



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

GUILHERME AVINO OHLAND

**ANÁLISE DE MICROESTRUTURAS HETEROGÊNEAS ATRAVÉS DE  
UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO CONSIDERANDO MATERIAIS COM  
COMPORTAMENTO ELÁSTICO**

Ilha Solteira  
2017

GUILHERME AVINO OHLAND

**ANÁLISE DE MICROESTRUTURAS HETEROGÊNEAS ATRAVÉS DE  
UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO CONSIDERANDO MATERIAIS COM  
COMPORTAMENTO ELÁSTICO**

Dissertação apresentada à Faculdade de  
Engenharia - UNESP – Campus de Ilha  
Solteira, para obtenção do título de Mestre  
em Engenharia Civil.

Área de Conhecimento: Estruturas

Profª Drª Gabriela Rezende Fernandes  
**Orientadora**

Ilha Solteira

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

O379a Ohland, Guilherme Avino.  
Análise de microestruturas heterogêneas através de uma formulação do método dos elementos de contorno considerando materiais com comportamento elástico / Guilherme Avino Ohland. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017  
164 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Estruturas, 2017

Orientador: Gabriela Rezende Fernandes  
Inclui bibliografia

1. Elementos de contorno. 2. Problema elástico bi-dimensional. 3. Chapa em sub-regiões. 4. Análise em multi-escala. 5. Técnicas de homogeneização.

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** ANÁLISE DE MICROESTRUTURAS HETEROGÊNEAS ATRAVÉS DE  
UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO CONSIDERANDO MATERIAIS COM  
COMPORTAMENTO ELÁSTICO

**AUTOR:** GUILHERME AVINO OHLAND

**ORIENTADORA:** GABRIELA REZENDE FERNANDES

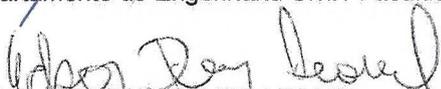
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA CIVIL,  
área: ESTRUTURAS pela Comissão Examinadora:



Profa. Dra. GABRIELA REZENDE FERNANDES  
Curso de Engenharia Civil / Universidade Federal de Goiás



Prof. Dr. ROGERIO DE OLIVEIRA RODRIGUES  
Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. EDSON DENNER LEONEL  
Departamento de Engenharia de Estruturas / Universidade de São Paulo - USP

Ilha Solteira, 07 de fevereiro de 2017

Ao meu avô Raphael Avino (*in memoriam*)  
e a minha avó Josephina Ormy,  
com muito amor.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço ao Criador a vida que ele me deu. Fico muito grato pela saúde e a vivacidade que tenho para tornar este trabalho uma realidade, o que é motivo de muita alegria para mim.

Meus profundos agradecimentos à orientadora, professora Gabriela Rezende Fernandes, pela amizade e pelo grandioso esforço dispensado por meio da orientação dos estudos e da elaboração do presente trabalho. Também agradeço de coração a todos os professores do Departamento de Engenharia Civil do Campus de Ilha Solteira a lealdade e brilhantismo no desempenho da função de educadores.

Aos meus pais: Luiz Ohland e Teresinha Paula Tesoro Avino, pois sem a existência deles, não estaria aqui, e sem a ajuda deles, não poderia estar desenvolvendo este trabalho. À minha irmã Carolina Avino Ohland agradeço a afabilidade e o expressivo apoio consentido nas minhas decisões estudantis e profissionais.

À minha namorada, Aline Bonfim de Carvalho, que já faz parte da minha vida, agradeço a companhia, a sinceridade e também o apoio que recebo constantemente para alcançar meus objetivos.

Aos amigos das repúblicas por onde andei, em Ilha Solteira, ao longo de sete anos: Allan Dias, Guilherme Vinícius Mendes, Bruno Henrique, Leonardo Carvalho, Luis Henrique, Moisés Neto, Rafael Oliveira, Eduardo Vieira, Vinícius Gomes, Pedro Henrique agradeço a amizade que cultivamos. Apesar da distância que separava cada um de seus familiares, formamos grupos de batalhadores empenhados com os estudos e comprometidos com a organização e manutenção do ambiente que formava nosso novo lar: a república.

Aos representantes do CNPq agradeço intensamente a sensibilidade de me conceder uma Bolsa de Estudos.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que de alguma forma ajudaram na minha formação e, direta e indiretamente, na elaboração deste trabalho e em outros projetos pessoais ou profissionais que realizei ao longo da minha caminhada até aqui.

“ A casa primeira que devemos construir é a do conhecimento. O grau de perfeição da obra é o reflexo da sabedoria do construtor. ”

Prof. Luiz Ohland

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para análises de microestruturas heterogêneas, onde dentro da matriz podem ser definidos vazios ou inclusões com diferentes propriedades elásticas. A microestrutura é modelada por uma chapa em sub-regiões, onde diferentes valores de coeficientes de Poisson e módulo de Young podem ser definidos para cada sub-região. Para resolver as integrais de domínio escritas em termos de deslocamentos no plano, o domínio da matriz e das inclusões são discretizadas em células, onde os deslocamentos têm que ser aproximados. Assim, neste modelo, além de valores no contorno para deslocamentos e forças no plano, valores nodais de deslocamentos no plano são definidos também no domínio. Então, adotando-se técnicas de homogeneização, os valores homogeneizados para o tensor constitutivo e o tensor das tensões são calculados. A formulação é proposta dentro do contexto de análise em multi-escala de estruturas, onde a microestrutura do material é denominada de EVR (Elemento de Volume Representativo), sendo seu problema de equilíbrio definido em termos de flutuação dos deslocamentos. Neste trabalho será adotado comportamento elástico linear para os diferentes materiais (ou fases) do EVR, porém tal formulação pode ser facilmente estendida no futuro a fim de considerar deformações residuais. Nos exemplos numéricos, os resultados são comparados com uma formulação desenvolvida com o Método dos Elementos Finitos (MEF), a fim de validar o modelo proposto.

**Palavras-chave:** Elementos de contorno. Problema elástico bi-dimensional. Chapa em sub-regiões. Análise em multi-escala. Técnicas de homogeneização.

## ABSTRACT

A formulation of the boundary element method (BEM) to perform elastic analysis of heterogeneous microstructures is presented. The microstructure is modelled as a zoned plate where voids or inclusions can be considered inside a matrix. Thus, each sub-region represents either the matrix or an inclusion, where different Poisson's ratio and Young's modulus can be defined. In the proposed model domain integrals in terms of in-plane displacements arise in the formulation, which are solved by discretizing the sub-regions into cells where the displacements are approximated. Thus, besides the boundary values for in-plane displacements and tractions, nodal values of in-plane displacements are defined in the domain. Although the proposed model can be used to analyse the stretching problem of plates composed by different materials, in this paper the formulation is proposed in the context of a multi-scale analysis, i. e. it will be used to model the RVE (Representative Volume Element), which equilibrium equation is solved in terms of displacement fluctuations. In this paper, only elastic behaviour will be considered for matrix and inclusions, although the proposed model can be extended to consider dissipative phenomena in the microstructure. To make the micro-to-macro transition necessary in a multi-scale analysis, the homogenized values for stress and constitutive tensor have to be computed adopting homogenization techniques. In a future work this formulation will be coupled to a BEM formulation to model the macro-continuum in order to perform the multi-scale using only the Boundary Element Method. Some numerical examples of heterogeneous microstructures are presented and compared to a formulation of the Finite Element Method to show the accuracy of the proposed model.

**Keywords:** Boundary elements. Stretching problem. Zoned plates. Multi-scale analysis. Homogenization techniques.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Microestrutura heterogênea representada por um elemento de chapa com duas inclusões.....	28
Figura 2 - Contorno circular acrescido a um ponto Q de um canto da chapa.....	42
Figura 3 - Ponto de colocação não coincidente com um canto .....	43
Figura 4 - Ponto de colocação na interface matriz-inclusão .....	49
Figura 5 - Ponto de colocação na interface matriz-inclusão (canto).....	53
Figura 6 - Ponto de colocação sobre interface matriz-vazio.....	57
Figura 7 - Ponto de colocação sobre a interface matriz-vazio (canto).....	58
Figura 8 - Discretização do contorno externo e da interface em elementos.....	62
Figura 9 - Geometria do elemento aproximada por função linear .....	62
Figura 10 - Elementos descontínuos .....	66
Figura 11 - Célula triangular com sistema coordenadas homogêneas.....	67
Figura 12 - Sistema de coordenadas cilíndricas nas células triangulares .....	69
Figura 13 - Integração ao longo do contorno de um domínio qualquer .....	72
Figura 14 - Definição de macro-contínuo e microestrutura .....	85
Figura 15 - Micro-célula relacionada ao ponto x do macro-contínuo.....	87
Figura 16 - Decomposição aditiva do campo de deslocamento o EVR.....	92
Figura 17 - Definição de EVRs para meios periódicos: célula retangular e célula hexagonal.....	104
Figura 18 - EVR uniforme.....	116
Figura 19 - EVRs com volume de inclusão $v_f = 10\%$ .....	117
Figura 20 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $v_f = 10\%$ ) através do MEC...	118
Figura 21 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $v_f = 10\%$ ) através do MEF ...	118
Figura 22 – Resultados para o EVR com inclusão ( $v_f = 10\%$ ) mais refinado .....	119
Figura 23 - EVRs com volume de inclusão $v_f = 30\%$ .....	120
Figura 24 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $v_f = 30\%$ ) através do MEC...	121
Figura 25 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $v_f = 30\%$ ) através do MEF ...	121
Figura 26 - Resultados para o EVR com inclusão ( $v_f = 30\%$ ) mais refinado .....	122
Figura 27 - EVRs com volume de inclusão $v_f = 37\%$ .....	123
Figura 28 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $v_f = 37\%$ ) através do MEC...	124
Figura 29 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $v_f = 37\%$ ) através do MEF ...	124
Figura 30 - Resultados para o EVR com inclusão ( $v_f = 37\%$ ) mais refinado .....	125

Figura 31 - EVRs com 5 inclusões de volume total $vf = 37\%$ .....	126
Figura 32 - Convergência dos resultados do EVR com 5 inclusões ( $vf = 37\%$ ) através do MEC .....	127
Figura 33 - Convergência dos resultados do EVR com 5 inclusões ( $vf = 37\%$ ) através do MEF.....	127
Figura 34 - Resultados para o EVR com 5 inclusões ( $vf = 37\%$ ) mais refinado .....	128
Figura 35 - Comparação dos resultados dos EVRs mais refinados com inclusão através do MEC.....	129
Figura 36 - EVRs com volume de vazio $vf = 10\%$ .....	132
Figura 37 - Convergência dos resultados do EVR com vazio ( $vf = 10\%$ ) através do MEC .....	133
Figura 38 – Convergência dos resultados do EVR com vazio ( $vf = 10\%$ ) através do MEF.....	133
Figura 39 - Resultados para o EVR com vazio ( $vf = 10\%$ ) mais refinado.....	134
Figura 40 - EVRs com volume de vazio $vf = 30\%$ .....	135
Figura 41 - Convergência dos resultados do EVR com vazio ( $vf = 30\%$ ) através do MEC .....	135
Figura 42 - Convergência dos resultados do EVR com vazio ( $vf = 30\%$ ) através do MEF.....	136
Figura 43 - Resultados para o EVR com vazio ( $vf = 30\%$ ) mais refinado.....	137
Figura 44 - EVRs com volume de vazio $vf = 37\%$ .....	137
Figura 45 - Convergência dos resultados das tensões homogeneizadas para o EVR com vazio ( $vf = 37\%$ ) pelo MEC .....	138
Figura 46 - Convergência dos resultados das tensões homogeneizadas para o EVR com vazio ( $vf = 37\%$ ) pelo MEF .....	139
Figura 47 - Resultados para o EVR com vazio ( $vf = 37\%$ ) mais refinado.....	139
Figura 48 - EVRs com 5 vazios de volume total $vf = 37\%$ .....	140
Figura 49 - Convergência dos resultados do EVR com 5 vazios ( $vf = 37\%$ ) através do MEC .....	141
Figura 50 - Convergência dos resultados do EVR com 5 vazios ( $vf = 37\%$ ) através do MEF.....	141
Figura 51 - Resultados para o EVR com 5 vazios ( $vf = 37\%$ ) mais refinado .....	142
Figura 52 - Comparação dos resultados dos EVRs mais refinados com vazio através do MEC .....	143

Figura 53 - Condições de contorno para EVR com inclusões menos rígidas.....	145
Figura 54 - Condições de contorno para EVR com inclusões mais rígidas .....	146
Figura 55 - Condições de contorno para EVR com vazios .....	148
Figura 56 - Elemento infinitesimal .....	155
Figura 57 - Deformações no plano X1 e X2 .....	158
Figura 58 - Tensão e forças de superfície num elemento infinitesimal.....	160
Figura 59 - Sólido sujeito à estado plano de tensão.....	162
Figura 60 - Sólido sujeito à estado plano de deformação .....	164

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores das propriedades elásticas utilizadas em EVRs com inclusões	117
Tabela 2 - Tensões homogeneizadas no EVR com $v_f = 10\%$	119
Tabela 3 - Comparação das tensões homogeneizadas no EVR com $v_f = 30\%$	122
Tabela 4 - Tensões homogeneizadas no EVR com $v_f = 37\%$	125
Tabela 5 - Tensões homogeneizadas no EVR de 5 inclusões	128
Tabela 6 - Valor da tensão homogeneizada para as malhas mais refinadas com inclusões	130
Tabela 7 - Tensores constitutivos para os EVRs de malhas mais refinadas com inclusão menos rígida	130
Tabela 8 - Tensores constitutivos para os EVRs de malhas mais refinadas com inclusão mais rígida	130
Tabela 9 - Tensões homogeneizadas para o EVR com vazio ( $v_f = 10\%$ )	133
Tabela 10 - Tensões homogeneizadas para o EVR com vazio ( $v_f = 30\%$ )	136
Tabela 11 - Tensões homogeneizadas para o EVR com vazio ( $v_f = 37\%$ )	139
Tabela 12 - Tensões homogeneizadas para o EVR com 5 vazios com volume total de $v_f = 37\%$	141
Tabela 13 - Valor da tensão homogeneizada para as malhas mais refinadas com vazios	143
Tabela 14 - Tensores constitutivos para os EVRs de malhas mais refinadas com vazios	144
Tabela 15 - Comparação das tensões homogeneizadas (EVR com inclusões)	146
Tabela 16 - Tensor constitutivo para EVR com inclusões menos rígidas	146
Tabela 17 - Tensor constitutivo para EVR com inclusões mais rígidas	147
Tabela 18 - Comparação das tensões homogeneizadas (EVR com vazios)	148
Tabela 19 - Valores homogeneizados para o tensor constitutivo de EVR com 5 vazios	148

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

MEF – Método dos Elementos Finitos

FEM – Finite Element Method

MEC – Método dos Elementos de Contorno

BEM – Boundary Element Method

EVR – Elemento de Volume Representativo

RVE – Representative Volume Element

## LISTA DE SÍMBOLOS

- \* : sub-índice que relaciona à solução fundamental
- $\Gamma$  : coordenada que percorre o contorno
- $\Omega$  : coordenada de domínio
- $\Gamma_\xi$  : contorno infinitesimal
- $\Omega_\xi$  : domínio infinitesimal
- $\sigma_{ij}$  : tensão na direção  $j$  na face perpendicular a direção  $i$
- $b_i$  : forças de massa na direção  $i$
- $\tau_{ij}$  : tensão de cisalhamento na direção  $j$  na face perpendicular à direção  $i$
- $N_{ij,j}$  : esforço de membrana interno ao elemento
- $\varepsilon_{ij}$  : deformação na direção  $j$  na face perpendicular a direção  $i$
- $u_i$  : deslocamento na direção  $i$
- $E$  : módulo de elasticidade longitudinal
- $G$  : módulo de elasticidade transversal
- $\delta_{ij}$  : delta de Kronecker
- $\nu$  : coeficiente de Poisson
- $p$  : ponto onde se calculam os deslocamentos
- $q$  : ponto onde se aplica a solução fundamental
- $p_i$  : força normal na direção  $i$ , em uma superfície de normal  $n_j$
- $n_i$  : cossenos diretores da normal em relação ao eixo  $i$
- $n$  : vetor unitário normal ao contorno ou interface no plano da chapa
- $\delta(q, p)$  : delta de Dirac
- $\mu$  : sub-índice que relaciona ao EVR
- $\xi$  : coordenada adimensional do ponto
- $\Psi$  : funções de aproximação
- $W_{ig}$  : fator de ponderação

- $a_{ks}$  : comprimento do sub-elemento  $ks$   
 $N_C$  : número de nós do contorno  
 $N_{cel}$  : número de células  
 $N_e$  : número de elementos  
 $N_g$  : número de pontos de Gauss  
 $N_{Sub}$  : número de sub-elementos  
 $N_S$  : número de sub-regiões  
 $N_{Vazios}$  : número de vazios  
 $vf$  : volume de fração  
 $N_{inc}$  : número de inclusões  
 $r$  : distância do ponto de colocação  $q$  ao ponto  $p$   
 $t$  : espessura da chapa  
 $C_{ki}$  : valor do termo livre para uma carga unitária na direção  $k$  para um deslocamento na direção  $i$   
 $\beta$  : ângulo do canto da chapa  
 $L_j$  : comprimento do elemento  $j$   
 $V_\mu$  : volume do EVR  
 $D$  : módulo tangente constitutivo homegeneizado  
 $\tilde{u}$  : campo de flutuação dos deslocamentos  
 $K_\mu^*$  : conjunto dos campos dos deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis  
 $\tilde{K}_\mu^*$  : conjunto dos campo de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis  
 $R_F$  : resíduo das forças  
 $F$  : vetor das forças

$K$  : matriz tangente

$N^e$  : vetor das forças normais das células

$\delta\tilde{u}_\mu^{i+1}$  : correção das flutuações dos deslocamentos

$\Omega_\mu^h$  : discretização do domínio do EVR

$\mathcal{V}_\mu^o$  : espaço dos campo de flutuações dos deslocamentos cinematicamente admissíveis

$\Upsilon_\mu$  : espaço prescrito das velocidades de flutuação cinematicamente admissíveis

$f_y$  : relação constitutiva dada pelo critério adotado

$D^{Taylor}$  : operador tangente do modelo de Taylor

$\tilde{D}$  : influência da flutuação dos deslocamentos no módulo tangente homogeneizado

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>APRESENTAÇÃO.....</b>	<b>19</b>
1.1	INTRODUÇÃO.....	19
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	21
1.3	OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA .....	24
1.4	CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO .....	25
1.5	CONTEÚDO DO TRABALHO.....	25
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA ANÁLISE DE MICROESTRUTURAS HETEROGÊNEAS.....</b>	<b>27</b>
2.1	INTRODUÇÃO.....	27
2.2	EQUAÇÃO INTEGRAL DO DESLOCAMENTO PARA UM PONTO INTERNO .....	27
2.3	EQUAÇÃO INTEGRAL DA DERIVADA DOS DESLOCAMENTOS $U_k$ PARA PONTOS DO DOMÍNIO DA MICROESTRUTURA.....	37
2.4	EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS PARA PONTOS SOBRE O CONTORNO OU INTERFACES DA MICROESTRUTURA .....	40
2.4.1	<i>Procedimento Geral.....</i>	<i>40</i>
2.4.2	<i>Termo Livre para Equação Integral do Deslocamento de um Ponto Sobre o Contorno Externo e Não Coincidente com um Canto .....</i>	<i>43</i>
2.4.3	<i>Termo Livre para Equação Integral do Deslocamento de um Ponto Sobre a Interface da Matriz com uma Inclusão e Não Coincidente com um Canto .....</i>	<i>49</i>
2.4.4	<i>Termo Livre para Equação Integral do Deslocamento de um Ponto Sobre a Interface da Matriz com uma Inclusão e Coincidente com um Canto .....</i>	<i>53</i>
2.4.5	<i>Termo Livre para Equação Integral do Deslocamento de um Ponto Sobre a Interface da Matriz com um Vazio e Não Coincidente com um Canto .....</i>	<i>56</i>
2.4.6	<i>Termo Livre para Equação Integral do Deslocamento de um Ponto Sobre a Interface da Matriz com um Vazio e Coincidente com um Canto .....</i>	<i>58</i>
<b>3</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO ÀS EQUAÇÕES INTEGRAIS .....</b>	<b>61</b>

3.1	INTRODUÇÃO.....	61
3.2	DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E INTERFACES EM ELEMENTOS .....	61
3.3	APROXIMAÇÃO DAS VARIÁVEIS DO PROBLEMA.....	65
3.4	DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO EM CÉLULAS .....	67
3.5	TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS EM EQUAÇÕES ALGÉBRICAS.....	76
3.6	SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	81
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO NA MICRO-ESCALA.....</b>	<b>84</b>
4.1	INTRODUÇÃO.....	84
4.2	ANÁLISE EM MULTI-ESCALA E DEFINIÇÃO DO EVR.....	85
4.3	TENSOR DE DEFORMAÇÃO HOMOGENEIZADO .....	87
4.4	CAMPO DE DESLOCAMENTOS .....	89
4.4.1	<i>Campo de Deslocamentos Cinematicamente Admissível.....</i>	<i>89</i>
4.4.2	<i>Campo de Deslocamentos e de Flutuação dos Deslocamentos.....</i>	<i>90</i>
4.4.3	<i>Campo de Flutuação dos Deslocamentos Cinematicamente Admissível no EVR .....</i>	<i>92</i>
4.5	EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DO EVR E MATRIZ TANGENTE.....	93
4.6	TENSÃO HOMOGENEIZADA .....	97
4.7	PRINCÍPIO DE MACRO-HOMOGENEIDADE DE HILL-MANDEL .....	100
4.8	CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NO EVR EM TERMOS DE FLUTUAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS .....	102
4.8.1	<i>Deslocamentos Lineares no Contorno do EVR .....</i>	<i>103</i>
4.8.2	<i>Flutuações de Deslocamentos Periódicos sobre o Contorno .....</i>	<i>104</i>
4.8.3	<i>Forças de Superfície Uniformes sobre o Contorno.....</i>	<i>106</i>
4.9	TENSOR CONSTITUTIVO HOMOGENEIZADO .....	111
4.10	ALGORITMO .....	113

<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES NUMÉRICAS.....</b>	<b>115</b>
5.1	INTRODUÇÃO.....	115
5.2	COMPORTAMENTO DOS EVRS COM DIFERENTES VOLUMES DE INCLUSÃO .....	116
5.3	COMPORTAMENTO DOS EVRS COM DIFERENTES VOLUMES DE VAZIO.. .....	131
5.4	COMPORTAMENTO DO EVR DE ACORDO COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO EM TERMOS DE FLUTUAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS....	144
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>149</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>151</b>
	<b>ANEXO - EQUAÇÕES BÁSICAS .....</b>	<b>154</b>

# 1 APRESENTAÇÃO

## 1.1 Introdução

Pode-se considerar muito comum a ocorrência de problemas complexos no campo da engenharia. Isso ocorre tanto no campo da geometria dos sólidos, quanto em relação às leis constitutivas que regem o comportamento desses materiais. Outra dificuldade complexa para os engenheiros é a representação correta das condições de contorno da estrutura. Assim, nem sempre é possível obter soluções analíticas (exatas) para os problemas mais complexos que se manifestam na área da engenharia. Por isso, o desenvolvimento de métodos numéricos, que fornecem soluções aproximadas para problemas complexos, é de suma importância para o avanço das pesquisas em vários ramos da engenharia. No entanto, é importante lembrar que, dependendo do caso, os métodos numéricos podem fornecer a solução exata do problema, desde que sejam usadas funções de aproximação que representem de forma exata o problema estudado.

Nesse contexto, nas últimas quatro décadas, o método numérico chamado Método dos Elementos de Contorno, conhecido como MEC, tem despertado grande interesse na comunidade científica. Um trabalho muito interessante sobre o MEC é desenvolvido por Cheng e Cheng (2005) em que mostra toda sua história desde a fundamentação matemática da teoria do potencial e problemas de contorno até as equações integrais de Fredholm e a concepção final do método. Utilizando-se esse método numérico, que passou a ser reconhecido mundialmente através da publicação, em 1978, do primeiro livro sobre o MEC, de autoria do professor Carlos A. Brebbia, podem-se ter inúmeras aplicações no campo da engenharia. Por meio dessa obra o autor desenvolve toda a formulação do método, utilizando o processo conhecido como Técnica dos Resíduos Ponderados, que facilitou a sua compreensão. Assim, a partir dessa publicação inúmeras pesquisas em análise numérica, no ramo da engenharia, foram desenvolvidas, utilizando o chamado Método dos Elementos de Contorno (MEC). Em muitos problemas de engenharia, comprovadamente, esse método é uma alternativa muito interessante e precisa, que permite a obtenção de respostas mais confiáveis quando comparadas com outros métodos usuais. Ele é particularmente mais indicado em casos de concentração de tensão (ou outro tipo de variável), assim como nos casos em que o domínio em

estudo tenda ao infinito ou semi-infinito, já que na maioria dos casos, não há necessidade de discretização do domínio, apenas do contorno.

Na engenharia civil, principalmente na área de estruturas, o MEC foi ganhando seu reconhecimento tendo muitas pesquisas já desenvolvidas para análise de placas, chapas e cascas, dentre outras aplicações, através de vários pesquisadores tanto no Brasil quanto nos centros de pesquisas em todo o mundo. Tem-se como exemplo o livro de Brebbia, Telles e Wrobel de 1984, onde são desenvolvidos estudos sobre a aplicação do MEC na engenharia e também a dissertação de mestrado de Gil Rodriguez (1986), que desenvolve um estudo sobre o emprego do MEC em problemas elásticos bidimensionais. Ainda na década de 80, o Prof. Wilson Sergio Venturini, do Departamento de Engenharia Civil da USP de São Carlos, estendeu os estudos sobre o MEC através de diversas orientações de mestrado e doutorado, como por exemplo, os trabalhos de Paiva (1987), Fernandes (1998), Fernandes (2003) e Waidemam (2008), que tratam da análise de placas ou pavimentos de edifícios através do MEC. Tem-se também a dissertação de Barbirato (1991), que trata do estudo e análise de sólidos elásticos tridimensionais pelo MEC.

Também no Brasil a partir da década de 80, o Prof. João Claudio de Faria Telles e o Prof. Webe João Mansur, do Departamento de Engenharia Civil da COPPE – UFRJ, desenvolveram diversos estudos e pesquisas utilizando o MEC, tendo já orientado inúmeras teses e dissertações, como por exemplo, Gonçalves (2013), Cunha (2004) e Barbosa (2005).

A formulação para análise da microestrutura de materiais heterogêneos através do MEC, a ser desenvolvida no presente trabalho, segue as mesmas hipóteses básicas daquela proposta em Fernandes et al (2015 a, b), onde a microestrutura foi modelada pelo MEF (Método dos Elementos Finitos), utilizando-se uma formulação desenvolvida pelo prof. Eduardo A. de Sousa Neto, de Swansea University (ver Souza Neto e Feijóo (2006)). Algumas das hipóteses dessa formação são: i) a transição do micro-contínuo para o macro-contínuo é feita utilizando-se técnicas de homogeneização e o Princípio da Macro-Homogeneidade de Hill-Mandel ii) a micro-estrutura do material é representada pelo EVR (Elemento de Volume Representativo) iii) o equilíbrio do EVR é definido em função da flutuação dos deslocamentos, que representa a parcela dos deslocamentos que surge quando se tem deformação não homogênea na micro-estrutura.

Note que em Fernandes et al (2015 a, b) faz-se análises não-lineares de chapas compostas por materiais heterogêneos, utilizando-se uma modelagem multiescala, onde se faz o acoplamento do MEC com o MEF. O MEC é utilizado para modelar a macroescala (placa) e o MEF (Método dos Elementos Finitos) é adotado na modelagem da microestrutura do material, denominada EVR (Elemento de Volume Representativo). Na análise multiescala, um ponto genérico do macrocontínuo é representado pelo EVR, sendo suas tensões e seu tensor constitutivo dado por seus respectivos valores homogeneizados obtidos do EVR que o representa.

Com a validação da formulação do MEC apresentada nesse trabalho, pretende-se em trabalhos futuros fazer análise multiescala de chapas compostas por materiais heterogêneos utilizando-se apenas o MEC como método numérico. Portanto, o trabalho desenvolvido por meio desta dissertação é relativo à análise de microestruturas heterogêneas através do Método dos Elementos de Contorno (MEC), dentro do contexto de análise em multiescala de estruturas. Tem-se como objetivo principal validar a formulação do MEC desenvolvida e implementada pela Prof<sup>a</sup> Gabriela Rezende Fernandes da Universidade Federal de Goiás, comparando-se os valores homogeneizados de tensão e do tensor constitutivo com aqueles obtidos através da formulação do MEF desenvolvida em Fernandes et al (2015 a, b). O presente trabalho foi o primeiro mestrado orientado pela Prof<sup>a</sup> Gabriela Rezende Fernandes que trata sobre análise multi-escala de estruturas. Já está em andamento um segundo trabalho dentro desse tema, que trata da validação da formulação do EVR através do MEC, considerando fenômenos dissipativos na micro-estrutura.

## **1.2 Revisão Bibliográfica**

Em geral, os materiais possuem uma composição heterogênea em sua escala micro e granular. Um bom exemplo destes materiais é o concreto utilizado na construção civil, que possui uma microestrutura muito complexa, onde a argamassa e agregados apresentam diferentes propriedades elásticas e também um comportamento não linear. Conforme Botelho (2008), um material é dito heterogêneo quando constituído de fases que possuem diferentes propriedades, isto é, apresenta módulos elásticos, coeficientes de Poisson e comportamentos diferentes entre si. Os pesquisadores Gal e Kryvoruk (2011), estudaram o comportamento do

concreto reforçado com fibras a partir de uma análise em multiescala. Esse tipo de análise, quando bem desenvolvida, nos fornece ótimos resultados. Até mesmo os materiais metálicos podem ser considerados heterogêneos em nível de micropartículas. Além disso, a pré-existência de defeitos iniciais na microestrutura do material como microfissuras e microvazios, também podem afetar consideravelmente a rigidez da microestrutura. Certos autores como, por exemplo, Nguyen et al. (2011), desenvolveram pesquisas para entender melhor como a heterogeneidade e as propagações de microfissuras afetam diretamente a resposta do macrocontínuo.

De acordo com Labeas e Belesis (2011), um dos maiores desafios dos engenheiros é projetar e executar uma estrutura confiável que seja economicamente viável e também edificada de forma rápida e eficiente. Desta forma, quanto mais verossímil for a análise, maior será a segurança e menor o custo despendido para execução da estrutura. Assim, uma análise em multiescala traz resultados mais precisos e verdadeiros, utilizando-se modelos constitutivos simples para as diferentes fases do material.

Em uma análise numérica desenvolvida em multiescala, o EVR (Elemento de Volume Representativo), representa a microestrutura, em nível granular, do macrocontínuo na vizinhança infinitesimal do ponto. Trabalhos já desenvolvidos como dos pesquisadores Peric et al (2011) e também de Souza Neto e Feijóo (2006), tratam desta definição da microestrutura dentro do contexto da análise em multiescala.

Na maioria dos trabalhos em análise em multiescala, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é utilizado tanto para modelar o macro quanto o microcontínuo. Autores como Markovic e Ibrahimbegovic (2004), trataram da modelagem de materiais heterogêneos e com comportamento não-linear utilizando o MEF. Já no trabalho de Matsui et al (2004), é utilizado o MEF em duas escalas para analisar materiais sólidos heterogêneos com microestruturas periódicas. Mais recentemente, para alguns trabalhos têm sido utilizado o MEC para desenvolver a formulação de uma ou ambas as escalas. Como exemplo temos o trabalho de Sfantos e Aliabadi (2007), no qual a degradação e fratura de materiais são feitas por elementos de contorno, com uma abordagem em multiescala.

Neste trabalho o objetivo consiste em desenvolver uma formulação do MEC para realizar análises elásticas de microestruturas heterogêneas. A microestrutura é

considerada como uma chapa em sub-regiões, onde cada sub-região representa um material diferente da mesma. Em outros trabalhos, pesquisadores já consideraram essa técnica de sub-regiões para modelar placas enrijecidas, como é o caso dos trabalhos de Fernandes e Venturini (2007) e Fernandes e Rosa Neto (2015). Nesses trabalhos de pesquisa, as vigas são modeladas como sub-regiões de maior espessura, sendo todas as sub-regiões representadas pela mesma superfície de referência. Assim, cada sub-região define uma viga ou uma laje. No primeiro trabalho, consideram-se placas enrijecidas compostas de um único material e no segundo podem ser adotados diferentes materiais para as lajes e vigas, ou seja, as vigas podem ter diferentes valores do coeficiente de Poisson e módulo de Young. Também no segundo trabalho, todo o domínio da placa deve ser discretizado em células, pois nesse modelo decorrem deslocamentos como incógnitas no domínio da placa.

No presente trabalho, o problema de equilíbrio do EVR é solucionado em termos de flutuações dos deslocamentos, de acordo com a formulação desenvolvida por Souza Neto e Feijóo (2006). Após a solução do problema de equilíbrio do EVR, deve-se obter a tensão homogeneizada e o tensor homogeneizado, para que num trabalho posterior, os mesmos sejam inseridos na análise em multiescala de chapas. Outras pesquisas também utilizam os conceitos desenvolvidos por de Souza Neto e Feijóo (2006) tanto para a homogeneização da tensão e do tensor constitutivo, quanto a notação de EVR, como por exemplo: de Souza Neto et al (2015), Blanco et al (2016) e Edmans et al (2013).

A representação integral dos deslocamentos no plano é similar àquela do problema bidimensional apresentada no trabalho de Fernandes e Rosa Neto (2015), sem considerar o efeito da flexão. No entanto, na formulação desenvolvida no presente trabalho, vazios podem ser definidos dentro do domínio da microestrutura e considera-se que as diferentes fases do EVR (matriz e inclusões) possuam a mesma espessura. Além disso, na presente formulação o contorno das inclusões não é coincidente com o contorno externo, como ocorre no trabalho de Fernandes e Rosa Neto (2015), para as vigas externas.

Em trabalhos futuros a modelagem da microestrutura desenvolvida nesse trabalho será acoplada com uma formulação do MEC para análise de chapas, a fim de se fazer análise multiescala de chapas. Além disso, a formulação aqui

apresentada será estendida a fim de considerar fenômenos dissipativos na microestrutura.

### **1.3 Objetivos e Justificativa**

O objetivo deste trabalho consiste em realizar análises numéricas de microestruturas heterogêneas através do Método dos Elementos de Contorno dentro do contexto de análise em multiescala de estruturas. Nos exemplos numéricos tem-se como objetivo comparar os valores homogeneizados de tensão e do tensor constitutivo com aqueles obtidos a partir da formulação desenvolvida em Fernandes et al. (2015a,b) através do MEF, a fim de validar a formulação do MEC aqui apresentada, que foi desenvolvida e implementada pela Prof.<sup>a</sup> Gabriela Rezende Fernandes. Nesse trabalho, será adotado comportamento elástico para os diferentes materiais da microestrutura. Porém, em trabalhos futuros essa formulação pode ser facilmente estendida a fim de se considerar fenômenos dissipativos na microestrutura.

Assim, pretende-se validar a formulação da microestrutura desenvolvida através do MEC, para que em trabalhos futuros a análise em multiescala de chapas possa ser feita utilizando-se apenas o MEC. Na modelagem multiescala, podem-se obter resultados bem precisos do comportamento dos materiais, cujas microestruturas sejam heterogêneas e cujos comportamentos sejam regidos por fenômenos dissipativos. Assim, através da modelagem em multi-escala, adotando-se modelos constitutivos simples na microescala, pretende-se reproduzir um comportamento constitutivo complexo na macroescala, que seria difícil ou impossível de reproduzir via formulações constitutivas convencionais. Porém, é importante ressaltar que no presente trabalho não serão desenvolvidas análises em multiescala de uma estrutura. Será descrito apenas a formulação da microestrutura a partir do MEC e analisado o comportamento mecânico da mesma, quando a ela é imposto um estado de deformação homogênea. Numa análise multi-escala, essa deformação representa aquela que o ponto do macro-contínuo, representado pelo EVR analisado, está sujeito.

## 1.4 Contribuições do Trabalho

Dentre as diversas contribuições desse trabalho, deve-se citar primeiramente a formação acadêmica do autor na área de métodos numéricos, que posteriormente poderá dar continuidade ao mesmo, porém com estudos em nível doutorado. Para o meio científico, o trabalho contribui para validar uma nova formulação para análise de microestruturas heterogêneas, através do Método dos Elementos de Contorno, sendo possível a ramificação de diversos estudos utilizando como base esta pesquisa. Para a UNESP de Ilha Solteira, mais precisamente o Departamento de Engenharia Civil, a dissertação contribui com a inserção de uma nova linha de pesquisa em análises numéricas de estruturas, definida como análise multi-escada de estruturas.

## 1.5 Conteúdo do Trabalho

No capítulo 2 será apresentado todo o processo de desenvolvimento para obtenção da equação integral do deslocamento para um ponto interno da microestrutura. Também serão apresentadas as equações da derivada dos deslocamentos e as deduções dos termos livres para pontos de colocação sobre o contorno externo e interfaces.

No capítulo 3 o MEC será aplicado às equações integrais com o objetivo de transformá-las em equações algébricas, ou seja, de serem definidas em termos de vetores. Para isso, o contorno externo e interfaces serão discretizados em elementos e o domínio em células. Então, escrevendo-se duas equações de deslocamentos para cada nó do EVR, monta-se o sistema de equações em forma de matrizes. Em seguida, é feita a abordagem sobre a aplicação das condições de contorno no contexto de análise em multi-escala.

No capítulo 4 será tratado o problema de equilíbrio do EVR e os assuntos que o englobam. Serão definidos: o EVR dentro da abordagem da análise em multiescala, o seu campo de deslocamentos, sua equação de equilíbrio e a matriz tangente consistente do problema. Serão ainda abordadas as condições de contorno em termos de flutuação dos deslocamentos utilizadas para resolver o problema de equilíbrio do EVR. Por fim, os princípios utilizados para obter as tensões e o tensor homogeneizados são descritos.

O capítulo **5** é reservado para a análise de exemplos numéricos, onde será feito um estudo de convergência dos resultados com o refinamento da malha e os valores homogeneizados das tensões e do tensor constitutivo serão comparados com aqueles obtidos através do Método dos Elementos Finitos (MEF), a fim de validar o modelo do MEC aqui apresentado.

No capítulo **6** são desenvolvidas as conclusões pertinentes ao trabalho e também feitas algumas considerações finais.

No anexo são apresentadas as equações básicas que regem o problema elástico bidimensional. Essas equações são muito importantes, pois são utilizadas para desenvolver a modelagem do problema proposto. Além disso, as definições sobre o estado plano de tensão e deformação são também apresentadas.

## **2 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA ANÁLISE DE MICROESTRUTURAS HETEROGÊNEAS**

### **2.1 Introdução**

Para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno, é necessária inicialmente, a obtenção das equações integrais que definem o problema, as quais serão desenvolvidas neste capítulo. Inicialmente se obtém a equação integral do deslocamento para um ponto interno, a partir da qual podem ser deduzidas as demais equações integrais. Além disso, as expressões dos termos livres das equações integrais para pontos sobre o contorno e interface serão também aqui demonstradas.

Posteriormente às deduções das equações integrais e dos termos livres pertinentes ao problema em questão, aplica-se o MEC a essas equações, que será demonstrado no capítulo 3.

É importante ressaltar que o estudo desenvolvido nesse trabalho é no contexto da análise multi-escala de estruturas, onde o problema de equilíbrio da micro-estrutura do material deve ser solucionado, a fim de se obterem as tensões e o tensor constitutivo de um ponto do macro-contínuo. Para isso, a micro-estrutura do material deve ser modelada através de um método numérico e seu problema de equilíbrio definido, sendo esse completamente independente do problema de equilíbrio do macro-contínuo (estrutura analisada). Assim, nesse trabalho a microestrutura de um material heterogêneo será modelada através do Método dos Elementos de Contorno e definido pelo problema bidimensional de uma chapa em sub-regiões, onde cada sub-região é a representação da matriz ou uma inclusão, podendo-se ainda definir vazios no interior da matriz. No entanto, as equações integrais desenvolvidas nesse item também seriam válidas para o caso geral de uma chapa composta por diferentes materiais, fora do contexto da análise multi-escala de estruturas.

### **2.2 Equação Integral do Deslocamento para um Ponto Interno**

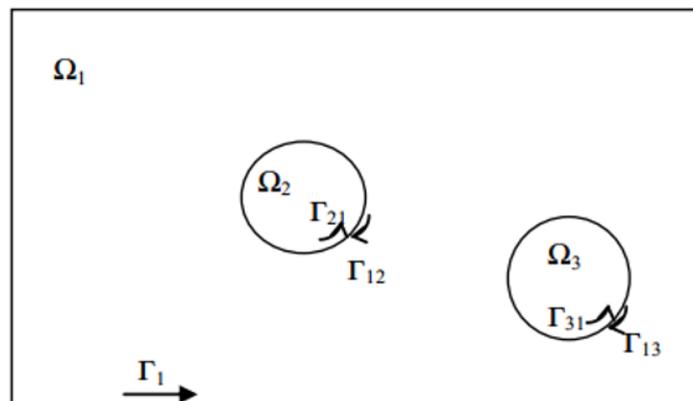
Seja a Figura 1 que representa uma microestrutura heterogênea onde temos duas inclusões e uma matriz, totalizando em três sub-regiões. Neste exemplo não

será inserido nenhum vazio na microestrutura. Cada sub-região possui um módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson diferentes entre si, mas constantes ao longo da mesma. A dedução da equação integral do deslocamento será feita a partir do Teorema de Betti, que para o problema de chapa pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega \quad i, j, k=1, 2 \quad (1)$$

onde  $\varepsilon_{kij}^*$  é chamada de deformação fundamental,  $N_{ij}$  é o esforço de membrana,  $\varepsilon_{ij}$  representa a deformação da chapa e  $N_{kij}^*$  é o esforço ou força de membrana fundamental.

Figura 1 - Microestrutura heterogênea representada por um elemento de chapa com duas inclusões



Fonte: (FERNANDES, 2015).

A equação integral do deslocamento para um ponto interno será deduzida escrevendo-se a integral de domínio referente ao problema bidimensional, sobre todo o domínio  $\Omega$  da chapa representada na Figura 1, em função apenas da expressão fundamental  $\varepsilon_{kij}^*$  da sub-região onde está o ponto de colocação  $\mathbf{q}$ .

Sendo o primeiro termo da equação (1) e considerando o desenho da Figura 1, onde se têm três domínios de características diferentes, os mesmos são escritos da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_1} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_2 + \int_{\Omega_3} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_3 \quad i, j, k=1, 2 \quad (2)$$

onde  $\mathbf{k}$  é a direção da carga fundamental, a solução fundamental  $\varepsilon_{kij}^*$  é função do  $\bar{E}$  da sub-região onde está o ponto de colocação e o esforço  $N_{ij}(\Omega_S)$  em uma sub-região  $\Omega_S$  é dado por:

$$N_{ij}(\Omega_S) = \frac{\bar{E}_S}{(1-\nu_S^2)} \left[ \nu_S \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + (1-\nu_S) \varepsilon_{ij} \right] \quad (3)$$

onde:  $\bar{E}_S = E_S t_S$

Assim, para uma sub-região  $\Omega_S$  qualquer, tem-se que:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_S = \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \frac{\bar{E}_S}{(1-\nu_S^2)} \left[ \nu_S \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + (1-\nu_S) \varepsilon_{ij} \right] d\Omega_S \quad (4)$$

Multiplicando-se a equação (2.4) por  $\frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \frac{(1-\nu^2)\nu}{\bar{E}\nu}$ , o que não altera o valor

da mesma, sendo  $\bar{E}$  e  $\nu$  valores referentes à sub-região onde está o ponto de colocação, obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_S = \frac{\bar{E}_S}{(1-\nu_S^2)} \frac{(1-\nu^2)\nu_S}{\bar{E}\nu} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \left[ \nu \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + \left( \frac{\nu}{\nu_S} - \nu \right) \varepsilon_{ij} \right] d\Omega_S \quad (5)$$

Considerando a seguinte relação,  $\bar{\bar{E}}_S = \frac{\bar{E}_S}{(1-\nu_S^2)}$ , na expressão anterior, têm-se:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_S = \frac{\overline{\overline{E}}_S}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_S}{\nu} \int_{\Omega_S} \frac{\overline{E}}{(1-\nu^2)} \left[ \nu \varepsilon_{kij}^* \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + \left( \frac{\nu}{\nu_S} - \nu \right) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* \right] d\Omega_S \quad (6)$$

Considerando-se que  $\varepsilon_{kll}^* = \varepsilon_{kij}^* \delta_{ij}$  e  $\varepsilon_{ll} = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$  a equação (6) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_S = \frac{\overline{\overline{E}}_S}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_S}{\nu} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \frac{\overline{E}}{(1-\nu^2)} \left[ \nu \varepsilon_{kll}^* \delta_{ij} + \left( \frac{\nu}{\nu_S} - \nu + 1 - 1 \right) \varepsilon_{kij}^* \right] d\Omega_S \quad (7)$$

Trabalhando a expressão acima, chega-se à seguinte equação integral:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_S = \frac{\overline{\overline{E}}_S}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_S}{\nu} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S + \overline{\overline{E}}_S \left( 1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \quad (8)$$

Observe que quando o ponto de colocação pertence à sub-região  $\Omega_S$  onde se faz a integração,  $\overline{\overline{E}}_S = \overline{\overline{E}}$ ,  $\nu_S = \nu$ , a equação anterior se torna:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_S = \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S \quad (9)$$

A equação (2.9) representa o Teorema de Betti para o problema de chapa sem estar sub-dividida em sub-regiões. Note que a equação (2) é referente à uma microestrutura heterogênea como representado na Figura 1, onde temos apenas duas inclusões. Portanto, generalizando para o caso em que se tenham  $N_S$  sub-regiões, pode-se definir a seguinte equação integral para uma microestrutura heterogênea:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_S = \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\overline{\overline{E}}_S}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_S}{\nu} \left[ \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S \right] + \sum_{S=1}^{N_S} \overline{\overline{E}}_S \left( 1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \left[ \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \quad (10)$$

Para se chegar à expressão do deslocamento  $u_k$  para um ponto do domínio da chapa, tem-se que fazer a integração por partes da equação (10), a fim de se transformar as integrais de domínio em integrais de contorno.

A fim de facilitar a dedução, serão consideradas apenas duas sub-regiões (uma matriz com apenas uma inclusão), sendo que para o caso de mais sub-regiões o processo se torna análogo. Assim, a equação (10) será dividida da seguinte forma:

$$I_1 = \sum_{s=1}^2 \bar{\bar{E}} \left( 1 - \frac{\nu}{\nu_s} \right) \left[ \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_s \right] \quad (11)$$

$$I_2 = \sum_{s=1}^2 \frac{\bar{\bar{E}}_s}{\bar{\bar{E}}} \frac{\nu_s}{\nu} \left[ \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_s \right] \quad (12)$$

$$I_3 = \int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_s \quad (13)$$

A expressão base utilizada para desenvolver as integrações por partes é a mesma que se encontra na apostila de Introdução ao Método dos Elementos de Contorno, redigida pela Prof. Gabriela Rezende Fernandes em 2005. Essa expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (u \cdot dv) d\Omega = \int_{\Gamma} (u \cdot v) n_i d\Gamma - \int_{\Omega} (v \cdot du) d\Omega \quad (14)$$

A integração das equações (11), (12) e (13) é feita por partes em relação à  $x_j$ . A integração por partes é desenvolvida em cada sub-região, onde a equação a seguir representa a integral  $I_1$  já integrada por partes:

$$\begin{aligned} I_1 = & \bar{\bar{E}}_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \int_{\Gamma_1 + \Gamma_{12}} u_i \varepsilon_{kij}^* n_j d\Gamma - \bar{\bar{E}}_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \int_{\Omega_1} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega + \\ & + \bar{\bar{E}}_2 \left( 1 - \frac{\nu_2}{\nu} \right) \int_{\Gamma_{21}} u_i \varepsilon_{kij}^* n_j d\Gamma - \bar{\bar{E}}_2 \left( 1 - \frac{\nu_2}{\nu} \right) \int_{\Omega_2} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

Mas considerando-se que:  $\int_{\Gamma_{12}} d\Gamma = \int_{\Gamma_{21}} d\Gamma$ ;  $u_i(\Gamma_{12}) = u_i(\Gamma_{21})$  e  $n_j(\Gamma_{12}) = -n_j(\Gamma_{21})$ ,

a equação (2.15) fica da seguinte forma:

$$I_1 = \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \int_{\Gamma_1} u_i \varepsilon_{ki}^* d\Gamma - \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \int_{\Omega_1} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega + \\ + \left\{ \bar{\bar{E}}_2 \left(1 - \frac{\nu_2}{\nu}\right) - \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \right\} \int_{\Gamma_{21}} u_i \varepsilon_{ki}^* d\Gamma - \bar{\bar{E}}_2 \left(1 - \frac{\nu_2}{\nu}\right) \int_{\Omega_2} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega \quad (16)$$

Generalizando a equação (16) para  $N_s$  sub-regiões, tem-se a seguinte equação integral:

$$I_1 = \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \int_{\Gamma_1} (u_1 \varepsilon_{k1}^* + u_2 \varepsilon_{k2}^*) d\Gamma - \sum_{S=1}^{N_s} \bar{\bar{E}}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu}\right) \int_{\Omega_S} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega_S \\ + \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{\bar{E}}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu}\right) - \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_1 \varepsilon_{k1}^* + u_2 \varepsilon_{k2}^*) d\Gamma_{j1} \quad (17)$$

Desenvolvendo o trabalho matemático da integração por partes em relação a  $x_j$  da equação integral (12), chega-se a:

$$I_2 = \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{\bar{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_{12}} u_i N_{kij}^* n_j d\Gamma - \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{\bar{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Omega_1} u_i N_{kij,j}^* d\Omega + \\ + \frac{\bar{\bar{E}}_2}{\bar{\bar{E}}} \frac{\nu_2}{\nu} \int_{\Gamma_{21}} u_i N_{kij}^* n_j d\Gamma - \frac{\bar{\bar{E}}_2}{\bar{\bar{E}}} \frac{\nu_2}{\nu} \int_{\Omega_2} u_i N_{kij,j}^* d\Omega \quad (18)$$

Mas considerando-se que:  $\int_{\Gamma_{12}} d\Gamma = \int_{\Gamma_{21}} d\Gamma$ ;  $u_i(\Gamma_{12}) = u_i(\Gamma_{21})$  e  $n_j(\Gamma_{12}) = -n_j(\Gamma_{21})$ ,

a equação (2.18) fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{\overline{\overline{E}}_1}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} u_i p_{ki}^* d\Gamma - \frac{\overline{\overline{E}}_1}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Omega_1} u_i N_{kij,j}^* d\Omega + \\
& + \left\{ \frac{\overline{\overline{E}}_2}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_2}{\nu} - \frac{\overline{\overline{E}}_1}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \int_{\Gamma_{21}} u_i p_{ki}^* d\Gamma - \frac{\overline{\overline{E}}_2}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_2}{\nu} \int_{\Omega_2} u_i N_{kij,j}^* d\Omega
\end{aligned} \quad (19)$$

Generalizando a equação (19) para  $N_s$  sub-regiões, tem-se a seguinte equação integral:

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{\overline{\overline{E}}_1}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} (u_1 p_{k1}^* + u_2 p_{k2}^*) d\Gamma + \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\overline{\overline{E}}_j}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_j}{\nu} - \frac{\overline{\overline{E}}_1}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_1 p_{k1}^* + u_2 p_{k2}^*) d\Gamma_{j1} + \\
& - \sum_{s=1}^{N_s} \frac{\overline{\overline{E}}_s}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_s}{\nu} \int_{\Omega_s} u_i N_{kij,j}^* d\Omega_s
\end{aligned} \quad (20)$$

Seja agora o seguinte termo do segundo membro da equação (20):

$$I_4 = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{\overline{\overline{E}}_s}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_s}{\nu} \int_{\Omega_s} u_i N_{kij,j}^* d\Omega \quad (21)$$

Utilizando a equação (11) do anexo A, pode-se definir a seguinte relação de equilíbrio para o problema fundamental:

$$N_{kij,j}^* + b_i^* = 0 \rightarrow N_{kij,j}^* = -b_i^* \quad (22)$$

onde a carga fundamental  $b_i^*$  é dada pela função Delta de Dirac, ou seja:  $b_i^* = \delta(q, p) \delta_{ki}$ , sendo que essa função possui a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega_\infty} \phi(p)_i \delta(q, p) \delta_{ki} d\Omega_\infty = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq q \\ \phi(q)_k & \text{se } p = q \end{cases} \quad (23)$$

Considerando-se as equações (22) e (23), conclui-se que a equação (21) apenas será diferente de zero quando o ponto de colocação  $\mathbf{q}$  pertencer à sub-região  $\mathbf{s}$  onde se está fazendo a integração. Portanto, a equação (21) resulta em:

$$I_4 = \int_{\Omega_s} u_i(p) [-\delta(q, p) \delta_{ki}] d\Omega = -u_k(q) \int_{\Omega_s} \delta(q, p) d\Omega = -u_k(q) \quad (24)$$

Desenvolvendo finalmente o trabalho matemático da integração por partes em relação a  $\mathbf{x}_j$  da equação integral (17), chega-se a:

$$I_3 = \int_{\Gamma} u_{ki}^* N_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* N_{ij,j} d\Omega \quad (25)$$

Ou considerando-se a fórmula de Cauchy, equação (21) do anexo A, tem-se:

$$I_3 = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (26)$$

Nesse trabalho, a chapa em sub-regiões representa a microestrutura do material, no contexto da análise multi-escala de estruturas, onde as condições de contorno impostas às equações algébricas são oriundas da macro-deformação, gerando assim deslocamentos lineares em todo o contorno externo. Com isso, para esse caso particular a força  $\mathbf{b}_i$  sempre será nula, ou seja, tem-se:

$$I_5 = \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (27)$$

Substituindo-se os resultados obtidos em  $I_4$  e  $I_5$  em (20) e (26), respectivamente, determina-se a seguinte expressão para o deslocamento de um ponto interno da microestrutura heterogênea:

$$u_k(q) = \int_{\Gamma_1} (u_{k1}^*(q, P) p_1(P) + u_{k2}^*(q, P) p_2(P)) d\Gamma +$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\overline{\overline{E}}_1}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} \left( u_1(P) p_{k_1}^*(q, P) + u_2(P) p_{k_2}^*(q, P) \right) d\Gamma + \\
& -\sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\overline{\overline{E}}_j}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_j}{\nu} - \frac{\overline{\overline{E}}_1}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \left( u_1(P) p_{k_1}^*(q, P) + u_2(P) p_{k_2}^*(q, P) \right) d\Gamma_{j1} + \\
& \quad -\overline{\overline{E}}_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \int_{\Gamma_1} \left( u_1(P) \varepsilon_{k_1}^*(q, P) + u_2(P) \varepsilon_{k_2}^*(q, P) \right) d\Gamma + \\
& -\sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \overline{\overline{E}}_j \left( 1 - \frac{\nu_j}{\nu} \right) - \overline{\overline{E}}_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \left( u_1(P) \varepsilon_{k_1}^*(q, P) + u_2(P) \varepsilon_{k_2}^*(q, P) \right) d\Gamma_{j1} + \\
& \quad + \sum_{S=1}^{N_S} \overline{\overline{E}}_S \left( 1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \int_{\Omega_S} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q, p) d\Omega_S
\end{aligned} \tag{28}$$

Na dedução das expressões fundamentais são consideradas as seguintes relações:

$$r_{,j} = \frac{x_j(p) - x_j(q)}{r} \tag{29}$$

$$r = \sqrt{[x_1(p) - x_1(q)]^2 - [x_2(p) - x_2(q)]^2} \tag{30}$$

$$r_{,j} n_j = \frac{\partial r}{\partial n} \tag{31}$$

$$\delta_{kj} n_j = n_k \tag{32}$$

$$\delta_{kl} r_{,l} = r_{,k} \tag{33}$$

$$\frac{\partial r_{,k}}{\partial x_j(p)} = \frac{1}{r} [\delta_{jk} - r_{,k} r_{,j}] \tag{34}$$

Portanto, as expressões fundamentais contidas na equação (28) são descritas a seguir:

$$u_{ki}^* = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \left[ -(3-4\nu') \ln r \delta_{ki} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad k, i=1, 2 \quad (35)$$

$$p_{ki}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu')r} \left\{ \left[ (1-2\nu') \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k} \right] \frac{\partial r}{\partial n} + \right. \\ \left. -(1-2\nu') [n_i r_{,k} - n_k r_{,i}] \right\} \quad k, i=1, 2 \quad (36)$$

$$\varepsilon_{ki}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}r} \left[ (1-2\nu') \left( \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ki} + r_{,i} n_k \right) + \right. \\ \left. -r_{,k} n_i + 2r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad i, k=1, 2 \quad (37)$$

$$\varepsilon_{kij,j}^* = \frac{\nu'}{4\pi(1-\nu')\bar{G}r^2} \left[ \delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k} \right] \quad i, k=1, 2 \quad (38)$$

onde  $\bar{G} = Gt$  e  $\nu' = \frac{\nu}{1+\nu}$ , pois se trata do estado plano de tensão.

Observe que não haverá problemas de singularidade na integral de domínio envolvendo os deslocamentos, pois quando o ponto de colocação pertencer à célula a ser integrada, tem-se que  $\nu = \nu_s$  e, portanto, a integral não precisa ser calculada.

Notemos ainda que se houvessem vazios no lugar das inclusões, os contornos  $\Gamma_{21}$  e  $\Gamma_{31}$  não existiriam e haveria apenas um material que seria aquele da matriz. Nesse caso, a equação (2.28) se tornaria:

$$u_k(q) = -\int_{\Gamma_1} (u_1(P) p_{k1}^*(q,P) + u_2(P) p_{k2}^*(q,P)) d\Gamma + \\ -\sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \int_{\Gamma_{1j}} (u_1(P) p_{k1}^*(q,P) + u_2(P) p_{k2}^*(q,P)) d\Gamma_{1j} + \\ + \int_{\Gamma_1} (u_{k1}^*(q,P) p_1(P) + u_{k2}^*(q,P) p_2(P)) d\Gamma \quad (39)$$

A equação integral para um caso geral onde tem-se definidos na microestrutura tanto inclusões como vazios é dada por:

$$\begin{aligned}
u_k(q) = & \int_{\Gamma_1} \left( u_{k1}^*(q, P) p_1(P) + u_{k2}^*(q, P) p_2(P) \right) d\Gamma + \\
& - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} \left( u_1(P) p_{k1}^*(q, P) + u_2(P) p_{k2}^*(q, P) \right) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_{1j}} \left( u_1(P) p_{k1}^*(q, P) + u_2(P) p_{k2}^*(q, P) \right) d\Gamma_{1j} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{\nu_j}{\nu} - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \left( u_1(P) p_{k1}^*(q, P) + u_2(P) p_{k2}^*(q, P) \right) d\Gamma_{j1} + \\
& - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \int_{\Gamma_1} \left( u_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) + u_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P) \right) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \bar{E}_j \left( 1 - \frac{\nu_j}{\nu} \right) - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \left( u_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) + u_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P) \right) d\Gamma_{j1} + \\
& + \sum_{s=1}^{N_s} \bar{E}_s \left( 1 - \frac{\nu_s}{\nu} \right) \int_{\Omega_s} u_i(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega_s \tag{40}
\end{aligned}$$

### 2.3 Equação Integral da Derivada dos Deslocamentos $u_k$ para Pontos do Domínio da Microestrutura

Neste item será apresentada a equação integral da derivada do deslocamento em relação a uma direção qualquer  $m$ . Assim, derivando-se a equação (40) temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_k(q)}{\partial m} = & \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial u_{k1}^*(q, P)}{\partial m} p_1(P) + \frac{\partial u_{k2}^*(q, P)}{\partial m} p_2(P) \right) d\Gamma + \\
& - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} \left( u_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + u_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^{N_{mzqs}} \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \int_{\Gamma_{1j}} \left( u_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + u_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{1j} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{mc}} \left\{ \frac{\bar{E}_j}{\bar{E}} \frac{v_j}{v} - \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \left( u_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + u_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{j1} + \\
& - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \int_{\Gamma_1} \left( u_1(P) \frac{\partial \varepsilon_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + u_2(P) \frac{\partial \varepsilon_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{mc}} \left\{ \bar{E}_j \left( 1 - \frac{v_j}{v} \right) - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \left( u_1(P) \frac{\partial \varepsilon_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + u_2(P) \frac{\partial \varepsilon_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{j1} + \\
& + \sum_{s=1}^{N_s} \bar{E}_s \left( 1 - \frac{v_s}{v} \right) \frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega_s} u_i(P) \varepsilon_{kij}^*(q, P) d\Omega_s
\end{aligned} \tag{41}$$

Através do trabalho de desenvolver a deriva da equação (40), novas expressões fundamentais são obtidas. As equações descritas a seguir são utilizadas para a dedução dessas novas expressões:

$$\frac{\partial}{\partial m(q)} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} (-r_{,j} m_j) \tag{42}$$

$$\frac{\partial r_{,k}}{\partial m(q)} = -\frac{\partial r_{,k}}{\partial x_j(P)} = -\frac{1}{r} \{ \delta_{kj} - r_{,k} r_{,j} \} m_j \tag{43}$$

$$\frac{\partial}{\partial m(q)} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right) = -\frac{1}{r} \left\{ n_j - r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} m_j \tag{44}$$

Portanto, as expressões fundamentais contidas na equação (41) são descritas da seguinte forma, onde  $i, j, k=1, 2$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{ki}^*}{\partial m} = & \frac{1}{4\pi(1-\nu')r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ -2(1-2\nu') \frac{\partial r}{\partial m} \delta_{ik} + 8r_{,i} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} + \right. \right. \\
& + 2r_{,k} m_i + 2r_{,i} m_k \left. \right] + (1-2\nu') \left[ -2n_k r_{,i} \frac{\partial r}{\partial m} + 2n_i r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} + \right. \\
& \left. \left. + n_j m_j \delta_{ik} - n_i m_k + n_k m_i \right] + 2r_{,i} r_{,k} n_j m_j \right\}
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\frac{\partial u_{ki}^*}{\partial m} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu')r} \left[ (3-4\nu') \frac{\partial r}{\partial m} \delta_{ki} - m_k r_{,i} - m_i r_{,k} + 2r_{,i} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} \right] \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{ki}^*}{\partial m} = \frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}r} & \left\{ (1-2\nu') \left( \delta_{ki} n_j m_j + n_k m_i - 2n_k r_{,i} \frac{\partial r}{\partial m} - 2\delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} \right) + \right. \\ & \left. + 2r_{,k} \left( n_i \frac{\partial r}{\partial m} + r_{,i} m_j n_j \right) - n_i m_k + 2 \frac{\partial r}{\partial n} (r_{,i} m_k + r_{,k} m_i) - 8r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \quad (47) \end{aligned}$$

onde  $\bar{G} = Gt$  e  $\nu' = \frac{\nu}{1+\nu}$ , pois se trata do estado plano de tensão.

Observe que não haverá problemas de singularidade na integral de domínio envolvendo os deslocamentos, pois quando o ponto de colocação pertencer à célula a ser integrada, tem-se que  $\nu = \nu_s$  e, portanto, a integral não precisa ser calculada.

Logo, pode-se dizer que:

$$\frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega_s} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q,p) d\Omega_s = \int_{\Omega_s} u_i(p) \frac{\partial \varepsilon_{kij,j}^*}{\partial m}(q,p) d\Omega_s \quad (48)$$

Assim, desenvolvendo a expressão fundamental contida na equação (48), tem-se:

$$\frac{\partial \varepsilon_{kij,j}^*}{\partial m} = \frac{\nu'}{2\pi(1-\nu')\bar{G}r^3} \left[ \frac{\partial r}{\partial m} (\delta_{ik} - 4r_{,i} r_{,k}) + r_{,i} m_k + r_{,k} m_i \right] \quad (49)$$

onde  $\bar{G} = Gt$  e  $\nu' = \frac{\nu}{1+\nu}$ , pois se trata do estado plano de tensão.

## 2.4 Equação Integral dos Deslocamentos para Pontos Sobre o Contorno ou Interfaces da Microestrutura

### 2.4.1 Procedimento Geral

Na modelagem numérica feita através do MEC, problemas de singularidade podem ocorrer quando o ponto de colocação, que no nosso caso denominamos de  $\mathbf{Q}$ , coincide com o ponto  $\mathbf{P}$  localizado no elemento a ser integrado, tornando assim o raio  $r(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  nulo. Com isso, é necessário um processo de cálculo algébrico para tratar essa singularidade que ocorre nas expressões fundamentais, obtendo como resultado valores ou expressões que são denominados termos livres.

Neste trabalho, o contorno e as interfaces (matriz – inclusão ou matriz – vazio) são discretizadas em elementos, onde pontos de colocação são adotados ao longo destes elementos. Além disso, deve-se lembrar que quando for integrar o elemento ao qual o ponto  $\mathbf{Q}$  pertence, a integração deve ser analítica devido à singularidade existente. Para melhores detalhes sobre integração analítica, ver Fernandes (2005).

De uma forma geral, a equação integral do deslocamento para um ponto sobre o contorno ou interface, tanto com inclusão ou com vazio, é dada pela equação (2.50). Nessa equação os coeficientes que multiplicam os deslocamentos nas direções  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ , são os denominados termos livres e são calculados quando se considera a carga unitária aplicada na direção  $\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned}
 C_{k1}u_1(\mathbf{Q}) + C_{k2}u_2(\mathbf{Q}) &= \int_{\Gamma_1} (u_{k1}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})p_1(\mathbf{P}) + u_{k2}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})p_2(\mathbf{P}))d\Gamma + \\
 &- \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} (u_1(\mathbf{P})p_{k1}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + u_2(\mathbf{P})p_{k2}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}))d\Gamma + \\
 &- \sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{v_j}{\nu} \int_{\Gamma_{1j}} (u_1(\mathbf{P})p_{k1}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + u_2(\mathbf{P})p_{k2}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}))d\Gamma_{1j} + \\
 &- \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{v_j}{\nu} - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{\nu} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_1(\mathbf{P})p_{k1}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + u_2(\mathbf{P})p_{k2}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}))d\Gamma_{j1} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \int_{\Gamma_1} (u_1(P) \varepsilon_{k1}^*(Q, P) + u_2(P) \varepsilon_{k2}^*(Q, P)) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_1(P) \varepsilon_{k1}^*(Q, P) + u_2(P) \varepsilon_{k2}^*(Q, P)) d\Gamma_{j1} + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu}\right) \int_{\Omega_S} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q, p) d\Omega_S
\end{aligned} \tag{50}$$

Para se chegar à equação (50), um processo algébrico é necessário. Uma solução vinda do cálculo diferencial e integral é aplicada ao contorno ou interface onde o ponto de colocação  $\mathbf{Q}$  está, utilizando a equação integral do deslocamento para um ponto interno. A equação é obtida fazendo com que o ponto  $\mathbf{Q}$  se torne interno ao domínio  $\Omega$ , não se localizando mais sobre o contorno. Assim, pode-se escrever no ponto  $\mathbf{Q}$  a equação integral referente a um ponto interno. O mecanismo procede-se da seguinte forma, ver Fernandes (2005):

- Acrescenta-se um contorno circular  $\Gamma_\xi$  de raio  $\xi$  infinitesimal e centro em  $\mathbf{Q}$  (ver Figura 2);
- Retira-se do contorno  $\Gamma$  o trecho de contorno  $\bar{\Gamma}$  (trecho pontilhado da Figura 2), que contém a singularidade;
- Com o acréscimo do contorno  $\Gamma_\xi$  e a retirada do contorno  $\bar{\Gamma}$  obtém-se o novo contorno:  $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\xi$  (ver Figura 2);
- Fazem-se então os limites do raio  $\xi$  e do contorno tenderem a zero, a fim de que o ponto  $\mathbf{Q}$  possa ser considerado sobre o contorno.

Da Figura 2, onde o contorno é circular, as seguintes relações podem ser definidas:

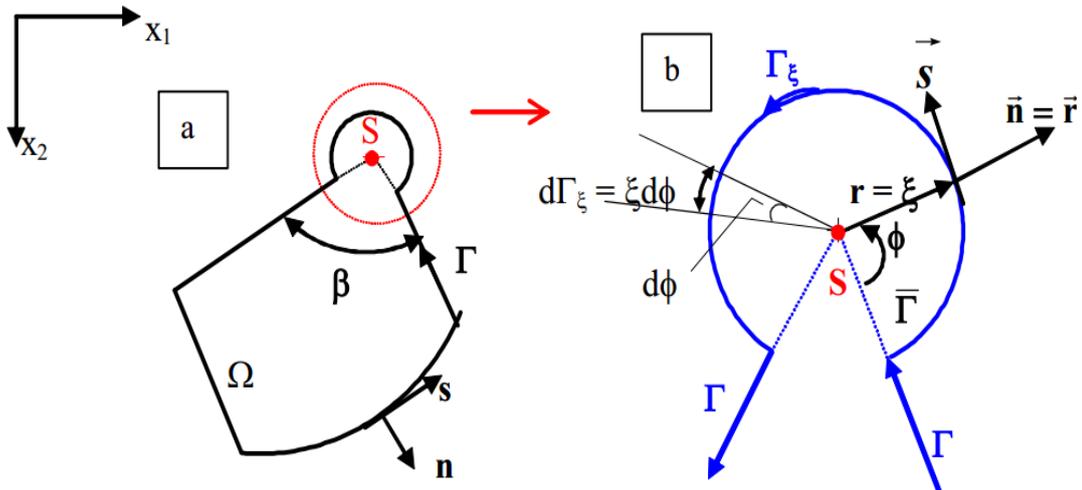
$$r = \xi \tag{51}$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,i} n_i = 1 \tag{52}$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = r_{,i} s_i = 0 \quad (53)$$

$$d\Gamma_\xi(\mathbf{P}) = \xi d\phi \quad (54)$$

Figura 2 - Contorno circular acrescido a um ponto Q de um canto da chapa



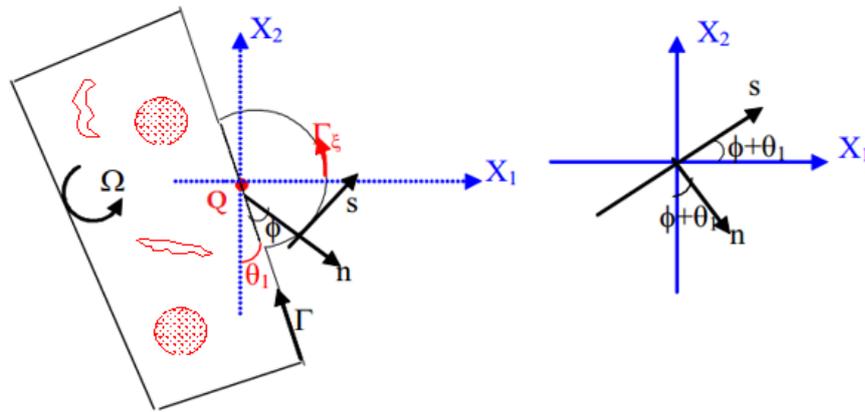
Fonte: (FERNANDES, 2005)

Para o problema analisado neste trabalho, têm-se problemas de singularidades para o ponto de colocação situado em três posições distintas: no contorno externo da microestrutura, na interface da matriz com uma inclusão e na interface da matriz com um vazio. No entanto, ao longo do contorno externo nós duplos serão considerados nos cantos, portanto apenas o caso em que Q não coincide com o canto será abordado aqui. Não há necessidade de se adotar nós duplos em cantos sobre as interfaces, porque nas interfaces têm-se apenas deslocamentos como incógnitas. Detalhes sobre a dedução dos termos livres quando o ponto de colocação coincide com um canto do contorno externo podem ser encontrados em Fernandes (2005). Assim, têm-se três situações de análise diferentes, onde o processo explicado anteriormente é aplicado. Primeiramente será demonstrada a equação para o caso de o ponto de colocação coincidir com o contorno. Depois o caso onde o ponto de colocação está situado em uma interface matriz/inclusão e por último na interface matriz/vazio. O vetor dos termos livres fica definido da seguinte forma para todos os casos:

$$\{C_{ki}\}^T = \{C_{k1} \quad C_{k2}\} \quad (55)$$

### 2.4.2 Termo Livre para Equação Integral do Deslocamento de um Ponto Sobre o Contorno Externo e Não Coincidente com um Canto

Figura 3 - Ponto de colocação não coincidente com um canto



Fonte: (FERNANDES, 2005)

A Figura 3 ilustra o caso do ponto de colocação  $Q$  estar situado no contorno externo da microestrutura, gerando assim problemas de singularidade para elementos ao longo do contorno externo. Considerando-se o procedimento descrito no item 2.4.1., a equação (40) escrita em  $Q$  se torna:

$$u_k(Q) = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 - \bar{\Gamma}} (u_{ki}^*(Q, P) p_i(P)) d\Gamma + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_{ki}^*(Q, P) p_i(P)) d\Gamma_\xi +$$

$$-\frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{\nu} \left[ \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 - \bar{\Gamma}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma \right] - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{\nu} \left[ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_\xi \right] +$$

$$-\sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{\nu} \int_{\Gamma_{1j}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{1j} +$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{E}_1 \left(1 - \frac{V_1}{\nu}\right) \left[ \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 - \bar{\Gamma}} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma \right] - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{V_1}{\nu}\right) \left[ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_\xi \right] + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{E}_j}{\bar{E}} \frac{V_j}{\nu} - \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{V_1}{\nu} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{j1} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{V_j}{\nu}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{V_1}{\nu}\right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{j1} + \\
& + \sum_{s=1}^{N_s} \bar{E}_s \left(1 - \frac{V_s}{\nu}\right) \left[ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_s + \Omega_\xi} (u_i(P) \varepsilon_{kij,j}^*(Q, P)) d\Omega_s \right] \quad (56)
\end{aligned}$$

onde o domínio  $\Omega_\xi$  é o domínio infinitesimal de contorno  $\Gamma_\xi$ , ver Figura 2.

Considere a seguinte mudança de coordenada para a integral envolvendo o domínio (ver Fernandes (2005) capítulo 6), onde o raio é definido em (51):

$$d\Omega = r dr d\theta \quad (57)$$

Fazendo-se o limite indicado em (58), conclui-se que a equação integral envolvendo o domínio infinitesimal possui valor nulo, ou seja:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_\xi} (u_i(P) \varepsilon_{kij,j}^*(Q, P)) d\Omega_s = 0 \quad (58)$$

As integrais da equação (56) que possuem o limite de  $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$ , resultam no valor principal das mesmas sobre o contorno  $\Gamma$  (ver Fernandes (2005)), sendo que aquela com singularidade do tipo  $1/r$  é interpretada no sentido do valor principal de Cauchy. Assim, elas podem ser escritas como:

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 - \bar{\Gamma}} (u_{ki}^*(Q, P) p_i(P)) d\Gamma = \int_{\Gamma_1} (u_{ki}^*(Q, P) p_i(P)) d\Gamma \quad (59)$$

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 - \bar{\Gamma}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma = \int_{\Gamma_1} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma \quad (60)$$

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 - \bar{\Gamma}} \left( u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \left( u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) \right) d\Gamma \quad (61)$$

Na equação (56) têm-se algumas integrais que envolvem o contorno infinitesimal  $\Gamma_\xi$ . São a partir destas integrais que os valores para os termos livres são obtidos. Portanto, tem-se as seguintes equações integrais:

$$U_1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( u_{ki}^*(Q, P) p_i(P) \right) d\Gamma_\xi \quad (62)$$

$$U_2 = \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \left[ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) \right) d\Gamma_\xi \right] \quad (63)$$

$$U_3 = \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \left[ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) \right) d\Gamma_\xi \right] \quad (64)$$

A equação integral (62) possui a expressão fundamental do deslocamento, dada pela equação (35). Esta expressão tem singularidade do tipo  $\ln(\mathbf{r})$ . Assim, fazendo-se a mudança de coordenada indicada em (54), trabalhando o limite da integral e utilizando-se  $0 \leq \phi \leq \pi$ , tem-se:

$$\begin{aligned} U_1 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( u_{ki}^*(Q, P) p_i(P) \right) d\Gamma_\xi = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^\pi \left( \frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \left[ -(3-4\nu') \ln r \delta_{ki} + r_{,i} r_{,k} \right] p_i(P) \right) \xi d\phi = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Analisando agora a equação (63) que possui a expressão fundamental da força de superfície, dada pela equação (36). Esta expressão tem singularidade do tipo  $1/r$ . Como o ponto de colocação está sobre o contorno externo, as propriedades elásticas tomam valores referentes ao da matriz. Assim, fazendo-se a mudança de coordenada indicada em (54) e utilizando-se  $0 \leq \phi \leq \pi$ , tem-se:

$$U_2 = 1 \left[ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{\pi} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) \xi d\phi \right] \quad (66)$$

A fim de resolver a integral (66) em termos de  $u_i(Q)$ , o valor  $u_i(Q)$  será somado e subtraído no integrando da equação (2.66), o que não altera o valor da integral. Além disso, como tem-se continuidade da variável  $u$ , pode-se dizer que  $u_i(P)$  no contorno  $\Gamma_\xi$  é igual ao valor de  $u_i(Q)$ , já que o raio  $\xi$  tende à zero. Portanto, o termo  $[u(P) - u(Q)]$  se anula, restando apenas o deslocamento  $u_i(Q)$  no integrando. Logo a equação (2.66) resulta em:

$$\begin{aligned} U_2 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{\pi} ([u_i(P) - u_i(Q) + u_i(Q)] p_{ki}^*(Q, P)) \xi d\phi = \\ &= u_i(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{\pi} (p_{ki}^*(Q, P)) \xi d\phi \end{aligned} \quad (67)$$

A fim de determinar as expressões fundamentais  $p_{ki}^*(Q, P)$ , necessita-se do vetor normal ao contorno, que da Figura 3, é definido como:

$$\vec{r} = \vec{n} = \begin{Bmatrix} \text{sen}(\phi + \theta_1) \\ -\text{cos}(\phi + \theta_1) \end{Bmatrix} \quad (68)$$

Trabalhando as expressões fundamentais  $p_{ki}^*(Q, P)$  contidas na equação (2.67), e considerando-se (2.52), tem-se:

$$k = i = 1 \rightarrow p_{11}^*(Q, P) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu')\xi} [(1-2\nu') + 2\text{sen}^2(\phi + \theta_1)] \quad (69a)$$

$$k = i = 2 \rightarrow p_{22}^*(Q, P) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu')\xi} [(1-2\nu') + 2\text{cos}^2(\phi + \theta_1)] \quad (69b)$$

$$k = 1; i = 2 \rightarrow p_{12}^*(Q, P) = \frac{2\text{cos}(\phi + \theta_1)\text{sen}(\phi + \theta_1)}{4\pi(1-\nu')\xi} = p_{21}^*(Q, P) \quad (69c)$$

Substituindo-se (69a) em (67), para  $k = 1$  e  $i = 1$ , obtém-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi = -\frac{u_1(Q)}{4\pi(1-\nu')} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^\pi [(1-2\nu') + 2\text{sen}^2(\phi + \theta_1)] d\phi \quad (70)$$

Fazendo-se  $u = \phi + \theta_1$ , considerando-se a relação trigonométrica:

$$\text{sen}^2(u) = \frac{1 - \cos 2u}{2} \text{ e fazendo-se a integração em } \phi, \text{ chega-se à:}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi = -\frac{u_1(Q)}{4\pi(1-\nu')} \left[ (1-\nu')\phi \Big|_0^\pi + \left( u - \frac{\text{sen} 2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \right] = -\frac{u_1(Q)}{2} \quad (71)$$

onde  $\nu'$  é definido no item 2.2. nas expressões fundamentais do problema.

De forma análoga ao processo anterior, para  $k = 2$  e  $i = 2$ , faz-se  $u = \phi + \theta_1$  e considerando-se a relação trigonométrica:  $\cos^2(u) = \frac{1 + \cos 2u}{2}$ , faz-se a integração em  $\phi$  e chega-se à:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi = -\frac{u_2(Q)}{4\pi(1-\nu')} \left[ (1-\nu')\phi \Big|_0^\pi + \left( u + \frac{\text{sen} 2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \right] = -\frac{u_2(Q)}{2} \quad (72)$$

Finalmente, para  $k = 1$  e  $i = 2$ , utiliza-se a expressão (2.69c). Considera-se que  $\text{sen}(2u) = 2\text{sen}(u)\cos(u)$ , adota-se  $u = 2\phi + 2\theta_1$  e faz-se a integração em  $\phi$ . Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= \\ &= \frac{u_2(Q)}{4\pi(1-\nu')} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^\pi \text{sen}(2\phi + 2\theta_1) d\phi = -\frac{u_2(Q)}{4\pi(1-\nu')} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+2\pi} = 0 \end{aligned} \quad (73)$$

O processo de cálculo para  $k = 2$  e  $i = 1$  é o mesmo utilizado para desenvolver a equação (73). Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= \\ &= \frac{u_1(Q)}{4\pi(1-\nu')} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^\pi \text{sen}(2\phi + 2\theta_1) d\phi = -\frac{u_1(Q)}{4\pi(1-\nu')} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+2\pi} = 0 \quad (74) \end{aligned}$$

Seja agora a equação integral (64) que possui a expressão fundamental da deformação, dada pela equação (37), que tem singularidade do tipo  $1/r$ . Como o ponto de colocação está situado no contorno da microestrutura, suas propriedades elásticas são aqueles referentes à matriz, ou seja  $\nu_1 = \nu$ , o que anula o valor da mesma.

Assim, para  $k = 1$ , substituem-se as expressões integrais dadas pelas equações (59), (60) e (61) e ainda os resultados obtidos pelas equações (2.58), (65), (70), (73) e o valor nulo da equação (64) em (56), obtendo-se os seguintes valores para os termos livres:

$$C_{11} = \frac{1}{2} \quad (75a)$$

$$C_{12} = 0 \quad (75b)$$

Assim, para  $k = 2$ , substitui-se as expressões integrais dadas pelas equações (2.59), (2.60) e (2.61) e ainda os resultados obtidos pelas equações (2.58), (2.65), (2.72), (2.74) e o valor nulo da equação (2.64) em (2.56), obtendo-se os seguintes valores para os termos livres:

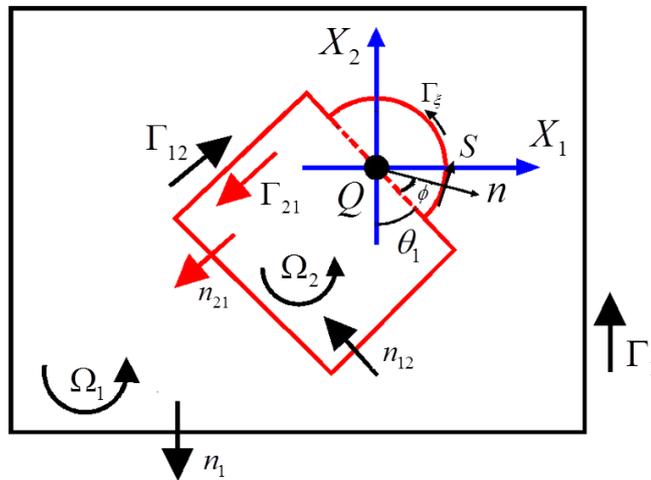
$$C_{22} = \frac{1}{2} \quad (76a)$$

$$C_{21} = 0 \quad (76b)$$

### 2.4.3 Termo Livre para Equação Integral do Deslocamento de um Ponto Sobre a Interface da Matriz com uma Inclusão e Não Coincidente com um Canto

A Figura 4 a seguir ilustra para este caso o ponto de colocação  $Q$  situado numa interface entre a matriz (descrito pelo domínio  $\Omega_1$ ) e uma inclusão (descrito pelo domínio  $\Omega_2$ ).

Figura 4 - Ponto de colocação na interface matriz-inclusão



Fonte: Elaboração do próprio autor

Considerando-se o procedimento descrito no item 2.4.1., a equação (40) escrita em  $Q$  se torna:

$$\begin{aligned}
 u_k(Q) = & \int_{\Gamma_1} (u_{ki}^*(Q, P) p_i(P)) d\Gamma - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{\nu_j}{\nu} \int_{\Gamma_{1j}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{1j} - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \int_{\Gamma_1} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{\nu_j}{\nu} - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \left[ \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{j1} \right] + \\
 & - \left\{ \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{\nu_j}{\nu} - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \left[ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_\xi \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_j \left( 1 - \frac{v_j}{\nu} \right) - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{\nu} \right) \right\} \left[ \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{j1} \right] + \\
& - \left\{ \bar{E}_j \left( 1 - \frac{v_j}{\nu} \right) - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{\nu} \right) \right\} \left[ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \right] + \\
& + \sum_{s=1}^{N_s} \bar{E}_s \left( 1 - \frac{v_s}{\nu} \right) \left[ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_s + \Omega_\xi} (u_i(P) \varepsilon_{kij}^*(Q, P)) d\Omega_s \right] \quad (77)
\end{aligned}$$

Analogamente como no caso desenvolvido no item 2.4.2., as integrais da equação (77) sobre o contorno  $\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}$  com o limite  $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$ , resultam em seus valores principais, assim como se anula a integral de domínio sobre o contorno infinitesimal. Restando assim, apenas as integrais sobre o contorno infinitesimal para serem analisadas.

Na dedução do termo livre será adotado que o ponto  $\mathbf{Q}$  está sobre a interface do domínio  $\Omega_1$  com o  $\Omega_2$ , mas pertence a  $\Omega_2$ , ou seja:  $E(\mathbf{Q}) = E_2 = E$  e  $\nu(\mathbf{Q}) = \nu_2 = \nu$ . Com isso, analisando as integrais sobre o contorno infinitesimal  $\Gamma_\xi$  da equação (2.77), tem-se:

$$\left\{ 1 - \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} \nu} \right\} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_1(P) p_{k1}^*(q, P) + u_2(P) p_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \quad (78)$$

$$\left\{ -\bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{\nu} \right) \right\} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) + u_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \quad (79)$$

A fim de se obter as expressões fundamentais  $p_{ki}^*(\mathbf{Q}, P)$ , da Figura 4, deve-se definir o vetor normal à interface que é o mesmo definido em (68). Considerando-se (52), chega-se às mesmas expressões para  $p_{ki}^*(\mathbf{Q}, P)$  descritas em (2.69). O procedimento de cálculo das integrais envolvendo  $p_{ki}^*(\mathbf{Q}, P)$  é análogo ao caso anterior. Para  $\mathbf{k} = \mathbf{1}$  e  $\mathbf{i} = \mathbf{1}$ , chega-se à mesma expressão descrita em (70), que após ser resolvida resulta no mesmo valor definido em (71). Analogamente, para  $\mathbf{k} =$

$2$  e  $i = 2$ ;  $k = 1$  e  $i = 2$ ;  $k = 2$  e  $i = 1$ , as integrais resultam, respectivamente, nos valores dados pelas equações (72), (73) e (74). Seja agora resolver a integral definida em (2.79). As expressões fundamentais  $\varepsilon_{ki}^*(Q, P)$  contidas na mesma são dadas por:

$$k = i = 1 \rightarrow \varepsilon_{11}^*(Q, P) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}\bar{G}_\xi} \left[ (1-2\nu') + 2\text{sen}^2(\phi + \theta_1)(1-\nu') \right] \quad (80a)$$

$$k = i \rightarrow \varepsilon_{22}^*(Q, P) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}\bar{G}_\xi} \left[ (1-2\nu') + 2\cos^2(\phi + \theta_1)(1-\nu') \right] \quad (80b)$$

$$k = 1; i = 2 \rightarrow \varepsilon_{12}^*(Q, P) = -\frac{2\cos(\phi + \theta_1)\text{sen}(\phi + \theta_1)}{8\pi\bar{G}\bar{G}_\xi} = \varepsilon_{21}^*(Q, P) \quad (80c)$$

Considerando-se (2.54), para  $k = 1$  e  $i = 1$ , chega-se a:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= \\ &= -\frac{u_1(Q)}{8\pi(1-\nu')\bar{G}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^\pi \left[ (1-2\nu') + 2(1-\nu')\text{sen}^2(\phi + \theta_1) \right] d\phi \end{aligned} \quad (81)$$

Fazendo-se  $u = \phi + \theta_1$ , considerando-se a relação trigonométrica:

$$\text{sen}^2(u) = \frac{1 - \cos 2u}{2} \text{ e fazendo-se a integração em } \phi, \text{ chega-se à:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= \\ &= -\frac{u_1(Q)}{8\pi(1-\nu')\bar{G}} \left[ (1-2\nu')\phi \Big|_0^\pi + (1-\nu') \left( u - \frac{\text{sen} 2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1 + \pi} \right] = -\frac{u_1(Q)}{8(1-\nu')\bar{G}} (2-3\nu') \end{aligned} \quad (82)$$

Para  $k = 2$  e  $i = 2$ , desenvolve-se o processo utilizado anteriormente. Faz-se  $u = \phi + \theta_1$  e considerando-se a relação trigonométrica:  $\cos^2(u) = \frac{1 + \cos 2u}{2}$ , faz-se a integração em  $\phi$  e chega-se à:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= \\ &= -\frac{u_2(Q)}{8\pi(1-\nu')\bar{G}} \left[ (1-2\nu')\phi_0^\pi + (1-\nu') \left( u + \frac{\text{sen}2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \right] = -\frac{u_2(Q)}{8(1-\nu')\bar{G}} (2-3\nu') \end{aligned} \quad (83)$$

Finalmente, para  $k = 1$  e  $i = 2$  ou  $k = 2$  e  $i = 1$ , utiliza-se a expressão (80c). Além disso, considera-se que  $\text{sen}(2u) = 2\text{sen}(u)\cos(u)$ , adota-se  $u = 2\phi + 2\theta_1$  e faz-se a integração em  $\phi$ . Para ambos os casos a integral se anula e resulta em:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= \\ &= \frac{u_i(Q)}{8\pi\bar{G}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^\pi \text{sen}(2\phi + 2\theta_1) d\phi = \frac{u_i(Q)}{4\pi(1-\nu')\bar{G}} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+2\pi} = 0 \end{aligned} \quad (84)$$

Portanto, considerando  $k = 1$ , substitui-se as equações (2.82), (2.84) e os resultados das equações (71) e (73) em (77), resultando nos seguintes valores para os termos livres:

$$C_{11} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \right) + \frac{\bar{E}_1}{8\bar{G}} \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \left( \frac{2-3\nu'}{1-\nu'} \right) \quad (85a)$$

$$C_{12} = 0 \quad (85b)$$

Considerando  $k = 2$ , substitui-se as equações (83) e (84) e os resultados das equações (72) e (74) em (77) resultando nos seguintes valores para os termos livres:

$$C_{21} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \right) + \frac{\bar{E}_1}{8\bar{G}} \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \left( \frac{2-3\nu'}{1-\nu'} \right) \quad (86a)$$

$$C_{22} = 0 \quad (86b)$$

Assim, o vetor dos termos livres para este caso se torna:

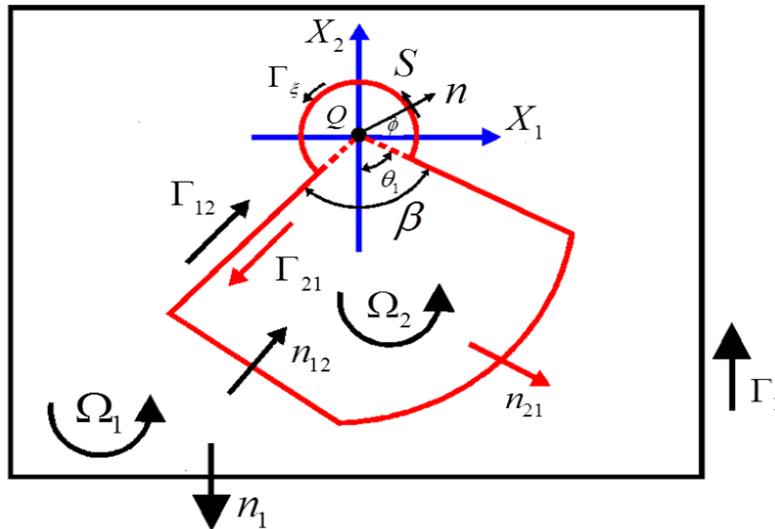
$$\{C_{1i}\}^T = \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \right) + \frac{\bar{E}_1}{8G} \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \left( \frac{2-3\nu'}{1-\nu'} \right) \quad 0 \right\} \quad (87a)$$

$$\{C_{2i}\}^T = \left\{ 0 \quad \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \right) + \frac{\bar{E}_1}{8G} \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \left( \frac{2-3\nu'}{1-\nu'} \right) \right\} \quad (87b)$$

#### 2.4.4 Termo Livre para Equação Integral do Deslocamento de um Ponto Sobre a Interface da Matriz com uma Inclusão e Coincidente com um Canto

A Figura 5 ilustra para este caso o ponto de colocação  $Q$  situado numa interface entre a matriz (descrito pelo domínio  $\Omega_1$ ) e uma inclusão (descrito pelo domínio  $\Omega_2$ ).

Figura 5 - Ponto de colocação na interface matriz-inclusão (canto)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A equação integral que representa este caso é a mesma para o problema do item 2.4.3. O processo para cálculo dos termos livres é análogo ao desenvolvido no item 2.4.3., fazendo-se  $\beta \neq \pi$ , sendo  $\beta$  o ângulo formado no canto. Portanto, mudam-se apenas os limites de integração de  $0 \leq \phi \leq \pi$  para  $0 \leq \phi \leq 2\pi - \beta$ . Analogamente ao caso anterior, para  $k = 1$  e  $i = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_1(Q)}{4\pi(1-\nu')} \left[ (1-2\nu') \phi \Big|_0^{2\pi-\beta} + \left( u - \frac{\text{sen}2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi-\beta} \right] = \\
&= u_1(Q) \left[ \frac{\beta}{2\pi} - 1 - \left( \frac{\cos 2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \right]
\end{aligned} \tag{88}$$

Para  $k = 2$  e  $i = 2$ , chega-se à:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_2(Q)}{4\pi(1-\nu')} \left[ (1-2\nu') \phi \Big|_0^{2\pi-\beta} + \left( u + \frac{\text{sen}2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi-\beta} \right] = \\
&= u_2(Q) \left[ \frac{\beta}{2\pi} - 1 + \left( \frac{\cos 2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \right]
\end{aligned} \tag{89}$$

Para  $k = 1$  e  $i = 2$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_2(Q)}{4\pi(1-\nu')} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+4\pi-2\beta} = \\
&= u_2(Q) \left( -\frac{\text{sen}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right)
\end{aligned} \tag{90}$$

Finalmente, para  $k = 2$  e  $i = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_1(Q)}{4\pi(1-\nu')} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+4\pi-2\beta} = \\
&= u_1(Q) \left( -\frac{\text{sen}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right)
\end{aligned} \tag{91}$$

Agora, sejam as integrais envolvendo as expressões da deformação fundamental,  $\varepsilon_{ki}^*(Q, P)$ . A solução das mesmas é análoga ao caso em que  $Q$  pertence à interface, mas não é coincidente com canto.

Para  $k = 1$  e  $i = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_1(Q)}{8\pi(1-\nu')\bar{G}} \left[ (1-2\nu')\phi|_0^{2\pi-\beta} + (1-\nu') \left( u - \frac{\text{sen}2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi-\beta} \right] = \\ &= -\frac{u_1(Q)}{8(1-\nu')\bar{G}} \left\{ (2-3\nu')(2\pi-\beta) + (1-\nu') \left[ \frac{\text{sen}2\beta \cos 2\theta_1 + \text{sen}2\theta_1 (1-\cos 2\beta)}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (92)$$

Para  $k = 2$  e  $i = 2$ , chega-se à:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_2(Q)}{8\pi(1-\nu')\bar{G}} \left[ (1-2\nu')\phi|_0^{2\pi-\beta} + (1-\nu') \left( u + \frac{\text{sen}2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi-\beta} \right] = \\ &= -\frac{u_2(Q)}{8(1-\nu')\bar{G}} \left\{ (2-3\nu')(2\pi-\beta) - (1-\nu') \left[ \frac{\text{sen}2\beta \cos 2\theta_1 + \text{sen}2\theta_1 (1-\cos 2\beta)}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (93)$$

Para  $k = 1$  e  $i = 2$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_2(Q)}{8\pi\bar{G}} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+4\pi-2\beta} = \\ &= \frac{u_2(Q)}{8\pi\bar{G}} \left\{ -\frac{\text{sen}2\beta \text{sen}2\theta_1 + \cos 2\theta_1 (1-\cos 2\beta)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (94)$$

Finalmente, para  $k = 2$  e  $i = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_1(Q)}{8\pi\bar{G}} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+4\pi-2\beta} = \\ &= \frac{u_1(Q)}{8\pi\bar{G}} \left\{ -\frac{\text{sen}2\beta \text{sen}2\theta_1 + \cos 2\theta_1 (1-\cos 2\beta)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (95)$$

Considerando  $k = 1$ , substitui-se as equações (88), (90), (92) e (94) em (77) obtendo os seguintes valores para os termos livres:

$$C_{11} = \frac{\beta}{2\pi} + \left( \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} + \frac{\bar{E}_1 (2-3\nu')}{4\bar{G}(1-\nu')} \left( 1 - \frac{v_1}{\nu} \right) \right) \left( 1 - \frac{\beta}{2\pi} \right) + \left( \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} - 1 + \frac{\bar{E}_1 (1-\nu')}{2\bar{G}} \left( 1 - \frac{v_1}{\nu} \right) \right) \left( \frac{\cos 2\theta_1 \text{sen} 2\beta + \text{sen} 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (96a)$$

$$C_{12} = \left[ \frac{1}{8\pi(1-\nu')} \left( 1 - \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \right) - \frac{\bar{E}_1}{16\pi\bar{G}} \left( 1 - \frac{v_1}{\nu} \right) \right] [-\text{sen} 2\theta_1 \text{sen} 2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)] \quad (96b)$$

Considerando  $k = 2$ , substitui-se as equações (89), (91), (93) e (95) em (2.77) obtendo-se:

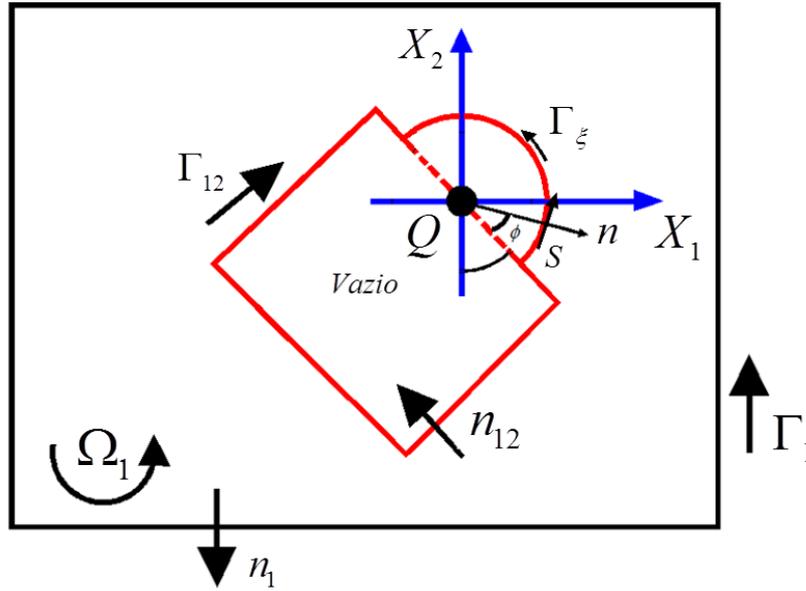
$$C_{22} = \frac{\beta}{2\pi} + \left( \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} + \frac{\bar{E}_1 (2-3\nu')}{4\bar{G}(1-\nu')} \left( 1 - \frac{v_1}{\nu} \right) \right) \left( 1 - \frac{\beta}{2\pi} \right) + \left( \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} - 1 + \frac{\bar{E}_1 (1-\nu')}{2\bar{G}} \left( 1 - \frac{v_1}{\nu} \right) \right) \left( \frac{\cos 2\theta_1 \text{sen} 2\beta + \text{sen} 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (97a)$$

$$C_{21} = \left[ \frac{1}{8\pi(1-\nu')} \left( 1 - \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \right) - \frac{\bar{E}_1}{16\pi\bar{G}} \left( 1 - \frac{v_1}{\nu} \right) \right] [-\text{sen} 2\theta_1 \text{sen} 2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)] \quad (97b)$$

#### 2.4.5 Termo Livre para Equação Integral do Deslocamento de um Ponto Sobre a Interface da Matriz com um Vazio e Não Coincidente com um Canto

A Figura 6 a seguir ilustra para este caso o ponto de colocação  $\mathbf{Q}$  situado numa interface entre a matriz (descrito pelo domínio  $\Omega_1$ ) e um vazio. Nesse caso, problemas de singularidade ocorrem nos elementos que discretizam as interfaces da matriz com vazios. O ponto  $\mathbf{Q}$  está sobre a interface do domínio  $\Omega_1$  com o vazio, ou seja:  $\mathbf{E}(\mathbf{Q})=\mathbf{E}1=\mathbf{E}$ ;  $\mathbf{v}(\mathbf{Q})=\mathbf{v}1=\mathbf{v}$ .

Figura 6 - Ponto de colocação sobre interface matriz-vazio



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Considerando-se o procedimento descrito no item 2.4.1., a equação (3=2.40) escrita em  $Q$  se torna:

$$\begin{aligned}
 u_k(Q) = & \int_{\Gamma_1} (u_{ki}^*(Q, P) p_i(P)) d\Gamma - \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{E}} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{\text{varios}}} \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{E}} \frac{\nu_1}{\nu} \left[ \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{1j} - \bar{\Gamma}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{1j} \right] - \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{E}} \frac{\nu_1}{\nu} \left[ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_\xi \right] + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \frac{\bar{\bar{E}}_j}{\bar{E}} \frac{\nu_j}{\nu} - \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{E}} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{1j} - \bar{\bar{E}}_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \int_{\Gamma_1} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \bar{\bar{E}}_j \left( 1 - \frac{\nu_j}{\nu} \right) - \bar{\bar{E}}_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{j1} + \\
 & + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{\bar{E}}_S \left( 1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \left[ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_S + \Omega_\xi} (u_i(P) \varepsilon_{kij}^*(Q, P)) d\Omega_S \right] \quad (98)
 \end{aligned}$$

Analogamente como no caso desenvolvido no item 2.4.2., as integrais da equação (98) sobre o contorno  $\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}$  com o limite  $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$ , resultam em seus valores

principais e a integral sobre o domínio infinitesimal se anula. Restando assim, apenas as integrais sobre o contorno infinitesimal para serem analisadas.

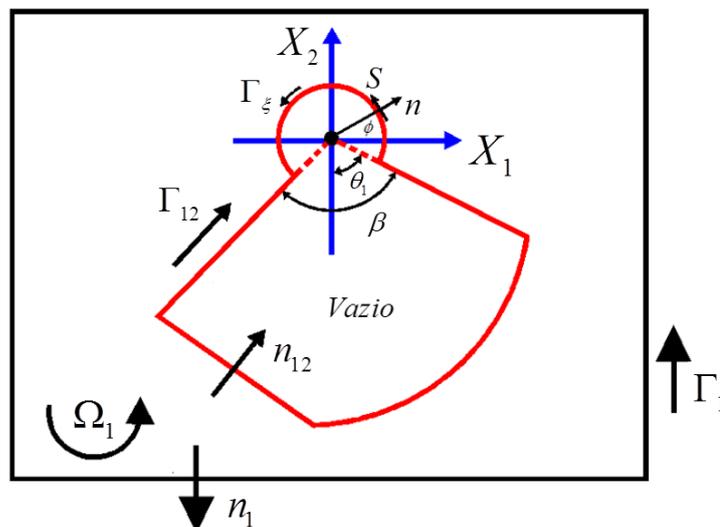
Ao observar a equação (98), pode-se constatar que a expressão fundamental que está envolvida pela integral ao longo da interface da matriz com um vazio é dada pela força de superfície fundamental. Os valores da mesma já foram calculados quando  $k$  e  $i$  variando de 1 a 2 podendo ser observadas através das equações (69a), (69b) e (69c). Portanto, considerando  $k = 1$ , substituem-se as equações (71) e (73) em (98) chegando-se aos mesmos valores dos termos livres definidos pelas equações (75). Considerando  $k = 2$ , substituem-se as equações (72) e (74) em (98), obtendo-se os mesmos termos livres definidos nas equações (76). Assim, os vetores dos termos livres para este caso se tornam:

$$\{C_{1i}\}^T = \left\{ \frac{1}{2} \quad 0 \right\} \quad (99a)$$

$$\{C_{2i}\}^T = \left\{ 0 \quad \frac{1}{2} \right\} \quad (99b)$$

#### 2.4.6 Termo Livre para Equação Integral do Deslocamento de um Ponto Sobre a Interface da Matriz com um Vazio e Coincidente com um Canto

Figura 7 - Ponto de colocação sobre a interface matriz-vazio (canto)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A

Figura 7 ilustra para este caso o ponto de colocação  $Q$  situado no canto da interface entre a matriz (descrito pelo domínio  $\Omega_1$ ) e um vazio. A equação integral que representa este caso é a mesma para o problema do item 2.4.5. O processo é análogo ao desenvolvido no item 2.4.5, porém  $\beta \neq \pi$ . Portanto, os termos livres nesse caso podem ser obtidos da mesma forma que o item anterior, mudando-se os limites de integração de  $0 \leq \phi \leq \pi$  para  $0 \leq \phi \leq 2\pi - \beta$ .

Trabalhando a expressão da força de superfície fundamental,  $p_{ki}^*(Q, P)$  e os mesmos processos de cálculo utilizados nos itens anteriores, tem-se o seguinte para  $k = 1$  e  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_1(Q)}{4\pi(1-\nu')} \left[ (1-2\nu') \phi \Big|_0^{2\pi-\beta} + \left( u - \frac{\text{sen}2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi-\beta} \right] = \\ &= u_1(Q) \left[ \frac{\beta}{2\pi} - 1 - \left( \frac{\cos 2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \right] \end{aligned} \quad (100)$$

Para  $k = 2$  e  $i = 2$ , chega-se à:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_2(Q)}{4\pi(1-\nu')} \left[ (1-2\nu') \phi \Big|_0^{2\pi-\beta} + \left( u + \frac{\text{sen}2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi-\beta} \right] = \\ &= u_2(Q) \left[ \frac{\beta}{2\pi} - 1 + \left( \frac{\cos 2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \right] \end{aligned} \quad (101)$$

Para  $k = 1$  e  $i = 2$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_2(Q)}{4\pi(1-\nu')} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+4\pi-2\beta} = \\ &= u_2(Q) \left( -\frac{\text{sen}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \end{aligned} \quad (102)$$

Finalmente, para  $k = 2$  e  $i = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_1(Q)}{4\pi(1-\nu')} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+4\pi-2\beta} = \\ &= u_1(Q) \left( -\frac{\text{sen}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \end{aligned} \quad (103)$$

Considerando  $k = 1$ , substitui-se as equações (100) e (102) em (98) chega-se aos seguintes valores dos termos livres:

$$C_{11} = 1 - \frac{\beta}{2\pi} + \left( \frac{\cos 2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1 (\cos 2\beta - 1)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (104a)$$

$$C_{12} = - \left( \frac{\cos 2\theta_1 \text{sen}2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (104b)$$

Considerando  $k = 2$ , substitui-se as equações (101) e (103) em (98) obtendo-se:

$$C_{22} = 1 - \frac{\beta}{2\pi} - \left( \frac{\cos 2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1 (\cos 2\beta - 1)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (105a)$$

$$C_{21} = - \left( \frac{\cos 2\theta_1 \text{sen}2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (105b)$$

### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO ÀS EQUAÇÕES INTEGRAIS

#### 3.1 Introdução

A solução exata de um problema, obtida através da solução analítica das equações integrais, é restrita a poucos casos. Sendo assim, a introdução de um método numérico é imprescindível para a resolução do problema. O método utilizado neste trabalho é o MEC (ver em Fernandes (2005) para melhores esclarecimentos).

O MEC consiste em transformar as equações integrais que regem o problema em questão, em equações algébricas através da divisão do contorno em segmentos, estes denominados elementos de contorno. As variáveis são aproximadas nos elementos por funções interpoladoras. O valor das variáveis ao longo do elemento é definido em função de pontos previamente escolhidos, onde estes pontos são denominados de nós ou pontos nodais. Sendo assim, a equação integral transforma-se em equação algébrica escrita em função dos valores das variáveis dos nós do contorno denominados de valores nodais.

A discretização da região de domínio no MEC é necessária quando as equações integrais, envolvendo o domínio, englobam incógnitas do problema. Sendo assim, essa integral pode ser resolvida através da discretização do domínio em células, nas quais as variáveis incógnitas são aproximadas por funções interpoladoras.

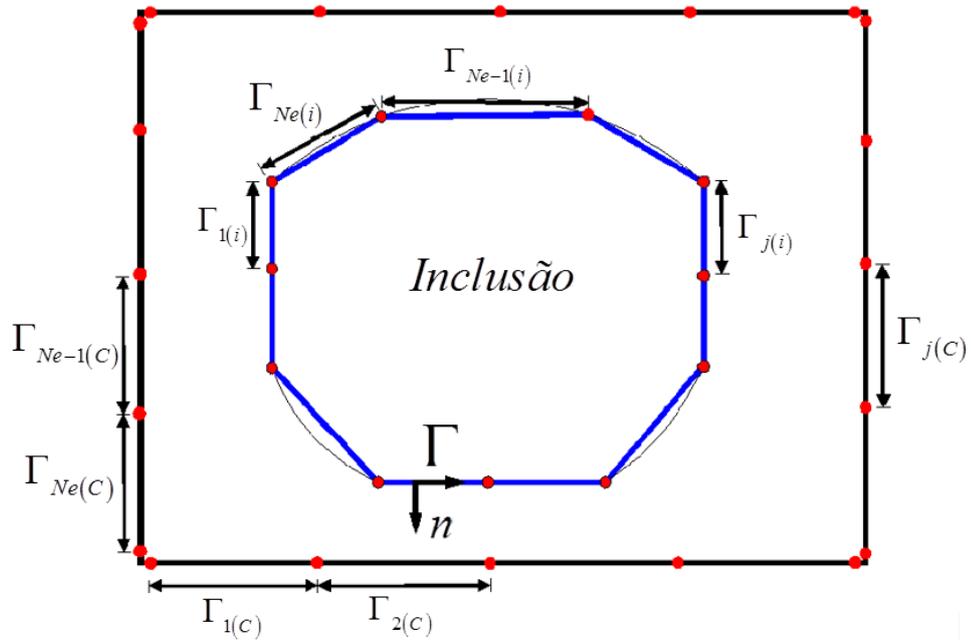
#### 3.2 Discretização do Contorno e Interfaces em Elementos

A discretização das equações integrais sobre o contorno e as interfaces é obtida através da divisão deste contorno (contorno externo e interfaces) em elementos (ver Figura 8 onde o contorno foi discretizado  $N_{e(c)}$  elementos e as interfaces em  $N_{e(i)}$  elementos). A geometria do elemento pode ser aproximada por uma função qualquer, sendo que a quantidade e a forma destes elementos escolhidos representem adequadamente o contorno real estudado, sempre procurando manter a forma do original (não discretizado).

A Figura 8 demonstra como é feito o processo de discretização do contorno externo e interfaces. Nesse trabalho, a geometria dos elementos será representada

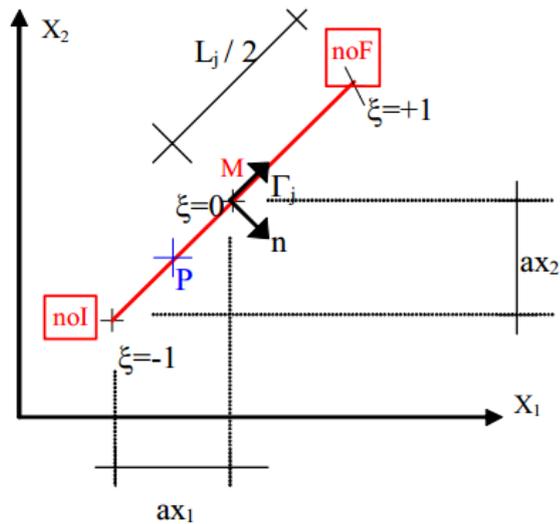
por uma função linear, ver Figura 9. Portanto, há necessidade de dois pontos nodais para a caracterização do elemento (veja Figura 8). Já a discretização do domínio em células será tratada mais adiante ainda neste capítulo.

Figura 8 - Discretização do contorno externo e da interface em elementos



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 9 - Geometria do elemento aproximada por função linear



Fonte: (FERNANDES, 2005)

onde: **noI** – nó inicial do elemento; **noF** – nó final do elemento; **M** – ponto do meio do elemento;  $L_j$  – é o comprimento do elemento  $j$ ;  $\mathbf{n}$  – é a direção normal ao contorno  $\Gamma_j$ .

O contorno do elemento  $\Gamma_j$  e a coordenada homogênea  $\xi$  variam da seguinte forma:

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad (106)$$

$$-\frac{L_j}{2} \leq \Gamma_j \leq \frac{L_j}{2} \quad (107)$$

Como as integrais são resolvidas numericamente, é conveniente expressar a variável  $\Gamma$  e as coordenadas cartesianas ( $X_1^P$  e  $X_2^P$ ) de um ponto  $P$  qualquer do elemento, em função de coordenada local homogênea  $\xi$ , como é mostrado na Figura 9. Assim, tem-se as seguintes relações:

$$\Gamma_j = \xi \frac{L_j}{2} \quad (108)$$

$$X_1^P = X_1^M + \xi ax_1 \quad (109a)$$

$$X_2^P = X_2^M + \xi ax_2 \quad (109b)$$

onde  $X_i^P$  é a coordenada na direção  $i$  do ponto  $P$  (com  $i = 1, 2$ ) e  $X_i^M$  corresponde à coordenada na direção  $i$  do ponto  $M$  (ponto médio do elemento) e ainda:

$$X_i^M = \frac{(X_i^{noI} + X_i^{noF})}{2} \quad (110)$$

$$ax_i = \frac{(X_i^{noF} - X_i^{noI})}{2} \quad (111)$$

A equação (110) fornece as coordenadas em  $X_1$  e  $X_2$  do ponto médio do elemento. Já a equação (111) fornece a projeção da distância do nó inicial ou nó final até o ponto médio, tanto no eixo  $X_1$ , quanto no eixo  $X_2$ . A Figura 9 ilustra o explicado anteriormente.

Substituindo as equações (110) e (111) nas equações (109a) ou (109b), porém na forma indicial, obtém-se a seguinte equação:

$$X_i^P = X_i^{noI} \left( \frac{1}{2} - \frac{\xi}{2} \right) + X_i^{noF} \left( \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} \right) \quad (112)$$

Na equação anterior, são obtidas duas funções interpoladoras lineares, representadas pelas seguintes expressões:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (113a)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (113b)$$

onde  $\xi$  é a coordenada local homogênea do ponto  $P$ . Assim, transformando a equação (113) para a forma matricial, têm-se:

$$\begin{Bmatrix} X_1^P \\ X_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{noI} \\ X_1^{noF} \\ X_2^{noI} \\ X_2^{noF} \end{Bmatrix} \quad (114)$$

Portanto, a integral ao longo do contorno ou interface é calculada de forma aproximada, com a discretização em um número finito de elementos, sendo que para fazer a integração numérica, a função a ser integrada tem que ser escrita em função de coordenadas homogêneas. Portanto, considerando-se uma integral genérica, tem-se:

$$\int_{\Gamma} F(\Gamma) d\Gamma = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{-L_j/2}^{L_j/2} F(\Gamma_j) d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{Ne} \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \quad (115)$$

### 3.3 Aproximação das Variáveis do Problema

Neste item será mostrado como desenvolve a formulação para a aproximação linear das variáveis do problema. Com a aproximação das variáveis num elemento  $j$  qualquer do contorno, os valores dos deslocamentos  $\{U(P)\}$  e das forças de superfície  $\{P(P)\}$  em um ponto  $P$  qualquer desse elemento são escritos, respectivamente, em função dos valores nodais dos deslocamentos  $\{U\}_j$  e das forças de superfície  $\{P\}_j$  do elemento  $j$  e também da matriz que contém as funções de interpolação. A aproximação linear das variáveis será adotada tanto para aquelas definidas nos elementos do contorno e interface, quanto para os deslocamentos definidos nas células do domínio discretizado, que será tratada no próximo item. Assim, podemos escrever a seguinte expressões para a aproximação das variáveis:

$$\underset{\sim}{U}(P) = \underset{\sim}{\phi}^T(P) \underset{\sim}{U}_j \quad (116)$$

$$\underset{\sim}{P}(P) = \underset{\sim}{\phi}^T(P) \underset{\sim}{P}_j \quad (117)$$

Expandindo as equações anteriores na forma matricial, têm-se:

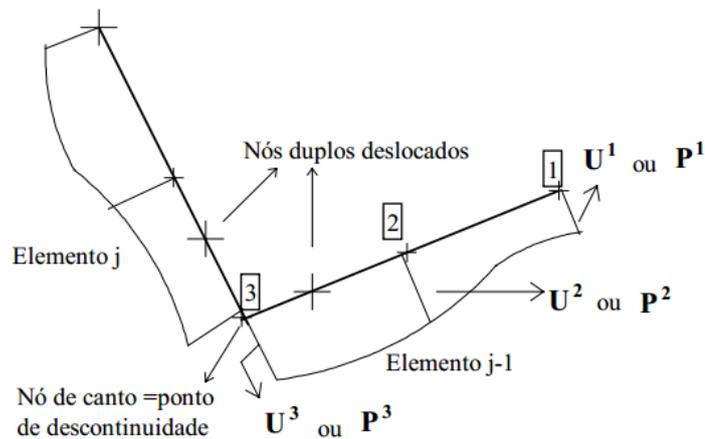
$$\underset{\sim}{U}(P) = \begin{Bmatrix} u_1^P \\ u_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix}_j \\ \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix}_j \end{Bmatrix} \quad (118)$$

$$\underset{\sim}{P}(P) = \begin{Bmatrix} p_1^P \\ p_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \end{Bmatrix}_j \\ \begin{Bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix}_j \end{Bmatrix} \quad (119)$$

onde  $u_i^N$  e  $p_i^N$  são os deslocamentos e as forças de superfície do nó  $N$  na direção  $i$  do elemento  $j$ .

Note que há dois sub-vetores em cada uma das equações (118) e (119). Esses sub-vetores representam o valor das variáveis em cada nó do elemento  $j$ . As funções  $\phi^N$  são dadas pelas equações (113).

Figura 10 - Elementos descontínuos



Fonte: (FERNANDES, 1998)

Note que a microestrutura utilizada neste trabalho possui um formato quadrado, sendo que em cada canto do contorno externo serão admitidos nós duplos a fim de representar a descontinuidade da força de superfície (veja Figura 10). Já no caso dos cantos definidos sobre a interface não serão adotados nós duplos, pois nesse caso tem-se apenas definido o deslocamento no ponto, que é uma variável contínua.

### 3.4 Discretização do Domínio em ‘Células

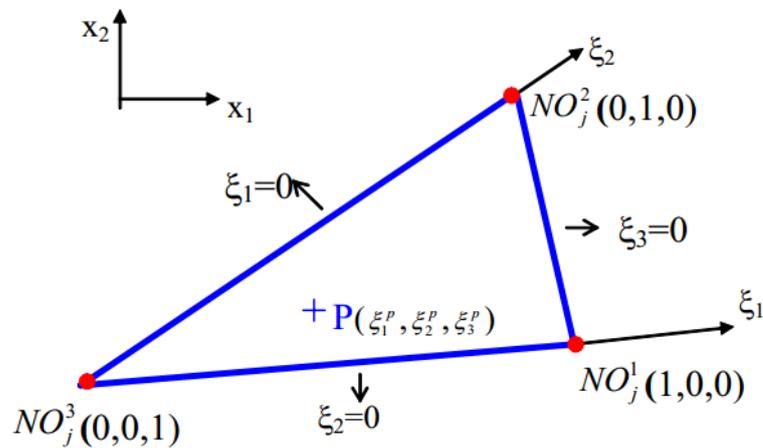
Na equação (40) têm-se uma integral de domínio que envolve os deslocamentos internos da microestrutura. Para resolvê-la, o domínio será discretizado através de células triangulares, onde a aproximação linear será adotada para os deslocamentos.

A expressão que envolve o domínio é a seguinte:

$$\sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left( 1 - \frac{V_S}{V} \right) \int_{\Omega_S} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q,p) d\Omega_S \quad (120)$$

Seja a Figura 11, ilustrando uma célula triangular, cujos nós K1, K2 e K3 são coincidentes com seus vértices e na qual está representado o sistema de coordenadas homogêneas.

Figura 11 - Célula triangular com sistema coordenadas homogêneas



Fonte: (FERNANDES, 2005)

Nesse caso, os deslocamentos de um ponto  $p$  qualquer da célula são obtidos de maneira aproximada a partir dos deslocamentos nodais:

$$\tilde{u}_i = \tilde{\Psi}^T(p) \tilde{u}^{(N)} \quad (121)$$

onde  $\Psi$  é a função interpoladora e  $u^{(N)}$  o vetor dos deslocamentos nodais, dados por:

$$u_{\sim}^{(N)T} = \left\{ u_{\sim}^{(k1)} \quad u_{\sim}^{(k2)} \quad u_{\sim}^{(k3)} \right\} = \left\{ u_1^{k1} \quad u_2^{k1} \quad u_1^{k2} \quad u_2^{k2} \quad u_1^{k3} \quad u_2^{k3} \right\} \quad (122)$$

$$\Psi_{\sim}^T = \begin{bmatrix} \xi_1^p & 0 & \xi_2^p & 0 & \xi_3^p & 0 \\ 0 & \xi_1^p & 0 & \xi_2^p & 0 & \xi_3^p \end{bmatrix} \quad (123)$$

Na equação (123), as coordenadas homogêneas  $\xi_{\alpha}^p$  referentes a um  $p$  qualquer da célula, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1^p \\ \xi_2^p \\ \xi_3^p \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_0^1 & b^1 & a^1 \\ 2A_0^2 & b^2 & a^2 \\ 2A_0^3 & b^3 & a^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ X_1^p \\ X_2^p \end{Bmatrix} \quad (124)$$

onde:

$$a^{\alpha} = X_1^k - X_1^j \quad \alpha = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2 \quad (125)$$

$$b^1 = X_2^j - X_2^k \quad (126)$$

$$2A_0^{\alpha} = X_1^j X_2^k - X_1^k X_2^j \quad (127)$$

A área da célula, no formato de um triângulo, possui área dada por:

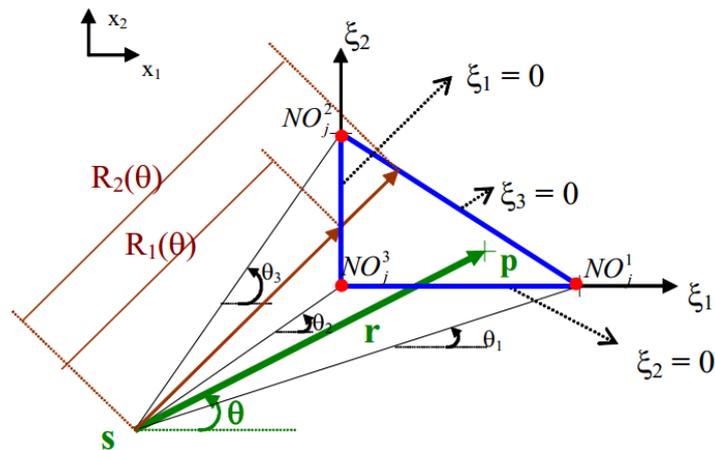
$$A = 0,5(b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (128)$$

A integração sobre cada célula pode ser feita através da fórmula de quadratura de Gauss para domínios triangulares a partir das coordenadas homogêneas. Devido à natureza das funções envolvidas, é necessário um grande número de pontos de integração para se obter uma precisão aceitável. Em consequência da dificuldade citada, adota-se um esquema semi-analítico de

integração, utilizado por Telles e Brebbia (1981) e Venturini (1982), no qual apresentam melhores resultados.

Um sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta)$  é adotado para poder calcular a integral sobre a coordenada  $r$ . O sistema é centrado no ponto de carregamento  $\mathbf{q}$ , conforme a Figura 12.

Figura 12 - Sistema de coordenadas cilíndricas nas células triangulares



Fonte: (FERNANDES, 2005).

As relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas  $(X_1^p, X_2^p)$  e polares  $(r, \theta)$  do ponto  $\mathbf{p}$ , considerando a origem do sistema em  $\mathbf{q}$ , são dadas por:

$$X_i(\mathbf{p}) = X_i(\mathbf{q}) + rr_{,i} \quad i = 1, 2 \quad (129)$$

sendo  $r_{,1} = \cos \theta$  e  $r_{,2} = \sin \theta$

Portanto, para um nó  $\alpha$  da célula, têm-se:

$$\xi_\alpha^p = \xi_\alpha^q + \xi_\alpha^r \quad (130)$$

sendo  $\xi_\alpha^q$  as coordenadas homogêneas relativas ao ponto  $\mathbf{q}$  e  $\xi_\alpha^r$  relativas ao raio  $r$ , têm-se:

$$\xi_{\alpha}^q = \frac{1}{2A} (2A_0^{\alpha} + b^{\alpha} X_1^q + a^{\alpha} X_2^q) \quad (131)$$

$$\xi_{\alpha}^r = \frac{r}{2A} (b^{\alpha} \cos \theta + a^{\alpha} \text{sen} \theta) \quad (132)$$

A equação (130) na forma matricial é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1^p \\ \xi_2^p \\ \xi_3^p \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_0^1 & b^1 & a^1 \\ 2A_0^2 & b^2 & a^2 \\ 2A_0^3 & b^3 & a^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ X_1^s \\ X_2^s \end{Bmatrix} + \frac{r}{2A} \begin{bmatrix} b^1 & a^1 \\ b^2 & a^2 \\ b^3 & a^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen} \theta \end{Bmatrix} \quad (133)$$

A função de aproximação dos deslocamentos foi definida anteriormente. Portanto, para dar continuidade ao trabalho, será demonstrado como é feito o cálculo das integrais de domínio.

O domínio da microestrutura é discretizado em  $N_{cel}$  células e aproximando os deslocamentos nas mesmas, através da equação (121), a equação integral (120) é dada da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_S} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q,p) d\Omega_S = \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \left[ \int_{\Omega_{cel}} \tilde{k}^*(q,p) \tilde{\psi}^T(p) d\Omega_{cel} \right] \tilde{u}_{cel}^{(N)} \quad (134)$$

Onde  $\tilde{k}^*(q,p) = \{ \varepsilon_{k1j,j}^*(q,p) \quad \varepsilon_{k2j,j}^*(q,p) \}$ ;  $\tilde{\psi}$  é a função de interpolação linear dada pela equação (123).

Denomina-se de  $e_i^{cel}(q)$  a integral sobre cada célula genérica  $\Omega_{cel}$ , que aparece na equação (134). Assim, a partir de  $e_i^{cel}(q)$ , determinam-se seis coeficientes, pois a componente de deslocamento é dada para duas direções (u1 e u2) em cada nó da célula.

Dado um determinado coeficiente relativo a um nó  $\alpha$  e à componente de deslocamento na direção i, a equação de  $e_i^{cel}(q)$  possui a seguinte forma:

$$e_i^{cel(\alpha)}(q) = \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij,j}^*(q,p) \xi_\alpha^p(p) d\Omega_S \quad (135)$$

Na equação (135) são substituídas a expressão de  $\varepsilon_{kij,j}^*(q,p)$ , dada pela equação (38), a coordenada homogênea  $\xi_\alpha^p$ , dada pela equação (130). As expressões de  $r_{,k}$  e  $r_{,i}$ , que aparecem na equação de  $\varepsilon_{kij,j}^*(q,p)$ , são funções apenas do ângulo  $\theta$ , indicado na Figura 12.

Trocando o diferencial de domínio da seguinte forma:  $d\Omega_{cel} = r dr d\theta$ , chega-se a seguinte integral:

$$e_i^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \int_{\theta} \int_r (\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}) \frac{1}{r^2} \left[ \xi_\alpha^q + \frac{r}{2A} (b^\alpha \cos \theta + a^\alpha \sin \theta) \right] r dr d\theta \quad (136)$$

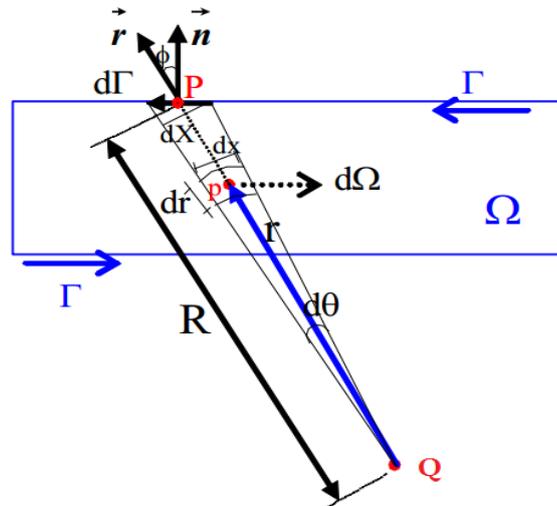
onde  $r_{,i}$  são os co-senos diretores de  $\mathbf{r}$  e  $\delta_{ik}$  é o delta de Kronecker.

A integração em relação à  $r$  é feita na equação (3.31), obtendo:

$$e_i^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \int_{\theta} (\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}) \left[ \ln R \xi_\alpha^q + \frac{R}{2A} (b^\alpha \cos \theta + a^\alpha \sin \theta) \right] d\theta \quad (137)$$

A integração numérica pode ser feita em relação à  $\theta$ . Porém, a fim de facilitar o cálculo da integral e também o emprego da técnica de sub-elementos, a equação (137) será transformada em integral ao longo do contorno da célula. A transformação de coordenada em função do ângulo para função do contorno da célula é desenvolvida seguindo o modelo proposto na Figura 13. Nela é representado um domínio qualquer para ajudar na transformação das coordenadas.

Figura 13 - Integração ao longo do contorno de um domínio qualquer



Fonte: (FERNANDES, 2005)

A partir da Figura 13, pode-se deduzir que:

$$d\Omega = dr dx = r dr d\theta \quad (138)$$

$$d\theta = \frac{dx}{R} = \frac{\cos(\phi) d\Gamma}{R} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma \quad (139)$$

Aplicando a transformação de coordenada desenvolvida na equação (139) para a equação (137), tem-se:

$$e_i^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \int_{\Gamma} (\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}) \left[ \ln R_{\xi_{\alpha}^q} + \xi_{\alpha}^R \right] \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad (140)$$

onde  $\xi_{\alpha}^R$  é dado pela expressão (132), fazendo-se  $r = R$ .

No MEC as células possuem o formato triangular. Portanto, a mesma possui três lados. Assim, calcula-se a integral ao longo de cada um dos três lados da célula. A equação integral (3.35) é escrita da seguinte forma:

$$e_i^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i} (\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}) \left[ \ln R_{\xi_{\alpha}^q} + \xi_{\alpha}^R \right] \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_i \quad (141)$$

A equação (141) deve ser integrada numericamente através da fórmula de quadratura de Gauss, sendo nesse trabalho empregada a técnica de sub-elementos, que divide automaticamente o elemento em sub-elementos, quando o ponto de colocação está muito próximo do elemento a ser integrado. Note que isso é feito porque quanto mais perto estiver o ponto de colocação do elemento a ser integrado, maior será a influência desse no valor da variável do ponto considerado. Para isso, faz-se a mudança de coordenada cartesianas para homogêneas considerando a equação (108).

Portanto, a equação integral (3.36) é calculada da seguinte forma:

$$e_i^{cel(\alpha)}(q) = \sum_{l=3}^3 \sum_{ks=1}^{N_{sub}} \sum_{IG=1}^{N_g} \frac{\nu a_{ks}}{8\pi G(1-\nu)} (\delta_{ik} - 2r_i r_k) \left[ \ln R \xi_\alpha^q + \xi_\alpha^R \right] \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} W_{IG} \quad (142)$$

onde  $N_{sub}$  é o número de sub-elementos em que o elemento é dividido,  $N_g$  é o número de pontos de Gauss,  $a_{ks}$  é o comprimento do sub-elemento  $ks$  e  $W_{IG}$  é o fator de ponderação do ponto de Gauss  $IG$ .

As coordenadas adimensionais  $\xi_\alpha^q$  e  $\xi_\alpha^R$  da equação (142) são calculadas através do seguinte procedimento: as coordenadas cartesianas do ponto  $\mathbf{p}$  de integração são obtidas a partir da coordenada adimensional  $\eta_{IG}$  do ponto de Gauss e das coordenadas cartesianas dos nós do sub-elemento. Portanto, com as coordenadas cartesianas de  $\mathbf{p}$ , finalmente calculam-se suas coordenadas adimensionais  $\xi_\alpha^q$  e  $\xi_\alpha^R$ , utilizando as equações (131) e (132).

No processo de discretização da microestrutura, há células que possuem um de seus lados coincidentes ou com o contorno ou com uma interface. Assim, os nós que estão presentes nesse lado da célula, possuem coeficientes oriundos da integração das células e também como pertencentes à elementos de contorno ou interface. Estes coeficientes são somados aos respectivos nós que já foram definidos na discretização em elementos da microestrutura. Não havendo, nesse caso, a necessidade do aumento de variáveis no problema. Portanto, quando o nó estiver sobre o contorno ou interface, somam-se diretamente nas colunas da matriz  $H$  os coeficientes relativos a  $u_1$  e  $u_2$ , resultantes da integração das células.

Na equação (41), que expressa a derivada do deslocamento  $u_{k,m}$ , há uma expressão integral envolvendo o domínio. Essa expressão deve ser trabalhada conforme foi feito com a integral de domínio da equação (40).

A expressão integral da equação (41) é a seguinte:

$$\sum_{S=1}^{N_s} \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu}\right) \int_{\Omega_S} u_i(p) \varepsilon_{kij,jm}^*(q,p) d\Omega_S \quad (143)$$

Cuja expressão fundamental contida na equação anterior é dada pela equação (49).

Adotando o mesmo processo e aproximações utilizados na equação (121), um coeficiente relativo a um nó  $\alpha$  da célula é calculado numericamente a longo dos três lados da mesma da seguinte maneira:

$$\bar{e}_i^{cel(\alpha)}(q) = \sum_{l=3}^3 \sum_{ks=1}^{N_{sub}} \sum_{IG=1}^{N_g} \frac{\nu' a_{ks}}{4\pi\bar{G}(1-\nu')} \left( \frac{\partial r}{\partial m} (\delta_{ik} - 4r_{,i} r_{,k}) + r_{,1} m_k + r_{,k} m_i \right) \left[ -\xi_\alpha^q + \xi_\alpha^R \ln R \right] \frac{1}{R^2} \frac{\partial r}{\partial n} W_{IG} \quad (144)$$

No anexo A está descrito a relação entre deformação e deslocamentos dada pela equação (16). Como os deslocamentos possuem variação linear na célula, as deformações têm variação constante e conseqüentemente, as forças de membrana  $N_{ij}$  também são constantes na célula. Sendo a aproximação constante, no cálculo das forças  $N_{ij}$  necessita-se de apenas um nó  $n$  na célula, que será definido no seu centro. Além disso, o problema de equilíbrio do EVR, a ser descrito no próximo item, é resolvido em termos de deslocamentos e, portanto, a partir das correções de deslocamentos devem-se determinar as correções de deformações para que as tensões sejam obtidas e a equação de equilíbrios do EVR verificada. Logo, tem-se a necessidade de definir a relação entre as deformações e deslocamentos em um ponto  $p$  qualquer da célula, que é dada por:

$$\{\varepsilon_p\}_{cel} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_p = [L] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_p \quad (145)$$

Considerando as equações (121) a (123), a equação (145) se torna:

$$\{\varepsilon_p\}_{cel} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^p & 0 & \xi_2^p & 0 & \xi_3^p & 0 \\ 0 & \xi_1^p & 0 & \xi_2^p & 0 & \xi_3^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{k1} \\ u_2^{k1} \\ u_1^{k2} \\ u_2^{k2} \\ u_1^{k3} \\ u_2^{k3} \end{Bmatrix} \quad (146)$$

Ou seja:

$$\{\varepsilon_p\}_{cel} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{k1} \\ u_2^{k1} \\ u_1^{k2} \\ u_2^{k2} \\ u_1^{k3} \\ u_2^{k3} \end{Bmatrix} = [B]_{cel} \{U\}^N \quad (147)$$

Considerando a equação matricial (124), a matriz  $[B]$  é dada por:

$$[B]_{cel} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad (148)$$

### 3.5 Transformação das Equações Integrais em Equações Algébricas

Na maioria das soluções elásticas através do MEC, deve-se discretizar apenas o contorno do domínio estudado. Porém, no caso estudado nesse trabalho, há necessidade também de discretizar as interfaces em elementos e o domínio em células, já que as variáveis do problema também são definidas nesses locais. Fazendo isso, transformam-se as equações integrais em equações algébricas.

Neste trabalho, a solução da chapa é obtida no contexto da análise em multiescala, onde são prescritos deslocamentos em todos os nós do contorno externo devido à imposição para a microestrutura da deformação oriunda da macroescala. Como a deformação imposta no contorno da microestrutura é constante, os deslocamentos possuem variação linear. Através das coordenadas dos pontos do contorno externo calculamos os valores de deslocamento para cada ponto do mesmo. Sendo assim, as incógnitas no contorno externo estão relacionadas com as forças de superfície. Para os nós de canto é necessária a utilização de nós duplos, pois o vetor normal de um elemento anterior ao canto difere do valor do vetor normal ao elemento subsequente. Porém, não há necessidade de se adotar nós duplos em cantos sobre a interface porque nas interfaces têm-se apenas deslocamentos como incógnitas, como já foi descrito anteriormente.

A equação (50) do deslocamento  $u_k$  de um ponto Q sobre o contorno ou uma interface pode ser escrita, ainda sem introduzir nenhuma aproximação, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 C_{k1}u_1(Q) + C_{k2}u_2(Q) &= \int_{\Gamma_1} u_k^*(Q, P) P(P) d\Gamma - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{v} \int_{\Gamma_1} p_k^*(Q, P) U(P) d\Gamma + \\
 &- \sum_{j=1}^{N_{varios}} \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{v} \int_{\Gamma_{1j}} p_k^*(Q, P) U(P) d\Gamma_{1j} - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \int_{\Gamma_1} \varepsilon_k^*(Q, P) U(P) d\Gamma + \\
 &- \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{v_j}{v} - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{v} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} p_k^*(Q, P) U(P) d\Gamma_{j1} + \\
 &- \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \varepsilon_k^*(Q, P) U(P) d\Gamma_{j1} +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{S=1}^{N_S} \bar{\bar{E}}_S \left( 1 - \frac{v_S}{v} \right) \int_{\Omega_S} k_k^*(q, p) U_{\sim}(p) d\Omega_S \quad (149)$$

onde:

$$p_k^*(Q, P) = \{ p_{k1}^*(Q, P) \quad p_{k2}^*(Q, P) \} \quad (150)$$

$$u_k^*(Q, P) = \{ u_{k1}^*(Q, P) \quad u_{k2}^*(Q, P) \} \quad (151)$$

$$\varepsilon_k^*(Q, P) = \{ \varepsilon_{k1}^*(Q, P) \quad \varepsilon_{k2}^*(Q, P) \} \quad (152)$$

$$k_k^*(q, p) = \{ \varepsilon_{k1j.j}^*(q, p) \quad \varepsilon_{k2j.j}^*(q, p) \} \quad (153)$$

$$U_{\sim}^T(P) = \{ u_1^P \quad u_2^P \} \quad (154)$$

$$U_{cel}^T(p) = \{ u_1^p \quad u_2^p \} \quad (155)$$

$$P_{\sim}^T(P) = \{ p_1^P \quad p_2^P \} \quad (156)$$

Nos itens anteriores deste capítulo foi desenvolvida toda a formulação da aproximação das variáveis nos elementos e nas células. Assim, fazendo-se a discretização do contorno e interfaces em  $N_e$  elementos e do domínio em células e substituindo-se as variáveis por suas aproximações, a equação (149) é calculada de forma aproximada. A mesma pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_{k1} u_1(Q) + C_{k2} u_2(Q) &= \sum_{j=1}^{N_e} \left[ \int_{\Gamma_j} u_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \right] P_j + \\ &- \frac{\bar{\bar{E}}_1}{E} \frac{v_1}{v} \sum_{j=1}^{N_e} \left[ \int_{\Gamma_j} p_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \right] U_j - \bar{\bar{E}}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \sum_{j=1}^{N_e} \left[ \int_{\Gamma_j} \varepsilon_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j + \right] U_j + \\ &- \sum_{m=1}^{N_{vizios}} \frac{\bar{\bar{E}}_1}{E} \frac{v_1}{v} \sum_{j=1}^{N_e} \left[ \int_{\Gamma_j} p_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_{1j} \right] U_j + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{E}_m}{\bar{E}} \frac{v_m}{v} - \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \right\} \sum_{j=1}^{Ne} \left[ \int_{\Gamma_j} p_k^*(Q, P) \phi^T d\Gamma_{1j} \right] U_j + \\
& - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_m \left( 1 - \frac{v_m}{v} \right) - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \sum_{j=1}^{Ne} \left[ \int_{\Gamma_j} \varepsilon_k^*(Q, P) \phi^T d\Gamma_{1j} \right] U_j + \\
& + \sum_{S=1}^{N_s} \bar{E}_S \left( 1 - \frac{v_S}{v} \right) \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \left[ \int_{\Omega_{cel}} k_k^*(q, p) \psi^T(p) d\Omega_{cel} \right] U_{cel}
\end{aligned} \tag{158}$$

Definindo-se os seguintes vetores, de dimensão  $(1 \times 2N_{nos})$ , pois tem-se duas variáveis em cada nó ( $N_{nos}$  é o número de nós necessários no elemento para a aproximação das variáveis):

$$h_k^j(Q) = \int_{\Gamma_j} p_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \tag{159}$$

$$\bar{h}_k^j(Q) = \int_{\Gamma_j} \varepsilon_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \tag{160}$$

$$g_k^j(Q) = \int_{\Gamma_j} u_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \tag{161}$$

O vetor relacionado às células foi equacionado no item anterior que trata da discretização do domínio, pela equação (135). Portanto, a equação (158) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
C_{k1} u_1(Q) + C_{k2} u_2(Q) &= \sum_{j=1}^{Ne} g_k^j(Q) P_j + \\
& - \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \sum_{j=1}^{Ne} h_k^j(Q) U_j - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \sum_{j=1}^{Ne} \bar{h}_k^j(Q) U_j + \\
& - \sum_{m=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \sum_{j=1}^{Ne} h_k^j(Q) U_j - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{E}_m}{\bar{E}} \frac{v_m}{v} - \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \right\} \sum_{j=1}^{Ne} h_k^j(Q) U_j +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_m \left( 1 - \frac{v_m}{v} \right) - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \sum_{j=1}^{Ne} \bar{h}_k^{N(j)}(\mathcal{Q}) U_j + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left( 1 - \frac{v_S}{v} \right) \sum_{cel=1}^{N_{cel}} e_i^{cel}(\mathcal{Q}) U_{cel}
\end{aligned} \tag{162}$$

O coeficiente que está relacionado às células é dado pela equação (3.30). Já os coeficientes dos vetores dados em (159), (160) e (161) são obtidos pelas seguintes expressões:

$$h_{ki}^{N(j)}(\mathcal{Q}) = \int_{\Gamma_j} p_{ki}^*(\mathcal{Q}, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \tag{163}$$

$$\bar{h}_{ki}^{N(j)}(\mathcal{Q}) = \int_{\Gamma_j} \varepsilon_k^*(\mathcal{Q}, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \tag{164}$$

$$g_{ki}^{N(j)}(\mathcal{Q}) = \int_{\Gamma_j} u_k^*(\mathcal{Q}, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \tag{165}$$

onde  $\mathbf{k}$  é a direção da carga fundamental,  $\mathbf{N}$  é o nó local do elemento  $j$  e  $i$  é a direção (da força fundamental ou do deslocamento fundamental) na qual se calcula o coeficiente.

Logo, a equação (162) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
C_{k1} u_1(\mathcal{Q}) + C_{k2} u_2(\mathcal{Q}) &= \sum_{j=1}^{Ne} g_{ki}^{N(j)}(\mathcal{Q}) p_{i(j)}^N + \\
& - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{v} \sum_{j=1}^{Ne} h_{ki}^{N(j)}(\mathcal{Q}) u_{i(j)}^N - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \sum_{j=1}^{Ne} \bar{h}_k^{N(j)}(\mathcal{Q}) u_{i(j)}^N + \\
& - \sum_{m=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{v} \sum_{j=1}^{Ne} h_{ki}^{N(j)}(\mathcal{Q}) u_{i(j)}^N - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{E}_m}{E} \frac{v_m}{v} - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{v} \right\} \sum_{j=1}^{Ne} h_{ki}^{N(j)}(\mathcal{Q}) u_{i(j)}^N + \\
& - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_m \left( 1 - \frac{v_m}{v} \right) - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \sum_{j=1}^{Ne} \bar{h}_{ki}^{N(j)}(\mathcal{Q}) u_{i(j)}^N +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{S=1}^{N_s} \bar{E}_S \left( 1 - \frac{v_S}{v} \right) \sum_{cel=1}^{N_{cel}} e_i^{cel}(\underline{q}) u_{cel}^N \quad (166)$$

Calculando-se os vetores  $\{h^j\}(\underline{Q})$  (equação 3.54),  $\{\bar{h}^j\}(\underline{Q})$  (equação 160) e  $\{g^j\}(\underline{Q})$  (equação 3.56) de todos os elementos, e ainda, o vetor referente às células do EVR,  $\{e^{cel}\}(\underline{q})$ . Agrupando-se os coeficientes referentes a um mesmo valor nodal e trabalhando a integral de domínio numericamente, escreve-se a equação (166) matricialmente:

$$\begin{aligned} C_{k1} u_1(\underline{Q}) + C_{k2} u_2(\underline{Q}) = & \underline{G}(\underline{Q}) \underline{P} - \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \hat{H}(\underline{Q}) \underline{U} - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \hat{H}(\underline{Q}) \underline{U} + \\ & - \sum_{m=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \hat{H}(\underline{Q}) \underline{U} - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{E}_m}{\bar{E}} \frac{v_m}{v} - \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \right\} \hat{H}(\underline{Q}) \underline{U} + \\ & - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_m \left( 1 - \frac{v_m}{v} \right) - \bar{E}_1 \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \hat{H}(\underline{Q}) \underline{U} + \\ & + \sum_{S=1}^{N_s} \bar{E}_S \left( 1 - \frac{v_S}{v} \right) e(\underline{q}) \underline{U}_{cel} \end{aligned} \quad (167)$$

Para a montagem da equação algébrica final, os vetores  $\underline{U}$  que estão em cada termo da equação (167) são somados e transformados em um único vetor  $\underline{U}$ . Observe que os nós das células sobre o contorno ou interface coincidem com aqueles nós já definidos para os elementos de contorno ou interface. Além disso, os termos livres devem ser somados às respectivas colunas do vetor  $\underline{H}$  referentes ao ponto de colocação.

$$\underline{H}(\underline{Q}) \underline{U} = \underline{G}(\underline{Q}) \underline{P} \quad (168)$$

onde:  $\mathbf{U}$  é o vetor dos valores nodais dos deslocamentos nos pontos internos, do contorno e interfaces;  $\mathbf{P}$  é o vetor dos valores nodais das forças de superfície no contorno externo.

### 3.6 Sistema de Equações

No contorno externo, como já foi descrito, os valores nodais são: duas componentes de deslocamentos no plano ( $u_1$  e  $u_2$ ) e duas forças de superfície ( $p_1$  e  $p_2$ ). Porém, dois destes valores devem ser dados como condições de contorno. Além disso, duas incógnitas de deslocamentos ( $u_1$  e  $u_2$ ) são definidas nas interfaces e nos nós das células. Organizando as equações na forma matricial, tem-se o seguinte sistema de solução em termos dos valores de contorno, interfaces e domínio:

$$\begin{bmatrix} [H]_{CC} & [H]_{Ci} \\ [H]_{iC} & [H]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_C \\ U_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{CC} \\ [G]_{iC} \end{bmatrix} \{P\}_C \quad (169)$$

Na equação (169), o sub-índice  $C$  está relacionado com o contorno externo, enquanto o sub-índice  $i$  está relacionado com valores da interface e domínio. Os vetores  $\{U\}$  e  $\{P\}$  são respectivamente os valores nodais dos deslocamentos e das forças de superfície. A matriz  $[H]$  representa os valores da integração dos elementos do contorno e da interface bem como as células definidas na matriz e nas inclusões, sendo estes relacionados com os deslocamentos. A matriz  $[G]$  já representa os valores da integração dos elementos do contorno, sendo estes relacionados com as forças de superfície.

O sistema pode ser representado na seguinte forma reduzida:

$$HU = GP \quad (170)$$

Este trabalho estuda o comportamento de uma microestrutura heterogênea no contexto da análise em multi-escala. Como já foi descrito anteriormente, os valores da macro-deformação são impostos para os nós do contorno externo da

microestrutura, o que implica em impor como condição de contorno de deslocamentos lineares. Impondo-se as condições de contorno, a equação (169) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -[G]_{cc} & [H]_{ci} \\ -[G]_{ic} & [H]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [P]_c \\ [U]_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[H]_{cc} \\ -[H]_{ic} \end{bmatrix} \{U\}_c \quad (171)$$

O sistema formado pela equação (3.66) pode ser reduzido para a seguinte forma:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (172)$$

onde:  $[A] = \begin{bmatrix} -[G]_{cc} & [H]_{ci} \\ -[G]_{ic} & [H]_{ii} \end{bmatrix}$ ,  $\{X\}$  é o vetor das incógnitas dado pelas forças de superfície no contorno e dos deslocamentos nas interfaces e nós internos:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \{P\}_c \\ \{U\}_i \end{Bmatrix}; \quad \{B\} = \begin{bmatrix} -[H]_{cc} \\ -[H]_{ic} \end{bmatrix} \{U\}_c.$$

Para resolver o problema de equilíbrio do EVR (sua definição será tratada no próximo capítulo), a força normal tem que ser computada para cada célula. Como os deslocamentos têm variação linear na célula, será adotada aproximação constante para estas forças sobre as células, onde três equações de forças normais ( $N_{11}$ ,  $N_{12}$  e  $N_{22}$ ) devem ser escritas para cada ponto central da célula. Essas equações são obtidas através da aplicação da Lei de Hooke, dada pela equação (27) do anexo A, onde as derivadas dos deslocamentos no plano são dadas pela diferenciação da representação da equação integral (40). Escrevendo as equações das forças elásticas ( $N_{ij}$ ) para todas as células, tem-se a seguinte equação algébrica:

$$\{N\} = -\begin{bmatrix} [H']_c & [H']_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_c \\ \{U\}_i \end{Bmatrix} + [G']_c \{P\}_c \quad (172)$$

Após a aplicação das condições de contorno no EVR, a equação (173) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{N\} = \begin{bmatrix} [G']_c & -[H']_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_c \\ \{U\}_i \end{Bmatrix} - [H']_c \{U\}_c \quad (174)$$

Podendo também ser escrita a equação (174) da seguinte forma:

$$\{N\} = -[A']\{X\} + \{B'\} \quad (175)$$

Onde  $[A'] = \begin{bmatrix} -[G']_c & [H']_i \end{bmatrix}$  e  $\{B'\} = -[H']_c \{U\}_c$ .

Substituindo a equação (172) na equação (175), a equação final para as forças normais pode ser dada pela seguinte equação:

$$\{N\} = \{B'\} - [A'] [A]^{-1} \{B\} \quad (176)$$

## 4 FORMULAÇÃO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO NA MICRO-ESCALA

### 4.1 Introdução

Neste trabalho, a microestrutura do material é analisada na escala de grãos e é heterogênea em sua composição. Sua heterogeneidade é causada pela presença de vazios (microfissuras) e/ou inclusões dentro da matriz do material. Qualquer heterogeneidade ou microfissura do material na micro-escala, afeta diretamente a resposta do macro-contínuo. Portanto, a análise de materiais em variadas escalas é muito importante para ter resultados o mais verossímeis possível.

Numa análise multi-escala, deve-se definir um EVR (Elemento de Volume Representativo), que representa a micro-estrutura do material, para cada ponto do macro-contínuo. Assim, o “carregamento” dado à micro-estrutura é definido pela deformação do ponto do macro-contínuo relacionado à mesma. No modelo com o MEC essa deformação é imposta de forma constante aos nós do contorno, na forma de deslocamentos prescritos com variação linear. No entanto, como consequência da heterogeneidade do material, ou seja, diferentes materiais e vazios são definidos no interior da matriz, o campo de deformações não será constante no EVR, surgindo assim, um campo de deslocamentos relacionado ao campo de deformação que não é constante no EVR, denominado de flutuação dos deslocamentos. Portanto, o problema de equilíbrio do EVR, que será descrito nesse capítulo, consiste em encontrar o campo de flutuações dos deslocamentos que satisfaz sua equação de equilíbrio.

Assim, no presente capítulo são apresentados os conceitos de EVR e definidos o campo de deslocamentos no mesmo, assim como sua equação de equilíbrio e o processo iterativo necessário para resolvê-lo. Demonstra-se também como são obtidos os valores homogeneizados das tensões e do tensor constitutivo. Então se definem as condições de contorno em termos das flutuações dos deslocamentos, que são necessárias para resolver o problema de equilíbrio do EVR. Finalizando, o algoritmo para a solução do EVR é apresentado.

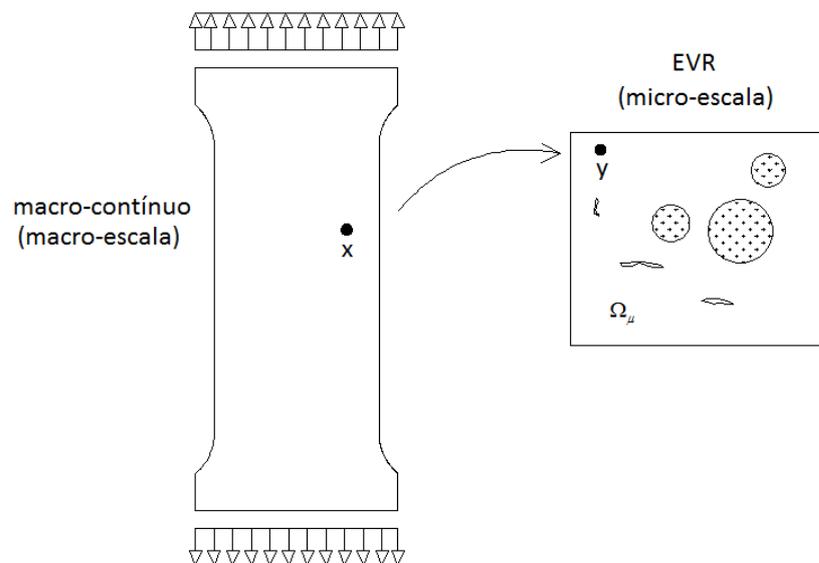
É importante ressaltar que, neste trabalho não se realizam análises em multi-escala. Porém, a análise de microestruturas, denominadas EVR, está dentro deste contexto. Assim, nas análises numéricas dos EVR's, tem-se como objetivo o cálculo

dos valores homogeneizados para as tensões e tensor constitutivo, que são os valores referentes ao ponto do macro-contínuo representado pelo EVR em questão, numa abordagem em multi-escala, a fim de verificar o problema de equilíbrio do macro-contínuo (estrutura analisada).

#### 4.2 Análise em Multi-Escala e Definição do EVR

O estudo deste trabalho é analisar e modelar uma microestrutura heterogênea no contexto da análise em multiescala. Portanto, a seguir serão dadas as principais definições que são necessárias para se fazer a análise em multiescala. Seja a Figura 14, onde se têm dois domínios de estudos correlacionados entre si: o macrocontínuo e a microestrutura do material.

Figura 14 - Definição de macro-contínuo e microestrutura



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para cada ponto do macrocontínuo onde necessita o cálculo das tensões, deve estar relacionado um EVR (Elemento de Volume Representativo), que representa a microestrutura, em nível granular, do macro-contínuo na vizinhança infinitesimal do ponto. Os fenômenos dissipativos são monitorados individualmente em cada EVR, como surgimento de deformações plásticas ou a formação e propagação de microfissuras. Assim, seja a estrutura (macro-contínuo) sujeita a um carregamento qualquer, que gera deformações em todos os pontos da mesma. As

deformações que estão atuando em cada ponto do macrocontínuo são impostas à microestrutura (EVR) que representa esse ponto do macrocontínuo, como condição de contorno. Porém, essa condição de contorno é aplicada apenas no contorno externo do EVR, pois no seu domínio (nós de interface e internos) há apenas incógnitas. Posteriormente, estuda-se o comportamento do material no EVR devido à solicitação aplicada. Após resolver o problema de equilíbrio do EVR, princípios de homogeneidade e conceito de média volumétrica são considerados, a fim de se obter os valores homogeneizados para as tensões e o tensor constitutivo do material do EVR, que correspondem aos valores das tensões e do tensor constitutivo do ponto do macro. Com as tensões e a relação constitutiva atualizada para todos os EVRs da estrutura, um novo incremento de carga é aplicado à estrutura, obtendo-se assim novos campos de deformações à serem inseridos nos EVRs. Portanto, a análise na micro-escala alimenta aquela na macro-escala e vice-versa. Note que nesse trabalho não será feita a análise multi-escala de uma estrutura, apenas serão calculados os valores homogeneizados para as tensões e o tensor constitutivo de diferentes EVRs, a fim de validar a formulação aqui desenvolvida e em trabalho futuro realizar a análise multi-escala utilizando-se apenas o MEC.

A modelagem em multi-escala adotada nesse trabalho segue os mesmos princípios da formulação desenvolvida em Souza Neto et al (2015) e Souza Neto e Feijóo (2006). Estes princípios também estão presentes nos dois artigos da professora Gabriela Rezende Fernandes, em Fernandes et al (2015 a, b) onde devem ser observados os seguintes aspectos:

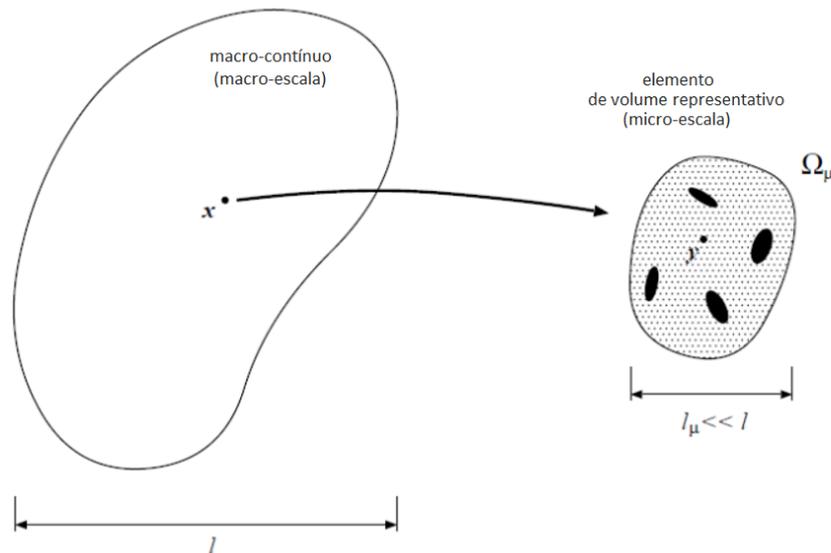
- 1- A deformação num ponto qualquer do macro é dada pela média volumétrica da deformação na célula local microscópica de domínio (chamada EVR). O mesmo se aplica a tensão, ou seja: a tensão num ponto qualquer do macro é dada pela média volumétrica da tensão no EVR;
- 2- O equilíbrio do EVR deve ser verificado;
- 3- O princípio da Macro-Homogeneidade de Hill-Mandel deve ser verificado;
- 4- O espaço do campo de flutuações dos deslocamentos cinematicamente admissível do EVR deve ser um sub-espaço do espaço das flutuações de deslocamento que são compatíveis com a hipóteses da média volumétrica das deformações (condição 1 acima).

### 4.3 Tensor de Deformação Homogeneizado

Como o EVR é heterogêneo, ou seja, pode possuir vazios ou inclusões dentro da matriz, deve-se utilizar técnicas de homogeneização para avaliar a tensão e o tensor constitutivo referente ao ponto do macro, que é representado pelo EVR. Quando se definem vazios ou inclusões com diferentes propriedades dentro da matriz, os mesmos afetam diretamente a rigidez e resistência do material, alterando quantidades macroscópicas e mudando significativamente os resultados numéricos.

A letra  $\mathbf{x}$  representa um ponto qualquer do contínuo, ver Figura 15, ou seja, da estrutura considerada na macro-escala e  $\mathbf{y}$  um ponto qualquer do EVR.

Figura 15 - Micro-célula relacionada ao ponto  $\mathbf{x}$  do macro-contínuo



Fonte: (FERNANDES, 2012)

A deformação no ponto  $\mathbf{x}$  do macro-contínuo é dada pela média volumétrica da deformação no EVR, ou seja:

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu(\mathbf{y}) dV \quad (177)$$

onde todos os valores com índice  $\mu$  se referem ao EVR, ou seja:  $V_\mu$  é o volume do EVR,  $\Omega_\mu$  o seu domínio e  $\varepsilon_\mu(\mathbf{x})$  a deformação no mesmo.

A deformação no EVR pode ser dada pela seguinte equação, considerando a relação deformação-deslocamento:

$$\varepsilon_{\mu}(x) = \nabla^S u_{\mu} \quad (178)$$

onde  $\nabla^S$  é o gradiente simétrico do campo de deslocamento  $u_{\mu}$  no EVR.

Assim a equação (177) pode ser escrita como:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \nabla^S u_{\mu} dV \quad (179)$$

Para cada ponto  $x$  do macro está relacionado um EVR. Sendo assim, de forma análoga tem-se que a tensão de um ponto  $x$  do macro é dada por:

$$\sigma(x) = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \sigma_{\mu}(y) dV \quad (180)$$

onde o termo  $\sigma_{\mu}(y)$  representa a tensão em um ponto qualquer do EVR.

O módulo tangente constitutivo homogeneizado é obtido a partir da seguinte relação:

$$D(x) = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial \varepsilon(x)} = \frac{\frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \partial \sigma_{\mu}(y) dV}{\partial \varepsilon(x)} = \frac{\frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \partial f_y(\varepsilon_{\mu}(y)) dV}{\partial \varepsilon(x)} \quad (181)$$

Na equação (181),  $f_y$  é a relação constitutiva dada pelo critério adotado. Porém, como neste trabalho não é adotado nenhum fenômeno dissipativo, a relação constitutiva é dada pela lei de Hooke.

O processo definido nas equações (177) e (180), onde uma quantidade microscópica é transformada em uma quantidade macroscópica, é chamado de homogeneização. Portanto,  $\varepsilon(x)$  (ou simplesmente  $\varepsilon$ ) é a deformação

macroscópica ou homogeneizada e  $\sigma(x)$  (ou simplesmente  $\sigma$ ) a tensão macroscópica ou homogeneizada.

O EVR representado pela Figura 15, pode ser composto por vazios (domínio  $\Omega_\mu^V$ ) e por partes sólidas (domínio  $\Omega_\mu^S$ ). Portanto, tem-se  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^S \cup \Omega_\mu^V$ .

## 4.4 Campo de Deslocamentos

### 4.4.1 Campo de Deslocamentos Cinematicamente Admissível

Para que a equação (179) seja obedecida, restrições no campo de deslocamentos do EVR são impostas. Somente um campo de deslocamentos  $u_\mu$  que satisfaz a equação (179) será cinematicamente admissível. Portanto, a condição necessária para que  $u_\mu$  seja cinematicamente admissível é:

$$u_\mu \in K_\mu^* \quad \text{sendo } K_\mu^* \equiv \left\{ v / \int_{\Omega_\mu} \nabla^S v dV = V_\mu \varepsilon \right\} \quad (182)$$

onde  $K_\mu^*$  é o conjunto dos campos dos deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis.

Uma alternativa para se estabelecer uma condição de se ter  $u_\mu$  cinematicamente admissível, é considerar a seguinte relação válida para qualquer tensor S:

$$\int_{\Omega} S (\nabla v)^T dV = \int_{\Gamma} S n \otimes v dA - \int_{\Omega} \text{div} S \otimes v dV \quad (183)$$

onde  $v$  é um vetor,  $\text{div}(S)$  é o divergente de S e  $n$  o vetor normal ao contorno  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$ .

Adotando na equação (183):  $S = I$  (tensor identidade),  $v = u_\mu$ ,  $\Omega = \Omega_\mu$ . Adotando que  $\varepsilon$  é simétrico, ou seja,  $\nabla u_\mu$  também é simétrico e que não haja vazios no EVR, chega-se:

$$\int_{\Omega_\mu} I(\nabla^S u_\mu)^T dV = \int_{\Gamma_\mu} In \otimes u_\mu dA - \int_{\Omega} \text{div} I \otimes u_\mu dV \quad (184)$$

Utilizando-se a equação (179) e que o segundo termo do segundo membro da equação (184) é nulo, tem-se o seguinte resultado:

$$V_\mu \varepsilon = \int_{\Gamma_\mu} u_\mu \otimes_s n dA \quad (185a)$$

$$\text{ou ainda: } \varepsilon = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Gamma_\mu} u_\mu \otimes_s n dA \quad (185b)$$

As equações (182) e (185) são equivalentes, isto é, se  $u_\mu$  obedecer a uma delas, ele será um campo de deslocamentos cinematicamente admissível. Se houverem buracos no EVR, a equação (185a) também é válida (ver Souza Neto e Feijóo (2006)). Uma outra forma de escrever e definir o campo  $K_\mu^*$  da equação (182) é da seguinte maneira:

$$K_\mu^* \equiv \left\{ v / \int_{\Gamma_\mu} v \otimes_s n dA = V_\mu \varepsilon \right\} \quad (186)$$

#### 4.4.2 Campo de Deslocamentos e de Flutuação dos Deslocamentos

Como o EVR deste trabalho é constituído de inclusões ou vazios, tornando-o heterogêneo, o campo de deslocamento é decomposto em duas parcelas:

$$u_\mu(y) = u_\mu^L(y) + \tilde{u}_\mu(y) \quad (187)$$

onde  $u_\mu^L(y)$  representa o campo dos deslocamentos lineares, sendo  $u_\mu^L(y) = \varepsilon(x)y$ , onde  $\varepsilon(x)$  representa a deformação oriunda do macro-contínuo e  $y$  as

coordenadas de um ponto arbitrário do EVR. A parcela  $\tilde{u}_\mu(y)$  é a flutuação dos deslocamentos, que representa a variação da deformação no EVR por causa de sua heterogeneidade.

Analogamente ao desenvolvido para os deslocamentos, o campo de deformações ao longo do EVR pode ser dado pela seguinte equação:

$$\varepsilon_\mu(y) = \varepsilon(x) + \tilde{\varepsilon}_\mu(y) \quad (188)$$

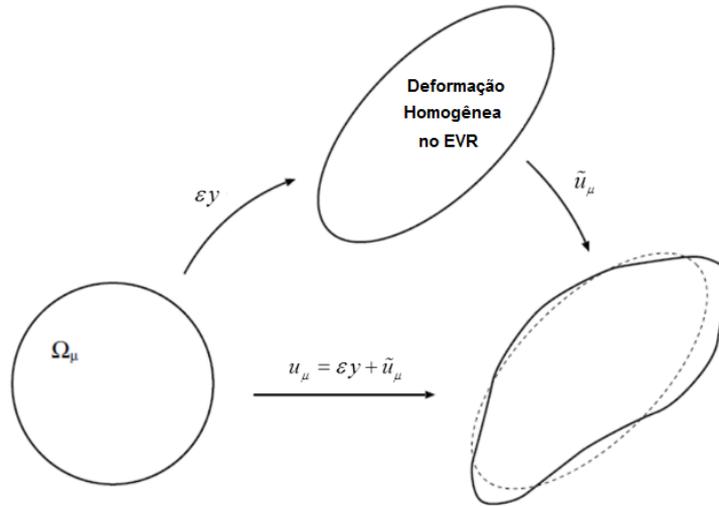
onde  $\tilde{\varepsilon}_\mu(y)$  é o campo da flutuação das deformações no EVR, podendo ser escrito como  $\tilde{\varepsilon}_\mu(y) = B\tilde{u}_\mu$ , sendo  $B$  a matriz global de operadores entre os deslocamentos e deformações.

Seja um caso particular, quando a deformação é constante em todo o EVR, o valor da mesma é igual ao valor da deformação macroscópica  $\varepsilon(x)$  e os deslocamentos possuem variação linear, ou seja,  $\tilde{u}_\mu(y) = 0$ .

A Figura 16 ilustra como o campo de flutuação dos deslocamentos afeta a microestrutura (EVR). A mesma descreve como os deslocamentos lineares afetam o EVR e posteriormente como as flutuações dos deslocamentos interferem na geometria do EVR.

É importante notar que para a formulação do EVR, desenvolvida em Souza Neto e Feijóo (2006), Fernandes et al (2015 a, b) através do MEF (Método dos Elementos Finitos), o campo de deslocamentos lineares  $u_\mu^L(y)$  é imposto para todos os nós do EVR. Essa condição inicial conduz à um campo de flutuação dos deslocamentos nulo, pois a deformação imposta é constante. Então, depois de resolver o problema de equilíbrio do EVR, a flutuação dos deslocamentos pode ser computada. Na formulação proposta em MEC (Método dos Elementos de Contorno), a macro-deformação é imposta apenas para os nós do contorno, sendo os deslocamentos dos nós internos computados pela equação (171), considerando essa condição de contorno. Como estes deslocamentos são calculados tomando como base diferentes materiais (ou fases) da microestrutura, inicialmente eles já possuem flutuação dos deslocamentos.

Figura 16 - Decomposição aditiva do campo de deslocamento o EVR



Fonte: (FERNANDES, 2012)

#### 4.4.3 Campo de Flutuação dos Deslocamentos Cinematicamente Admissível no EVR

Assim, como existe uma condição necessária para ter-se um campo de deslocamentos cinematicamente admissível, o mesmo é válido para desenvolver uma condição própria para o campo de flutuação dos deslocamentos cinematicamente admissível.

Para se obter o conjunto final, insere-se a equação (187) na equação (185a), chegando-se a:

$$V_{\mu} \varepsilon = \int_{\Gamma_{\mu}} u_{\mu}^L \otimes_S n dA + \int_{\Gamma_{\mu}} \tilde{u}_{\mu} \otimes_S n dA \quad (189)$$

onde  $u_{\mu}^L = \varepsilon(x) y$

Outro modo de escrever a expressão (189), é substituindo a equação (187) em (179), tornando-se:

$$V_{\mu} \varepsilon = \int_{\Omega_{\mu}} \nabla u_{\mu}^L dV + \int_{\Omega_{\mu}} \nabla \tilde{u}_{\mu} dV \quad (190)$$

Analisando as equações (189) e (190), constata-se que para possuir a deformação macroscópica  $\varepsilon$  constante, os seguintes termos das equações mencionadas anteriormente, devem ser nulos:

$$\int_{\Gamma_\mu} \tilde{u}_\mu \otimes_S n dA = 0 \quad (191)$$

$$\int_{\Omega_\mu} \nabla \tilde{u}_\mu dV = 0 \quad (192)$$

Assim, ao analisar a equação (191), constata-se que um campo de flutuação dos deslocamentos cinematicamente admissível existe, se o mesmo satisfizer a seguinte condição:

$$\tilde{u}_\mu \in \tilde{K}_\mu^* \quad \text{sendo} \quad \tilde{K}_\mu^* \equiv \left\{ v / \int_{\Gamma_\mu} v \otimes_S n dA = 0 \right\} \quad (193)$$

onde  $\tilde{K}_\mu^*$  é o conjunto dos campos de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis.

Portanto, considerando-se as equações (182) e (187), outra forma de descrever um campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis é satisfazendo a seguinte condição:

$$u_\mu \in K_\mu^* \quad \text{sendo} \quad K_\mu^* \equiv \left\{ u_\mu = \varepsilon y + \tilde{u}_\mu / \tilde{u}_\mu \in \tilde{K}_\mu^* \right\} \quad (194)$$

#### 4.5 Equação de Equilíbrio do EVR e Matriz Tangente

Análoga à formulação através do MEF desenvolvida em Souza Neto e Feijóo (2006) e em Fernandes (2015 a, b) a equação de equilíbrio (ou de resíduos) é dada em função das forças nodais das células (2 componentes  $F_1$  e  $F_2$  para cada nó da célula) e definida como:

$$R_h = \sum_{k=1}^{N_{cel}} \{F\}_k \cong 0 \quad (195)$$

As forças são obtidas a partir das tensões e forças normais  $\{N\}$ , que nesse trabalho como não é considerado fenômeno dissipativo no EVR, são os valores obtidos a partir da lei de Hooke. Esse vetor das forças normais  $\{N\}$  possui dimensão  $3 \times (n^\circ \text{ de células})$ , pois têm-se 3 componentes de forças normais ou tensão para cada célula.

Mesmo tratando de uma análise elástica, um processo iterativo é necessário para resolver o problema de equilíbrio do EVR. Este problema consiste em descobrir o campo de flutuação dos deslocamentos que satisfaz a equação de equilíbrio do mesmo.

Depois de discretizar o EVR em células e em elementos o contorno externo e interfaces (ou em elementos finitos para a formulação em MEF, como descrito em Souza Neto e Feijóo (2006)), a equação do equilíbrio (195) pode ser escrita para uma discretização  $h$  da seguinte forma:

$$R_h = \int_{\Omega_\mu^h} B^T f_y (\varepsilon + B\tilde{u}_\mu) dV = \sum_{e=1}^{N_{cel}} B_e^T N^e A_e \cong 0 \quad (196)$$

onde  $\Omega_\mu^h$  denota a discretização do domínio do EVR;  $N_{cel}$  é o número de células utilizadas na discretização do EVR;  $B_e$  é a matriz que relaciona deformação com deslocamento na célula;  $A_e$  é a área da célula e  $N^e$  o vetor das forças normais na célula, que é considerado constante em toda a mesma.

A equação (5.20) pode também ser escrita em termos das flutuações dos deslocamentos, obtendo-se a seguinte equação:

$$R_F = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B]_e^T [D_N^e] \{\varepsilon_\mu\}_e A_e = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B]_e^T [D_N^e] (\{\varepsilon\} + [B]\{\tilde{u}\})_e A_e \cong 0 \quad (197)$$

onde  $[D_N]$  é o tensor constitutivo que relaciona forças normais e deformação.

Considerando que o presente trabalho trata com análise elástica,  $[D_N]$  é dado pelo tensor elástico, equação (28) do anexo A. Portanto, após impor o tensor de deformação macroscópico da deformação  $\varepsilon(x)$  para o contorno do EVR, o problema de equilíbrio microscópico pode ser desenvolvido. Esse processo consiste em calcular o campo de flutuação dos deslocamentos que satisfaz a equação de equilíbrio do EVR dado pela equação (197).

O campo de flutuação dos deslocamentos é obtido calculando as correções das flutuações  $\delta\tilde{u}_\mu^{i+1}$ , que são impostas na iteração  $i+1$ , a fim de obter o novo campo de flutuações dado por:  $\tilde{u}_\mu^{i+1} = \tilde{u}_\mu^i + \delta\tilde{u}_\mu^{i+1}$ . Para obter essa correção das flutuações dos deslocamentos, lineariza-se a equação (197) de resíduos, através do Método de Newton-Raphson, obtendo-se a matriz tangente do EVR. Assim, para uma determinada iteração  $i+1$  a correção no estado de flutuação dos deslocamentos  $\delta\tilde{u}_\mu^{i+1}$  é calculada a partir da seguinte equação:

$$\{R_F\}^i + \frac{\partial\{R_F\}^i}{\partial\{\tilde{u}\}^i} \{\delta\tilde{u}\}^{i+1} = 0 \quad (198)$$

A equação (198) pode ser escrita de uma forma simplificada:

$$F^i + K^i \delta\tilde{u}_\mu^{i+1} = 0 \quad (199)$$

onde  $i \geq 0$ ;  $F$  é o vetor das forças e  $K$  é a matriz tangente. Estes termos são definidos pelas seguintes equações:

$$F^i = \int_{\Omega_\mu^h} B^T f_y(\varepsilon_{n+1} + B\tilde{u}_\mu^i) dV = \sum_{e=1}^{N_{cel}} B_e^T N^{e(i)} A_e \quad (200)$$

$$K^i = -\frac{\partial R_F}{\partial \tilde{u}} = \sum_{e=1}^{N_{cel}} B_e^T D_N^e B_e A_e \quad (201)$$

Para completar a formulação do EVR, as restrições cinemáticas são escolhidas e impostas sobre o EVR a fim de satisfazer a equação de equilíbrio (197). Essas condições de contorno são dadas em função de flutuação dos deslocamentos, sendo que cada condição de contorno conduz a uma diferente classe de modelo em multi-escala e, portanto, a diferentes resultados numéricos.

Como desenvolvido nos trabalhos de Souza Neto e Feijóo (2006) e também em Fernandes et al (2015 a, b), três condições de contorno podem ser impostas ao EVR em termos das flutuações dos deslocamentos: (i) deslocamentos lineares sobre o contorno; (ii) flutuações dos deslocamentos periódicos sobre o contorno e (iii) forças de superfície uniformes sobre o contorno. Estas condições serão detalhadas ainda neste trabalho.

Note como nenhum fenômeno dissipativo é tomado em conta, apenas uma iteração para assim calcular o campo de flutuação dos deslocamentos deve ser feita. Além disso, para checar a convergência do problema de equilíbrio do EVR, o erro é avaliado pela mesma expressão definida na equação (197), em termos das forças nodais ao longo do contorno do EVR.

Depois de resolver o problema de equilíbrio do EVR, os deslocamentos nodais ao longo do contorno externo, definidos pelo vetor  $\{U\}_C$  da equação (171), podem ser atualizados de acordo com a equação (5.11), adicionando o campo de flutuação dos deslocamentos  $\tilde{u}$  ao campo de deslocamento linear  $u^L$ . Além disso, o valor final para as incógnitas (vetor  $\{X\}$  definido pela equação (3.67)) pode também ser calculado a partir de  $\{U\}_C$ .

O sistema definido na equação (199) pode ser reduzido, de acordo com as condições de contorno impostas no EVR em termos das flutuações dos deslocamentos, na seguinte expressão (ver Terada e Kikuchi (2001) e Kouznetsova (2002)):

$$\delta \tilde{u}_R^{i+1} = \left[ -K_R^i \right]^{-1} F_R^i \quad (202)$$

onde os vetores  $\delta\tilde{u}_R^{i+1}$  e  $F_R^i$  bem como matriz  $K_R^i$  são definidos de acordo para o modelo de multi-escala adotado (ou através das condições de contorno imposta no EVR). A expressão  $\delta\tilde{u}_R^{i+1}$  dá as incógnitas do vetor das flutuações nodais  $\delta\tilde{u}_\mu^{i+1}$ .

#### 4.6 Tensão Homogeneizada

Analogamente ao item sobre a definição do tensor de deformação homogeneizado, a tensão  $\sigma = \sigma(x)$  de um ponto  $x$  do macro-contínuo segue o mesmo princípio. A mesma é definida como sendo a homogeneização do campo de tensões microscópicas  $\sigma_\mu = \sigma_\mu(x)$  que agem no EVR associado a esse ponto  $x$ , citado anteriormente. Admitindo-se que o domínio de EVR tem uma parte sólida e outra com vazios, ou seja,  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^S \cup \Omega_\mu^V$ , tem-se:

$$\sigma(x) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y) dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^S} \sigma_\mu(y) dV + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^V} \sigma_\mu(y) dV \quad (203)$$

Na definição de  $\sigma = \sigma(x)$ , equação (203), o EVR é considerado como um meio contínuo. Com isso, o conceito de tensão permanece válido na escala microscópica. Assim, para ser considerado como meio contínuo, o EVR deve ter dimensões suficientemente grandes para que o conceito de contínuo faça sentido no mesmo. Note que as dimensões do EVR são independentes daquelas adotadas para a estrutura estudada na macro-escala. Além disso, na formulação aqui desenvolvida, os resultados numéricos não se alteram em função das dimensões adotadas para o EVR.

Afim de escrever a tensão homogeneizada em termos das forças de superfície e de volume do EVR, considere a equação (183). Então, adota-se para a equação (183) o seguinte:  $S = \sigma_\mu$ ;  $v = y$ ;  $\Omega = \Omega_\mu$ ;  $I = \nabla y$ ;  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^S \cup \Omega_\mu^V$ , chegando-se a:

$$\sigma(x)V_\mu = \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu dV = \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu IdV =$$

$$= \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu (\nabla y)^T dV = \int_{\Omega_\mu^S} \sigma_\mu (\nabla y)^T dV + \int_{\Omega_\mu^V} \sigma_\mu (\nabla y)^T dV \quad (204)$$

Aplicando a equação (183) à equação (204), tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \sigma(x) V_\mu &= \int_{\Gamma_\mu^S} \sigma_\mu n \otimes y dA - \int_{\Omega_\mu^S} \text{div} \sigma_\mu \otimes y dV + \\ &+ \int_{\Gamma_\mu^V} \|\sigma_\mu n\| \otimes y dA - \int_{\Omega_\mu^V} \text{div} \sigma_\mu \otimes y dV \end{aligned} \quad (205)$$

Para obter a expressão final da tensão homogeneizada  $\sigma(x)$ , considere as seguintes relações:

$$\text{div} \sigma_\mu(y) = b(y) \quad \forall y \in \Omega_\mu^S \quad (206a)$$

$$\text{div} \sigma_\mu(y) = b(y) \quad \forall y \in \Omega_\mu^V \quad (206b)$$

$$\sigma_\mu(y) n = t^e(y) \quad \forall y \in \Omega_\mu \quad (206c)$$

$$\|\sigma_\mu(y) n\| = 0 \quad \forall y \in \Omega_\mu^V \quad (206d)$$

onde  $n$  é a direção normal ao contorno,  $b$  são as forças de volume,  $t$  são as forças de superfície e  $\|\sigma_\mu(y) n\|$  é o pulo do vetor  $\sigma_\mu(y) n$  ao longo da interface do vazio com o sólido.

Porém, assume-se que as forças de volume que agem no vazio são nulas, ou seja:

$$b(y) = 0 \quad \forall y \in \Omega_\mu^V \quad (207)$$

Com isso, a contribuição à resistência mecânica do EVR dada pelo vazio, é função apenas da força  $t^v$  sobre  $\Gamma_\mu^V$ . Seja agora o Princípio de Macro-Homogeneidade de Hill-Mandel que estabelece as seguintes equações:

$$\int_{\Gamma_\mu} t^e \tilde{u}_\mu dA = 0 \quad \forall \tilde{u}_\mu \in \mathcal{V}_\mu^o \quad (208)$$

$$\int_{\Omega_\mu^s} b \tilde{u}_\mu dV = 0 \quad \forall \eta \in V_\mu \quad (209)$$

onde  $\mathcal{V}_\mu^o$  é o espaço do campo de flutuações dos deslocamentos cinematicamente admissíveis. Para que a equação (209) seja satisfeita, tem-se que:

$$b(y) = 0 \quad \forall y \in \Omega_\mu^s \quad (210)$$

Substituindo-se na equação (203) as equações (206), (207) e (210), tem-se:

$$\sigma(x) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Gamma_\mu} t^e(y) \otimes_s y dA \quad (211)$$

onde faz-se o uso da seguinte expressão, no cálculo das integrais, válida para quaisquer vetores  $u$  e  $v$ :

$$u \otimes_s v = \frac{1}{2} (u \otimes v + v \otimes u) \quad (212)$$

A equação (211) é calculada de forma aproximada através da discretização o contorno do EVR em elementos, sendo  $t^e$  as forças de superfície dos nós sobre o contorno e  $y$  o vetor das coordenadas  $X_1$  e  $X_2$  do ponto  $y$  do EVR. Portanto, a equação (4.35) é calculada da seguinte forma:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2V_\mu} (\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^T) \quad (213)$$

Na equação (4.37), tem-se:  $\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^{Nc} \{F_c\}_i \{y\}_i^T$ , sendo  $Nc$  o número de nós do contorno e as forças do vetor  $F_c$  são obtidas do vetor das forças  $P_C$  definidas pela equação (171). Para se obter os valores do vetor  $F_c$ , tem-se que multiplicar os termos do vetor  $P_C$  pelos seus correspondentes comprimentos de influência em cada nó.

Portanto, utiliza-se o vetor dos deslocamentos nodais do contorno atualizado para calcular as forças de superfície após a solução do problema de equilíbrio do EVR, ou seja,  $\{U_c\} = \{U_c^L\} + \{\tilde{U}_c\}$ , onde  $\{U_c^L\}$  é o campo de deslocamentos com variação linear calculado a partir da deformação constante  $\varepsilon$  imposta pelo macro-contínuo.

#### 4.7 Princípio de Macro-Homogeneidade de Hill-Mandel

Baseados em argumentos físicos Hill (1965) e Mandel (1971), estabeleceram, no contexto da mecânica dos sólidos, que a *“potência das tensões macroscópicas deve ser igual à média volumétrica da potência das tensões microscópicas sobre o EVR associado a esse ponto, para qualquer movimento cinematicamente admissível do EVR”*. Portanto, tem-se a seguinte equação:

$$\sigma : \dot{\varepsilon} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \dot{\varepsilon}_\mu dV \quad (214)$$

A equação (214) deve ser satisfeita para qualquer campo  $\dot{\varepsilon}_\mu$  de taxa de deformação microscópica admissível. O campo  $\dot{\varepsilon}_\mu$  é cinematicamente admissível se satisfazer a seguinte condição:

$$\dot{\varepsilon}_\mu = \nabla^S \dot{u}_\mu = \dot{\varepsilon} + \nabla^S \dot{\tilde{u}}_\mu(y) \quad \text{sendo} \quad \dot{\tilde{u}} \in \Upsilon\mu \quad (215)$$

onde  $\Upsilon_\mu$  é o espaço prescrito das velocidades de flutuação cinematicamente admissíveis. Esse mesmo espaço pode ser coincidente com o espaço  $\mathcal{V}_\mu^o$  das flutuações de deslocamentos cinematicamente admissíveis.

Utilizando-se o demonstrado pela equação (215) e substituindo o mesmo na equação (4.38), tem-se:

$$\sigma : \dot{\varepsilon} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : (\dot{\varepsilon} + \nabla^S \dot{\tilde{u}}_\mu(y)) dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \dot{\varepsilon} dV + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \nabla^S \dot{\tilde{u}}_\mu dV \quad (216)$$

A equação (216) só é verdadeira, considerando-se a equação (214), se seu último termo for nulo. Sendo assim:

$$\frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \nabla^S \dot{\tilde{u}}_\mu dV = 0 \quad \text{para } \forall \dot{\tilde{u}}_\mu \in \Upsilon_\mu \quad (217)$$

Utilizando-se as propriedades da integração por partes e considerando-se que  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^S \cup \Omega_\mu^V$ , a equação (217) torna-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \nabla^S \dot{\tilde{u}}_\mu dV &= \int_{\Gamma_\mu^S} \sigma_\mu n \cdot \dot{\tilde{u}}_\mu dA - \int_{\Omega_\mu^S} \text{div} \sigma_\mu \cdot \dot{\tilde{u}}_\mu dV + \\ &- \int_{\Omega_\mu^V} \text{div} \sigma_\mu \cdot \dot{\tilde{u}}_\mu dV + \int_{\Gamma_\mu^V} \|\sigma_\mu n\| \cdot \dot{\tilde{u}}_\mu dA = 0 \end{aligned} \quad (218)$$

Algumas expressões já possuem seus resultados descritos anteriormente, na parte que se desenvolve a tensão homogeneizada. Nessa parte também se utilizam processos de integração por partes. Portanto, substituindo as equações (206), (207) em (218), tem-se o seguinte resultado:

$$\int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \nabla^S \dot{\tilde{u}}_\mu dV = \int_{\Gamma_\mu^S} t^e \cdot \dot{\tilde{u}}_\mu dA - \int_{\Omega_\mu^S} b \cdot \dot{\tilde{u}}_\mu dV = 0 \quad (219)$$

Ao analisar a equação anterior, constata-se o seguinte:

$$\int_{\Gamma_{\mu}^s} t^e \cdot \dot{\tilde{u}}_{\mu} dA - \int_{\Omega_{\mu}^s} b \cdot \dot{\tilde{u}}_{\mu} dV = 0 \quad \text{para} \quad \forall \dot{\tilde{u}}_{\mu} \in \Upsilon_{\mu} \quad (220)$$

Pelas propriedades da álgebra linear e considerando-se que  $\Upsilon_{\mu}$  é um espaço de vetores, a equação (220) somente é satisfeita se cada termo se anular individualmente. Portanto, tem-se:

$$\int_{\Gamma_{\mu}} t^e \cdot \dot{\tilde{u}}_{\mu} dA = 0 \quad \forall \dot{\tilde{u}}_{\mu} \in \Upsilon_{\mu} \quad (221)$$

$$\int_{\Omega_{\mu}^s} b \cdot \dot{\tilde{u}}_{\mu} dV = 0 \quad \forall \dot{\tilde{u}}_{\mu} \in \Upsilon_{\mu} \quad (222)$$

Como  $\dot{\tilde{u}}_{\mu} = \dot{\tilde{u}}_{\mu}$ , ver Souza Neto e Feijóo (2006), ou seja, a velocidade das flutuações coincide com a flutuação dos deslocamentos cinematicamente admissíveis. Com isso, chega-se as equações (208) e (209) citadas anteriormente no desenvolvimento da tensão homogeneizada. Essas equações são impostas pelo princípio de Hill-Mandel e, portanto, equivalentes a exigir que as forças de superfícies  $t^e$  e as forças de volume  $b$  no EVR sejam puramente reativas. Assim, elas são reações às restrições cinemáticas (ou condições de contorno) impostas no EVR e, portanto, não podem ser prescritas independentemente dessa.

#### 4.8 Condições de Contorno para Solução do Sistema de Equações no EVR em Termos de Flutuação dos Deslocamentos

A seguir são apresentadas as três condições de contorno em termos das flutuações dos deslocamentos. Estas são utilizadas para resolver o problema de equilíbrio do EVR, onde geram diferentes resultados numéricos. Dependendo da condição de contorno imposta no EVR, o sistema pode ser reduzido e ser expresso pela equação (202).

Note que cada modelo de condição de contorno reproduz uma diferente estimativa da resposta constitutiva macroscópica, sendo que o modelo dos deslocamentos lineares sobre o contorno fornece a solução mais rígida do problema

microscópico e o de forças de superfície uniformes no contorno aquele que fornece a solução menos rígida.

#### 4.8.1 Deslocamentos Lineares no Contorno do EVR

Nesse caso, é adotado que as flutuações dos deslocamentos  $\tilde{u}_\mu$  se anulam no contorno  $\Gamma_\mu$  do EVR, isto é, o espaço  $\mathcal{V}_\mu$  é escolhido de modo que:

$$\mathcal{V}_\mu = \left\{ \tilde{u}_\mu \in \tilde{K}_\mu^* / \tilde{u}_\mu(y) = 0 \quad \forall y \in \Gamma_\mu \right\} \quad (223)$$

Portanto, o campo de deslocamento microscópico ao longo do contorno  $\Gamma_\mu$  do EVR pode ser dado por:

$$u_\mu(y) = \varepsilon(x)y \quad (224)$$

ou seja, ao longo de  $\Gamma_\mu$  o deslocamento varia linearmente com o vetor de coordenadas  $y$ .

Nesse modelo, as flutuações são nulas no contorno, portanto, deve-se calcular as flutuações no domínio do EVR. Portanto, para uma iteração  $k+1$ , a equação (199) será decomposta em parcelas, onde o sub-índice  $i$  é relativo aos nós internos e  $C$  aos nós do contorno:

$$\begin{Bmatrix} F_C \\ F_i \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} K_{CC} & K_{Ci} \\ K_{iC} & K_{ii} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_C \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^{k+1} = 0 \quad (225)$$

Considerando-se que  $\delta\tilde{u}_C = 0$  e que  $F_C$  são apenas forças reativas ao campo de deslocamentos imposto, as flutuações nos pontos internos são dadas por:

$$\left\{ \delta\tilde{u}_i \right\}_\mu^{k+1} = -[K_{ii}]^{-1(k)} \left\{ F_i \right\}^k \quad (226)$$

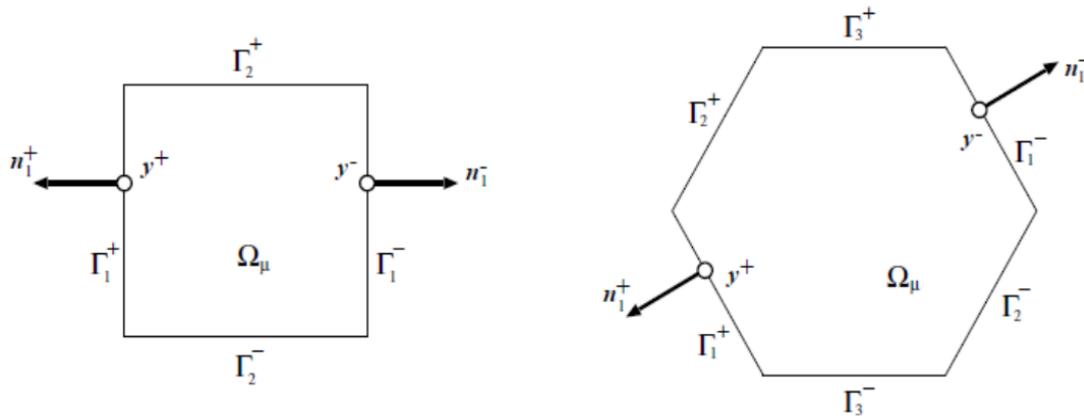
sendo  $\{F_i\}$  o vetor das forças internas nos nós internos.

#### 4.8.2 Flutuações de Deslocamentos Periódicos sobre o Contorno

Esse modelo é adotado para descrever o comportamento de materiais que possuem microestrutura periódica. No entanto, estudos já demonstraram que quando se considera uma discretização fina, o comportamento de um material genérico se aproxima daquele descrito nessa condição de contorno. Considere a Figura 17, onde são representados um EVR retangular e outro hexagonal.

Observe que nos EVRs definidos na Figura 17, cada lado  $\Gamma_i^+$  corresponde a um lado igual e oposto  $\Gamma_i^-$ . Os vetores de direção normal a estes contornos, também seguem esse padrão:  $n_i^+ \rightarrow \Gamma_i^+$  e  $n_i^- \rightarrow \Gamma_i^-$ , com  $n_i^+ = -n_i^-$ . Portanto, para cada ponto  $y^+$  pertencente ao contorno  $\Gamma_i^+$ , existe um ponto correspondente  $y^-$  do contorno  $\Gamma_i^-$ .

Figura 17 - Definição de EVRs para meios periódicos: célula retangular e célula hexagonal



Fonte: (FERNANDES, 2012)

Nessa condição de contorno, as flutuações para o par de ponto  $y^+$  e  $y^-$  são iguais. Sendo assim:

$$\tilde{u}_\mu(y^+) = \tilde{u}_\mu(y^-) \quad \forall \text{ par de pontos } \{y^+, y^-\} \in \Gamma_\mu \quad (227)$$

Através da condição demonstrada anteriormente, o espaço  $\mathcal{V}_\mu^o$  é dado por:

$$\mathcal{V}_\mu^o = \left\{ \tilde{u}_\mu \in \tilde{K}_\mu^* / \tilde{u}_\mu(y^+) = \tilde{u}_\mu(y^-) \quad \forall \text{ par de pontos } \{y^+, y^-\} \in \Gamma_\mu \right\} \quad (228)$$

A equação (208), pelo Princípio de Hill-Mandel, deve ser satisfeita. Sendo assim, a força de superfície  $t^e$  deve ser ortogonal ao espaço  $\mathcal{V}_\mu^o$  definido pela equação (228). Como as forças de superfície são orientadas pelos vetores normais da mesma, a definição da força  $t^e$  segue o mesmo raciocínio dos vetores normais ao contorno para esta condição. Isto é, as forças são anti-periódicas em  $\Gamma_\mu$ :

$$t^e(y^+) = -t^e(y^-) \quad \forall \text{ par de pontos } \{y^+, y^-\} \in \Gamma_\mu \quad (229)$$

Para uma iteração  $k+1$ , a equação (199) será decomposta em parcelas devido às características periódicas deste modelo. O sub-índice  $i$  é relativo aos nós internos;  $p$  e  $m$  se referem aos pares de pontos  $y^+$  e  $y^-$  definidos no contorno (sem coincidir com canto). Tem-se então:

$$\begin{Bmatrix} F_p \\ F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pm} & K_{pi} \\ K_{mp} & K_{mm} & K_{mi} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_m \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^{k+1} = 0 \quad (230)$$

onde  $F_p$ ,  $F_m$  e  $F_i$  são as forças nos pontos  $p$ ,  $m$  e  $i$ .

Ao analisar a equação (230), pode-se observar que não são prescritas flutuações nulas nos cantos. Por isso, na equação anterior, não são definidos termos relativos aos cantos. Além disso, tem-se que  $\delta \tilde{u}_m = \delta \tilde{u}_p$ . Portanto a equação (230) se torna:

$$\begin{Bmatrix} F_p \\ F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pm} & K_{pi} \\ K_{mp} & K_{mm} & K_{mi} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^{k+1} = 0 \quad (231)$$

Desenvolve-se trabalhos algébricos na equação (231) e essa pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} F_p + F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} \\ & K_{ip} + K_{im} \\ & & K_{ii} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^{k+1} = 0 \quad (232)$$

ou seja, as incógnitas do problema são as flutuações nos pontos  $\mathbf{p}$  do contorno e nós internos.

#### 4.8.3 Forças de Superfície Uniformes sobre o Contorno

Nesse modelo adota-se restrição cinematicamente mínima no EVR, isto é, o espaço  $\mathcal{V}_\mu$  é escolhido de modo que coincida com o espaço  $\tilde{K}_\mu^*$  definido pela equação (193). Portanto, tem-se:

$$\mathcal{V}_\mu = \tilde{K}_\mu^* \quad \text{sendo} \quad \tilde{K}_\mu^* \equiv \left\{ v / \int_{\Gamma_\mu} v \otimes_S n dA = 0 \right\} \quad (233)$$

Tomando como base a definição de força de superfície  $\mathbf{t}^e$ , dada pela equação (206c), substitui-a na condição (208) imposta pelo princípio de Hill-Mandel. Considera-se ainda que  $\tilde{u}_\mu = v$  (sendo  $v$  definido pela equação (233)) para se ter a seguinte expressão:

$$\int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}^e \cdot \tilde{u}_\mu dA = \int_{\Gamma_\mu} \sigma_\mu(y) n \cdot v dA = 0 \quad (234)$$

Ao analisar a expressão (233), tem-se o seguinte:

$$\int_{\Gamma_\mu} v \otimes_S n dA = \int_{\Gamma_\mu} n \cdot v dA = 0 \quad (235)$$

Logo, para que a equação (234) seja satisfeita, deve-se ter  $\sigma_\mu$  constante ao longo do contorno do EVR, ou seja:

$$\sigma_\mu(y) = \sigma(x) = \sigma \quad \forall y \in \Gamma_\mu \quad (236)$$

Substitui-se a equação (236) em (234), obtendo então a seguinte expressão onde a condição do princípio de Hill-Mandel é satisfeita:

$$\int_{\Gamma_\mu} \sigma_\mu(y) n \cdot v dA = \sigma \int_{\Gamma_\mu} n \cdot v dA = 0 \quad (237)$$

Portanto, nesse modelo a força de superfície é uniforme ao longo do contorno do EVR. Além disso, para satisfazer a equação (209), devem-se ter forças de volume  $b$  nulas no domínio  $\Omega_\mu$  do EVR.

Definindo  $v_c$  como os valores nodais de  $v$  no contorno,  $N_c$  como a matriz de interpolação global associada aos nós do contorno e  $v_i$  como os valores nodais de  $v$  no domínio. Assim, para uma discretização  $h$  a condição dada pela equação (233) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tilde{K}_\mu^* \equiv \left\{ v = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_c \end{Bmatrix} / \int_{\Gamma_\mu^h} N_c v_c \otimes_S n dA = 0 \right\} \quad (238)$$

Desenvolvendo a restrição integral dada na equação (238) para um determinado lado de uma célula  $e$  triangular definido sobre o contorno do EVR, onde são definidos dois nós, e considerando-se o caso bidimensional (no sistema  $(x,y)$ ), tem-se:

$$\int_{\Gamma_\mu} N_n^e v_c^{n(e)} \otimes_S n dA = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_\mu} N_1^e dA & 0 & \int_{\Gamma_\mu} N_2^e dA & 0 \\ 0 & \int_{\Gamma_\mu} N_1^e dA & 0 & \int_{\Gamma_\mu} N_2^e dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x^{1(e)} \\ v_y^{1(e)} \\ v_x^{2(e)} \\ v_y^{2(e)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x & n_y \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_\mu} (N_1^e v_x^{1(e)} + N_2^e v_x^{2(e)}) n_x dA & \int_{\Gamma_\mu} (N_1^e v_x^{1(e)} + N_2^e v_x^{2(e)}) n_y dA \\ \int_{\Gamma_\mu} (N_1^e v_y^{1(e)} + N_2^e v_y^{2(e)}) n_x dA & \int_{\Gamma_\mu} (N_1^e v_y^{1(e)} + N_2^e v_y^{2(e)}) n_y dA \end{bmatrix} \quad (239)$$

A equação (239) é compatível com a representação de tensões e deformações na forma  $\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$ . Porém, na implementação computacional, as tensões são definidas pelo vetor  $\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$ . Portanto, a equação (239) se torna:

$$\int_{\Gamma_\mu} N_n^e v_c^{n(e)} \otimes_S n dA = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_\mu} (N_1^e v_x^{1(e)} + N_2^e v_x^{2(e)}) n_x dA \\ \int_{\Gamma_\mu} (N_1^e v_y^{1(e)} + N_2^e v_y^{2(e)}) n_y dA \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\mu} (N_1^e v_y^{1(e)} + N_2^e v_y^{2(e)}) n_x dA + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\mu} (N_1^e v_x^{1(e)} + N_2^e v_x^{2(e)}) n_y dA \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_\mu} N_1^e n_x dA & 0 & \int_{\Gamma_\mu} N_2^e n_x dA & 0 \\ 0 & \int_{\Gamma_\mu} N_1^e n_y dA & 0 & \int_{\Gamma_\mu} N_2^e n_y dA \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\mu} N_1^e n_y dA & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\mu} N_1^e n_x dA & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\mu} N_2^e n_y dA & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\mu} N_2^e n_x dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x^{1(e)} \\ v_y^{1(e)} \\ v_x^{2(e)} \\ v_y^{2(e)} \end{Bmatrix} \quad (240)$$

Considerando-se a seguinte relação:

$$\int_{\Gamma_\mu} N_1^e dA = \int_{\Gamma_\mu} N_1^e dA = \frac{L}{2} \quad (241)$$

sendo  $L$  o comprimento do lado da célula que está sobre o contorno, a equação (240) resulta em:

$$\int_{\Gamma_\mu} N_n^e v_c^{n(e)} \otimes_S ndA = \frac{L_e}{2} \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_x & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_y \\ \frac{1}{2}n_y & \frac{1}{2}n_x & \frac{1}{2}n_y & \frac{1}{2}n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x^{1(e)} \\ v_y^{1(e)} \\ v_x^{2(e)} \\ v_y^{2(e)} \end{Bmatrix} \quad (242)$$

Portanto, para um elemento  $e$ , a equação (242) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma_\mu} N_n^e v_c^{n(e)} \otimes_S ndA = C^e v_c^{n(e)} \quad (243)$$

$$\text{onde } C^e = \frac{L_e}{2} \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_x & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_y \\ \frac{1}{2}n_y & \frac{1}{2}n_x & \frac{1}{2}n_y & \frac{1}{2}n_x \end{bmatrix} \text{ e } v_c^e = \begin{Bmatrix} v_x^{1(e)} \\ v_y^{1(e)} \\ v_x^{2(e)} \\ v_y^{2(e)} \end{Bmatrix}$$

Assim a restrição  $\int_{\Gamma_\mu} N_c v_c \otimes_S ndA = 0$  pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma_\mu} N_c v_c \otimes_S ndA = C v_c \quad (244)$$

onde a matriz  $C$  é obtida somando-se a contribuição  $C^e$  de todas as células.

No caso que se tenham  $m$  nós no contorno, como  $v_c$  trata dos deslocamentos, o mesmo tem dimensão  $2m$  e a matriz  $C$  dimensão  $3 \times 2m$ . o contorno será dividido em três tipos de nós: livres (índice  $f$ ), dependentes (índice  $d$ ) e prescritos (índice  $p$ ). Assim, a equação (244) se torna:

$$\begin{bmatrix} C_f & C_d & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_f \\ v_d \\ v_p \end{bmatrix} = 0 \quad (245)$$

Adotando-se os valores prescritos nulos, tem-se  $v_p = 0$ , e, portanto:

$$\begin{bmatrix} C_f & C_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_f \\ v_d \end{bmatrix} = 0 \quad (246)$$

A partir da equação (246), pode-se obter os valores de  $v_d$  em função dos valores de  $v_f$ , sendo:

$$v_d = Rv_f \quad (247)$$

onde  $R = -C_d^{-1}C_f$ ; para o caso bi-dimensional o número de variáveis dependentes é 3, o número de graus de liberdade prescritos é 3 e, portanto, o número de variáveis livres é **2m-6**; logo  $C_d$  é uma matriz quadrada de dimensão 3 e  $C_f$  tem dimensão **3 x (2m-6)**.

Através do trabalho algébrico desenvolvido anteriormente, o problema de equilíbrio será resolvido. Para tanto, a equação (199) será decomposta em parcelas, onde o sub-índice **i** é relativo aos nós internos; **f** aos nós livres e **d** aos nós dependentes.

$$\begin{Bmatrix} F_f \\ F_d \\ F_i \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fd} & K_{fi} \\ K_{df} & K_{dd} & K_{di} \\ K_{if} & K_{id} & K_{ii} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_f \\ \delta \tilde{u}_d \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_{\mu}^{k+1} = 0 \quad (248)$$

onde  $F_f$ ,  $F_d$  e  $F_i$  são as forças nos pontos **f**, **d** e **i**.

Considerando-se a equação (248), a equação anterior pode possuir a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} F_f \\ F_d \\ F_i \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fd} & K_{fi} \\ K_{df} & K_{dd} & K_{di} \\ K_{if} & K_{id} & K_{ii} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_f \\ R\delta\tilde{u}_f \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^{k+1} = 0 \quad (249)$$

A equação (249) pode ser escrita em função apenas das flutuações dos pontos  $f$  e  $i$ , do seguinte modo:

$$\begin{Bmatrix} F_f + R^T F_d \\ F_i \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} K_{ff} + K_{fd}R + R^T K_{dd}R & K_{fi} + R^T K_{di} \\ K_{if} + K_{id}R & K_{ii} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_f \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^{k+1} = 0 \quad (250)$$

ou seja, as incógnitas do problema são as flutuações nos nós livres e internos.

#### 4.9 Tensor Constitutivo Homogeneizado

A tensão homogeneizada pode ser escrita através da tensão na micro-escala em função da deformação do macro-contínuo e do campo de flutuação dos deslocamentos:

$$\sigma(x) = \sigma = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} f_y(\varepsilon_\mu) dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} f_y(\varepsilon + \nabla^S \tilde{u}_\mu) dV \quad (251)$$

Logo, o tensor constitutivo denominado  $\mathbf{D}$  resulta em:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \partial f_y(\varepsilon + \nabla^S \tilde{u}_\mu) dV}{\partial \varepsilon} \quad (252)$$

sendo  $\nabla^S \tilde{u}_\mu$  determinado através da solução do problema de equilíbrio microscópico, definido pela equação (199).

A equação (252) pode ser separada em duas partes, como desenvolvido nos trabalhos de De Souza Neto e Feijóo (2006) e Fernandes et al (2015 a, b) e apresentada a seguir:

$$D = D^{Taylor} + \tilde{D} \quad (253)$$

onde  $D^{Taylor}$  é denotado como o operador tangente do modelo de Taylor, assumindo  $\nabla^S \tilde{u} = 0$  (o modelo de Taylor não é apresentado neste trabalho). O termo  $\tilde{D}$  representa a influência da flutuação dos deslocamentos no módulo tangente homogeneizado.

Analisando o termo  $D^{Taylor}$  tem-se:

$$D^{Taylor} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \frac{\partial \sigma_\mu}{\partial \varepsilon_\mu} dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} D_\mu dV = \sum_{p=1}^{N_p} \frac{V_p}{V_\mu} D_\mu^p \quad (254)$$

onde  $D_\mu$  é o tensor constitutivo microscópicos, que na formulação desenvolvida neste trabalho é dada pelo tensor elástico. O índice  $N_p$  é o número de fases definidas no EVR.

A parcela  $\tilde{D}$  da equação do tensor constitutivo homogeneizado é dada em função da flutuação dos deslocamentos no EVR. Portanto, pode ser expressada pela seguinte equação:

$$\tilde{D} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \frac{\partial f(\nabla^S \tilde{u}_\mu)}{\partial \varepsilon} dV = -\frac{1}{V_\mu} G_R K_R G_R^T \quad (255)$$

As matrizes  $K_R$  e  $G_R$  são, respectivamente, formas reduzidas da matriz K (definida pela equação (201)) e G é dada por:

$$G = \sum_{e=1}^{N_{cel}} D_\mu^e B_e V_e \quad (256)$$

onde  $N_{cel}$  é o número de células utilizadas na discretização e  $B_e$  a matriz que relaciona deslocamentos com deformação na célula.

Os sub-índices  $R$ , presentes nos termos da equação (255), demonstram que podem-se obter diferentes expressões para  $\tilde{D}$  de acordo com as condições de contorno impostas ao EVR. A matriz  $K_R$  é aquela definida nas equações (226), (232) e (250), respectivamente, para deslocamentos lineares, flutuações periódicas e forças uniformes no contorno. De forma análoga pode-se obter a matriz  $G_R$ .

#### 4.10 Algoritmo

O algoritmo dado a seguir é desenvolvido para obter os valores homogeneizados de tensão e do tensor constitutivo de microestruturas heterogêneas, assumindo um comportamento elástico para a matriz e inclusões.

1. Duas equações algébricas para os deslocamentos no plano são escritas para cada nó do EVR para obter o conjunto de equações definidas por (168);
2. A macro deformação  $\varepsilon$  é imposta ao contorno do EVR e o vetor dos deslocamentos lineares ao longo do contorno externo é computado:

$$\{U_C^L\} = [\varepsilon] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_y ;$$

3. O vetor  $\{U_C^L\}$  é imposto para o EVR como condição de contorno, obtendo o

$$\text{vetor } \{X\} = \begin{Bmatrix} P_C \\ U_i \end{Bmatrix} \text{ definido na equação (171) (forças ao longo do contorno$$

externo e deslocamentos lineares em nós internos);

4. Três equações algébricas de forças normais são escritas para cada ponto central da célula e seus valores computados da equação (174). Então, a partir da Lei de Hooke, equação (28) do anexo, a deformação pode ser avaliada para cada célula:  $\{\varepsilon_\mu\}^0 = [C_N]^{-1} \{N\}$ ;

5. A equação (196) é checada. Se não há convergência, o seguinte processo iterativo ( $i \geq 1$ ) é considerado:

- a) A matriz  $[K^i]^{-1}$  equação (201) é calculada;

- b) A correção da flutuação do deslocamento  $\{\delta\tilde{u}\}^i$  equação (199), é obtida;
- c) O vetor da flutuação do deslocamento é obtido:  $\{\tilde{u}\}^i = \{\tilde{u}\}^{i-1} + \{\delta\tilde{u}\}^i$ ;
- d) A deformação é atualizada para cada célula:  $\{\varepsilon_\mu\}_{cel}^i = \{\varepsilon_\mu\}_{cel}^0 + [B]_{cel} \{\tilde{u}\}^i$ ;
- e) A tensão é avaliada usando a Lei de Hooke:  $\{\sigma_\mu\}_{cel}^i = [C] \{\varepsilon_\mu\}_{cel}^i$ ;
- f) Como não há fenômeno dissipativo, a convergência é satisfeita com apenas uma iteração para se calcular a flutuação dos deslocamentos. Então vá para o item 6;
6. O vetor final dos deslocamentos nodais ao longo do contorno externo é obtido:  $\{U_C\} = \{U_C^L\} + \{\tilde{U}_C\}$  e as forças  $P_C$  (definida na equação (171)) calculada;
7. O Módulo Tangente Constitutivo Homogeneizado  $D$  equação (252) é obtido assim como a Tensão Homogeneizada  $\sigma$  equação (213).

## 5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

### 5.1 Introdução

Diferentes microestruturas (EVRs) foram adotadas para demonstrar o desempenho da formulação proposta, sendo os resultados comparados à formulação do MEF desenvolvida em Fernandes et al (2015 a, b). O mesmo EVR discretizado, é utilizado tanto para a análise com o MEC quanto com o MEF. Pelo princípio básico do MEF, a discretização gera elementos finitos em todo o domínio do sistema estrutural em questão, que no caso do trabalho desenvolvido em Fernandes et al (2015 a, b) são elementos finitos triangulares. Já no MEC, utilizando-se a mesma discretização do MEF, devem ser definidos elementos sobre o contorno externo e interfaces, além de células triangulares para discretizar o domínio, que são coincidentes com os elementos finitos do MEF.

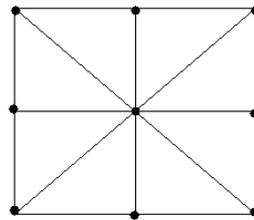
Para todas as simulações considerou-se o estado plano de tensões em um regime de pequenas deformações. Os EVRs adotados possuem geometria quadrada com dimensões  $L \times L$  e espessura  $0,1L$ . Serão apresentados dois casos distintos de microestrutura: em um têm-se EVRs com inclusões e em outro são definidos vazios no interior do EVR, onde se adotam diferentes frações de volume para inclusões ou vazios, a fim de verificar a influência desta no comportamento mecânico da microestrutura. Observe que o vetor das deformações a ser imposto à microestrutura, que no caso de uma análise em multi-escala seria aquele referente à análise da macroestrutura, é diferente para cada caso. É importante ressaltar que, na formulação com o MEC, esse vetor de deformações é imposto ao contorno do EVR na forma de deslocamentos prescritos com variação linear.

É importante observar que, para todas essas análises, flutuações de deslocamento periódicas foram impostas como condições de contorno ao EVR. No entanto, para mostrar o comportamento do EVR de acordo com diferentes condições de contorno em termos de flutuações dos deslocamentos, foram utilizados os exemplos onde 5 inclusões ou 5 vazios foram definidos dentro da matriz do EVR.

Nos exemplos numéricos foi considerado ainda o caso do EVR uniforme, que é quando no mesmo tem-se definida apenas uma fase, onde as propriedades elásticas foram adotadas iguais à da matriz dos outros EVRs, a fim de mostrar como a resposta homogeneizada do EVR muda quando inclusões ou vazios são

considerados dentro da matriz. Além disso, nos exemplos dos EVR's com inclusões, consideram-se inclusões mais rígidas que a matriz e inclusões menos rígidas que essa, a fim de verificar que no primeiro caso tem-se uma resposta mecânica mais rígida e no segundo caso essa resposta é menos rígida. A Figura 18 representa um EVR uniforme discretizado apenas com 8 células, já que nesse caso, por ser uniforme, o campo de flutuações é nulo, ou seja, não se tem o processo iterativo do EVR e, portanto, o resultado é o mesmo independente da malha adotada. É importante também notar que quando se adota EVR uniforme para representar o material de uma estrutura, chega-se nos mesmos resultados numéricos da análise da estrutura de forma convencional, sem considerar a modelagem multi-escala.

Figura 18 - EVR uniforme



Fonte: Elaboração do próprio autor.

## 5.2 Comportamento dos EVRs com Diferentes Volumes de Inclusão

Neste item serão tratados quatro tipos diferentes de EVR. Os três primeiros com a inclusão localizada no centro do EVR e o último com 5 inclusões distribuídas dentro do domínio. Serão adotadas diferentes frações de volume (**vf**) para as inclusões, sendo que para cada tipo de EVR, foram adotadas quatro malhas diferentes a fim de mostrar a convergência dos resultados com o refinamento da malha. Assim, na Figura 19, Figura 23, Figura 27 e Figura 31 mostram-se as quatro discretizações adotadas, respectivamente, para um EVR com volume de inclusão **vf = 10%**, com **vf = 30%**, com **vf = 37%** e com 5 inclusões onde **vf = 37%**. Além disso, os resultados obtidos serão comparados com os feitos em MEF, para validar a formulação do MEC. Observe que em todos os casos, a condição de contorno aplicada é a de flutuações periódicas, sendo o vetor das deformações impostas ao EVR, como condição inicial, dado por:  $\varepsilon = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}\} = \{-0,00099 \quad 0,0032 \quad 0,0\}$ . Em todos os casos, mantendo constantes as propriedades elásticas da matriz, serão

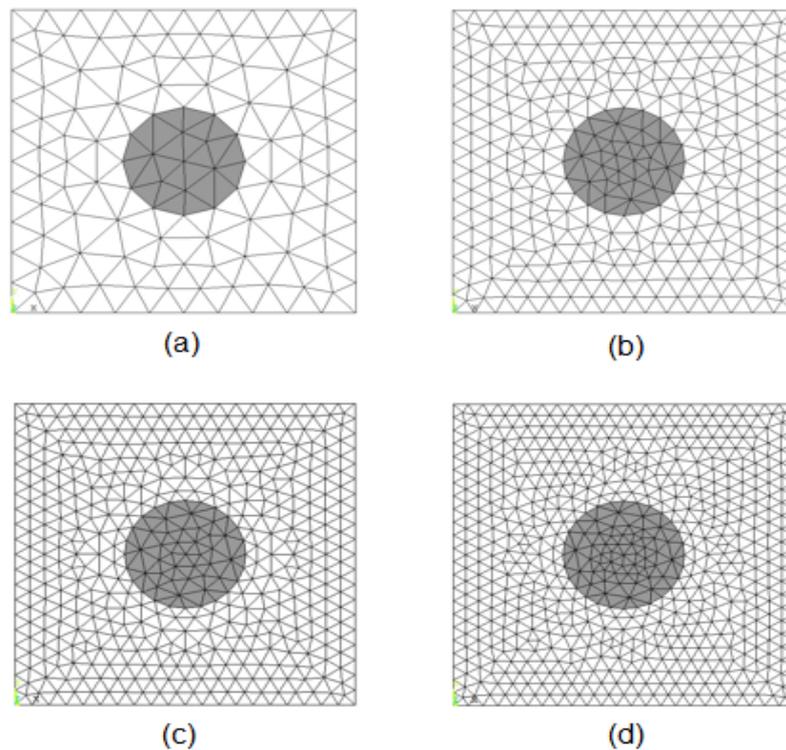
consideradas duas análises diferentes: uma adotando a inclusão menos rígida que a matriz e na outra a inclusão é mais rígida que a matriz, sendo as propriedades elásticas apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Valores das propriedades elásticas utilizadas em EVRs com inclusões

Propriedades elásticas	Inclusão menos rígida	Inclusão mais rígida
Módulo de Young da matriz (GPa)	70	70
Coefficiente de Poisson da matriz	0,3	0,3
Módulo de Young da inclusão (GPa)	25	200
Coefficiente de Poisson da inclusão	0,2	0,2

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 19 - EVRs com volume de inclusão  $v_f = 10\%$



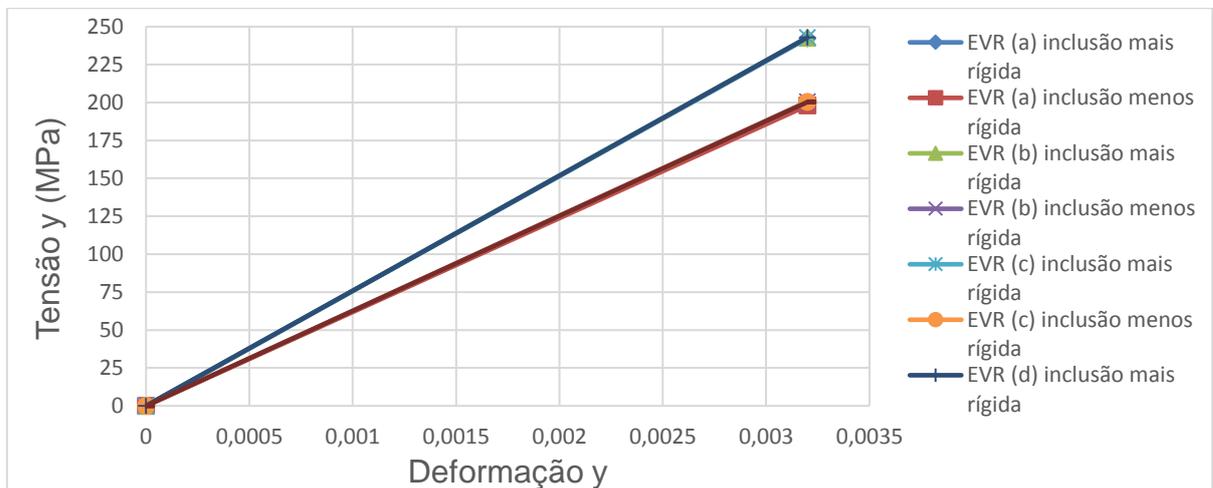
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 19 têm-se as quatro discretizações adotadas para o EVR com volume de inclusão  $v_f = 10\%$ . A malha (a) possui 220 células e 131 nós (40 elementos de contorno e 12 de interface); a malha (b) possui 604 células e 335 nós (64 elementos de contorno e 20 de interface); a malha (c) possui 892 células e 487

nós (80 elementos de contorno e 24 de interface) e a malha (d) possui 1224 células e 659 nós (92 elementos de contorno e 28 de interface).

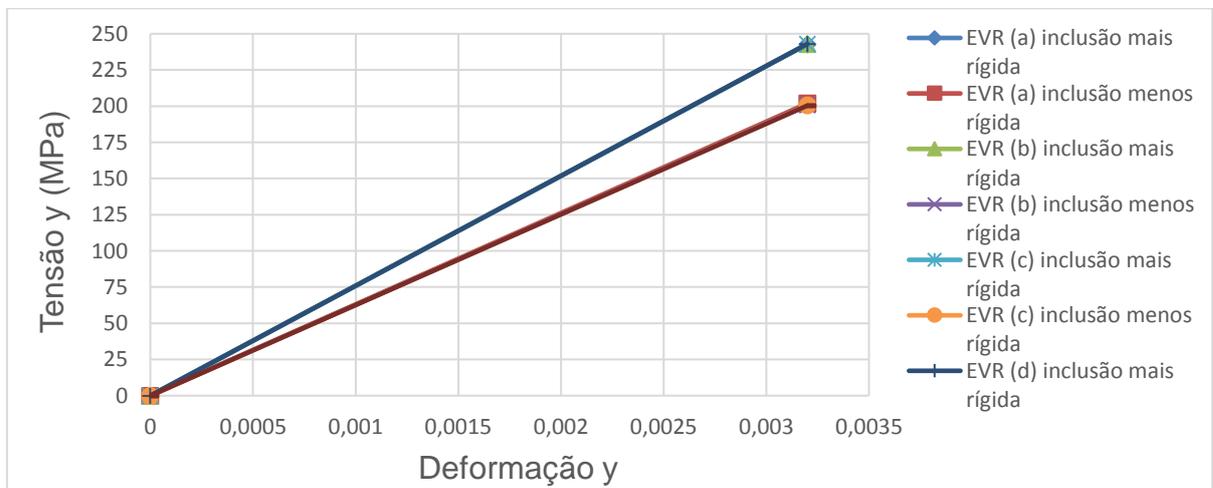
Na Figura 20 e Figura 21 têm-se os valores das tensões homogeneizadas obtidas para os dois casos analisados, sendo a Figura 20 referente à modelagem em MEC e a Figura 21 aos resultados da modelagem em MEF, onde se pode observar que os resultados obtidos com as diferentes malhas são muito próximos. Além disso, quando se definem inclusões mais rígidas que a matriz, obtêm-se maiores valores das tensões homogeneizadas, como era esperado, já que se aumenta a rigidez do material.

Figura 20 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $\nu_f = 10\%$ ) através do MEC



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 21 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $\nu_f = 10\%$ ) através do MEF



Fonte: Elaboração do próprio autor.

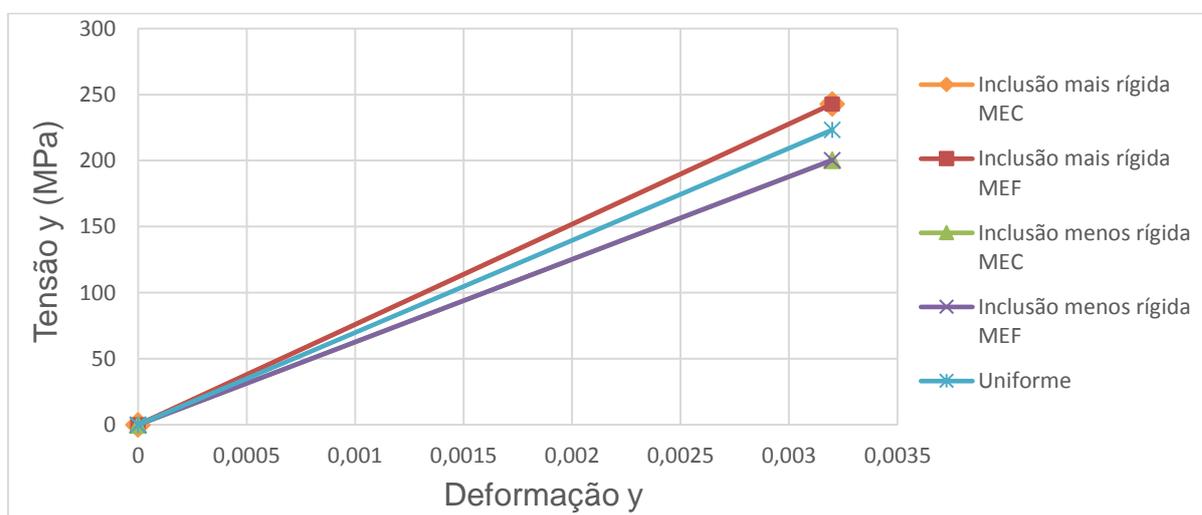
Na Tabela 2 têm-se os valores da tensão homogeneizada em  $y$  referente à deformação, em  $y$  de 0,0032. Pode-se constatar que a diferença dos valores das tensões homogeneizadas, entre o MEC e o MEF, para uma mesma discretização, são muito pequenas, a menos dos valores obtidos com a malha mais pobre que apresentam uma diferença maior. Além disso, com os dois modelos, os resultados obtidos a partir da malha (b) são muito similares àqueles da malha mais refinada.

Tabela 2 - Tensões homogeneizadas no EVR com  $v_f = 10\%$

Discretização EVR (células)	Inclusão menos rígida		Inclusão mais rígida	
	MEC	MEF	MEC	MEF
	(MPa)		(MPa)	
220	198,03	201,95	242,38	242,82
604	200,55	200,79	242,76	242,98
892	200,39	200,52	242,83	242,93
1224	200,30	200,39	242,87	242,95

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 22 – Resultados para o EVR com inclusão ( $v_f = 10\%$ ) mais refinado



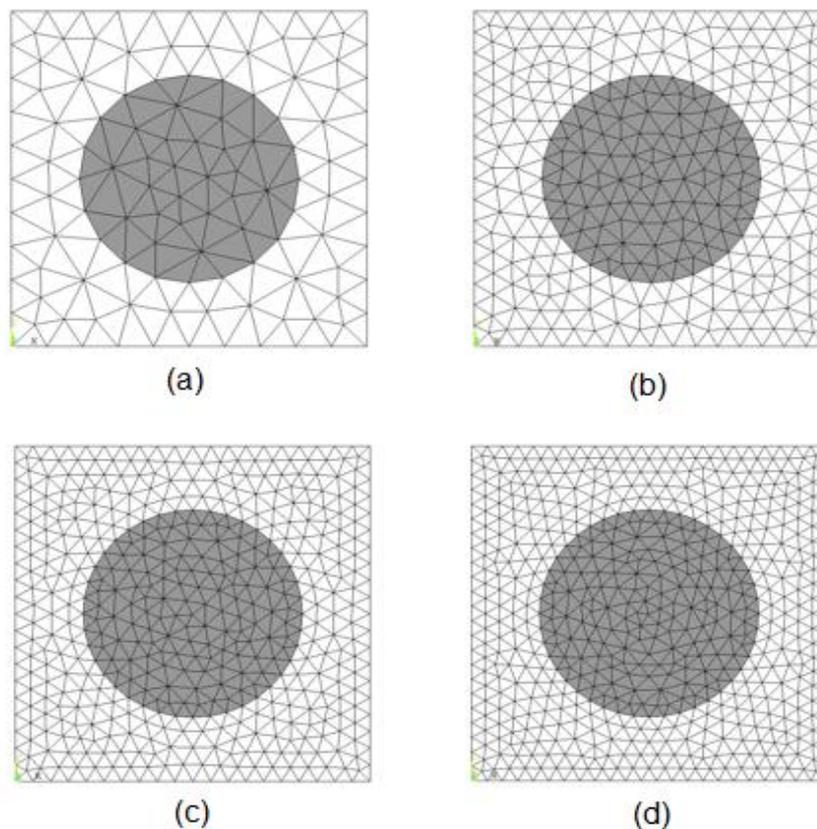
Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 22 expressa os resultados do EVR de malha mais refinada e ainda aqueles obtidos com um EVR uniforme, cuja malha está representada na Figura 18 e cujas propriedades elásticas são iguais às da matriz. Pode-se observar, como era esperado, que o maior valor da tensão é referente ao EVR com inclusão mais rígida que a matriz. Portanto, adicionar à matriz inclusões mais rígidas resulta num material

mais rígido, ao passo que adicionar inclusões menos rígidas que a matriz leva a obtenção de um material com menor rigidez.

Seja agora o caso do EVR com volume de inclusão  $vf = 30\%$ , cujas quatro discretizações estão definidas na Figura 23. A malha (a) possui 204 células e 123 nós (40 elementos de contorno e 20 de interface); a malha (b) possui 566 células e 316 nós (64 elementos de contorno e 32 de interface); a malha (c) possui 886 células e 484 nós (80 elementos de contorno e 40 de interface); a malha (d) possui 1094 células e 594 nós (92 elementos de contorno e 44 de interface). As propriedades elásticas utilizadas neste exemplo são as fornecidas pela Tabela 1.

Figura 23 - EVRs com volume de inclusão  $vf = 30\%$

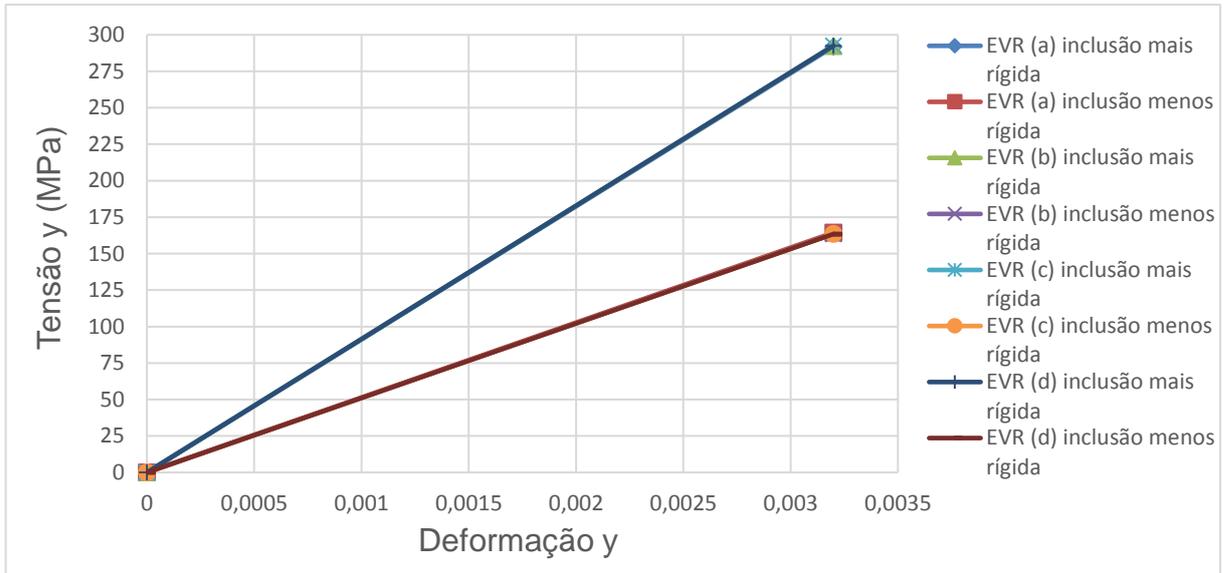


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nas Figura 24 e Figura 25, têm-se os valores das tensões homogeneizadas, sendo a Figura 24 referente aos resultados obtidos através da modelagem em MEC e a Figura 25 aos resultados da modelagem em MEF. Na Tabela 3 têm-se os valores da tensão homogeneizada em  $y$  referente a uma deformação, em  $y$  de 0,0032. Pode-se constatar que a diferença dos valores das tensões

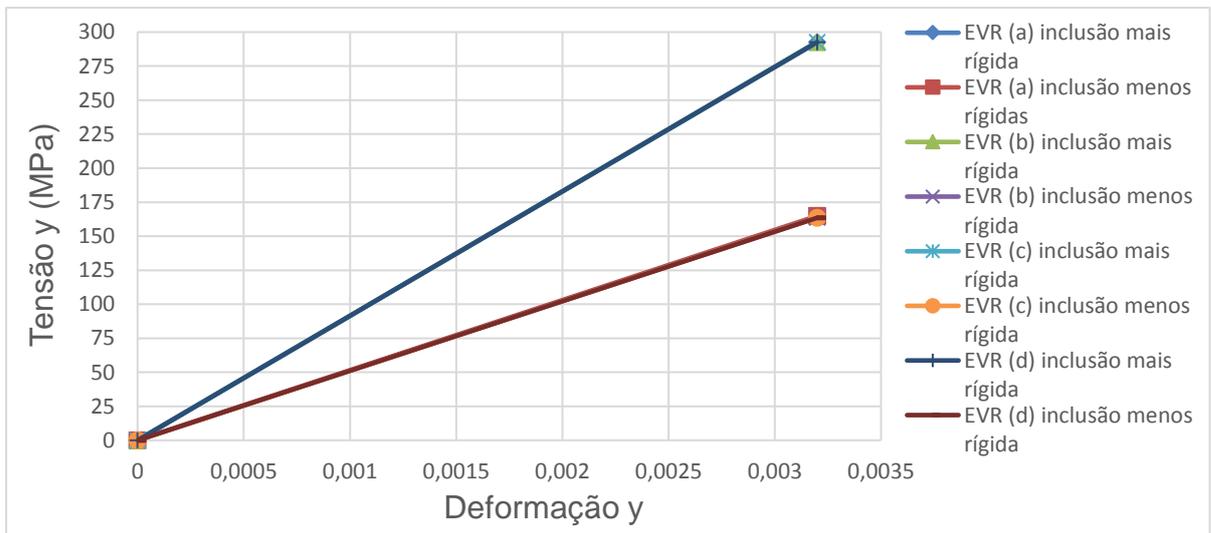
homogeneizadas, entre o MEC e o MEF, para uma mesma discretização, são muito pequenas. Além disso, com os dois modelos, os resultados obtidos com as quatro malhas são muito similares.

Figura 24 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $v_f = 30\%$ ) através do MEC



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 25 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $v_f = 30\%$ ) através do MEF



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 26 têm-se os valores obtidos com o MEC e o MEF para a malha mais refinada, considerando-se inclusão mais rígida que a matriz e inclusão menos rígida que a matriz, além da tensão obtida para EVR uniforme. Comparando a Figura

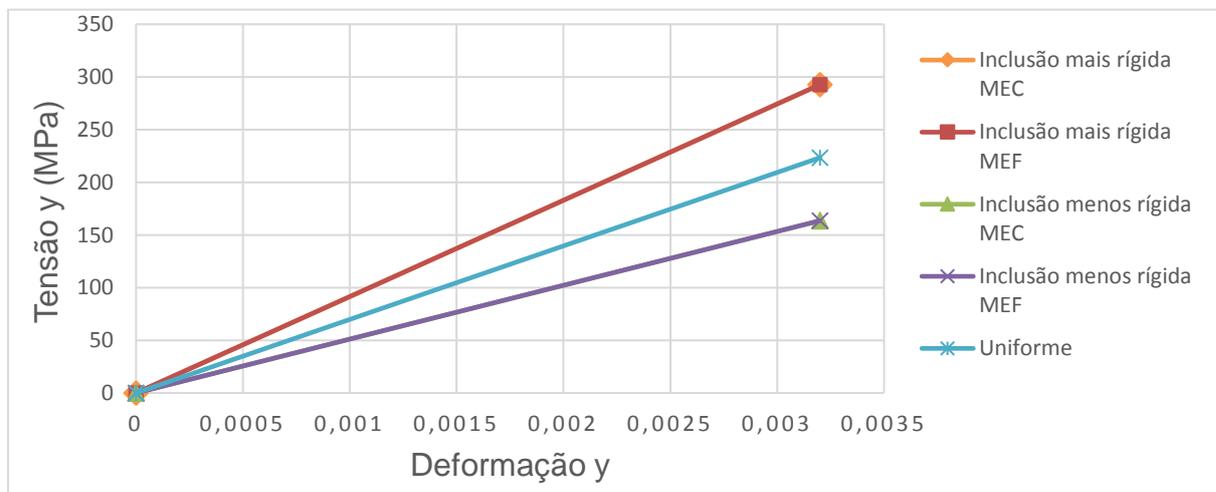
22 com a Figura 26, observa-se um aumento na diferença entre os valores finais das tensões do exemplo anterior com o presente exemplo em consequência do aumento do volume da inclusão, mudando o comportamento do EVR. Pode-se também observar que os valores obtidos com o MEC são muito próximos daqueles obtidos com o MEF.

Tabela 3 - Comparação das tensões homogeneizadas no EVR com  $v_f = 30\%$

Discretização EVR (células)	Inclusão menos rígida		Inclusão mais rígida	
	MEC	MEF	MEC	MEF
	(MPa)		(MPa)	
204	164,42	164,92	291,86	292,76
566	163,67	163,86	292,36	292,69
886	163,51	163,61	292,49	292,66
1094	163,45	163,54	292,53	292,67

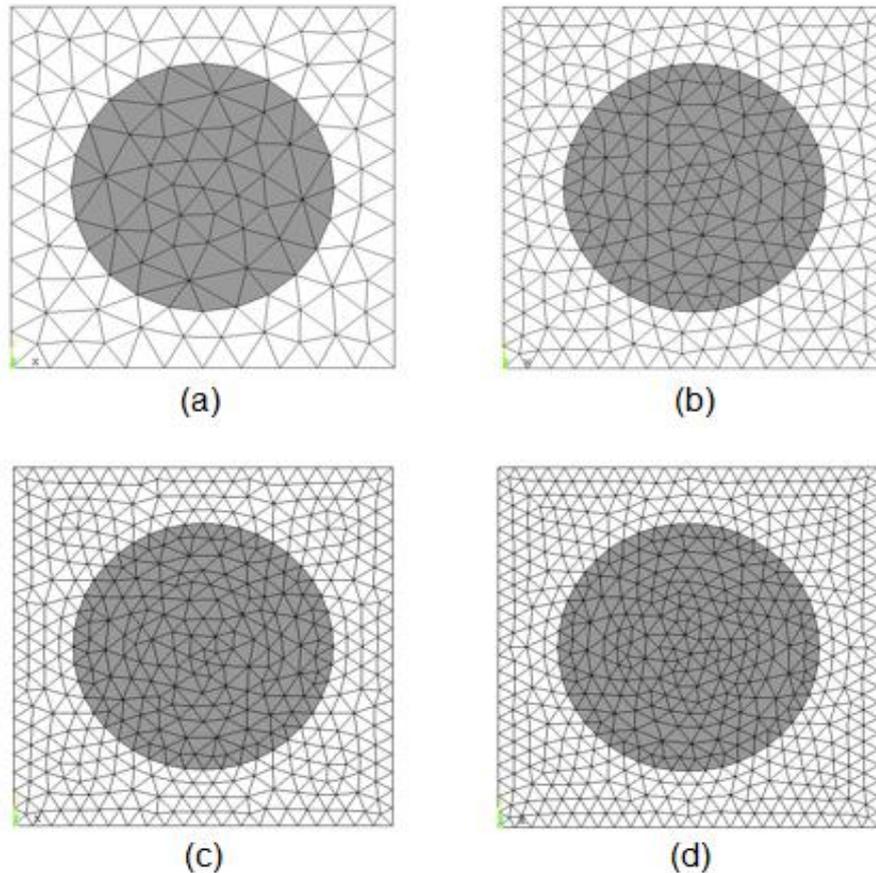
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 26 - Resultados para o EVR com inclusão ( $v_f = 30\%$ ) mais refinado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

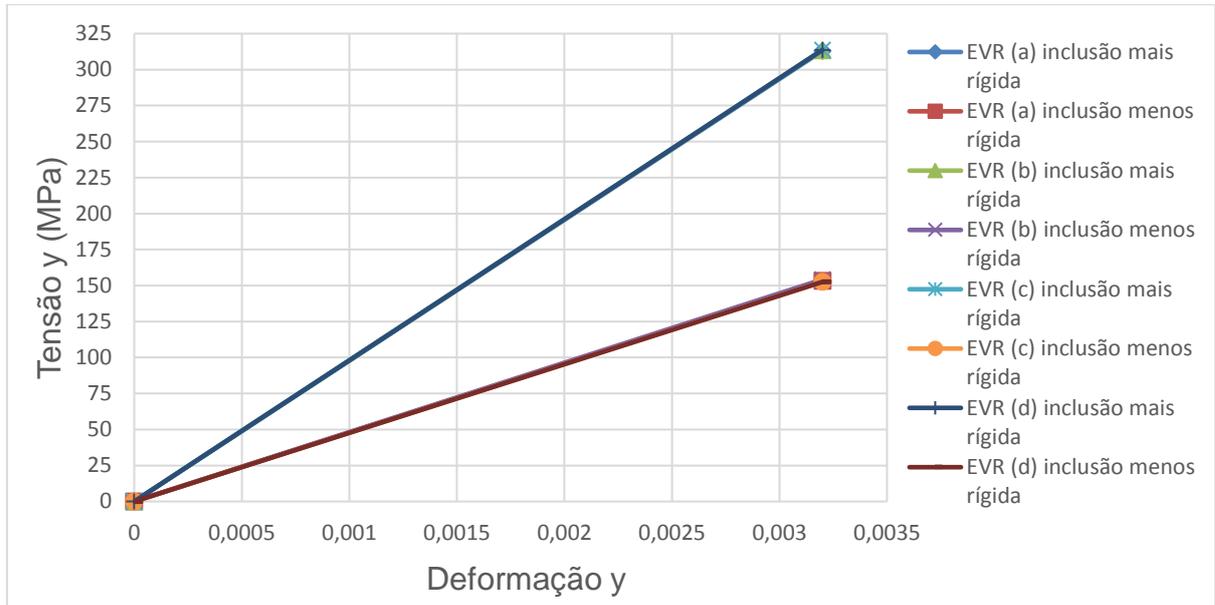
Considere agora a Figura 27, que apresenta as quatro discretizações do EVR com volume de inclusão  $v_f = 37\%$ . A malha (a) possui 236 células e 139 nós (40 elementos de contorno e 24 de interface); a malha (b) possui 576 células e 321 nós (64 elementos de contorno e 36 de interface); a malha (c) possui 874 células e 478 nós (80 elementos de contorno e 44 de interface); a malha (d) possui 1084 células e 589 nós (92 elementos de contorno e 48 de interface):

Figura 27 - EVRs com volume de inclusão  $v_f = 37\%$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor.

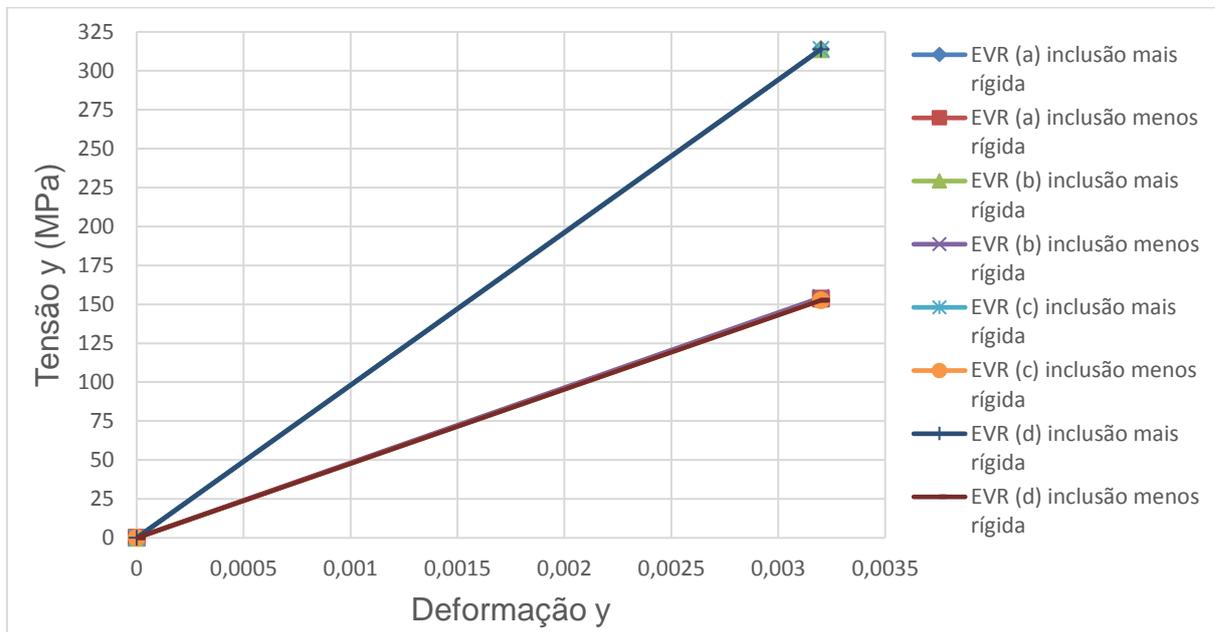
Na Figura 28 e Figura 29, têm-se os valores das tensões homogeneizadas obtidas para as duas diferentes análises, cujas propriedades elásticas estão definidas na Tabela 1, sendo a Figura 28 referente aos resultados obtidos através da modelagem em MEC e a Figura 29 aos resultados da modelagem em MEF. Na Tabela 4 têm-se os valores da tensão homogeneizada em  $y$  referente a uma deformação, em  $y$  de 0,0032. Pode-se notar que os valores obtidos com as quatro discretizações são muito próximos, tanto para o MEC como para o MEF. Além disso, os valores obtidos com o MEC são muito próximos daqueles obtidos com o MEF. Como houve um novo aumento do volume de fração da inclusão, aumentou-se ainda mais a diferença nos valores das tensões homogeneizadas para as duas diferentes análises, o que é coerente.

Figura 28 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $\nu_f = 37\%$ ) através do MEC



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 29 - Convergência dos resultados dos EVRs ( $\nu_f = 37\%$ ) através do MEF



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 30 mostra as tensões obtidas através da análise do EVR mais refinado com  $\nu_f = 37\%$ . Os valores finais das tensões da Figura 30, se distanciaram levemente em comparação ao exemplo anterior, de EVRs com  $\nu_f = 30\%$  em consequência do aumento da fração do volume da inclusão no EVR. Pode-se notar

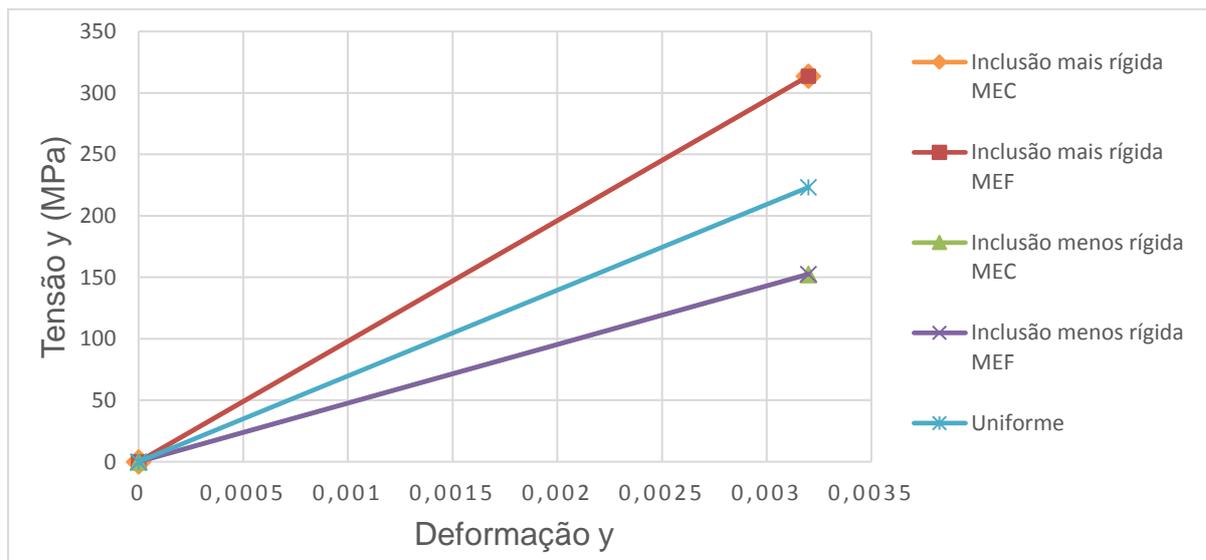
que os valores obtidos com o MEC são praticamente iguais àqueles obtidos com o MEF.

Tabela 4 - Tensões homogeneizadas no EVR com  $v_f = 37\%$

Discretização EVR (células)	Inclusão menos rígida		Inclusão mais rígida	
	MEC	MEF	MEC	MEF
	(MPa)		(MPa)	
236	153,27	153,58	313,05	313,78
576	154,22	154,38	313,51	313,83
874	152,59	152,67	313,64	313,83
1084	152,54	152,61	313,67	313,84

Fonte: Elaboração do próprio autor.

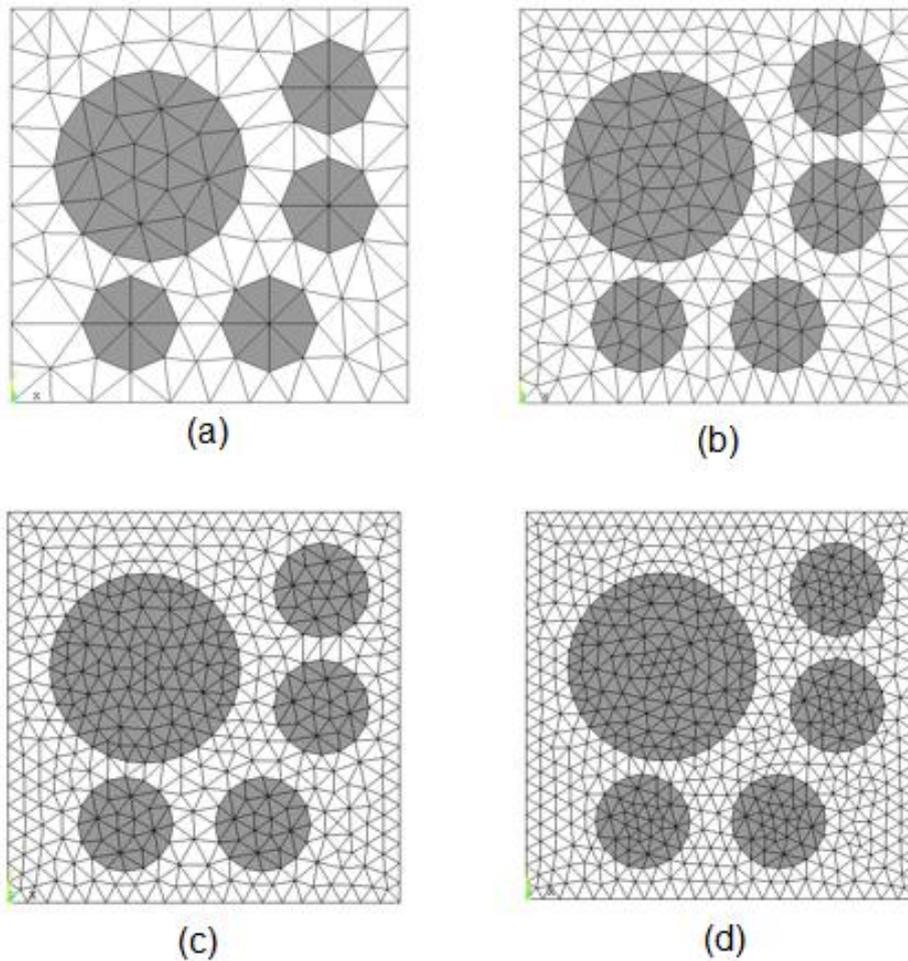
Figura 30 - Resultados para o EVR com inclusão ( $v_f = 37\%$ ) mais refinado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Finalmente, tem-se um EVR com cinco inclusões e volume de fração total de  $v_f = 37\%$ , cujas quatro discretizações estão apresentadas na Figura 31. A malha (a) possui 204 células e 123 nós (40 elementos de contorno e 48 de interface); a malha (b) possui 488 células e 277 nós (64 elementos de contorno e 72 de interface); a malha (c) possui 880 células e 481 nós (80 elementos de contorno e 96 de interface); a malha (d) possui 1222 células e 658 nós (92 elementos de contorno e 116 de interface).

Figura 31 - EVRs com 5 inclusões de volume total  $v_f = 37\%$

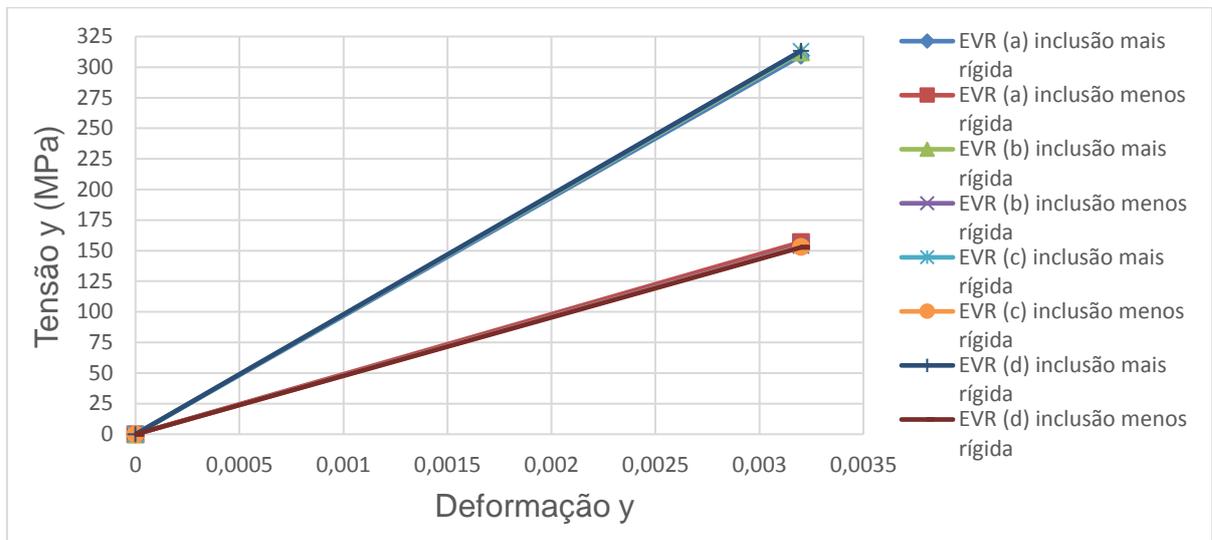


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 32 e Figura 33, têm-se os valores das tensões homogeneizadas obtidas para as duas diferentes análises descritas na Tabela 1, sendo a Figura 32 referente aos resultados obtidos através da modelagem em MEC e a Figura 33 aos resultados da modelagem em MEF. Na Tabela 5 têm-se os valores da tensão homogeneizada em  $y$  referente a uma deformação, em  $y$  de 0,0032.

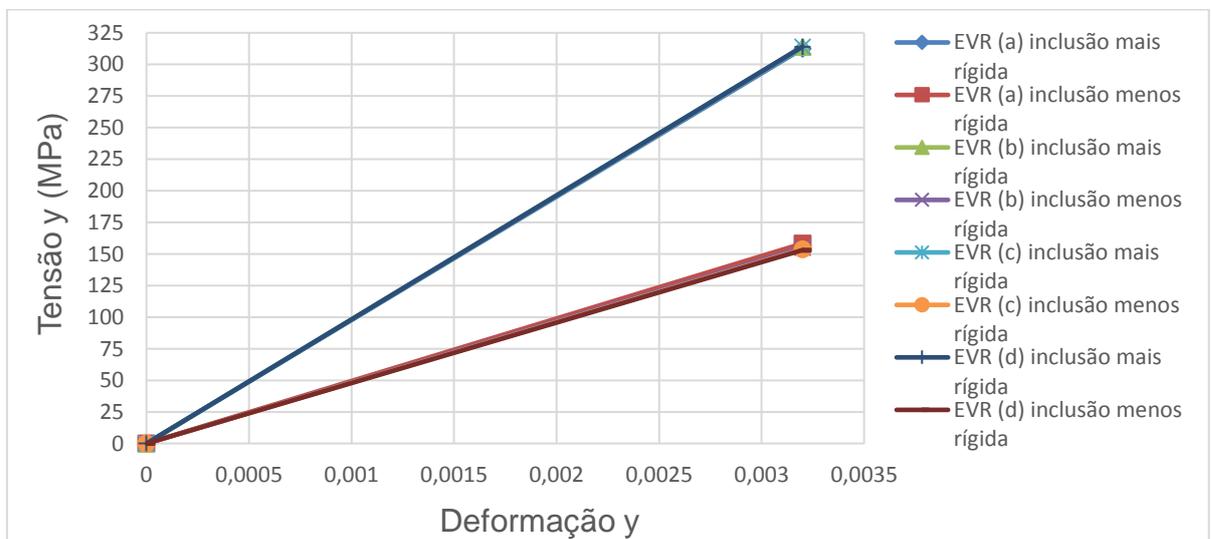
Nota-se que a convergência dos valores das tensões homogeneizadas para as malhas dos EVR's com cinco inclusões, ver Figura 31, é um pouco mais lenta quando comparada com as malhas dos EVR's anteriores de apenas uma inclusão inserida dentro da matriz, ver Figura 19, Figura 23 e Figura 27. Porém, observam-se valores muito próximos para as duas malhas mais refinadas. Isso ocorre tanto para inclusões mais rígidas quanto para inclusões menos rígidas que a matriz.

Figura 32 - Convergência dos resultados do EVR com 5 inclusões ( $v_f = 37\%$ ) através do MEC



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 33 - Convergência dos resultados do EVR com 5 inclusões ( $v_f = 37\%$ ) através do MEF



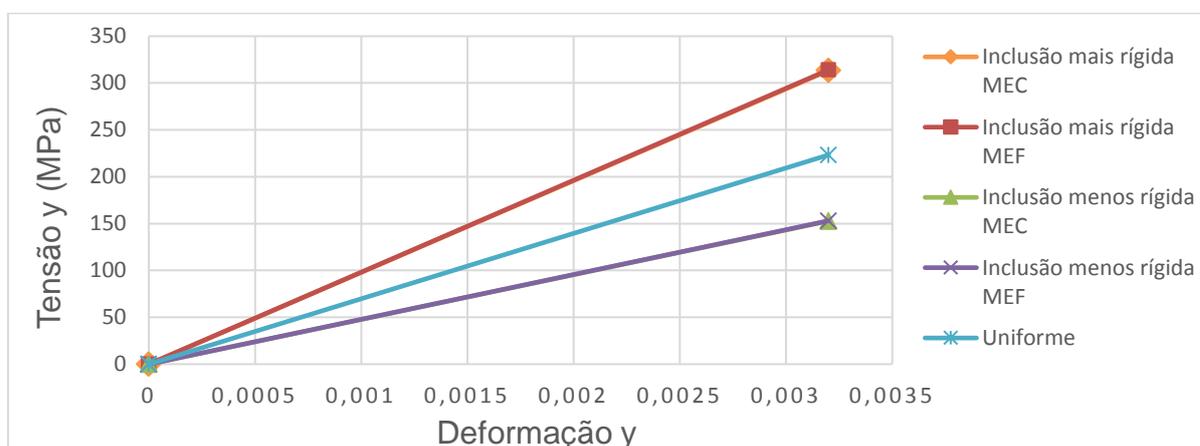
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 34 tem-se os valores das tensões homogeneizadas obtidas a partir do EVR mais refinado da Figura 31, onde pode-se notar que os valores do MEC são muito próximos do MEF. Pode-se observar ainda que este gráfico é muito semelhante ao gráfico representado pela Figura 30. Tal fato é ocasionado pela fração de volume de inclusão do exemplo anterior ser a mesma deste. Mudando apenas o número de inclusões.

Tabela 5 - Tensões homogeneizadas no EVR de 5 inclusões

Discretização EVR (células)	Inclusões menos rígidas		Inclusão mais rígidas	
	MEC	MEF	MEC	MEF
	(MPa)		(MPa)	
204	156,94	158,23	309,34	312,46
488	154,16	154,92	311,95	313,81
880	153,14	153,62	312,87	314,02
1222	152,72	153,05	313,29	314,04

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 34 - Resultados para o EVR com 5 inclusões ( $v_f = 37\%$ ) mais refinado

Fonte: Elaboração do próprio autor.

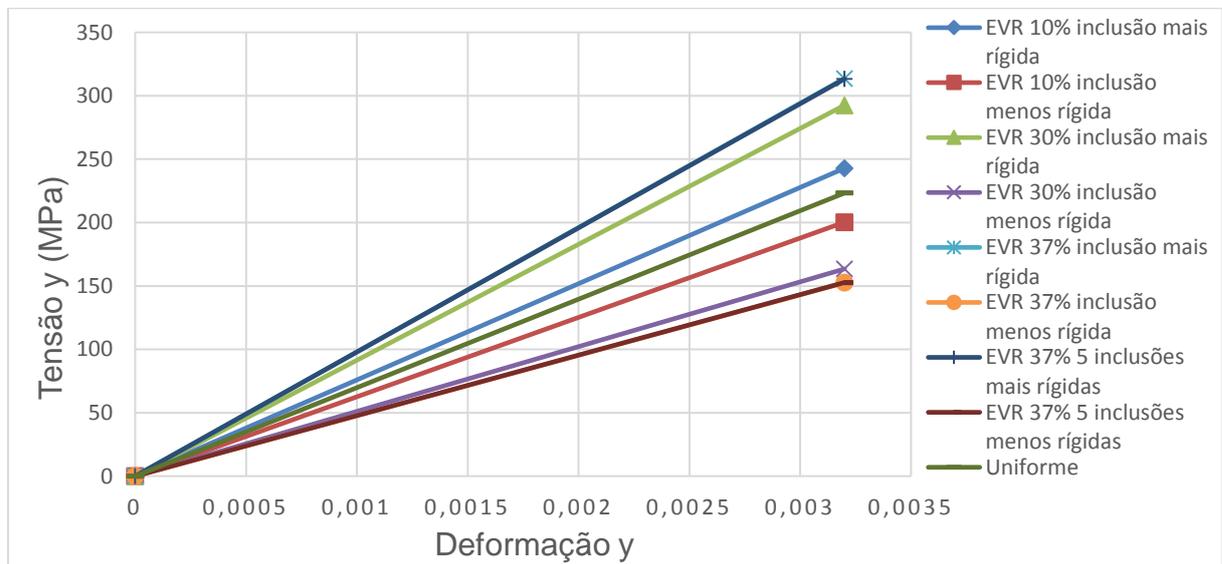
Na Figura 35 apresenta-se o gráfico apenas com os valores das tensões homogeneizadas obtidas pela modelagem em MEC, para as malhas mais refinadas da Figura 19, Figura 23, Figura 27 e Figura 31, a fim de mostrar a variação dos valores das tensões através das diferentes frações de volume de inclusão. É interessante observar que o valor da tensão para um EVR uniforme está situado entre aqueles com inclusão mais rígida e com inclusão menos rígida. Pode-se constatar um aumento significativo na diferença entre as tensões à medida que aumenta a fração de volume da inclusão. Portanto, constata-se que ao inserir inclusões com diferentes propriedades dentro da matriz do EVR, muda-se o comportamento do material e sua rigidez. É interessante ainda observar que os valores das tensões homogeneizadas para fração de volume de 37%, seja adotando apenas uma inclusão no centro ou 5 inclusões, são bem próximos. É possível notar

também que os valores obtidos a partir da modelagem em MEC são mais próximos do que os desenvolvidos em MEF, ver Tabela 4 e Tabela 5.

A Tabela 6 expressa os valores das tensões homogeneizadas em  $y$  referente a uma deformação, em  $y$  de 0,0032, apresentadas no gráfico da Figura 35. Já, a Tabela 7 e Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 8 apresentam os valores dos tensores constitutivos obtidos através do MEC para ambas as considerações das características das inclusões, conforme a Figura 35, com base nos dados expressos na Tabela 1.

Figura 35 - Comparação dos resultados dos EVRs mais refinados com inclusão através do MEC



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Quando é considerado o comportamento elástico dos materiais do EVR, os tensores constitutivos são indênticos para o MEC e o MEF. Isso se deve ao fato de que o tensor constitutivo é obtido através da mesma expressão nos dois modelos, sendo o mesmo calculado em função da relação constitutiva das células, que nesse caso é dada pela lei de Hooke, e da condição de contorno em termos de flutuação dos deslocamentos. Porém, caso fosse considerado um fenômeno dissipativo no EVR, como plasticidade, os tensores constitutivos nas células obtidos com o MEC e o MEF seriam semelhantes, mas não exatamente iguais. Isso se deve ao fato de que as correções de flutuações que são calculadas no processo iterativo com o MEC e o MEF não são exatamente iguais, o que geram correções de incrementos de

deformações um pouco diferentes e, conseqüentemente, chegam-se a tensores constitutivos nas células também um pouco diferentes.

Tabela 6 - Valor da tensão homogeneizada para as malhas mais refinadas com inclusões

Fração de Volume da inclusão (células)	Inclusão menos rígida	Inclusão mais rígida	Uniforme
	MEC (MPa)	MEC (MPa)	MEC (MPa)
vf 10% (1224)	200,30	242,87	-
vf 30% (1094)	163,45	292,53	-
vf 37% (1084)	152,54	313,67	-
5 vf 37% (1222)	152,72	313,29	-
Uniforme	-	-	223,30

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 7 - Tensores constitutivos para os EVRs de malhas mais refinadas com inclusão menos rígida

Fração de volume da inclusão (células)	Tensor Constitutivo - MEC (GPa)		
	vf 10% (1224)	$\begin{bmatrix} 68,77 & 19,88 & 0,00 \\ 19,88 & 68,77 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 24,22 \end{bmatrix}$	
vf 30% (1094)	$\begin{bmatrix} 55,60 & 14,52 & 0,00 \\ 14,52 & 55,60 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 19,34 \end{bmatrix}$		
vf 37% (1084)	$\begin{bmatrix} 51,71 & 12,98 & 0,00 \\ 12,98 & 51,71 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 17,90 \end{bmatrix}$		
5 vf 37% (1222)	$\begin{bmatrix} 51,48 & 13,26 & 0,00 \\ 13,26 & 51,94 & 0,06 \\ 0,00 & 0,06 & 18,21 \end{bmatrix}$		
Uniforme	$\begin{bmatrix} 76,92 & 23,08 & 0,00 \\ 23,08 & 76,23 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 26,92 \end{bmatrix}$		

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 8 - Tensores constitutivos para os EVRs de malhas mais refinadas com inclusão mais rígida

Fração de volume da inclusão (células)	Tensor Constitutivo - MEC		
	(GPa)		
vf 10% (1224)	83,49	24,46	0,00
	24,46	83,49	0,00
	0,00	0,00	29,31
vf 30% (1094)	99,79	26,92	0,00
	26,92	99,79	0,00
	0,00	0,00	34,63
vf 37% (1084)	106,65	27,71	0,00
	27,71	106,65	0,00
	0,00	0,00	36,81
5 vf 37% (1222)	105,99	27,96	-0,02
	27,96	106,79	0,11
	-0,02	0,11	37,27
Uniforme	76,92	23,08	0,00
	23,08	76,23	0,00
	0,00	0,00	26,92

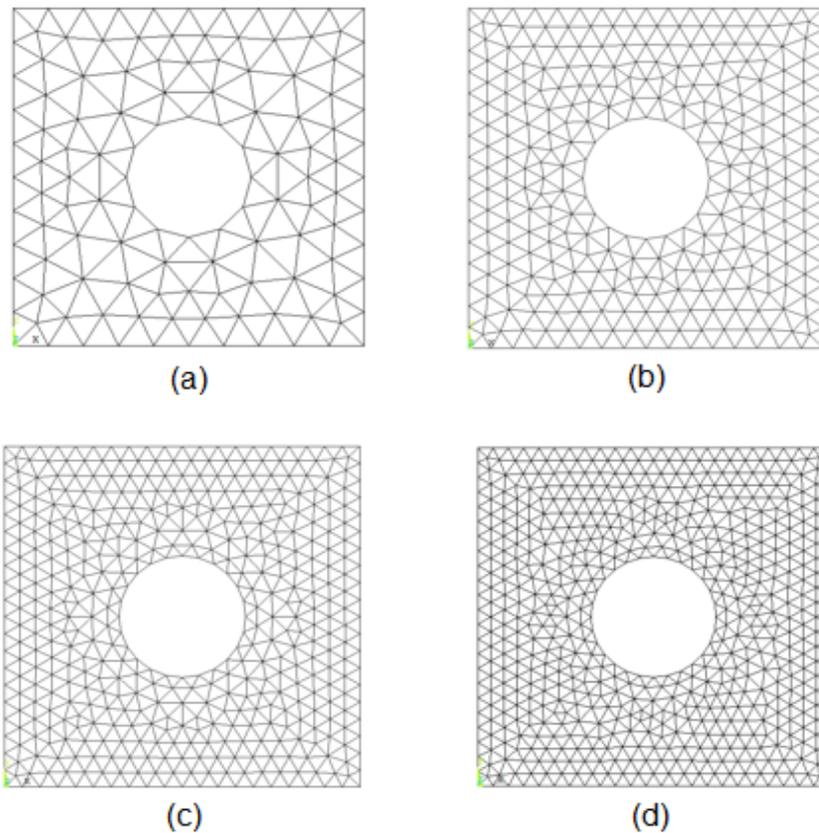
Fonte: Elaboração do próprio autor.

### 5.3 Comportamento dos EVRs com Diferentes Volumes de Vazio

Neste item serão tratados quatro tipos diferentes de EVR, com diferentes frações de volume (**vf**) para os vazios e análogos àqueles definidos no item 5.2, onde ao invés de inclusões são definidos vazios. Para cada tipo de EVR foram adotadas quatro malhas diferentes, a fim de mostrar a convergência dos resultados com o refinamento da malha. Assim, na Figura 36, Figura 40, Figura 44 e Figura 48 têm-se as diferentes discretizações adotadas, respectivamente, para volume de vazio **vf = 10%**, **vf = 30%**, **vf = 37%** e com 5 vazios onde **vf = 37%**. Além disso, os valores homogeneizados das tensões e do tensor constitutivo serão comparados com aqueles obtidos com o MEF, para validar a formulação do MEC. Observe que em todos os casos, a condição de contorno aplicada é a de flutuações periódicas, sendo o vetor das deformações impostas ao EVR, como condição inicial, dado por:  $\varepsilon = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}\} = \{-0,00045 \quad 0,0015 \quad 0,0002\}$ . As propriedades elásticas adotadas para a matriz são: **E = 70 GPa** e **v = 0,3**.

Na Figura 36, apresentam-se as quatro discretizações do EVR com volume de vazio  $vf = 10\%$ . A malha (a) possui 196 células e 124 nós (40 elementos de contorno e 12 de interface); a malha (b) possui 540 células e 312 nós (64 elementos de contorno e 20 de interface); a malha (c) possui 808 células e 456 nós (80 elementos de contorno e 24 de interface) e a malha (d) possui 1098 células e 609 nós (92 elementos de contorno e 28 de interface):

Figura 36 - EVRs com volume de vazio  $vf = 10\%$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 37 apresenta os valores das tensões homogeneizadas obtidas a partir da modelagem em MEC e a Figura 38 os resultados das tensões homogeneizadas calculadas pelo MEF. NaFonte: Elaboração do próprio autor.

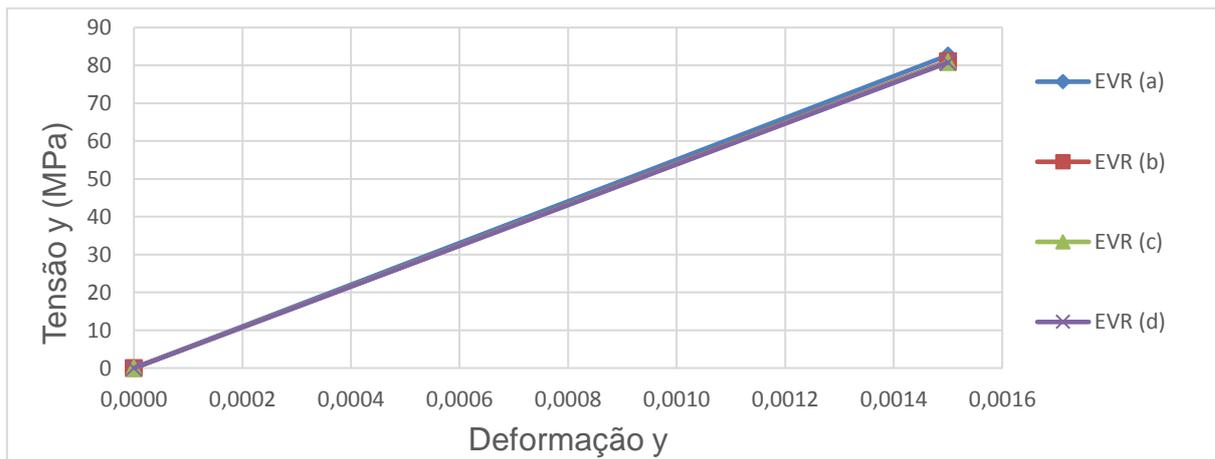
Tabela 9 têm-se os valores da tensão homogeneizada em  $y$  referente a uma deformação, em  $y$  de 0,0015. Pode-se observar que os valores das tensões homogeneizadas obtidas pela formulação em MEC estão muito próximos àquelas calculadas pelo MEF. Além disso, os resultados obtidos com as três malhas mais refinadas são muito próximos tanto para o MEF quanto para o MEC. Porém, a

formulação em MEC apresenta convergência um pouco mais rápida que aquela em MEF, conforme a Figura 37 e Figura 38, e ainda, a Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 9.

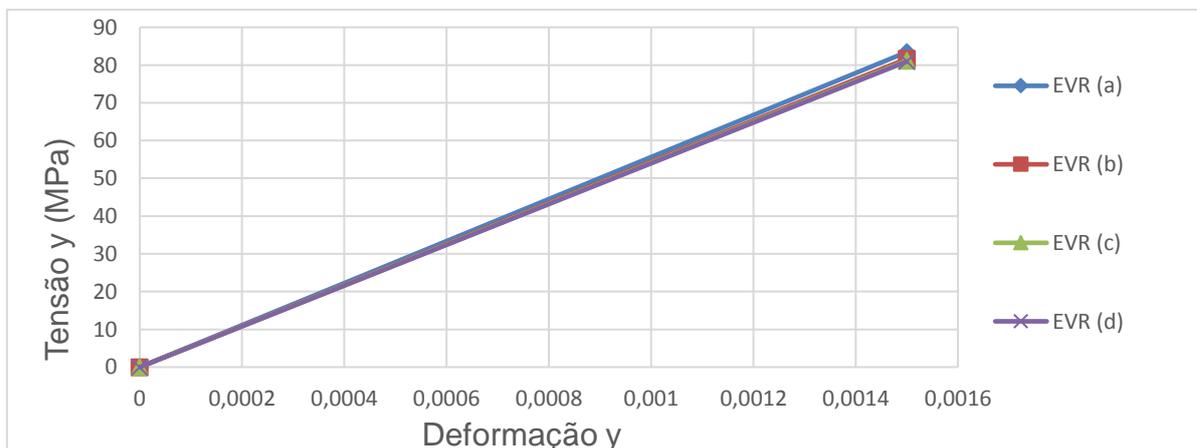
É interessante observar que com a inserção de um vazio no centro do EVR, o valor de sua tensão homogeneizada diminui, em comparação aos mesmos EVR's com volume de fração  $vf = 10\%$  para inclusão, ver Figura 19. Isto ocorre pois, retira-se material do EVR, tornando-o, como um todo, menos rígido. Portanto, espera-se observar nos próximos exemplos a diminuição ainda mais dos valores das tensões homogeneizadas, porque aumentando-se o volume de vazio dentro da matriz, a tensão homogeneizada irá ter seu valor diminuído.

Figura 37 - Convergência dos resultados do EVR com vazio ( $vf = 10\%$ ) através do MEC



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 38 – Convergência dos resultados do EVR com vazio ( $vf = 10\%$ ) através do MEF



Fonte: Elaboração do próprio autor.

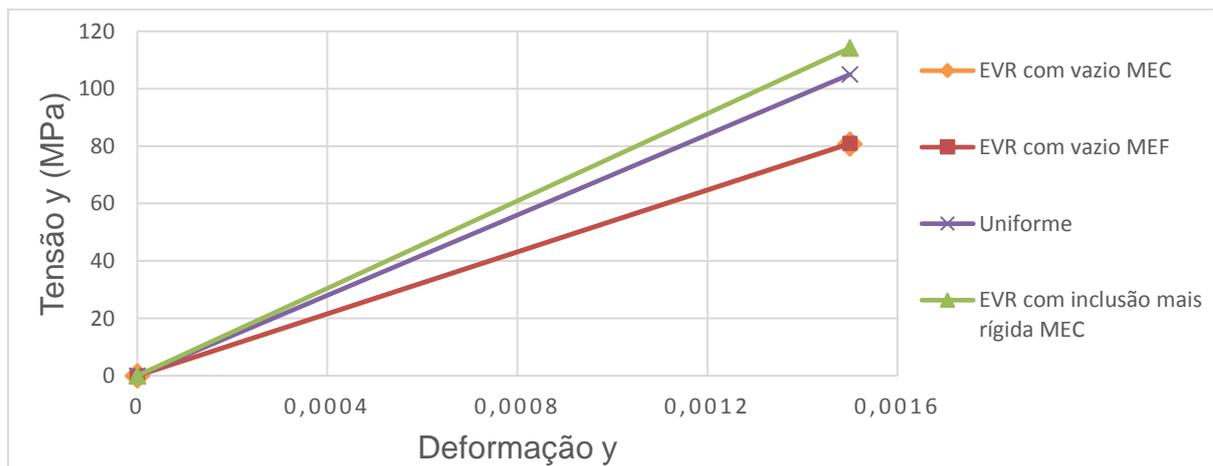
Tabela 9 - Tensões homogeneizadas para o EVR com vazio ( $vf = 10\%$ )

Discretização do EVR (células)	MEC (MPa)	MEF (MPa)
196	82,64	83,44
540	81,13	81,65
808	80,89	81,16
1098	80,75	80,94

Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 39 mostra os valores das tensões homogeneizadas correspondente ao EVR com vazio de malha mais refinada, ver Figura 36. Seus resultados ainda são comparados com um EVR uniforme e outro com uma inclusão de mesma fração de volume,  $vf = 10\%$ , mais rígida que a matriz, através da malha mais refinada da Figura 19. Assim, pode-se observar que os valores das tensões finais para o EVR com vazio, diminui significativamente se comparadas com o uniforme e o que possui uma inclusão. Nota-se também, que a tensão obtida com o MEC é muito próxima daquela obtida com o MEF.

Figura 39 - Resultados para o EVR com vazio ( $vf = 10\%$ ) mais refinado

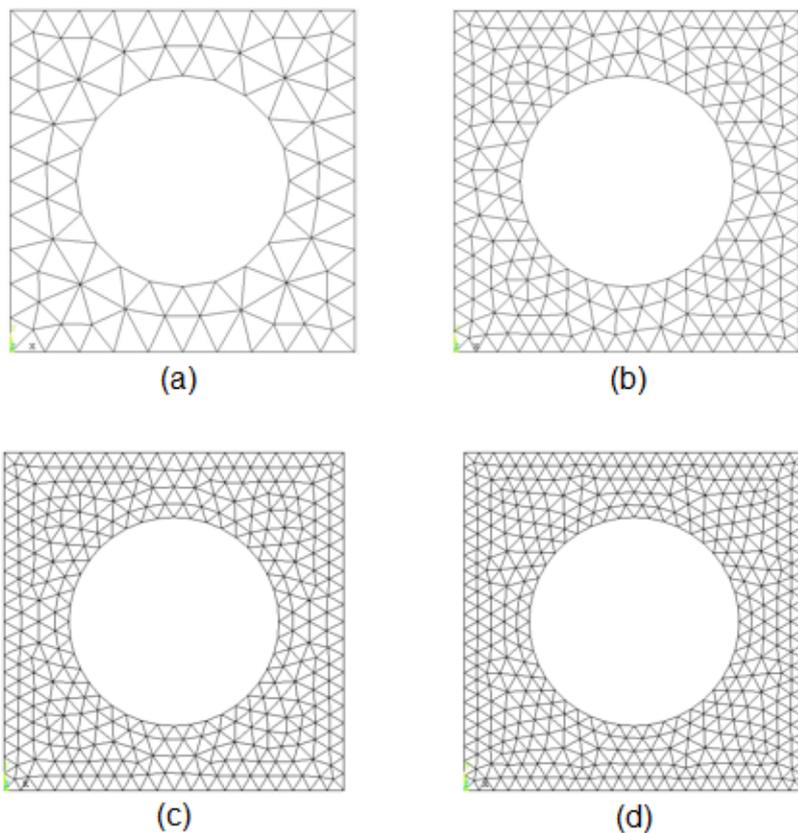


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Seja agora o EVR com volume de vazio  $vf = 30\%$ . Na Figura 40 apresentam-se as quatro discretizações do EVR para esse caso, onde a malha (a) possui 140 células e 100 nós (40 elementos de contorno e 20 de interface); a malha (b) possui 384 células e 240 nós (64 elementos de contorno e 32 de interface); a malha (c)

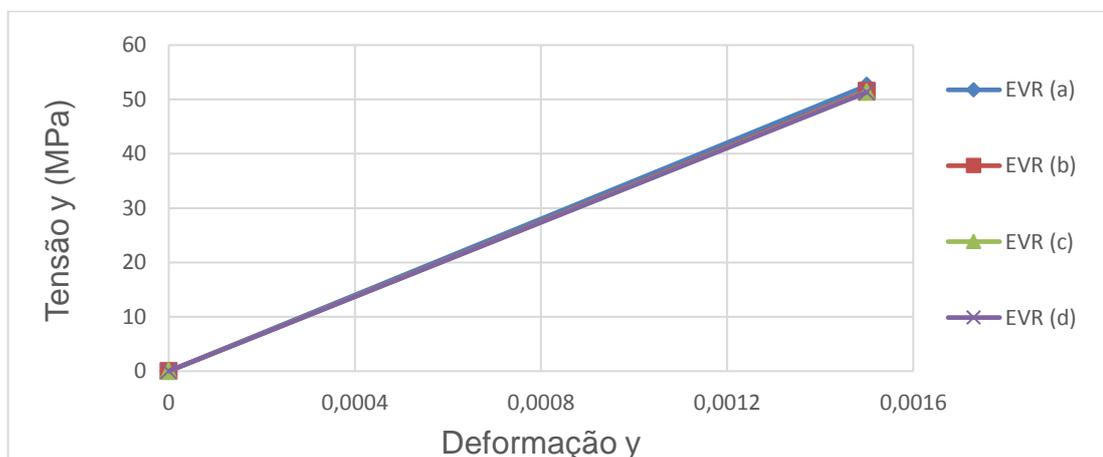
possui 616 células e 368 nós (80 elementos de contorno e 40 de interface) e a malha (d) possui 776 células e 456 nós (92 elementos de contorno e 44 de interface):

Figura 40 - EVRs com volume de vazio  $v_f = 30\%$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

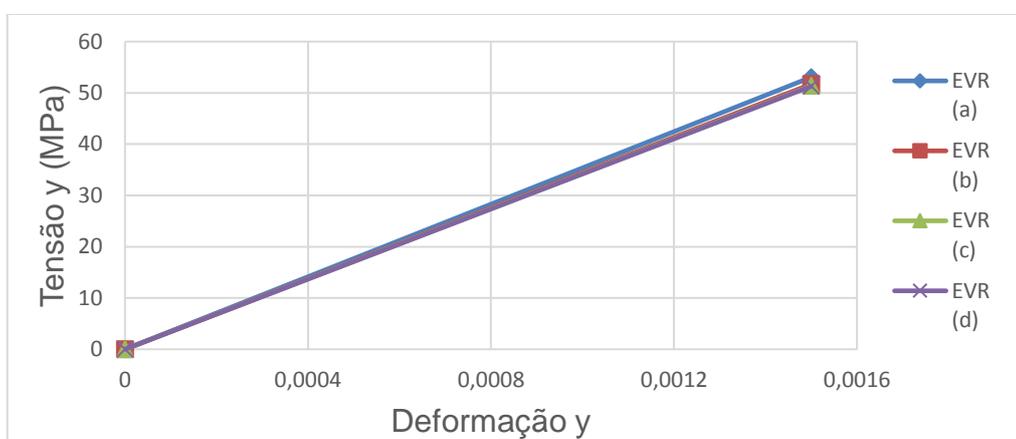
Figura 41 - Convergência dos resultados do EVR com vazio ( $v_f = 30\%$ ) através do MEC



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 41 e Figura 42, têm-se os valores das tensões homogeneizadas, sendo a Figura 41 referente aos resultados obtidos através da modelagem em MEC e a Figura 42 aos resultados da modelagem em MEF. Na Tabela 10 têm-se os valores da tensão homogeneizada em  $y$  referente a uma deformação, em  $y$  de 0,0015. Pode-se notar que os valores das tensões homogeneizadas obtidas pela formulação em MEC estão muito próximos aos calculados pelo MEF. Além disso, os valores obtidos com as três malhas mais refinadas são muito próximos.

Figura 42 - Convergência dos resultados do EVR com vazio ( $v_f = 30\%$ ) através do MEF



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 10 - Tensões homogeneizadas para o EVR com vazio ( $v_f = 30\%$ )

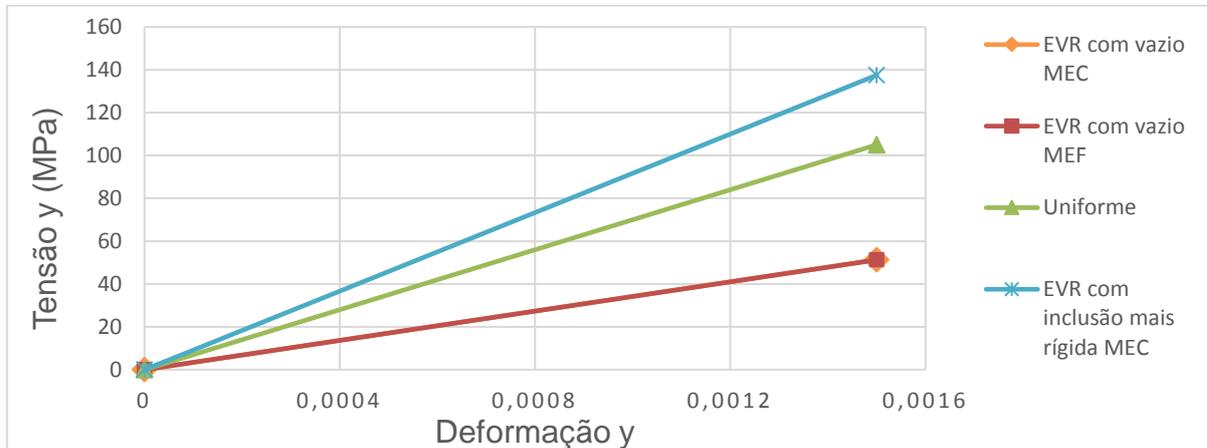
Discretização do EVR (células)	MEC (MPa)	MEF (MPa)
140	52,53	53,05
384	51,60	51,69
616	51,38	51,36
776	51,30	51,27

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 43 é apresentada a comparação das tensões homogeneizadas do EVR mais refinado da Figura 40 com um uniforme e outro com uma inclusão de mesmo volume de fração, porém a inclusão sendo mais rígida que a matriz, através da malha mais refinada da Figura 23. Diferentemente à Figura 39, os valores estão

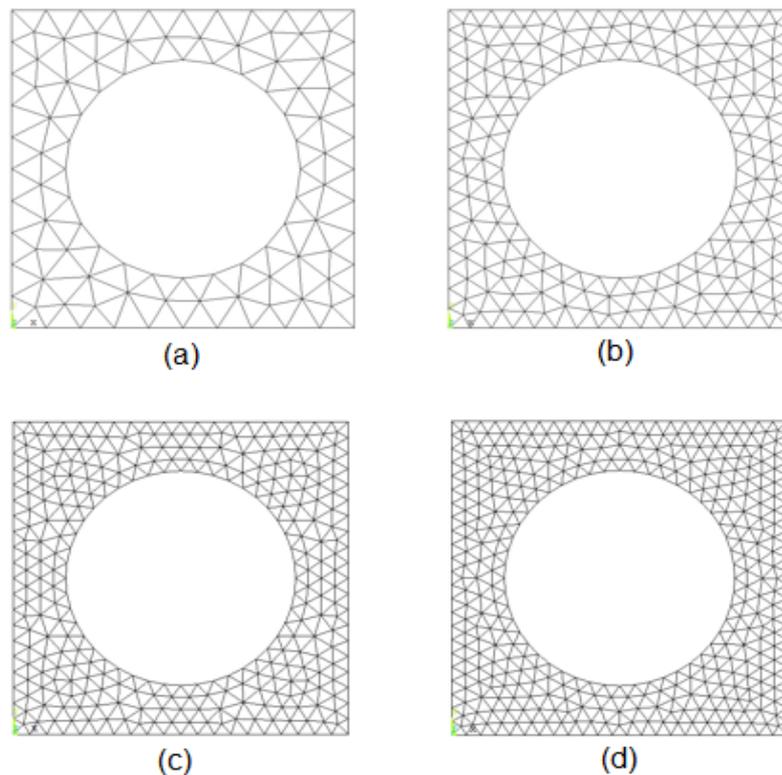
mais distanciados para este exemplo, sendo consequência do aumento do volume de vazio interno ao EVR.

Figura 43 - Resultados para o EVR com vazio ( $v_f = 30\%$ ) mais refinado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 44 - EVRs com volume de vazio  $v_f = 37\%$



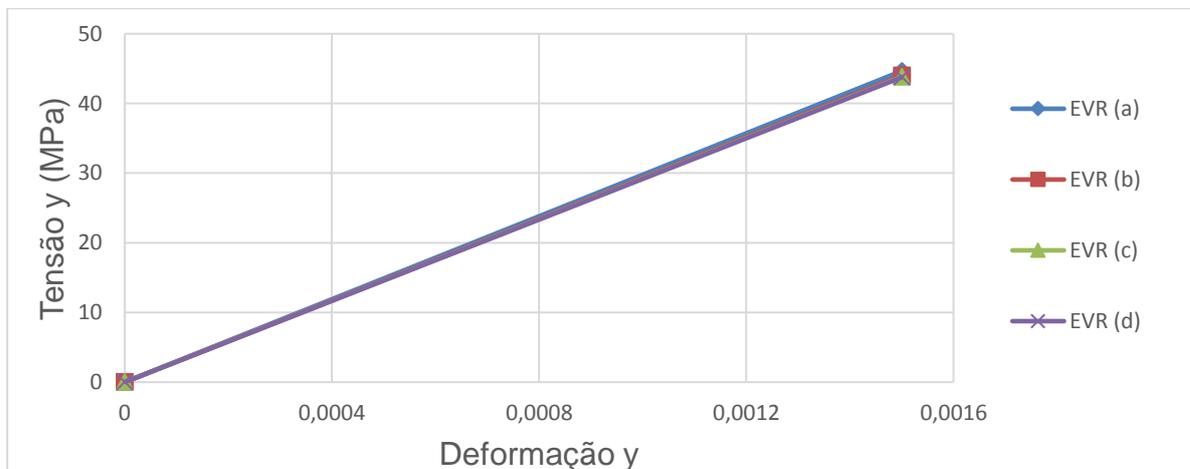
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Considere agora o EVR com um vazio definido no seu centro com volume de vazio  $v_f = 37\%$ , cujas discretizações estão definidas na Figura 44. A malha (a)

possui 152 células e 108 nós (40 elementos de contorno e 24 de interface); a malha (b) possui 356 células e 228 nós (64 elementos de contorno e 36 de interface); a malha (c) possui 556 células e 340 nós (80 elementos de contorno e 44 de interface) e a malha (d) possui 690 células e 415 nós (92 elementos de contorno e 48 de interface).

Na Figura 45 e Figura 46, têm-se os valores das tensões homogeneizadas, sendo a Figura 45 referente aos resultados obtidos através da modelagem em MEC e a Figura 46 aos resultados da modelagem em MEF. Na Tabela 11 têm-se os valores da tensão homogeneizada em  $y$  referente a uma deformação, em  $y$  de 0,0015. Como constatado até o momento, os valores das tensões homogeneizadas obtidas pela formulação em MEC em comparação ao calculado pelo MEF, possuem uma pequena diferença não significativa. Pode-se notar também que os valores obtidos com as três malhas mais refinadas são muito próximos.

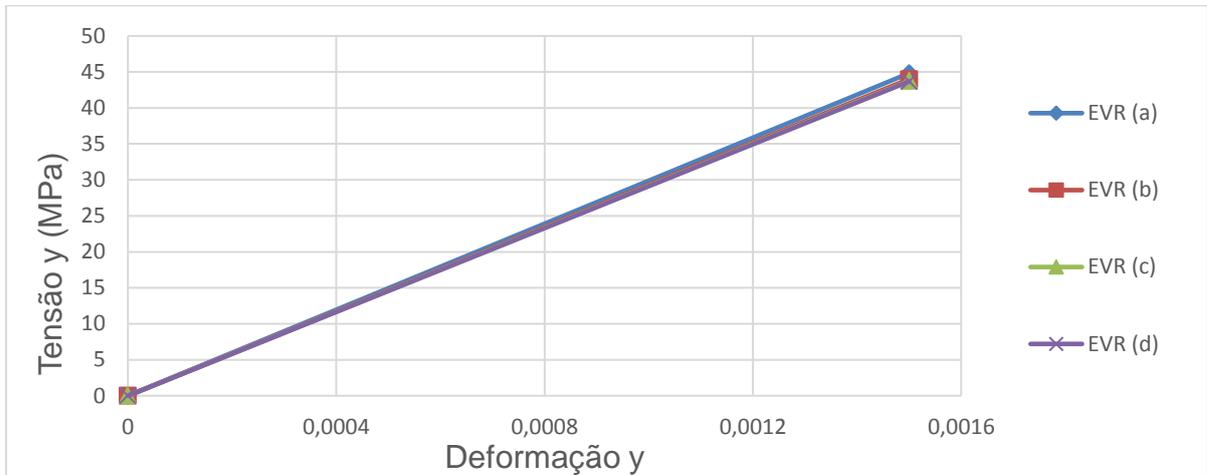
Figura 45 - Convergência dos resultados das tensões homogeneizadas para o EVR com vazio ( $v_f = 37\%$ ) pelo MEC



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 47 representa o gráfico onde são comparados resultados do EVR mais refinado deste exemplo com um uniforme e outro onde a inclusão é mais rígida que a matriz. O EVR com inclusão utilizado é o mais refinado da Figura 27. Assim como a Figura 43, que exprime o mesmo conceito que a Figura 47, os valores das tensões finais se distanciaram um pouco mais com o aumento do volume de vazio. Pode-se notar também que a tensão obtida com o MEC é muito próxima daquela obtida com o MEF.

Figura 46 - Convergência dos resultados das tensões homogeneizadas para o EVR com vazio ( $v_f = 37\%$ ) pelo MEF



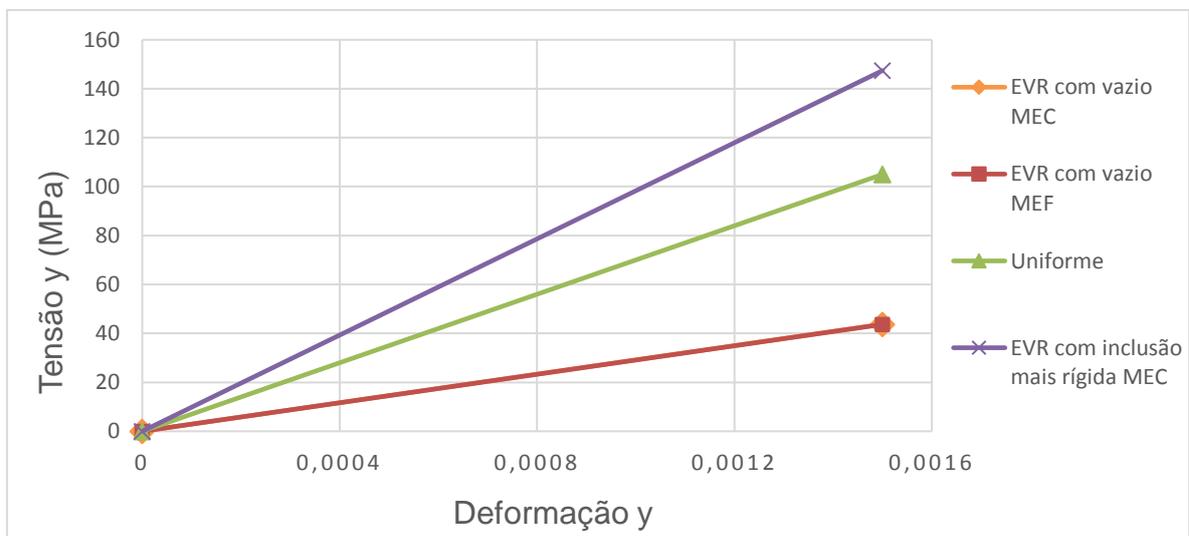
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 11 - Tensões homogeneizadas para o EVR com vazio ( $v_f = 37\%$ )

Discretização do EVR (células)	MEC (MPa)	MEF (MPa)
152	44,64	44,82
356	43,99	44,00
556	43,81	43,75
690	43,75	43,68

Fonte: Elaboração do próprio autor.

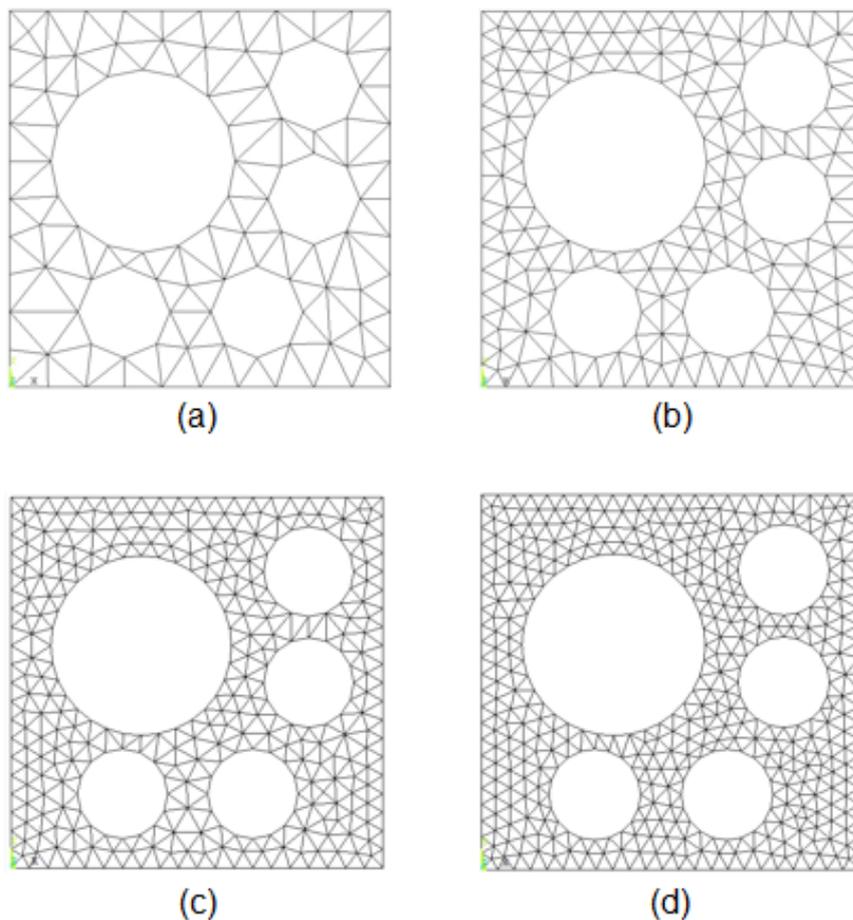
Figura 47 - Resultados para o EVR com vazio ( $v_f = 37\%$ ) mais refinado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O último EVR a ser considerado é aquele com 5 vazios e um volume total de vazios  $vf = 37\%$ , cujas malhas estão representadas na Figura 48. A malha (a) possui 134 células e 107 nós (40 elementos de contorno e 48 de interface); a malha (b) possui 308 células e 218 nós (64 elementos de contorno e 72 de interface); a malha (c) possui 546 células e 357 nós (80 elementos de contorno e 96 de interface) e a malha (d) possui 746 células e 473 nós (92 elementos de contorno e 116 de interface).

Figura 48 - EVRs com 5 vazios de volume total  $vf = 37\%$



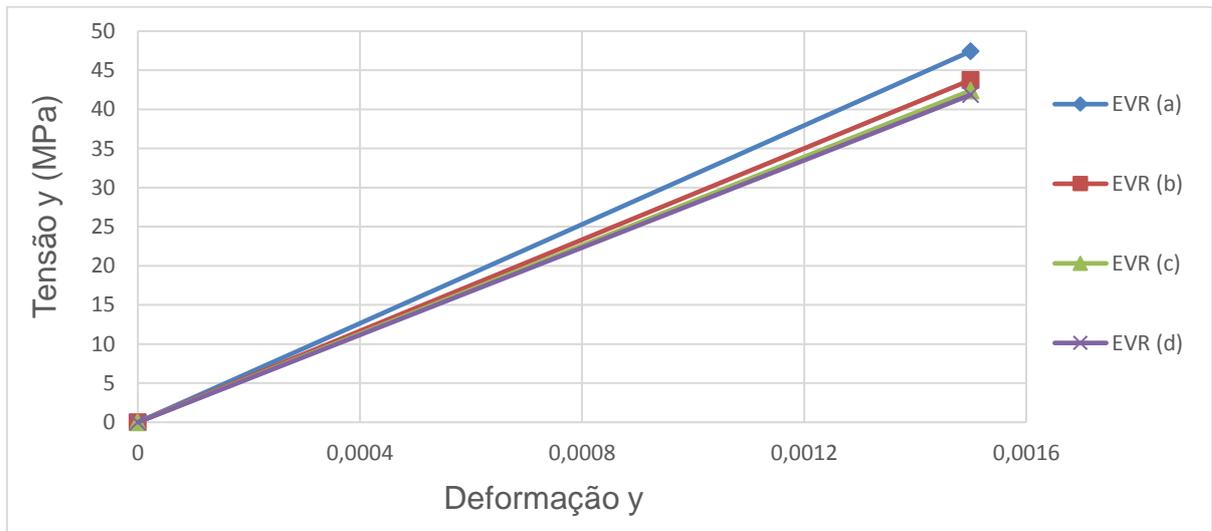
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nas Figura 49 e Figura 50, têm-se os valores das tensões homogeneizadas obtidas, sendo a Figura 49 referente aos resultados obtidos através da modelagem em MEC e a Figura 50 aos resultados da modelagem em MEF. Na Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 12 têm-se os valores da tensão homogeneizada em  $y$  referente a uma deformação, em  $y$  de 0,0015. Diferentemente dos outros exemplos deste item, onde

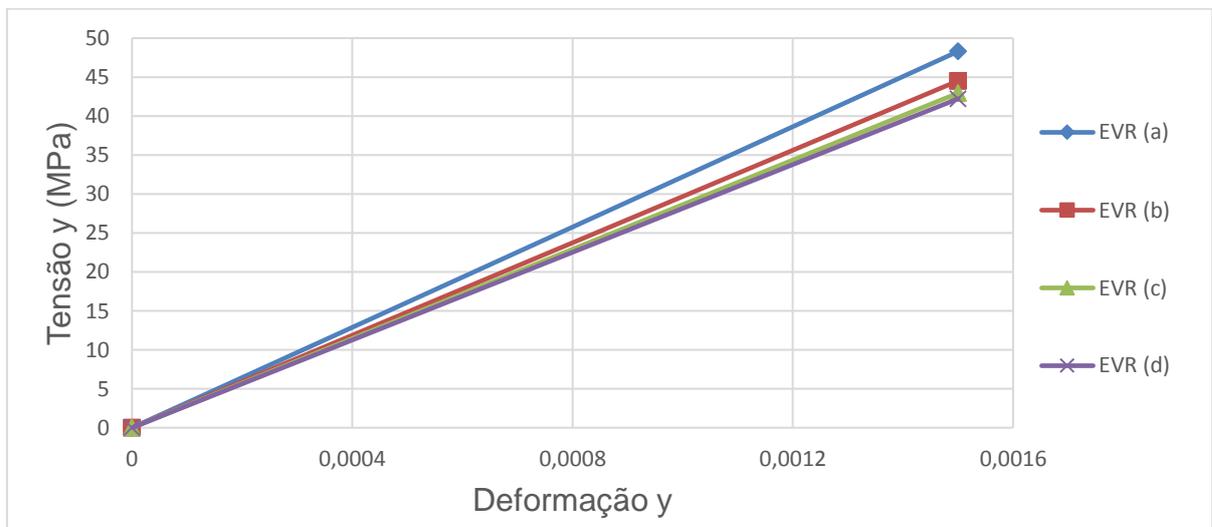
se definiu um vazio no centro do EVR, a convergência dos valores das tensões para os EVR's deste exemplo, ver Figura 48, foram as mais demoradas de alcançar. Com o MEC observam-se valores muito próximos apenas para as duas malhas mais refinadas. Porém, com o MEF, deveria ter sido considerada uma malha ainda mais refinada a fim de se obter a convergência.

Figura 49 - Convergência dos resultados do EVR com 5 vazios ( $v_f = 37\%$ ) através do MEC



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 50 - Convergência dos resultados do EVR com 5 vazios ( $v_f = 37\%$ ) através do MEF



Fonte: Elaboração do próprio autor.

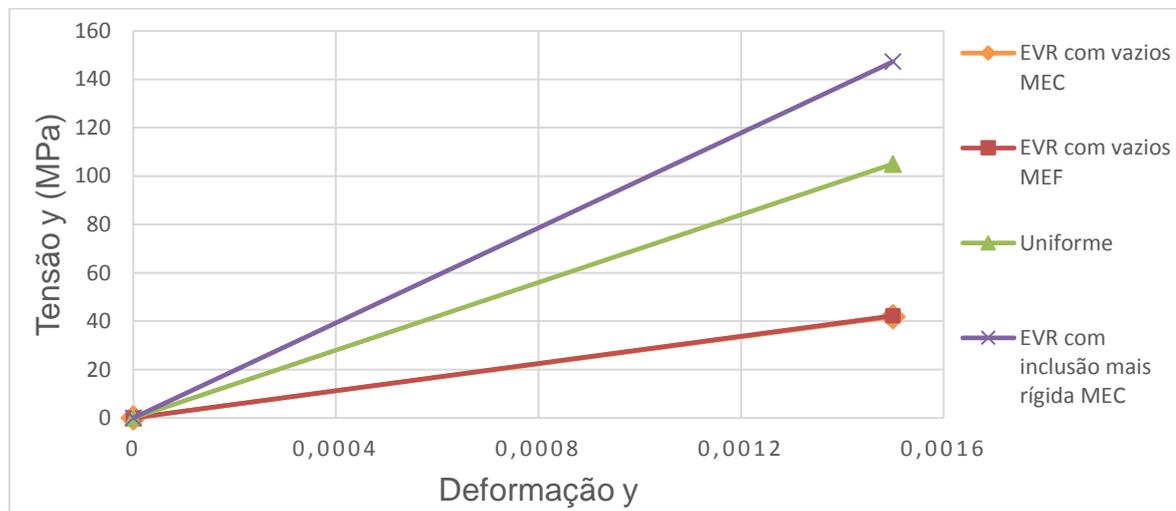
Tabela 12 - Tensões homogeneizadas para o EVR com 5 vazios com volume total de  $v_f = 37\%$

Discretização do EVR (células)	MEC (MPa)	MEF (MPa)
134	47,4321	48,2915
308	43,7610	44,5141
546	42,4076	42,9424
746	41,8619	42,2173

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 51 têm-se os resultados obtidos com o MEC e o MEF, além daqueles referentes ao EVR uniforme e com 37% de inclusão mais rígida que a matriz. Nota-se que a Figura 51 é muito semelhante à Figura 47, pois o volume de fração é o mesmo para ambos os casos. Além disso, a tensão obtida com o MEC é muito próxima da tensão calculada com o MEF.

Figura 51 - Resultados para o EVR com 5 vazios ( $v_f = 37\%$ ) mais refinado

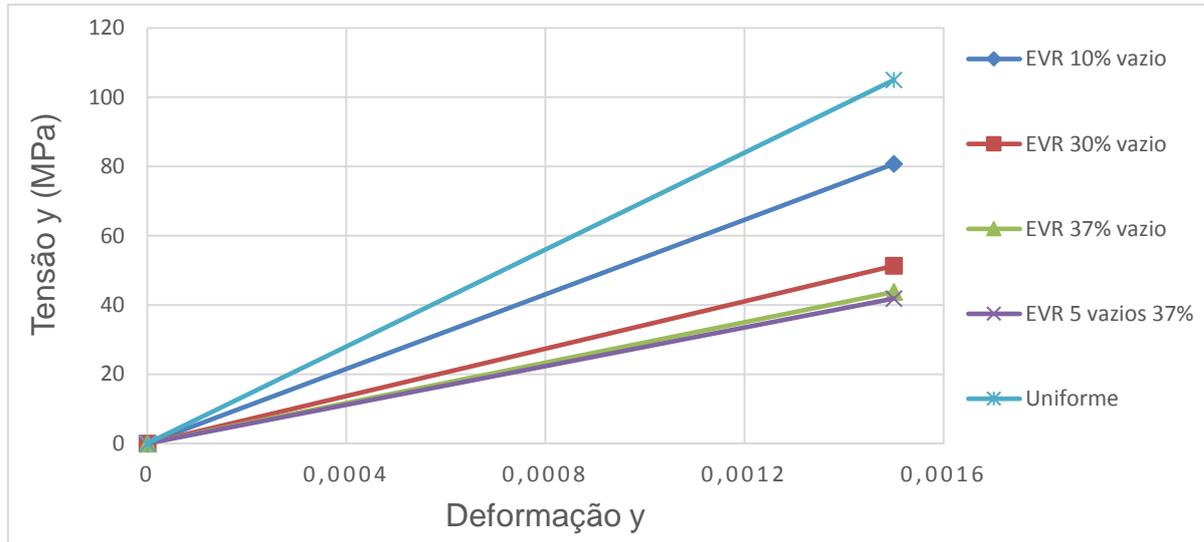


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 52 apresenta-se o gráfico apenas com os valores das tensões homogeneizadas obtidas pela modelagem em MEC, para as malhas mais refinadas da Figura 36, Figura 40, Figura 44 e Figura 48, a fim de mostrar a variação dos valores das tensões através das diferentes frações de volume de vazios. A Tabela 13, a seguir, expressa os valores das tensões homogeneizadas em y referentes a uma deformação, em y de 0,0015, apresentadas no gráfico da Figura 52. Já, a

Tabela 14 apresenta os valores dos tensores constitutivos para estas tensões citadas anteriormente obtidas pelo MEC.

Figura 52 - Comparação dos resultados dos EVRs mais refinados com vazio através do MEC



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 13 - Valor da tensão homogeneizada para as malhas mais refinadas com vazios

Fração de Volume do Vazio (células)	MEC (MPa)
vf 10% (1098)	80,75
vf 30% (776)	51,30
vf 37% (690)	43,75
5 vf 37% (746)	41,86
Uniforme	105

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Ao aumentar o volume do vazio de **30%** para **37%**, a queda dos valores das tensões homogeneizadas não decresce muito, ver Figura 52, Tabela 10 e Tabela 11. Porém, ao comparar os valores das tensões relacionadas ao aumento do volume do vazio de **10%** para **30%**, a discrepância dentre estes valores é muito maior. Portanto, como esperado, o aumento do volume de vazio, diminui os valores das

tensões homogeneizadas e como consequência, diminui a rigidez do material representado pelo EVR, como pode se observar na Tabela 14. O valor da tensão correspondente ao EVR com 5 inclusões, possui uma pequena diferença com o da tensão relacionada ao EVR com volume de vazio de **37%** e apenas uma inclusão no centro. Portanto, pode-se compreender que ao dividir o volume total do vazio em cinco partes e inseri-lo na matriz do EVR, afeta um pouco os valores finais para as tensões homogeneizadas. Isto fica bem claro ao comparar os valores da Tabela 11 com a Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 12.

Tabela 14 - Tensores constitutivos para os EVRs de malhas mais refinadas com vazios

Fração de volume da inclusão (células)	Tensor Constitutivo - MEC (GPa)
vf 10% (1098)	$\begin{bmatrix} 59,14 & 17,24 & 0,00 \\ 17,24 & 59,14 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 19,43 \end{bmatrix}$
vf 30% (776)	$\begin{bmatrix} 36,72 & 8,44 & 0,00 \\ 8,44 & 36,72 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 8,22 \end{bmatrix}$
vf 37% (690)	$\begin{bmatrix} 31,01 & 6,29 & 0,00 \\ 6,29 & 31,01 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 5,70 \end{bmatrix}$
5 vf 37% (746)	$\begin{bmatrix} 28,91 & 7,44 & -0,042 \\ 7,44 & 30,33 & 0,378 \\ -0,042 & 0,378 & 6,16 \end{bmatrix}$
Uniforme	$\begin{bmatrix} 76,92 & 23,07 & 0,00 \\ 23,07 & 76,92 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 26,92 \end{bmatrix}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

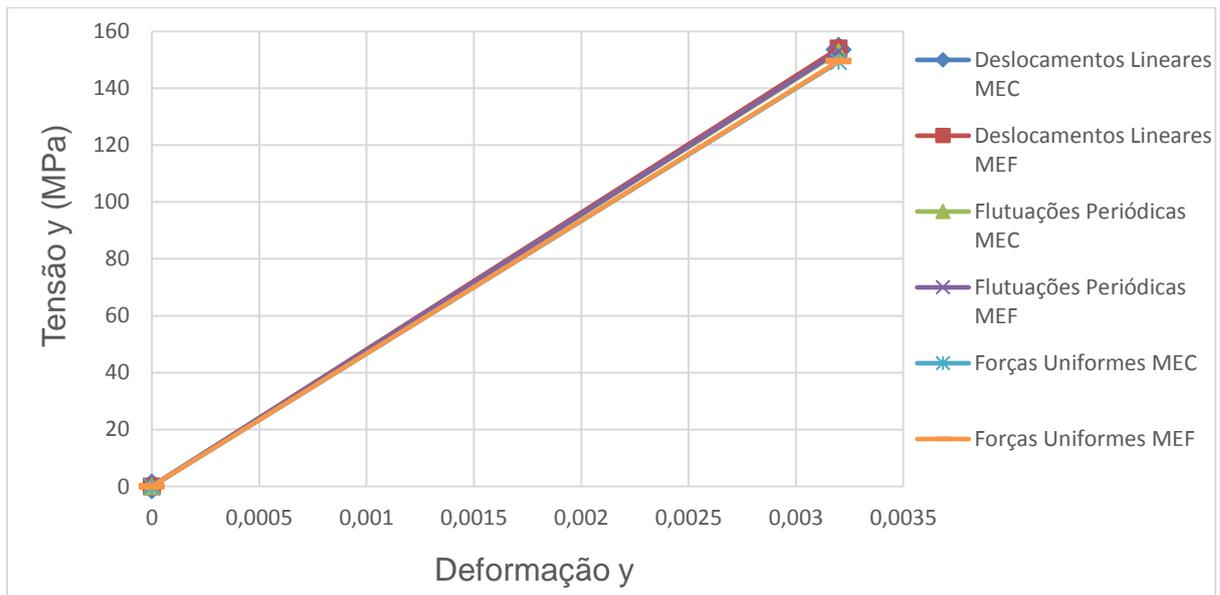
#### 5.4 Comportamento do EVR de acordo com as Condições de Contorno em Termos de Flutuação dos Deslocamentos

As análises deste item, consistem em comparar o comportamento dos EVRs em função das diferentes condições de contorno, em termos de flutuação dos deslocamentos, impostas nos mesmos. Para isso, serão considerados os seguintes

EVRs: com 5 inclusões e com 5 vazios. Deve-se ressaltar que, como já mostrado em outros trabalhos, a condição de deslocamentos lineares no contorno gera o comportamento mais rígido dentre as três condições, enquanto aquela onde se considera forças uniformes o comportamento mais flexível.

Seja inicialmente o EVR com cinco inclusões, onde serão feitas duas diferentes análises, conforme foi desenvolvido no item 5.2.. As propriedades dos materiais para essas duas análises estão representadas na Tabela 1. O vetor das deformações impostas ao EVR, que numa análise em multi-escala seria aquele oriundo do macro-contínuo, é dado por:  $\varepsilon = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}\} = \{-0,00099 \quad 0,0032 \quad 0,0006\}$ . O EVR utilizado para ser analisado neste exemplo, é representado pela discretização da malha (d) da Figura 31, que possui um volume total de inclusões de **vf = 37%** dividido em 5 inclusões, discretizado num total de 1222 células e 658 nós (92 elementos de contorno e 116 de interface).

Figura 53 - Condições de contorno para EVR com inclusões menos rígidas



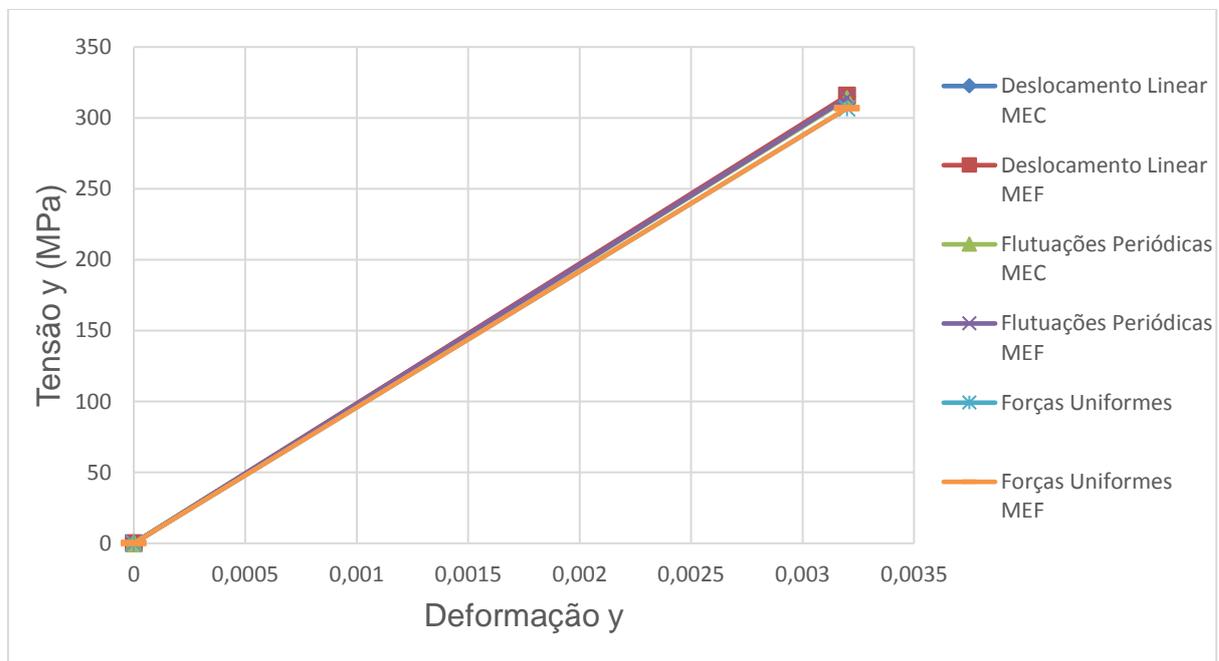
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Os gráficos, representados pelas Figura 53 e Figura 54 mostram o comportamento dos EVRs citados anteriormente com a aplicação das diferentes condições de contorno. A Figura 53 representa o EVR com a inclusão menos rígida que a matriz e a Figura 54 com a inclusão mais rígida que a matriz. Na Tabela 15 têm-se os valores da tensão homogeneizada em y referente à deformação, em y de

0,0032, para este exemplo, onde se pode observar que os valores do MEC são muito próximos àquels do MEF. Nos dois casos, tem-se comportamento semelhante, onde os resultados para deslocamento linear são próximos àqueles quando se adota flutuação periódica, porém um pouco mais rígido. Tem-se diferença mais significativa nos resultados quando se adota forças uniformes no contorno.

Os tensores constitutivos correlacionados com as tensões deste exemplo, são apresentados nas e Tabela 17 apenas para a análise feita com o MEC, pois os tensores são idênticos, como explicado anteriormente.

Figura 54 - Condições de contorno para EVR com inclusões mais rígidas



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 15 - Comparação das tensões homogeneizadas (EVR com inclusões)

Condições de Contorno	Inclusões menos rígida		Inclusões mais rígidas	
	MEC	MEF	MEC	MEF
	(MPa)		(MPa)	
Deslocamentos Lineares	153,72	154,09	314,89	315,79
Flutuações Periódicas	152,76	153,09	313,36	314,11
Forças Uniformes	149,35	149,58	306,88	307,40

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 16 - Tensor constitutivo para EVR com inclusões menos rígidas

Modelo	Deslocamento Linear	Flutuações Periódicas	Forças Uniformes
	Tensor Constitutivo (GPa)	Tensor Constitutivo (GPa)	Tensor Constitutivo (GPa)
MEC	$\begin{bmatrix} 51,69 & 13,33 & 0,080 \\ 13,33 & 52,25 & 0,152 \\ 0,080 & 0,152 & 18,75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 51,48 & 13,27 & 0,0004 \\ 13,27 & 51,94 & 0,065 \\ 0,0004 & 0,065 & 18,21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50,25 & 13,88 & 0,018 \\ 13,88 & 51,02 & 0,090 \\ 0,018 & 0,090 & 18,00 \end{bmatrix}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 17 - Tensor constitutivo para EVR com inclusões mais rígidas

Modelo	Deslocamento Linear	Flutuações Periódicas	Forças Uniformes
	Tensor Constitutivo (GPa)	Tensor Constitutivo (GPa)	Tensor Constitutivo (GPa)
MEC	$\begin{bmatrix} 106,31 & 27,93 & 0,046 \\ 27,93 & 107,28 & 0,262 \\ 0,046 & 0,262 & 38,19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 105,99 & 27,96 & -0,023 \\ 27,96 & 106,79 & 0,113 \\ -0,023 & 0,113 & 37,27 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 104,09 & 29,28 & 0,016 \\ 29,28 & 105,09 & 0,145 \\ 0,016 & 0,145 & 36,98 \end{bmatrix}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Agora será analisado o EVR com 5 vazios, dado pela Figura 48 (d), ao qual foi imposto o seguinte vetor das deformações:

$\varepsilon = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}\} = \{-0,00045 \quad 0,0015 \quad 0,0002\}$ . O mesmo possui um volume total de vazios, **vf = 37%**, dividido em 5 vazios dentro do domínio, discretizado num total de 746 células e 473 nós (92 elementos de contorno e 116 de interface). As propriedades elásticas da matriz para este EVR são:  **$E = 70 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,3$** .

A Figura 55 mostra o comportamento do EVR, citado anteriormente, com as diferentes condições de contorno e comparando com a formulação do MEF. Na Tabela 18 têm-se os valores da tensão homogeneizada em y referente à deformação, em y de 0,0015. Pode-se observar que os resultados para as tensões homogeneizadas variam pouco da modelagem em MEF para o MEC. Nesse caso, têm-se diferenças significativas no comportamento do EVR de acordo com a condição de contorno adotada.

Na Tabela 19 é mostrado o tensor constitutivo homogeneizado para as diferentes condições de contorno utilizadas no EVR com 5 vazios. Observam-se pequenas diferenças entre os tensores referentes a deslocamento linear e flutuação

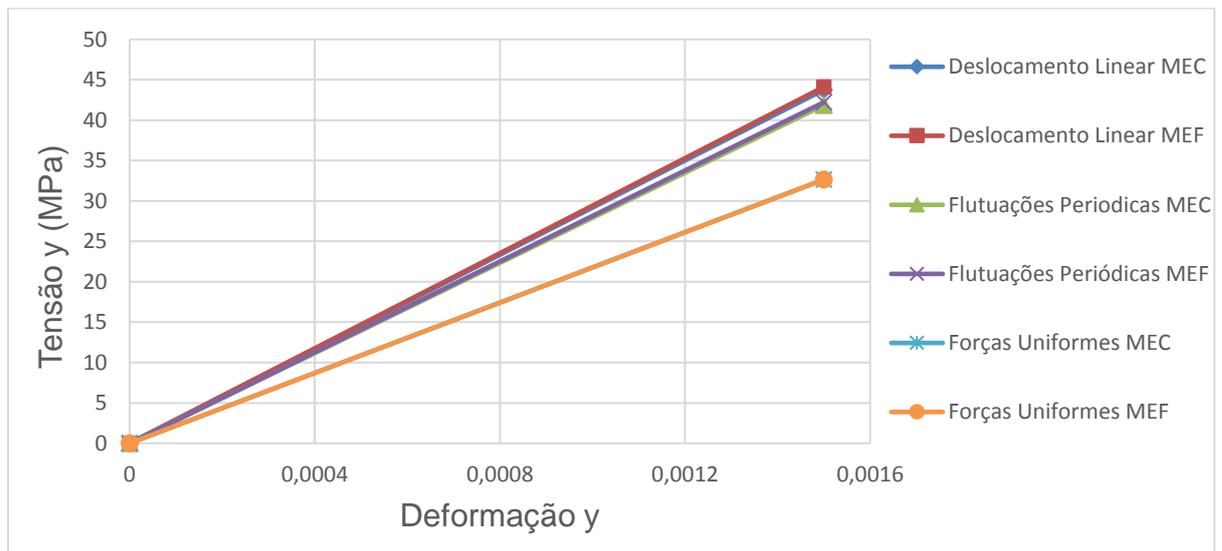
periódica, porém diferenças bem mais significativas quando se considera forças uniformes no contorno, que gera um comportamento mais flexível.

Tabela 18 - Comparação das tensões homogeneizadas (EVR com vazios)

Condições de Contorno	MEC (MPa)	MEF (MPa)
Deslocamentos Lineares	43,7583	44,1208
Flutuações Periódicas	41,8619	42,2173
Forças Uniformes	32,6508	33,242

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 55 - Condições de contorno para EVR com vazios



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 19 - Valores homogeneizados para o tensor constitutivo de EVR com 5 vazios

Modelo	Deslocamento Linear	Flutuações Periódicas	Forças Uniformes
	Tensor Constitutivo (GPa)	Tensor Constitutivo (GPa)	Tensor Constitutivo (GPa)
MEC	$\begin{bmatrix} 29,76 & 7,49 & 0,359 \\ 7,49 & 31,57 & 0,673 \\ 0,359 & 0,673 & 9,04 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 28,91 & 7,44 & -0,042 \\ 7,44 & 30,33 & 0,378 \\ -0,042 & 0,378 & 6,16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 22,67 & 11,27 & 0,087 \\ 11,27 & 25,51 & 0,286 \\ 0,087 & 0,286 & 4,93 \end{bmatrix}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, uma formulação para análise elástica através do MEC foi proposta para modelar o comportamento mecânico de materiais heterogêneos na microescala. A microestrutura, designada como EVR, é representada por uma chapa em sub-regiões, onde vazios e inclusões podem ser definidos dentro da matriz, isto é, as sub-regiões podem ter diferentes módulos de Young e coeficiente de Poisson. As equações integrais que descrevem o problema estudado neste trabalho, têm integrais sobre o contorno externo, interfaces de matriz com vazios e matriz com inclusões e também integrais sobre o domínio das sub-regiões. Portanto, a fim de resolver o problema, o contorno externo e as interfaces tiveram de ser discretizadas em elementos e os domínios das sub-regiões em células onde funções lineares foram adotadas para aproximar os deslocamentos. Como “carregamento” ao EVR, impõe-se deformação constante ao longo do contorno do EVR, de forma que as incógnitas a serem encontradas são as forças no contorno e os deslocamentos nas interfaces e nós internos. Essa deformação é oriunda do macro-contínuo, pois este trabalho foi desenvolvido no contexto da análise em multi-escala. O campo de deslocamentos no EVR pode ser dividido em duas parcelas: uma possuindo variação linear e a outra denominada flutuação dos deslocamentos, que surge devido à heterogeneidade do material, seja essa causada pelos vazios ou pelas inclusões inseridas no interior da matriz. Portanto, o problema de equilíbrio do EVR consiste em encontrar o campo de flutuação dos deslocamentos que satisfaz a Equação dos Resíduos. Em seguida, adotando técnicas de homogeneização, são calculados os valores homogeneizados para a tensão e o tensor constitutivo.

Nos exemplos numéricos, com a utilização de diferentes tipos de microestruturas com vazios ou inclusões, foi possível observar como diferentes frações de volume de inclusões ou vazios afetam o comportamento mecânico dos EVRs. As respostas numéricas para as tensões homogeneizadas foram muito similares àquelas obtidas com a formulação desenvolvida em MEF, um método já consolidado. Portanto, a partir desta comparação, pode-se validar a formulação desenvolvida através do MEC para análise de micro-estruturas de materiais heterogêneos. É importante notar que em alguns casos, o MEC possui uma convergência dos resultados um pouco mais rápida.

Ainda com relação aos exemplos numéricos, pôde-se concluir que as respostas qualitativas foram satisfatórias. Conclui-se também que a porosidade ou a adição de inclusões no material, afetam de forma significativa o comportamento mecânico do material, pois altera a rigidez e resistência do mesmo. Portanto, o comportamento do EVR modifica consideravelmente de acordo com a fração de volume adotada para inclusões ou vazios. No entanto, mantendo a mesma fração de volume para inclusões ou vazios, mas modificando a disposição das inclusões ou vazios na matriz não alteram de forma significativa os resultados numéricos.

Contudo, o mais importante foi a validação da formulação do MEC para análises da microestrutura do material, sendo comprovada através deste trabalho. Portanto, como sugestão para trabalhos futuros, essa formulação pode ser estendida a fim de considerar fenômenos dissipativos na micro-estrutura para que se possa desenvolver uma análise não-linear física de microestruturas heterogêneas e, posteriormente, análises em multi-escala utilizando a formulação aqui apresentada para representar a microestrutura e para a macroestrutura também utilizar o MEC. Assim, poderia ser feita a modelagem multi-escala de estruturas através apenas do MEC, sem necessidade de acoplamento com o MEF.

## REFERÊNCIAS

- ASSAN, A. E. **Resistência dos materiais**. Campinas: Editora da Unicamp. 2013. v. 2. 757p.
- BARBIRATO, J. C. C. **Formulação do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin**. 1991. 164 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.
- BARBOSA, C. R. N. **O Método dos elementos de contorno aplicado a problemas de potencial bidimensionais com acoplamento iterativo entre sub-regiões**. 2005. 85 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.
- BLANCO, E. A.; SÁNCHEZ, P. J.; SOUZA NETO, E. A. de; FEIJÓO, R. A. The method of multiscale virtual power for the derivation of a second order mechanical model. **Mechanics of Materials**, Amsterdam, v. 99, p. 53-67, 2016.
- BOTELHO, M. H. C. Estruturas heterogêneas quanto aos materiais. In: BOTELHO, M. H. C. **Resistência dos materiais: para entender e gostar**. São Paulo: Blucher, 2008. Cap. 26. p. 199-204.
- BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech, 1978.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques. Theory and applications in engineering**. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1984.
- CHENG, A. H. D.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Kidlington, v. 29, n. 3, p. 268-302, 2005.
- CUNHA, M. T. F. **Uma metodologia portátil para a paralelização de programas de elementos de contorno**. 2004. 120 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
- EDMANS, B. D.; ALFANO, G.; BAHAI, H. Nonlinear multi-scale homogenization with different structural models at different scales. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Chichester, v. 94, p. 355-373, 2013.
- FERNANDES, G. R. **Análise de flexão de placas heterogêneas através de uma modelagem multi-escala e acoplamento MEC/MEF**. 2012. 133 f. Relatório (Atividades de pesquisa) - School of Engineering, Swansea University, Swansea, 2012.
- FERNANDES, G. R. **Análise não linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno**. 2003. 272 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

- FERNANDES, G. R. **O método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas**. 1998. 178 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.
- FERNANDES, G. R.; PITUBA, J. J. C.; SOUZA NETO, E. A. de. FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Kidlington, v. 54, p. 47-59, 2015a.
- FERNANDES, G. R.; PITUBA, J. J. C.; SOUZA NETO, E. A. de. Multi-scale modelling for bending analysis of heterogeneous plates by coupling BEM and FEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Kidlington, v. 51, p. 1-13, 2015b.
- FERNANDES, G. R., ROSA NETO, J. Analysis of stiffened plates composed by different materials by the boundary element method. **Structural Engineering and Mechanics, an International Journal**, New York, v. 56, n. 4, p. 605-623, 2015.
- FERNANDES, G. R., VENTURINI, W. S. Non-linear boundary element analysis of floor slabs reinforced with rectangular beams. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Kidlington, v. 31, p. 721-737, 2007.
- GAL, E., KRYVORUK, R. Fiber reinforced concrete properties: a multiscale approach. **Computers and Concrete**, Daejeon, v. 8, n. 2, p. 525-539, 2011.
- GIL RODRIGUEZ, J. C. **Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais**. 1986. 140 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1986.
- GONÇALVES, K. A. **Análise de problemas elastodinâmicos por intermédio do acoplamento do método dos elementos finitos e do método dos elementos de contorno**. 2013. 133 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.
- HILL, R. A self-consistent mechanics of composite materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Kidlington, v. 13, p. 213–222, 1965.
- KOUZNETSOVA, V. G. **Computational homogenization for multiscale analysis of multi-phase materials**. Eindhoven: TU University Eindhoven, 2002.
- LABEAS, G. N.; BELESIS, S. N. Efficient analysis of large-scale structural problems with geometrical non-linearity. **International Journal of Non-linear Mechanics**, Kidlington, v. 46, n. 10, p.1283-1292, 2011.
- MANDEL, J. **Plasticité classique et viscoplasticité** : CISM lecture notes. Udine: Springer Verlag, 1971.
- MARKOVIC, D.; IBRAHIMBEGOVIC, A. On micro-macro interface conditions for micro-scale based FEM for inelastic behavior of heterogeneous materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 193, p. 5503-5523. 2004.

MATSUI, K.; TERADA, K.; YUGE, K. Two-scale finite element analysis of heterogeneous solids with periodic microstructures. **Computers & Structures**, Kidlington, v. 82, p. 593-606, 2004.

NGUYEN, V. P.; LLOBERAS, V. O.; STROEVEN, M.; SLUYS, L. J. Homogenization-based multiscale crack modelling: from micro-diffusive damage to macro-cracks. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 200, p. 1220-1236, 2011.

PAIVA, J. B. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas**. 1987. 204 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987.

PERIC, D.; SOUZA NETO, E. A. de; FEIJÓO, R. A. On micro-to-macro Transitions for multiscale analysis of heterogeneous materials: unified variational basis and finite element implementation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Chichester, v. 87, p. 149-170, 2011.

SFANTOS, G. K., ALIABADI, M. H. Multi-scale boundary element modelling of material degradation and fracture. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 196, p. 1310-1329. 2007.

SOUZA NETO, E. A., FEIJÓO, R. A. **Variational foundations of multi-scale constitutive models of solid: small and large strain kinematical formulation**. National Laboratory for Scientific Computing (LNCC/MCT), Brasil. Internal Research & Development Report No 16. 2006.

SOUZA NETO E. A., BLANCO P. J., SÁNCHEZ P. J. and FEIJÓO R. A. An RVE-based multiscale theory of solids with micro-scale inertia and body force effects. **Mechanics of Materials**, Amsterdam, v. 80, p. 136-144, 2015.

TELLES, J. C. F. e BREBBIA, C. A. On the application of the boundary element method to plasticity. **Applied Mathematical Modelling**, New York, v. 5, n. 5, p.376-382, 1981.

TERADA, K. e KIKUCHI, N. A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 190, p. 5427-5464, 2001.

TIMOSHENKO, S e GOODIER, J. N. **Teoria da elasticidade**. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980. 545 p.

VENTURINI, W. S. **Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems**. Southampton: University of Southampton, 1982.

WAIDEMAM, L. **Formulação do método dos elementos de contorno para placas enrijecidas considerando-se não-linearidades física e geométrica**. 2008. 240 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

## ANEXO - EQUAÇÕES BÁSICAS

### 1 Introdução

Neste anexo, serão apresentadas e definidas as equações e variáveis relativas ao problema elástico bidimensional. Primeiramente será deduzida a equação diferencial de equilíbrio de um elemento infinitesimal, onde a mesma representa o problema físico a ser estudado. Então, serão apresentadas relações da teoria da elasticidade, tendo como base um elemento tridimensional infinitesimal, tais como: relações entre tensão e deformação (lei de Hooke), entre deformação e deslocamentos e a equação de Navier. As tensões em um plano genérico, conhecida como fórmula de Cauchy, também serão apresentadas neste capítulo.

Como este trabalho trata da modelagem de um elemento bidimensional, as definições e expressões utilizadas para o estado plano de tensão e deformação também serão tratadas neste capítulo.

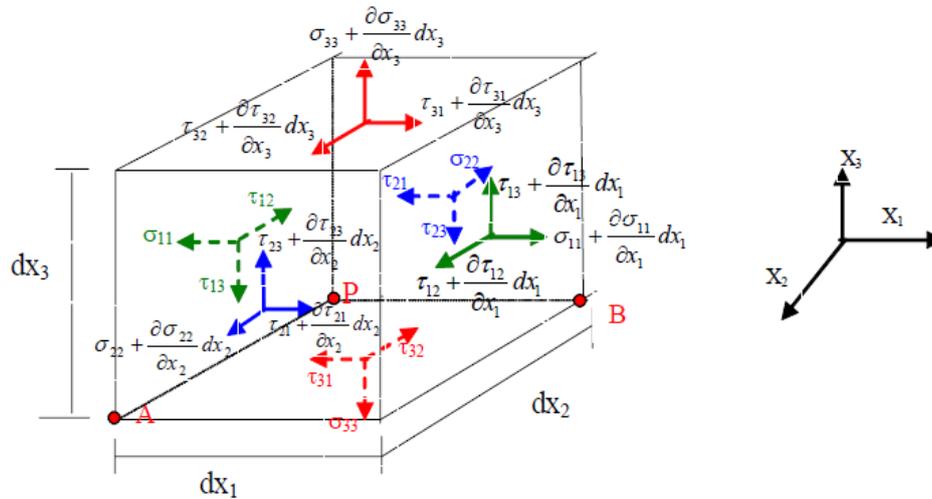
As equações e teorias contidas neste capítulo podem ser encontradas em livros sobre Teoria da Elasticidade e em alguns livros de Resistência dos Materiais, como exemplo, respectivamente em Timoshenko e Goodier (1980) e Assan (2013).

### 2 EQUAÇÕES DA TEORIA DA ELASTICIDADE

#### 2.1. Tensões e Equação Diferencial do Equilíbrio

Dado um elemento infinitesimal representado na Figura 56, onde o mesmo é a representação de um ponto  $p$  qualquer de um sólido tridimensional elástico linear. O mesmo está sujeito a ações das forças de massa  $b_1$ ,  $b_2$ , e  $b_3$ , respectivamente nas direções  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , atuando no centro de gravidade do elemento.

Figura 56 - Elemento infinitesimal



Fonte: (FERNANDES, 2005)

Na Figura 56, a tensão  $\sigma_{ij}$  representa a tensão na direção  $j$  da face cuja normal tem direção  $i$ . Fazendo-se o equilíbrio das forças na direção  $X_1$ , tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \sum F_{X_1} = & \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left( \tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 - \tau_{21} dx_1 dx_3 + \\ & + \left( \tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \tau_{31} dx_1 dx_2 + b_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Desenvolve-se um trabalho algébrico na equação anterior, tem-se:

$$\sum F_{X_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + b_1 = 0 \quad (2)$$

O equilíbrio das forças nas outras duas direções resulta em expressões análogas a equação (2):

$$\sum F_{X_2} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + b_2 = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_{X_3} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0 \quad (4)$$

Na forma indicial as equações (2) a (4), podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\sigma_{ji,j}(p) + b_i(p) = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Considere novamente o elemento infinitesimal representado na Figura 56 e agora fazendo o equilíbrio dos momentos na direção  $X_1$ , tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \sum M_{X_1} = & \left( \tau_{23} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \tau_{23} dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \\ & - \left( \tau_{32} \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} dx_3 \right) dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} - \tau_{32} dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Considera-se os seguintes termos diferenciais e que seus valores são quase nulos, a equação acima toma o seguinte valor:

$$\tau_{23} = \tau_{32} \quad (7)$$

Onde:

$$\frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} dx_1 dx_3 \frac{(dx_2)^2}{2} \cong \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} dx_1 dx_2 \frac{(dx_3)^2}{2} \cong 0 \quad (8)$$

Desenvolve-se o equilíbrio dos momentos para as outras duas direções, obtendo assim relações análogas à equação (6). Com isso, as relações encontradas com o equilíbrio dos momentos, pode ser escrita em uma única equação:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad i,j = 1,2,3 \quad (9)$$

A partir desta relação, pode-se concluir que o tensor de tensões é simétrico. Assim, considerando a relação em (9), a equação (5) pode também ser escrita da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij,j}(p) + b_i(p) = 0 \quad (10)$$

A expressão representada pela equação (10) é conhecida como a equação diferencial de equilíbrio que representa o problema elástico bidimensional, que pode também ser escrita como:

$$N_{ij,j} + b_i = 0 \quad (11)$$

onde  $N_{ij,j}$  representa o esforço de membrana interno ao elemento e  $b_i$  forças de massa ou de corpo.

## 2.2. Relação entre Deslocamentos e Deformações

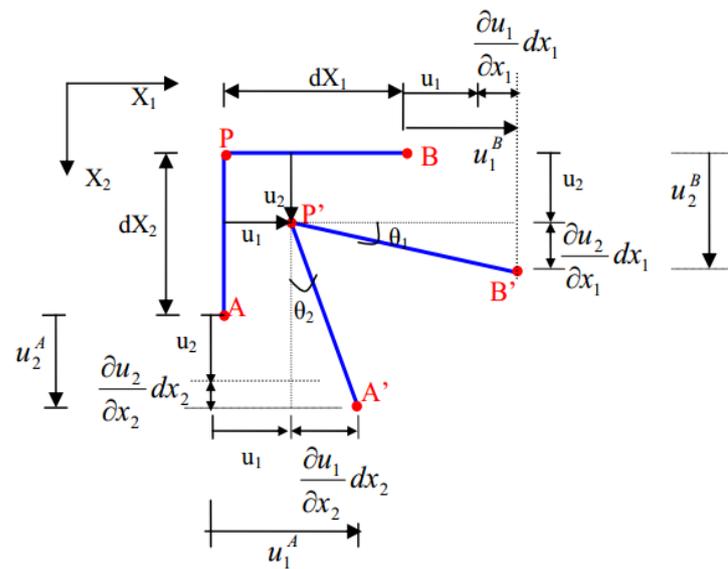
Agora, serão demonstradas algumas relações entre deslocamentos e deformações com base no conceito da teoria da elasticidade. Para isso, seja a Figura 57, onde os pontos A', B' e P' são os pontos A, B e P na posição deformada.

Como o ponto P está situado no plano  $X_1X_2$ , o mesmo sofre deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  nas direções  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente. Admite-se que os deslocamentos e rotações sofridas pelo sólido sejam pequenas, onde o tensor de deformações é obtido a partir das derivadas primeiras dos deslocamentos, ou seja, as derivadas segundas podem ser desprezadas. Assim, as deformações lineares nas direções de  $X_1$  e  $X_2$  são dadas por:

$$\varepsilon_{11} = \frac{u_1^B - u_1^P}{dx_1} = \frac{\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1\right) - u_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (12a)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{u_2^A - u_2^P}{dx_2} = \frac{\left(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2\right) - u_2}{dx_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (12b)$$

Figura 57 - Deformações no plano  $X_1$  e  $X_2$



Fonte: Fernandes, 2005

As deformações angulares  $\theta_1$  e  $\theta_2$  que estão indicadas na Figura 57, são dadas pelas seguintes expressões:

$$\theta_1 = \tan(\theta_1) = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (13a)$$

$$\theta_2 = \tan(\theta_2) = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (13b)$$

A deformação de cisalhamento unitária  $\gamma_{12}$  pode ser escrita somando-se as duas deformações angulares representadas anteriormente, resultando em:

$$\gamma_{12} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (14)$$

Com a equação (14), pode ser definida a deformação  $\varepsilon_{12}$  da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \varepsilon_{21} \quad (15)$$

Portanto, na forma indicial tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j=1,2,3 \quad (16)$$

### 2.3. Relação entre Tensão e Deformação

Utilizando a lei de Hooke para o caso de materiais isotrópicos, as tensões são obtidas a partir das deformações através da seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad i,j,k=1,2,3 \quad (17)$$

onde  $G = E/2(1+\nu)$  é o módulo de elasticidade transversal do material do sólido,  $\nu$  seu coeficiente de Poisson,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker ( $\delta_{ij}=1$  se  $i=j$  e  $\delta_{ij}=0$  se  $i \neq j$ ).

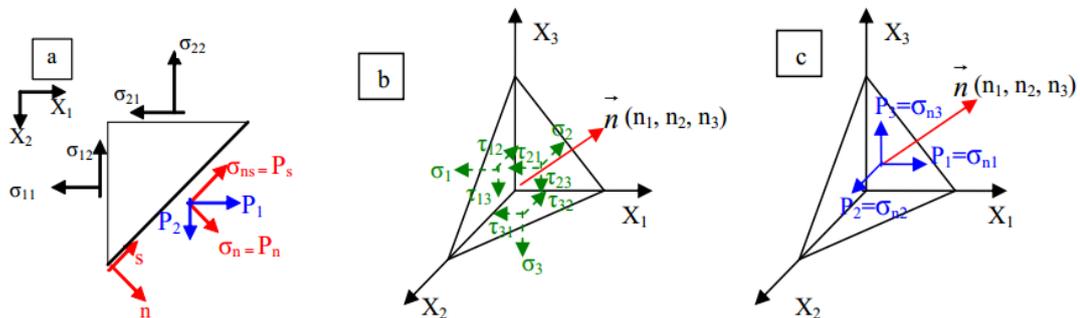
Pode-se também definir a relação inversa, com a qual obtêm-se as deformações a partir das tensões:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad i, j, k=1, 2, 3 \quad (18)$$

## 2.4. Fórmula de Cauchy e Relação entre Tensão e Deslocamento

Seja um elemento sólido em formato de um cubo, com dimensões infinitesimais (veja Figura 56). Seja ainda um plano que o corta em dois pedaços, de modo que uma das partes tenha um formato de um tetraedro (veja Figura 58). Esse plano de corte, se torna uma superfície deste tetraedro, onde a mesma é definida pelo vetor normal  $\vec{n}$  e possui uma área de valor  $\Delta S$ . Na Figura 58a, tem-se o caso bidimensional e a Figura 58b e Figura 58c representam o caso tridimensional.

Figura 58 - Tensão e forças de superfície num elemento infinitesimal



Fonte: (FERNANDES, 2005)

No tetraedro representado pelo exemplo b, têm-se tensões nas três faces do elemento, cujos vetores normais são dados pelas seguintes ternas:  $(1,0,0)$ ;  $(0,1,0)$  e  $(0,0,1)$ . Já, as respectivas áreas destas três faces podem ser dadas por:  $\Delta S n_1$ ,  $\Delta S n_2$  e  $\Delta S n_3$ .

No exemplo c, as forças de superfície são representadas nas direções  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  na superfície definida pela normal  $\vec{n}$ . Agora será desenvolvido o equilíbrio das forças na direção de  $X_1$ , por exemplo:

$$P_1 \Delta S - \sigma_1 \Delta S n_1 - \tau_{21} \Delta S n_2 - \tau_{31} \Delta S n_3 = 0 \quad (19)$$

que resulta em:

$$P_1 = \sigma_1 n_1 + \tau_{21} n_2 + \tau_{31} n_3 \quad (20)$$

Trabalhando o equilíbrio nas outras duas direções, chega-se em expressões análogas à equação (20), que podem ser definidas na forma indicial através da seguinte expressão, conhecida como fórmula de Cauchy:

$$p_i = \sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j \quad i, j=1, 2, 3 \quad (21)$$

Para termos uma relação de tensão com deslocamentos, a equação (16), é substituída na equação (17). Assim, uma relação entre tensão e deslocamento é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = G \left[ u_{i,j} + u_{j,i} \right] + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \delta_{ij} \quad (22)$$

Derivando a equação (22) em relação à  $j$ , e substituindo-a na equação (10), obtém-se à equação diferencial do problema elástico, escrita em termos de deslocamentos, onde a mesma é conhecida como equação de Navier, sendo mostrada a seguir:

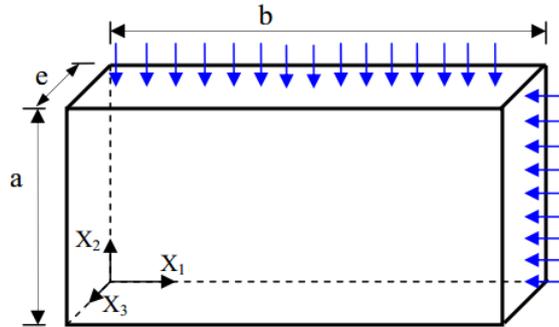
$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad (23)$$

### 3 Estado Plano de Tensão (EPT)

Seja o sólido representado na Figura 59 que possui a espessura e muito menor que as outras duas dimensões,  $a$  e  $b$ . Com isso, no plano  $X_1X_2$  tem-se um estado plano de tensão se o sólido estiver sujeito somente a carregamentos nas

direções  $X_1$  e  $X_2$ , atuando no contorno do sólido e uniformemente distribuídos ao longo da espessura.

Figura 59 - Sólido sujeito à estado plano de tensão



Fonte: (FERNANDES, 2005)

Assim, as tensões  $\sigma_{33}$ ,  $\tau_{23}$  e  $\tau_{13}$  são pequenas se comparadas com as componentes  $\sigma_{11}$ ,  $\tau_{12}$  e  $\sigma_{22}$ , onde essas últimas variam pouco na direção  $x_3$ . Portanto, adotam-se as tensões  $\sigma_{33}$ ,  $\tau_{23}$  e  $\tau_{13}$  como sendo nulas e as componentes  $\sigma_{11}$ ,  $\tau_{12}$  e  $\sigma_{22}$  como função apenas de  $x_1$  e  $x_2$ . Assim, os deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  também podem ser definidos como função apenas de  $x_1$  e  $x_2$ . Portanto, através da lei de Hooke, equação (17), conclui-se que as deformações  $\gamma_{23}$ ,  $\gamma_{13}$  são nulas, pois as tensões  $\tau_{23}$  e  $\tau_{13}$  também são nulas. Porém, a deformação  $\epsilon_{33}$  não é nula e seu valor pode ser obtido a partir da equação (18). Desse modo, os tensores de tensão e deformação podem ser dados por:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (25)$$

As deformações podem ser obtidas através da equação (16), porém nesse caso os índices  $i, j, k$  variam de 1 a 2. As tensões podem ser obtidas pela equação (17), mas substituindo-se o  $\nu$  por  $\nu' = \nu / (1 + \nu)$ , sendo assim o valor de  $G$  permanece inalterado. Portanto, a equação (17) pode ser escrita da seguinte forma para estado plano de tensão:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu'}{1-2\nu'}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad i, j, k=1, 2 \quad (26)$$

Substituindo  $\nu' = \nu / (1 + \nu)$  na equação (26), temos o seguinte resultado:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ \nu\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + (1-\nu)\varepsilon_{ij} \right] \quad i, j, k=1, 2 \quad (27)$$

Na forma matricial a equação (27) é dada por:

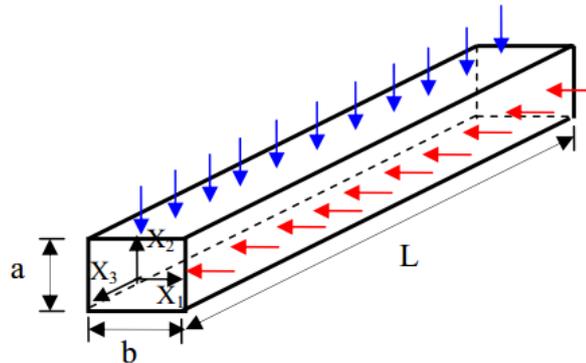
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

#### 4 Estado Plano de Deformação (EPD)

Seja o sólido representado na Figura 60 que possui a dimensão  $L$  muito maior que as outras duas  $a$  e  $b$ . Caso existam cargas somente nas direções  $X_1$  e  $X_2$  e estas forem distribuídas uniformemente ao longo do comprimento  $L$ , pode-se considerar deformações constantes ao longo de  $X_3$ , que dependem apenas de  $X_1$  e  $X_2$ . Desprezam-se ainda as deformações  $\varepsilon_{33}$ ,  $\gamma_{23}$  e  $\gamma_{13}$  pois elas são pequenas quando comparadas às componentes  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  e  $\gamma_{12}$ . Como as deformações  $\gamma_{23}$  e  $\gamma_{13}$  são adotadas nulas, conclui-se que as tensões  $\tau_{23}$  e  $\tau_{13}$  também são nulas. Assim,

no plano  $X_1X_2$  fica caracterizado um estado plano de deformação, onde os tensores de tensão e deformação são dados por:

Figura 60 - Sólido sujeito à estado plano de deformação



Fonte: (FERNANDES, 2005)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Para o estado plano de deformação, as equações da teoria da elasticidade são válidas, desde que use a variação dos índices  $i, j, k$  de 1 a 3 para 1 a 2. A equação (17) pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Devendo ainda ser considerada a tensão  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$