & \dots & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$P \cdot A_i + A_i^T P < 0.$$

$$P \cdot (\theta_1 \cdot A_1 + \theta_2 \cdot A_2) + (\theta_1 \cdot A_1 + \theta_2 \cdot A_2)^T \cdot P < 0,$$

$$P \cdot \theta_1 \cdot A_1 + P \cdot \theta_2 \cdot A_2 + P \cdot \theta_1 \cdot A_1^T + P \cdot \theta_2 \cdot A_2^T \cdot P < 0,$$

$$\theta_1 \cdot (P \cdot A_1 + A_1^T \cdot P) + \theta_2 \cdot (P \cdot A_2 + A_2^T \cdot P) < 0.$$

Logo, como $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$ e $\theta_1 + \theta_2 = 1$, devemos ter:

$$P \cdot A_1 + A_1^T \cdot P < 0 \quad e$$

$$P \cdot A_2 + A_2^T \cdot P < 0.$$

Exemplo 3

Para o exemplo 3, delimitaremos uma faixa de variação de 10%, trocando apenas o termo a_{22} , assim teremos duas LMIs, usaremos a LMI (4.18) que será modificada nos termos $A1$ e $A2$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1,8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \delta = 2.$$

Assim, a partir da LMI (4.18)

$$-A \cdot W - W \cdot A^T - B \cdot F \cdot C - C^T \cdot F^T \cdot B^T + t \cdot I - \delta \cdot I > 0,$$

formamos duas LMIs,

$$-A_1 \cdot W - W \cdot A_1^T - B \cdot F \cdot C - C^T \cdot F^T \cdot B^T + t \cdot I - \delta \cdot I > 0, \quad (4.26)$$

$$-A_2 \cdot W - W \cdot A_2^T - B \cdot F \cdot C - C^T \cdot F^T \cdot B^T + t \cdot I - \delta \cdot I > 0.$$

Utilizando as LMIs (4.26), (4.13) – (4.15), realizando o projeto no software LMISol, com o objetivo de encontrar um ganho satisfatório, obtemos os seguintes resultados:

$$K = F \cdot M^{-1}$$

$$K = [32.0534 \quad 7.1731 \quad 31.4221].$$

Os autovalores da matriz $A + B \cdot K \cdot C$ são: $-3.8847 + 2.7380j$, $-3.8847 - 2.7380j$ e -1.6037 .

Foi também obtido $t = -0.04805$.

Com os ganhos obtidos,

$$K = [32.0534 \quad 7.1731 \quad 31.4221] = [K_p \quad K_D \quad K_I] \text{ e}$$

considerando como condição inicial $[0 \ 0 \ 0]$, foi simulado o sistema da figura 4.1.

Inicialmente considerando $a_{22} = -1,8$.



Considerando uma entrada degrau, utilizamos o software Matlab, e plotamos o $Y_p(t)$ x

t .

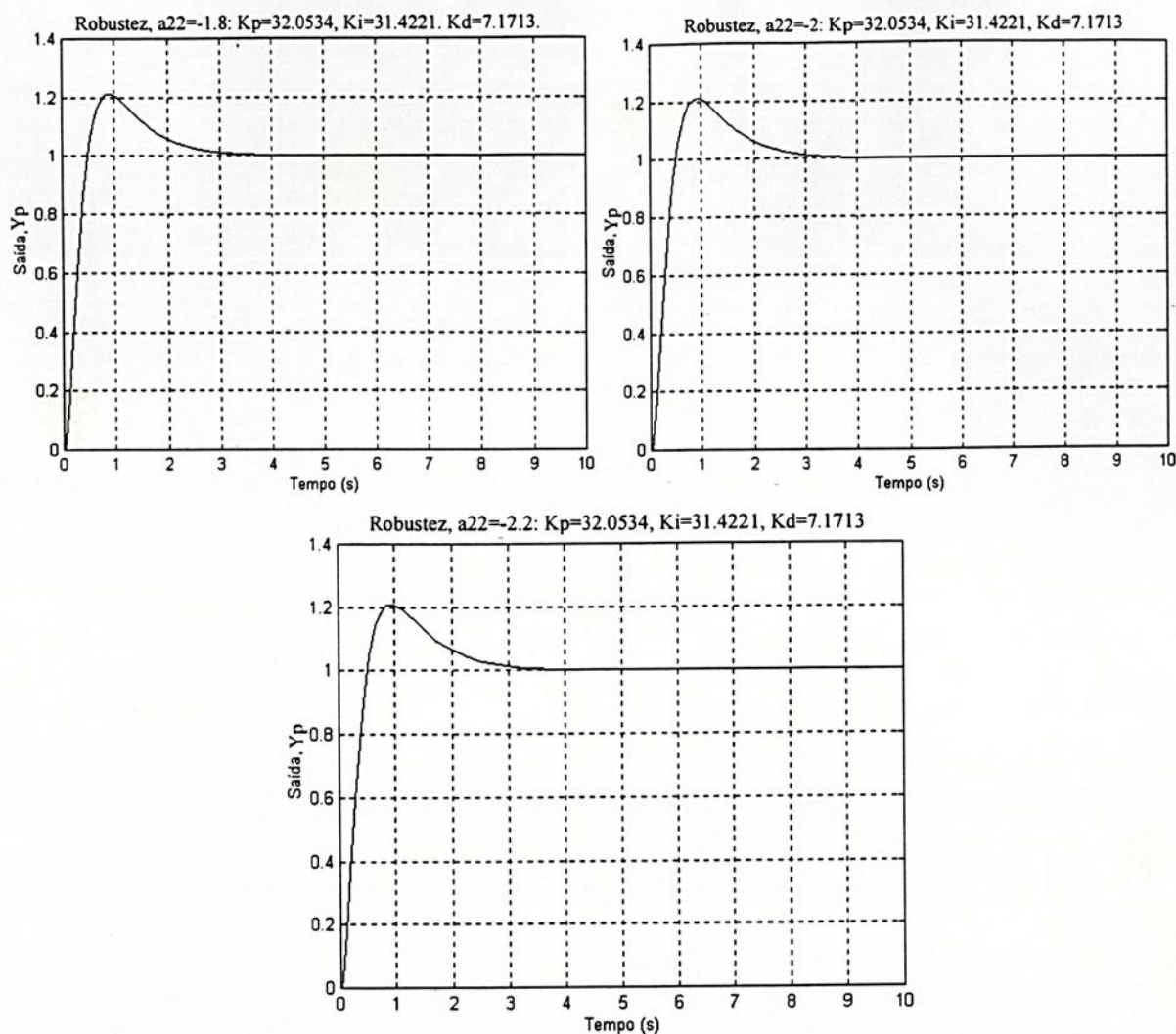


Figura 4.5 – Simulação do exemplo 3

Com os mesmos ganhos obtidos no LMISol,

$$K = [32.0534 \quad 7.1731 \quad 31.4221],$$

considerando como condição inicial $[0 \ 0 \ 0]$, $a_{22}=-2$, simulamos o sistema da figura 4.1.

Considerando uma entrada degrau, utilizamos o software Matlab, e plotamos o $Y_p(t)$ x

t .

Portanto para as mesmas condições anteriores, considerando agora o termo $a_{22} = -2.2$,

simulamos novamente o sistema da figura 4.1.

Considerando uma entrada degrau, utilizamos o software Matlab, e plotamos o $Yp(t)$ x t .

Observando o três gráficos apresentados na figura 4.5 pode-se perceber que a diferença entre eles é muito pequena, imperceptível. Isto ocorreu devido ao fato de que consideramos uma faixa de variação muito pequena, apenas 10%.

4.5 - Restrição na Entrada

Assuma o conhecimento da condição inicial $x(0)$. A restrição $\|u(t)\| \leq \mu$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs (vide dedução no Apêndice):

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0) \\ x(0)^T & W \end{bmatrix} > 0,$$

e

(4.27)

$$\begin{bmatrix} W & F^T \\ F & \mu^2 I \end{bmatrix} > 0,$$

se mantiverem (vide Boyd et al., 1994), sendo $W = P^{-1}$ e $F = K \cdot W$, juntamente com as LMIs (4.26), (4.27), (4.13) – (4.15).

Adotando novamente o módulo do pêndulo invertido como exemplo prático, podemos explicar melhor o uso da restrição da entrada, supondo que o motor, que aciona o carrinho que contém o pêndulo, tem um limite de tensão ($|V_{motor}| \leq V_0$).

Exemplo 4

Para o exemplo 4, usaremos o desdobramento das LMIs utilizada no caso da robustez (4.26), (4.13)–(4.15) e acrescentaremos as LMIs (4.27), sendo, para o nosso caso,



consideraremos $\mu = 2.3$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1,8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \delta = 2.$$

ficando as LMIs da seguinte forma:

$$W = W^T > 0,$$

$$t < 0,$$

$$M \cdot C = C \cdot W,$$

$$-A_1 \cdot W - W \cdot A_1^T - B \cdot F \cdot C - C^T \cdot F^T \cdot B^T + T \cdot I - \delta \cdot I > 0,$$

$$-A_2 \cdot W - W \cdot A_2^T - B \cdot F \cdot C - C^T \cdot F^T \cdot B^T + T \cdot I - \delta \cdot I > 0,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0) \\ x(0)^T & W \end{bmatrix} > 0, \quad x(0) = (0 \quad 1 \quad 0)^T \text{ e}$$

$$\begin{bmatrix} W & F^T \\ F & \mu^2 I \end{bmatrix} > 0.$$

Realizando o projeto no software LMISol, com o objetivo de encontrar um ganho satisfatório, obtemos os seguintes resultados:

$$K = F \cdot M^{-1} = [7.0317 \quad 2.2023 \quad 4.8538],$$

os autovalores da matriz $A_1 + B \cdot K \cdot C$ são: $-1.0915 + 0.9979j$, $-1.0915 - 0.9979j$ e -2.2193 .

os autovalores da matriz $A_2 + B \cdot K \cdot C$ são: $-1.2692 + 1.3057j$, $-1.2692 - 1.3057j$ e -1.4638 .

Foi também obtido $t = -0.09169$.

Com os ganhos obtidos,

$$K = [7.0317 \quad 2.2023 \quad 4.8538] = [K_p \quad K_D \quad K_I].$$

Considerando, primeiramente, como condição inicial $[0 \ 0 \ 0]$, e $a_{22} = -1.8$, foi feita a simulação, apresentada na figura 4.6.

Considerando uma entrada degrau, utilizamos o software Matlab, e plotamos o $Y_p(t)$ x t .

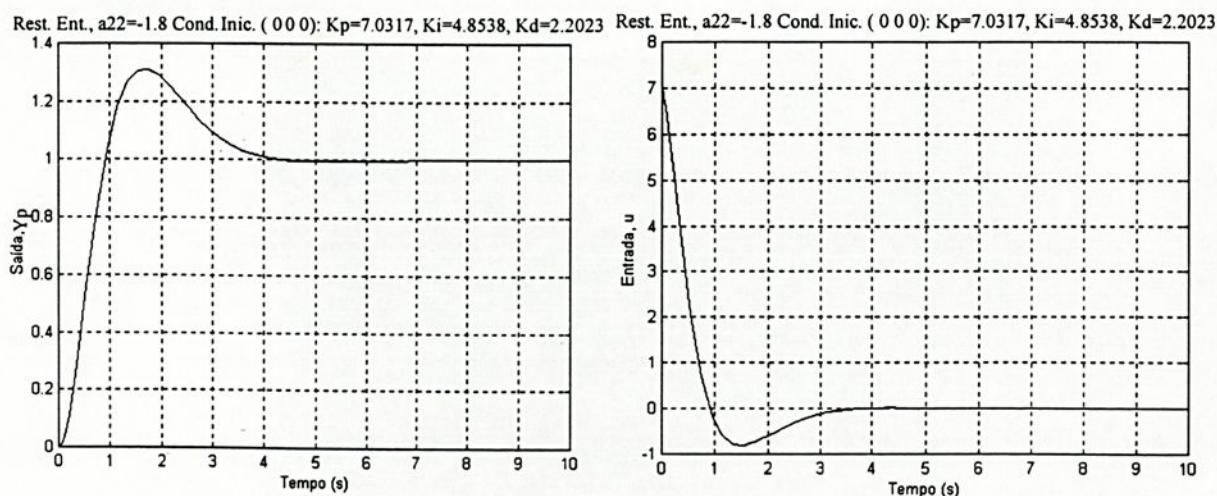
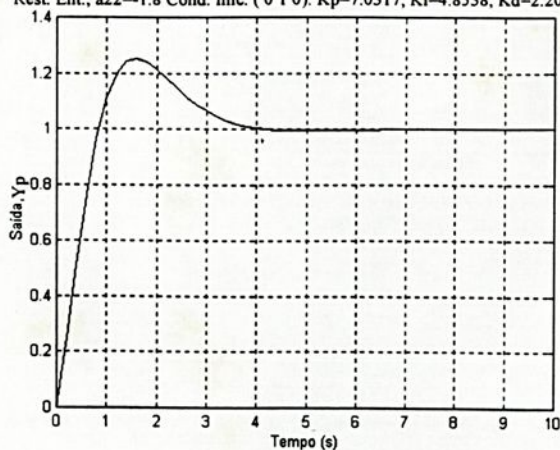


Figura 4.6 – Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

Rest. Ent., $a_{22}=-1.8$ Cond. Inic. (0 1 0): $K_p=7.0317$, $K_i=4.8538$, $K_d=2.2023$



Rest. Ent., $a_{22}=-1.8$ Cond. Inic. (0 1 0): $K_p=7.0317$, $K_i=4.8538$, $K_d=2.2023$

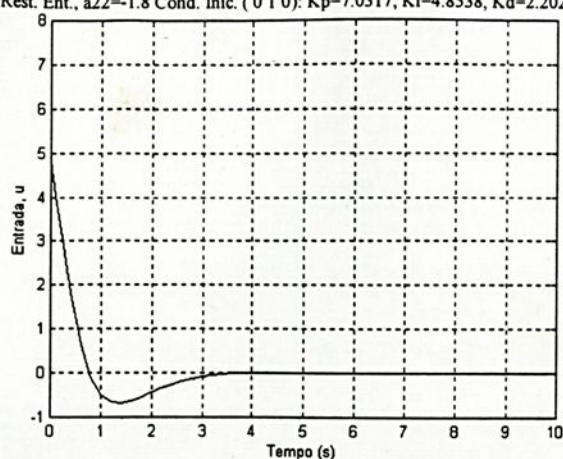
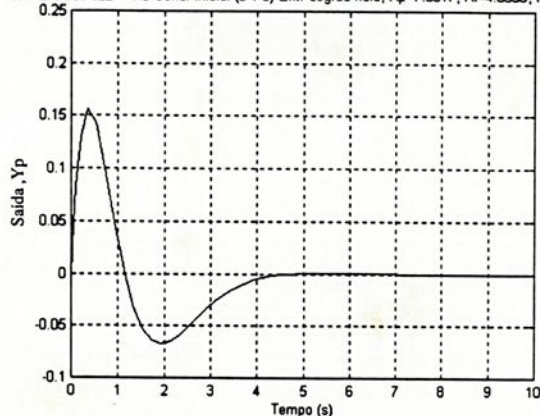


Figura 4.7 – Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

Rest. Entrada $a_{22}=-1.8$ Cond. inicial (0 1 0) Ent. degrau nulo, $K_p=7.0317$, $K_i=4.8538$, $K_d=2.2023$



Rest. Entrada $a_{22}=-1.8$ Cond. inicial (0 1 0) Ent. degrau nulo, $K_p=7.0317$, $K_i=4.8538$, $K_d=2.2023$

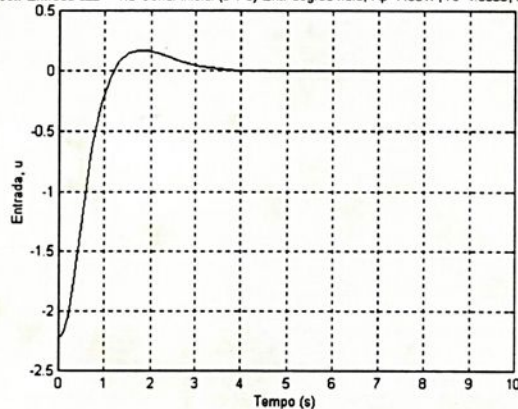
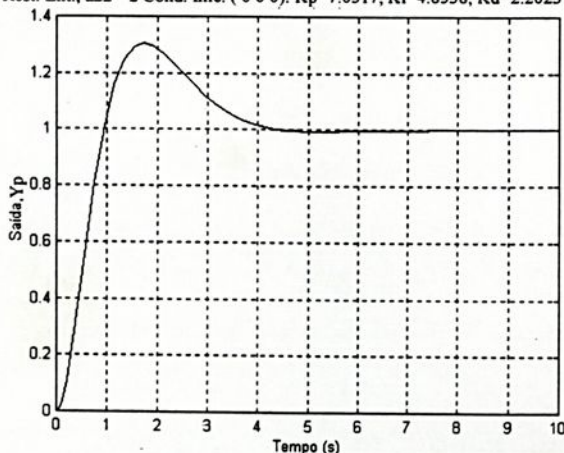


Figura 4.8 – Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau nulo.

Rest. Ent., $a_{22}=-2$ Cond. Inic. (0 0 0): $K_p=7.0317$, $K_i=4.8538$, $K_d=2.2023$



Rest. Ent., $a_{22}=-2$ Cond. Inic. (0 0 0): $K_p=7.0317$, $K_i=4.8538$, $K_d=2.2023$

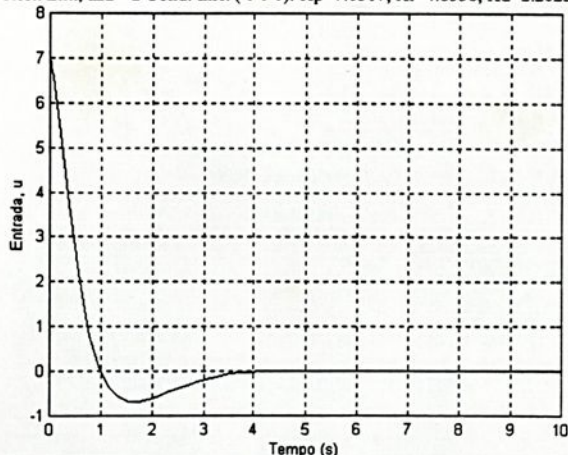


Figura 4.9 – Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

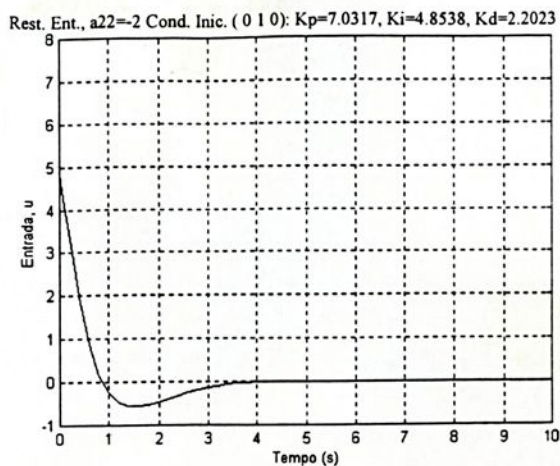
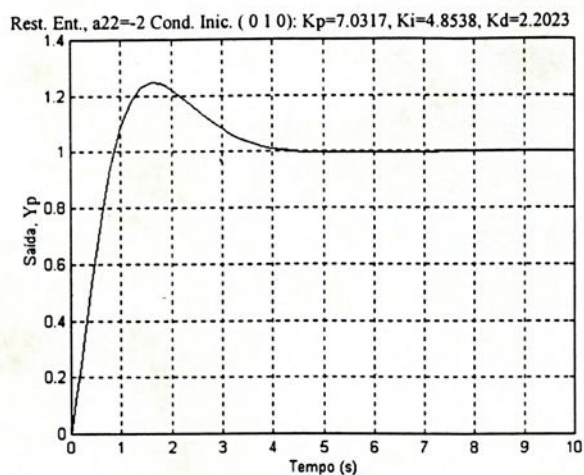


Figura 4.10 – Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

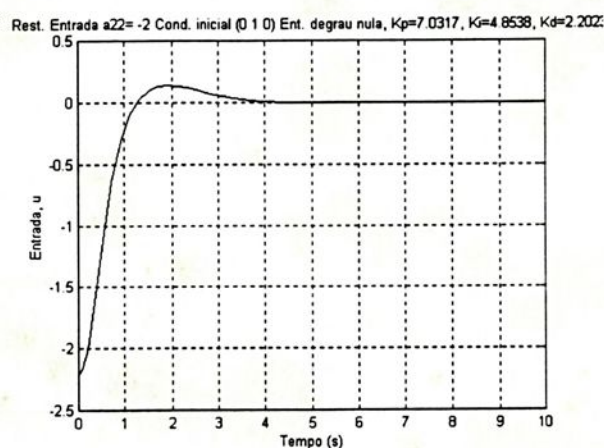
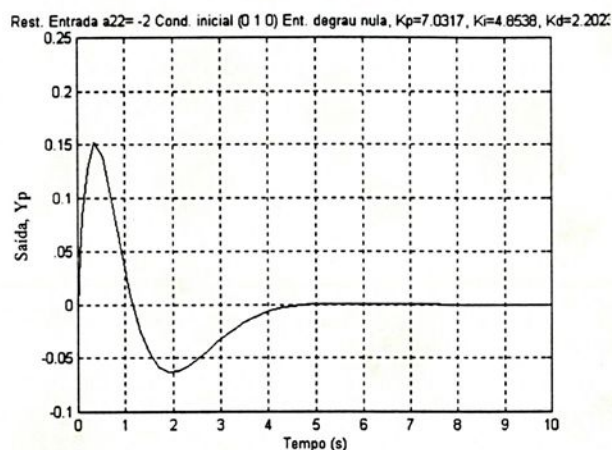


Figura 4.11 – Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau nulo.

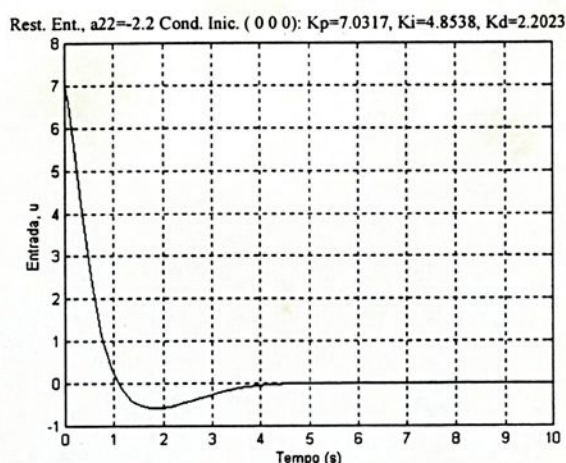
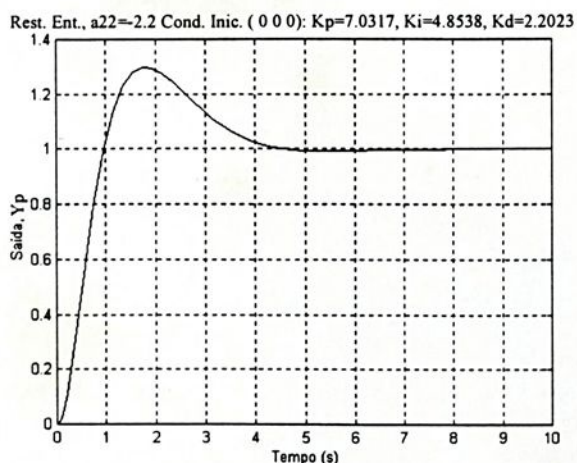


Figura 4.12 – Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

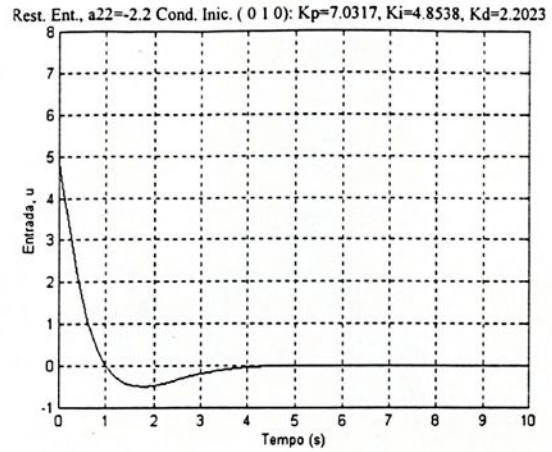
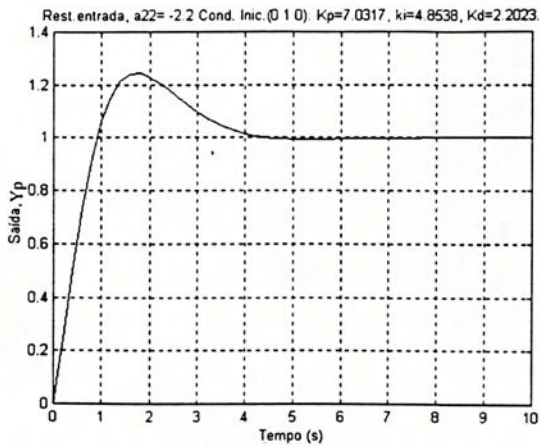


Figura 4.13 – Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

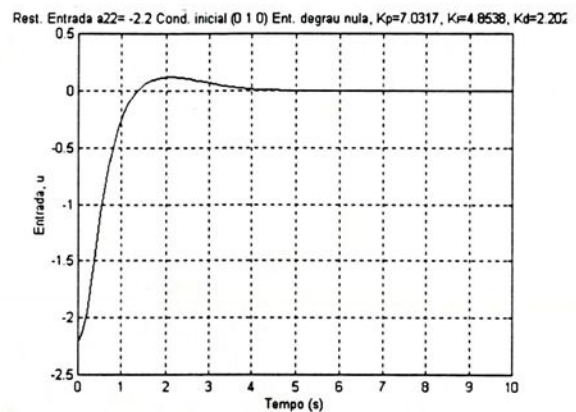
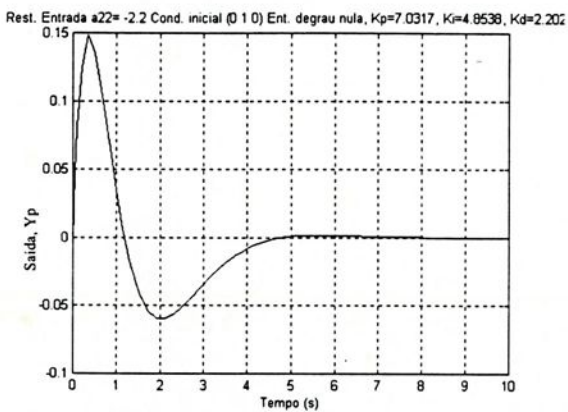


Figura 4.14 – Simulação do exemplo 4, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

Observe nas figuras 4.8, 4.11 e 4.14, que $|u(t)| < \mu = 2.3$.

4.6 - Restrição na Saída

Assumindo conhecer a condição inicial $x(0)$, por exemplo,

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A restrição $\|y(t)\| \leq \lambda$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs (vide dedução no Apêndice):

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0) \\ x(0)^T & W \end{bmatrix} > 0,$$

e

$$\begin{bmatrix} W & F^T \\ C_l \cdot W & \lambda^2 \end{bmatrix} > 0,$$

se mantiverem (vide Boyd et al., 1994), sendo $W = P^{-1}$ e $F = K \cdot M$, juntamente com as LMIs (4.26), (4.27), (4.13) – (4.15).

Exemplo 5

Para o exemplo 5, empregaremos as LMIs usadas na restrição na entrada com o $\mu = 2.3$, acrescida da LMI de restrição na saída acima, sendo que neste caso consideraremos $\lambda = 1.1$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1,8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \delta = 2.$$

As LMIs ficam da seguinte forma:

$$W = W^T > 0,$$

$$M \cdot C = C \cdot W,$$

$$-A_1 \cdot W - W \cdot A_1^T - B \cdot F \cdot C - C^T \cdot F^T \cdot B^T + t \cdot I - \delta \cdot I > 0,$$

$$-A_2 \cdot W - W \cdot A_2^T - B \cdot F \cdot C - C^T \cdot F^T \cdot B^T + t \cdot I - \delta \cdot I > 0,$$

$$t < 0,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0) \\ x(0)^T & W \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} W & F^T \\ F & \mu^2 I \end{bmatrix} > 0, \text{ e}$$

$$\begin{bmatrix} W & C_l^T \\ C_l \cdot W & \lambda^2 \end{bmatrix} > 0.$$

Realizando o projeto com o software LMISol, com o objetivo de encontrar um ganho satisfatório, obtemos os seguintes resultados:

$$K = F \cdot M^{-1} = [7.3019 \quad 2.1430 \quad 5.2368].$$

Os autovalores da matriz $A_1 + B \cdot K \cdot C$ são: -1.1702 +1.1161j, -1.1702 -1.1161j, e -2.0026.

Os autovalores da matriz $A_2 + B \cdot K \cdot C$ são: -1.2719 +1.4577j, -1.2719 -1.4577j, e -1.3993.



Foi também obtido $t = -0.002284$.

Com os ganhos obtidos,

$$K = \begin{bmatrix} 7.3019 & 2.1430 & 5.2368 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & K_D & K_I \end{bmatrix},$$

foram feitas diversas simulações com o software Matlab, como mostram as figuras a seguir.

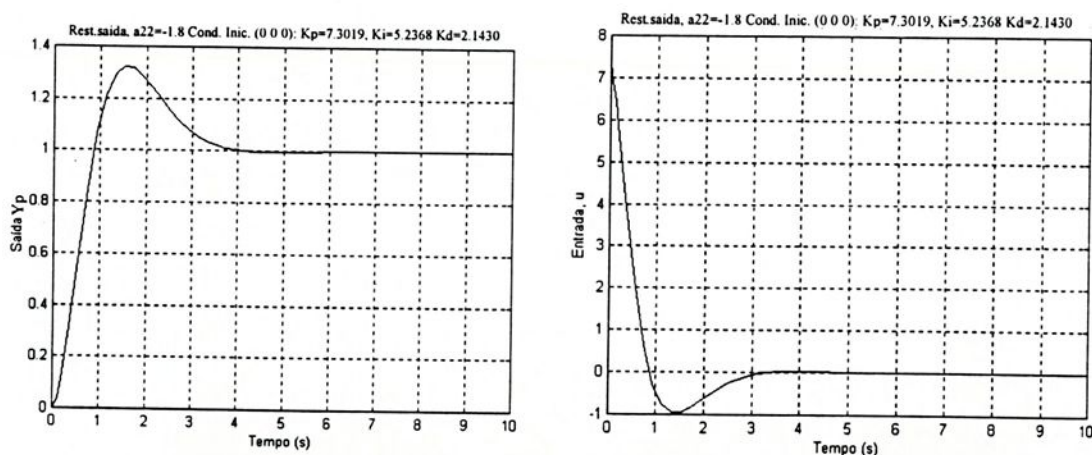


Figura 4.15 – Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

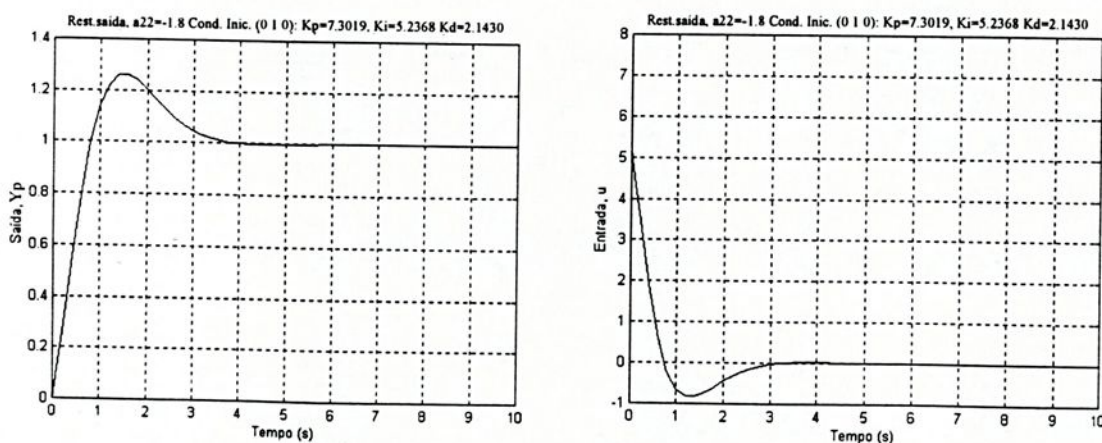


Figura 4.16 – Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

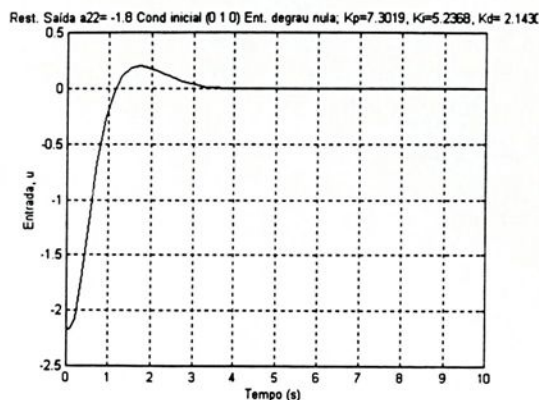
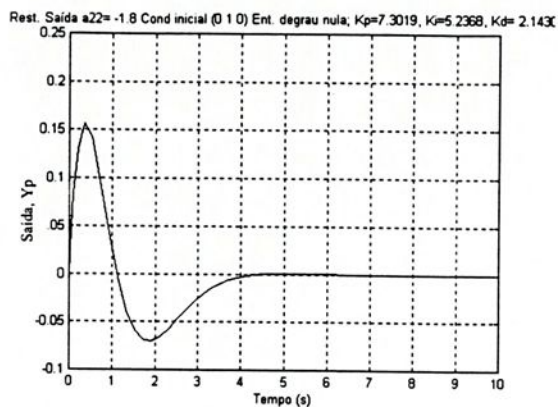


Figura 4.17 – Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau nulo.

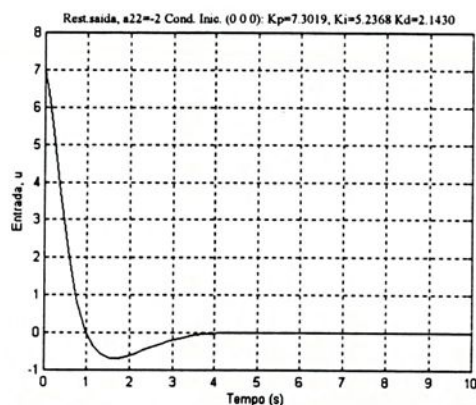
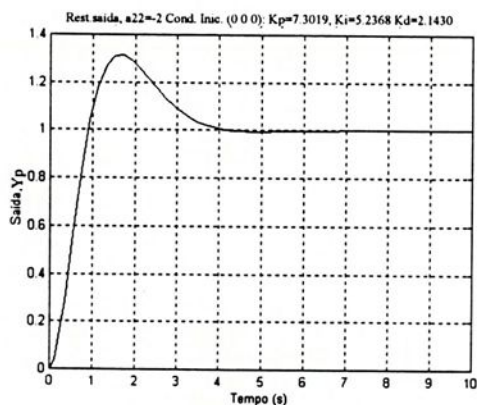


Figura 4.18 – Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

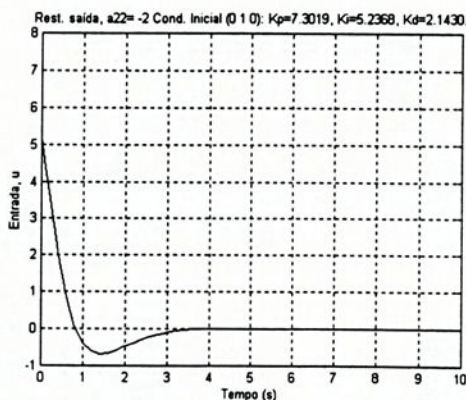
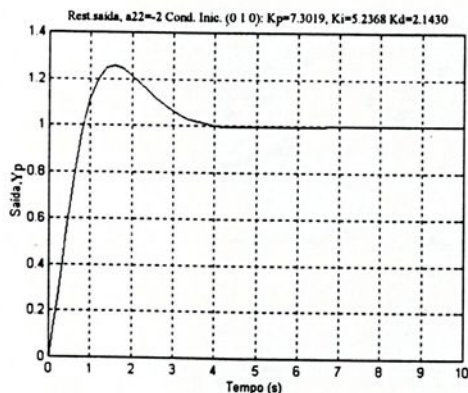


Figura 4.19 – Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

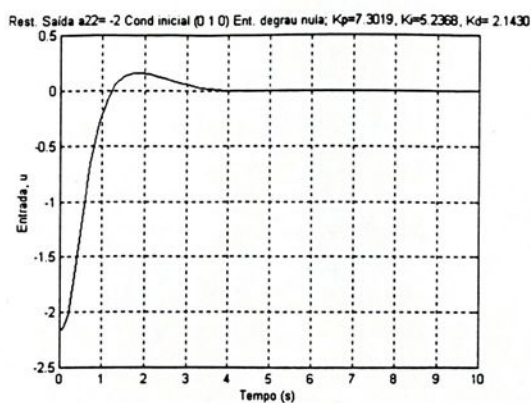
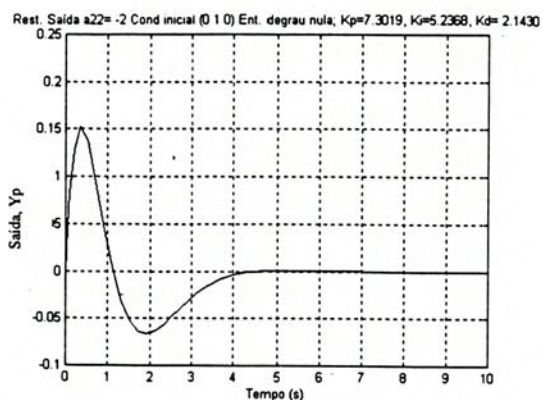


Figura 4.20 – Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau nulo.

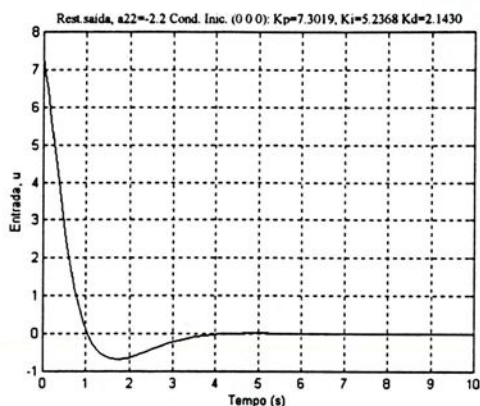
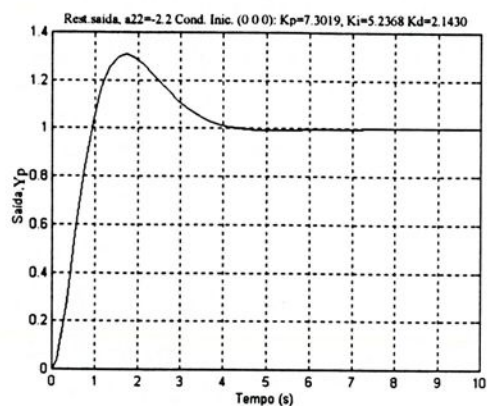


Figura 4.21 – Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

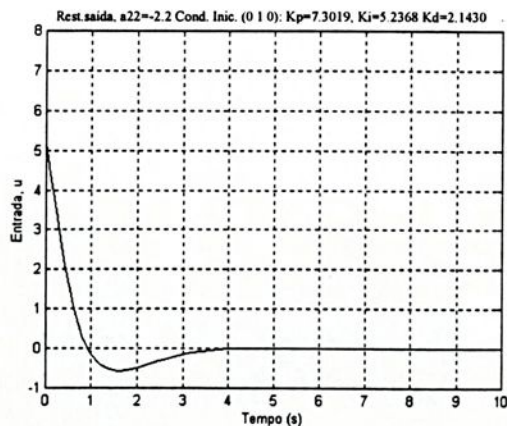
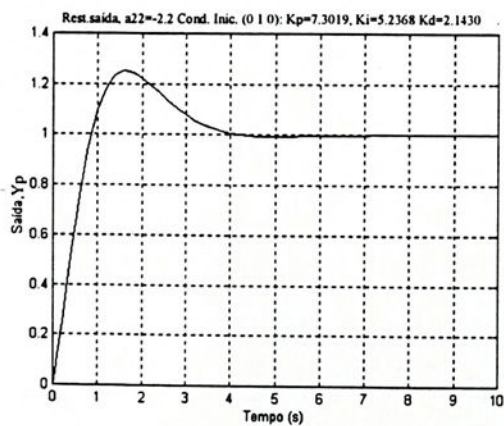


Figura 4.22 – Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau unitário.

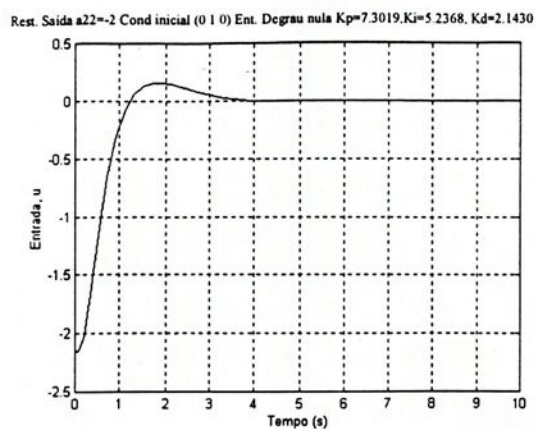
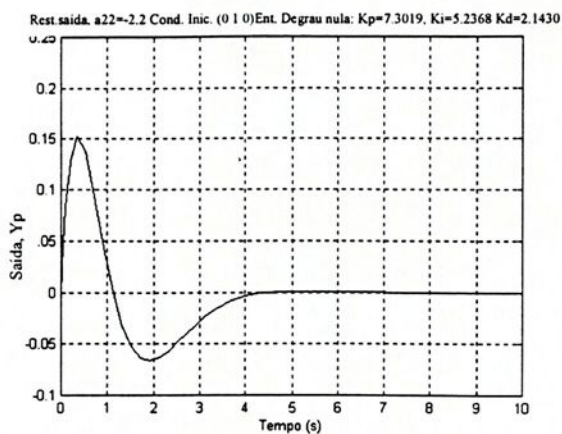


Figura 4.23 – Simulação do exemplo 5, para entrada $r(t)$ igual a degrau nulo.

Observamos nas figuras 4.17, 4.20 e 4.23 que $|Y_p| \leq \lambda = 1,1$ e $|u| \leq \mu = 2,3$, como desejado.

Capítulo V

CONCLUSÕES

Foi mostrado que o problema de projeto de controladores PID pode ser diretamente descrito através de BMIs (Bilinear Matrix Inequalities). Restringindo a solução do problema, foi possível representá-lo como a solução de um conjunto de LMIs.

Como não foi encontrado na literatura disponível, nenhuma abordagem em relação ao projeto de controladores PID baseados em LMI, não tivemos dados para comparação de resultados, mas adiantamos, que pelos resultados encontrados para estabilidade, robustez, velocidade de resposta e restrições na entrada e na saída, esta abordagem mostrou-se uma ferramenta poderosa, evitando cálculos massantes e extensos e encontrando alguma forma de resposta, que resolva o problema de projeto. Especificações sobre a taxa de decaimento (transitório), robustez, restrição na entrada e restrição na saída foram consideradas no projeto.

Salientamos que o projeto proposto, que utiliza o método descrito em Trofino, 1998, para traduzir o problema de projeto através da solução de LMIs, é limitado, pois a existência de soluções fica restrita a uma classe reduzida de situações. Recentemente a literatura especializada tem divulgado novos métodos para a estabilização com acesso somente a saída da planta e utilizando controladores estáticos, empregando em geral



processos iterativos com LMIs por exemplo, vide (Iwasaki,1999).

Uma continuidade natural desta pesquisa é o emprego de métodos mais elaborados para a solução das BMIs que traduzem o projeto dos controladores PID.



Referências Bibliográficas

Boyd, L. S. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishanan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, USA, 1994.

Trofino Neto, A., *Abordagem LMI para problemas de Controle com Funções de Lyapunov Dependente de Parâmetros*. Mini-Cursos, XII CBA, Uberlândia – MG, 1998.

Pietrobon, H.C. *Controle de Sistemas Não-lineares Baseados em LMI Utilizando Modelos Fuzzy*, Tese de Mestrado, FEIS –UNESP, 1999.

Geromel, J. C.; Oliveira, M. C. e Farias, D. P. *LMISol – Version 1.0 – User's Guide UNICAMP*, Campinas- SP, 1997.

Ogata, K., *Engenharia de Controle Moderno*, 2ª edição, Ed. Prentice Hall do Brasil Ltda, Rio de Janeiro – RJ, 1993.

Dorf, R. C. and Bishop, R. H., *Modern Control Systems*, 7ª edição, Ed. Addison-Wesley Publishing company, Reading Massachusetts, Menlo Park, USA, 1995.

Astrom, K. J.e Haggund, T., *Automatic tuning of PID Controllers*, 2ª edição, by Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1988.

Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, Ed. Prentice Hall International editions, 7ª edição, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.



Castrucci, P. B.e Curti, R., *Sistemas Não-lineares*, vol. 2, Ed. Edgard Blucher Ltda, São Paulo – SP, 1981.

Iwasaki, T. The Dual Iteration for Fixed-Order Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, N°. 4, Abril, 1999.

Iwasaki, T. and Skelton, R. E., *All Controllers for the general H_∞ Control Design Problem: LMI existence conditions and state space formulas*. Automatica, 30, 1994.

Packard, A., Zhou, K., Pandey, P. and Becker, G., *A Collection of Robust Control Problems Leading to LMIs*. In Proc. 30th IEEE Conf. On Decision and Control, Brighton – U.K., 1994.

Tanaka, K., Nishimura, M. and Wang, H. O., *Multi-objective Fuzzy control of High Rise/High Speed Elevators Using LMIs*, Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, 1998.



APÊNDICE



A1 - Restrição na Entrada

Admite-se que um sistema linear e invariante no tempo possua a seguinte representação em variáveis de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{A01})$$

sendo que

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado;

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada do controle;

$y(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema ($p \geq m$);

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz característica do sistema;

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada do sistema;

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída do sistema.

O problema da restrição no vetor de entrada $u(t)$ consiste em especificar LMIs, de modo que a assegurar que $\max_{t \geq 0} \|u(t)\| \leq \mu_0$, sendo que μ_0 é uma especificação considerada no projeto do controlador.

Para a lei de controle $u(t) = kx(t)$, tem-se que $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bkx(t)$.

Considera-se então, uma candidata a função de Lyapunov na forma quadrática $V(x) = x(t)^T Px(t)$, em que P é uma matriz real simétrica e definida positiva. A derivada desta função em relação ao tempo, ao longo de qualquer trajetória, é descrita por:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}(t)^T Px(t) + x(t)^T P\dot{x}(t) = (Ax(t) + Bkx(t))^T Px(t) + x(t)^T P(Ax(t) + Bkx(t))$$

$$= (x(t)^T A^T + x(t)^T k^T B^T) Px(t) + x(t)^T P(Ax(t) + Bkx(t))$$

$$= x(t)^T A^T + x(t)^T k^T B^T P x(t) + x(t)^T P A x(t) + x(t)^T P B k x(t)$$

$$= x(t)^T (A^T P + P A + k^T B^T P + P B k) x(t)$$

$$= x(t)^T P (P^{-1} A^T + A P^{-1} + P^{-1} k^T B^T + B k P^{-1}) P x(t).$$

Assim,

$$\dot{V} = x(t)^T (P^{-1} A^T + A P^{-1} + P^{-1} k^T B^T + B k P^{-1}) x(t).$$

Definindo-se $X = P^{-1}$, tem-se que

$$\dot{V} = x(t)^T P (X A^T + A X + X k^T B^T + B k X) P x(t)$$

e definido-se que $F = k P^{-1} = k X$, obtém-se

$$\dot{V} = x(t)^T P (X A^T + A X + F^T B^T + B F) P x(t).$$

Como $V(x)$ foi escolhida sendo definida positiva, a estabilidade assintótica é assegurada quando $\dot{V}(x)$ é definida negativa. Logo

$$X A^T + A X + F^T B^T + B F < 0.$$

Então, as condições para a estabilidade são a existência de X e F , tais que

$$-(X A^T + A X + F^T B^T + B F) > 0 \text{ e } X = X^T > 0, \quad (\text{A02})$$

que são LMIs em X e F .

Quando uma determinada condição inicial $x(0)$ é conhecida, é possível encontrar um limite superior para a norma euclidiana da entrada de controle $u(t)$, Boyd et. al., (1994). Considere inicialmente, que $X = X^T > 0$ satisfaça

$$x(0)^T X^{-1} x(0) < 1. \quad (\text{A03})$$

Esta condição não restringe a solução de (A02), pois apenas limita a norma de X^{-1} e (A02) não impõe outras restrições à matriz X .

Segundo Boyd et. al. (1994), a idéia básica do complemento de Schur diz que a LMI

$$\begin{bmatrix} M(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{A04})$$

sendo que $M(x) = M(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ tem uma dependência afim de x e é equivalente a

$$R(x) > 0 \text{ e } M(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0,$$

ou seja, este conjunto de inequações não-lineares pode ser representado através da LMI (A04).

Logo, pelo complemento de Schur, (A03) possui a seguinte equivalência:

$$1 - x(0)^T X^{-1} x(0) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{A05})$$

Como $k = FX^{-1}$ e definindo-se $z = X^{-1/2}x(t)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} \|u(t)\|_2 &= \max_{t \geq 0} \|kx(t)\|_2 = \max_{t \geq 0} \|FX^{-1}x(t)\|_2 \\ &= \max_{t \geq 0} \|FX^{-1}X^{1/2}X^{-1/2}x(t)\|_2 = \max_{t \geq 0} \|FX^{-1/2}z(t)\|_2. \end{aligned} \quad (\text{A06})$$

De (A03),

$$\|z(0)\|_2^2 = \|X^{-1/2}x(0)\|_2^2 = x(0)^T X^{-1/2} X^{-1/2} x(0) = x(0)^T X^{-1} x(0) \leq 1. \quad (\text{A07})$$

Como para $V(x) = x(t)^T X^{-1} x(t)$, $\dot{V}(x(t)) < 0$, para $x \neq 0$, então (A07) é satisfeita para todo $x(t)$, $t \geq 0$, e assim,

$$\|z(t)\|_2^2 = \|X^{-1/2}x(t)\|_2^2 = x(t)^T X^{-1/2} X^{-1/2} x(t) = x(t)^T X^{-1} x(t) \leq 1 \quad (\text{A08})$$

De (A06) e (A07),

$$\begin{aligned} &= \max_{t \geq 0} \|FX^{-1/2}z(t)\|_2 = \max_{t \geq 0} \sqrt{z(t)^T X^{-1/2} F^T F X^{-1/2} z(t)} \\ &= \sqrt{\lambda_{\max} \left(X^{-1/2} F^T F X^{-1/2} \right)} \sqrt{z(t)^T z(t)} = \sqrt{\lambda_{\max} \left(X^{-1/2} F^T F X^{-1/2} \right)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\max_{t \geq 0} \|FX^{-1/2}z(t)\|_2^2 < \mu_0^2 \Rightarrow \lambda_{\max} \left(X^{-1/2} F^T F X^{-1/2} \right) < \mu_0^2.$$

Esta condição é equivalente a

$$X^{-1/2} F^T F X^{-1/2} - \mu_0^2 I < 0, \quad (\text{A09})$$

pois

$$z(t)^T \left(X^{-1/2} F^T F X^{-1/2} - \mu_0^2 I \right) z(t) \leq z(t)^T z(t) \left(\lambda_{\max} \left(X^{-1/2} F^T F X^{-1/2} \right) - \mu_0^2 \right).$$

Multiplicando-se (A09), em ambos os lados, por $X^{+1/2}$, obtém-se

$$F^T F - \mu_0^2 X < 0 \Rightarrow \mu_0^2 X - F^T F > 0$$

$$\Rightarrow X - F^T (\mu_0^{-2} I) F > 0. \quad (A10)$$

Logo, pelo complemento de Schur, (A10) possui a seguinte equivalência:

$$-X^{-1/2} F^T F X^{-1/2} + \mu_0^2 I > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & F^T \\ F & \mu_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (A11)$$

Portanto, as LMIs (A5) e (A11) solucionam o problema.

A2 - Restrição na Saída

O problema da restrição no vetor de saída $y(t)$ consiste em especificar LMIs, de modo a assegurar que $\max_{t \geq 0} \|y(t)\| \leq \xi_0$, sendo que ξ_0 é uma especificação considerada no projeto do controlador.

A análise a seguir é semelhante àquela efetuada no estudo da restrição no vetor de entrada. Para isso, considera-se, novamente, o sistema linear e invariante no tempo descrito em (A01). Como $x(t) = X^{1/2} z(t)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} \|y(t)\|_2^2 &= \max_{t \geq 0} \|Cx(t)\|_2^2 = \max_{t \geq 0} \|CX^{1/2} z(t)\|_2^2 = \max_{t \geq 0} \sqrt{z(t)^T X^{1/2} C^T C X^{1/2} z(t)} \\ &= \sqrt{\lambda_{\max} \left(X^{1/2} C^T C X^{1/2} \right)} = \sqrt{\lambda_{\max} \left(X^{1/2} C^T C X^{1/2} \right)}. \end{aligned}$$

Portanto, analogamente ao desenvolvimento realizado anteriormente em (A9), (A10) e (A11), tem-se que

$$\max_{t \geq 0} \|CX^{1/2}z(t)\|_2^2 < \xi_0^2 \Rightarrow \lambda_{\max}\left(X^{1/2}C^T CX^{1/2}\right) < \xi_0^2.$$

Esta condição é equivalente a

$$X^{1/2}C^T CX^{1/2} - \xi_0^2 I < 0, \quad (A12)$$

pois

$$z(t)^T \left(X^{1/2}C^T CX^{1/2} - \xi_0^2 I \right) z(t) \leq z(t)^T z(t) \left(\lambda_{\max}\left(X^{1/2}C^T CX^{1/2} - \xi_0^2 X^{1/2} \right) - \xi_0^2 \right).$$

Multiplicando-se (A12), em ambos os lados, por $X^{1/2}$, obtém-se

$$XC^T CX - \xi_0^2 < 0 \Rightarrow \xi_0^2 X - XC^T CX > 0$$

$$\Rightarrow X - XC^T (\xi_0^{-2} I) CX > 0. \quad (A13)$$

Logo, pelo complemento de Schur, (A13) possui a seguinte equivalência:

$$-X^{1/2}C^T CX^{1/2} + \xi_0^2 I > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & XC^T \\ CX & \xi_0^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (A14)$$

Portanto, as LMIs (A05) e (A14) solucionam o problema.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
AV. BRASIL, 56 - CAIXA POSTAL 31
15385-000 - ILHA SOLTEIRA - SP**

