UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

FERNANDO NERA LENARDUZZI

Suspensões de Poisson, Ergodicidade e o Teorema Central do Limite

São José do Rio Preto - SP
2012

FERNANDO NERA LENARDUZZI

Suspensões de Poisson, Ergodicidade e o Teorema Central do Limite

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos junto ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Ali Messaoudi.
Co-Orientadora: Patrícia Romano Cirilo

Banca Examinadora:

Dr. Patrícia Romano Cirilo
UNESP - São José do Rio Preto
Co-Orientadora

Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira
IMPA - Rio de Janeiro

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
2012

Lenarduzzi, Fernando Nera.
Suspensões de Poisson, ergodicidade e o teorema central do limite / Fernando Nera Lenarduzzi. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2012.
55 f. : il. ; 30cm.

Orientador: Ali Messaoudi
Co-Orientador: Patrícia Romano Cirilo
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Teoria Ergódica. 2. Sistemas Dinâmicos. 3. Suspensão de Poisson. I. Messaoudi, Ali. II. Cirilo, Patrícia Romano. III. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU - 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

Aos meus pais, Luiz Fernando Lenarduzzi e Liamar Nera Lenarduzzi, pelo amor, carinho e por sempre me apoiar. Serei eternamente grato.

A meu irmão, Guilherme Nera Lenarduzzi, pela amizade e pelos divertidos momentos na minha vida. Um dos pilares de minha formação.

À minha namorada Janaina de Oliveira Rodrigues, pela compreensão e amor incondicional. Por vezes tua mão ajudou-me a manter-me de pé.

À minha família, em seu mais fraternal e completo significado, a pedra angular que guia a edificação de quem sou.

Aos meus orientadores Ali Messaoudi e Patrícia Romano Cirilo, pela atenção e paciência prestadas, pelos conhecimentos transmitidos, e por depositar sua confiança em mim diante deste trabalho.

A todos professores do departamento de matemática do IBILCE. Em especial, aos professores Adalberto Spezamiglio e Maria Gorete Carreira Andrade, pela tutoria e amizade no PET durante minha graduação. Também sou grato a professora Juliana Conceição Precioso Pereira pela ajuda em meus primeiros passos na vida acadêmica.

À banca examinadora.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Ao PET, meus colegas de graduação e pós-graduação, pela amizade e ajuda nas inúmeras discussões de exercícios de várias disciplinas.

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para realização deste trabalho.

Fernando Nera Lenarduzzi.

"Se há muito sofrimento, também há sempre alegria e vice-versa. Até as lindas flores algum dia irão murchar e todas as coisas vivas deste mundo não páram nem por um momento. Estão sempre se movendo e mudando, esse é o maior prazer existente, a vida das pessoas é igual.

Mas, se a morte certa espera por todos, não é a tristeza que deveria controlar a vida de todos? Enquanto se vive, não importa quantas vezes tente se alivar do sofrimento, ou quantas vezes buscam por amor e alegria e, a morte sempre acaba com tudo. Se é assim, para que um homem nasce? Não podemos fingir que não existe a morte, completa e eterna.

Apenas não se esqueça de uma coisa:

A morte não é o fim de tudo, a morte é o passo que leva à vida seguinte. A morte não é algo definitivo. No passado todos aqueles que nasceram neste mundo, que foram chamados de santos, puderam superar a morte. Se entender isso, se tornará o homem mais perto de Deus.

As flores nascem e depois murcham... as estrelas brilham, mas algum dia se extinguem.... comparado com isso, a vida do homem não é nada mais do que um simples piscar de olhos, um breve momento. Nesse pouco tempo, as pessoas nascem, riem, choram, lutam, são feridas, sentem alegria, tristeza, odeiam alguém, amam alguém.

Tudo isso em um só momento."

Shaka de Virgem

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar os resultados apresentados por R. Zeimuller em *Poisson Suspensions of Compactly Regenerative Transformations* [Z0]. Neste artigo, partindo de um espaço de medida σ-finito $(X, \mathcal{A}, \mu)$ com uma transformação ergódica T, o autor considera a ação de T em "poeiras" enumeráveis de pontos, o que define uma transformação $\tilde{T}$ num espaço de probabilidade $\tilde{X}$. Será mostrado que $\tilde{T}$ é invariante e ergódica para uma medida $\tilde{\mu}$ em $\tilde{X}$, que está relacionada com estes conjuntos enumeráveis de pontos. Apesar de não valer o teorema de Birkhoff para o espaço inicial $(X, \mathcal{A}, \mu)$ que tem medida infinita, vale a convergência das médias ergódicas neste novo espaço, o que permite recuperar a medida de um conjunto A em termos do número de visitas a A se forem consideradas órbitas de conjuntos enumeráveis $\tilde{\mu}$-típicos ao invés de olhar para a órbita de um só ponto. São estabelecidas ainda condições suficientes para obter um Teorema Central do Limite que acompanha o teorema ergódico de Birkhoff para $\tilde{S}_n$. Também faremos um breve estudo sobre conservatividade de aplicações em espaços σ-finito com medida total infinita, taxa de errância de conjuntos de medida positiva e medida aleatória de Poisson.

Palavras-chave: teoria ergódica, sistemas dinâmicos, suspensão de Poisson, teorema central do limite.

Abstract

The main purpose of this work is to understand the results presented by R. Zweimüller on his paper *Poisson Suspensions of Compactly Regenerative Transformations* [Z0]. In this paper, considering a σ-finite space $(X, \mathcal{A}, \mu)$ and a ergodic transformation T, the author considers the action of T on a countable "ensemble" of points, which defines a transformation $\tilde{T}$ acting on another probability space $\tilde{X}$. It will be proved that $\tilde{T}$ is invariant and ergodic for a measure $\tilde{\mu}$ on $\tilde{X}$, which is related to this countable set of points. We know that Birkhoff's ergodic theorem is not valid on its classical formulation to a infinite measure space $(X, \mathcal{A}, \mu)$, however we have the convergence of the ergodic means on this new space. This allows us to, somehow, recover the measure of a given set A just looking at the number of its visits considering the orbits of a $\tilde{\mu}$-typical countable set instead of looking at the orbit of one single point. It is also established some sufficient conditions in order to get a Central Limit Theorem for $\tilde{S}_n$. We'll also make a brief discussion on conservativity of maps on σ-finite spaces with full measure infinity, wandering rate of positive measure and Poisson random measure. We'll also make a brief discussion on conservativity of maps on σ-finite spaces with full measure infinity, wandering rate of positive measure and Poisson random measure.

Key-words: ergodic theory, dynamical systems, Poisson suspension, central limit theorem.

Sumário

Notações

Nesta seção encontram-se os símbolos mais utilizados no decorrer deste texto. Ressaltamos que alguns destes símbolos precisam de uma descrição mais detalhada sobre sua definição para seu melhor entendimento. Recomenda-se o uso desta seção como espécie de consulta rápida para relembrar as definições já lidas no texto.

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\overline{\mathbb{N}_0} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$

$\widetilde{X} = \{\tilde{x} : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{N}}_0\}$: conjunto das medidas de contagem definidas sobre um espaço $(X, \mathcal{A}, \mu)$

$\mathrm{N}_A(\tilde{x}) = \tilde{x}(A)$, $\forall \tilde{x} \in \widetilde{X}$ e $A \in \mathcal{A}$: funções definidas em $\widetilde{X}$ associada ao espaço $(X, \mathcal{A}, \mu)$

$\mathcal{U}$: σ-álgebra definida em $\widetilde{X}$ a partir de N_A

$\widetilde{T}(\tilde{x}) := \tilde{x} \circ T^{-1}$: função definida em $\widetilde{X}$ a partir de $T : X \to X$

$\varphi_Y(x) = \min\{n \geq 1;\ T^n(x) \in Y\},\ x \in X$: registra o tempo da primeira entrada em $Y \in \mathcal{A}$

$T_Y x = T^{\varphi(x)} x,\ x \in X$: função de primeiro retorno de Y

$\mu_Y = \dfrac{\mu}{\mu(Y)}$: medida em $Y \cap \mathcal{A}$ normalizada

$q_n(Y) := \mu_Y(Y \cap \{x;\ \varphi_Y(x) > n\})$: cauda de probabilidade para sua distribuição de retorno

$\omega_N(Y) := \mu(Y) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} q_n(Y)$: taxa de errância

$Y^N := \cup_{n=0}^{N-1} T^{-n} Y$: união das pré-imagens até tempo $N - 1$

$Y_n := Y^c \cap \{x \in X;\ \varphi(x) = n\}$: pontos que entram em Y com tempo exatamente n

$$\tau_Y(\tilde{x}) := \min\{j \geq 0;\ \widetilde{T}^j \tilde{x}(Y) > 0\}$$

$$\widetilde{S}_n(E) := \sum_{k=0}^{n-1} N_E \circ \widetilde{T}^k$$

$$\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{\mu}}(E) := Var_{\widetilde{\mu}}(\widetilde{S}_n(E)) = \int_{\widetilde{X}} \left(\widetilde{S}_n(E) - E\left(\widetilde{S}_n(E)\right)\right)^2 \, d\widetilde{\mu}$$

Introdução

No primeiro capítulo traçaremos um panorama geral sobre conceitos que precisamos para o desenvolvimento da teoria, isto é, definições e resultados de probabilidade e teoria ergódica. Na seção de probabilidade lembramos a definição do processo de Poisson bem como a de variáveis aleatórias e seus dois primeiros momentos, esperança e variância. Entre os resultados, destacam-se o teorema central do limite, a lei forte dos grandes números e a unicidade da função característica de uma variável aleatória. Sobre teoria ergódica, ressaltamos o contraste entre considerar espaços em que a medida total é finita e os que tem medida infinita devido a falha do teorema da recorrência de Poincarré, por exemplo. Introduzimos a definição de conservatividade para pedir a condição de recorrência que no caso finito é sempre assegurada.

Já no segundo capítulo introduzimos os elementos específicos da suspensão de Poisson, partimos em direção a construção de um novo espaço em que nos baseamos para o desenvolvimento dos resultados. Na primeira seção deste capítulo, consideramos o espaço formado de todas as medidas de contagem sobre o espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ estudado e uma σ-álgebra de forma a tornar algumas funções especiais, N_A, mensuráveis. Para ligar os espaços considerados, contruimos a medida aleatória de Poisson com intensidade μ e uma aplicação $\widetilde{T}$ que está ligada a transformação T inicialmente dada.

Na seção denomidada *"Retornos, Errância e Caudas de Probabilidade"* retomamos o conceito de *aplicação de primeiro retorno* além de introduzirmos as definições de *taxa de errância* e *cauda de probabilidade* que serão ferramentas para o cálculo de algumas propriedades probabilísticas no espaço das medidas de contagem.

Ainda neste capítulo é feito um estudo sobre a conservatividade de T, onde estabelece-se algumas equivalências para a definição e verifica-se que é possível inferir sobre esta propriedade em termos do conjunto X ou em termos dos conjuntos contidos em X, como será visto nas proposições 2.2.2 e 2.2.3. Por fim, é enunciado o primeiro teorema exposto nesta dissertação que nos dá algumas informações sobre o valor esperado e uma primeira versão do teorema central do limite para algumas variáveis aleatórias, além de nos dizer que, no espaço das medidas de contagem sobre X, quase toda medida de contagem $\tilde{x}$ vai medir pontos que retornam a um conjunto Y de medida positiva considerado.

Ao iniciar o terceiro capítulo, introduzimos o conceito de uma função ser *regularmente variável*, ainda definimos quando duas funções são *assintóticas* e quando uma *controla* a outra. Estas definições nos dão informações sobre velocidade de convergência e se duas funções convergem a um mesmo limite, donde o segundo principal teorema nos dá ferramentas para estimar a taxa de errância e estimar a distribuição do que terá papel semelhante a soma de Birkhoff. Como último tópico, fazemos um cálculo intuitivo de alguns elementos apresentados no texto para o exemplo da transformação de Boole a fim de aproximar o leitor dos conceitos introduzidos.

Capítulo 1

Teoria Ergódica Clássica e Probabilidade

Neste capítulo iremos introduzir alguns conceitos e terminologias que serão aqui utilizadas. Ao longo do texto também surgirão definições adicionais que estarão acompanhadas de uma referência para maiores informações.

1.1 Teoria da Medida

As primeiras definições são referentes a *σ-álgebra, espaços de medida* e *mensurabilidade* de um espaço X:

Definição 1.1.1. *Seja Ω um conjunto qualquer e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma* ***σ-álgebra*** *de Ω se:*

i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

ii) *se $B \in \mathcal{A}$ então $B^c \in \mathcal{A}$;*

iii) *se $B_n \in \mathcal{A}$, para todo $n \geq 1$ então $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$.*

Dizemos que $(\Omega, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável.

Seja $B \subset \mathcal{P}(\Omega)$, a menor σ-álgebra que contém B é chamada de ***σ-álgebra gerada por*** *B.*

Uma função $m : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ é uma ***medida*** *sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ se satisfaz*

i) $m(\emptyset) = 0$

ii) $m(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$ *para $\{B_n\}_1^{\infty}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos*

$(\Omega, \mathcal{A}, m)$ *é dito espaço de medida.*

Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é dita função* ***mensurável*** *se* $f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{A}$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Uma medida é m é dita σ***-finita*** *se for uma medida e existirem* $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *tais que* $m(A_n) < \infty$ *para todo* n *e* $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Chamamos a atenção para alguns espaços especiais:

Definição 1.1.2. *Seja* (Ω, Λ) *um espaço topológico. A menor* σ*-álgebra que contém os abertos de* Λ *é dita* σ***-álgebra de Borel***. *Um espaço topológico é dito* ***separável*** *se existe um subconjunto aberto e denso em* Ω. *Um espaço métrico* Ω *é dito* ***completo*** *se todas as sequências de Cauchy são convergentes. Dizemos ainda que* $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ *é um* ***espaço standard*** *se* $\mathcal{A}$ *é a* σ*-álgebra de Borel para alguma métrica separável e completa em* Ω.

Por fim, enunciamos os Teoremas da Convergência Monótona e da Convergência Dominada

Teorema 1.1.1 ([Ba], Teorema da Convergência Monótona (TCM))**.** *Se* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *uma sequência de funções mensuráveis tais que*

i) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \ \forall \ n \in \mathbb{N},$ *e quase todo* $x \in \Omega$;

ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$;

Então f *é mensurável e também*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \ dm = \int_\Omega f \ dm$$

Teorema 1.1.2 ([Ba], Teorema da Convergência Dominada)**.** *Se* $|f_n| \leq g$ *qtp, onde* g *é integrável, e se* $f_n \to f$ *qtp então* f_n *e* f *são integráveis e ainda*

$$\int_\Omega f_n \ dm \to \int_\Omega f \ dm$$

1.2 Probabilidade

Daremos agora alguns conceitos e resultados de probabilidade com um enfoque sobre teoria da medida:

Definição 1.2.1. *Dizemos que o espaço de medida* $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ *é um* ***espaço de probabilidade*** *se* $m(\Omega) = 1$ *e também as funções mensuráveis são frequentemente chamadas de* ***variáveis aleatórias*** *(v.a.). Dizemos ainda que as variáveis aleatórias* $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$ *são* ***independentes*** *se para todo* $A_i \in \mathcal{P}(X_i(\Omega))$ *tem-se*

$$m((X_1, \ldots, X_n) \in (A_1 \times \cdots \times A_n)) = \prod_{i=1}^{n} m(X_i \in A_i)$$

ou, equivalentemente, se os eventos de cada variáveis aleatórias são independentes. Isto é, se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ *então*

$$m(A_1 \cap A_2) = m(A_1)m(A_2)$$

Dizemos ainda que variáveis aleatórias são ***identicamente distribuidas*** *se tem a mesma distribuição de probabilidade.*

Exemplo 1.2.1. *Seja* $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ *um espaço de probabilidade. Dizemos que a variável aleatória* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *tem* ***distribuição exponencial*** *com parâmetro* $\alpha > 0$ *se*

$$m(X < t) = \begin{cases} 0, & se\ t \leq 0 \\ \int_0^t \alpha e^{-\alpha x} dx, & se\ t > 0 \end{cases}$$

Assim, definamos elementos de suma importância para nosso estudo:

Definição 1.2.2 (Esperança e Variância)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ *um espaço de probabilidade e* $X : \Omega \to \mathbb{N}$ *uma variável aleatória. A esperança de* X *é dada por*

$$E_m(X) = \int_\Omega X\ dm$$

e a variância de X *é definida por*

$$\sigma^2(X) = Var_m(X) \int_\Omega (X - E(X))^2\ dm.$$

O teorema a seguir é muito conhecido e utilizado na teoria de probabilidade e sua demonstração pode ser encontrada em [B]

Teorema 1.2.1 ([B], O Teorema Central do Limite)**.** *Suponha que* $\{X_n\}$ *são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuidas com esperança* c *e uma variância positiva* σ^2 *em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*. Se* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *então*

$$\mu\left(\frac{S_n - nc}{\sqrt{\sigma^2 n}} \leq t\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$$

Precisamos definir uma variável aleatória especial: variável aleatória de Poisson

Definição 1.2.3 (Distribuição de Poisson)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ um espaço de probabilidade e $X : \Omega \to \mathbb{N}$ uma variável aleatória. Dizemos que X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ se*

$$m(X(\Omega) = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \ \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Sobre variáveis aleatórias de Poisson podemos ainda estabelecer um resultado que facilita o trato destas em termos de sua Esperança e Variância

Lema 1.2.1. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ. Então*

$$Var(X) = E(X) = \lambda.$$

Demonstração: De fato

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_\Omega X \ dP \\ &= \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\{X=n\}} X \ dP \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{X=n\}} X \ dP = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} n \int_{\{X=n\}} \ dP \end{aligned}$$

Observe entretanto que

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} n \int_{\{X=n\}} dP &= \sum_{n\in\mathbb{N}} nP\left(\{X=n\}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} n\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\lambda^{n-1}}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Mudando os índices, temos

$$\begin{aligned} \lambda e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Logo

$$E(X) = \lambda$$

Para a variância

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \int_\Omega (X - E(X))^2 \; dP \\
&= \int_\Omega (X-\lambda)^2 \; dP \\
&= \int_\Omega X^2 \; dP - 2\lambda \int_\Omega X \; dP + \lambda^2 \\
&= \int_\Omega X^2 \; dP - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \int_\Omega X^2 \; dP - \lambda^2
\end{aligned}$$

Considerando a decomposição de $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\{X=n\}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega X^2 \; dP - \lambda^2 &= \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\{X=n\}} X^2 \; dP - \lambda^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{X=n\}} X^2 \; dP - \lambda^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} n^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\lambda^{n-1}}{(n-1)!} - \lambda^2
\end{aligned}$$

Fazendo a mesma mudança de índices feita no item anterior, obtemos

$$\lambda e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\lambda^{n-1}}{(n-1)!} - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(n+1)\lambda^n}{n!} - \lambda^2$$

Observando que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(n+1)\lambda^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{n\lambda^n}{n!} + \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\lambda^n}{n!}$$

pois ambas as séries convergem, com limites λe^λ e e^λ, respectivamente. Dessa forma

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(n+1)\lambda^n}{n!} - \lambda^2 \\
&= \lambda e^{-\lambda}(\lambda e^\lambda + e^\lambda) - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

ou seja

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

□

Também precisamos do conceito de Função Característica que é definida a seguir

Definição 1.2.4. *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ um espaço de probabilidade e $X : \Omega \to \mathbb{N}$ uma variável aleatória. A **função característica** de X é dada por*

$$\varphi(t) = E_m(e^{itX}) = \int_\Omega e^{itX} \; dm$$

Como exemplo, apresentamos a função característica da Distribuição Normal Padrão:

Exemplo 1.2.2. *Considere* $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ *espaço de probabilidade e* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função tal que*

$$m[X(\Omega) = x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ou seja, X *tem Distribuição Normal Padrão e sua função característica é*

$$\varphi(t) = e^{-\dfrac{t^2}{2}}$$

Exemplo 1.2.3. *Considere agora* $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ *um espaço de probabilidade e* $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ *uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro* λ*. Sua função característica é dada por* $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

Com efeito

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_{\Omega} e^{itX}\ dm \\
&= \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{X=n\}} e^{itX}\ dm \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} e^{itn} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} e^{itn} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\left(e^{it}\lambda\right)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Observando que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\left(e^{it}\lambda\right)^n}{n!} = e^{\lambda e^{it}}$$

temos

$$\varphi(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$$

Observação 1.2.1. *Sejam* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *variáveis aleatórias em* $(\Omega, \mathcal{A}, m)$*. Se* $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ *então* X *e* Y *tem mesma distribuição de probabilidade, isto é consequência do Teorema 26.2 de [B].*

Lema 1.2.2. *Seja* $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ *um espaço de probabilidade e* $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}_0$ *variáveis aleatórias de Poisson independentes com parâmetros* λ_1 *e* λ_2*, respectivamente. Então* $X + Y$ *tem distribuição de Poisson com parâmetro* $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$*.*

Demonstração: Procedamos ao cálculo da função característica de $X + Y$ e usaremos sua unicidade para concluir o pedido. Com efeito

$$\begin{aligned}
\varphi_{X+Y}(t) &= E\left(e^{it(X+Y)}\right) \\
&= E\left(e^{itX} e^{itY}\right) \underset{\text{independência}}{=} E(e^{itX})E(e^{itY})
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{cases} E(e^{itX}) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \\ E(e^{itY}) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)} \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} E(e^{itX})E(e^{itY}) &= e^{\lambda_2(e^{it}-1)}e^{\lambda_2(e^{it}-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)} = \varphi_Z(t) \end{aligned}$$

onde Z é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda_1 + \lambda_2$. Da observação (1.2.1), segue que $X + Y$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

$\square$

Propriedades 1.2.1. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *um espaço de probabilidade,* X_1 *e* X_2 *variáveis aleatórias e* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Então*

$$i)\ E(a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + c) = a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + c,\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

e, se as variáveis aleatórias forem independentes, então

$$ii)\ E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$$

e

$$iii)\ Var(a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + c) = a^2 \cdot Var(X_1) + b^2 \cdot Var X_2$$

Demonstração: A demonstração segue diretamente das definições. Comecemos por i):

$$\begin{aligned} E(a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + c) &= \int_\Omega (a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + c)\ dP \\ &= \int_\Omega aX_1\ dP + \int_\Omega bX_2\ dP + \int_\Omega c\ dP \\ &= a \cdot \int_\Omega X_1\ dP + b \cdot \int_\Omega X_2\ dP + c \int_\Omega dP = a \cdot E(X_1) + b \cdot E(X_2) + c \end{aligned}$$

Para ii) observemos que se X_1 e X_2 são funções simples, digamos

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i A_i \text{ e } X_2 = \sum_{j=1}^{n_2} b_j B_j$$

então

$$\begin{aligned} \int_\Omega X_1 X_2\ dP &= \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} \int_{A_i \cap B_j} a_i b_j\ dP \\ &\underset{\text{indepedência}}{=} \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} a_i b_j P(A_i)P(B_j) = E(X_1)E(X_2) \end{aligned}$$

Logo ii) é válido para funções simples. O resultado geral segue pelo Teorema da Convergência Monótona tomando sequência de funções simples convergindo para X_1 e X_2.

Por fim, $iii)$ segue de

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(a\cdot X_1+b\cdot X_2+c) &= \textstyle\int_\Omega\left((a\cdot X_1+b\cdot X_2+c)-E(a\cdot X_1+b\cdot X_2+c)\right)^2\ dP\\
&\overset{i)}{=} \textstyle\int_\Omega\left((a\cdot X_1+b\cdot X_2)-(aE(X_1)+bE(X_2))\right)^2\ dP\\
&= \textstyle\int_\Omega\left(a(X_1-E(X_1))+b((X_2)-E(X_2))\right)^2\ dP\\
&= \textstyle\int_\Omega a^2(X_1-E(X_1))^2+2ab(X_1-E(X_1))(X_2-E(X_2))+b^2(X_2-E(X_2))^2\ dP
\end{aligned}$$

Mas observe que, da definição

$$\int_\Omega (X_i-E(X_i))^2\ dP=\mathrm{Var}(X_i)$$

e também, pela independência

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (X_1-E(X_1))(X_2-E(X_2))\ dP &\overset{ii)}{=} [E(X_1-E(X_1))E(X_2-E(X_2))]\\
&\overset{i)}{=} [(E(X_1)-E(X_1))(E(X_2)-E(X_2))]=0
\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathrm{Var}(a\cdot X_1+b\cdot X_2+c)=a^2\mathrm{Var}(X_1)+b^2\mathrm{Var}(X_2)$$

□

Observação 1.2.2. *Por indução podemos estender o resultado anterior para mais de duas variáveis aleatórias.*

Observação 1.2.3. *Seja $(\Omega,\mathcal{A},m)$ um espaço de probabilidade. Podemos definir a variável aleatória de Poisson X com parâmetro λ como uma função que tem contra-domínio $\overline{\mathbb{N}_0}=\{0,1,2,\ldots,\infty\}$. De fato pois o conjunto onde X assume valor infinito tem medida nula:*

$$\Omega=\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\{X=n\}\right)\cup\{X=\infty\}$$

e, lembrando que

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\{X=n\}\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}m(\{X=n\})=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=1$$

temos

$$1=m(\Omega)=m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\{X=n\}\right)+m(\{X=\infty\})=1+m(\{X=\infty\})$$

donde segue que

$$m(\{X=\infty\})=0$$

Precisamos do seguinte exercício que é uma aplicação da unicidade das funções características para distribuições de Poisson e da normal padrão:

Lema 1.2.3 (Exercício 27.3, página 379, em [B])**.** *Se Y_λ é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ em $(\Omega, \mathcal{A}, m)$. Então*

$$m\left(\frac{Y_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq t\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

quando $\lambda \to \infty$.

Demonstração: Sabemos que a função característica da variável aleatória de Poisson Y_λ com parâmetro λ é definida por

$$\varphi_{Y_\lambda}(t) \overset{Lema\ 1.2.3}{=} e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Logo temos

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{Y_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) &\overset{def.}{=} \int_\Omega \exp\left(it\left(\frac{Y_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)\, dm \\
&= \exp\left(-it\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)\int_\Omega \exp\left(i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}Y_\lambda\right)\, dm \\
&= \exp\left(-it\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)\exp\left(\lambda\left(e^{\dfrac{it}{\sqrt{\lambda}}} - 1\right)\right) \\
&= \exp\left(\lambda\left(\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1 - \frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Por indução, mostra-se que as derivadas de $f(t) = e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}t}$ em relação a t são dadas por

$$f^{(k)}(t) = \left(\frac{i}{\sqrt{\lambda}}\right)^k e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}t}$$

Mas observe que, considerando a expansão de Taylor da exponencial de f em torno de $t = 0$, temos

$$e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}t} = f(0) + f^{(1)}(0)(t-0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2}(t-0)^2 + R_3(t)$$

onde $f(0) = 1$, $f^{(1)}(0) = \dfrac{i}{\sqrt{\lambda}}$, $f^{(2)}(0) = -\dfrac{1}{\lambda}$ e também

$$R_3(t) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{-if(t)}{3!\sqrt{\lambda}} + \frac{f(t)}{4!\lambda} + \dots\right)$$

logo

$$\left(\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1 - \frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right) = -\frac{t^2}{2\lambda} + R_3(t)$$

Agora

$$\lambda R_3(t) = \left(\frac{-if(t)}{3!\sqrt{\lambda}} + \frac{f(t)}{4!\lambda} + \dots\right) \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e portanto

$$\begin{aligned}\varphi_{\frac{Y_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) &= \exp\left(\lambda\left(-\frac{t^2}{2\lambda}+R_3(t)\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\exp\left(\lambda R_3(t)\right)\end{aligned}$$

Assim

$$\varphi_{\frac{Y_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) \stackrel{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

que é a função característica da normal padrão e o resultado segue da Observação 1.2.1.

□

A seguir, enunciamos a *lei Forte dos Grandes Números* e também o *Processo de Poisson* que nos auxiliarão na demonstração de alguns resultados desta dissertação.

Teorema 1.2.2 (Lei Forte dos Grandes Números)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ um espaço de probabilidade e $X_1, X_2, \dots$ uma sequência de varíaveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com $E(X_n) = m$. Se definimos*

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

então

$$P\left[\frac{S_n}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} m\right] = 1$$

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ um espaço de probabilidade e $X_1, X_2, \dots$ uma sequência de varíaveis aleatórias. Definindo

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

com $S_0 := 0$. Defina também

$$N_t(\omega) = \max\{n \in \mathbb{N}_0;\ S_n(\omega) \leq t\}$$

Com estas definições

Teorema 1.2.3 (Seção 23 de [B],Processo de Poisson)**.** *Assuma que, para cada ω, $N_t(\omega)$ é não negativo para $t \geq 0$, $N_0(\omega) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} N_t(\omega) = \infty$. Assuma também que, para todo ω, $N_t(\omega)$ é não decrescente e contínua a direita enquanto função de t de forma que, nos pontos de descontinuidade, o salto $N_t(\omega) - \sup_{s<t} N_s(\omega)$ é exatamente 1. Se X_n são independentes e identicamente distribuidas por uma exponencial de parâmetro α então*

i) Para $0 < t_1 < \cdots < t_k$ os incrementos $N_{t_1},\ N_{t_2} - N_{t_1}, \dots,\ N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ são independentes.

ii) Os incrementos individuais tem distribuição de Poisson

$$m[N_t - N_s = n] = \frac{e^{-\alpha(t-s)}(\alpha(t-s))^n}{n!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e $0 \leq s \leq t$.

Dessa forma, podemos perceber que N_t nada mais é do que uma variável aleatória construída a partir da soma de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuidas por uma exponencial de parâmetro α. Mais ainda, observa-se que

$$m(N_t = k) = e^{-(\alpha t)}\frac{(\alpha t)^k}{k!}$$

ou seja, N_t é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro αt.

As coleções de variáveis aleatórias $\{N_t; t \geq 0\}$ que satisfazem o teorema anterior são chamadas de **processo de Poisson** e α é chamado de **taxa do processo**.

Teorema 1.2.4 ([B])**.** *O processo de Poisson satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números.*

1.3 Teoria Ergódica Clássica

Nesta seção daremos algumas definições e discutiremos alguns resultados referentes a teoria ergódica clássica, destacando as diferenças e cuidados ao se trabalhar com medida σ-finita. Tendo este objetivo em mente, primeiro precisamos definir a mensurabilidade de uma aplicação

Definição 1.3.1. *Suponha $(X_1, \mathcal{A}_1, m_1)$ e $(X_2, \mathcal{A}_2, m_2)$ dois espaços de medida.*

- *Uma transformação $T : X_1 \to X_2$ é **mensurável** se $T^{-1}\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$;*
- *Dizemos que uma transformação **preserva medida** se T é mensurável e $m_1(T^{-1}B_2) = m_2(B_2),\ \forall B_2 \in \mathcal{A}_2$;*

Podemos então definir a *ergodicidade* de uma aplicação:

Definição 1.3.2 (Ergodicidade)**.** *Seja $(X, \mathcal{A}, m)$ um espaço de medida e $T : X \to X$ uma transformação mensurável, dizemos que T é **ergódica** se*

$$\forall Y \in \mathcal{A} \text{ tal que } T^{-1}Y = Y \Rightarrow m(Y) = 0 \text{ ou } m(Y^c) = 0$$

Teorema 1.3.1 ([W], Teorema da Recorrência de Poincaré)**.** *Seja T uma transformação que preserva medida em um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, m)$ e $E \in \mathcal{A}$ com $m(E) > 0$. Então quase todos os pontos de E retornam infinitas vezes a E sob iterações positivas de T.*

Entretanto, observa-se que tal teorema pode ser válido para espaços que não tem medida total infinita, como pode ser visto no exemplo abaixo

Exemplo 1.3.1. *Considere a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

e observa-se tomando o intervalo $[0, 1]$ nenhum ponto retorna a este conjunto.

Trabalharemos com transformações que satisfazem uma certa regularidade sobre as órbitas, regularidade garantida pelo Teorema da Recorrência de Poincaré

Definição 1.3.3 (Conservatividade)**.** *Seja $(X, \mathcal{A}, m)$ um espaço de medida σ-finita. Diremos que $T : (X, \mathcal{A}, m) \to (X, \mathcal{A}, m)$ é **conervativa** se T é mensurável e, para todo $Y \in \mathcal{A}$ tal que $0 < m(Y) < \infty$ temos $Y \subset \cup_{n\geq 1} T^{-n}Y$.*

Exemplo 1.3.2 (Boole)**.** *Defina $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $Tx := \dfrac{x^2-1}{x}$. Veremos que T preserva medida de Lebesgue m. Dado um intervalo $A = [a, b]$. Temos que a pré-imagem de A é a união de dois intervalos $[a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2]$, um positivo e um negativo e observe que a_1 e a_2 são as soluções de*

$$T(x) = a$$

ou seja, são soluções de

$$x^2 - ax - 1 = 0$$

Lembrando que a_1 e a_2 são solução da equação anterior, temos

$$(x - a_1)(x - a_2) = x^2 - ax - 1$$

e, portanto,

$$a_1 + a_2 = a$$

Um cálculo análogo pode ser feito para b_1 e b_2 e obter

$$b_1 + b_2 = b$$

Logo

$$m\left(T^{-1}[a, b]\right) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) = b - a = m([a, b])$$

Também temos que a Boole é conservativa e uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [A0].

Aqui também apresentamos o Teorema Ergódico de Birkhoff

Teorema 1.3.2 (Teorema Ergódico de Birkhoff)**.** *Suponha $T : (X, \mathcal{A}, m) \to (X, \mathcal{A}, m)$ uma transformação que preserva medida em um espaço σ-finito com medida total podendo ser finita ou não. Então, para a soma de Birkhoff de T, temos*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} f\left(T^i(x)\right) = f^*, \ m\text{-}qtp \ e \ f^* \in L_1(m).$$

Também $f^* \circ T = f^*$ qtp e se $m(X) < \infty$ então

$$\int f^* \, dm = \int f \, dm$$

Corolário 1.3.1. *Se T é ergódica então f^* é constante m-qtp e se ainda $m(X) < \infty$ temos*

$$f^* = \left(\frac{1}{m(X)}\right) \int f \; dm \qquad (m\text{-}qtp)$$

Se $\mu(X) = \infty$ temos que $f^* \equiv 0$.

Nosso objetivo neste trabalho é tentar extrair alguma informação extra para transformações em espaços de medida total infinita. Mostraremos que, se a transformação for conservativa em um espaço σ-finito, podemos aplicar o Teorema de Birkhoff à suspensão de Poisson e tentar recuperar informações de nosso sistema original. As aplicações deste resultado envolvem resultados em cálculo de probabilidade e Cadeias de Markov, por exemplo.

Capítulo 2

Suspensões de Poisson

2.1 A Suspensão de Poisson

Nosso objetivo é construir uma estrutura alternativa que nos permita obter informações sobre o sistema original usando resultados conhecidos. Para o tal, considere $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ um sistema que preserva medida, com $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida σ-finita e T não necessariamente invertível.

Denotaremos por $\widetilde{X}$ o conjunto das medidas de contagem em $(X, \mathcal{A})$, isto é, o conjunto de todas as medidas

$$\tilde{x} : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{N}}_0 = \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$$

que interpretamos como medidas que enchergam pontos nos mensuráveis de $\mathcal{A}$.

Para cada $A \in \mathcal{A}$, definimos a função

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_A : \widetilde{X} &\to \overline{\mathbb{N}}_0 \\ \tilde{x} &\mapsto \tilde{x}(A) \end{aligned}$$

como sendo uma função que avalia medidas de contagem em A.

A fim de tornar N_A mensurável, consideremos em $\widetilde{X}$ a σ-álgebra $\mathcal{U}$ gerada por N_A, ou seja, gerada pelos conjuntos

$$B_A^n := \{\tilde{x} \in \widetilde{X};\ \mathrm{N}_A(\tilde{x}) \geq n\},\ A \in \mathcal{A},\ n \in \overline{\mathbb{N}}_0$$

Podemos assim definir uma transformação em $\widetilde{X}$ que esteja relacionada a transformação original. Definimos assim

$$\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$$

dada por

$$\widetilde{T}(\tilde{x}) := \tilde{x} \circ T^{-1}$$

Nossa primeira observação consiste em entender como $\widetilde{T}$ e N_A se relacionam sob a composição. Para $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_A \circ \widetilde{T}(\tilde{x}) &= \mathrm{N}_A(\widetilde{T}\tilde{x}) \\ &= \mathrm{N}_A(\tilde{x} \circ T^{-1}) \\ &= (\tilde{x} \circ T^{-1})(A) \\ &= \tilde{x}(T^{-1}A) = \mathrm{N}_{T^{-1}A}(\tilde{x}) \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\mathrm{N}_A \circ \widetilde{T} = \mathrm{N}_{T^{-1}A} \,. \tag{2.1}$$

Fato este que nos permite concluir sobre a mensurabilidade de $\widetilde{T}$, uma vez que, para todo $A \in \mathcal{A}$ em um elemento da base B_A^α

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{-1} B_A^\alpha &= \{\tilde{x} \in \widetilde{X};\ \widetilde{T}\tilde{x} \in B_A^\alpha\} \\ &= \{\tilde{x} \in \widetilde{X};\ \tilde{x} \circ T^{-1} \in B_A^\alpha\} \\ &= \{\tilde{x} \in \widetilde{X};\ (\tilde{x} \circ T^{-1})(A) \geq \alpha\} \\ &= \{\tilde{x} \in \widetilde{X};\ \tilde{x}(T^{-1}A) \geq \alpha\} = B_{T^{-1}A}^\alpha \end{aligned}$$

Já construímos um novo espaço, uma nova σ-álgebra e já temos uma aplicação para estudarmos. Para completar precisamos definir uma nova medida $\widetilde{\mu}$ neste espaço e, com isto em mente, usaremos a *Medida Aleatória de Poisson com Intensidade* μ. Para uma descrição mais profunda sobre a a construção da medida nos referimos a [S], onde prova-se que, para qualquer coleção finita de mensuráveis em $\mathcal{A}$: $A_1, \ldots,\ A_l$, dois a dois disjuntos, as correspondentes $\mathrm{N}_{A_1}, \ldots,\ \mathrm{N}_{A_l}$, são variáveis aleatórias independentes em $(\widetilde{X}, \mathcal{U}, \widetilde{\mu})$. Mais ainda, cada N_A tem uma distribuição de Poisson de parâmetro $\mu(A)$:

$$E_{\widetilde{\mu}}(\mathrm{N}_A) = \int_{\widetilde{X}} \mathrm{N}_A \, d\widetilde{\mu} \overset{\text{Lema 1.2.1}}{=} \mu(A)$$

ou seja,

$$\widetilde{\mu}(\mathrm{N}_A^{-1}(n)) = \frac{e^{-\mu(A)}\mu(A)^n}{n!}$$

e, de sua contrução, $\widetilde{\mu}$ é a única medida que satisfaz estas condições.

Para construir a medida precisamos do seguinte teorema e nos referimos a [S] para a prova do mesmo.

Teorema 2.1.1 ([S])**.** *Sejam $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$, $i = 1, 2, \ldots$. Seja $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots$ e seja $\mathcal{A}$ a σ-álgebra gerada pelos conjuntos*

$$C = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) : \omega_k \in A_k \text{ para } k = 1, \ldots, n\}$$

sobre todos n e todos $A_k \in \mathcal{A}_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Então existe uma única medida de probabilidade P em $\mathcal{A}$ tal que

$$P(C) = P_1(A_1) \ldots P_n(A_n)$$

para todo C.

A construção é dada pela seguinte proposição

Proposição 2.1.1. *Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, existe, em algum espaço de probabilidade (Ω, Σ, P), uma medida aleatória de Poisson com as variáveis aleatórias em $\{N(B) : B \in \mathcal{A}\}$ em Ω com intensidade μ.*

Demonstração: A prova resume-se a dois passos.

Passo 1: Assuma que $\mu(X) < \infty$. Se $\mu(X) = 0$ então escolha $N(B)$ identicamente nulo. Assuma então que $\mu(X) > 0$. Podemos construir uma sequência $\{Z_n : \Omega \to X,\ n = 1, 2, \dots\}$ de variáveis aleatórias identicamente distribuidas cada uma com distribuição $\mu(X)^{-1}\mu$ independentes. Isto decorre do fato de tomarmos a sequência de espaços constantes iguais a Ω e observar que a medida obtida no espaço produto é a medida produto (pela unicidade da medida). Podemos ainda considerar uma variável aleatória de Poisson $Y : \Omega \to \mathbb{N}_0$ com parâmetro $\mu(X)$ tais que Y e $\{Z_n\}$ são independentes pelo mesmo argumento, trocando apenas a primeira medida da sequência por uma Poisson em Y. Observe que aqui as variáveis aleatórias $\{Z_i\}$ consideradas não tem contradomínio real, são apenas funções mensuráveis de Ω em X. Defina

$$N(B) = \begin{cases} 0, & \text{se } Y = 0 \\ \sum_{j=1}^{Y} \chi_B(Z_j), & \text{se } Y \geq 1 \end{cases}$$

Tome $k \geq 2$ e sejam $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{A}$ disjuntos, com $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} B_j = X$ e $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$. Fazendo $n = n_1 + \cdots + n_k$ temos

$$\begin{aligned} P(N(B_1) = n_1, \dots, N(B_k) = n_k) &= P(N(B_1) = n_1, \dots, N(B_k) = n_k | N(X) = n) P(N(X) = n) \\ &= P(\sum_{j=1}^{n} \chi_{B_1}(Z_j) = n_1, \dots, \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_k}(Z_j) = n_k) P(Y = n) \end{aligned}$$

uma vez que, para X temos que $\chi_X \equiv 1$ determinando somente o número de elementos somados, ou seja, $Y(\Omega)$. Do fato de termos uma decomposição de $X = \cup_{j=1}^{k} B_j$ e também $P(Z_j = B_i) = \dfrac{\mu(B_i)}{\mu(X)}$, a seguinte distribuição multinomial é a probabilidade

$$\begin{aligned} & P(\sum_{j=1}^{n} \chi_{B_1}(Z_j) = n_1, \dots, \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_k}(Z_j) = n_k) = \\ = \quad & \frac{n!}{(n_1!) \dots (n_k!)} \left(P(Z_{i_1} = B_1, \dots, Z_{i_{n_1}} = B_1)\right) \dots \Big(P(Z_{i_1} = B_k, \dots, Z_{i_{n_k}} = B_k)\Big)^{n_k} \\ \overset{\text{indep.}}{=} \quad & \frac{n!}{(n_1!) \dots (n_k!)} \left(\frac{\mu(B_1)}{\mu(X)}\right)^{n_1} \dots \left(\frac{\mu(B_k)}{\mu(X)}\right)^{n_k} \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} P(N(B_1) = n_1, \dots, N(B_k) = n_k) &= \frac{n!}{(n_1!) \dots (n_k!)} \left(\frac{\mu(B_1)}{\mu(X)}\right)^{n_1} \dots \left(\frac{\mu(B_k)}{\mu(X)}\right)^{n_k} e^{-\mu(X)} \frac{\mu(X)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{(n_1!) \dots (n_k!)} \mu(B_1)^{n_1} \dots \mu(B_k)^{n_k} e^{-\sum_{j=1}^{k} \mu(B_j)} \\ &= \frac{1}{(n_1!) \dots (n_k!)} \mu(B_1)^{n_1} \dots \mu(B_k)^{n_k} \prod_{j=1}^{k} e^{-\mu(B_j)} \\ &= \prod_{j=1}^{k} e^{-\mu(B_j)} \frac{\mu(B_j)^{n_j}}{n_j!} \end{aligned}$$

Somando em $n_1, \ldots, n_k$ exceto n_j obteremos

$$P(N(B_j) = n_j) = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0 \\ n_i \neq n_j}} \prod_{i=1}^{k} e^{-\mu(B_ij)} \frac{\mu(B_i)^{n_i}}{n_i!} = e^{-\mu(B_j)} \frac{\mu(B_j)^{n_j}}{n_j!}$$

o que resulta na medida aleatória de Poisson para espaços de medida finita.

Passo 2: Neste passo assumiremos $\mu(X) = \infty$. Como X é σ-finito, existem conjuntos disjuntos $X_1, X_2, \cdots \in \mathcal{A}$ tais que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$ e $\mu(X_i) < \infty$ para cada i. Considere ainda a medida induzida sobre cada X_k dada por $\mu_k(B) = \mu(B \cap X_k)$. Pelo *Passo 1*, podemos construir as medidas aleatórias de Poisson$\{N_k(B) : B \in \mathcal{A}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, com intensidade μ_k definida em algum espaço de probabilidade (Ω, Σ, P). Defina agora

$$N(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} N_K(B), \ \forall B \in \mathcal{A}$$

e decorre que $\{N(B)\}$ é uma medida aleatória de poisson com intensidade μ uma vez que

$$E(N(B)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(N_k(B)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_k(B) = \mu(B)$$

e a soma de variáveis aleatórias de poisson independentes é distribuição de Poisson, temos que $N(B)$ é Poisson se $\mu(B) < \infty$. Se $\mu(B) = \infty$ temos que $N(B) = \infty$ e $P(N(B)) = 1$.

□

Definição 2.1.1. $(\widetilde{X}, \mathcal{U}, \widetilde{\mu}, \widetilde{T})$ *é chamada **Suspensão de Poisson** do sistema* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$.

Em teoria ergódica trabalhamos com transformações que preservam medida e, como primeiro resultado, iremos olhar para a preservação da medida $\widetilde{\mu}$ e a independência das variáveis aleatórias sobre $\widetilde{T}$:

Lema 2.1.1. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ um sistema de medida invariante e σ-finita e $(\widetilde{X}, \mathcal{U}, \widetilde{\mu}, \widetilde{T})$ sua Suspensão de Poisson. Então, se $(\mathrm{N}_{A_1}, \ldots, \ \mathrm{N}_{A_l})$ é uma distribuição l-dimensional com N_{A_i} variáveis independentes e $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$, então $(\mathrm{N}_{T^{-1}A_1}, \ldots, \ \mathrm{N}_{T^{-1}A_l})$ são independentes. Mais ainda, se T preserva medida então $\widetilde{T}$ também o faz.*

Demonstração: Para verificar a independência basta observar que, se $A_i \cap A_j = \emptyset$, então $T^{-1}A_i \cap T^{-1}A_j = \emptyset$. Do fato de que os conjuntos A_i são dois a dois disjuntos e da igualdade 2.1, segue que $(\mathrm{N}_{T^{-1}A_1}, \ldots, \ \mathrm{N}_{T^{-1}A_l})$ são independentes.

Agora, para $\mathrm{N}_A \in \mathcal{U}$ qualquer e ainda da observação 2.1, $\widetilde{\mu}(\widetilde{T}^{-1} \, \mathrm{N}_A^{-1}(n)) = \widetilde{\mu}(\mathrm{N}_{T^{-1}A}^{-1}(n))$. Sabemos que, sobre estes elementos, $\widetilde{\mu}$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$, se T preserva medida. Donde segue que

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{T}^{-1} \, \mathrm{N}_A^{-1}(n)) = \frac{e^{-\mu(T^{-1}A)}[\mu(T^{-1}A)]^n}{n!} = \frac{e^{-\mu(A)}[\mu(A)]^n}{n!} = \widetilde{\mu}(\mathrm{N}_A^{-1}(n))$$

Logo $\widetilde{T}$ preserva $\widetilde{\mu}$.

□

2.2 Retornos, Errância e Caudas de Probabilidade

Seja T uma transformação conservativa que preserva medida, *t.c.p.m.*, de um espaço σ-finito $(X, \mathcal{A}, \mu)$ de medida total infinita.

Consideraremos o operador de transferência

$$\widehat{T} : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$$

caracterizado por

$$\int_X (g \circ T) \cdot u \; d\mu = \int_X g \cdot \widehat{T} u \; d\mu, \;\; u \in L_1 \text{ e } g \in L_\infty$$

Desta nossa definição podemos obter $\widehat{T}1 = 1$ uma vez que, para $\phi_n \nearrow g$ sequência de funções simples $\phi_n = \sum_{j=1}^{k_n} a_j^n \chi_{E_j^n}$ com, para fixado n, E_j^n dois a dois disjuntos, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_x g \circ T \cdot 1 \; d\mu &\overset{TCM}{=} \lim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k_n} a_j^n \int_X \chi_{E_j^n} \circ T \; d\mu \\ &= \lim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k_n} a_j^n \mu(T^{-1} E_j^n) \\ &= \lim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k_n} a_j^n \mu(E_j^n) \overset{TCM}{=} \int_X g \; d\mu \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_X g \circ T \; d\mu = \int_X g \; d\mu, \;\; \forall g \tag{2.2}$$

que é equivalente a T preservar a medida μ. Dessa maneira

$$\int_X g \cdot \widehat{T}1 \; d\mu \overset{\text{definição}}{=} \int_x g \circ T \cdot 1 \; d\mu = \int_X g \; d\mu$$

e, portanto

$$g = g \cdot \widehat{T}1 \; (\mu - \text{qtp}) \Rightarrow \widehat{T}1 = 1 \; (\mu - \text{qtp})$$

Ainda

$$1_Y = \sum_{k \geq 1} \widehat{T}^k 1_{Y \cap \{x; \; \varphi(x) = k\}}$$

Definiremos a seguir uma função que terá papel fundamental em nossos estudos, sua definição é muito utilizada em todos os ramos dos Sistemas Dinâmicos:

Definição 2.2.1. *Considere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e T uma transformação neste espaço. Seja $Y \in \mathcal{A}$ com $\mu(Y) > 0$, definimos*

$$\varphi(x) = \varphi_Y(x) = \min\{n \geq 1; \; T^n(x) \in Y\}, \;\; x \in X$$

*Definimos ainda o **primeiro retorno** de Y é dado pela seguinte função*

$$T_Y x = T^{\varphi(x)} x, \ x \in X$$

Se $\mu(Y) < \infty$ então φ é uma variável aleatória no espaço de probabilidade $(Y, Y \cap \mathcal{A}, \mu_Y)$, onde $\mu_Y(E) = \dfrac{\mu(E \cap Y)}{\mu(Y)}$. Para podermos dar prosseguimento ao nosso estudo precisamos de algumas definições extras. Estas nos darão a noção de Cauda de Probabilidades e Taxa de Errância.

Definição 2.2.2. *i) $q_n(Y) := \mu_Y(Y \cap \{x;\ \varphi_Y(x) > n\})$ é a **cauda de probabilidade** para sua distribuição de retorno.*

*ii) $\omega_N(Y) := \mu(Y) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} q_n(Y)$ é dita **taxa de errância**.*

Se ainda denotarmos

$$Y^N := \cup_{n=0}^{N-1} T^{-n} Y$$
$$Y_0 := Y$$
$$Y_n := Y^c \cap \{x \in X;\ \varphi(x) = n\}$$

Podemos extrair algumas propriedades que decorrem da definição anterior. Primeiro, de nossa definição, ressaltamos que $Y^N = \dot\cup_{n=0}^{N-1} Y_n$. Dinamicamente, Y^N é o conjunto dos pontos que visitam Y pela primeira vez em tempo inferior a N. Dessa forma

$$N_{Y^N}(\tilde{x}) = \tilde{x}(Y^N), \ \tilde{x} \in \widetilde{X}$$

é visto como o número de pontos que visitam Y antes do tempo N.

Algumas propriedades decorrem das definições dadas, a fim disto:

Definição 2.2.3. *Dizemos que Y é um conjunto **sweep-out** se*

$$\bigcup_{n \geq 1} T^{-n} Y = X \qquad (\mu\text{-qtp})$$

Lema 2.2.1. *Seja T uma transformação ergódica e conservativa que preserva medida em um espaço σ-finito $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Então todo conjunto $Y \in \mathcal{A}$ com $0 < \mu(Y) < \infty$ é sweep-out.*

Demonstração: Da definição de conservatividade

$$T \text{ conservativo} \Leftrightarrow \ Y \subset \bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(Y)$$

Agora observe que

$$T^{-1} \left(\bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(Y) \right) = \bigcup_{n \geq 2} T^{-n}(Y)$$

Por outro lado, $Y \subset \bigcup_{n\geq 1} T^{-n}Y$ e, dessa forma, $T^{-1}(Y) \subset \bigcup_{n\geq 2} T^{-n}(Y)$. Logo

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(Y) &= T^{-1}(Y) \cup \bigcup_{n\geq 2} T^{-n}(Y)\\ &= \bigcup_{n\geq 2} T^{-n}(Y) = T^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(Y)\right)\end{aligned}$$

ou seja, $\bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(Y)$ é um conjunto invariante para T com $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(Y)\right) > 0$ pois $Y \subset \bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(Y)$.
Portanto, segue da ergódicidade de T e da invariância supracitada:

$$\mu\left(X - \left(\bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(Y)\right)\right) = 0$$

e assim

$$X = \bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(Y) \qquad (\mu\text{-qtp})$$

$\square$

O lema anterior nos possibilita demonstrar um resultado que dará uma outra forma de calcular a taxa de errância em termos dos elementos que estão fora do conjunto Y considerado.

Lema 2.2.2. *Se Y é sweep-out para a transformação T que preserva medida em um espaço σ-finito $(X, \mathcal{A}, \mu)$, com $0 < \mu(Y) < \infty$, então*

$$\mu(Y \cap \{x,\ \varphi(x) > n\}) = \mu(Y^c \cap \{x;\ \varphi(x) = n\}),\ \ \textit{para } n \geq 1$$

Demonstração: Para $n \geq 0$

$$\begin{aligned}T^{-1}(Y^c \cap \{\varphi > k\}) &= T^{-1}(Y^c) \cap T^{-1}(\{x \in X;\ \varphi(x) > k\})\\ &= (\{x \in Y;\ T(x) \in Y^c\} \dot\cup \{x \in Y^c; T(x) \in Y^c\}) \cap\\ &\quad \cap \{x \in X; \varphi(T(x)) > k\}\\ &= (\{x \in Y;\ T(x) \in Y^c \text{ e } \varphi(T(x)) > k\}) \dot\cup\\ &\quad \dot\cup(\{x \in Y^c;\ T(x) \in Y^c \text{ e } \varphi(T(x)) > k\})\end{aligned}$$

Agora observe que em ambos os conjuntos da decomposição anterior tem-se $T(x) \in Y^c$, donde decorre que

$$\begin{aligned}\varphi(T(x)) > k \quad &\Leftrightarrow \quad T^j(T(x)) \notin Y,\ 0 \leq j \leq k\\ &\Leftrightarrow \quad T^{j+1}(x) \notin Y,\ 0 \leq j \leq k\\ &\overset{T(x)\notin Y}{\Leftrightarrow} \quad T^j(x) \notin Y,\ 0 \leq j \leq k+1 \Leftrightarrow \varphi(x) > k+1\end{aligned}$$

Obtemos assim

$$\{x \in Y;\ T(x) \in Y^c \text{ e } \varphi(T(x)) > k\} = \{x \in Y;\ \varphi(x) > k+1\} = Y \cap \{\varphi > k+1\}$$

e, analogamente,

$$\{x \in Y^c;\ T(x) \in Y^c \text{ e } \varphi(T(x)) > k\} = \{x \in Y^c;\ \varphi(x) > k+1\} = Y^c \cap \{\varphi > k+1\}$$

Logo

$$T^{-1}(Y^c \cap \{\varphi > k\}) = (Y \cap \{\varphi > k+1\})\dot\cup(Y^c \cap \{\varphi > k+1\})$$

Mostremos por indução agora que

$$T^{-n}(Y^c \cap \{\varphi > k\}) = \bigcup_{j=1}^{n} T^{-n+j}(Y \cap \{\varphi > k+j\})\dot\cup(Y^c \cap \{\varphi > k+n\}) \tag{2.3}$$

Assuma válido para n e mostremos para $n+1$:

$$\begin{aligned}
T^{-(n+1)}(Y^c \cap \{\varphi > k\}) &= T^{-1}(T^{-n}(Y^c \cap \{\varphi > k\})) \\
&\overset{H.I.}{=} T^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{n} T^{-n+j}(Y \cap \{\varphi > k+j\})\dot\cup(Y^c \cap \{\varphi > k+n\})\right) \\
&= \bigcup_{j=1}^{n} T^{-n-1+j}(Y \cap \{\varphi > k+j\})\dot\cup T^{-1}(Y^c \cap \{\varphi > k+n\}) \\
&= \bigcup_{j=1}^{n} T^{-(n+1)+j}(Y \cap \{\varphi > k+j\})\dot\cup(Y \cap \{\varphi > k+(n+1)\}) \\
&\quad \dot\cup(Y^c \cap \{\varphi > k+(n+1)\}) \\
&= \bigcup_{j=1}^{n+1} T^{-(n+1)+j}(Y \cap \{\varphi > k+j\})\dot\cup(Y^c \cap \{\varphi > k+n+1\})
\end{aligned}$$

o que prova esta indução.

Note que, para todo $E \in \mathcal{A}$ tem-se a decomposição a seguir

$$E = (Y \cap \{\varphi > 0\} \cap E)\dot\cup(Y^c \cap \{\varphi > 0\} \cap E) \qquad (\mu\text{-qtp})$$

Usaremos a igualdade 2.3 para mostrar que

$$T^{-n}E = \bigcup_{j=0}^{n} T^{-n+j}(Y \cap \{\varphi > j\} \cap T^{-j}(E))\dot\cup(Y^c \cap \{\varphi > n\} \cap T^{-n}(E)) \qquad (\mu\text{-qtp})$$

Com efeito, procedamos por indução. Para $n = 0$, temos que a igualdade anterior é a decomposição de E apresentada. Para $n = 1$

$$\begin{aligned}
T^{-1}(E) &= T^{-1}(Y \cap \{\varphi > 0\} \cap E)\dot\cup(Y^c \cap \{\varphi > 0\} \cap E) \\
&= T^{-1}(Y \cap \{\varphi > 0\} \cap E)\dot\cup T^{-1}(Y^c \cap \{\varphi > 0\} \cap E) \\
&\overset{\text{Eq. 2.3}}{=} T^{-1}(Y \cap \{\varphi > 0\}) \cap T^{-1}(E)\dot\cup(Y \cap \{\varphi > n+1\} \cap T^{-1}(E))\dot\cup(Y^c \cap \{\varphi > n+1\} \cap T^{-1}(E))
\end{aligned}$$

ou seja,

$$T^{-1}(E) = [T^{-1}(Y \cap \{\varphi > 0\})\dot\cup(Y \cap \{\varphi > n+1\})\dot\cup(Y^c \cap \{\varphi > n+1\})] \cap T^{-1}(E) \tag{2.4}$$

Suponha a igualdade válida para n, para $n+1$:

$$\begin{aligned}
T^{-(n+1)}(E) &= T^{-1}(T^{-n}(E)) \\
&\overset{\text{H.I.}}{=} T^{-1}\left(\bigcup_{j=0}^{n} T^{-n+j}(Y \cap \{\varphi > j\} \cap T^{-j}(E))\dot{\cup}(Y^c \cap \{\varphi > n\} \cap T^{-n}(E))\right) \\
&= \bigcup_{j=0}^{n} T^{-n+j-1}(Y \cap \{\varphi > j\} \cap T^{-j}(E))\dot{\cup}(Y \cap \{\varphi > n+1\} \cap T^{-(n+1)}(E)) \\
&\quad \dot{\cup}(Y^c \cap \{\varphi > n+1\} \cap T^{-(n+1)}(E) \\
&= \bigcup_{j=0}^{n+1} T^{-(n+1)+j}(Y \cap \{\varphi > j\} \cap T^{-j}(E))\dot{\cup}(Y^c \cap \{\varphi > n+1\} \cap T^{-(n+1)}(E))
\end{aligned}$$

donde segue novamente o resultado.

Tomando $E = T^{-1}Y$, temos

$$T^{-(n+1)}Y = \bigcup_{k=0}^{n} T^{-n+k}(Y \cap \{\varphi > k\} \cap T^{-(k+1)}Y)\dot{\cup}(Y^c \cap \{\varphi > n\} \cap T^{-(n+1)}Y) \tag{2.5}$$

Considerando as seguintes igualdades de conjuntos

$$\begin{aligned}
Y \cap \{\varphi > k\} \cap T^{-(k+1)}Y &= \{x \in Y;\ \varphi(x) > k\} \cap \{x \in Y;\ T^{(K+1)}(x) \in Y\} \\
&= \{x \in Y;\ \varphi(x) = k+1\} = Y \cap \{\varphi = k+1\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Y^c \cap \{\varphi > n\} \cap T^{-(n+1)}Y &= \{x \in Y^c;\ \varphi(x) > n\} \cap \{x \in Y^c;\ T^{(n+1)}(x) \in Y\} \\
&= \{x \in Y^c;\ \varphi(x) = n+1\} = Y \cap \{\varphi = n+1\}
\end{aligned}$$

Substituindo as igualdades em 2.5 obtemos

$$T^{-(n+1)}Y = \bigcup_{k=0}^{n} T^{-n+k}(Y \cap \{\varphi = k+1\})\dot{\cup}(Y^c \cap \{\varphi = n+1\}).$$

Ao medir os conjuntor por μ, temos

$$\mu(Y) = \sum_{k=0}^{n} \mu(Y \cap \{\varphi = k+1\}) + \mu(Y^c \cap \{\varphi = n+1\})$$

Observe que $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Y \cap \{\varphi = n\}\}$ disjunta e, portanto, ao reescrever a igualdade acima obtemos

$$\mu(Y \cap \{\varphi > n+1\}) + \mu(Y \cap \{\varphi \leq n+1\}) = \mu(Y \cap \{\varphi \leq k+1\}) + \mu(Y^c \cap \{\varphi = n+1\})$$

Como $\mu(Y \cap \{\varphi > n+1\}) < \mu(Y) < \infty$, obtemos

$$\mu(Y \cap \{\varphi > n+1\}) = \mu(Y^c \cap \{\varphi = n+1\})$$

$\square$

Como aplicação direta deste resultado, obtemos as seguintes propriedades

Propriedades 2.2.1. *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *um sistema conservativo que preserva medida e* $Y \in \mathcal{A}$*, com* $0 < \mu(Y) < \infty$*.*

i) $\mu(Y_n) = \mu(Y) \cdot q_n(Y)$*.*

ii) $\omega_n(Y) = \mu(Y^n)$

Demonstração: Claramente *i)* é direto do lema anterior uma vez que

$$\begin{aligned} \mu(Y_n) &= \mu(Y^c \cap \{x; \varphi_Y(x) = n\}) \\ &= \mu(Y \cap \{\varphi > n\}) \\ &= \mu(Y) \cdot \frac{\mu(Y \cap \{\varphi > n\})}{\mu(Y)} \overset{def.}{=} \mu(Y) \cdot q_n(Y) \end{aligned}$$

Para mostrar *ii)* basta observar, de $Y^N = \dot\cup_{n=0}^{N-1} Y_n$,

$$\begin{aligned} \mu(Y^n) &= \mu(\dot\cup_{j=0}^{n-1} Y_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \mu(Y_j) \\ &\overset{i)}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(Y) q_j(Y) \\ &= \mu(Y) \left(\sum_{j=0}^{n-1} q_j(Y) \right) = \omega_n(Y) \end{aligned}$$

□

Precisamos da seguinte proposição para caracterizar a conservatividade de T e poder olhar a conservatividade de T_Y:

Proposição 2.2.1. *Seja* T *uma transformação que preserva medida em um espaço* σ*-finito* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *então são equivalentes*

i) Se $W \in \mathcal{A}$ *é um conjunto errante para* T*, isto é,* $W \cap T^{-n}(W) = \emptyset$*,* $\forall n \geq 1$*, então* $\mu(W) = 0$*;*

ii) $\forall A \in \mathcal{A}$*,* $\sum_{k \geq 1} \chi_A \circ T^k \geq 1$*,* μ*-qtp em* A*;*

iii) $\forall A \in \mathcal{A}$*,* $\sum_{k \geq 1} \chi_A \circ T^k = \infty$*,* μ*-qtp em* A*;*

iv) $B \in \mathcal{A}$ *tal que* $T^{-1}(B) \subset B$ *então* $\mu(B \setminus T^{-1}(B)) = 0$*;*

v) T *é conservativa*

Demonstração: $iii) \Rightarrow ii)$ não há o que fazer.

$v) \Rightarrow ii)$ Segue diretamente da definição de $\sum_{k \geq 1} \chi_A \circ T^k$ uma vez que este conta o número de reentradas em A.

$ii) \Rightarrow v)$ Também segue da definição de $\sum_{k\geq 1}\chi_A\circ T^k$ como contagem.

$ii) \Rightarrow i)$ Se W é errante, $W\cap T^{-n}W=\emptyset$ e, consequentemente

$$\mu(W)=\mu\left(W\setminus\bigcup_{n\geq 1}T^{-n}(W)\right)=0$$

pois, por hipótese, $T^k(W)$ retorna a W qtp.

$i) \Rightarrow iv)$ Note que temos a seguinte cadeia de conjuntos dada por aplicações sucessivas de T^{-1} na hipótese

$$B\supset T^{-1}(B)\supset T^{-2}(B)\supset\dots$$

donde segue que $W=B\setminus T^{-1}(B)$ é errante e obtem-se

$$\mu(W)=\mu(B\setminus T^{-1}(B))=0$$

$iv) \Rightarrow iii)$ Dado $A\in\mathcal{A}$ temos

$$\left(A\setminus\{x\in A;\ \sum_{k\geq 1}\chi_A\circ T^k=\infty\}\right)\subset\{x\in A;\ 1\leq\sum_{k\geq 0}\chi_A\circ T^k<\infty\}=:B$$

Agora observe que $B\supset T^{-1}(B)$ uma vez que

$$x\in T^{-1}(B)\Rightarrow 1\leq\sum_{k\geq 1}\chi_A\circ T^k<\infty\Rightarrow x\in B$$

pois

$$1\leq\sum_{k\geq 0}\chi_A\circ T^k\leq\sum_{k\geq 1}\chi_A\circ T^k<\infty$$

Da hipótese

$$\mu(T^{-k}(B)\setminus T^{-(k+1)}(B))=\mu(T^{-k}(B\setminus T^{-1}(B)))=0,\ \forall k\geq 0$$

Usando novamente a cadeia de inclusões do item anterior podemos decompor B em pedaços disjuntos da seguinte forma

$$B=\bigcup_{k\geq 0}(T^{-k}(B)\setminus T^{-(k+1)}(B))\cup\bigcap_{k\geq 0}T^{-k}(B)$$

Agora

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq 0}(T^{-k}(B)\setminus T^{-(k+1)}(B))\right)=\sum_{k\geq 0}\mu(T^{-k}(B)\setminus T^{-(k+1)}(B))=0$$

e, para concluir, observe que $\bigcap_{k\geq 0}T^{-k}(B)=\emptyset$. Isto acontece porque uma vez que cada $x\in B$ tem um $k\geq 0$ minimal para o qual $T^k(x)\in A$ com $T^{k+1}(x)$ nunca visitando A, pois o número de reentradas é finito. Em particular $x\notin T^{-(k+1)}(B)$.

$\square$

Corolário 2.2.1. *Seja T uma transformação que preserva medida. Então*

$$T \text{ é conservativa e ergódica} \iff \sum_{k\geq 1} \chi_A \circ T^k = \infty, \ \forall A \in \mathcal{A}$$

qtp, com $\mu(A) > 0$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Segue diretamente da proposição anterior.

($\Leftarrow$) A conservatividade segue diretamente da proposição anterior. Suponha, por absurdo, que existe A de medida positiva, invariante por T e com $\mu(A^c) > 0$. Assim

$$\left\{ \sum_{k\geq 1} \chi_A \circ T^k = \infty \right\} \neq X$$

uma vez que existem conjuntos de medida positiva que não satisfazem essa condição dada pela função indicadora. Logo T não tem conjuntos de medida positiva, invariantes por T com complementar também com medida positiva, o que resulta na ergodicidade.

□

Proposição 2.2.2. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ um espaço de medida σ-finita com μ invariante para T, Y* sweep-out *com medida finita. Se T é conservativa então*

i) A medida restrita $\mu|_{Y\cap\mathcal{A}}$ é invariante sobre a aplicação de primeiro retorno em $(Y, Y \cap \mathcal{A}, \mu|_{Y\cap\mathcal{A}})$;

ii) T_Y é conservativa;

iii) Se T é também ergódica, então T_Y é ergódica em $(Y, Y \cap \mathcal{A}, \mu|_{Y\cap\mathcal{A}})$.

Demonstração: $i)$ Considere

$$B = Y \cap A$$

para algum $A \in \mathcal{A}$. Considere também

$$B_n = \{x \in B; \ \varphi(x) = n\}$$

Observe que

$$\dot{\cup}_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset B \overset{conserv.}{\subset} \cup_{n\in\mathbb{N}} T^{-n} B \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \qquad (\mu\text{-qtp})$$

ou seja

$$B = \dot{\cup}_{n\in\mathbb{N}} B_n \qquad (\mu\text{-qtp})$$

Assim

$$\begin{aligned}
\mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(T_Y^{-1}B) &= \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(T_Y^{-1}(\dot\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n)) \\
&= \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(\dot\cup_{n\in\mathbb{N}}T_Y^{-1}(B_n)) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(T_Y^{-1}B_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(T^{-n}B_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(T^{-n}B_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \\
&= \mu(B) = \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(B)
\end{aligned}$$

pois $B \in \mathcal{A}$ e está contido em Y. Logo

$$\mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(T_Y^{-1}(B)) = \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(B)$$

ii) Seja $B \in Y \cap \mathcal{A}$ tal que $B \supset T_Y^{-1}(B)$. Note que, como $\mu(Y) < \infty$, temos $\mu|_{Y\cap\mathcal{A}} < \infty$. Dessa forma

$$\mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(B \setminus T_Y^{-1}(B)) = \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(B) - \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(T_Y^{-1}(B))$$

entretanto, de *i*)

$$\mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(T_Y^{-1}(B)) = \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(B)$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(B \setminus T_Y^{-1}(B)) &= \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(B) - \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(T_Y^{-1}(B)) \\
&= \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(B) - \mu|_{Y\cap\mathcal{A}}(B) = 0
\end{aligned}$$

donde segue a conservatividade da proposição 2.2.1

iii) temos apenas que mostrar que T_Y safisfaz o corolário 2.2.1. Com efeito, $\forall B \in Y \cap \mathcal{A}$ com $\mu(B) > 0$, pela ergodicidade e conservatividade de T, segue do corolário 2.2.1

$$\sum_{k\geq 1} \chi_B \circ T^k = \infty \qquad (\mu|_{Y\cap\mathcal{A}}\text{-qtp})$$

Agora note que

$$\sum_{k\geq 1} \chi_B \circ T_Y^k = \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1} \chi_{B_n} \circ T^{nk} = \infty \qquad (\mu|_{Y\cap\mathcal{A}}\text{-qtp})$$

pois se o conjunto onde essa soma não é infinita tem medida positiva, implicaria que o mesmo teria medida positiva em $\{\sum_{k\geq 1} \chi_B \circ T^k = \infty\}$ o que não acontece (pela ergodicidade de T) $\square$

Proposição 2.2.3. *Assuma que Y é um conjunto* sweep-out *para $T : (X, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{A})$, para o qual T_Y preserva medida para alguma medida finita ν. Então* *i) T tem uma medida invariante μ com $\mu|_{Y\cap\mathcal{A}} = \nu$, dada por*

$$\mu(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \nu(Y\cap\{\varphi > n\}\cap T^{-n}A),\ A\in\mathcal{A};$$

ii) T é conservativa em $(X,\mathcal{A},\mu)$;

iii) Se T_Y é ergódica em $(Y, Y\cap\mathcal{A}, \mu|_{Y\cap\mathcal{A}})$ então T é ergódica em $(X,\mathcal{A},\mu)$.

Demonstração: i) Seja

$$\mu(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \nu(Y\cap\{\varphi > n\}\cap T^{-n}A),\ A\in\mathcal{A};$$

como definido. Note que podemos decompor o conjunto em

$$Y\cap\{\varphi > n\} = (Y\cap\{\varphi = n+1\})\dot{\cup}(Y\cap\{\varphi > n+1\})$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}A) &= \sum_{n\geq 0} \nu(Y\cap\{\varphi > n\}\cap T^{-(n+1)}(A)) \\
&= \sum_{n\geq 0} \nu(Y\cap\{\varphi = n+1\}\cap T^{-(n+1)}(A)) + \nu(Y\cap\{\varphi > n+1\}\cap T^{-(n+1)}(A)) \\
&= \sum_{n\geq 1} \nu(Y\cap\{\varphi = n\}\cap T^{-n}(A)) + \sum_{n\geq 1} \nu(Y\cap\{\varphi > n\}\cap T^{-(n)}(A))
\end{aligned}$$

Por outro lado, observe que, como a decomposição dada em 2.2.2

$$\nu(Y\cap\{\varphi > 0\}\cap T^{0}(A)) = \nu(Y\cap A)$$

e portanto

$$\sum_{n\geq 1} \nu(Y\cap\{\varphi = n\}\cap T^{-n}(A)) = \nu(\bigcup_{n\geq 1} Y\cap\{\varphi = n\}\cap T^{-n}(A)) = \nu(T_Y^{-1}(Y\cap A))$$

Como T_Y, por hipótese, preserva a medida temos

$$\sum_{n\geq 1} \nu(Y\cap\{\varphi = n\}\cap T^{-(n)}(A)) = \nu(Y\cap A)$$

donde decorre o pedido.

ii) Observe da definição de *sweep-out*

$$\bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(Y) = X \Rightarrow \bigcup_{n\geq N} T^{-n}(Y) = X,\ N\geq 1$$

isto é, quase todas as órbitas visitam Y em um tempo tão tardio quanto se queira e infinitas vezes:

$$\sum_{k\geq 0} \chi_Y\circ T^k = \infty,\ \text{em } X$$

Seja $W \in \mathcal{A}$ um conjunto errante para T, isto é,

$$W \cap T^{-n}(W) = \emptyset, \ n \geq 1$$

Então

$$W \cap T^{-n}(W) = \emptyset \Rightarrow T^{-m}(W) \cap T^{-(m+n)}(W) = T^{-m}(\emptyset) = \emptyset, \ m \geq 1$$

dessa forma $T^{-n}(W)$ são disjuntos. Como $\mu(Y) = \nu(Y) < \infty$ temos, pela T invariância da medida

$$\begin{aligned}
\infty > \mu(Y) = \mu(T^{-n}Y) &\geq \mu\left(T^{-n}(Y) \cap \bigcup_{k=0}^{n} T^{-k}(W)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mu\left(T^{-n}(Y) \cap T^{-k}(W)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mu\left(T^{-(n-k)}(Y) \cap W\right) = \int_W \left(\sum_{k=0}^{n} \chi_Y \circ T^{-(n-k)}\right) d\mu
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\sum_{k=0}^{n} \chi_Y \circ T^{-(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \chi_Y \circ T^{-k} \nearrow \infty$$

quando $n \to \infty$ temos que a integral do lado direito só fica limitada se $\mu(W) = 0$. Da proposição 2.2.1, segue que T é conservativa.

iii) Seja A um conjunto T invariante. Note que

$$\begin{aligned}
T_Y^{-1}(Y \cap A) &= \bigcup_{k \geq 1} Y \cap \{\varphi = k\} \cap T^{-k}(A) \\
&= \bigcup_{k \geq 1} Y \cap \{\varphi = k\} \cap A = Y \cap A
\end{aligned}$$

Como T_Y é ergódica, temos que $\mu(Y \cap A) = 0$ ou $\mu(Y \cap A^c) = 0$. No primeiro caso, lembrando da invariância de A sob T temos, para todo $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-n}(Y) \cap A) &= \mu(T^{-n}(Y \cap A)) \\
&= \mu(Y \cap A) = 0
\end{aligned}$$

Como de *ii)* tem-se T conservativa

$$\mu(A) = \mu(X \cap A) = \mu(\bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(Y) \cap A) = 0$$

e, com argumento análogo, concluímos que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$.

$\square$

Existem ainda algumas últimas definições a serem dadas nesta seção. Elas aparecem como extensão natural de conceitos já apresentados como, por exemplo o item *ii)* abaixo, uma extensão da definição da Soma de Birkhoff.

Definição 2.2.4. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ um sistema e $(\widetilde{X}, \mathcal{U}, \widetilde{\mu}, \widetilde{T})$ sua suspensão de Poisson.*

i) $\tau_Y(\tilde{x}) := \min\{j \geq 0;\ \widetilde{T}^j \tilde{x}(Y) > 0\}$;

ii) $\widetilde{S}_n(E) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} N_E \circ \widetilde{T}^k$;

iii) $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{\mu}}(E) := Var_{\widetilde{\mu}}(\widetilde{S}_n(E)) = \int_{\widetilde{X}} \left(\widetilde{S}_n(E) - E\left(\widetilde{S}_n(E)\right)\right)^2 \, d\widetilde{\mu}$

Observação 2.2.1. *Note que, em* i)*:*

$$
\begin{aligned}
\tau_Y(\tilde{x}) &:= \min\{j \geq 0;\ \widetilde{T}^j \tilde{x} > 0\} \\
&= \min\{j \geq 0;\ \tilde{x} \circ T^{-j}(Y) > 0\} \\
&= \min\{j \geq 0;\ \tilde{x}(T^{-j}Y) > 0\} = \min\{j \geq 0;\ \mathrm{N}_{T^{-j}Y}(\tilde{x}) > 0\}
\end{aligned}
$$

ou seja, $\tau_Y(\tilde{x})$ representa a primeira vez que $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ consegue enxegar algum ponto em Y sob a ação de T.

2.3 Teorema

Vamos obter os primeiros resultados sobre as variáveis aleatórias N_{Y^n} e aproximá-las usando o Teorema Central do Limite.

Teorema 2.3.1. *Seja T uma transformação conservativa que preserva medida em um espaço de medida σ-finito de medida total infinita $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e considere $(\widetilde{X}, \mathcal{U}, \widetilde{\mu}, \widetilde{T})$ sua suspensão de Poisson. Para cada $Y \in \mathcal{A}$, $0 < \mu(Y) < \infty$, as variáveis aleatórias N_{Y^n} satisfazem*

$$E_{\widetilde{\mu}}(\mathrm{N}_{Y^n}) = \omega_n(Y) \ e \ \frac{\mathrm{N}_{Y^n}}{\omega_n(Y)} \to 1 \qquad (\mu\text{-}qtp) \tag{2.6}$$

e o Teorema Central do Limite

$$\widetilde{\mu}\left(\frac{\mathrm{N}_{Y^n} - \omega_n(Y)}{\sqrt{\omega_n(Y)}} \leq t\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-s^2}{2}} \, ds, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

Mais ainda

$$\widetilde{\mu}(\{\tilde{x} \in \widetilde{X};\ \tau_Y(\tilde{x}) \geq n\}) = e^{-\omega_n(Y)}, \ n \geq 1 \tag{2.8}$$

Antes da demonstração, podemos inferir alguns fatos sobre o teorema anterior. O que é estabelecido em 2.6 e 2.7 nos diz que os pontos que entram em Y até tempo n tem valor esperado igual a taxa de errância, ou seja, é o mesmo que medir os que estão em Y e demoram mais do que n iterados para voltar. Já o que é estabelecido em 2.8 nos dá uma informação interessante sobre as medidas em $\widetilde{X}$. Sabemos que $\omega_n(Y) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e, portanto, quase toda medida $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, a partir de algum natural suficientemente grande, consegue medir pontos que retornam a Y. Isto vem da definição de τ_Y e do fato que o valor da medida deste conjunto para n muito grande ser muito pequena.

Demonstração: A primeira parte de 2.6 basta apenas juntar uma série de informações já obtidas. Da definição da variável aleatória N_{Y^n} e lembrando que $Y^n = \bigcup_{i=0}^{n-1} Y_i = \bigcup_{i=0}^{n-1} Y^c \cap \{\varphi = i\}$:

$$E_{\widetilde{\mu}}(\mathrm{N}_{Y^n}) = \mu(Y^n) \overset{ii)\text{ de } 2.2.1}{=} \omega_n(Y)$$

Observe agora que

$$Y^n := \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}Y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-n}Y \overset{sweep-out}{=} X$$

com $Y^0 \subset Y^1 \subset Y^2 \subset \ldots$. Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \omega_n(Y) &= \lim_{n\to\infty} \mu(Y^n) \\
&= \mu(\lim_{n\to\infty} Y^n) \\
&= \mu(X) = \infty
\end{aligned}$$

A segunda afirmação 2.6 é equivalente a dizer que, considerando a medida Q como sendo a imagem de $\widetilde{\mu}$ sob a aplicação

$$\tilde{x} \mapsto \left(\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{N}_{Y_j}(\tilde{x}) \right)_{n\geq 1} = (s_n)_{n\geq 1},$$

nos dá medida total do evento $\left\{ \frac{s_n}{\omega_n(Y)} \to 1 \right\}$ no espaço das sequências $G := \{s = (s_j)_{j\geq 1} : s_j \in \overline{\mathbb{N}_0}\}$ com a σ-álgebra produto. Considere agora um espaço de probabilidade qualquer $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e um processo de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ com $E_P(N_1) = 1$.

Agora observe que, do Lema 1.2.1 aplicada ao Processo de Poisson, tem-se

$$1 = E_P(N_1) = \alpha \cdot 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

pois a esperança do processo N_t é αt, em particular para $t = 1$ é α

Mas note que Q coincide com a distribuição de

$$\omega \mapsto (N_{\omega_n(Y)}(\omega))_{n\geq 1} \in G$$

uma vez que sabemos que

a) $N_{\omega_n(Y)}$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\alpha\omega_n(Y)$. Como $\alpha = 1$, temos $N_{\omega_n(Y)}$ com distribuição de Poisson de parâmetro $\omega_n(Y)$;

b) $\mathrm{N}_{Y^n} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{N}_{Y_j}$ e N_{Y^n} tem distribuição de Poisson com parâmetro $\omega_n(Y)$.

Como sabemos que o processo de Poisson satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números 1.2.4, temos que

$$Q\left(\frac{\mathrm{N}_{Y^n}}{\omega_n(Y)} \to 1 \right) = P\left(\frac{N_{\omega_n(Y)}}{\omega_n(Y)} \to 1 \right) = 1$$

donde segue o resultado.

Para verificar o Teorema Central do Limite usaremos o Lema 1.2.3 uma vez que já mostramos que $\omega_n(Y) \to \infty$. Basta observar que $E_{\widetilde{\mu}}(\mathrm{N}_{Y^n}) = \omega_n(Y)$ e aplicar o resultado. Obtendo assim

$$\widetilde{\mu}\left(\frac{\mathrm{N}_{Y^n} - \omega_n(Y)}{\sqrt{\omega_n(Y)}} \leq t\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-s^2}{2}}\, ds,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

A fim de mostrar 2.8, observamos que vale a seguinte igualdade de conjuntos

$$\{\tau_Y \geq n\} = \{\mathrm{N}_{Y^n} = 0\}$$

pois, para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\tilde{x} \in \{\tilde{x} \in \widetilde{X};\ \tau_Y(\tilde{x}) \geq n\} &\iff \min\{j \geq 0;\ \widetilde{T}^j \tilde{x}(Y) > 0\} \geq n \\
&\iff \min\{j \geq 0;\ \tilde{x}(T^{-j}(Y)) > 0\} \geq n \\
&\overset{*}{\iff} \tilde{x}\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}Y\right) = 0 \\
&\iff \tilde{x}(Y^n) = 0 \\
&\iff \mathrm{N}_{Y^n}(\tilde{x}) = 0 \iff \tilde{x} \in \{\tilde{x} \in \widetilde{X};\ \mathrm{N}_{Y^n}(\tilde{x}) = 0\}
\end{aligned}$$

onde $*$ segue do fato de não haver pontos em Y até tempo $n-1$. Sendo assim, da primeira igualdade em 2.6 e da definição de $\widetilde{\mu}$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}(\{\tau_Y \geq n\}) &= \widetilde{\mu}(\{\mathrm{N}_{Y^n} = 0\}) \\
&= \frac{e^{-\mu(Y^n)}\mu(Y^n)^0}{0!} \\
&= \frac{e^{-\omega_n(Y)}\omega_n(Y)^0}{0!} = e^{-\omega_n(Y)}
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Ergodicidade e o Teorema Central do Limite

Iremos investigar acerca da ergodicidade da aplicação na suspensão de Poisson e uma espécie de soma de Birkhoff para a suspensão que nos dá informações sobre o sistema inicialmente considerado. Ainda mostraremos que vale o Teorema Central do Limite para a medida $\widetilde{\mu}$ sob determinadas condições, o que torna mais fácil trabalhar com esta medida de construção abstrata.

Dizemos que uma função mensurável

$$a : (L, \infty) \to (0, \infty) \subset \mathbb{R}$$

é **regularmente variável** de índice ρ no infinito, denotando por $a \in \mathcal{R}_\rho$, se

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a(ct)}{a(t)} = c^\rho, \ \forall c \in \mathbb{R}_+^*.$$

Iremos interpretar a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ como funções em $\mathbb{R}_+$ associando os reais da seguinte forma

$$t \mapsto a_{[t]}.$$

De forma análoga, denotaremos por $\mathcal{R}_\rho(0)$ a família de funções

$$r : (0, \varepsilon) \to \mathbb{R}_+$$

que são regularmente variáveis de índice ρ em zero, isto é

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{r(ct)}{r(t)} = c^\rho.$$

Diremos que $a(t) \sim b(t)$, isto é, a é **assintótica** a b quando $t \to \infty$ se

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} = 1$$

e ressaltamos que verifica-se facilmente que esta é uma relação de equivalência.

Denotaremos ainda por $a(t) \asymp b(t)$, isto é, a **controla** b se, quando $t \to \infty$, a razão $\dfrac{a(t)}{b(t)}$ está limitada fora de 0 e de ∞ a partir de algum t_0 suficientemente grande.

Observação 3.0.1 (Taxa de Errância Minimal). *A assíntota da taxa de errância* $(\omega_n(Y))$ *claramente depende de* Y *e nunca existem conjuntos maximizando esta taxa para um dado sistema, como pode ser encontrado na Proposição 3.8.2 em [A0]. Mas algumas transformações possuem determinado* Y *com a taxa de errância minimal, ou seja,*

$$\underline{\lim}_{N\to\infty}\frac{\omega_N(Z)}{\omega_N(Y)} \geq 1,\ \forall Z \in \mathcal{A}.$$

Esta taxa é uma característica assintótica de T*, dita taxa de errância de* T *e a denotaremos por* $\omega_N(T)$

3.1 Ergodicidade da Suspensão e o Teorema Central do Limite

Teorema 3.1.1. *Seja* T *uma transformação ergódica conservativa que preserva medida em um espaço* σ*-finito standard* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *com* $\mu(X) = \infty$*. Considere ainda* $(\widetilde{X}, \mathcal{U}, \widetilde{\mu}, \widetilde{T})$ *sua suspensão de Poisson. Então* $\widetilde{T}$ *é ergódica e, para cada* $Y \in \mathcal{A}$ *com* $0 < \mu(Y) < \infty$*, tem-se*

$$\frac{1}{n}\widetilde{S}_n(Y) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(Y) \qquad (\widetilde{\mu}\text{-}qtp) \tag{3.1}$$

Suponha ainda que existe Y *tal que*

$$\mathfrak{h}_Y := \left\{ \frac{1}{\omega_N(Y)} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{T}^n \chi_{Y_n} \right\}_{N\geq 1} \tag{3.2}$$

é précompacto em $L_\infty(\mu)$*, ou seja, existe um número finito de pontos tal que bolas abertas de um certo raio fixo cubram o conjunto; e também* $\mathfrak{h}_Y$ *é* uniform sweeping*, isto é, se existe* $K \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $\inf_{u\in\mathfrak{h}_Y} \inf_{x\in Y} \sum_{j=0}^{K} \widehat{T}^j u > 0$.

Assim, para cada $E \in Y \cap \mathcal{A}$ *com* $\mu(E) > 0$ *tem-se o Teorema Central do Limite:*

$$\widetilde{\mu}\left(\frac{\widetilde{S}_n(E) - n\mu(E)}{\widetilde{\sigma}_n(E)} \leq t\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-s^2}{2}}\ ds,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

onde

$$\widetilde{\sigma}_n^2(E) := \mathrm{Var}_{\widetilde{\mu}}[\widetilde{S}_n(E)] \asymp \frac{n^2}{\omega_n(Y)} \tag{3.4}$$

quando $n \to \infty$.

Mais ainda, se $(\omega_N(Y)) \in \mathcal{R}_{1-\alpha}$ *para algum* $\alpha \in [0, 1]$ *então*

$$\widetilde{\sigma}_n^2(E) \sim \frac{2\mu(E)^2}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(2+\alpha)} \cdot \frac{n^2}{\omega_n(Y)} \tag{3.5}$$

quando $n \to \infty$ *e onde* $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\ dx,\ t \geq 0.$

Observação 3.1.1. *O Teorema Central do Limite, estabelecido em 3.3 no Teorema anterior, pode ser extendido a toda medida $\widehat{\nu} \ll \widetilde{\mu}$, isto pode ser encontrado no Corolário 1 em [Z5].*

Aqui é interessante observar como o que é estabelecido em 3.1 se assemelha a soma de Birkhoff apresentada no teorema de Birkhoff 1.3.2, o que precisamente acontece é que quando tiramos a média das entradas de apenas a órbita de um único ponto, como é feito no teorema de Birkhoff, temos que a média de entradas é 0 (como afirmado em 1.3.1), ou seja, a órbitas do ponto quase nunca visitam o conjunto Y dado se o espaço tiver medida total infinita. O que o teorema anterior diz é que para quase toda medida de contagem que mede as entradas em Y, isto é, medindo uma nuvem de pontos que entram em Y por ação de T, a média de entrada é exatamente $\mu(Y)$.

O que é afirmado em 3.3 nos dá ferramentas para o trato da medida $\widetilde{\mu}$, uma vez que a mesma é de contrução abstrata e somente sabemos evaluar conjuntos nos geradores da σ-álgebra. O estabelecido em 3.4 e em 3.5 nos ajuda *controlar* $\widetilde{\sigma}_n^2(E)$ e entender seu comportamento *assintótico*, respectivamente, pois conseguimos determinar sua velocidade de convergência e seu limite.

A fim de demonstrar o Teorema 3.1.1 precisamos de alguns resultados. O primeiro deles é uma nova proposição que enunciaremos e apresentaremos uma idéia geral da demonstração, pois os detalhes da prova fogem dos objetivos desta dissertação.

Proposição 3.1.1. *Seja T uma transformação ergódica conservativa que preserva medida em um espaço σ-finito standard $(X, \mathcal{A}, \mu)$ com $\mu(X) = \infty$. Suponha que exista $Y \in \mathcal{A}$ com $0 < \mu(Y) < \infty$ tal que*

$$\mathfrak{h}_Y := \left\{ \frac{1}{\omega_N(Y)} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{T}^n \chi_{Y_n} \right\}_{N \geq 1}$$

é précompacto em $L_\infty(\mu)$ e uniform sweeping. Então para todo $E \in Y \cap \mathcal{A}$ com $\mu(E) > 0$ e todo inteiro $r \geq 1$ tem-se

$$\int_X S_n^r(E)\, d\mu \asymp \omega_n(Y) \int_Y S_n^r(E)\, d\mu \asymp \omega_n(Y) \left(\frac{n}{\omega_n(Y)} \right)^r \tag{3.6}$$

quando $n \to \infty$. Se ainda assumirmos que $(\omega_N(Y)) \in \mathcal{R}_{1-\alpha}$ para algum $\alpha \in [0, 1]$, então ainda temos

$$\int_X \left(\frac{S_n(E)}{\mu(E)} \right)^r d\mu \sim \frac{r!(\Gamma(2-\alpha))^{1-r}}{\Gamma(2 + (r-1)\alpha)} \mu(Y) \omega_n(Y) \left(\frac{n}{\omega_n(Y)} \right)^r \tag{3.7}$$

quando $n \to \infty$.

Idéia da demonstração: A prova consiste em usar o teorema tauberiano de Karamata, o teorema da densidade monótona e o teorema 2.1 de [Z0], que nos dão informações sobre uma regularidade mais fraca dos quocientes procurados em 3.6 e 3.7. Se consideramos a pré-compacidade de $\mathfrak{h}_Y$, o operador de transferência $\widehat{T}$ prova, usando na sua definição $g = S_n^k(E)$ e a observação que $\widehat{T}1 = 1$, os quocientes na forma procurada por meio de uma decomposição do espaço X em termos de Y_n.

Segue abaixo o corolário desta proposição que pode ser encontrado em §33 de [A0]:

Corolário 3.1.1. *Seja T uma transformação ergódica conservativa que preserva medida em um espaço σ-finito standard $(X, \mathcal{A}, \mu)$ com $\mu(X) = \infty$. Suponha que exista $Y \in \mathcal{A}$ com $0 < \mu(Y) < \infty$ as condições exigidas sobre 3.2 no Teorema 3.1.1. Então Y satisfaz a desigualdade de Rényi (a transformação é* Racionalmente Ergódica*), ou seja, existe $M \in (0, \infty)$ tal que*

$$\int_Y S_n^2(Y)\ d\mu \leq M \cdot \left(\int_Y S_n(Y)\ d\mu \right)^2, \forall n \geq 1$$

Demonstração do Teorema 3.1.1: Dividiremos esta demonstração em duas partes; $i)$ será sobre a ergodicidade da Suspensão de Poisson e $ii)$ sobre o Teorema Central do Limite e conclusões sobre a variância.

i) Como descrito nos Teoremas 3.1.5 e 3.1.7 de [A0], o sistema $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ tem uma extensão natural conservativa ergódica $(X', \mathcal{A}', \mu', T')$ e T' invertível. Por definição, ter extensão natural conversavativa ergódica significa que existe uma aplicação $\pi : X' \to X$ tal que

$$\begin{aligned} &I)\ \mathcal{A}' = \pi^{-1}\mathcal{A} \\ &II)\ \pi \circ T' = T \circ \pi \\ &III)\ \mu' \circ \pi^{-1} = \mu \end{aligned}$$

A suspensão de Poisson da extensão natural $(\widetilde{X}', \mathcal{U}', \widetilde{\mu}', \widetilde{T}')$ é ergódica, isto pode ser encontrado na Proposição 2.6.2 de [R]. Nosso objetivo é mostrar que a suspensão de uma extensão é a extensão da suspensão pois isto, aliado ao fato de $(\widetilde{X}', \mathcal{U}', \widetilde{\mu}', \widetilde{T}')$ ser ergódica, resultará na ergodicidade da suspensão de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$. O primeiro passo nesta direção é definir nosta aplicação que estenderá a suspensão:

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{X}' \to \widetilde{X}$$

por

$$\widetilde{\pi}\tilde{x}' = \widetilde{\pi}(\tilde{x}') := \tilde{x}' \circ \pi^{-1}.$$

Agora, para $A \in \mathcal{A}$ e $\pi^{-1}A = A' \in \mathcal{A}'$, tem-se

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}^{-1}(\mathrm{N}_A^{-1}(k)) &= \{\tilde{x}' \in \widetilde{X}';\ \widetilde{\pi}\tilde{x} \in \mathrm{N}_A^{-1}(k)\} \\ &= \{\tilde{x}' \in \widetilde{X}';\ \widetilde{\pi}\tilde{x}'(A) = k\} \\ &= \{\tilde{x}' \in \widetilde{X};\ \tilde{x}'(\pi^{-1}A) = k\} \\ &= \{\tilde{x}' \in \widetilde{X};\ \tilde{x}'(A') = k\} = \mathrm{N}'^{-1}_{A'}(k) \end{aligned}$$

onde N' denota as variáveis aleatórias que geram $\mathcal{U}'$ no espaço $\widetilde{X}'$. Mais geralmente, obtemos

$$\mathrm{N}_A \circ \widetilde{\pi}(\tilde{x}') = \mathrm{N}'_{A'}(\tilde{x}') \tag{3.8}$$

e, uma vez que $\mathcal{A}' = \pi^{-1}A$, segue o item $I)$ da definição de extensão.

A observação a seguir nos garante II):

$$\begin{aligned}
(\widetilde{T}\circ\widetilde{\pi})(\tilde{x}')(A) &= \widetilde{\pi}(\tilde{x}')(T^{-1}A)\\
&= \tilde{x}'(\pi^{-1}\circ T^{-1}(A))\\
&= \tilde{x}'((T\circ\pi)^{-1}(A))\\
&\overset{T\circ\pi=\pi\circ T'}{=} \tilde{x}'((\pi\circ T')^{-1}(A))\\
&= \tilde{x}'(T'^{-1}\circ\pi^{-1}(A))\\
&= \tilde{x}'(T'^{-1}(\pi^{-1}A))\\
&= \widetilde{T}'\tilde{x}'(\pi^{-1}A) = (\widetilde{\pi}\circ\widetilde{T})(\tilde{x}')(A),\ \forall\tilde{x}'\in\widetilde{X}' \text{ e } A\in\mathcal{A}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\widetilde{T}\circ\widetilde{\pi}=\widetilde{\pi}\circ\widetilde{T}'.$$

Para III), note que, considerando $A'=\pi^{-1}A$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}'\circ\widetilde{\pi}^{-1}(\mathrm{N}_A^{-1}(k)) &\overset{3.8}{=} \widetilde{\mu}'(\mathrm{N}_A'^{-1}(k))\\
&= \frac{e^{-\mu'(A')}\mu'(A')^k}{k!}\\
&= \frac{e^{\mu'(\pi^{-1}(A))}\mu'(\pi^{-1}(A))^k}{k!}\\
&\overset{\mu'\circ\pi^{-1}=\mu}{=} \frac{e^{-\mu(A)}\mu(A)^k}{k!} = \widetilde{\mu}(\mathrm{N}_A^{-1}(k))
\end{aligned}$$

e isto significa que a medida $\widetilde{\mu}'\circ\widetilde{\pi}^{-1}$ é tal que sobre N_A temos distribuições de Poisson com parâmetro $\mu(A)$. Façamos uma observação sobre a idependência entre as variáveis aleatórias: sejam $A_1,\dots,\ A_k$ conjuntos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos afirmamos que N_{A_i} são idependentes sob $\widetilde{\mu}'\circ\widetilde{\pi}^{-1}$. Isto segue diretamente da definição de $\widetilde{\mu}'$ como medida aleatória de Poisson com intensidade μ' e da igualdade 3.8 pois, sobre $\widetilde{\mu}'$, $\mathrm{N}'_{A'_i}$ são idependentes.

Dessa forma, $\widetilde{\mu}'\circ\widetilde{\pi}$ é uma medida que satisfaz a definição de ser uma medida aleatória de Poisson com intensidade μ e, pela unicidade de $\widetilde{\mu}$, temos a terceira condição satisfeita:

$$\widetilde{\mu}'\circ\widetilde{\pi}^{-1}=\widetilde{\mu}$$

Logo, mostramos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{A},\mu,T) \arrow[r, "Suspende"] & (\widetilde{X},\mathcal{U},\widetilde{\mu},\widetilde{T})\\
(X',\mathcal{A}',\mu',T') \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "Suspende"'] & (\widetilde{X}',\mathcal{U}',\widetilde{\mu}',\widetilde{T}') \arrow[u, "\widetilde{\pi}"']
\end{tikzcd}$$

onde, pelo resultado citado, $\widetilde{T}'$ é ergódica.

A fim de concluir a ergodicidade de $\widetilde{T}$, seja $M\subset\widetilde{X}$ um conjunto $\widetilde{T}$-invariante arbitrário, isto é

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}^{-1}M = M \quad &\Rightarrow \quad (\widetilde{\pi}^{-1} \circ \widetilde{T}^{-1})M = \widetilde{\pi}^{-1}M \\
&\Longleftrightarrow \quad (\widetilde{T} \circ \widetilde{\pi})^{-1}M = \widetilde{\pi}^{-1}M \\
&\overset{II)}{\Rightarrow} \quad (\widetilde{\pi} \circ \widetilde{T}')^{-1}M = \widetilde{\pi}^{-1}M \\
&\Longleftrightarrow \quad \widetilde{T}'^{-1} \circ \widetilde{\pi}^{-1}(M) = \widetilde{\pi}^{-1}M \Rightarrow \widetilde{T}'^{-1}(\widetilde{\pi}^{-1}M) = \widetilde{\pi}^{-1}M
\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{\pi}^{-1}M$ é $\widetilde{T}'$-invariante. Como $\widetilde{T}'$ é ergódica segue

$$\widetilde{\mu}'(\widetilde{\pi}^{-1}M) = 0 \text{ ou } \widetilde{\mu}'((\widetilde{\pi}^{-1}M)^c) = 0.$$

Vamos prosseguir separadamente

$$\widetilde{\mu}'(\widetilde{\pi}^{-1}M) = 0 \iff \widetilde{\mu} \circ \widetilde{\pi}^{-1}(M) = 0 \overset{III)}{\Rightarrow} \widetilde{\mu}(M) = 0$$

e, na outra possibilidade,

$$\widetilde{\mu}'((\widetilde{\pi}^{-1}M)^c) = 0 \iff \widetilde{\mu}'(\widetilde{\pi}^{-1}(M^c)) = 0 \overset{\text{análogo}}{\Rightarrow} \widetilde{\mu}(M^c) = 0$$

o que nos dá a ergodicidade de $\widetilde{T}$ sobre $(\widetilde{X}, \mathcal{U}, \widetilde{\mu})$

Para obtermos o que é estabelecido em 3.1 basta usar o corolário do Teorema de Birkhoff 1.3.1 para a suspensão:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\widetilde{S}_n(A) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{N}_A \circ \widetilde{T}^k(\tilde{x}) \\
&= \int_{\widetilde{X}} \mathrm{N}_A \; d\widetilde{\mu} \\
&= E_{\widetilde{\mu}}(\mathrm{N}_A) = \mu(A)
\end{aligned}$$

ii) Para não carregarmos a notação, doravante denotaremos por S_n a soma de Birkhoff $S_n(E)$ para todo $n \geq 1$ e $E \in \mathcal{A}$ fixo. Para $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{N}_0$ fixados, os pontos que visitam E exatamente r vezes em uma medida de contagem $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ é dado por $\mathrm{N}_{\{x\in X;\ S_n(x)=r\}}(\tilde{x})$ e, como estes são contados r vezes em $\widetilde{S}_n(E)$, temos

$$\widetilde{S}_n(E) := \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{N}_E \circ \widetilde{T}^k = \sum_{r=1}^{n-1} r\, \mathrm{N}_{\{x\in X;\ S_n(x)=r\}}\,. \tag{3.9}$$

e podemos, analogamente, escrever

$$S_n = \sum_{r=1}^{n-1} r\chi_{\{x\in X;\ S_n=r\}}.$$

Note que, para n fixo, os conjuntos $\{x \in X;\ S_n = r\}$, $r \in \{1, \ldots,\ n-1\}$ são dois a dois disjuntos e, portanto, $\mathrm{N}_{\{x\in X;\ S_n=r\}}$, $r \in \{1, \ldots,\ n-1\}$ são variáveis aleatórias de Poisson em $(\widetilde{X}, \mathcal{U}, \widetilde{\mu})$ com $E(\mathrm{N}_{\{x\in X;\ S_n=r\}}) = \mu(\{x \in X;\ S_n = r\})$. Dessa forma

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_{\widetilde{\mu}}(\widetilde{S}_n(E)) &= \mathrm{Var}_{\widetilde{\mu}}\left(\sum_{r=1}^{n-1} r\, \mathrm{N}_{\{x\in X;\ S_n=r\}}\right) \\
&\overset{1.2.1(iii)}{=} \sum_{r=1}^{n-1} r^2 \mathrm{Var}_{\widetilde{\mu}}(\mathrm{N}_{\{x\in X;\ S_n=r\}}) \overset{1.2.1}{=} \sum_{r=1}^{n-1} r^2 \mu(\{x \in X;\ S_n = r\})
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
\int_X S_n^2 \, d\mu &= \int_X \sum_{r=1}^{n-1} r^2 \chi^2_{\{x \in X;\ S_n = r\}} \, d\mu \\
&\overset{\chi_A^2 = \chi_A}{=} \int_X \sum_{r=1}^{n-1} r^2 \chi_{\{x \in X;\ S_n = r\}} \, d\mu = \sum_{r=1}^{n-1} r^2 \mu(\{x \in X;\ S_n = r\})
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\widetilde{\sigma}_n(E)^2 = \mathrm{Var}_{\widetilde{\mu}}(\widetilde{S}_n(E)) = \sum_{r=1}^{n-1} r^2 \mu(\{x \in X;\ S_n = r\}) = \int_X S_n^2 \, d\mu
$$

Assim, tomando $r = 2$ em 3.6 e, da igualdade anterior, teremos

$$
\widetilde{\sigma}_n^2(E) := \mathrm{Var}_{\widetilde{\mu}} \left(\widetilde{S}_n(E) \right) = \int_X S_n^2 \, d\mu \overset{3.6}{\asymp} \omega_n(Y) \left(\frac{n}{\omega_n(Y)} \right)^2 = \frac{n^2}{\omega_n(Y)}
$$

quando $n \to \infty$, concluindo assim 3.4.

A fim de concluir 3.5, basta tomar $r = 2$ em 3.7:

$$
\widetilde{\sigma}_n^2(E) = \int_X S_n^2 \, d\mu \sim \frac{2\mu(E)^2 \mu(Y)}{\Gamma(2+\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{n^2}{\omega_n(Y)}
$$

Para prosserguimos com a demonstração, precisamos encontrar a função característica de $\widetilde{S}_n(E)$. Com efeito

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\widetilde{S}_n(E)}(t) &= E_{\widetilde{\mu}} \left(e^{it\widetilde{S}_n(E)} \right) \\
&= E_{\widetilde{\mu}} \left(e^{it\left(\sum_{r=1}^{n-1} r \, \mathrm{N}_{\{S_n = r\}}\right)} \right) \\
&= E_{\widetilde{\mu}} \left(\prod_{r=1}^{n-1} e^{itr \, \mathrm{N}_{\{S_n = r\}}} \right) = \prod_{r=1}^{n-1} E_{\widetilde{\mu}} \left(e^{itr \, \mathrm{N}_{\{S_n = r\}}} \right)
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos

$$
\varphi_{\widetilde{S}_n(E)}(t) = \prod_{r=1}^{n-1} E_{\widetilde{\mu}} \left(e^{itr \, \mathrm{N}_{\{S_n = r\}}} \right) \tag{3.10}
$$

Faremos o cálculo da esperança para cada r separadamente. Sabemos que, da definição de esperança, temos

$$
E_{\widetilde{\mu}} \left(e^{itr \, \mathrm{N}_{\{S_n = r\}}} \right) = \int_{\widetilde{X}} e^{itr \, \mathrm{N}_{\{S_n = r\}}} \, d\widetilde{\mu} = \int_{\widetilde{X}} \cos(tr \, \mathrm{N}_{\{S_n = r\}}) + i \, \mathrm{sen}(tr \, \mathrm{N}_{\{S_n = r\}}) \, d\widetilde{\mu}
$$

Note também que

$$
\widetilde{X} = \mathrm{N}^{-1}_{\{S_n = r\}}(\infty) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{N}^{-1}_{\{S_n = r\}}(n) \right)
$$

onde $\widetilde{\mu}\left(\mathrm{N}^{-1}_{\{S_n=r\}}(\infty)\right)=0$ pela contrução da medida.

Dessa forma

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{X}} \cos(rt\,\mathrm{N}_{\{S_n=r\}})\ d\widetilde{\mu} &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\mathrm{N}^{-1}_{\{S-n=r\}}(j)} \cos(rtj)\ d\widetilde{\mu} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \cos(rtj)\widetilde{\mu}\left(\mathrm{N}_{\{S_n=r\}}\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \cos(rtj) e^{-\mu(\{S_n=r\})}\frac{\mu(\{S_n=r\})^j}{j!}
\end{aligned}$$

Agora observe que

$$0 \leq \lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{\frac{|\cos(rtj)|e^{-\mu(\{S_n=r\})}}{j!}} \cdot \mu(\{S_n=r\}) \leq \lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{\frac{e^{-\mu(\{S_n=r\})}}{j!}} \cdot \mu(\{S_n=r\}) = 0$$

Logo, pelo Critério da Raíz, a série anterior converge. Analogamente

$$\int_{\widetilde{X}} \operatorname{sen}(tr\,\mathrm{N}_{\{S_n=r\}})\ d\widetilde{\mu} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{sen}(rtj) e^{-\mu(\{S_n=r\})}\frac{\mu(\{S_n=r\})^j}{j!}$$

temos esta série também convergente. Com estas convergências, podemos somar as duas séries e reordenar os termos obtendo assim

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{X}} e^{itr\,\mathrm{N}_{\{S_n=r\}}} &= \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{-\mu(\{S_n=r\})}\frac{\mu(\{S_n=r\})^j}{j!}(\cos(rtj)+i\operatorname{sen}(rtj)) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{-\mu(\{S_n=r\})}\frac{\mu(\{S_n=r\})^j}{j!} e^{irtj} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{-\mu(\{S_n=r\})}\frac{(\mu(\{S_n=r\})e^{irt})^j}{j!} = e^{e^{irt}\mu(\{S_n=r\})}e^{-\mu(\{S_n=r\})}
\end{aligned}$$

Em 3.10

$$\begin{aligned}
\varphi_{\widetilde{S}_n(E)}(t) &= \prod_{r=1}^{n-1} E_{\widetilde{\mu}}\left(e^{itr\,\mathrm{N}_{\{S_n=r\}}}\right) \\
&= \prod_{r=1}^{n-1} e^{e^{irt}\mu(\{S_n=r\})}e^{-\mu(\{S_n=r\})} = e^{\sum_{r=1}^{n-1}\left(e^{itr}-1\right)\mu(\{S_n=r\})}
\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\int_X \left(e^{itS_n}-1\right)\,d\mu &= \int_X \left(e^{it\sum_{r=1}^{n-1} r\chi_{\{S_n=r\}}}-1\right)\,d\mu \\
&= \int_X \left(\prod_{r=1}^{n-1} e^{itr\chi_{\{S_n=r\}}}-1\right)\,d\mu \\
&= \int_{\bigcup_{j=1}^{n-1}\{S_n=j\}} \left(\prod_{r=1}^{n-1} e^{itr\chi_{\{S_n=r\}}}-1\right)\,d\mu + \int_{\left(\bigcup_{j=1}^{n-1}\{S_n=j\}\right)^c} \left(\prod_{r=1}^{n-1} e^{itr\chi_{\{S_n=r\}}}-1\right)\,d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\int_{\{S_n=j\}} \left(\prod_{r=1}^{n-1} e^{itr\chi_{\{S_n=r\}}}-1\right)\,d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\int_{\{S_n=j\}} \left(e^{itj}-1\right)\,d\mu \\
&= \sum_{r=1}^{n-1} \left(e^{itr}-1\right)\mu\left(\{S_n=r\}\right)
\end{aligned}$$

Logo

$$E_{\widetilde{\mu}}\left(e^{it\widetilde{S}_n(E)}\right) = e^{\int_X \left(e^{itS_n}-1\right)}$$

onde $t\in\mathbb{R}$. Fazendo $\widetilde{\sigma}_n := \sqrt{\widetilde{\sigma}_n^2(E)},\ n\in\mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
E_{\widetilde{\mu}}\left(e^{it\left(\frac{\widetilde{S}_n(E)}{\widetilde{\sigma}_n}-\frac{n\mu(E)}{\widetilde{\sigma}_n}\right)}\right) &= E_{\widetilde{\mu}}\left(e^{-it\frac{\widetilde{S}_n(E)}{\widetilde{\sigma}_n}} e^{-\frac{itn\mu(E)}{\widetilde{\sigma}_n}}\right) \\
&= e^{-\frac{itn\mu(E)}{\widetilde{\sigma}_n}} E_{\widetilde{\mu}}\left(\frac{it\widetilde{S}_n(E)}{\widetilde{\sigma}_n}\right) = e^{-\frac{itn\mu(E)}{\widetilde{\sigma}_n}} e^{\int_X \left(e^{it\frac{S_n}{\widetilde{\sigma}_n}}-1\right)\,d\mu}
\end{aligned}$$

então

$$\ln\, E_{\widetilde{\mu}}\left(e^{it\frac{\widetilde{S}_n(E)}{\widetilde{\sigma}_n}-\frac{n\mu(E)}{\widetilde{\sigma}_n}}\right) = \int_X \left(e^{it\frac{S_n}{\widetilde{\sigma}_n}}-1\right)\,d\mu - it\frac{n\mu(E)}{\widetilde{\sigma}_n} = -\frac{t^2}{2}+\int_X \left(e^{it\frac{S_n}{\widetilde{\sigma}_n}}-1\right)\,d\mu - it\frac{n\mu(E)}{\widetilde{\sigma}_n}+\frac{t^2}{2}$$

Agora observe que

$$\frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2}\int_X \frac{S_n^2}{\widetilde{\sigma}_n^2}\,d\mu = \frac{1}{2}\int_X \left(\frac{tS_n}{\widetilde{\sigma}_n}\right)^2\,d\mu$$

e também

$$\begin{aligned}
\int_X S_n\,d\mu &= \int_X \sum_{k=0}^{n-1}\chi_E\circ T^k\,d\mu \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_X \chi_E\circ T^k\,d\mu \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_X \chi_{T^{-k}E}\,d\mu \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mu(T^{-k}E) = n\mu(E)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\ln E_{\widetilde{\mu}}\left(e^{it\left(\frac{\widetilde{S}_n - n\mu(E)}{\widetilde{\sigma}_n}\right)}\right) = -\frac{t^2}{2} + R_n(t)$$

onde

$$R_n(t) := \int_X \left[e^{it\frac{S_n}{\widetilde{\sigma}_n}} - \left(1 + it\frac{S_n}{\widetilde{\sigma}_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{tS_n}{\widetilde{\sigma}_n}\right)^2\right)\right]$$

donde implica-se o Teorema Central do Limite (TCL) se mostrarmos a convergência de $R_n(t) \to 0$, quando $n \to \infty$ para todo t. Com efeito

$$|R_n(t)| \leq \int_X \left|e^{it\frac{S_n}{\widetilde{\sigma}_n}} - \left(1 + it\frac{S_n}{\widetilde{\sigma}_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{tS_n}{\widetilde{\sigma}_n}\right)^2\right)\right| \, d\mu$$

e, da expansão de Taylor da exponencial, segue

$$|R_n(t)| \leq \int_X \left|\frac{t^3}{6}\frac{S_n^3}{\widetilde{\sigma}_n^3}\right| \, d\mu = \frac{t^3}{6}\int_X \frac{S_n^3}{\widetilde{\sigma}^3} \, d\mu$$

De 3.6 para $r = 3$

$$\int_X S_n^3(E) \, d\mu \asymp \omega_n(Y) \int_Y S_n^3(E) \, d\mu \asymp \frac{n^3}{\omega_n(Y)^2}$$

e de 3.4

$$\widetilde{\sigma}_n^2 \asymp \frac{n^2}{\omega_n(Y)}$$

tem-se

$$\int_X \frac{S_n^3}{\widetilde{\sigma}_n^3} \, d\mu \asymp \frac{n^3}{\omega_n(Y)^2}\frac{\omega_n(Y)\sqrt{\omega_n(Y)}}{n^3} = \frac{1}{\sqrt{\omega_n(Y)}}$$

Como visto na demonstração de 2.6

$$\omega_n(Y) \to \infty$$

e assim

$$\int_X \frac{S_n^3}{\widetilde{\sigma}_n^3} \, d\mu \asymp \frac{1}{\sqrt{\omega_n(Y)}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ou seja

$$\int_X \frac{S_n^3}{\widetilde{\sigma}_n^3} \, d\mu \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

pois, caso contrário, pelo menos um dos quocientes entre $\frac{1}{\sqrt{\omega_n(Y)}}$ e $\int_X \frac{S_n^3}{\widetilde{\sigma}_n^3} \, d\mu$ convergiria a 0 ou ∞.

$\square$

3.2 Cálculos com a Boole

Nesta seção iremos exemplificar os elementos utilizados na dissertação usando a aplicação Boole. Aqui exibiremos alguns elementos utilizados nesta dissertação a fim de exemplificar uma aplicação dos resultados aqui apresentados. Lembre-se que a Boole é definida por

$$\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2-1}{x} \end{array}$$

onde, como visto no exemplo 1.3.2, T conservativa e preservando medida de Lebesgue m. Observe que teremos a seguinte situação inicial

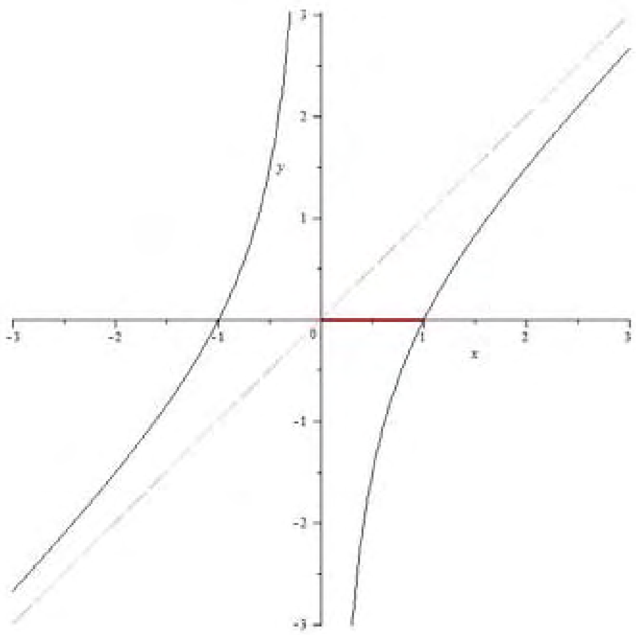

Figura 3.1: Em preto o gráfico da Boole, em cinza a identidade e em vermelho o conjunto $Y = (0, 1)$.

Agora observe que, para $Y = (0, 1)$, temos

$$T^{-1}(Y) = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Fazendo

$$\xi_1^- = \min\{x \in \mathbb{R};\ x \in T^{-1}(Y)\} \text{ e } \xi_1^+ = \max\{x \in \mathbb{R};\ x \in T^{-1}(Y)\}$$

temos o seguinte gráfico

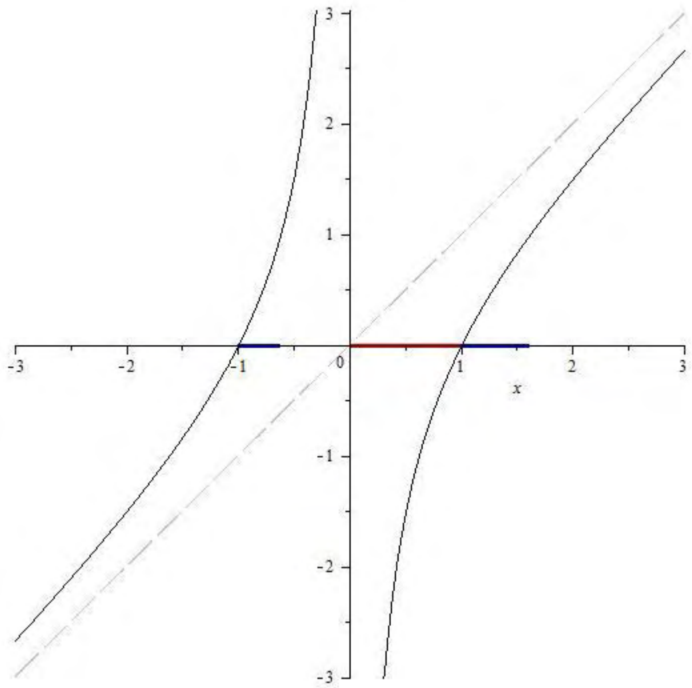

Figura 3.2: Em azul, a pré-imagem de Y.

Ainda

$$\xi_2^- = \min\{x \in \mathbb{R};\ x \in T^{-2}(Y)\} \text{ e } \xi_2^+ = \max\{x \in \mathbb{R};\ x \in T^{-2}(Y)\}$$

e observamos a seguinte situação

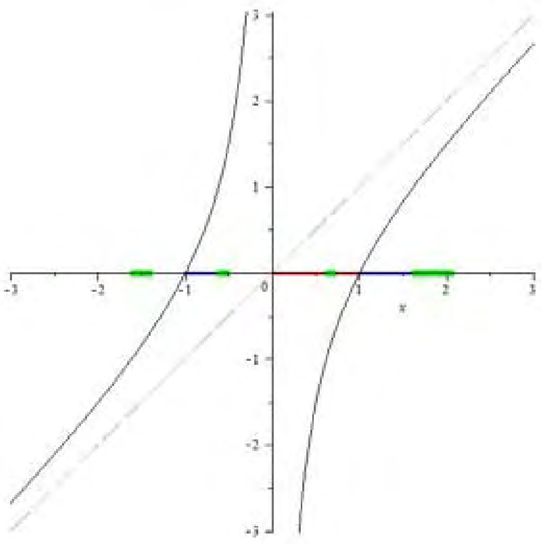

Figura 3.3: Em verde, a segunda pré-imagem de Y.

onde verifica-se uma tendência inicial de preenchimento dos intervalos $(-1, 0)$ e $(1, \infty)$, o próximo passo nos mostra esta tendência

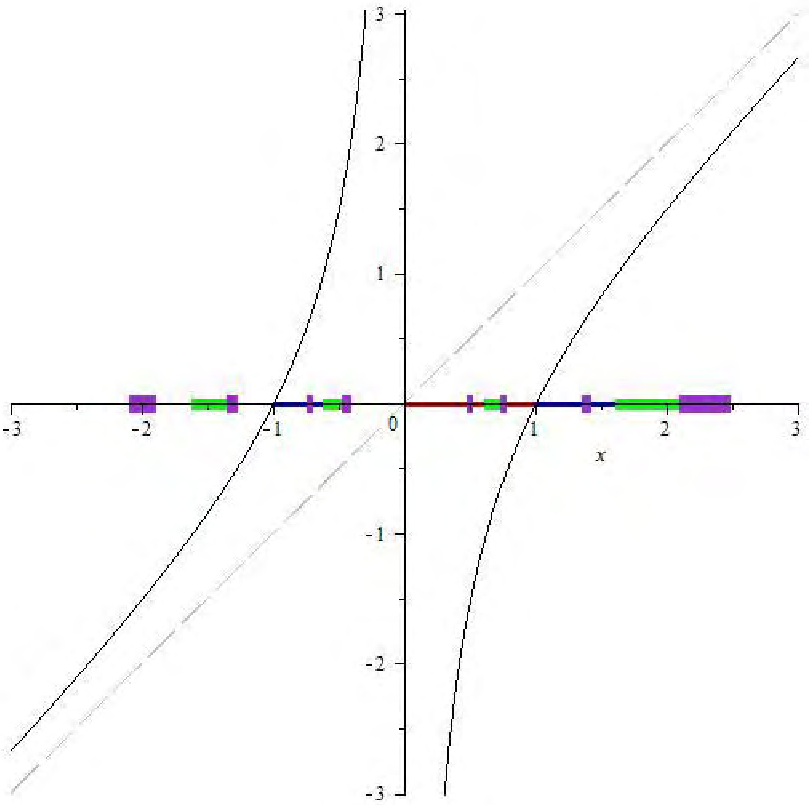

Figura 3.4: Em roxo, a terceira pré-imagem de Y.

Defina

$$\xi_n^- = \min\{x \in \mathbb{R};\ x \in T^{-n}(Y)\} \text{ e } \xi_n^+ = \max\{x \in \mathbb{R};\ x \in T^{-n}(Y)\}$$

Para verificar esta primeira observação, basta observar que tomando a pré-imagem positiva $T_+^{-1}(\xi_1^+)$ de ξ_1^+ e de 1 temos

$$T^{-1}(1, \xi_1^+) = (\xi_1^+, \xi_2^+)$$

e, tomando as negativas, teremos $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, T_-^{-1}(\xi_1^+)\right)$. Prosseguindo desta mesma forma, é possível ver que teremos as pré-imagens preenchendo os intervalos $(-1, 0)$ e $(1, \infty)$ uma vez que, para n suficientemente grande, a Boole se aproxima da diagonal o que preserva e comprimento das pré-imagens que contém ξ_n^+. Para os pontos a direita do 0, basta observar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe k tal que $T^{-k}(Y) \cap (-\varepsilon, 0) \neq \emptyset$ pois a Boole é conservativa.

Uma tendência análoga é verificada em todos os "saltos" entre as pré-imagens que tendem a ser preenchidos e uma justificativa análoga pode ser dada olhando para os intervalos que serão aplicados exatamente ao lado , como verificado na figura a seguir

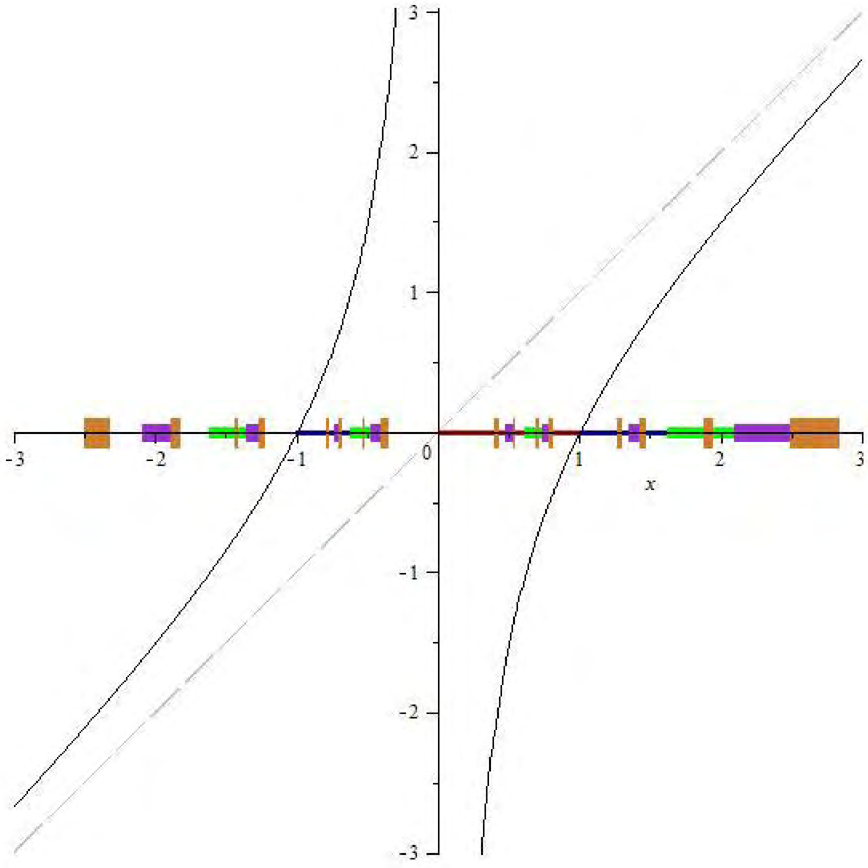

Figura 3.5: Em marrom, a quarta pré-imagem de Y.

Dessa forma é possível ver que, para n suficientemente grande as pré-imagens de Y tendem a preencher o intervalo (ξ_n^-, ξ_n^+). Assim, apenas computando as medidas, temos que $(\xi_n^+ - \xi_n^-)$ tende a igualar-se a $m(Y^n)$. Logo, para n suficientemente grande, teremos

$$\omega_n(Y) \overset{Teo.2.6}{=} m(Y^n) = (\xi_n^+ - \xi_n^-)$$

Com isto, para n suficientemente grande, também é possível inferir o valor aproximado de $q_n(Y)$ pois temos

$$q_n(Y) = \omega_n(Y) - \omega_{n-1}(Y) = (\xi_n^+ - \xi_n^-) - (\xi_{n-1}^+ - \xi_{n-1}^-)$$

Ainda podemos observar que, segundo o teorema 3.1.1, temos

$$\frac{1}{n}\widetilde{S}_n(Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{x}\left(T^{-j}(Y)\right)\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = m(Y)$$

ou seja, para quase toda medida de contagem $\tilde{x}$ a média de entradas em Y por T é $\mu(Y) = 1$.

Bibliografia

[A0] J. Aaronson: *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*. AMS 1997.

[B] P. Billingsley: *Probability and Measure*. 2nd ed, Wiley 1986.

[Ba] R. G. Bartle: *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons, 1966.

[R] E. Roy: *Mesures de Poisson, infini divisibilité et propriétés ergodiques*. PhD thesis, Paris 2006.

[S] K. Sato: *Lévy Process and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999.

[W] P. Walters: *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer 1981.

[Z0] R. Zweimüller: *Poisson Suspensions of Compactly Regenerative Transformations*. Colloquium Mathematicum, 2007.

[Z1] R. Zweimüller: *Surrey Notes on Infinite Ergodic Theory*. University of Surrey, 16th-19th March 2009.

[Z5] R. Zweimüller: *Mixing limit theorems for ergodic transformations*. Journal of Theoretical Probability, to appear.