

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

ANDERSON ALMEIDA ESCOBAL

Modelos Cosmológicos com Matéria e Energia Escura:
Análise Estatística da Evolução do *Background* e das Perturbações de Densidade

Guaratinguetá
2024

Anderson Almeida Escobal

Modelos Cosmológicos com Matéria e Energia Escura:

Análise Estatística da Evolução do *Background* e das Perturbações de Densidade

Tese para Defesa de Doutorado apresentada ao Conselho de Curso de Pós-Graduação em Física e Astronomia da Faculdade de Engenharia e Ciências - Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Doutor em Doutorado em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Fernando de Jesus

Coorientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira

Guaratinguetá

2024

E26m	Escobal, Anderson Almeida Modelos cosmológicos com matéria e energia escura: análise estatística da evolução do Background e das perturbações de densidade / Anderson Almeida Escobal – Guaratinguetá, 2024. 149 : il. Bibliografia: f. 134-149 Tese – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2024. Orientador: Prof. Dr. Prof. Dr. José Fernando de Jesus Coorientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira 1. Cosmologia. 2. Energia escura (Astronomia). 3. Processos gaussianos. I. Título. CDU 524.82(043)
------	--

Luciana Máximo
Bibliotecária CRB-8/3595

ANDERSON ALMEIDA ESCOBAL

**ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA E ASTRONOMIA
CURSO: DOUTORADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente
 **JOSE FERNANDO DE JESUS**
Data: 02/09/2024 17:16:01-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. JOSE FERNANDO DE JESUS
Orientador - UNESP

Documento assinado digitalmente
 **MARCO ANDRÉ FERREIRA DIAS**
Data: 02/09/2024 21:35:47-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. MARCO ANDRÉ FERREIRA DIAS
UNIFESP

Documento assinado digitalmente
 **JOSE ADEMIR SALES DE LIMA**
Data: 04/09/2024 12:43:55-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. JOSÉ ADEMIR SALES DE LIMA
USP

Documento assinado digitalmente
 **RODOLFO VALENTIM DA COSTA LIMA**
Data: 04/09/2024 15:57:00-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. RODOLFO VALENTIM DA COSTA LIMA
UNIFESP

Documento assinado digitalmente
 **RAFAEL DA COSTA NUNES**
Data: 04/09/2024 19:50:41-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. RAFAEL DA COSTA NUNES
IF-UFRGS

AGOSTO de 2024

DADOS CURRICULARES

ANDERSON ALMEIDA ESCOBAL

NASCIMENTO 19/05/1992 - São Paulo / SP

FILIAÇÃO Mauro Escobal
Maria Lucia de Almeida Lima

2013 / 2017 Bacharelado em Física
Universidade de São Paulo (USP)

2018 / 2020 Mestrado em Física
Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho"(UNESP)

Dedico a minha tese a todos que me ajudaram a seguir esse caminho árduo, sempre lutarei por vocês.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me ajudaram nessa etapa da minha vida. À minha família e amigos, que sempre me apoiaram e forneceram todos os recursos possíveis para me ajudar a seguir nessa jornada. Aos meu pais, Maria e Mauro, que sempre fizeram de tudo o que puderam na vida pra me dar as melhores condições de estudo possíveis. À minha companheira Isabela, que sempre se manteve ao meu lado e me incentivou a continuar na luta mesmo com todas as dificuldades e sempre conseguiu fazer um milagre nos meus textos. Às minhas avós e minha irma que sempre me apoiaram e ajudaram.

Agradeço ao meu Orientador Prof. José Fernando de Jesus, que não só teve paciência em me introduzir nessa linha de pesquisa, como me acolheu em sua casa, agradeço a também à sua esposa Tânia por sempre me receber. Ao meu coorientador Prof. Saulo Perreira, pelas discussões teóricas sobre Teoria de Campos e o aprofundamento teórico, que me forneceu em diversas situações.

Agradeço também a todos os professores da FEG, que me auxiliaram e sempre foram muito solidários em discussões. Aos colegas da pesquisa em Física, meu colaborador e amigo Prof. Rodolfo da Unifesp, que já me aconselhou em diversas ocasiões e sempre me incentivou a continuar seguindo em frente cada vez mais. Agradeço ao Professor José Ademir do IAG-USP, pelas ricas discussões, conselhos e trabalhos que realizamos, todo esse apoio foi de fundamental importância para minha formação.

Aos amigos da pós graduação da FEG, ao Dr. Mateus e sua família que me acolheram em sua casa.

A todos os funcionários da FEG, por todo auxílio em questões burocráticas e na vivência no campus.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

“Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.”
(Albert Einstein)

RESUMO

Em busca de formulações alternativas para a descrição da energia escura, vamos começar estudando os Campos Escalares, que surgiram como candidatos naturais para representar a energia escura como campos quintessenciais ou fantasmas, pois são o principal ingrediente das teorias de inflação. Inicialmente, em vez de assumir alguma forma para o potencial associado ao campo escalar, vamos buscar reconstruir o potencial diretamente dos dados observacionais utilizando dados de $H(z)$ e SNe Ia a partir do método dos Processos Gaussianos. Em seguida, vamos analisar a possibilidade de um Universo, que está atualmente em expansão acelerada no contexto de uma cosmologia de campo escalar quintessencial, poder desacelerar em um futuro distante. Essa possível evolução concebível é testada a partir dados SNe Ia e $H(z)$ e através de um método independente de modelo baseado em Processos Gaussianos.

Outra possibilidade para descrição do setor escuro do Universo são os modelos com interação entre energia escura e matéria escura, nesse contexto, a proporção entre essas componentes não é constante e muda do início ao fim dos tempos de tal forma que o modelo pode resolver ou aliviar o problema da coincidência cósmica (PC).

No contexto do modelo $\Lambda(t)$ CDM-plano, foram analisados os modelos de interação com termo de interação fenomenológico que depende do parâmetro de Hubble e da densidade de energia da energia escura. Os modelos também foram analisados no contexto das evoluções lineares das perturbações de densidade. As restrições foram obtidas com base na análise conjunta dos dados de SNe Ia, espaço de distorção dos *redshifts* e $H(z)$.

Em um outra linha, buscamos desenvolver testes de relação de consistência para diversos modelos cosmológicos, incluindo os modelos Λ CDM-plano e com curvatura, bem como o modelo XCDM-plano. A análise usa o método não paramétrico dos Processos Gaussianos para reconstruir quantidades cosmológicas fundamentais, como o parâmetro de Hubble $H(z)$ e suas derivadas com base nos dados de $H(z)$, e a distância comóvel e suas derivadas a partir de dados SNe Ia. Construímos relações de consistência a partir dessas quantidades, que deveriam ser válidas apenas no contexto de cada modelo, e as testamos com os dados observacionais. Conseguimos encontrar um método geral para construir tais relações de consistência no contexto da reconstrução de $H(z)$. No caso da reconstrução da distância comóvel, não foi possível obter um método geral de construção para as relações de consistência e por isso determinamos uma relação de consistência específica para cada modelo.

Também reconstruímos a evolução dos parâmetros cinemáticos $H(z)$, $q(z)$, jerk e snap com base nos Processos Gaussianos. Nesse contexto, foi permitido um prior na curvatura espacial com base nas restrições do Planck 18. No caso de SNe Ia, foi necessário modificar o pacote python (GaPP) para obter a reconstrução da quarta derivada de uma função, permitindo-nos, assim, obter o snap com a distância comóvel. Além disso, usando um método de amostragem de importância, combinamos as reconstruções de $H(z)$ e SNe Ia para encontrar restrições conjuntas para os parâmetros cinemáticos.

PALAVRAS-CHAVE: Cosmologia, Campo Escalar, Energia Escura, Interação Matéria Escura - Energia Escura, Perturbação de Densidade, Estatística Bayesiana, Processos Gaussianos, Relações de Consistência, Parâmetros Cinemáticos.

ABSTRACT

In search of alternative formulations for the description of dark energy, we will begin by studying Scalar Fields, which have emerged as natural candidates to represent dark energy as quintessence or phantom fields, being key ingredients in inflationary theories. Initially, rather than assuming a specific form for the scalar field potential, we aim to reconstruct the potential directly from observational data using $H(z)$ and SNe Ia data via the Gaussian Processes method.

Next, we will analyze the possibility that a universe currently undergoing accelerated expansion, within the context of a quintessence scalar field cosmology, could decelerate in the distant future. This conceivable evolution is tested using SNe Ia and $H(z)$ data through a model-independent method based on Gaussian Processes.

Another possibility for describing the dark sector of the Universe involves models with interaction between dark energy and dark matter. In this context, the proportion between these components is not constant and changes over time, potentially resolving or alleviating the cosmic coincidence problem (CP).

In the context of the flat $\Lambda(t)$ CDM model, interaction models with a phenomenological interaction term dependent on the Hubble parameter and the dark energy density were analyzed. These models were also examined within the framework of the linear evolution of density perturbations. Constraints were derived based on the combined analysis of SNe Ia data, redshift space distortions, and $H(z)$.

Additionally, we aimed to develop consistency relation tests for various cosmological models, including flat and curved Λ CDM models, as well as the flat XCDM model. This analysis employs the non-parametric Gaussian Processes method to reconstruct fundamental cosmological quantities such as the Hubble parameter $H(z)$ and its derivatives based on $H(z)$ data, and the comoving distance and its derivatives from SNe Ia data. We constructed consistency relations from these quantities, which should only hold within the context of each model, and tested them against observational data. We managed to find a general method to construct such consistency relations in the context of $H(z)$ reconstruction. For the comoving distance reconstruction, a general method for constructing consistency relations was not feasible, so specific consistency relations for each model were determined.

We also reconstructed the evolution of the kinematic parameters $H(z)$, $q(z)$, jerk, and snap using Gaussian Processes. In this context, a prior on spatial curvature was allowed based on Planck 18 constraints. For SNe Ia data, it was necessary to modify the GaPP python package to obtain the fourth derivative reconstruction of a function, thereby enabling the snap reconstruction with the comoving distance. Furthermore, using an importance sampling method, we combined the reconstructions of $H(z)$ and SNe Ia to find joint constraints on the kinematic parameters.

KEYWORDS: Cosmology, Scalar Field, Dark Energy, Dark Matter - Dark Energy Interaction, Density Perturbation, Bayesian Statistics, Gaussian Processes, Consistency Relations, Kinematic Parameters.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	52 Dados de $H(z)$, em vermelho os 32 dados de cronômetros cósmicos (MORESCO et al., 2022) e em preto os dados de BAO com Função de correlação de galáxias vermelhas ambas medidas provenientes de clustering (MAGANA et al., 2018). A curva de $H(z)$ para o modelo Λ CDM-plano (imagem própria)	38
Figura 2	Dados de da magnitude aparente m_B da amostra Pantheon, com a curva de m_B para o modelo Λ CDM-plano	42
Figura 3	Dados de da magnitude aparente m_B da amostra Pantheon+, com a curva de m_B para o modelo Λ CDM-plano	42
Figura 4	Dados de $f\sigma_8$. Com a curva de $f\sigma_8$ para o modelos Λ CDM-plano.	45
Figura 5	Reconstrução de $H(z)$ a partir dos 31 dados de CCs. Mostrando os intervalos de confiança de 68,3% e 95,4%, junto com os dados de cronômetros cósmicos.	55
Figura 6	Reconstrução de $H(z)$ a partir dos 32 dados de CCs, mostrando os intervalos de confiança de 68,3% e 95,4%, junto com os dados de cronômetros cósmicos. h	55
Figura 7	Reconstruções de $D_C(z)$ para amostra Pantheon. Mostrando os intervalos de confiança de 68,3% e 95,4% . E para comparação a curva de D_C obtida pelo modelo Λ CDM - plano	57
Figura 8	Reconstruções da $D_C(z)$ para amostra Pantheon+. Mostrando os intervalos de confiança de 68,3% e 95,4% . E para comparação a curva de D_C obtida pelo modelo Λ CDM - plano	57
Figura 9	Resultados das reconstruções com o Prior do Planck. Esquerda: Reconstrução $U(z)$ de 31 dados $H(z)$. Direita: $U(z)$ reconstrução do Pantheon.	66
Figura 10	Reconstrução $U(z)$ a partir de dados $H(z)$ e Pantheon com um Planck 3σ anterior sobre Ω_m e Ω_k . Esquerda: Superposição de intervalos de confiança. A reconstrução SNe Ia corresponde ao vermelho e a reconstrução $H(z)$ corresponde às linhas contínuas verdes. Direita: Análise conjunta.	67
Figura 11	Resultados das reconstruções do grande prior. Esquerda: Reconstrução $U(z)$ de 31 dados $H(z)$. Direita: $U(z)$ reconstrução do Pantheon.	68
Figura 12	Reconstrução de $U(z)$ a partir de dados de $H(z)$ e Pantheon com um grande prior sobre Ω_m e Ω_k (mais detalhes no texto). Esquerda: Superposição de intervalos de confiança. A reconstrução SNe Ia corresponde ao vermelho e a reconstrução $H(z)$ corresponde às linhas contínuas verdes. Direita: Análise conjunta.	68
Figura 13	Direita: Evolução em relação ao <i>redshift</i> do campo escalar adimensional $\Phi(z)$. Esquerda: Evolução em relação ao <i>redshift</i> da derivada do campo $\Phi'(z)$	73
Figura 14	Gráfico triangular de parâmetros, com dados de $H(z)$ e SNe Ia combinados. Os contornos correspondem a 68% e 95% de intervalo de confiança	74

Figura 15	Direita: Gráfico de $U(z)$ obtido utilizando as cadeias dos parâmetros livres geradas pelo emcee. Esquerda: Gráfico de $q(z)$ obtido utilizando as cadeias dos parâmetros livres geradas pelo emcee.	75
Figura 16	Gráfico de $q(z)$ do modelo analisado junto com $q(z)$ reconstruído por GP. Também são mostrados os intervalos de confiança 1σ e 2σ . Esquerda: Reconstrução GP a partir de dados $H(z)$; Direita: Reconstrução GP do Pantheon.	76
Figura 17	Plot do $U(z)$ para o modelo analisado em conjunto com o $U(z)$ reconstruído pelo Processos Gaussianos. Esquerda: Reconstrução com obtida com os dados $H(z)$; Direita: Reconstrução a partir da amostra Pantheon.	77
Figura 18	Evolução das densidades do setor escuro para os modelos Λ CDM (à esquerda) e $\Lambda(t)$ CDM (à direita). As densidades são normalizadas pela densidade crítica atual, ρ_{crit0}	81
Figura 19	Plot das restrições, com intervalo de confiança de 68% e 95%, sobre os parâmetros livres do modelo IEE com $w \neq -1$. Obtidas da combinação das amostras $H(z)$ +Planck18 (prior Λ CDM-plano)+BAO+Pantheon	84
Figura 20	Restrições sobre os parâmetros livres do modelo IEE com $w \neq -1$, com intervalo de confiança de 68% e 95%. Provenientes da combinação das amostras $H(z)$ +Planck18(prior XCDM)+BAO+Pantheon.	85
Figura 21	Plot das restrições para o modelo $\Lambda(t)$ CDM obtidas das amostra Pantheon, $H(z)$ e para o combinado Pantheon+ $H(z)$	87
Figura 22	Plot das restrições, em até 2σ de intervalo de confiança, para o modelo $\Lambda(t)$ CDM obtidas da combinação $H(z)$ +Pantheon.	88
Figura 23	Plot das restrições, em até 2σ de intervalo de confiança, dos parâmetros livres para cada amostra de dados Pantheon+SH0ES e CCs e para combinação delas.	91
Figura 24	Plot das restrições, em até 2σ de intervalo de confiança, dos parâmetros livres para Combinação das amostra de dados Pantheon+SH0ES e CCs.	92
Figura 25	Plot das restrições dos parâmetros livres, em 2σ intervalo de confiança, para cada amostra de dados de CCs e Pantheon+SH0ES e para a combinação	95
Figura 26	Plot das restrições dos parâmetros livres, em 2σ intervalo de confiança, para combinação das amostra de dados de CCs e Pantheon+SH0ES.	96

Figura 27	Valores do parâmetro S_8 com intervalo de confiança de 1σ , a partir dos seguintes dados: CMB (AGHANIM et al., 2020; AIOLA et al., 2020), WL(ASGARI et al., 2021; ASGARI et al., 2020; JOUDAKI et al., 2020; WRIGHT et al., 2020; HILDEBRANDT et al., 2020; AMON et al., 2022; TROXEL et al., 2018; HAMANA et al., 2020; LOUREIRO et al., 2022; HIKAGE et al., 2019; JOUDAKI et al., 2017), WL+CMB lensing (CHANG et al., 2023), WL+GC(MIYATAKE et al., 2022; HEYMANS et al., 2021; JOUDAKI et al., 2018; UITERT et al., 2018; COSTA et al., 2018; ABBOTT et al., 2018; TRÖSTER et al., 2020; ABBOTT et al., 2022), WL+GC+CMB lensing (GARCÍA-GARCÍA et al., 2021), GC (PHILCOX; IVANOV, 2022; IVANOV, 2021; IVANOV; SIMONOVIC; ZALDARRIAGA, 2020; CHEN; VLAH; WHITE, 2022; TRÖSTER et al., 2020), GC+CMB lensing (WHITE et al., 2022; KROLEWSKI; FERRARO; WHITE, 2021), CC (LESCI et al., 2022; COSTANZI et al., 2019; MANTZ et al., 2015; ABBOTT et al., 2020; PACAUD et al., 2018; BOCQUET et al., 2019; SALVATI; DOUSPIS; AGHANIM, 2018; ADE et al., 2016), RSD (NUNES; VAGNOZZI, 2021; BENISTY, 2021). O plot foi obtido com base no código publicamente disponível fornecido em (VALENTINO et al., 2021a).	99
Figura 28	Direita: Evolução do Contraste de densidade para diferentes valores de ε . Esquerda: Reconstrução do Contraste de densidade gerados pelas amostra do emcee.	103
Figura 29	Plot das restrições sobre os parâmetros livres, em até 2σ de intervalo de confiança, obtidas para cada amostra de dados CCs (contornos verdes), $f\sigma_8$ (contornos vermelhos) e Pantheon+SH0ES (contornos cinzas). A análise combinada (contornos azuis) também é apresentada	105
Figura 30	Plot das restrições sobre os parâmetros livres, em até 2σ de intervalo de confiança, obtidas para a análise combinada das amostra de dados CCs + $f\sigma_8$ + Pantheon+SH0ES.	106
Figura 31	Direita: Evolução do contraste de densidade para diferentes valores de ε . Esquerda: Reconstrução da evolução do contraste de densidade.	107
Figura 32	Plot das restrições sobre os parâmetros livres, com intervalo de confiança de até 2σ , obtidas para cada amostra de dados CCs (contornos verdes), $f\sigma_8$ (contornos vermelhos) e Pantheon+SH0ES (contornos cinzas). A análise combinada (contornos azuis) também é apresentada	109
Figura 33	Plot das restrições sobre os parâmetros livres, com intervalo de confiança de até 2σ , obtidas para análise combinada das amostra de dados CCs + $f\sigma_8$ + Pantheon+SH0ES.	110
Figura 34	Gráfico de $\delta_{H\Lambda\text{CDM}}^{(2)} = H''_{GP} - H''_{\Lambda\text{CDM}}$. Com intervalo de confiança de 2σ .	117
Figura 35	Plot de $\delta_{H\Lambda\text{CDM}}^{(3)} = H'''_{GP} - H'''_{\Lambda\text{CDM}}$. Com intervalo de confiança de 2σ .	118
Figura 36	Plot de $\delta_{H\text{FXCDM}}^{(3)} = H'''_{GP} - H'''_{\text{FXCDM}}$. Com intervalo de confiança de 2σ .	118
Figura 37	Plot de $(1+z)^{-4}\mathcal{L}_{\Lambda\text{CDM}}$.	119

Figura 38	Reconstrução do $E(z)$. a) Superior Esquerda: Reconstrução a partir dos dados de $H(z)$. b) Superior Direita: Reconstrução a partir dos dados de SNe Ia. c) Inferior Esquerda: Comparação entre reconstruções. d) Inferior Direita: Reconstrução conjunta.	125
Figura 39	Reconstrução de $q(z)$ com intervalo de confiança de 2σ . a) Superior Esquerda: Reconstrução a partir dos dados $H(z)$. b) Superior Direita: Reconstrução a partir das SNe Ia. c) Inferior Esquerda: Comparação entre as reconstruções. d) Inferior Direita: Reconstrução conjunta.	126
Figura 40	Reconstrução do $j(z)$ em até 2σ de intervalo de confiança. a) Superior Esquerda: Reconstrução a partir dos dados $H(z)$. b) Superior Direita: Reconstrução a partir das SNe Ia. c) Inferior Esquerda: Comparação entre as reconstruções. d) Inferior Direita: Reconstrução conjunta.	127
Figura 41	Reconstrução de $s(z)$ com intervalo de confiança em até 2σ . a) Superior Esquerda: Reconstrução a partir dos dados $H(z)$. b) Superior Direita: Reconstrução a partir das SNe Ia. c) Inferior Esquerda: Comparação entre as reconstruções. d) Inferior Direita: Reconstrução conjunta.	128
Figura 42	Valores atuais dos parâmetros cinemáticos a partir das reconstruções conjuntas utilizando Processos Gaussianos.	130

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Valores de $\Delta\chi^2$ para diferentes níveis de confiança e graus de liberdade ν	48
Tabela 2	– $U(z = 0)$ de ambos os modelos de campo escalar (Lei de Potência e Campo Livre) e de ambas as análises de Processos Gaussianos, com diferentes priors (prior Planck prior e prior Largo), de $H(z)$, dados SNe Ia e da análise conjunta (Comb.).	69
Tabela 3	– Escolha do prior para os parâmetros livres.	74
Tabela 4	– Valores dos parâmetros livres em 2σ de intervalo de confiança.	75
Tabela 5	– Priors escolhidas para os parâmetros livres.	83
Tabela 6	– Plot das restrições, com intervalo de confiança de 68% e 95% , sobre os parâmetros livres do modelo IEE para a combinação dos dados $H(z)$ +Planck18+BAO+Pantheon.	84
Tabela 7	– Restrições sobre os parâmetros livres do modelo IEE $\Lambda(t)$ CDM para a combinação de dados $H(z)$ +Pantheon, exibidas em 68% e 95% de intervalo de confiança.	86
Tabela 8	– Priors escolhidos para os parâmetros livres.	90
Tabela 9	– Restrições sobre os parâmetros livres, com intervalo de confiança de 2σ , obtidas da combinação das amostras Pantheon+SH0ES e CCs.	90
Tabela 10	– Restrições dos parâmetros livres com 2σ intervalo de confiança obtidas da análise combinada dos dados de CCs e do Pantheon+SH0ES.	94
Tabela 11	– Priors escolhidas sobre os parâmetros livres.	104
Tabela 12	– Restrições dos parâmetros livres em 68% e 98% de intervalo de confiança, obtidas da análise combinada de CCs, $f\sigma_8$ e Pantheon+SH0ES.	104
Tabela 13	– Restrições dos parâmetros livres, com 68% e 95% de intervalo de confiança, obtidas da análise combinada de CCs, $f\sigma_8$ e Pantheon+SH0ES.	108
Tabela 14	– Valores dos parâmetros cinemáticos hoje em ($z = 0$), com intervalo de confiança de 1σ e 2σ , obtidos com GP.	129

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UNESP	Universidade Estadual Paulista
SFDM	do inglês Scalar Field Dark Matter
CMB	do inglês Cosmic Microwave Background
SNe	do latim Supernovae
SNe Ia	Supernovas do Tipo Ia
BAO	do inglês Baryon Acoustic Oscillation
RSD	do inglês Redshift Space Distortion
CCs	do inglês Cosmic Chronometers
DM	do inglês Dark Matter
DE	do inglês Dark Energy
CDM	do inglês Cold Dark Matter
GUT	do inglês Grand Unification Theory
IDE	do inglês Interaction Dark Energy
IEE	Interação Energia Escura
GP	do inglês Gaussian Processes
WL	do inglês Weak Lensing
GC	do inglês Galaxy clustering
CC	do inglês Cluster Counts

LISTA DE SÍMBOLOS

c	Velocidade da Luz no Vácuo
$\hbar$	Constante de Planck h dividida por 2π
κ	Constante de Boltzmann
α	Letra Grega alfa
β	Letra grega beta
γ	Letra grega gama
e	Número de Euler
μ	Letra Grega mu
ε	Letra Grega épsilon
Ω	Letra Grega Ómega
δ	Letra Grega delta
χ	Letra Grega chi
Φ	Letra Grega Phi
ϕ	Letra Grega phi
ρ	Letra Grega rho
Γ	Letra Grega Gama
Λ	Letra Grega Lambda
c_{eff}^2	Velocidade efetiva do Som
z	desvio para o vermelho (do inglês, <i>redshift</i>)
H_0	Constante de Hubble-Lemaître
G	Constante Gravitacional Universal

Unidades Naturais Este trabalho foi formulado em Unidades Naturais, $c = \hbar = \kappa = 1$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	O MODELO DE CONCORDÂNCIA CÓSMICA	26
2.1	Formulação Teórica do Modelo Padrão em Cosmologia	27
2.2	O <i>Redshift</i> z	32
2.3	Distância em Cosmologia	34
2.4	Idade do Universo	35
3	DADOS OBSERVACIONAIS	37
3.1	Medidas do Parâmetro de Hubble $H(z)$	37
3.1.1	Oscilações Acústicas dos Bárions	38
3.1.1.1	BAO Radial	39
3.1.2	Função de Correlação de Galáxias Vermelhas Luminosas	40
3.1.3	Idades Diferenciais de Galáxias: Crônometros Cósmicos (CCs)	40
3.2	Supernovas do Tipo Ia	41
3.3	Radiação Cósmica de Fundo em Micro-Ondas	43
3.4	Distorção no Espaço dos <i>Redshifts</i>	44
4	ANÁLISES E MÉTODOS ESTATÍSTICOS	46
4.1	Ajuste de χ^2	46
4.1.1	Análise dos Dados de $H(z)$	49
4.1.2	Análise dos Dados de SNe Ia	50
4.1.3	Análise da Radiação Cósmica de Fundo	50
4.1.4	Método Numérico	51
4.2	Processos Gaussianos	51
4.2.1	Reconstruindo a Derivada de uma Função	53
4.2.2	Combinando $f(x)$ e suas Derivadas	54
4.2.3	Reconstrução dos Dados Observacionais	54
4.2.3.1	Reconstrução de $H(z)$	54
4.2.3.2	Reconstrução da Distancia Comóvel	56
4.2.4	Combinando as Amostras de Dados	58
5	CAMPO ESCALAR COMO ENERGIA ESCURA: MODELOS ϕCDM	59
5.1	Análise Dinâmica	59
5.2	Modelo ϕ CDM	60
5.3	Reconstrução do Potencial $V(\phi)$	63
5.4	O Universo Pode Desacelerar no Futuro?	69

6	MODELOS COSMOLÓGICOS COM INTERAÇÃO NO SETOR ESCURO	78
6.1	Formulação Dinâmica do Modelos IEE	79
6.2	Modelos IEE: $Q = \Gamma(t)\rho_{\text{DE}}$	81
6.2.1	Caso $w \neq -1$: Modelo XCDM com Interação	82
6.2.2	Caso $w = -1$: Modelo $\Lambda(t)$CDM	85
6.3	Modelo IEE: $Q = \varepsilon\mathcal{H}\rho_\Lambda$	88
6.4	Modelo IEE: $Q = \varepsilon H\rho_\Lambda$	93
7	EVOLUÇÃO LINEAR DAS PERTURBAÇÕES DE DENSIDADE DA MATÉ- RIA ESCURA EM MODELOS IEE	97
7.1	Formulação Neo-Newtoniana para Modelos IEE	100
7.2	Caso $Q = \varepsilon\mathcal{H}\rho_\Lambda$	102
7.3	Caso $Q = \varepsilon H\rho_\Lambda$	107
8	RELAÇÕES DE CONSISTÊNCIA	111
8.1	Modelo Λ CDM plano	112
8.1.1	Relações de Consistência a partir de Dados $H(z)$	112
8.1.2	Relações de Consistência a partir de Supernovas Tipo Ia	113
8.2	Modelo Λ CDM com Curvatura	114
8.2.1	Relações de Consistência a partir dos dados de $H(z)$	114
8.2.2	Relações de Consistência a partir de SNe Ia	115
8.3	Modelo XCDM - Plano	116
8.3.1	Relações de Consistência a partir dos dados de $H(z)$	116
8.3.2	Relações de Consistência a partir de SNe Ia	117
8.4	Testes de consistência para os dados de $H(z)$	117
8.5	Testes de Consistência para os Dados de SNe Ia	119
9	PARÂMETROS CINEMÁTICOS: DO PARÂMETRO DE HUBBLE ATÉ O SNAP	120
9.1	Equações para os Parâmetros Cinemáticos	120
9.2	Parâmetros Cinemáticos em função de $H(z)$	121
9.3	Parâmetros Cinemáticos a partir da $D_M(z)$	122
9.4	Reconstrução do $E(z)$	124
9.5	Reconstrução do $q(z)$	125
9.6	Reconstrução do $j(z)$	126
9.7	Reconstrução do $s(z)$	127
9.8	Valores Atuais dos Parâmetros Cinemáticos a partir dos Processos Gaussianos	128
10	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	131
	REFERÊNCIAS	134

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, houve um grande aumento na quantidade e qualidade das amostras de dados observacionais, proporcionando uma melhor compreensão sobre a evolução do Universo. Isso impulsionou muitos avanços significativos na Cosmologia, dando início à era da Cosmologia de precisão.

No início do século XX as medidas astronômicas ainda se baseavam em observações de estrelas no espectro visível e possuíam altas incertezas associadas, como podemos observar a partir das primeiras medidas de estrelas variáveis cefeidas localizadas nas Nuvens de Magalhães, obtidas por Henrietta Leavitt em 1908 (LEAVITT, 1908), que foram utilizadas por Edwin Hubble (HUBBLE, 1929) para os estudos da relação entre a distância e as velocidades radiais das estrelas. As variáveis cefeidas são dados observáveis importantes e uma das suas utilizações consiste na calibração das medidas de supernovas do tipo Ia (SNe Ia), que desempenham um papel fundamental na Cosmologia por serem consideradas “velas padronizáveis”. Em 1999 duas colaborações distintas (RIESS et al., 1998) e (PERLMUTTER et al., 1999), utilizando o catálogo de SNe Ia disponível na época, conseguiram descobrir independentemente que o Universo está atualmente em uma fase de expansão acelerada.

Novas amostras de dados foram sendo descobertas ao longo do tempo, confirmando previsões teóricas, como a Radiação Cósmica de Fundo em Microondas (CMB), que embora foi teorizada por George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman (ALPHER; BETHE; GAMOW, 1948; ALPHER; HERMAN, 1948), foi confirmada experimentalmente por Arno Penzias e Robert Wilson apenas em 1965 (PENZIAS; WILSON, 1965). A evolução na aquisição e tratamento de dados levou a medidas mais refinadas, como as medidas finais do satélite Cosmic Background Explorer (COBE) (BENNETT et al., 1996) em 1993, o primeiro a focar em observações cosmológicas. Posteriormente, em 2013 as medidas finais do satélite Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) (HINSHAW et al., 2013) atualizaram o espectro de potência da CMB e, finalmente, as medidas finais da missão espacial Planck (AGHANIM et al., 2020) divulgadas em 2018 fornecem as mais recentes e precisas medições das anisotropias no espectro de potência da CMB. Os fótons da CMB apresentam praticamente a mesma temperatura de $T_0 = 2.7255 \pm 0.0006\text{K}$ (FIXSEN, 2009). Isso significa que, apesar das variações locais, o Universo como um todo apresenta praticamente a mesma temperatura. Esta constatação representa uma prova sólida de que o Universo é homogêneo e isotrópico em larga escala.

As observações astronômicas nos fornecem a maior parte das informações sobre a evolução dinâmica do Universo. A partir do estudo com aglomerados de galáxias, em especial o aglomerado Coma, o astrônomo Fritz Zwicky, em 1933, conseguiu estimar a velocidade dos aglomerados e relacioná-la com sua massa (ZWICKY, 1933). Fritz concluiu que a massa estimada a partir da relação Massa-Luminosidade era muito baixa em comparação ao esperado para as velocidades calculadas, indicando a presença de massa não visível no aglomerado. Com a determinação da velocidade das estrelas e dos gases que compõem uma galáxia espiral em função da distância ao centro da galáxia, é possível montar a curva de rotação dessa galáxia espiral. É interessante usar medidas com diferentes espectros eletromagnéticos para cobrir diferentes partes de uma galáxia espiral vista de perfil, por

exemplo. Com a estimativa da curva de rotação da galáxia M31 realizada em (RUBIN; FORD JR., 1970), os autores concluíram que o comportamento das velocidades dos objetos próximos ao centro da galáxia eram compatíveis com a previsão teórica formulada para um corpo rígido com base na mecânica newtoniana. Porém, as velocidades dos objetos mais distantes do centro não diminuía como era esperado, elas se mantinham constantes. Para reproduzir as curvas observadas, as galáxias deveriam ter uma massa maior em relação ao valor estimado considerando as estrelas e os gases. Esse problema levou a proposição da matéria escura (DM, do inglês “Dark Matter”), uma componente material do universo que não interage eletromagneticamente, o seu efeito gravitacional é o responsável por manter constante a velocidade de rotação dos objetos mais afastados do centro da galáxia.

Atualmente, o modelo cosmológico Λ Cold Dark Mater plano, Λ CDM-plano, é o modelo padrão na cosmologia. O modelo Λ CDM-plano surge no contexto da Relatividade Geral decorrente da solução das equações de Einstein com a métrica proposta independentemente por Alexander Friedmann, Georges Lemaître, Howard Robertson e Arthur Walker, com base no pressuposto da homogeneidade e isotopia do Universo. No modelo Λ CDM plano, o Universo é preenchido por matéria bariônica e radiação, descritas pelo modelo padrão da Física de Partículas (WORKMAN et al., 2022), matéria escura não relativística (fria) e sem pressão (ZWICKY, 1933; RUBIN; FORD JR., 1970; BLUMENTHAL et al., 1984). A matéria escura exerce o mesmo efeito gravitacional que a matéria bariônica, mas não interage eletromagneticamente com a radiação. Para completar o conteúdo material do Universo, temos a Energia Escura, que possui densidade de pressão negativa e é responsável pela atual fase de expansão acelerada do Universo devido ao seu efeito gravitacional repulsivo (WEINBERG, 1989; PEEBLES; RATRA, 2003). No modelo padrão, a energia escura é descrita pela constante cosmológica Λ . Surpreendentemente, a matéria que conhecemos representa aproximadamente 5% do Universo apenas, sendo o restante preenchido pelo setor escuro. Para completar, o modelo Λ CDM plano possui uma fase de inflação cosmológica que fornece as condições para a homogeneidade e planicidade do Universo através de uma expansão quase de-Sitter nos primeiros momentos. Esta fase definiu as condições iniciais do Universo além de fornecer uma justificativa convincente para a gênese das flutuações de densidade primordiais.

A evolução térmica do Universo é descrita pela teoria de Hot Big Bang (ALPHER; BETHE; GAMOW, 1948), que previu a nucleossíntese primordial e a radiação cósmica de fundo, em conjunto com um modelo inflacionário (LINDE, 1982), o que possibilitou que o universo primordial pudesse evoluir de acordo com as previsões da física nuclear (KOLB; TURNER, 1981).

Embora o modelo Λ CDM descreva bem a maioria das observações astronômicas, tanto do Universo primitivo, como os dados de nucleossíntese primordial (WORKMAN et al., 2022) e a CMB, (AGHANIM et al., 2020) quanto do Universo tardio, como medições de SNe Ia (BROUT et al., 2022) e os dados dos parâmetros do Hubble, $H(z)$ (MORESCO et al., 2022), ele possui alguns problemas críticos. Para uma revisão, veja (WEINBERG, 1989; ABDALLA et al., 2022), que abrange:

- **A natureza da matéria e energia escura:** Como a cosmologia de precisão pode determinar a natureza do setor escuro (ABDALLA et al., 2022).
- **Problema da constante cosmológica:** Valor muito pequeno comparado ao esperado pela Teoria Quântica de Campos (WEINBERG, 1989).

- **Problema de Coincidência Cósmica:** O fato de que apenas recentemente a densidade de energia da matéria escura é da mesma ordem de grandeza que a densidade da energia escura. (WEINBERG, 1989).
- **Fluxos de velocidade em grande escala:** Λ CDM plano prevê amplitudes e escalas de fluxos menores do que as observadas;
- **Vazios muito “vazios”:** O modelo cosmológico padrão prevê mais galáxias anãs e irregulares do que as observadas;
- **Perfis de halo de cluster:** Λ CDM plano prevê concentrações e perfis de densidade mais baixos do que os observados;
- **Perfis de halo galáctico:** Λ CDM plano prevê *cores cúspides* e baixa densidade externa, enquanto perfis planos com alta densidade externa são observados;
- **Alta população de galáxias de disco:** Λ CDM plano prevê menos galáxias de disco, devido às recentes fusões que destruíram os discos.
- **Tensão Estatística de Parâmetros Cosmológicos:** A discrepância na estimativa dos valores de H_0 e S_8 para diferentes amostras de dados (ABDALLA et al., 2022; VERDE; TREU; RIESS, 2019; BOUSIS; PERIVOLAROPOULOS, 2024; VALENTINO et al., 2021b; VALENTINO, 2021; VALENTINO et al., 2021c; PERIVOLAROPOULOS; SKARA, 2022; SCHÖNEBERG et al., 2022; VALENTINO et al., 2021a; CLARK et al., 2023; VALENTINO, 2022; BENISTY, 2021; NUNES; VAGNOZZI, 2021; JOSEPH et al., 2023; AMON et al., 2023; SHAH; MUKHERJEE; PAL, 2024).

Vale ressaltar a tensão entre o valor da constante de Hubble H_0 , obtido com dados do Universo tardio, em relação ao valor encontrado com dados do Universo primordial. Esta discrepância representa a tensão estatística mais importante e persistente na cosmologia moderna. A tensão em H_0 (ABDALLA et al., 2022; BOUSIS; PERIVOLAROPOULOS, 2024; VALENTINO et al., 2021b; VALENTINO, 2021; VALENTINO et al., 2021c; PERIVOLAROPOULOS; SKARA, 2022; SCHÖNEBERG et al., 2022; VALENTINO et al., 2021a; CLARK et al., 2023; VALENTINO, 2022; HU; WANG, 2023), que inicialmente, em 2013, estava em torno de $2,5\sigma$ entre os dados do SH0ES e os dados de CMB, passou para $5,0\sigma$ entre os valores $H_0 = 73,04 \pm 1,04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ e $H_0 = 67,27 \pm 0,60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, ambos com nível de confiança de 1σ obtidos a partir da última análise da colaboração SH0ES (RIESS et al., 2022), com base em medições SNe Ia calibradas por Cepheids e da estimativa derivada dos dados de CMB da missão espacial Planck (AGHANIM et al., 2020), respectivamente. É importante ressaltar que a tensão em H_0 não reside apenas entre essas duas amostras de dados, ela existe em relação a dois conjuntos de medidas. As amostras de dados do Universo Local, como os dados de SNe Ia, Cefeidas, Cronômetros Cósmicos, Lentes e Ondas Gravitacionais fornecem um valor de H_0 compatível entre si, da mesma forma que os dados do Universo primordial, constituído pelas medidas de CMB, BAO, LSS e BBN, fornecem um valor de H_0 compatível entre eles. Precisamos enfatizar, no entanto, que embora as medições locais sejam fracamente dependentes do modelo cosmológico

e produzam restrições diretas sobre H_0 , as medições do Universo inicial dependem fortemente da escolha do modelo cosmológico e não produzem restrições diretas no valor de H_0 .

Há outra tensão estatística no modelo Λ CDM plano que também é amplamente discutida, e embora ainda não seja uma tensão tão acentuada como a tensão em H_0 , é muito relevante. Esta é a tensão sobre o valor do parâmetro S_8 , que é dado em função da densidade de matéria atual e da amplitude das flutuações de densidade no universo em escalas de 8Mpc (JOUDAKI et al., 2018; ABDALLA et al., 2022; PERIVOLAROPOULOS; SKARA, 2022; BENISTY, 2021; NUNES; VAGNOZZI, 2021; JOSEPH et al., 2023; AMON et al., 2023; SHAH; MUKHERJEE; PAL, 2024). Assim como a tensão em H_0 ocorre entre os dados do Universo Tardio e do Universo Inicial, a tensão em S_8 ocorre no mesmo contexto.

As atuais tensões estatísticas em conjunto com os demais problemas do modelo padrão oferecem a oportunidade de explorar modelos alternativos que podem surgir de mudanças na teoria da Gravitação ou no tipo de conteúdo material que compõe o setor escuro. Mantendo a teoria da Relatividade Geral e mudando o conteúdo material, temos os modelos

- **XCDM:** O modelo mais simples de energia escura, utilizado para se testar empiricamente a possibilidade de que o parâmetro da equação de estado $w = p_X/\rho_X$ seja diferente de -1 ($p/\rho = -1$ equivale a Λ). O parâmetro w pode ser constante (TURNER; WHITE, 1997; CHIBA; SUGIYAMA; NAKAMURA, 1997; CHIBA; SUGIYAMA; NAKAMURA, 1998; CALDWELL; KAMIONKOWSKI; WEINBERG, 2003; LIMA, 2004) ou variável (CHEVALIER; POLARSKI, 2001; LINDER, 2003).
- **Modelos com interação entre energia e matéria escura:** Esses modelos buscam testar a possibilidade de interação no setor escuro do Universo (FARRAR; PEEBLES, 2004; MARTTENS et al., 2019; LANDIM, 2019; JESUS et al., 2022; LUCCA; HOOPER, 2020; ANCHORDOQUI et al., 2021; HOERNING et al., 2023).
- **Campos escalares:** Tais modelos consideram que a energia escura é dinâmica, com comportamento descrito por um campo escalar (CALDWELL; DAVE; STEINHARDT, 1998; CARROLL, 1998; WANG et al., 2000; RATRA; PEEBLES, 1988; PEEBLES; RATRA, 1988; DODELSON; KAPLINGHAT; STEWART, 2000).

Modelos que permitem a interação entre energia escura e matéria escura formam uma interessante classe de modelos alternativos que têm sido estudados nas últimas décadas (WANG et al., 2016; BERNUI et al., 2023; VALENTINO, 2021; ZHAI et al., 2023). Modelos de interação surgem como candidatos naturais para aliviar ou resolver o Problema da Coincidência Cósmica (PC) e a Constante Cosmológica, uma vez que se Λ estiver decaindo em matéria escura, isso poderia explicar o fato de Λ ser tão pequeno hoje. Por outro lado, uma interação no setor escuro pode diminuir a distância entre as densidades de energia da matéria escura e da energia escura em altos *redshifts* de modo a aliviar o Problema de Coincidência (OZER; TAHA, 1987; FREESE et al., 1987; CARVALHO; LIMA; WAGA, 1992; OVERDUIN; COOPERSTOCK, 1998; CUNHA; LIMA; ALCANIZ, 2002; ALCANIZ; LIMA; CUNHA, 2003; JESUS, 2008; JESUS; PEREIRA S. H., 2009; DAS; CORASANITI; KHOURY, 2006a; FENG et al., 2007; BERTOLAMI; PEDRO; DELLIOU, 2009; CHIMENTO; FORTE; KREMER,

2009; WANG; LIN; ABDALLA, 2006; WANG et al., 2007; ABDALLA et al., 2009; JESUS et al., 2008; QUARTIN et al., 2008; JESUS et al., 2022). Os modelos de interação são modelos promissores que têm proporcionado bons resultados no tratamento das tensões de H_0 (VALENTINO et al., 2020; BERNUI et al., 2023; ANCHORDOQUI et al., 2021; HOERNING et al., 2023) e S_8 (ANCHORDOQUI et al., 2021; SHAH; MUKHERJEE; PAL, 2024). Exploraremos nesta Tese as implicações, em nível de *background* e em nível linear de perturbação, nas dinâmicas do Universo devido à possibilidade de interação no setor escuro. Para obter restrições sobre os parâmetros livres dos modelos propostos, com base na amostra de dados observacionais disponível, utilizaremos a Estatística Bayesiana (D'AGOSTINI, 2003; P.C., 2005) aplicada com análises baseadas nas cadeias de Monte Carlo-Markov (Monte Carlo Markov Chains, MCMC), implementadas numericamente por (GELMAN, 2014; D. J. Spiegelhalter, 1996; Goodman; Weare, 2010a; FOREMAN-MACKEY et al., 2013).

Um campo escalar é uma função que não possui direção ou sentido associados, apenas um valor numérico específico para cada ponto no espaço. Os campos escalares são aplicados em diversos ramos da física teórica, sendo utilizados em abordagens preliminares de questões desconhecidas. Devido às suas características de simetria, são aplicados da Teoria Quântica de Campos até a Cosmologia. Eles já estavam presentes no Universo primordial, nos campos escalares fundamentais das teorias de grande unificação (GUT, Grand Unification Theory) (GUTH, 1997; LIDDLE, 1997), e desempenham um papel fundamental na etapa subsequente da evolução do Universo, em que estão associados ao fenômeno da inflação (GUTH; PI, 1982; LINDE, 1982; RATRA; PEEBLES, 1988; PEEBLES; RATRA, 1988).

Ademais, algumas perspectivas apontam que campos escalares possam representar a matéria escura e a energia escura do Universo (CALDWELL; DAVE; STEINHARDT, 1998; CARROLL, 1998; WANG et al., 2000; MATOS; URENA-LOPEZ, 2001; LI; SHAPIRO; RINDLER-DALLER, 2017; MAGAÑA; MATOS, 2012; ESCOBAL; JESUS; PEREIRA, 2021; ESCOBAL et al., 2023; LÓPEZ; NO, 2024). Embora somente o bóson de Higgs tenha sido detectado experimentalmente na natureza como um campo escalar fundamental, os campos escalares não podem ser subestimados, visto que representam um instrumento crucial no desenvolvimento de investigações teóricas, particularmente na descrição de partículas bosônicas com spin zero.

As propriedades da matéria escura, representada por um campo escalar real ϕ , modelo SFDM (Scalar Field Dark Matter), foram estudadas em (MAGAÑA; MATOS, 2012; ESCOBAL; JESUS; PEREIRA, 2021). Neste modelo, as partículas de matéria escura são bósons de spin 0, que têm comprimento de onda Compton da ordem de kpc, o que permite que as partículas de matéria escura se aglutinem em poços de potenciais, formando, assim, condensados de Bose-Einstein logo no início do Universo. Dessa forma, temos a formação dos halos de matéria escura nas galáxias.

Nesta Tese analisaremos o comportamento de um campo escalar real ϕ descrevendo a energia escura do Universo em alternativa à constante cosmológica Λ . Esses são os modelos ϕ CDM também chamados de modelos de quintessência (ESCOBAL et al., 2023; CARVALHO et al., 2006; MARTIN, 2008; TSUJIKAWA, 2013), que possuem diferentes características dependendo do potencial $V(\phi)$ associado ao campo escalar. Veremos a formulação da evolução dinâmica desse modelo em nível não perturbativo para um potencial genérico $V(\phi)$ em busca de realizar vínculos com os dados observacionais e, assim, encontrar limites para os seus parâmetros livres. O modelo ϕ será analisado

com as mesmas ferramentas, baseadas na Estatística Bayesiana, utilizadas no modelo de interação. Veremos uma forma para reconstruir o potencial associado ao campo escalar a partir da amostra de dados.

Podemos também estudar o Universo sem a utilização de um modelo cosmológico de fundo, afinal, ainda não sabemos qual é o modelo que descreve perfeitamente o Universo. As observações do Universo nos revela aspectos importantes a seu respeito. Um fóton que partiu do objeto fonte e será posteriormente observado na Terra, por exemplo, percorre seu caminho seguindo a sua geodésica, e, quanto maior a distância viajada por esse fóton, mais ele sentirá em seu comprimento de onda o efeito da curvatura do espaço-tempo e sua expansão (WEINBERG, 2008). Sem dúvida, os dados observacionais são de importância fundamental para o desenvolvimento da Cosmologia. Assim, buscar ferramentas que permitam as mais variadas formas de análise é muito importante. Os Processos Gaussianos (SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012; JESUS et al., 2020; SHAFIELOO; KIM; LINDER, 2012) representam um método estatístico não paramétrico que possibilita a reconstrução de uma função contínua e suas derivadas a partir de um conjunto discreto de valores dessa função, partindo apenas da suposição de que cada valor da amostra é representado por uma variável aleatória gaussiana. Uma técnica como essa é de importante auxílio para o estudo de diversas áreas do conhecimento, pois permite obter informações somente do conjunto de dados sem supor nenhum tipo de ajuste.

Em um estudo anterior (JESUS et al., 2020), utilizamos os dados de $H(z)$ (MAGANA et al., 2018) e de Supernovas do tipo Ia (SNe Ia) da amostra Pantheon (SCOLNIC et al., 2018) para reconstruir o parâmetro de desaceleração $q(z)$ usando Processos Gaussianos. A partir dessa reconstrução, determinamos o valor do *redshift* de transição, momento no qual o universo passou a expandir de forma acelerada. Nesta Tese vamos expandir essa análise para o futuro, buscando verificar se a reconstrução do parâmetro de desaceleração nos proporciona informações sobre a aceleração do universo no futuro. Os Processos Gaussianos também serão utilizados para reconstruir o potencial associado ao campo escalar nos modelos ϕ CDM. Buscaremos também expandir a reconstrução do potencial para o futuro para podermos analisar o seu comportamento. A possibilidade da obtenção de quantidades cosmológicas fundamentais sem a utilização de um modelo de fundo permite explorar relações de consistência para um determinado modelo cosmológico com base nos dados observacionais.

Nesta Tese, revisaremos a formulação do modelo padrão em cosmologia Λ CDM-plano no Capítulo 2, onde serão apresentados os conceitos teóricos fundamentais da teoria da relatividade geral para obtenção de um modelo cosmológico e veremos a determinação das principais quantidades associadas a um modelo cosmológico, como a definição do *redshift* e das distâncias no Universo.

No Capítulo 3, são apresentados os dados observacionais utilizados nesta Tese. Em seguida, no Capítulo 4, começamos com a formulação da Estatística Bayesiana que será utilizada para obter as restrições sobre os parâmetros livres dos modelos analisados com base na amostra de dados utilizada. No mesmo Capítulo, veremos também a formulação dos Processos Gaussianos, que permite obter a reconstrução de uma função e suas derivadas a partir de uma amostra de medidas que a represente.

Já no Capítulo 5 estudaremos o modelo ϕ CDM. Inicialmente veremos a formulação teórica para essa classe de modelos cosmológicos. Em seguida, buscamos a reconstrução do potencial $V(\phi)$ com base nos dados observacionais utilizando os Processos Gaussianos. Os resultados dessa análise foram

publicados em (JESUS et al., 2022). Finalizamos o Capítulo com a análise de um modelo ϕ CDM que possibilita a desaceleração do Universo no futuro, os resultados apresentados foram publicados em (ESCOBAL et al., 2023).

No Capítulo (6), exploraremos os modelos de interação entre a energia escura e a matéria escura começando pela formulação teórica desses modelos e, depois, analisaremos, em nível não perturbativo, alguns modelos cosmológicos nesse contexto em busca de um alívio no problema da coincidência. Os resultados obtidos foram publicados em (JESUS et al., 2022). No Capítulo 7, analisaremos os modelos de interação utilizando a evolução linear das perturbações de densidade da matéria com base no formalismo Neo-Newtoniano, veremos a formulação teórica desse contexto e estudaremos alguns casos.

No Capítulo 8, veremos a determinação das relações de consistência para alguns modelos cosmológicos com base em quantidades fundamentais que podem ser reconstruídas diretamente dos dados observacionais com a utilização dos Processos Gaussianos. Os resultados obtidos neste Capítulo foram publicados em (JESUS et al., 2023)

No Capítulo 9, reconstruiremos os parâmetros cinemáticos do Universo sem a utilização de um modelo cosmológico de fundo, também com base na reconstrução de quantidades fundamentais a partir dos dados observacionais. Os resultados obtidos neste Capítulo foram publicados em (JESUS et al., 2024). Por fim, no Capítulo 10 serão apresentadas as conclusões finais e perspectivas a respeito dos estudos realizados.

2 O MODELO DE CONCORDÂNCIA CÓSMICA

Em busca de uma teoria capaz de descrever a evolução dinâmica do Universo, cuja dimensão espacial engloba escalas de comprimento muito grandes, é necessário fazer suposições sobre como seriam as leis da física em toda a sua dimensão. Essas questões foram exploradas por diversos cientistas ao longo do tempo. Dentre os cientistas que contribuíram para a resposta dessa indagação, destacam-se Alexander Friedmann, Georges Lemaître, Howard Robertson e Arthur Walker. Cada um deles contribuiu de maneira independente para a concepção do Princípio Cosmológico, que garante a viabilidade da elaboração de modelos cosmológicos e, conseqüentemente, a formulação de uma métrica que descreve um universo em expansão (WEINBERG, 2008; DODELSON SCOTT, 2020), a chamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). A Cosmologia Moderna repousa sobre os alicerces do princípio cosmológico, que pode ser formulado como apresentado em (I.C.R.A., 2010):

- As leis da Física, que determinamos em nossa vizinhança, são equivalentes em qualquer região do Universo em qualquer escala de tempo e distância.
- O Universo é espacialmente Homogêneo e Isotrópico em larga escala.

A primeira declaração é vital, pois ela viabiliza nossa capacidade de compreender o comportamento da matéria em regiões distantes do universo, possibilitando a formulação de modelos cosmológicos. Através de observações cosmológicas locais, é constatado que a carga elétrica de objetos astronômicos é bastante próxima de zero. Assim, podemos supor que a única força de longo alcance agindo no universo é a força gravitacional. A homogeneidade garante que em larga escala, além de 100 Mpc, a densidade média de matéria e energia é a mesma em qualquer ponto do espaço. A isotropia assegura que o Universo pareça o mesmo em todas as direções.

Esses princípios são comprovados pelas observações, como o espectro de potência da CMB, que possui anisotropias das ordens de 10^{-5} causadas por um dipolo resultante da velocidade peculiar em relação ao fluxo de Hubble (AGHANIM et al., 2020).

Conseqüentemente, a Teoria da Relatividade Geral de Einstein (EINSTEIN, 1916; WEINBERG, 2008; DODELSON SCOTT, 2020; CARROLL, 2019; SCHUTZ, 1985) fornece a base teórica para explorar o Universo. Essa teoria associa o conteúdo material do Universo à sua geometria, permitindo-nos compreender os efeitos gravitacionais que as componentes materiais podem exercer sobre o cosmos, como a expansão do universo, confirmada experimentalmente por (RIESS et al., 1998) e (PERLMUTTER et al., 1999), mas que já havia sido teoricamente considerada anteriormente.

Neste Capítulo veremos a formulação teórica do modelo de concordância cósmica. Veremos como obter as principais equações para estudar a evolução dinâmica do universo em nível de *background*. Em seguida, veremos a definição de *redshift* e depois como medir distâncias em Cosmologia e, por fim, como determinar a idade do Universo.

2.1 FORMULAÇÃO TEÓRICA DO MODELO PADRÃO EM COSMOLOGIA

Uma implicação inerente à profunda simetria que caracteriza o Universo é a limitação de sua geometria espacial (DODELSON SCOTT, 2020; WEINBERG, 2008) a três possíveis formas: plana, também conhecida como euclidiana, fechada (similar a uma esfera) ou aberta (comparável à sela de um cavalo). Como discutido previamente, o princípio cosmológico levou a elaboração da métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW). Esta métrica, expressa em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , descreve um universo em expansão, em que a variação temporal da parte espacial da métrica é caracterizada pelo fator de escala $a(t)$, sendo escrita como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

É útil expressar a parte espacial da métrica como:

$$\tilde{g}_{ij} = a(t)^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

sendo k a constante de curvatura, que determina a geometria do espaço-tempo e, conseqüentemente, a do universo.

$$k = \begin{cases} -1, & \text{Aberto} \\ 0, & \text{Plano} \\ +1, & \text{Fechado} \end{cases}. \quad (2.3)$$

Isto nos permite escrever um elemento de linha na métrica FLRW como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.4)$$

Uma importante quantidade na formulação da RG são os Símbolos de Christoffel (WEINBERG, 2008; CARROLL, 2019; SCHUTZ, 1985), que são definidos a partir da métrica por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (2.5)$$

Para obter uma medida da curvatura do espaço-tempo, utilizamos um elemento muito importante em Geometria Diferencial, o tensor de curvatura de Riemann, comumente chamado tensor de Riemann.

Ele é definido a partir dos símbolos de Christoffel como:

$$R^\alpha_{\mu\nu\kappa} = \partial_\kappa \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\kappa} + \Gamma^\alpha_{\beta\kappa} \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \Gamma^\beta_{\mu\kappa}. \quad (2.6)$$

Sendo assim, uma função que depende da métrica e de suas derivadas. Então, em um espaço-tempo plano o tensor de Riemann é nulo ($R^\alpha_{\mu\nu\kappa} = 0$). A única contração não nula e independente do tensor de Riemann (WEINBERG, 2008; CARROLL, 2019; SCHUTZ, 1985) é chamada tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \Gamma^\beta_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

O traço do tensor de Ricci é denominado escalar de Ricci, ele carrega toda a informação sobre o traço do tensor de Riemann, sendo escrito como:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

As equações de campo para RG de Einstein fornecem a base teórica para a construção do modelo padrão em cosmologia. Veremos uma forma geral para obter essas equações baseada no princípio da mínima ação (LEMOS, 2007). Essa formulação foi desenvolvida pelo matemático David Hilbert (HILBERT, 1915), que propôs o escalar de Ricci para representar a Lagrangeana a ser extremizada e, assim, a ação proposta por Hilbert no vácuo, conhecida como ação de Einstein-Hilbert, é dada por:

$$S_{EH,vac} = \int d^4x \sqrt{-g}(R), \quad (2.9)$$

Como proposto na teoria clássica de campos (LEMOS, 2007), para obter as equações de Euler-Lagrange basta aplicar a condição estacionária ($\delta S_{EH} = 0$) para uma variação da ação de Einstein-Hilbert em relação a métrica $g^{\mu\nu}$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (2.10)$$

Estamos interessados na formulação teórica para descrever um Universo preenchido com matéria bariônica, radiação, matéria escura não relativística descrita por CDM e a constante cosmológica Λ representando a energia escura. Esse conteúdo material presente no Universo é considerado em nossa análise através de um termo de fonte (WEINBERG, 2008) adicionado na ação de Einstein-Hilbert no vácuo (2.9). A informação do conteúdo material está na lagrangeana $\mathcal{L}_M$. A ação de Einstein-Hilbert nesse contexto toma a forma:

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}(R + 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M. \quad (2.11)$$

onde G é a constante Gravitacional (WEINBERG, 2008). Variando a ação S com relação à métrica $g_{\mu\nu}$ obtemos as equações de movimento do campo gravitacional:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

que correspondem às equações de Einstein da RG. Podemos então calcular o tensor de Energia-momento, $T_{\mu\nu}$, do conteúdo material do universo através da definição

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S^{mat}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.13)$$

Aproximando as componentes materiais observadas como sendo um fluido perfeito, com densidade de energia ρ , pressão p e quadri-velocidade U_μ , temos:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}p. \quad (2.14)$$

Utilizando a métrica FLRW (2.1), os símbolos de Christoffel, dados pela equação (2.5), tomam a forma:

$$\Gamma_{ij}^0 = a \dot{a} \tilde{g}_{ij}, \quad \Gamma_{0i}^j = \frac{\dot{a}}{a} \delta_i^j, \quad (2.15)$$

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \tilde{g}^{ln} \left(\partial_i \tilde{g}_{jn} + \partial_j \tilde{g}_{in} - \partial_n \tilde{g}_{ij} \right), \quad (2.16)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -(1 - kr^2)r, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -(1 - kr^2)r \sin^2 \theta \quad (2.17)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta \quad (2.18)$$

Consequentemente, as componentes do tensor de Ricci, expresso na equação (2.7), são dadas por:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.19)$$

$$R_{ij} = (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k)\tilde{g}_{ij}, \quad (2.20)$$

$$R_{i0} = R_{0i} = 0. \quad (2.21)$$

Então, para o escalar de Ricci, dado pela equação (2.8), temos

$$R = 6 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k}{a^2} \right] \quad (2.22)$$

A componente temporal das equações de campo da RG, utilizando a métrica de FLRW, é dada por:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R + \Lambda g_{00} = 8\pi G T_{00} \\ \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.23)$$

onde ρ é a densidade total de energia da matéria e radiação. Para a parte espacial das equações (2.12)

temos:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \Lambda g_{ij} = 8\pi GT_{ij},$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.24)$$

As equações (2.23) e (2.24) são, respectivamente, a equação de Friedmann e a equação da aceleração. Para completar o conjunto de equações dinâmicas a nível de background para a dinâmica cosmológica do modelo padrão, vamos analisar a conservação do tensor de energia-momento expressa como:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.25)$$

que implica na conservação da densidade de energia ρ_i de cada componentes materiais do Universo. Em particular, a conservação da componente $T^{\mu 0}$ fornece:

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0,$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.26)$$

Vamos considerar uma equação de estado da forma

$$p = w\rho, \quad (2.27)$$

sendo w uma constante. Assim, a relação (2.26) é dada por:

$$\dot{\rho} + 3\rho(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (2.28)$$

A equação (2.28) acima é válida para todas as componentes materiais que compõem o universo. Porém, é mais vantajoso expressá-las em termo do fator de escala $a(z)$, vamos então realizar uma mudança da variável temporal para o fator de escala, com a relação

$$\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{d}{da} = aH \frac{d}{da}. \quad (2.29)$$

E, com isso, a equação diferencial (2.28) toma a forma

$$\frac{d\rho_i}{da} + \frac{3\rho_i}{a}(1+w) = 0. \quad (2.30)$$

Ao resolver a equação (2.28) para uma determinada componente material, obtemos uma relação entre a densidade de energia ρ_i dessa componente e o fator de escala $a(t)$. De forma geral, a solução da equação (2.28) é expressa por

$$\rho_i = \rho_{i0} a^{-3(1+w)}, \quad (2.31)$$

sendo que a constante ρ_{i0} corresponde à densidade de energia da componente material calculada hoje.

O valor de w em (2.31) depende do tipo de matéria analisada. Para matéria bariônica ou matéria escura fria, $w = 0$, pois a matéria possui pressão desprezível. Já para radiação, $w = 1/3$, e para constante cosmológica Λ , que desempenha o papel de DE no modelo padrão, $w = -1$. Dessa maneira, chegamos nas seguintes relações para ρ_i

$$\rho_b = \rho_{b0} a^{-3}, \quad (2.32)$$

$$\rho_{DM} = \rho_{DM0} a^{-3}, \quad (2.33)$$

$$\rho_{rad} = \rho_{rad0} a^{-4}, \quad (2.34)$$

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0}. \quad (2.35)$$

O parâmetro de Hubble é a taxa de expansão do Universo, definido a partir do fator de escala como

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.36)$$

sendo o tempo cosmológico hoje dado por t_0 . As medidas observacionais mais recentes fornecem um valor de H_0 dado por

$$H(t_0) = H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (2.37)$$

valor obtido das análises dos resultados da missão espacial Planck (AGHANIM et al., 2020). Com o valor da constante de Hubble, é determinado o valor da densidade de energia crítica ρ_{crit0} , que representa a densidade total de energia para um Universo espacialmente plano preenchido pelas componentes materiais:

$$\rho_{crit0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 2,634 \cdot 10^{-10} \text{ g cm}^{-3}. \quad (2.38)$$

É conveniente a definição de uma quantidade adimensional para se estudar a evolução dinâmica do universo. Assim, definimos o parâmetro de densidade Ω

$$\Omega_{i0} = \frac{\rho_{i0}}{\rho_{crit0}}, \quad (2.39)$$

sendo Ω_{k0} , definido por

$$\Omega_{k0} = -\frac{k}{H_0^2}, \quad (2.40)$$

então, a equação (2.23) toma a forma

$$H(a)^2 = H_0^2 [\Omega_{b0} a^{-3} + \Omega_{DM0} a^{-3} + \Omega_{r0} a^{-4} + \Omega_{k0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda 0}]. \quad (2.41)$$

É comum a utilização do parâmetro de densidade da matéria total, Ω_{M0} , já que a matéria escura e os

bárions evoluem com a mesma dependência no fator de escala, a^{-3} . Sendo

$$\Omega_{M0} = \Omega_{DM0} + \Omega_{b0} , \quad (2.42)$$

o parâmetro de densidade dos bárions é utilizado explicitamente quando os dados analisados impõem vínculos sobre essa quantidade. Nos demais casos é utilizado o parâmetro de densidade da matéria total, Ω_{M0} .

A partir dessa equação podemos definir uma quantidade escalar, $E(a)$, dada por:

$$E(a) = \frac{H(a)}{H_0} = \sqrt{\Omega_{M0} a^{-3} + \Omega_{r0} a^{-4} + \Omega_{k0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda0}} . \quad (2.43)$$

A expressão acima também é chamada de equação de Friedmann adimensional. Hoje, em $a = 1$, a expressão (2.43) leva ao vínculo de Friedmann,

$$1 = \Omega_{M0} + \Omega_{r0} + \Omega_{k0} + \Omega_{\Lambda0} . \quad (2.44)$$

Acabamos de encontrar as equações que formam a base do modelo Λ CDM, em nível não perturbativo (*background*), que descrevem a evolução dinâmica de um Universo que pode ter curvatura espacial, com o conteúdo material composto pela constante cosmológica Λ como energia escura, a matéria escura fria (CDM), os bárions e a radiação que já conhecemos. O caso particular do modelo Λ CDM quando a curvatura do universo é nula, $k = 0$, representa o modelo padrão em cosmologia, pois é o mais favorecido pelas observações (AGHANIM et al., 2020). A curvatura nula é favorecida pelos dados observacionais do universo primitivo com base nos resultados do satélite Planck (AGHANIM et al., 2020) e também pelos dados do universo recente (BROUT et al., 2022). Nesse contexto, a equação de Friedmann (2.41) toma a forma:

$$H(a)^2 = H_0^2 [\Omega_{M0} a^{-3} + \Omega_{r0} a^{-4} + \Omega_{\Lambda0}] . \quad (2.45)$$

Uma quantidade de interesse é o parâmetro de desaceleração $q(t)$, que mede o quanto o universo está acelerando, e é definido por:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} , \quad (2.46)$$

o parâmetro $q(t)$ nos ajuda a descobrir, por exemplo, quando o universo começa a ser acelerado devido à dominação dinâmica da DE.

2.2 O REDSHIFT Z

Devido à expansão do universo, a radiação observada sofre mudanças em sua frequência conforme viaja pelo cosmo (WEINBERG, 2008). Para formular o efeito da expansão na radiação observada, vamos considerar uma fonte na coordenada comóvel r com as coordenadas θ e ϕ fixas, que emite um fóton em $t = t_e$, posteriormente observada na Terra em $r = 0$ em um tempo $t = t_o$. Como a linha de

mundo do fóton é nula, ou seja, $ds^2 = 0$, temos então

$$dt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}},$$

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.47)$$

onde o sinal de menos é empregado devido à diminuição da distância com o passar do tempo. Considerando agora um segundo sinal, emitido em $t_e + \delta t_e$ e recebido em $t_o + \delta t_o$, como $t_e \gg \delta t_e$ e $t_o \gg \delta t_o$ a distância entre a fonte e observador é aproximadamente a mesma, sendo assim

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)},$$

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_o}{a(t_o)}. \quad (2.48)$$

Sendo a frequência do fóton emitido $\nu_e = 1/\delta t_e$ e a do fóton observado $\nu_o = 1/\delta t_o$, a partir de (2.48) podemos relacionar o comprimento de onda λ_e do fóton emitido e do fóton observado λ_o com o fator de escala correspondente à emissão e observação da forma

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_o} = \frac{\delta t_e}{\delta t_o} = \frac{a(t_e)}{a(t_o)}. \quad (2.49)$$

O desvio para o vermelho (*redshift*) z é definido por

$$z(t_o) = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1, \quad (2.50)$$

como $a(t_o) = 1$,

$$1 + z = \frac{1}{a(t)}. \quad (2.51)$$

Agora temos uma relação entre o *redshift* e o fator de escala $a(t)$, o que nos possibilita escrever as equações de Friedmann em função de z . Os movimentos relativos devido à dilatação do espaço entre a Terra e a fonte de radiação que foi observada é determinado pelo valor do *redshift*. Esse valor pode revelar se a fonte está se afastando, indicado pelo deslocamento das linhas espectrais para a região vermelha ($z, >, 0$), ou se aproximando, o que é indicado pela mudança das linhas espectrais para a região azul ($z, <, 0$).

Como todo o conteúdo material do Universo está inserido no mesmo espaço-tempo, temos que os objetos massivos estão ligados gravitacionalmente, ou seja, se estiverem próximos o suficiente podem se atrair, o que gera o efeito de *blueshift*. Porém, como o espaço-tempo está em expansão, isso provoca o afastamento dos objetos astronômicos que não estão ligados gravitacionalmente.

Os dados observacionais são obtidos em termo do *redshift*. É vantajoso expressar as quantidades

cosmológicas de interesse em função do *redshift*, e para isso, utilizamos a definição (2.51). A equação de Friedmann (2.45), toma a forma

$$H(z)^2 = H_0^2 [\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{k0}(1+z)^2] . \quad (2.52)$$

Para equação de Friedmann adimensional em termos do *redshift* temos

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda0}} . \quad (2.53)$$

2.3 DISTÂNCIA EM COSMOLOGIA

A determinação das distâncias na cosmologia é crucial para a análise de uma vasta gama de dados observacionais, incluindo, por exemplo, os dados das supernovas do tipo Ia (SNe Ia), que serão abordados posteriormente. Nesse contexto, a medição do fluxo de luminosidade está intrinsecamente ligada ao inverso da distância de luminosidade.

Primeiramente, abordaremos a distância própria, que representa o percurso efetuado por um fóton desde o momento de sua emissão por uma fonte de luz comóvel até ser observado. Ela é dada por:

$$D(r, t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} . \quad (2.54)$$

Como esperado, vemos que a curvatura do universo interfere no valor da distância, sendo assim, temos

$$D(r, t) = a(t) \begin{cases} \sinh^{-1}(r), & k = -1 \\ r, & k = 0 \\ \sin^{-1}(r), & k = +1 \end{cases} , \quad (2.55)$$

Agora, a partir da definição de fluxo de luminosidade F

$$F = \frac{l}{4\pi (1+z)^2 r^2(t)} . \quad (2.56)$$

sendo l é a luminosidade do objeto. Podemos então definir a distância de luminosidade D_L como

$$D_L = (1+z)r(t) . \quad (2.57)$$

A coordenada radial $r(z)$ de uma fonte que é observada hoje com *redshift* z pode ser calculada por:

$$r(z) = S \left[\int_{t(z)}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right] \quad (2.58)$$

onde:

$$S[y] \equiv \begin{cases} \sinh(y), & k = -1 \\ y, & k = 0 \\ \sin(y), & k = +1 \end{cases} . \quad (2.59)$$

Podemos colocar $r(z)$ em termos de uma integral no *redshift* usando (2.36) e (2.51)

$$r(z) = S \left[\int_0^z \frac{dz'}{a_0 H(z')} \right], \quad (2.60)$$

ou ainda usar a equação (2.41) para expressar $a_0 H_0$ em termos de Ω_{k0} , assim obtemos

$$a_0 r(z) = \frac{1}{H_0 \Omega_{k0}^{1/2}} \sinh \left[\Omega_{k0}^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]. \quad (2.61)$$

Com isso, podemos escrever para a distância de luminosidade de uma fonte observada hoje no *redshift* z :

$$D_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0 \Omega_{k0}^{1/2}} \sinh \left[\Omega_{k0}^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]. \quad (2.62)$$

A partir da métrica de FLRW (2.1), podemos ver que uma fonte na coordenada radial comóvel r_1 que emite luz no tempo t_1 e é observada atualmente subentendendo um pequeno ângulo θ , se estende por uma distância própria s (normal linha de visada) igual a $a(t_1)r_1\theta$. A *distância de diâmetro angular* d_A é definida de tal forma que θ é dado pela relação usual da geometria euclidiana:

$$\theta = s/D_A, \quad (2.63)$$

e podemos ver que

$$D_A = a(t_1)r_1. \quad (2.64)$$

Comparando este resultado com a equação (2.57), podemos ver que a razão das distâncias de luminosidade e de diâmetro angular é simplesmente uma função do *redshift*:

$$D_A/D_L = (1+z)^{-2}. \quad (2.65)$$

Essa relação é conhecida como Equação de Dualidade de distância de Etherington (ETHERINGTON, 1933). Portanto, com base em (2.62) podemos escrever:

$$D_A(z) = \frac{1}{H_0 \Omega_{k0}^{1/2} (1+z)} \sinh \left[\Omega_{k0}^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]. \quad (2.66)$$

2.4 IDADE DO UNIVERSO

Definindo o tempo zero como aquele que corresponde ao fator de escala zero (*redshift* infinito), o tempo em que a luz foi emitida por uma fonte que está no *redshift* z pode ser encontrado a partir de:

$$dt = \frac{da}{\dot{a}} = \frac{da}{aH} = -\frac{dz}{(1+z)H(z)}. \quad (2.67)$$

Integrando entre 0 e $t(z)$:

$$t(z) = \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')H(z')}, \quad (2.68)$$

é a idade do universo no *redshift* z . Portando, a idade total do Universo é dada por:

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz'}{(1+z')H(z')} . \quad (2.69)$$

Essas quantidades podem ser usadas para fazermos o teste de idade no *redshift* z e o teste da idade total, respectivamente.

3 DADOS OBSERVACIONAIS

Os dados observacionais desempenham um papel fundamental na compreensão do Universo. Fornecendo as principais evidências sobre a evolução e composição do Universo, eles são os responsáveis por validar modelos Cosmológicos e estimar os parâmetros cosmológicos de interesse, como H_0 e Ω_{M0} entre outros.

Para vincular os modelos cosmológicos estudados com os dados observacionais tanto em nível de *background* quanto perturbativo, serão utilizados vínculos estatísticos que serão discutidos no próximo Capítulo (4). Para realizar as análises, contamos com a amostra de medidas diretas de $H(z)$ (MAGANA et al., 2018) e (MORESCO et al., 2022), dados da magnitude aparente das SNe Ia provenientes da colaboração Pantheon (SCOLNIC et al., 2018), Pantheon+ e Pantheon+SH0ES (BROUT et al., 2022), o valor dos parâmetros correspondentes ao prior de distância da CMB (AGHANIM et al., 2020) e as medidas de Distorção do Espaço de *Redshifts* (DES) (RSD, do inglês *Redshift Space Distortion*) (SKARA; PERIVOLAROPOULOS, 2020).

3.1 MEDIDAS DO PARÂMETRO DE HUBBLE $H(z)$

Os dados do parâmetro de Hubble como função do *redshift* fornecem um dos testes cosmológicos mais diretos porque os dados são inferidos basicamente das observações astrofísicas e, em sua maioria, não dependem de modelo cosmológicos de fundo. As fontes dos dados de $H(z)$ que serão utilizadas são

- Oscilações acústicas de bárions (Do inglês, Baryon Acoustic Oscillations, BAO) (COLLESS et al., 2001; EISENSTEIN et al., 2005; COLE et al., 2005; GAZTANAGA; CABRE; HUI, 2009; BEUTLER et al., 2011; BEUTLER et al., 2012; ALAM et al., 2021; BOURBOUX et al., 2020).
- Idade Diferencial de galáxias (Cronômetros Cósmicos, CCs) (SIMON; VERDE; JIMENEZ, 2005a; STERN et al., 2010; MORESCO et al., 2012; ZHANG et al., 2014; MORESCO, 2015; MORESCO et al., 2016; MORESCO et al., 2022).
- Função de correlação de galáxias vermelhas luminosas (LRG) (COLE et al., 2005; CHUANG; WANG, 2013; OKA et al., 2014).

A compilação com 51 dados de $H(z)$ fornecida por (MAGANA et al., 2018) consiste em 20 dados de clustering (BAO + LRG) e 31 dados de idade diferencial de galáxias. Essa amostra foi utilizada na análise realizada na seção 6.2 e seus resultados foram publicados em (JESUS et al., 2022). Nas análises do Capítulo 5, o conjunto das 31 medidas de CCs foram os dados de $H(z)$ utilizados. Essa amostra, assim como a anterior dos 51 dados, não possuía uma matriz de covariância completa, apenas a diagonal. No trabalho (MORESCO et al., 2022), Moresco e colaboradores determinaram uma amostra com 32 dados de CCs que, além de apresentar uma nova medida, adicionou mais precisão aos dados ao estimar a matriz de covariância da amostra. A amostra proposta por Moresco foi utilizada nas análises realizada nas seções 6.3 e 6.4 e nos Capítulo 7 e 8.

Na Figura 1 está a compilação dos 52 dados do parâmetro de Hubble, os dados em vermelho correspondem aos cronômetros cósmicos e os dados em preto são de clustering. A curva de $H(z)$ para o modelo Λ CDM-plano foi adicionada ao plot.

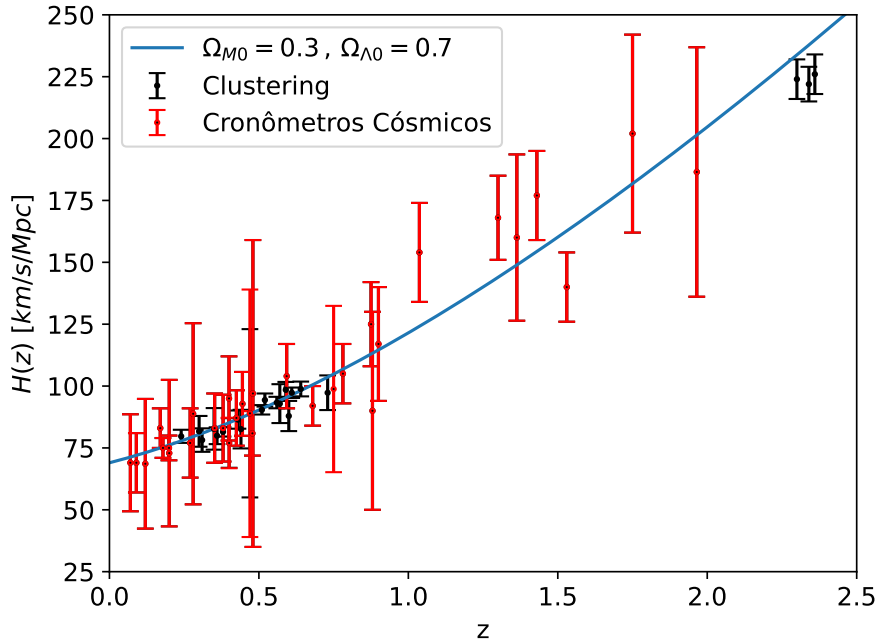


Figura 1 – 52 Dados de $H(z)$, em vermelho os 32 dados de cronômetros cósmicos (MORESCO et al., 2022) e em preto os dados de BAO com Função de correlação de galáxias vermelhas ambas medidas provenientes de clustering (MAGANA et al., 2018). A curva de $H(z)$ para o modelo Λ CDM-plano (imagem própria)

3.1.1 Oscilações Acústicas dos Bárions

Antes de ocorrer a recombinação primordial, o Universo ainda era muito quente e denso e a matéria estava fortemente acoplada à radiação devido ao espalhamento Compton, formando o fluido fóton-bárion. Os elétrons tentavam se acoplar aos bárions, porém eram espalhados pelos fótons, gerando um gradiente de forças no fluido fóton-bárion e originando oscilações que se propagavam como ondas sonoras. As perturbações de densidade que se propagavam como ondas esféricas com diferentes comprimentos de onda eram criadas em diversos pontos fontes que continham matéria escura no centro. Devido à pouca interação com as outras componentes, a matéria escura acabou não se movimentando muito. A onda acústica formada se propagou até o momento em que a temperatura do universo fosse da ordem de TeV, o que levou ao desacoplamento da matéria com a radiação. E, assim, os fótons primordiais começaram a viajar livremente no Universo se tornando o que denominamos CMB. Os bárions e os elétrons puderam formar efetivamente os primeiros átomos de Hidrogênio neutro do Universo. Consequentemente, o acúmulo de matéria bariônica, distribuída esfericamente com relação à fonte da onda que contém os poços de matéria escura, começa a se aglomerar, assim como ocorreu com a matéria escura.

O momento no qual os bárions se libertaram do “arrasto” (em inglês “drag”) causado pelos fótons é denominado “época do arrasto”, que ocorreu em z_d (WEINBERG, 2008). Em (HU; SUGIYAMA,

1996), os autores propõem a estimativa do *redshift* na época do arrasto, z_{drag} , como

$$z_{drag} = \frac{1291(\Omega_m h^2)^{0,251}}{1 + 0,659(\Omega_m h^2)^{0,828}} \left[1 + b_1(\Omega_m h^2)^{b_2} \right], \quad (3.1)$$

onde $b_1 = 0,313[1 + 0,607(\Omega_m h^2)^{0,674}](\Omega_m h^2)^{-0,419}$ e $b_2 = 0,238(\Omega_m h^2)^{0,223}$.

A função de correlação das galáxias apresenta um excesso na escala do horizonte do som no desacoplamento (~ 150 Mpc). Assim, as medidas de BAO são consideradas réguas padrão do Universo (EISENSTEIN et al., 2005; CAMARENA; MARRA, 2018; SILVA; SILVA, 2019), pois é possível estimar a escala do excesso de densidade dos bárions

$$d_z(z) = \frac{r_s(z_{drag})}{D_v(z)}, \quad (3.2)$$

sendo $D_v(z)$ o volume comóvel, escrito como:

$$D_v(z) = \left[(1+z)^2 D_A^2 \frac{z}{H(z)} \right]^{1/3}. \quad (3.3)$$

O numerador de (3.2) é o horizonte do som comóvel r_s , distância percorrida pela onda acústica até o momento do desacoplamento, e é dado por

$$r_s(z_{drag}) = \int_{z_{drag}}^{\infty} \frac{c_s dz}{H(z)}, \quad (3.4)$$

onde c_s é a velocidade do som do fluido fóton-bárion. Podemos calcular c_s a partir do parâmetro R ,

$$R = \frac{3\Omega_b}{4\Omega_\gamma} \frac{1}{1+z}, \quad (3.5)$$

como

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3(1+R)}}. \quad (3.6)$$

3.1.1.1 BAO Radial

A primeira medida do pico acústico do BAO foi obtida por Eisenstein e colaboradores (EISENSTEIN et al., 2005) através de uma função de correlação esférica da média de dois pontos a partir de dados de galáxias vermelhas luminosas compilados pelo Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Esta primeira medição foi uma média entre o chamado BAO transversal (ou angular), σ_{BAO} , medido no plano do céu, e o BAO radial, π_{BAO} , medido ao longo da linha de visada. No entanto, a escala de BAO transversal, que fornece informações diretas sobre a distância angular, não é particularmente útil para determinar a função $H(z)$. Por outro lado, o BAO da linha de visão produz uma medida indireta de $H(z)$ porque está relacionado ao histórico de expansão pela expressão:

$$\pi_{BAO} = \frac{c\Delta z}{H(z)}, \quad (3.7)$$

portanto, os valores de $H(z)$ podem ser inferidos porque π_{BAO} e Δz são determinados observacionalmente.

3.1.2 Função de Correlação de Galáxias Vermelhas Luminosas

As anisotropias presentes nos aglomerados de galáxias fornecem informações importantes sobre os modelos cosmológicos (CHUANG; WANG, 2013; OKA et al., 2014). Essas anisotropias são resultado do efeito de Alcock-Paczynski (ALCOCK; PACZYNSKI, 1979) e do efeito de Distorções do Espaço dos *Redshifts* (do inglês: RDS) (PEEBLES, 1980; HAMILTON, 1998). As medidas são estimadas a partir das Galáxias Vermelhas Luminosas presentes nos atuais grandes *surveys*, como o *Two-degree-Field Galaxy Redshift Survey* (2dFGRS) (COLLESS et al., 2001; COLE et al., 2005), o *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) (AHN et al., 2014), WiggleZ Dark Energy Survey (BLAKE et al., 2009) entre outros, que permitem obter de modo independente da taxa de crescimento linear a distância de diâmetro angular $D_A(z)$ e o $H(z)$ (OKA et al., 2014).

3.1.3 Idades Diferenciais de Galáxias: Crônometros Cósmicos (CCs)

O parâmetro de Hubble $H(z)$ é expresso em termos do *redshift*, utilizando a relação (2.36), como:

$$H(z) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}, \quad (3.8)$$

onde $\frac{dz}{dt}$ é a idade diferencial do universo (D. Stern, 2003; SIMON; VERDE; JIMENEZ, 2005b).

No trabalho de (SIMON; VERDE; JIMENEZ, 2005b) foi criada uma amostra com medidas de $H(z)$ na faixa de *redshift*, $0.01 < z < 1.8$, proveniente das estimativas da idade diferencial de galáxias. Para realizar essas estimativas, Simon e colaboradores (SIMON; VERDE; JIMENEZ, 2005b) montaram amostras com galáxias de evolução passiva com espectroscopia de alta qualidade a partir de um compilado de *surveys* de galáxias, depois realizaram a marginalização sobre a metalicidade e a história da formação estelar, possibilitando a aplicação de modelos sintéticos de população estelar para restringir a idade das estrelas mais antigas presentes na galáxia. Os conjuntos de medidas provenientes da idade diferencial de galáxias é conhecido como cronômetros cósmicos (CCs).

Com base na estimativa dos possíveis erros sistemáticos que podem afetar as medidas de CCs, Moresco e colaboradores buscaram formas de minimizá-los e propagá-los para a matriz de covariância total (MORESCO et al., 2022). De acordo com os autores, as principais fontes de efeitos sistemáticos considerados surgem devido aos erros associados às estimativas de metalicidade das galáxias, à história de formação estelar, à suposição dos modelos de síntese de população estelar e ao efeito rejuvenescedor. A sintetização das fontes de erro sistemático mencionadas adicionou termos fora da diagonal principal da matriz de covariância dos CCs.

Os dados de cronômetros cósmicos com e sem matriz de covariância completa foram as principais medidas de $H(z)$ utilizadas para realizar os vínculos observacionais propostos nesta Tese.

3.2 SUPERNOVAS DO TIPO IA

Uma supernova corresponde a uma explosão estelar extremamente poderosa capaz de liberar uma quantidade incrível de energia, alcançando um brilho temporário que pode ofuscar a galáxia hospedeira (PRITCHET; HOWELL; SULLIVAN, 2008; WOOSLEY; HEGER, 2015). As supernovas são classificadas de acordo com a curva de luz e as linhas de absorção que aparecem em seu espectros, por isso existem diferentes tipos de supernovas (LIVIO; PANAGIA; SAHU, 2001), como as supernovas do tipo I e do tipo II. A principal diferença entre esses grupos de supernovas é a ausência da linha de absorção do hidrogênio nas do tipo I. Todos os tipos de supernovas envolvem uma grande liberação de energia e a expulsão de material estelar a altíssimas velocidades.

Nesta tese foram utilizadas as supernovas do tipo Ia (SNe Ia), pois elas ocorrem em condições específicas e por isso são de grande utilidade na Cosmologia. Uma SNe Ia ocorre quando a massa de uma anã branca, em um sistema binário, tende ao limite de Chandrasekhar devido ao acúmulo de massa absorvida da estrela companheira. Esse processo de acreção empurra a massa da estrela anã branca próxima ao seu limite crítico de estabilidade, que representa a massa máxima que pode ser sustentada pela pressão de degenerescência dos elétrons (Fowler, W. A., 1960). Nessa etapa, a estrela anã branca se torna instável, levando a um aumento significativo na temperatura e densidade de seu núcleo e favorecendo a conversão de elementos como carbono e oxigênio em níquel-56 (^{56}Ni). Esse processo de conversão desencadeia uma explosão termonuclear, resultando em uma supernova, que pode ser detectada a distâncias extremamente distantes, alcançando milhares de megaparsecs.

Uma característica importante das SNe Ia é o valor bem padronizável das suas luminosidades intrínsecas. Quando uma estrela colapsa para originar uma SNe Ia, sua massa está próxima ao limite de Chandrasekhar, resultando em uma quantidade relativamente constante de energia liberada durante a explosão. Essa consistência peculiar torna as SNe Ia indicadoras de distância altamente confiáveis na Cosmologia, pois sua luminosidade absoluta apresenta apenas uma pequena variação (Tammann, G. A., 1982) (SUNTZEFF et al., 1999) (HOFLICH et al., 2003) (para revisões). A variação observada na luminosidade está fortemente correlacionada com o tempo de crescimento e declínio da curva de luz da supernova: quanto mais lento o declínio, maior a luminosidade absoluta (BROWN et al., 2010; HAMUY et al., 1995; RIESS; PRESS; KIRSHNER, 1995; Jha, S. Riess A., 2007). As correlações mencionadas são fundamentais para calibrar as SNe Ia como "*velas padronizáveis*", permitindo a obtenção de resultados que comprovaram a expansão acelerada do Universo e revelaram um pouco da natureza da enigmática energia escura (PERLMUTTER et al., 1999; RIESS et al., 1998). Essas supernovas têm desempenhado um papel fundamental nas pesquisas cosmológicas, proporcionando avanços significativos no entendimento da estrutura e evolução do universo.

A amostra de dados Pantheon (SCOLNIC et al., 2018) será utilizada para realizar os vínculos observacionais com os dados de SNe Ia no Capítulo 5 e na seção 6.2. Este conjunto de dados engloba 279 SNe Ia da Pesquisa Profunda Média Pan-STARRS1 (PS1) ($0,03 < z < 0,68$), combinada com estimativas de distância de SNe Ia do SDSS (Sloan Digital Sky Survey), SNLS e as amostras do Telescópio Espacial Hubble. Essa amostra combinada possui um total de 1048 medidas de SNe Ia, na faixa de $0,01 < z < 2,3$. Os dados de magnitude aparente, m_B , estão apresentados na (Figura 2) em conjunto com a curva de m_B para o modelo Λ CDM-plano.

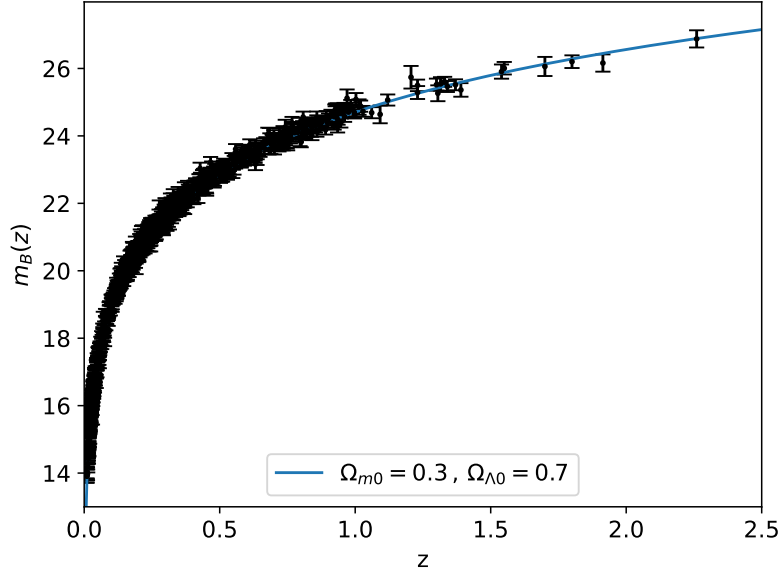


Figura 2 – Dados de da magnitude aparente m_B da amostra Pantheon, com a curva de m_B para o modelo Λ CDM-plano

Na seção 6.3 e 6.4 e nos Capítulos 7 e 8 as medidas de SNe Ia utilizadas são provenientes da amostra Pantheon + (BROUT et al., 2022), que consiste em 1701 curvas de luz de 1550 SNe Ia distintos, na faixa de *redshift* $0,001 < z < 2,26$. Também foi utilizada a amostra Pantheon +SH0ES, onde foram adicionadas as medidas do SH0ES a amostra Pantheon +. As magnitudes aparentes da amostra Pantheon+ são apresentadas na Figura 3 em conjunto com a curva de m_B para o modelo Λ CDM-plano.

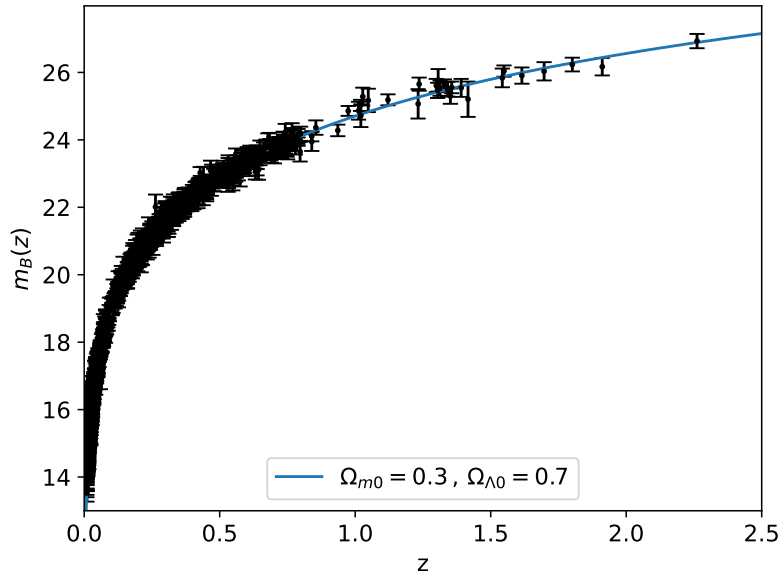


Figura 3 – Dados de da magnitude aparente m_B da amostra Pantheon+, com a curva de m_B para o modelo Λ CDM-plano

3.3 RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO EM MICRO-ONDAS

Os fótons presentes no universo primordial começaram a desacoplar da matéria quando a temperatura do universo era da ordem de 10^3 K, época da recombinação. Após essa época, em $z \sim 1000$, os fótons primordiais que deixaram a última superfície de espalhamento começaram a viajar livremente pelo universo, formando a radiação cósmica de fundo. O espectro da CMB é muito bem definido (AGHANIM et al., 2020), exibindo uma temperatura de cerca de 2,73 K em todas as direções observadas a menos de anisotropias de 1 parte em 10^5 , o que confirma a suposição de isotropia do universo em grandes escalas.

A partir do espectro de potência de CMB, podemos extrair algumas quantidades importantes (*priors* de distância) que podem nos auxiliar nos vínculos dos modelos. Uma dessas quantidades é o *shift parameter* (BOND; EFSTATHIOU; TEGMARK, 1997; CHEN; HUANG; WANG, 2019). O *shift parameter* $\mathcal{R}$ é dado por

$$\mathcal{R} = \sqrt{\Omega_m H_0^2} r(z_*), \quad (3.9)$$

de acordo com (HU; SUGIYAMA, 1996), o *redshift* no desacoplamento, z_* , é expresso por:

$$z_* = 1048 \left[1 + 0,00124(\Omega_b h^2)^{-0,738} \right] \left[1 + g_1(\Omega_m h^2)^{g_2} \right], \quad (3.10)$$

com

$$g_1 = \frac{0,0738(\Omega_b h^2)^{-0,238}}{1 + 39,5(\Omega_b h^2)^{-0,763}}, \quad g_2 = \frac{0,560}{1 + 21,1(\Omega_b h^2)^{1,81}}. \quad (3.11)$$

O horizonte comóvel calculado em z_* é dado por

$$r(z_*) = (1 + z_*) d_A(z_*). \quad (3.12)$$

sendo d_A a distância de diâmetro angular. O segundo parâmetro para análise de CMB é a escala acústica ℓ_a , que determina a escala angular comóvel do horizonte do som

$$\ell_a = \frac{\pi r(z_*)}{r_s(z_*)}. \quad (3.13)$$

O interessante de se utilizar essas quantidades para vincular modelos cosmológicos é que diferentes modelos terão praticamente o mesmo espectro de potência de CMB se possuírem o mesmo valor das quantidades $\omega_b = \Omega_b h^2$, $\omega_c = \Omega_c h^2$, $\mathcal{R}$ e ℓ_a (ELGARROY; MULTAMAKI, 2007). A utilização dos *priors* de distância permite a realização de uma análise inicial da CMB sem a necessidade de utilizar a teoria de perturbação. Mas é importante ressaltar que o valor dessas quantidades depende fortemente do modelo cosmológico utilizado para obter o espectro de potência da CMB.

3.4 DISTORÇÃO NO ESPAÇO DOS *REDSHIFTS*

Medidas da distorção no espaço dos *redshifts* (RSD) estão relacionadas às velocidades peculiares das galáxias, podendo, portanto, serem relacionadas à taxa de crescimento das perturbações cosmológicas sobre um intervalo de *redshifts* e em diferentes escalas (KAISER, 1987).

Uma quantidade que foi muito usada para vincular os modelos cosmológicos é a taxa de crescimento linear f , dada por:

$$f(a) = \frac{d \ln \delta(a)}{d \ln a}, \quad (3.14)$$

onde $\delta = \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}}$ é o contraste de densidade e $\bar{\rho}$ é a densidade de *background*. Porém, foi mostrado que uma quantidade mais interessante para vincular os modelos é $f\sigma_8$, por ser independente do *bias* entre a distribuição de galáxias e da matéria e não necessitar do conhecimento de σ_8 , que é a amplitude das flutuações de matéria em esferas de raio $8h^{-1}$ Mpc.

É importante lembrar que tanto a taxa de crescimento linear f quanto o σ_8 , que aparecem em $f\sigma_8$, são dependentes de *redshift* (ou do fator de escala a), com f dado por (3.14) e $\sigma_8(a)$ dado por:

$$\sigma_8(a) = \sigma_8 \frac{\delta(a)}{\delta(1)}. \quad (3.15)$$

Combinando, então (3.14), e (3.15), temos:

$$f\sigma_8(a) = a\sigma_8 \frac{\delta'(a)}{\delta(1)}, \quad (3.16)$$

onde o contraste de densidade δ é obtido a partir do modelo cosmológico específico que está sendo estudado.

Um grande conjunto de dados de $f\sigma_8$ foi compilado em (SKARA; PERIVOLAROPOULOS, 2020) com 66 dados, que foram estimados a partir de diferentes *surveys* e obtidos a partir de diferentes modelos cosmológicos fiduciais. Esse conjunto de dados é apresentado na Figura 4 com curva de $f\sigma_8$ para o modelo Λ CDM-plano. Os modelos cosmológicos fiduciais são necessários para fazer a conversão dos ângulos e *redshifts* medidos para coordenadas comóveis de modo a construir a função de correlação e o espectro de potência correspondentes. A escolha de um modelo fiducial leva também a uma anisotropia no espectro de potência da matéria assim como as RSDs, o que é conhecido como efeito Alcock-Paczynski (ALCOCK; PACZYNSKI, 1979).

Esse efeito precisa ser corrigido se quisermos usar uma compilação completa com diferentes modelos fiduciais, como o que é apresentado em (KAZANTZIDIS; PERIVOLAROPOULOS, 2018). (MACAULAY; WEHUS; ERIKSEN, 2013; KAZANTZIDIS; PERIVOLAROPOULOS, 2018) argumentam que uma forma de corrigir esse efeito é através da relação aproximada

$$f\sigma_8(z) \approx \frac{H(z)D_A(z)}{H'(z)D'_A(z)} f\sigma'_8(z) \equiv q(z, \theta, \theta') f\sigma'_8(z). \quad (3.17)$$

Onde H é o parâmetro de Hubble, D_A é a distância de diâmetro angular, q é o fator de correção, θ representa os parâmetros do modelo e as quantidades com linha se referem a um modelo fiducial incorreto e as sem linha se referem ao modelo “verdadeiro”.

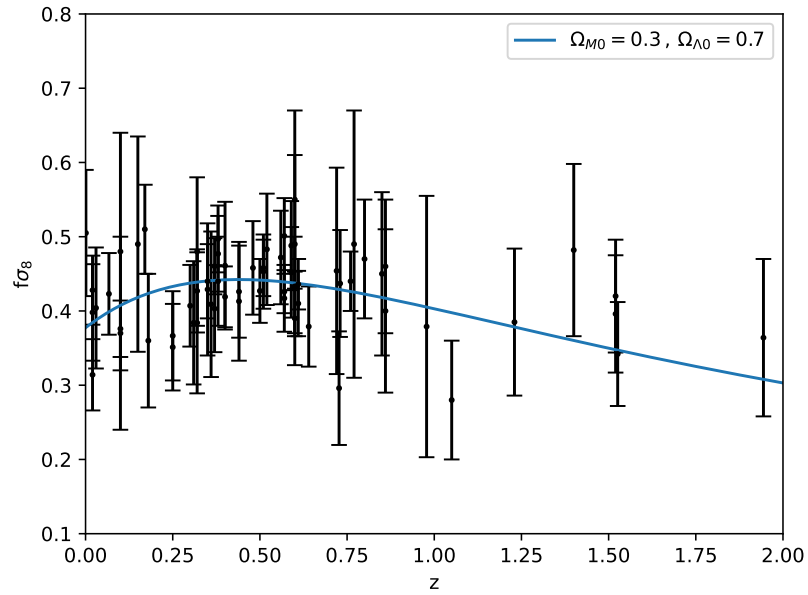


Figura 4 – Dados de $f\sigma_8$. Com a curva de $f\sigma_8$ para o modelos Λ CDM-plano.

4 ANÁLISES E MÉTODOS ESTATÍSTICOS

As novas amostras de dados permitiram a determinação dos parâmetros cosmológicos com muita precisão, levando ao surgimento de tensões Cosmológicas de caráter estatístico entre as estimativas obtidas com os dados do Universo tardio e do Universo primordial. Possíveis erros sistemáticos nos experimentos podem criar parte dessas discrepâncias, porém, devido à perseverança e à ordem de magnitude dessas tensões, a possibilidade de uma falha no modelo padrão de cosmologia se torna cada vez maior, o que introduz a necessidade da elaboração de uma nova física para resolver os problemas.

A era da Cosmologia de precisão desencadeou uma corrida pelo aprimoramento das técnicas de análises estatísticas para obter resultados cada vez mais precisos. Neste Capítulo, exploraremos as ferramentas utilizadas para realizar as análises estatísticas nos modelos estudados (GELMAN A., 2013). Como veremos, essas análises serão de grande importância nos resultados obtidos nos próximos Capítulos, em que iremos vincular os modelos cosmológicos propostos aos dados observacionais para limitar os parâmetros livres. Com base apenas nos dados observacionais, buscaremos determinar as quantidades cosmológicas de interesse a partir da amostra de dados, de forma independente de modelo cosmológico, utilizando métodos estatísticos não paramétricos para reconstruir as funções de interesse. É importante destacar que essas análises possuem uma aplicação abrangente, podendo ser utilizadas em diversas áreas de pesquisa que lidam com análise de dados, como por exemplo na Genética (STEPHENS; SMITH; DONNELLY, 2001) onde foi utilizado métodos bayesianos para inferir haplótipos em genética populacional, na Neurociência em (DOYA et al., 2006) em que os autores analisaram o uso de estatística bayesiana para modelar como o cérebro codifica informações e toma decisões sob incerteza.

4.1 AJUSTE DE χ^2

A fim de realizar a análise dinâmica em nível de *background* de um dado modelo cosmológico, devemos resolver os sistemas de equações diferenciais formados pela equação da continuidade (2.28) e pelas equações de Friedmann (2.23) e (2.24). Com base na solução obtida, podemos construir quantidades cosmológicas que, além de depender do *redshift*, possuem uma dependência nos parâmetros livres, θ_i , do modelo estudado. Isso ocorre com $H(z, \theta_i)$ e $D_C(z, \theta_i)$, por exemplo, o que possibilita vincular o valor teórico dessas quantidades com o seu valor observacional. Essas etapas são necessárias para podermos determinar qual conjunto de parâmetros livres é capaz de reproduzir melhor as observações, ou seja, quais valores dos parâmetros livres melhor descrevem o conjunto de dados utilizados.

Para vincular um modelo Cosmológico que possui um conjunto θ_j de parâmetros livres a uma amostra de dados, $C = (z_i, M_{obs}(z_i))$, composta por N medidas observacionais de uma determinada quantidade $M_{obs}(z_i)$ ¹, é necessário determinar o conjunto de parâmetros livres θ_j que melhor descreva a amostra C . Para isso, utilizaremos os estimadores de máxima verossimilhança. Considerando que as medidas de $M_{obs}(z_i)$ possuam um erro independentemente aleatório e distribuído normalmente em

¹ Poderiam ser medidas $H(z)$ ou $D_C(z)$

torno da previsão do modelo, $M_{mod}(z_i)$, além disso, que cada ponto possui desvio padrão $\sigma_{M_{obs}}(z_i)$, temos então que a probabilidade de conjunto dos dados é o produto das probabilidades de cada ponto,

$$P \propto \prod_{i=1}^N \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{M_{obs}(z_i) - M_{mod}(z_i)}{\sigma_{M_{obs}}(z_i)} \right)^2 \right] \Delta M \right\}, \quad (4.1)$$

o termo ΔM , foi adicionado para indicar uma pequena variação em torno dos possíveis valores de M_{obs} . Para obter a maior probabilidade, devemos maximizar a expressão (4.1), ou de forma equivalente, minimizar o logaritmo negativo de (4.1), dado por:

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{(M_{obs}(z_i) - M_{mod}(z_i))^2}{2\sigma_{M_{obs}}^2(z_i)} \right] - N \log \Delta M. \quad (4.2)$$

Sendo ΔM e N constantes, a minimização de (4.2) corresponde a minimizar o termo

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \left[\frac{(M_{obs}(z_i) - M_{mod}(z_i))^2}{\sigma_{M_{obs}}^2(z_i)} \right], \quad (4.3)$$

onde definimos a quantidade χ^2 . Quando o conjunto de dados observacionais possui uma matriz de covariância não diagonal, C , o χ^2 toma a forma:

$$\chi^2 = [M_{obs}(z_i) - M_{mod}(z_i)]^T C^{-1} [M_{obs}(z_i) - M_{mod}(z_i)]. \quad (4.4)$$

Então, o conjunto θ_i de parâmetros livres que maximiza P deve minimizar o χ^2 .

Mesmo com o aumento expressivo no numero de dados observacionais, o conjunto total de dados ainda é bem limitado em comparação aos dados obtidos em experimentos de laboratório. Devido a essa situação, torna se interessante utilizar a estatística Bayesiana para explorar a função de verossimilhança. Para encontrar a distribuição de probabilidade $p(\theta_i|C)$ (posterior) associada a um modelo cosmológico com θ_i parâmetros livres, com base no conjunto de dados C , vamos utilizar os conceitos da estatística Bayesiana que é formulada a partir do Teorema de Bayes (W. H. Press S. A. Teukolsky, 1992; GELMAN A., 2013). O Teorema de Bayes permite calcular a probabilidade de um evento levando em consideração informações prévias sobre as condições que podem estar relacionadas a esse evento, ou seja, a probabilidade condicionada $P(A|B)$ do evento A ocorrer caso o evento B ocorra é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}. \quad (4.5)$$

Nesse teorema, $P(A)$ é a “probabilidade a priori” mais comumente chamada de “prior” que, por sua vez, representa as informações prévias sobre o evento A . A função de probabilidade $P(B)$ é denominada probabilidade marginal, que representa uma marginalização e carrega as informações previas sobre B . $P(B|A)$ é a probabilidade condicionada do evento B ocorrer tendo ocorrido o evento A .

A probabilidade P a ser maximizada, de acordo com Teorema de Bayes, é reescrita como

$$P(\theta_i|C) = \frac{\mathcal{L}(C|\theta_i) \pi(\theta_i)}{p(C)}. \quad (4.6)$$

A probabilidade condicionada, $\mathcal{L}(C|\theta_i)$, é denominada função de verossimilhança (em inglês, *likelihood*), sendo $\pi(\theta_i)$ o prior e a $p(C)$, que é a probabilidade marginal ou a evidência Bayesiana, que atua como uma constante de normalização, dada por:

$$p(C) = \int \mathcal{L}(C|\theta_i) \pi(\theta_i) d\theta. \quad (4.7)$$

Vemos que a probabilidade marginal não depende dos parâmetros livres, pois resulta da integração de $\mathcal{L}(C|\theta_i) \pi(\theta_i)$ sobre o conjunto θ . Assim, para maximizar a posterior, devemos maximizar a função de verossimilhança. De acordo com o trabalho (W. H. Press S. A. Teukolsky, 1992), supomos que:

$$\chi^2 = -2 \ln(K\mathcal{L}), \quad (4.8)$$

sendo K uma constante.

Uma propriedade interessante da estatística Bayesiana é a marginalização da função de verossimilhança sobre algum parâmetro que não estejamos interessados em analisar. Basta fazer a integração da função $\mathcal{L}(C|\theta_i)$ em relação ao parâmetro θ_i que não será analisado

$$\bar{\mathcal{L}} = \int \mathcal{L}(C|\theta_i) \pi(\theta_i) d\theta_i. \quad (4.9)$$

Uma forma simples e eficiente de testar a qualidade do ajuste obtido é comparar o valor mínimo obtido para o χ^2 com o número ν de graus de liberdade do sistema, onde ν é a diferença entre o número de dados da amostra e a quantidade de parâmetros livres do modelo. Quando o valor mínimo do χ^2 é próximo do número de graus de liberdade η , ou seja, $\chi^2 \sim \nu$, obtemos um ajuste razoavelmente bom (VUOLO, 1996).

As estimativas das incertezas dos parâmetros do modelo ajustado podem ser realizadas utilizando os níveis de χ^2 como uma boa aproximação. As chamadas regiões ou intervalos de confiança no espaço de parâmetros correspondem a uma certa fração da distribuição total. Portanto, cada nível de confiança $\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{min}^2$ corresponde à probabilidade dos parâmetros estarem dentro da região delimitada pelo dado nível (W. H. Press S. A. Teukolsky, 1992). Na tabela 1 estão exibidos alguns valores do $\Delta\chi^2$ em função dos graus de liberdade.

Nível de Confiança	Graus de Liberdade (ν)					
	1	2	3	4	5	6
68,3% (1σ)	1,00	2,30	3,53	4,72	5,89	7,04
95,4% (2σ)	4,00	6,18	8,02	9,72	11,31	12,85
99,7% (3σ)	9,00	11,83	14,16	16,25	18,21	20,06

Tabela 1 – Valores de $\Delta\chi^2$ para diferentes níveis de confiança e graus de liberdade ν

4.1.1 Análise dos Dados de $H(z)$

Como os 51 dados de $H(z)$, provenientes dos cronômetros cósmicos e clustering, possuem incerteza dada por uma matriz de covariância diagonal, o χ^2 é dado por

$$\chi_{H(z)}^2 = \sum_{i=1}^{51} \frac{[H_{obs,i} - H(z_i, \theta)]^2}{\sigma_{H_i,obs}^2}. \quad (4.10)$$

O conjunto com 51 dados foi usado apenas em um estudo que será discutido na seção 6.2. Nas demais análises, foram utilizados apenas os dados de CCs devido ao fato dessa amostra não possuir dependência com o modelo cosmológico de fundo. No caso dos 31, o $\chi_{H(z)}^2$ mantém a sua forma, somente alterando os dados $H_{obs,i}$.

Com a amostra disponibilizada por (MORESCO et al., 2022), devido à inclusão dos efeitos sistemáticos, os dados de CCs passaram a ter uma matriz de covariância completa, $C_{CCs_{ij}}$, dada por:

$$C_{CCs_{ij}} = C_{ij}^{Est} + C_{ij}^{Sist}, \quad (4.11)$$

sendo C_{ij}^{Est} os erros estatísticos e C_{ij}^{Sist} os erros sistemáticos. O erro sistemático é escrito como

$$C_{ij}^{Sist} = C_{ij}^{met} + C_{ij}^{HFE} + C_{ij}^{SPE} + C_{ij}^{EREJ}, \quad (4.12)$$

onde C_{ij}^{met} são os erros associados as estimativas de metalicidade das galáxias, C_{ij}^{HFE} correspondem aos erros devido a incerteza da historia de formação estelar, C_{ij}^{SPE} contabiliza os erros na suposição dos modelos de síntese de população estelar e C_{ij}^{EREJ} são os erros devido ao efeito rejuvenescedor.

Uma nova medida foi adicionada à amostra de $CCs_{obs}(z_i)$, agora composta por 32 medidas de CCs que possuem uma matriz de covariância completa, $C_{CCs_{ij}}$. Nesse contexto, o χ_{CCs}^2 toma a forma dada em (4.4), sendo escrito como

$$\chi_{CCs}^2 = [CCs_{obs}(z_i) - CCs_{mod}(z_i)]^T C_{CCs_{ij}}^{-1} [CCs_{obs}(z_i) - CCs_{mod}(z_i)]. \quad (4.13)$$

Para os dados do BAO (CAMARENA; MARRA, 2018) descritos na seção (3.1.1), é utilizado o parâmetro teórico $\alpha^*(z)$, escrito como

$$\alpha^*(z) = \frac{D_C(z)}{r_s(z_d)} r_s^{fid}, \quad (4.14)$$

sendo r_s^{fid} o horizonte do som comóvel para o modelo Λ CDM-plano. As medidas de $\alpha^*(z)$ (CAMARENA; MARRA, 2018) possuem uma matriz de covariância C_{BAO} , sendo assim, o χ_{BAO}^2 é

$$\chi_{BAO}^2 = (\alpha_{obs,i}^* - \alpha^*(z_i, \theta))^T C_{BAO}^{-1} (\alpha_{obs,i}^* - \alpha^*(z_i, \theta)). \quad (4.15)$$

4.1.2 Análise dos Dados de SNe Ia

Os parâmetros de ajuste de curva de luz SALT2 (GUY et al., 2007) são transformados em distâncias usando uma versão modificada da fórmula de Tripp (TRIPP, 1998)

$$\mu = m_B - M + \alpha x_1 - \beta c + \Delta_M + \Delta_B, \quad (4.16)$$

onde μ é o módulo de distância, x_1 é o parâmetro de forma da curva de luz, c é o parâmetro que descreve a cor, Δ_M é uma correção de distância baseada na massa da galáxia hospedeira da SN, e Δ_B é uma correção de distância baseada nos vieses previstos pelas simulações. Vemos que α é o coeficiente da relação entre luminosidade e alongamento, enquanto β é o coeficiente da relação entre luminosidade e cor, e M é a magnitude absoluta na banda B de uma SNe Ia com $x_1 = 0$ e $c = 0$.

Para SNe Ia do Pantheon, temos a probabilidade $\mathcal{L}_{SN} \propto e^{-\frac{\chi_{SN}^2}{2}}$, onde

$$\chi_{SNe}^2 = \Delta \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{m}, \quad (4.17)$$

sendo $\mathbf{C}$ a matriz de covariância e $\Delta \mathbf{m} = m_B - m_{\text{mod}}$, com a magnitude aparente dada por

$$m_{\text{mod}} = 5 \log_{10} D_L(z) + \mathcal{M}, \quad (4.18)$$

em que $\mathcal{M}$ é um parâmetro que depende de H_0 e M . Como $\mathcal{M}$ é uma constante aditiva, fazer a projeção da *likelihood* $\mathcal{L} \propto e^{-\chi^2/2}$ sobre $\mathcal{M}$ é equivalente a marginalizar a *likelihood* sobre $\mathcal{M}$, o que nos leva ao resultado

$$\chi_{proj}^2 = S_{mm} - \frac{S_m^2}{S_A}, \quad (4.19)$$

com $S_{mm} = \sum_{i,j} \Delta m_i \Delta m_j A_{ij} = \Delta \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{m}$, $S_m = \sum_{i,j} \Delta m_i A_{ij} = \Delta \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{1}$, $S_A = \sum_{i,j} A_{ij} = \mathbf{1}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{1}$ sendo $\mathbf{A} \equiv \mathbf{C}^{-1}$.

4.1.3 Análise da Radiação Cósmica de Fundo

Para a análise da CMB, optamos pela utilização dos priors do “shift parameter”(AGHANIM et al., 2020), que está relacionado com a posição do primeiro pico acústico no espectro de potência das anisotropias CMB, e com a escala acústica e o parâmetro de densidade da matéria bariônica, $(R, \ell_A, \Omega_b h^2)$, respectivamente, conforme descrito por (CHEN; HUANG; WANG, 2019). Trabalhamos com os priors vindos de Planck (2018) (AGHANIM et al., 2020), conforme indicado pela Tabela 1 de (CHEN; HUANG; WANG, 2019). A temperatura da CMB e a densidade de radiação foram fixadas em (FIXSEN, 2009). Nesse caso, o χ^2 toma a forma:

$$\chi_{CMB}^2 = ((R, \ell_A, \Omega_b h^2)_{obs} - (R, \ell_A, \Omega_b h^2)_\theta)^T C_{CMB}^{-1} ((R, \ell_A, \Omega_b h^2)_{obs} - (R, \ell_A, \Omega_b h^2)_\theta), \quad (4.20)$$

onde C_{CMB} é a matriz de covariância dos priors de distância, $(R, \ell_A, \Omega_b h^2)_{obs}$ são as medidas observacionais e $(R, \ell_A, \Omega_b h^2)_\theta$ representa o valor teórico dessas quantidades.

4.1.4 Método Numérico

Para obter as restrições sobre os parâmetros livres, nós amostramos as probabilidades $\mathcal{L}_i$, separadamente e combinadas através da análise de Monte Carlo Markov Chain (MCMC). Um método MCMC (Goodman; Weare, 2010b) simples e poderoso é o chamado Ensemble Invariante Afim, que foi implementado na linguagem Python com o software `emcee` por (FOREMAN-MACKEY et al., 2013). Este método MCMC tem a vantagem sobre os métodos simples de Metropolis-Hastings (MH) por depender apenas de um parâmetro de escala da distribuição de proposta e do número de walkers, enquanto os métodos de MH, em geral, dependem da matriz de covariância do parâmetro, isto é, dependem em $n(n+1)/2$ parâmetros de ajuste, onde n é a dimensão do espaço de parâmetros.

A ideia principal do método invariante afim de Goodman-Weare (Goodman; Weare, 2010b) é o “movimento de stretch”, onde a posição (vetor de parâmetros no espaço de parâmetros) de um walker (cadeia) é determinada pela posição dos outros walkers. Em (FOREMAN-MACKEY et al., 2013) Foreman-Mackey e colaboradores modificaram esse método a fim de torná-lo adequado para a paralelização dividindo os walkers em dois grupos, sendo que a posição de um walker em um grupo é determinada somente pela posição de walkers do outro grupo ².

Usamos o software disponível publicamente `emcee` para amostrar a nossa probabilidade no espaço dos parâmetros n -dimensional e utilizamos um prior plano sobre os parâmetros.

A convergência das cadeias foi testada usando o tempo de autocorrelação (τ) fornecido pelo software `emcee`. Consideramos a convergência quando $n_{\text{step}} \gg \tau$, onde n_{step} é o número de passos do MCMC, de acordo com os critérios sugeridos pela documentação do `emcee` ³. Encontramos $n_{\text{step}} > 50\tau$ para todos os parâmetros livres dos modelos cosmológicos analisados nos Capítulos 5, 6 e 7.

Para plotar todas as restrições em cada modelo na mesma Figura, usamos o software disponível publicamente `getdist` ⁴.

4.2 PROCESSOS GAUSSIANOS

Como vimos no Capítulo anterior, os dados observacionais desempenham um papel fundamental na cosmologia, pois nos revelam características essenciais do Universo em que vivemos, como o seu conteúdo material, como ele está distribuído e qual a forma do espaço-tempo (WEINBERG, 2008). Eles representam a base empírica sobre a qual construímos nossa compreensão do Universo, permitindo testar e validar os modelos teóricos, determinar valores para os parâmetros livres, construir cenários cosmológicos consistentes e alcançar uma compreensão mais precisa da natureza e da evolução do cosmos.

Podemos obter informações sobre o universo sem a necessidade de um modelo cosmológico parametrizando as funções analisadas. O método chamado Processos Gaussianos (GP, do inglês Gaussian Process) (RASMUSSEN; WILLIAMS, 2005; SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012; JESUS

² Veja (ALLISON; DUNKLEY, 2014) para uma comparação entre várias técnicas de amostragem MCMC.

³ <<https://emcee.readthedocs.io/en/stable/>>

⁴ `getdist` faz parte do grande amostrador MCMC e do solucionador de espectro de potência de CMB COSMOMC, por (LEWIS; BRIDLE, 2002).

et al., 2020; JESUS et al., 2022; JESUS et al., 2024) permite realizar a reconstrução de uma função e suas derivadas a partir de uma amostra de dados que representem essa função. Por exemplo, para uma amostra $\mathbf{A}$ com N dados de um determinado observável cosmológico, temos

$$\mathbf{A} = \{(x_i, y_i)\}, i = 1, \dots, N. \quad (4.21)$$

Vamos encontrar uma função $f(x)$, reconstruída a partir dos Processos Gaussianos, que melhor se ajuste aos dados. Para isso, utilizaremos um conjunto de entradas de treinamento, $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_N)$, formado pelas entradas x_i da amostra de dados. As reconstruções da função são alojadas na entrada $\mathbf{X}^*$. Uma distribuição de probabilidade Gaussiana descreve a distribuição de uma variável aleatória, enquanto os GP descreve uma distribuição de funções ao invés de uma variável aleatória apenas, sendo assim, os Processos Gaussianos são uma generalização da distribuição Gaussiana.

Suponha que temos uma função $f(x)$ gerada a partir dos GP. O valor de $f(x_i)$ em um determinado ponto x_i é uma variável aleatória gaussiana com média $\mu(x_i)$ e variância $\text{Var}(x_i)$. É importante notar que o valor de f em um ponto x_i está correlacionado com outro valor de f em ponto x_j . Quanto mais próximos os pontos estão maior é a correlação entre eles. É necessário definir a função de correlação $\text{cov}(f(x_i), f(x_j)) = k(x_i, x_j)$ entre os pontos x_i e x_j . Portanto, as grandezas fundamentais para descrever a distribuição de funções no GP são:

$$\mu(x_i) = \langle f(x_i) \rangle, \quad (4.22)$$

$$k(x_i, x_j) = \langle (f(x_i) - \mu(x_i))(f(x_j) - \mu(x_j)) \rangle, \quad (4.23)$$

$$\text{Var}(x_i) = k(x_i, x_i). \quad (4.24)$$

e então para o GP, temos

$$f(x_i) \sim \mathcal{GP}(\mu(x_i), k(x_i, x_j)). \quad (4.25)$$

Em (JESUS et al., 2020), foi constatado que as reconstruções do parâmetro de desaceleração $q(z)$ obtidas através de diferentes funções de correlação apresentaram resultados semelhantes. A função de correlação Quadrado Exponencial, em especial, forneceu as reconstruções mais suaves. Com base nesse resultado, optaremos pelo uso da função de correlação Quadrado Exponencial, definida como:

$$k(x_i, x_j) = \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{(x_i - x_j)^2}{2l^2} \right], \quad (4.26)$$

sendo σ_f e l os denominados hiperparâmetros do GP.

Os hiperparâmetros σ_f e l são otimizados para os dados observados maximizando o logaritmo da likelihood marginalizada (RASMUSSEN; WILLIAMS, 2005; SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012;

JESUS et al., 2020):

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{L} &= \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \sigma_f, l) = \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T [K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C]^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2} \ln |K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C| - \frac{n}{2} \ln 2\pi, \quad (4.27)\end{aligned}$$

onde $K(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ é a matriz de covariância com componentes $k(x_i, x_j)$, $\mathbf{y}$ é o vetor de dados, C é a matriz de covariância dos dados e n é o número de dados. Após otimizar σ_f e l , a função reconstruída $\mathbf{f}^*$ nos pontos escolhidos $\mathbf{X}^*$ é dada por

$$\langle \mathbf{f}^* \rangle = \boldsymbol{\mu}^* + K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})[K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C]^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}), \quad (4.28)$$

com

$$\text{cov}(\mathbf{f}^*) = K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*) - K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})[K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C]^{-1}K(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*). \quad (4.29)$$

4.2.1 Reconstruindo a Derivada de uma Função

Como quantidades cosmológicas de interesse geralmente estão escritas em termo das derivadas de funções fundamentais, como o parâmetro de Hubble ou a distancia comóvel transversal, por exemplo, o parâmetro de desaceleração $q(z)$ dado por (9.5) pode ser escrito, no contexto de um universo plano, como:

$$q(z) = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)H^2} = (1+z)\frac{H'}{H} - 1 = -(1+z)\frac{D_C''}{D_C'} - 1. \quad (4.30)$$

Evidentemente, não basta apenas reconstruir a função que descreva os dados observacionais, como $H(z)$ ou $D_C(z)$, é necessário obter suas derivadas. A derivada de um Processo Gaussiano também é um Processos Gaussiano (RASMUSSEN; WILLIAMS, 2005; SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012; JESUS et al., 2020). É preciso incluir na análise uma covariância entre a função reconstruída e cada uma de suas derivadas, e entre as próprias derivadas. Como a covariância entre os pontos, $k(x_i, x_j)$ continua a mesma, as covariâncias adicionais são obtidas através da derivada de $k(x_i, x_j)$, sendo a covariância entre a função e a primeira derivada dada por

$$\text{cov}\left(f(x_i), \frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial k(x_i, x_j)}{\partial x_j}. \quad (4.31)$$

De forma análoga, a covariância entre as derivadas são

$$\text{cov}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 k(x_i, x_j)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (4.32)$$

Caso forem reconstruídas as derivadas de ordem superior, o procedimento para obtenção da covariância entre as reconstruções segue da mesma forma. Assim, para as reconstruções via GP, de forma geral,

temos

$$f(x_i) \sim \mathcal{GP}(\mu(x_i), k(x_i, x_j)), \quad (4.33)$$

$$f'(x_i) \sim \mathcal{GP}\left(\mu'(x_i), \frac{\partial^2 k(x_i, x_j)}{\partial x_i \partial x_j}\right), \quad (4.34)$$

$$f''(x_i) \sim \mathcal{GP}\left(\mu''(x_i), \frac{\partial^4 k(x_i, x_j)}{\partial^2 x_i \partial^2 x_j}\right), \quad (4.35)$$

$$f'^N(x_i) \sim \mathcal{GP}\left(\mu'^N(x_i), \frac{\partial^{2N} k(x_i, x_j)}{\partial^N x_i \partial^N x_j}\right). \quad (4.36)$$

4.2.2 Combinando $f(x)$ e suas Derivadas

Podemos, além de reconstruir uma função $f(x)$ e suas derivadas, reconstruir uma função $g(f(x), f'(x), \dots)$ que seja uma combinação delas. Para isso, precisamos conhecer a covariância entre a função $f(x)$ e suas derivadas $f^* = f(x^*)$ em cada ponto onde g será reconstruída. Essas covariâncias são dadas por:

$$\text{cov}(f^{*(i)}, f^{*(j)}) = k^{(i,j)}(x^*, x^*) - K^{(i)}(x^*, \mathbf{X})[K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C]^{-1} K^{(j)}(\mathbf{X}, x^*), \quad (4.37)$$

onde $f^{*(i)}$ é a i -ésima derivada de f^* e $k^{(i,j)}(x^*, x^*)$ significa que $k(x^*, x^*)$ é derivado i vezes em relação ao primeiro argumento e j vezes em relação ao segundo argumento.

4.2.3 Reconstrução dos Dados Observacionais

Aqui vamos aplicar os Processos Gaussianos para reconstruir o parâmetro de Hubble utilizando os dados de $H(z)$ e a distância comóvel transversal adimensional D_C será reconstruída com bases nos dados de Sne Ia. A obtenção numérica das reconstruções é realizada utilizando o pacote GaPP⁵.

Reconstruímos o parâmetro cinemático $q(z)$ em (JESUS et al., 2020) para obter o *redshift* de transição, z_t , utilizando a amostra Pantheon (SCOLNIC et al., 2018) e os 51 dados de $H(z)$ (MAGANA et al., 2018). Já em (JESUS et al., 2022), reconstruímos uma quantidade cosmológica dinâmica, que veremos com mais detalhes na seção 4.2.3, corresponde ao potencial associado a um campo escalar que desempenha o papel de energia escura, onde utilizamos os 31 dados de CCs (MAGANA et al., 2018) e a amostra Pantheon (SCOLNIC et al., 2018). A análise das relações de consistência para alguns modelos cosmológicos, com base nos 32 dados de CCs e na amostra Pantheon+, abordada na seção 8, teve seus resultados publicados em (JESUS et al., 2023) e a reconstrução dos parâmetros cinemáticos que será discutida na seção 9 foi publicada em (JESUS et al., 2024).

4.2.3.1 Reconstrução de $H(z)$

Para reconstruir o parâmetro de Hubble $H(z)$ e suas derivadas, independente de modelo cosmológico, utilizaremos os Processos Gaussianos com base nos dados de cronômetros cósmicos. A reconstrução obtida a partir da amostra com 31 (MAGANA et al., 2018) é apresentada na Figura 5, ela foi plotada com um intervalo de confiança de 2σ e a amostra de dados utilizada foi adicionada ao plot. Essa reconstrução foi utilizada nas análises do Capítulo 5.

⁵ GaPP está atualmente disponível no repositório auxiliar <<https://github.com/carlosandrepaes/GaPP>>

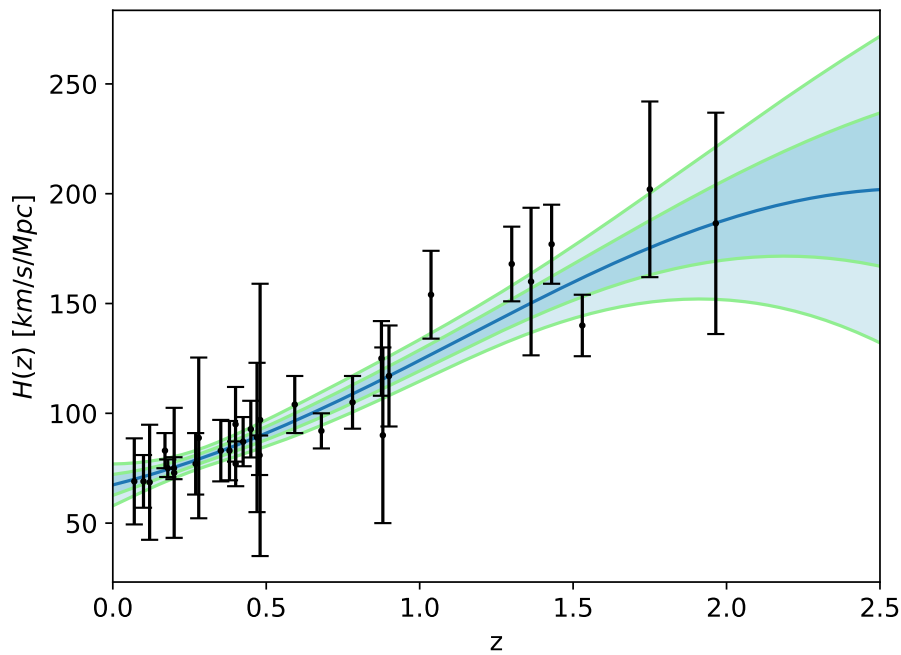


Figura 5 – Reconstrução de $H(z)$ a partir dos 31 dados de CCs. Mostrando os intervalos de confiança de 68, 3% e 95, 4%, junto com os dados de cronômetros cósmicos.

Com a amostra de cronômetros cósmicos disponibilizada por (MORESCO et al., 2022), a reconstrução obtida a partir dos 32 dados de CCs que possuem matriz de covariância completa é apresentada na (Figura 6). A reconstrução foi plotada com um intervalo de confiança de 2σ e a amostra de dados utilizada foi adicionada ao plot. Essa reconstrução foi utilizada nas análises do Capítulo 8.

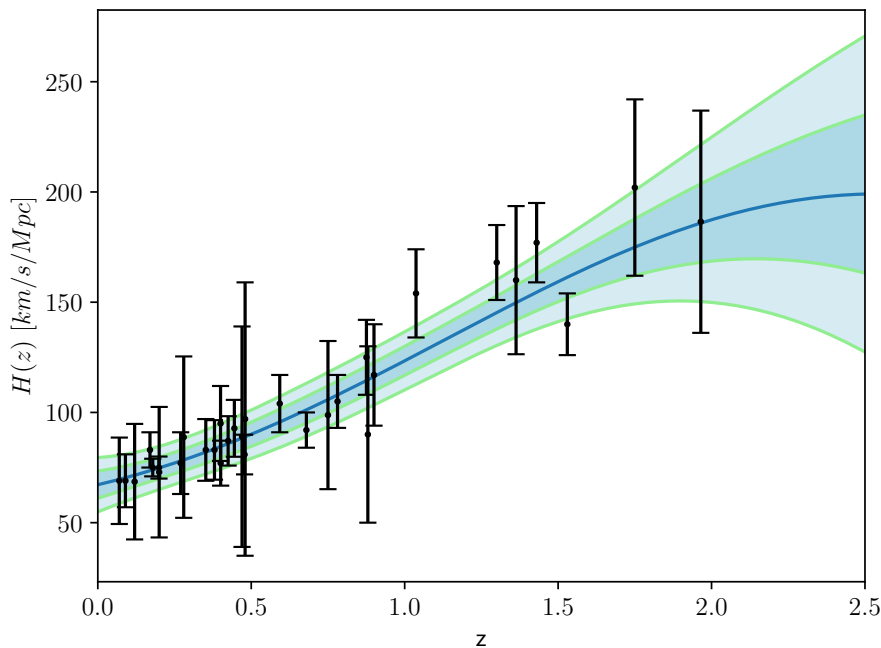


Figura 6 – Reconstrução de $H(z)$ a partir dos 32 dados de CCs, mostrando os intervalos de confiança de 68, 3% e 95, 4%, junto com os dados de cronômetros cósmicos. h

Ambas as reconstruções apresentadas foram obtidas utilizando a função de covariância Quadrado Exponencial expressa em (4.26).

4.2.3.2 Reconstrução da Distancia Comóvel

A magnitude aparente, m , se relaciona com a distância de luminosidade comóvel, $D_L(z)$, pela expressão:

$$m = M + 5 \log \frac{c}{H_0} - 5 + 5 \log D_L = M_* + 5 \log D_L, \quad (4.38)$$

onde definimos $M_* \equiv M + 5 \log \frac{c}{H_0} - 5$. Para $D_L(z)$, temos:

$$D_L = 10^{\frac{m-M_*}{5}}. \quad (4.39)$$

Como veremos, é conveniente para nossas análises obter a reconstrução da distância comóvel $D_C(z)$, que é dada a partir de $D_L(z)$ como:

$$D_C = \frac{D_L(z)}{(1+z)}. \quad (4.40)$$

Podemos utilizar as medidas de magnitude aparente m_B das SNe Ia para montarmos uma amostra das correspondentes distâncias comóveis $D_C(z)$. A estimativa da matriz de covariância para D_C é obtida a partir da matriz de covariância de m_B ,

$$\Sigma_{d_C} = J \cdot \Sigma_{m_B} \cdot J^T, \quad (4.41)$$

onde J é a matriz jacobiana da mudança de variável. Como $D_{Ci} = D_C(m_i)$, o Jacobiano é uma matriz diagonal dada por

$$J = \text{diag}(\sigma_{D_C}) = \text{diag} \left[\left(\frac{dD_C}{dm} \right) \sigma_m \right] = \alpha \text{diag}(D_{Ci} \sigma_{mi}). \quad (4.42)$$

Na Figura 7 está apresentada a reconstrução, com intervalo de confiança de 2σ , de $D_C(z)$ obtida da amostra Pantheon (SCOLNIC et al., 2018). Em conjunto, foram adicionados os dados de $D_c(z)$ da amostra utilizada.

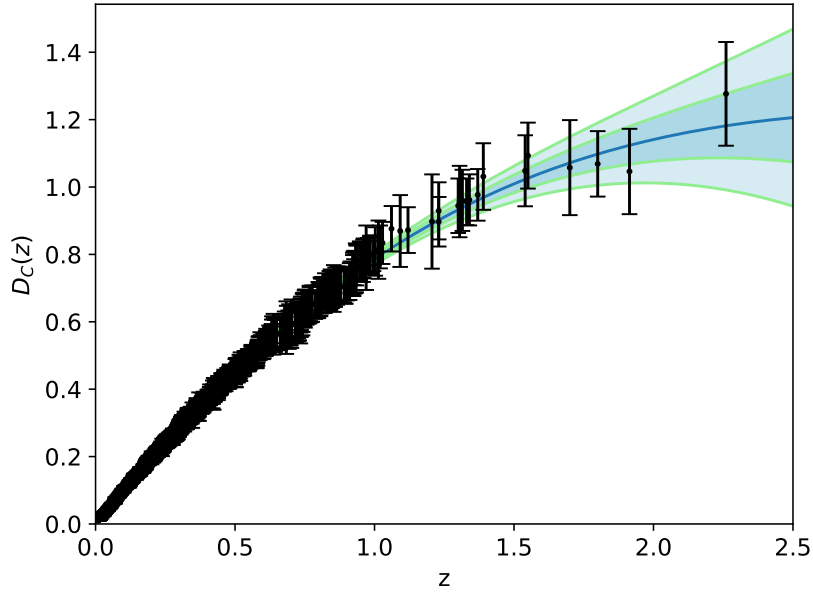


Figura 7 – Reconstruções de $D_C(z)$ para amostra Pantheon. Mostrando os intervalos de confiança de 68,3% e 95,4% . E para comparação a curva de D_C obtida pelo modelo Λ CDM - plano

A reconstrução da $D_C(z)$ obtida com a amostra Pantheon+ (BROUT et al., 2022) está plotada na Figura 8. A reconstrução é apresentada com intervalo de confiança de 2σ e, em conjunto, foram adicionados os dados de $D_C(z)$ obtidos da amostra Pantheon+. Essa reconstrução foi utilizada nas análises do Capítulo 8.

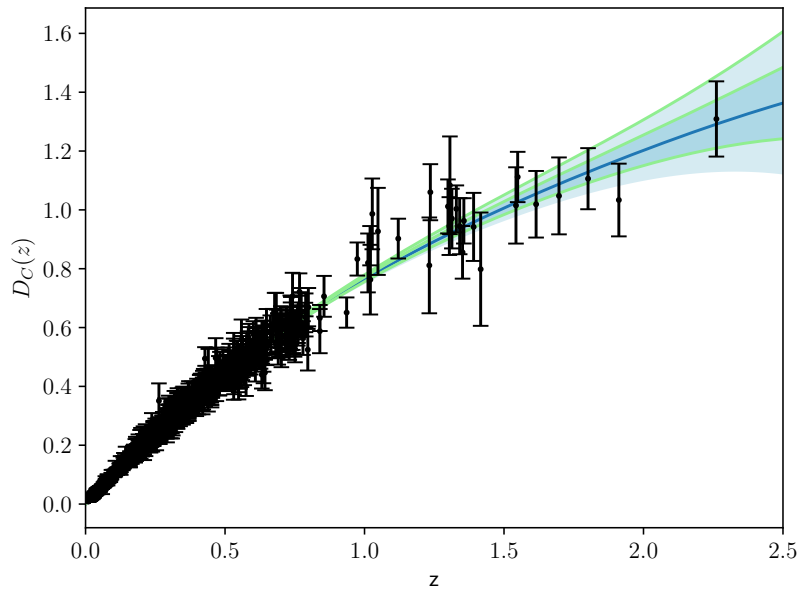


Figura 8 – Reconstruções da $D_C(z)$ para amostra Pantheon+. Mostrando os intervalos de confiança de 68,3% e 95,4% . E para comparação a curva de D_C obtida pelo modelo Λ CDM - plano

Novamente foi utilizada a função de correlação Quadrado Exponencial, dada por (4.26), para obter as reconstruções com os Processos Gaussianos.

4.2.4 Combinando as Amostras de Dados

Para obter a reconstrução de uma determinada quantidade de interesse, $G(z)$, a partir da combinação de um conjunto de dados observacionais, precisamos criar uma amostra por importância, obtida ponderando a reconstrução da quantidade $G(z)$ proveniente de uma amostra de dados pela reconstrução da mesma quantidade $G(z)$ reconstruída por outra amostra de dados. Isso pode ser feito no intervalo onde as reconstruções das diferentes amostras são compatíveis em menos de 1σ de incerteza por um método MCMC conhecido como amostragem de importância (JESUS et al., 2023; JESUS et al., 2024).

Nesta Tese, as análises combinadas foram obtidas ponderando a reconstrução da quantidade $G(z)$ encontrada a partir dos dados de SNe Ia com a reconstrução de $G(z)$ para os dados de $H(z)$.

5 CAMPO ESCALAR COMO ENERGIA ESCURA: MODELOS ϕ CDM

Na formulação teórica da Cosmologia, campos escalares desempenham um papel importante no início do Universo (GUTH, 1997; LIDDLE, 1997), sendo os principais candidatos para executar a fase inflacionária do Universo primordial (GUTH; PI, 1982; LINDE, 1982; RATRA; PEEBLES, 1988; PEEBLES; RATRA, 1988). A partícula intermediadora desse campo inflacionário, o inflaton, possui densidade de pressão negativa suficiente para fazer o espaço-tempo expandir rapidamente em um curto período de tempo logo no início do Universo. É essa inflação no Universo primordial que fornece as condições iniciais necessárias para evolução do Universo observado hoje. Os campos escalares também têm sido amplamente utilizados na descrição do conteúdo material do setor escuro (CALDWELL; DAVE; STEINHARDT, 1998; CARROLL, 1998; WANG et al., 2000). Os modelos cosmológicos SFDM propõem que a matéria escura fria é representada por um campo escalar real, devido às propriedades dos campos escalares (ESCOBAL; JESUS; PEREIRA, 2021) os condensados de bosen-Einstein se formam antes no Universo, permitindo aliviar o problema de cuspy core.

Alguns modelos cosmológicos propõem uma alternativa interessante para descrever a energia escura ao substituir a constante cosmológica Λ por um campo escalar real ϕ . Esses modelos são conhecidos como modelos de quintessência (ESCOBAL et al., 2023; CARVALHO et al., 2006; MARTIN, 2008; TSUJIKAWA, 2013). Embora a única partícula associada a um campo escalar e observada na natureza seja o bóson de Higgs, campos escalares desempenham um papel abrangente em diversas áreas da física.

Nesse Capítulo, iremos estudar a evolução dinâmica do Universo que possui a energia escura descrita por um campo escalar real ϕ . Veremos como analisar a dinâmica de um modelo ϕ CDM a partir de um potencial previamente determinado (ESCOBAL et al., 2023) e também analisaremos uma possibilidade de se obter o potencial para o campo a partir dos dados observacionais utilizando os Processos Gaussianos (JESUS et al., 2022).

5.1 ANÁLISE DINÂMICA

Nesta seção vamos estudar a construção teórica da dinâmica do campo escalar, fundamentada nos princípios da teoria clássica de campos (LEMO, 2007). Começando com a definição da densidade Lagrangeana,

$$\mathcal{L}^\phi = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi), \quad (5.1)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial associado ao campo escalar ϕ , que carrega toda a informação sobre o campo, como sua massa e suas possíveis interações. Então, a ação do campo escalar S_ϕ , minimamente acoplado a gravidade, é dada por:

$$S^\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^\phi. \quad (5.2)$$

Para obter a equação de movimento para o campo ϕ , vamos utilizar a condição estacionária

$$\frac{\delta S^\phi}{\delta \phi} = 0. \quad (5.3)$$

Temos então que a equação de movimento para o campo escalar, denominada equação de Klein-Gordon, é

$$\square \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (5.4)$$

sendo $(\square = \partial^\mu \partial_\mu)$ o operador d'Alembertiano.

Utilizando a definição (2.13) para obter o tensor Energia-momento associado ao campo escalar, $T_{\mu\nu}^\phi$, temos:

$$T_{\mu\nu}^\phi = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S^\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [\partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - 2V(\phi)]. \quad (5.5)$$

Para deixar $T_{\mu\nu}^\phi$ na forma do tensor de energia-momento de um fluido perfeito como (2.14), definimos a densidade de energia ρ^ϕ , pressão p^ϕ e quadrivelocidade u_μ^ϕ do campo ϕ como

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi + V(\phi), \\ p_\phi &= \frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - V(\phi), \\ u_\mu &= (\partial_\mu \phi) / \sqrt{\partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi}. \end{aligned}$$

Assumindo que o campo é homogêneo, de acordo com o princípio cosmológico ($\partial_i \phi = 0$), as relações acima se tornam:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (5.6)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (5.7)$$

E assim obtemos as principais equações para descrever a dinâmica do campo escalar ϕ . Vamos agora inserir essas informações no contexto cosmológico discutido no Capítulo (2).

5.2 MODELO ϕ CDM

A constante cosmológica Λ representa a energia escura no modelo padrão da cosmologia, como vimos no Capítulo (2). Mas devido à natureza desconhecida da energia escura, surgem outras possibilidades para a formulações de sua descrição. A formulação dos modelos de quintessência, ϕ CDM, por exemplo, supõe que a energia escura é um campo escalar real ϕ . Esses modelos têm basicamente as mesmas componentes materiais que compõem o modelo padrão Λ CDM-plano.

Os modelos ϕ CDM são diferenciados pela escolha do potencial, $V(\phi)$, associado ao campo. A escolha teórica por esses modelos é baseada na capacidade que cada um tem de capturar comportamentos dinâmicos complexos que moldam a evolução do universo. Vamos então obter as informações

necessárias para analisar a evolução dinâmica de um modelo ϕ CDM.

Com uma abordagem semelhante à realizada no Capítulo (2), vamos considerar um Universo descrito pela métrica de FLRW, que pode ter curvatura. Esse Universo é preenchido por matéria bariônica, matéria escura não relativística e a energia escura sendo descrita por um campo escalar real ϕ , minimamente acoplado à gravidade. Por simplicidade vamos desconsiderar os efeitos da radiação pois estamos interessados em vincular o modelo aos dados do Universo recente. Podemos começar inserindo a lagrangeana do campo ϕ , $\mathcal{L}^\phi$, dada pela relação (5.1) na ação de Einstein-Hilbert dada em (2.11) que, nesse contexto, toma a forma

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_M + \mathcal{L}^\phi) . \quad (5.8)$$

A partir da formulação teórica realizada na seção anterior, podemos utilizar a mesma abordagem realizada no Capítulo (2) para obter a dinâmica do modelo ϕ CDM. Nesse contexto, a equação de Friedmann e a equação da aceleração dadas, respectivamente, por (2.23) e (2.24), que descrevem o *background* cosmológico na métrica FLRW, assumem a seguinte forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_\phi) - \frac{k}{a^2} , \quad (5.9)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_m + \rho_\phi + 3p_\phi) , \quad (5.10)$$

sendo que k é a constante de curvatura, ρ_m a densidade de energia da matéria sem pressão (Bárions + matéria escura), ρ_ϕ a densidade de energia do campo e p_ϕ sua pressão. A equação de movimento para o campo dada por (5.4), que também pode ser obtida da conservação da densidade de energia ρ_m , é

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 . \quad (5.11)$$

Para mudarmos as equações acima, escritas na variável temporal para a variável no *redshift* z , utilizaremos a relação:

$$\frac{d}{dt} = -H(1+z) \frac{d}{dz} . \quad (5.12)$$

Sendo assim, a equação de movimento para o campo ϕ dada por (5.11), toma a forma

$$\phi'' + \left(\frac{H'}{H} - \frac{2}{1+z} \right) \phi' + \frac{1}{(1+z)^2 H^2} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 , \quad (5.13)$$

onde a linha é definida ($' \equiv \frac{d}{dz}$). Sendo assim, a densidade de energia expressa na equação (5.6) é escrita como

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} H^2 (1+z)^2 \phi'^2 + V(\phi) . \quad (5.14)$$

A equação de Friedmann para o modelo ϕ CDM dada em (5.9) é reescrita em função do *redshift* como:

$$H^2 = \frac{\frac{8\pi G}{3}\rho_m + \frac{8\pi G}{3H_0^2}V(\phi) - k(1+z)^2}{1 - \frac{4\pi G}{3}(1+z)^2\phi'^2}. \quad (5.15)$$

Utilizando a definição do campo adimensional Φ e do potencial adimensional $U(\Phi)$ (ESCOBAL; JESUS; PEREIRA, 2021), temos

$$\Phi \equiv \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\phi, \quad (5.16)$$

$$U(\Phi) \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2}V(\phi), \quad (5.17)$$

em conjunto com as definições (2.43), (2.39) e (2.40), que correspondem a

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{H(z)}{H_0}, \\ \Omega_{M0}(1+z)^3 &= \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_m, \\ \Omega_{k0} &= -\frac{k}{H_0^2}, \end{aligned}$$

podemos escrever a equação de Frieddman (5.15), de forma adimensional, como:

$$E^2 = \frac{\Omega_{M0}(1+z)^3 + U(\Phi) + \Omega_{k,0}(1+z)^2}{1 - \frac{(1+z)^2\Phi'^2}{2}}. \quad (5.18)$$

A equação de movimento para o campo (5.13) é escrita como

$$\Phi'' + \left(\frac{H'}{H} - \frac{2}{1+z}\right)\Phi' + \frac{1}{(1+z)^2E^2}\frac{dU(\Phi)}{d\Phi} = 0. \quad (5.19)$$

Derivando (5.18) com relação ao *redshift* z , temos

$$\frac{H'}{H} = \frac{1}{2E^2} \left[\frac{3\Omega_{M0}(1+z)^2 + U' + 2\Omega_{k,0}(1+z) + E^2(1+z)\Phi'(\Phi' + (1+z)\Phi'')}{1 - \frac{(1+z)^2\Phi'^2}{2}} \right]. \quad (5.20)$$

Então, a equação de movimento (5.19) é dada por

$$\begin{aligned} \Phi'' + \frac{1}{2E^2} \left[\left(3\Omega_{M0}(1+z)^2 + U' + 2\Omega_{k,0}(1+z) + 3E^2(1+z)\Phi'^2 - \frac{4E^2}{1+z} \right) \Phi' + \right. \\ \left. + \left(\frac{2 - (1+z)^2\Phi'^2}{(1+z)^2} \right) \frac{dU(\Phi)}{d\Phi} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Como,

$$\frac{dU(\Phi)}{dz} = \frac{d\Phi}{dz} \frac{dU(\Phi)}{d\Phi} = \Phi' \frac{dU(\Phi)}{d\Phi}, \quad (5.22)$$

a equação (5.21) assume a seguinte forma:

$$\Phi'' + \frac{1}{2E^2} \left[\left(3\Omega_{M0}(1+z)^2 + 2\Omega_{k,0}(1+z) + E^2 \left(3(1+z)\Phi'^2 - \frac{4}{z+1} \right) \right) \Phi' + \frac{2}{(1+z)^2} \frac{dU(\Phi)}{d\Phi} \right] = 0. \quad (5.23)$$

Em conjunto com a equação (5.18) para $E(z)$, obtemos um sistema de equações diferenciais com Φ e suas derivadas como variáveis, e os parâmetros de densidades (Ω_{M0} e Ω_{k0}) sendo os parâmetros livres. Dependendo da forma do potencial adimensional $U(\Phi)$, podem surgir mais parâmetros livres no sistema.

Em nível de *background*, o sistema (5.18)-(5.23) é suficiente para estudar a dinâmica de qualquer modelo de quintessência a partir da definição do potencial adimensional $U(\Phi)$. Para o campo adimensional Φ , o valor atual $\Phi(z=0) = \Phi_0$, correspondente à sua condição inicial, é dado por

$$\Phi_0 = 0, \quad (5.24)$$

enquanto o valor inicial de Φ' , representado por Φ'_0 , é determinado através da equação (5.18). Uma vez que $E(z=0) = 1$, podemos isolar Φ'_0 nessa equação. Os parâmetros livres são obtidos através dos dados observacionais utilizando a análise estatística no Capítulo (4).

5.3 RECONSTRUÇÃO DO POTENCIAL $V(\phi)$

Como vimos na seção anterior, a determinação do potencial $V(\phi)$ é o que diferencia os modelos de quintessência. Em termos do potencial $V(\phi)$, o sistema dinâmico (5.9)-(5.10) é escrito como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_m + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right] - \frac{k}{a^2}, \quad (5.25)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_m + 2\dot{\phi}^2 - 2V(\phi) \right). \quad (5.26)$$

As equações [5.25-5.26] acima nos permitem expressar o potencial $V(\phi)$ como

$$V(\phi) = \frac{3H^2 + \dot{H}}{8\pi G} - \frac{\rho_m}{2} + \frac{k}{4\pi G a^2}. \quad (5.27)$$

Para o tratamento numérico, é conveniente utilizar o potencial adimensional $U(z)$ definido pela expressão (5.17). Os dados observacionais utilizados na reconstrução do potencial estão em termos do redshift. Assim, é necessário mudar a dependência temporal da equação (5.27) para uma dependência

no redshift z através da relação

$$\frac{d}{dt} = -H(1+z)\frac{d}{dz}. \quad (5.28)$$

Podemos então escrever o potencial adimensional $U(z)$ como

$$U(z) = E^2 - \frac{E(1+z)}{3} \frac{dE}{dz} - \frac{\Omega_{M0}(1+z)^3}{2} - \frac{2\Omega_{k0}}{3}(1+z)^2. \quad (5.29)$$

A expressão (5.29) para o potencial adimensional $U(z)$ está escrita em função do *redshift* e das quantidades adimensionais, em especial de $E(z)$. Isso nos permite reconstruir $U(\phi)$ através da reconstrução de $E(z)$ e suas derivadas via Processos Gaussianos utilizando os dados de $H(z)$, como fizemos no trabalho (JESUS et al., 2022).

De forma análoga, para utilizar a reconstrução feita pelos Processos Gaussianos para os dados de SNs Ia, é vantajoso expressar o potencial adimensional $U(\phi)$ em termos da distância comóvel transversal adimensional $D_M(z)$, que é dada por

$$D_M(z) = \frac{1}{\sqrt{-\Omega_{k0}}} \sin \left(\sqrt{-\Omega_{k0}} D_C(z) \right), \quad (5.30)$$

onde a distância comóvel na linha de visada é

$$D'_C(z) = \frac{1}{E(z)}. \quad (5.31)$$

A derivada em relação ao *redshift* z da distância comóvel transversal $D_m(z)$ é

$$\frac{dD_M(z)}{dz} = D'_M(z) = \cos \left(\sqrt{-\Omega_k} D_C(z) \right) D'_C(z). \quad (5.32)$$

Então, combinando (5.30) e (5.32), encontramos:

$$\left(\frac{D'_M}{D'_C} \right)^2 - \Omega_{k0} D_M^2 = 1. \quad (5.33)$$

Agora podemos expressar a relação (5.33) em termos da quantidade adimensional $E(z)$

$$E^2 = \frac{1 + \Omega_{k0} D_M^2}{D_M'^2}. \quad (5.34)$$

Tomando a derivada em relação ao redshift z da relação (5.34), temos

$$E \frac{dE}{dz} = \frac{\Omega_{k0} D_M (D_M'^2 - D_M D_M'') - D_M''}{D_M'^3}, \quad (5.35)$$

o que nos permite escrever o potencial adimensional $U(\phi)$ dado por (5.29). Por fim, em função da

distância comóvel transversal $D_m(z)$ e de suas derivadas $D'_m(z)$ e $D''_m(z)$

$$U(z) = \frac{1 + \Omega_{k0} D_M^2}{D_M'^2} + \left(\frac{1+z}{3} \right) \frac{D_M'' + \Omega_{k0} D_M (D_M D_M'' - D_M'^2)}{D_M'^3} - \frac{\Omega_{M0}(1+z)^3}{2} - \frac{2\Omega_{k0}}{3} (1+z)^2. \quad (5.36)$$

Usando o método dos Processos Gaussianos, conforme descrito no Capítulo anterior, conseguimos reconstruir as funções $H(z)$ e $D_M(z)$ usando dados do parâmetro Hubble e da amostra Pantheon, respectivamente. No entanto, para obter o potencial adimensional $U(z)$ dessas reconstruções, como podemos ver nas equações (5.29) e (5.36), existem parâmetros livres que devem ser obtidos, Ω_{M0} e Ω_{k0} . Esses parâmetros não podem ser obtidos a partir da reconstrução e devem ser restringidos através de outras observações, que podem fornecer um prior sobre esses parâmetros. Uma vez que tenhamos priors sobre $(\Omega_{M0}, \Omega_{k0})$, podemos obter $U(z)$ amostrando os priors em conjunto com as Gaussianas multivariadas correspondente a $(H(z), D_M(z))$ e suas derivadas.

Além das reconstruções com os dados $H(z)$ e a amostra Pantheon, também fizemos uma análise conjunta na reconstrução de $U(z)$, onde houve compatibilidade de 1σ entre ambas as reconstruções. Para isso, ponderamos a reconstrução SNe Ia com a reconstrução $H(z)$. Esse método de combinação de cadeias MCMC é conhecido como amostragem de importância (JESUS et al., 2022).

Vamos utilizar 2 priors diferentes para obter resultados robustos. O primeiro prior analisado é proveniente do Planck 18 (PP) (AGHANIM et al., 2020) ($\Omega_k = -0.044 \pm 0.050$, $\Omega_{m0} = 0.315 \pm 0.022$) em 3σ de intervalo de confiança. A escolha de trabalhar com 3σ de intervalo de confiança é devido ao fato de que os resultados do Planck 18 não correspondem a cosmologias do modelo ϕ CDM, mas ao modelo Λ CDM plano.

O segundo prior utilizado nos parâmetros $(\Omega_{M0}, \Omega_{k0})$ foi um prior “Largo” sobre os parâmetros, que abrange a maioria das observações atuais, sendo $(\Omega_{k0} = 0.0 \pm 0.1, \Omega_{M0} = 0.30 \pm 0.05)$.

Em nossas análises também assumimos que $\dot{\phi}^2 > 0$, o que representa uma condição física necessária para a validade da classe de modelos de campo escalar, pois garante que a energia cinética do campo seja positiva. Para isso, ao obter as reconstruções $U(z)$, desprezamos as amostras com $\dot{\phi}^2 < 0$.

Para poder comparar a reconstrução obtida com potenciais bem estabelecidos na literatura, utilizamos dois modelos de teste: o modelo de Lei de Potências (Power Law, PL) (PEEBLES; RATRA, 1988; RATRA; PEEBLES, 1988), com potencial $U_{PL}(z)$ dado por

$$U_{PL}(\Phi) = \frac{\beta \Phi^{-\alpha}}{2}. \quad (5.37)$$

sendo β dado por

$$\beta = \frac{8}{3} \left(\frac{\alpha + 4}{\alpha + 2} \right) \left[\frac{2}{3} \alpha (\alpha + 2) \right]^{\alpha/2}, \quad (5.38)$$

e o modelo quadrático de campo livre (FF, do inglês Free Field) (RATRA, 1991; URENA-LOPEZ;

REYES-IBARRA, 2009), sendo $U_{FF}(z)$

$$U_{FF}(\Phi) = \frac{\mu^2}{2} \Phi^2, \quad (5.39)$$

onde $m \equiv m/H_0$, sendo m a massa associada ao campo escalar nesse modelo.

Os resultados obtidos usando PP são apresentados na Figura 9 e Figura 10. Na Figura 9, a imagem à esquerda mostra a reconstrução de $U(z)$ dentro de um intervalo de confiança de 2σ a partir dos dados $H(z)$ e na imagem à direita está a reconstrução com os dados de SNe Ia da amostra Pantheon. Em ambos os casos também foi plotada a evolução do potencial adimensional para os dois modelos de teste. No caso do PL, assumimos $\alpha = 0.150$ a partir da análise realizada em (CAO; RYAN; RATRA, 2020). Para FF assumimos a massa $m = 0.60H_0$ eV, que obtivemos em nossas análises utilizando restrições estatísticas com os dados $H(z)$ e a amostra Pantheon. Podemos observar que a reconstrução com os dados de $H(z)$ tem uma melhor compatibilidade com as curvas de U_{PL} e U_{FF} em comparação à reconstrução a partir dos dados de SNe Ia. O potencial $U_{PL}(z)$, em particular, é compatível com a reconstrução de $U(z)$ com os dados de $H(z)$ em menos de 1σ em quase 60% de toda a faixa de *redshift* analisada, enquanto o potencial $U(z)_{FF}$ está entre as linhas 1σ e 2σ de $z \gtrsim 0.72$.

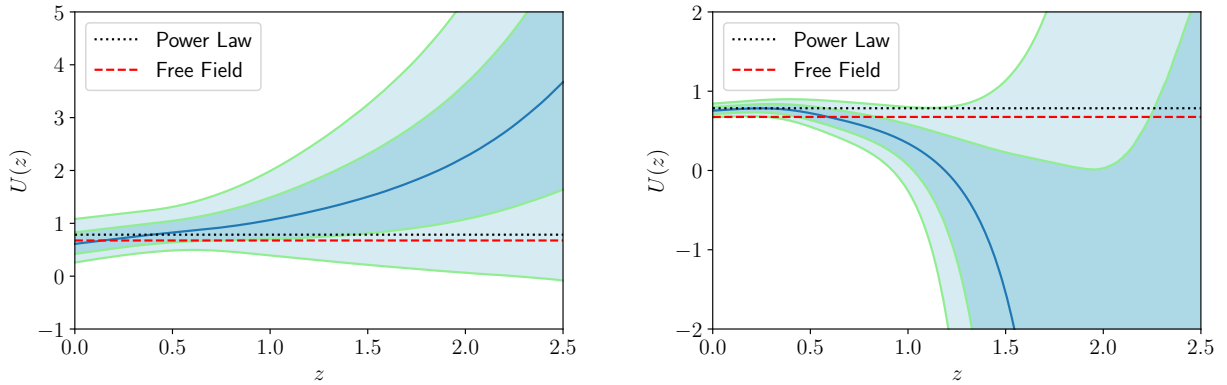


Figura 9 – Resultados das reconstruções com o Prior do Planck. **Esquerda:** Reconstrução $U(z)$ de 31 dados $H(z)$. **Direita:** $U(z)$ reconstrução do Pantheon.

Por outro lado, a reconstrução de $U(z)$ obtida a partir dos dados do Pantheon possui uma pequena incerteza na faixa $z < 1$ devido à grande concentração de dados em baixos redshifts que essa amostra possui, fazendo com que as regiões de contorno em até 2σ fiquem bem restritas. Nesse caso, no restante do intervalo de redshift, a largura da região de confiança 1σ aumenta de acordo com a forma que a reconstrução $U(z)$ assume, e isso leva a uma menor compatibilidade entre a reconstrução e os dois potenciais $U_{FF}(z)$ e $U_{PL}(z)$. Vemos que a curva $U_{PL}(z)$ está na região de 1σ da reconstrução até $z \sim 0.58$ e em $z \gtrsim 2.2$, a curva torna-se compatível novamente em menos de 1σ da reconstrução de $U(z)$. A curva $U_{FF}(z)$ é compatível em menos de 1σ com reconstrução em aproximadamente 25% da faixa redshift, porém, é um pouco menor que a linha de reconstrução 2σ na faixa a partir de $0.05 \lesssim z \lesssim 0.28$.

Na Figura 10 na imagem esquerda, temos o gráfico superposto das reconstruções de $U(z)$ para ambas as amostras de dados observacionais usadas, que foram plotadas com um intervalo de confiança

de 1 e 2σ . Podemos ver que para $z \lesssim 0.5$ a reconstrução em 2σ de $U(z)$ para os dados SNe Ia está dentro do intervalo de 1σ da reconstrução de $U(z)$ com os dados de $H(z)$. As duas reconstruções mostram apenas uma pequena divergência para $z \gtrsim 0.85$, pois não há sobreposição nos seus intervalos de confiança em 1σ . Neste intervalo, $0 \leq z < 0.85$, com compatibilidade de 1σ entre as reconstruções, é possível realizar uma análise conjunta entre os dados $H(z)$ e a amostra Pantheon a fim de obter uma reconstrução conjunta para $U(z)$, como está mostrado na Figura 10 à direita. A curva $U(z)_{PL}$ permanece na região de 1σ até $z \sim 0.7$, enquanto a curva $U(z)_{FF}$ ficou abaixo da região de 2σ no intervalo $0.10 < z < 0.26$. Apenas para $z \gtrsim 0.46$ a região de compatibilidade atinge 1σ com a reconstrução de $U(z)$ a partir da combinação da amostra de dados.

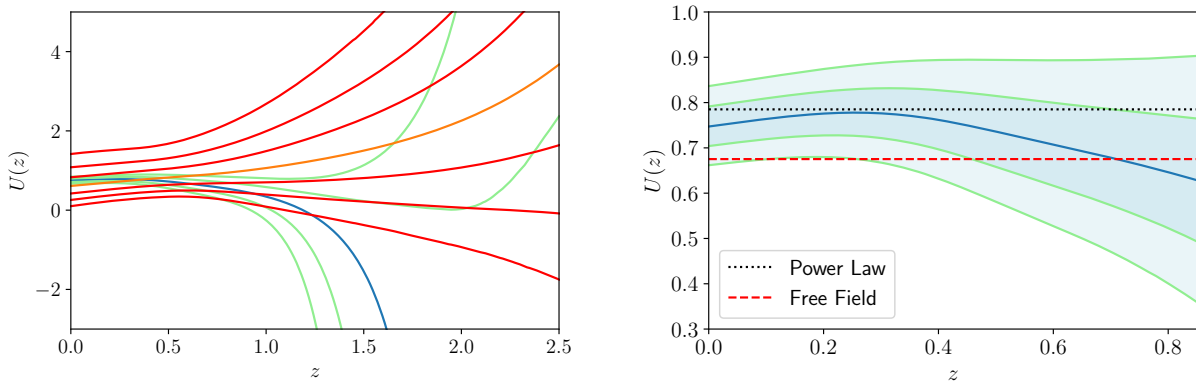


Figura 10 – Reconstrução $U(z)$ a partir de dados $H(z)$ e Pantheon com um Planck 3σ anterior sobre Ω_m e Ω_k . **Esquerda:** Superposição de intervalos de confiança. A reconstrução SNe Ia corresponde ao vermelho e a reconstrução $H(z)$ corresponde às linhas contínuas verdes. **Direita:** Análise conjunta.

A reconstrução utilizando o prior largo é apresentada na Figura 11 e Figura 12. Esta análise é descrita de forma semelhante à anterior. Na Figura 11 temos a reconstrução de $U(z)$ para cada um dos conjuntos de dados: a imagem à esquerda representa a reconstrução com os dados de $H(z)$ e a imagem à direita representa a reconstrução com a amostra Pantheon. Como na análise anterior para o prior do Planck 18, são apresentadas as mesmas curvas de evolução para os potenciais adimensionais $U_{PL}(z)$ e $U_{FF}(z)$. No intervalo $0 < z < 1.0$ a curva $U_{FF}(z)$ é compatível dentro de 1σ com a reconstrução $U(z)$, a partir de dados $H(z)$. Como podemos ver na imagem esquerdo da Figura 11, o potencial $U_{PL}(z)$ está dentro da região 1σ em aproximadamente 55% do intervalo analisado.

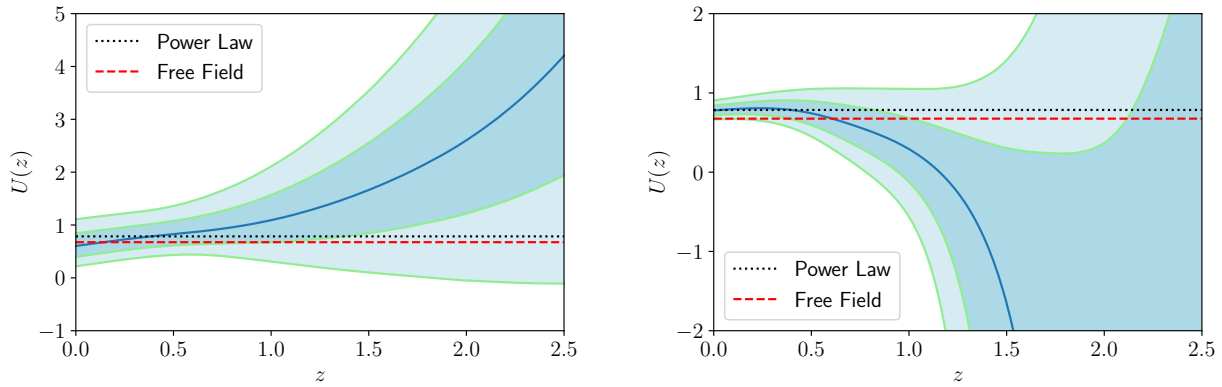


Figura 11 – Resultados das reconstruções do grande prior. **Esquerda:** Reconstrução $U(z)$ de 31 dados $H(z)$. **Direita:** $U(z)$ reconstrução do Pantheon.

Na imagem direita da Figura 11 está a reconstrução de $U(z)$ para a amostra Pantheon, onde podemos ver que a curva $U_{FF}(z)$ não excede a região de 2σ de intervalo de confiança da reconstrução. O potencial adimensional $U_{PL}(z)$ é compatível com a região de 1σ em torno de 47% da faixa de *redshift*. Os resultados da análise com o prior largo mostram-se semelhantes aos obtidos para o prior de Planck, mas agora há uma melhor compatibilidade entre as reconstruções e as curvas de ambos os potenciais adimensionais de teste, na maioria dos casos, devido ao aumento das regiões de incerteza.

Na imagem esquerda da Figura 12, é apresentada a compilação de ambas as reconstruções de $U(z)$ realizadas com o prior largo. Nesta Figura, podemos ver que as regiões de confiança em 1σ de intervalo de confiança de ambas as reconstruções se sobrepõem para $z \lesssim 1.0$. Neste intervalo de *redshift* foi realizada a reconstrução de $U(z)$ usando a combinação dos dados observacionais, conforme mostrado na Figura 12 (à direita). Agora a curva $U_{PL}(z)$ é compatível dentro de 1σ com a reconstrução dentro deste intervalo *redshift* e a curva $U_{FF}(z)$ está dentro da região de 1σ da reconstrução para $0,40 \lesssim z < 1$.

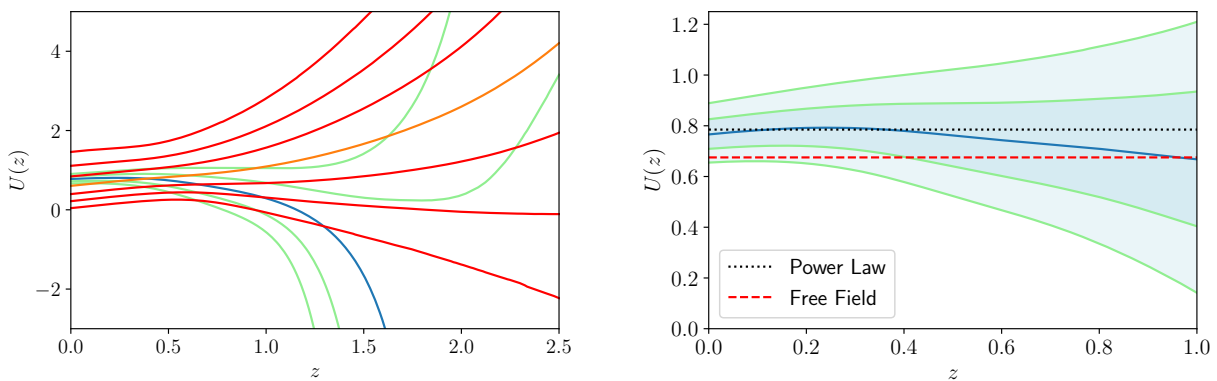


Figura 12 – Reconstrução de $U(z)$ a partir de dados de $H(z)$ e Pantheon com um grande prior sobre Ω_m e Ω_k (mais detalhes no texto). **Esquerda:** Superposição de intervalos de confiança. A reconstrução SNe Ia corresponde ao vermelho e a reconstrução $H(z)$ corresponde às linhas contínuas verdes. **Direita:** Análise conjunta.

Também vale a pena mencionar, como se pode ver nas Figura 9 e Figura 11 que o potencial é melhor restringido com dados de SNe Ia em *redshift* mais baixos, enquanto é melhor restringido a

partir dos dados $H(z)$ em *redshifts* mais altos.

Para mostrar os resultados de forma mais quantitativa, na Tabela 2 são apresentados os valores de $U(z = 0)$ com 1σ incerteza para as reconstruções de $U(z)$ via GP e também de $U_{PL}(z)$ e $U_{FF}(z)$ dos modelos de teste. Os valores são compatíveis dentro de $U(z = 0)$ em todos os casos analisados.

Modelo		Reconstrução com Processos Gaussianos					
Power Law	Free Field	Prior Planck			Prior Largo		
		$H(z)$	SNe Ia	Comb.	$H(z)$	SNe Ia	Comb.
$0.785^{+0.083}_{-0.063}$	$0.675^{+0.113}_{-0.131}$	$0.611^{+0.219}_{-0.190}$	$0.754^{+0.045}_{-0.044}$	$0.747^{+0.044}_{-0.043}$	$0.604^{+0.238}_{-0.208}$	$0.778^{+0.062}_{-0.059}$	$0.766^{+0.060}_{-0.057}$

Tabela 2 – $U(z = 0)$ de ambos os modelos de campo escalar (Lei de Potência e Campo Livre) e de ambas as análises de Processos Gaussianos, com diferentes priors (prior Planck prior e prior Largo), de $H(z)$, dados SNe Ia e da análise conjunta (Comb.).

Em (NAIR; JHINGAN; JAIN, 2014), os autores reconstroem o potencial de energia escura usando SNe Ia e BAO, assumindo um universo espacialmente plano. Eles encontram restrições mais fortes sobre $V(\phi)$, o que pode ser explicado pelo fato de assumirem um universo espacialmente plano e usarem uma compilação SNe Ia mais antiga, ou seja, Union 2.1, quando os erros sistemáticos da supernova não eram tão bem compreendidos como são hoje. Sua reconstrução também é restrita a redshifts menores, $z < 1.4$. Além disso, eles não assumiram a condição física $\dot{\phi}^2 > 0$, o que pode levar a resultados inconsistentes.

Uma análise semelhante foi feita para a reconstrução da gravidade de Horndeski (BERNARDO; SAID, 2021), incluindo o potencial de quintessência (sec. 4.1), em que eles usam os dados Pantheon/MCT +BAO+CCs no contexto de um modelo espacialmente plano e encontram um comportamento para o potencial de campo escalar semelhante ao das nossas Figura 9 e Figura 11. Os Autores encontram limites mais rigorosos para o potencial do campo escalar porque não permitiram a variação da curvatura espacial.

5.4 O UNIVERSO PODE DESACELERAR NO FUTURO?

Analizamos nesta Tese o modelo de quintessência proposto em (CARVALHO et al., 2006). Esse modelo possui a característica interessante de possibilitar uma desaceleração do universo no futuro e, por isso, buscamos encontrar vínculos mais fortes para os parâmetros livres do modelo através da utilização de novos dados observacionais. Realizando a combinação dos dados de $H(z)$ provenientes dos cronômetros cósmicos e os dados de SNe IA da amostra Pantheon, fizemos a análise estatística do modelo utilizando a estatística Bayesiana e, com isso, limitamos os parâmetros livres do modelo proposto. Além disso, comparamos os resultados obtidos em nossa análise com os resultados provenientes de métodos não paramétricos, nesse caso, os Processos Gaussianos, para podermos auferir uma melhor validação dos resultados obtidos.

Inicialmente, vamos analisar as expressões apresentadas no artigo de (CARVALHO et al., 2006).

Sendo a densidade de energia (5.6) e a pressão (5.7) de um campo escalar ϕ dados por

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \\ p_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi).\end{aligned}$$

Em um Universo dominado apenas de DE, a equação de Friedmann para H^2 é

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi, \quad (5.40)$$

A equação de conservação da energia para o campo ϕ

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0. \quad (5.41)$$

Utilizando as equações (5.6) e (5.7), obtemos para (5.41)

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\dot{\phi}^2 = 0, \quad (5.42)$$

Mudando a diferencial com relação ao tempo para o fator de escala a , utilizando

$$\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{d}{da} = aH \frac{d}{da}. \quad (5.43)$$

Com isso da (5.42), obtemos:

$$\frac{d\phi}{da} = \sqrt{-\frac{1}{a8\pi G} \frac{1}{\rho_\phi} \frac{d\rho_\phi}{da}}, \quad (5.44)$$

Utilizando a aproximação do artigo (CARVALHO et al., 2006),

$$\frac{1}{\rho_\phi} \frac{d\rho_\phi}{da} = -\frac{\lambda}{a^{1-2\alpha}}, \quad (5.45)$$

onde λ e α são constantes a serem determinadas. A relação para $\frac{d\phi}{da}$, dada por (5.44), toma a forma

$$d\phi = \sqrt{\sigma} \cdot a^{-(1-\alpha)} da, \quad (5.46)$$

onde definimos

$$\sigma \equiv \frac{\lambda}{8\pi G}. \quad (5.47)$$

E assim, integrando (5.46) temos:

$$\phi - \phi_0 = \sqrt{\sigma} \left(\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} \right), \quad (5.48)$$

Agora que obtemos ϕ , podemos utilizar a relação (5.16) para o potencial adimensional Φ que é dado por:

$$\Phi = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \left(\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} \right). \quad (5.49)$$

O resultado é o mesmo se utilizarmos $\Phi - \Phi_0$. Temos então

$$\Phi - \Phi_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \left(\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} \right). \quad (5.50)$$

A expressão acima nos permite escrever $a(\Phi)$, como

$$a^\alpha = \alpha \sqrt{\frac{3}{\lambda}} (\Phi - \Phi_0) + 1. \quad (5.51)$$

Como veremos, é mais vantajoso deixarmos definido $a^\alpha(\Phi)$ em vez de $a(\Phi)$. Vamos agora determinar uma forma para $V(\phi)$. Utilizando a densidade de energia dada na equação (5.6) obtemos que

$$V(\phi) = \rho_\phi \left[1 - \frac{a^2}{2} \left(\frac{d\Phi}{da} \right)^2 \right]. \quad (5.52)$$

Sendo $\frac{d\Phi}{da}$,

$$\frac{d\Phi}{da} = \frac{d}{da} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}} \left(\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} \right) \right) = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \left(\frac{\alpha \cdot a^{\alpha-1}}{\alpha} \right) = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \cdot a^{\alpha-1}. \quad (5.53)$$

Voltando em (5.52),

$$V(\phi) = \rho_\phi \left[1 - \frac{\lambda}{6} \cdot a^{2\alpha} \right]. \quad (5.54)$$

Podemos determinar a forma de ρ_ϕ . De acordo com a aproximação (5.45) temos:

$$\rho_\phi = \rho_{\phi 0} e^{-\frac{\lambda}{2\alpha} (a^{2\alpha} - 1)}. \quad (5.55)$$

Para completar, vamos utilizar a expressão (5.51), para obter $a^{2\alpha}$

$$a^{2\alpha} = \frac{3\alpha^2}{\lambda} (\Phi - \Phi_0)^2 + 2\alpha \sqrt{\frac{3}{\lambda}} (\Phi - \Phi_0) + 1. \quad (5.56)$$

Assim, para (5.55) encontramos

$$\rho_\phi = \rho_{\phi 0} e^{-\frac{1}{2}[3\alpha(\Phi-\Phi_0)^2+2\sqrt{3\lambda}(\Phi-\Phi_0)]}. \quad (5.57)$$

Antes de escrever a expressão final para $V(\phi)$, vamos considerar que $\Phi_0 = 0$. Então, obtemos para (5.54)

$$V(\phi) = \rho_{\phi 0} e^{-\frac{1}{2}[3\alpha\Phi^2+2\sqrt{3\lambda}\Phi]} \left[1 - \frac{\lambda}{6} \left(\alpha \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \Phi + 1 \right)^2 \right]. \quad (5.58)$$

Utilizando a definição (5.17) podemos encontrar uma expressão para $U(\Phi)$, dado por

$$U(\Phi) = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{\phi 0} e^{-\frac{1}{2}[3\alpha\Phi^2+2\sqrt{3\lambda}\Phi]} \left[1 - \frac{\lambda}{6} \left(\alpha \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \Phi + 1 \right)^2 \right]. \quad (5.59)$$

Como,

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{Crit}, \quad (5.60)$$

$$\rho_{\phi 0} = \rho_{Crit} \cdot \Omega_{\Phi 0}, \quad (5.61)$$

obtemos então

$$U(\Phi) = \Omega_{\Phi 0} e^{-\frac{1}{2}[3\alpha\Phi^2+2\sqrt{3\lambda}\Phi]} \left[1 - \frac{\lambda}{6} \left(\alpha \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \Phi + 1 \right)^2 \right]. \quad (5.62)$$

Agora que encontramos uma expressão para o potencial $U(\Phi)$, vamos fazer a análise de um modelo cosmológico com a energia escura sendo descrita por um campo escalar que possui o potencial adimensional $U(\Phi)$. As equações (5.18) e (5.23), discutidas inicialmente, correspondem respectivamente à equação de $E(z)^2$ e à equação de movimento do campo Φ . Para um universo plano, essas equações tomam a forma

$$E(z)^2 = \frac{\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{\Phi 0} e^{-\frac{1}{2}[3\alpha\Phi^2+2\sqrt{3\lambda}\Phi]} \left[1 - \frac{\lambda}{6} \left(\alpha \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \Phi + 1 \right)^2 \right]}{1 - \frac{(1+z)^2 \Phi'^2}{2}}. \quad (5.63)$$

E para equação de movimento do campo Φ , temos

$$\Phi'' + \frac{1}{2E^2} \left[\left(3\Omega_{M0}(1+z)^2 + E^2 \left(3(1+z)\Phi'^2 - \frac{4}{z+1} \right) \right) \Phi' + \frac{2}{(1+z)^2} \frac{dU(\Phi)}{d\Phi} \right] = 0.$$

onde $\frac{dU}{d\Phi}$, é dado por:

$$\frac{dU}{d\Phi} = \frac{1}{6} \Omega_{\Phi 0} e^{-\frac{1}{2}[3\alpha\Phi^2 + 2\sqrt{3\lambda}\Phi]} \left[3\alpha\Phi \left[\alpha \left(3\alpha\Phi^2 + 3\sqrt{3\lambda}\Phi - 2 \right) + 3\lambda - 6 \right] + \sqrt{3\lambda}(\lambda - 6 - 2\alpha) \right]. \quad (5.64)$$

Agora que o conjunto de equações necessárias para análise estática está pronto, vamos determinar as condições iniciais do campo Φ e sua derivada Φ' . Como considerado anteriormente, a condição inicial para o campo hoje é

$$\Phi_0 = \Phi(z = 0) = 0. \quad (5.65)$$

A partir do valor de Φ_0 , podemos determinar Φ' através da equação (5.63), já que $E(z = 0)^2 = 1$, temos então

$$\Phi'_0 = -\sqrt{\frac{\lambda}{3}} \Omega_{\Phi 0}. \quad (5.66)$$

Temos então todas as ferramentas para realizar a análise numérica do modelo estudado utilizando os dados observacionais de $H(z)$ e SNe Ia. Na Figura 31, a imagem à esquerda apresenta o plot do campo adimensional $\Phi(z)$ que foi obtido a partir da amostra de cadeias dos parâmetros livres geradas pelo *emcee*. Na imagem à direita está a derivada do campo $\Phi'(z)$ obtida da mesma forma.

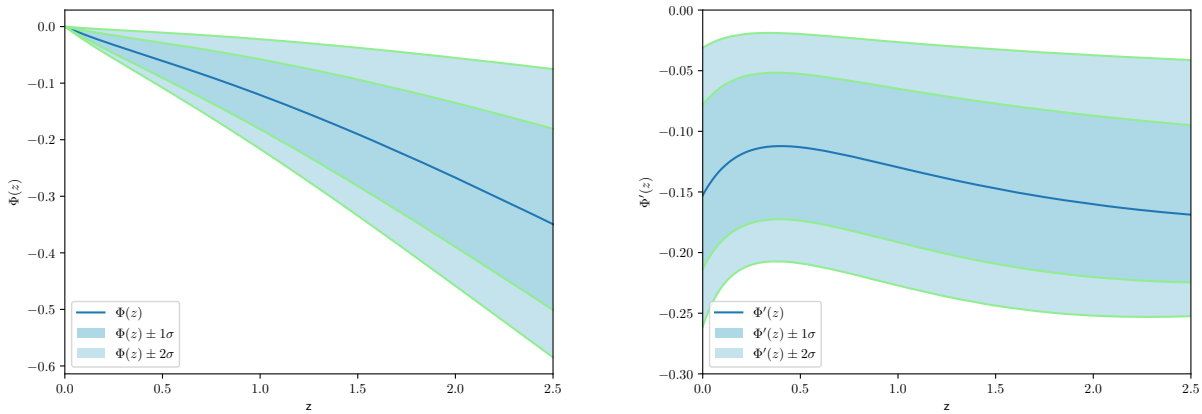


Figura 13 – **Direita:** Evolução em relação ao *redshift* do campo escalar adimensional $\Phi(z)$. **Esquerda:** Evolução em relação ao *redshift* da derivada do campo $\Phi'(z)$.

Utilizamos a estatística bayesiana descrita no Capítulo 4 para encontrar os valores dos parâmetros livres do modelo com os 31 dados de cronômetros cósmicos (MAGANA et al., 2018) e da amostra Pantheon (SCOLNIC et al., 2018). Usamos um prior plano sobre os parâmetros $H_0 \in [50, 100]$, $\Omega_{\phi 0} \in [0, 1]$, $\alpha \in [0, 10]$, $\lambda \in [0, 10]$ como mostrado na Tabela 5.

Parâmetro	Intervalo do prior plano
H_0 (km/s/Mpc)	[20, 120]
$\Omega_{\phi 0}$	[0, 1]
α	[0, 10]
λ	[0, 5]

Tabela 3 – Escolha do prior para os parâmetros livres.

Vale ressaltar que optamos por trabalhar no intervalo $\alpha > 0$ devido a divergências de potencial na região $\alpha < 0$. Escolhemos o intervalo $\lambda > 0$ para ter um valor real $\frac{d\phi}{da}$, como pode ser visto nas equações (5.46) e (5.45).

Amostrando as funções de probabilidade da combinação dos dados de $H(z)$ e SNe Ia, segundo descrito na seção (4.1.4)., conseguimos determinar a região com maior probabilidade de encontrar os valores dos parâmetros livres do modelo, conforme mostra a Figura 14, com contornos correspondente a 1σ e 2σ (68% e 95% de intervalo de confiança).

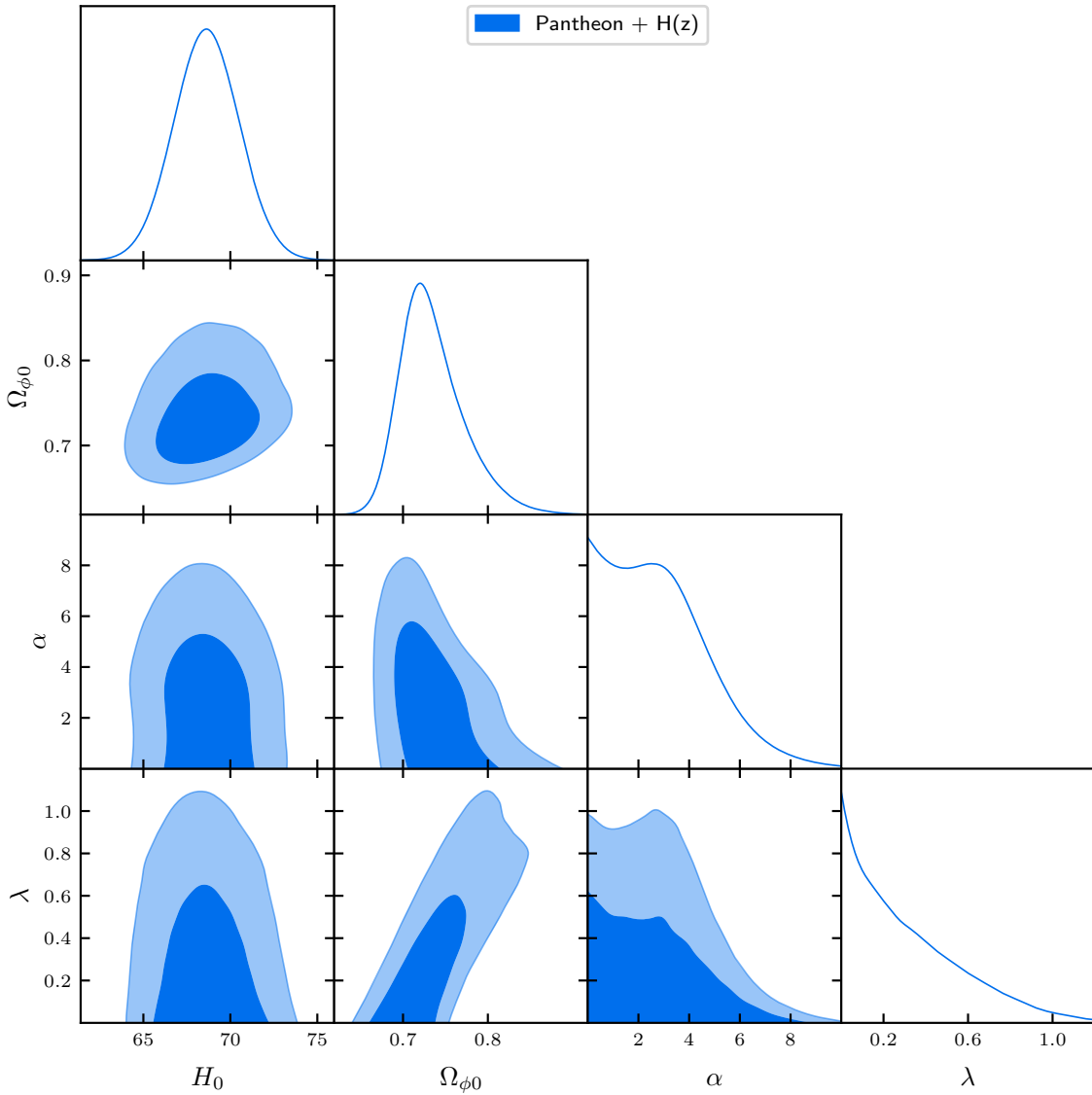


Figura 14 – Gráfico triangular de parâmetros, com dados de $H(z)$ e SNe Ia combinados. Os contornos correspondem a 68% e 95% de intervalo de confiança

Na Tabela 14 são apresentados os valores dos parâmetros livres do modelo em um intervalo de confiança de 95%. Obtemos $\Omega_{\phi 0} = 0.735^{+0.083}_{-0.069}$. As restrições obtidas para o par de parâmetros (α, λ) , definindo o potencial do campo escalar, são $\alpha < 6.56$ e $\lambda < 0.879$, enquanto a constante de Hubble para o modelo é 68.6 ± 3.7 km/s/Mpc.

Parâmetro	95% i.c.
H_0 (km/s/Mpc)	68.6 ± 3.7
$\Omega_{\phi 0}$	$0.735^{+0.083}_{-0.069}$
α	< 6.56
λ	< 0.879

Tabela 4 – Valores dos parâmetros livres em 2σ de intervalo de confiança.

Com a amostra dos parâmetros geradas pelo emcee, obtemos o parâmetro de desaceleração $q(z)$ em um intervalo de confiança de 2σ , conforme mostrado na imagem à esquerda da Figura 15, onde expandimos $q(z)$ para $z \approx -0.5$. Assim, podemos ver que o modelo permite uma desaceleração, $q(z) > 0$, dentro do intervalo de confiança de 1σ para $z \leq -0.4$, aproximadamente. Com a mesma amostra de parâmetros, na imagem da direita da Figura 15 plotamos o potencial adimensional $U(z)$, que também é exibido em um intervalo de confiança de 2σ . Devemos mencionar que os intervalos de confiança mostrados na Figura 15 foram obtidos como se $q(z)$ e $U(z)$ fossem parâmetros derivados com o seguinte método: para um *redshift* fixo, digamos, $z = 0$, obtém-se a cadeia para $q(z)$ (ou $U(z)$) a partir das cadeias dos parâmetros livres fundamentais do modelo, gerada pelo emcee. Dessa forma, quaisquer correlações entre os parâmetros, bem como eventuais assimetrias oriundas de suas distribuições, serão levadas em consideração na determinação de $q(z)$ e $U(z)$.

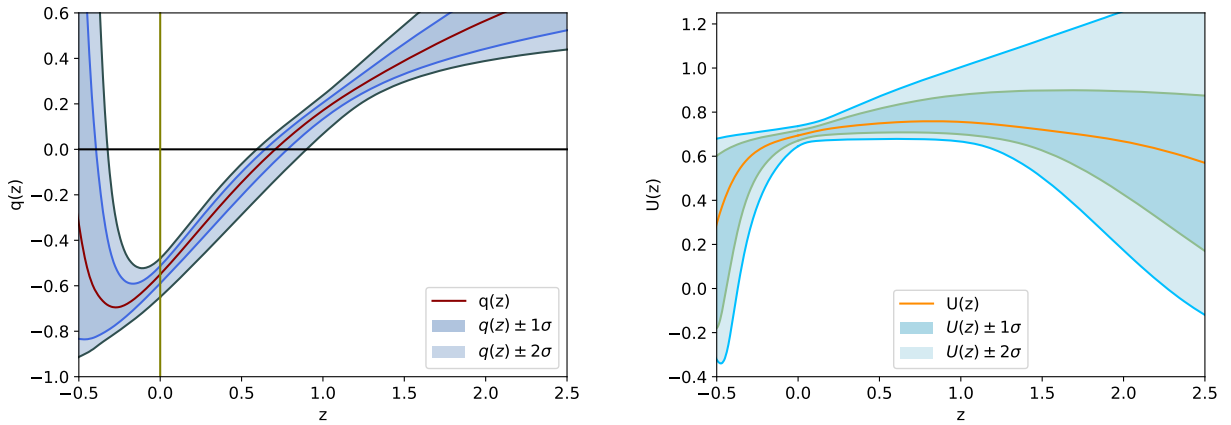


Figura 15 – **Direita:** Gráfico de $U(z)$ obtido utilizando as cadeias dos parâmetros livres geradas pelo emcee. **Esquerda:** Gráfico de $q(z)$ obtido utilizando as cadeias dos parâmetros livres geradas pelo emcee.

A partir dos Processos Gaussianos, usando os dados SNe Ia e $H(z)$, obtemos na seção anterior a reconstrução de o potencial adimensional $U(\Phi)$, como feito em (JESUS et al., 2022). Em (JESUS et al., 2020), o parâmetro de desaceleração $q(z)$ foi reconstruído. Com base nessas análises, vamos expandir a reconstrução de $q(z)$ e $U(z)$ para o tempo futuro, ou seja, na faixa de *redshift* de $-1 < z < 0$, a fim

de encontrar um resultado não paramétrico para comparar com o modelo analisado. As reconstruções foram obtidas usando uma função de correlação Quadrado Exponencial dada pela expressão (4.26).

A reconstrução do $q(z)$ pode ser obtida a partir dos observáveis $H(z)$ e $D_C(z)$ como:

$$q(z) = (1+z) \frac{H'}{H} - 1 = -(1+z) \frac{D_C''}{D_C'} - 1. \quad (5.67)$$

$U(z)$ pode ser obtido a partir dos observáveis, assumindo curvatura espacial nula, como:

$$U(z) = E^2 - \frac{E(1+z)}{3} \frac{dE}{dz} - \frac{\Omega_{M0}(1+z)^3}{2}. \quad (5.68)$$

$$U(z) = \frac{1}{D_C^2} + \left(\frac{1+z}{3} \right) \frac{D_C''}{D_C^3} - \frac{\Omega_{M0}(1+z)^3}{2}. \quad (5.69)$$

Na Figura 16, plotamos a reconstrução de $q(z)$ via GP e o resultado numérico de $q(z)$, conforme previsto pelo modelo investigado. À imagem esquerda mostra a reconstrução de $q(z)$ via GP obtida a partir dos dados de $H(z)$. Vemos que a reconstrução de $q(z)$ atinge valores positivos para $z < 0$ sendo menor que 1σ e compatível com o $q(z)$ do modelo analisado. Na imagem a direita apresentamos a reconstrução de $q(z)$ via GP usando os dados SNe Ia e também mostramos o $q(z)$ para o modelo estudado. Embora o $q(z)$ encontrado corresponda a 1σ na maior parte do intervalo de redshift, não obtemos valores de $q(z) > 0$ para a reconstrução dos dados SNe Ia.

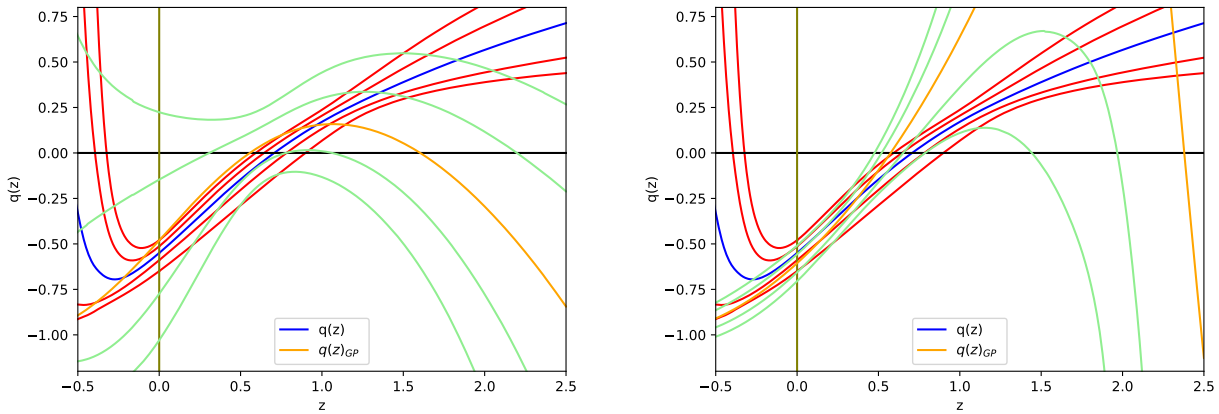


Figura 16 – Gráfico de $q(z)$ do modelo analisado junto com $q(z)$ reconstruído por GP. Também são mostrados os intervalos de confiança 1σ e 2σ . **Esquerda:** Reconstrução GP a partir de dados $H(z)$; **Direita:** Reconstrução GP do Pantheon.

A reconstrução do potencial adimensional $U(z)$ obtido pelos Processos Gaussianos tem uma tendência descendente, como mostra a Figura 17. Na mesma Figura também mostramos o potencial $U(z)$ do modelo que tem uma forma mais constante. A imagem da esquerda apresenta a reconstrução de $U(z)$ para os dados $H(z)$ em conjunto com o $U(z)$ do modelo analisado. Vemos a compatibilidade dos resultados dentro do intervalo de confiança de 1σ ou menos em toda a faixa de redshift. Na imagem à direita, mostramos $U(z)$ reconstruído a partir dos dados SNe Ia em contraste com a curva para $U(z)$

do modelo estudado. Vemos que ambos são compatíveis em um intervalo de confiança de 1σ ou menos em quase todo o intervalo de *redshift* analisado.

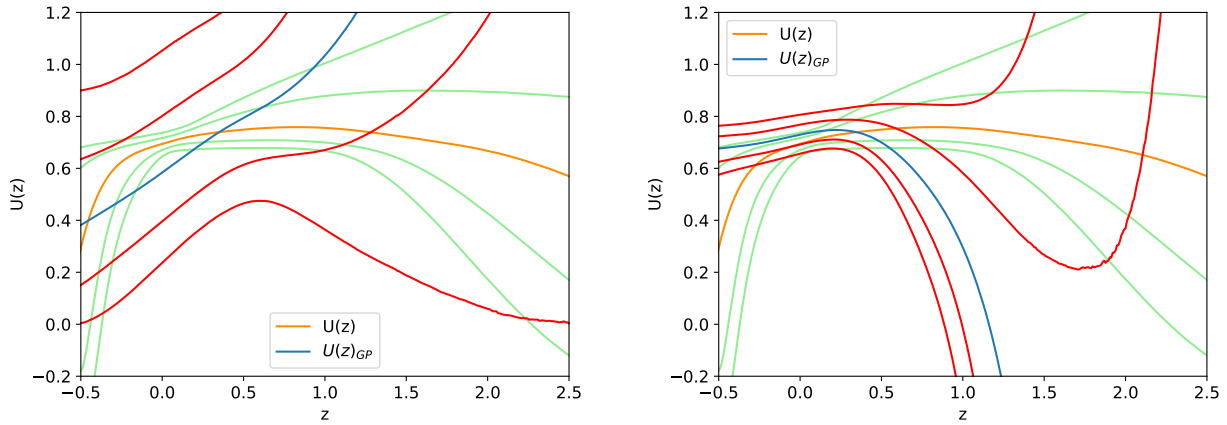


Figura 17 – Plot do $U(z)$ para o modelo analisado em conjunto com o $U(z)$ reconstruído pelo Processos Gaussianos. **Esquerda:** Reconstrução com obtida com os dados $H(z)$; **Direita:** Reconstrução a partir da amostra Pantheon.

6 MODELOS COSMOLÓGICOS COM INTERAÇÃO NO SETOR ESCURO

A possibilidade de interação entre a energia escura e a matéria escura é um comportamento interessante para estudar o setor escuro do Universo. Em busca de resolver o problema da coincidência, Wetterich propôs, em 1995, um trabalho no qual a energia escura era descrita por um campo escalar sujeito a um potencial exponencial que induzia a energia escura à forma de constante cosmológica dependente do tempo (WETTERICH, 1995). Utilizando também campos escalares com energia escura, Amendola realizou uma descrição profunda da interação de um campo de quintessência com a matéria escura obtendo o espectro de potencia da CMB com uma versão modificada do CMBFAST¹ (AMENDOLA, 2000).

Em 2005, Wang e Meng estudaram modelos com a possibilidade de decaimento do vácuo em matéria escura, como a equação de estado do vácuo é da forma $p = -\rho$, sendo esta do mesmo tipo da constante cosmológica, esses modelos são chamados $\Lambda(t)$ CDM (WANG; MENG, 2005). Os autores mostraram que diversos modelos com decaimento do vácuo podem ser elegantemente unificados nesta estrutura, além disso, propuseram uma nova lei de decaimento do vácuo a partir da modificação da dependência temporal da densidade de energia da matéria escura.

Modelos Cosmológicos com interação entre energia escura e matéria escura, os chamados modelos interação energia escura (IEE), em inglês Interaction Dark Energy (IDE), têm sido amplamente discutidos na literatura (FARRAR; PEEBLES, 2004; DAS; CORASANITI; KHOURY, 2006b; JESUS; PEREIRA S. H., 2009; CALDERA-CABRAL; MAARTENS; SCHAEFER, 2009; MAJEROTTO; VALIVIITA; MAARTENS, 2010; VALIVIITA; MAARTENS; MAJEROTTO, 2010; CHIMENTO, 2010; CAI; SU, 2010; GAVELA et al., 2010; SUN; YUE, 2012; POURTSIDOU; SKORDIS; COPELAND, 2013; SALVATELLI et al., 2014; SHAFIELOO et al., 2018; MARCONDES et al., 2016; WANG et al., 2016; MARTTENS et al., 2017; SANTOS et al., 2017; YANG; PAN; BARROW, 2018; COSTA et al., 2018; MARTTENS et al., 2019; CID et al., 2019; LANDIM, 2019; VALENTINO et al., 2020; JESUS et al., 2022; GÓMEZ-VALENT; PETTORINO; AMENDOLA, 2020; LUCCA; HOOPER, 2020; MARTTENS et al., 2021; VALENTINO, 2021; GARIAZZO et al., 2022; ANCHORDOQUI et al., 2021; NUNES et al., 2022; ZHAI et al., 2023; HOERNING et al., 2023; BERNUI et al., 2023; BENISTY et al., 2024; WANG et al., 2024; SILVA et al., 2024). Considerando a interação entre esses conteúdos materiais desconhecidos, poderíamos ter somente energia escura decaindo em matéria escura ou o inverso, onde DM decairia em DE. Também é possível o cenário onde ambas as possibilidades de interação ocorreriam ao mesmo tempo.

Modelos IEE são candidatos naturais para solucionar o PC, já que a densidade das componentes do setor escuro seria variável. Atualmente modelos IEE têm sido muito aplicados para resolver as tensões de H_0 (ABDALLA et al., 2022; VALENTINO et al., 2020; BERNUI et al., 2023; ANCHORDOQUI et al., 2021; HOERNING et al., 2023; VALENTINO et al., 2021a; BENISTY et al., 2024; NUNES et al., 2022) e S_8 (ABDALLA et al., 2022; ANCHORDOQUI et al., 2021; SHAH; MUKHERJEE; PAL, 2024; VALENTINO et al., 2020), principalmente a tensão em H_0 . Eles apresentam uma alternativa

¹ Para mais detalhes sobre o CMBFAST veja (SELJAK; ZALDARRIAGA, 1996).

interessante, pois podem ser aplicados para resolver cada uma das tensões separadamente ou ambas ao mesmo tempo (ABDALLA et al., 2022; ANCHORDOQUI et al., 2021; PANDEY; KARWAL; DAS, 2020). Porém, a busca pela solução das duas tensões simultaneamente é mais complicado.

No trabalho (MARTTENS et al., 2020) foi mostrado que um modelo dinâmico de energia escura e os modelos IEE se tornam indistinguíveis tanto no nível de fundo quanto no nível de perturbação linear. As propriedades termodinâmicas dos modelos IEE foram abordadas em (JESUS; PEREIRA S. H., 2009; SUN; YUE, 2012) e os autores apontam que a presença de um potencial químico não nulo para pelo menos um dos fluidos permite o decaimento do fluido de matéria escura em energia escura sem violação da segunda lei da termodinâmica. Esse processo também foi favorecido por dados cosmológicos em alguns casos. Já em (SALVATELLI et al., 2014), foi demonstrado que uma interação geral tardia entre matéria escura fria e energia do vácuo também está em concordância com os conjuntos de dados cosmológicos atuais, ocorrendo em torno de $z = 0, 9$.

Em (SHAFIELOO et al., 2018) foi proposta uma nova classe de modelos fenomenológicos de energia escura metaestáveis em que a taxa de decaimento DE não depende de parâmetros externos. Mais recentemente, (GÓMEZ-VALENT; PETTORINO; AMENDOLA, 2020) propôs um cenário em que partículas de DE interagem através de uma força mediada por um campo escalar, esse campo escalar seria o responsável por impulsionar a aceleração cósmica.

Neste Capítulo vamos estudar as propriedades dinâmica dos modelos IEE. Inicialmente, na seção 6.1, veremos a formulação teoria da evolução dinâmica do Universo nesse contexto. Em seguida, analisaremos um modelo de interação proposto para aliviar o Problema da Coincidência, os resultados dessa seção foram publicados em (JESUS et al., 2022). Na seções 6.3 e 6.4 realizaremos a análise em nível de *background* para uma classe específica de modelos IEE, os resultados dessa seção serão de grande importância no Capítulo 7. Essas análises serão enviadas para publicação em breve.

6.1 FORMULAÇÃO DINÂMICA DO MODELOS IEE

A interação entre a energia e matéria escura implica na evolução “acoplada” das densidades de energia dessas componentes. Utilizando um termo de interação fenomenológico Q , a conservação do tensor energia-momento para essas componentes é

$$\nabla_\mu T_{\text{DM}}^{\mu\nu} = \frac{Q u_{\text{DM}}^\nu}{a}, \quad (6.1)$$

$$\nabla_\mu T_{\text{DE}}^{\mu\nu} = -\frac{Q u_{\text{DM}}^\nu}{a}. \quad (6.2)$$

Sendo u_{DM}^ν a 4-velocidade da DM. No contexto da métrica FRLW, considerando o Universo espacialmente plano, a dinâmica cosmológica em nível de *background* para os modelos IEE é dada pela equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_b + \rho_r + \rho_{\text{DM}} + \rho_{\text{DE}}), \quad (6.3)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G$ e as leis de conservação para a densidade de energia bariônica ρ_b , densidade de energia de radiação ρ_r , densidade de energia da DM ρ_{DM} e densidade de energia da DE ρ_{DE} são

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0, \quad (6.4)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \quad (6.5)$$

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = Q, \quad (6.6)$$

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(1+w)\rho_{DE} = -Q. \quad (6.7)$$

Nas equações acima assumimos que os bárions e a matéria escura possuem uma equação de estado do tipo poeira, com pressão nula ($p_b = p_{DM} = 0$). Para a radiação, a equação de estado é da forma $p_r = \frac{\rho_r}{3}$ e a energia escura satisfaz

$$p_{DE} = w\rho_{DE}, \quad (6.8)$$

onde w é o parâmetro da equação de estado da energia escura. Temos $Q > 0$ quando DE está decaindo em DM enquanto para $Q < 0$ temos DM decaindo em DE. No trabalho de (JESUS; PEREIRA S. H., 2009) a análise termodinâmica mostrou que ambas as possibilidades de decaimento são permitidas. Vários termos de interação Q foram estudados na literatura (JESUS et al., 2022; JESUS; PEREIRA S. H., 2009; CALDERA-CABRAL; MAARTENS; SCHAEFER, 2009; MAJEROTTO; VALIVIITA; MAARTENS, 2010; VALIVIITA; MAARTENS; MAJEROTTO, 2010; CHIMENTO, 2010; CAI; SU, 2010; SUN; YUE, 2012; POURTSIDOU; SKORDIS; COPELAND, 2013; SALVATELLI et al., 2014; SHAFIELOO et al., 2018; GÓMEZ-VALENT; PETTORINO; AMENDOLA, 2020). A maioria deles são $Q \propto \rho_{DE}$ ou $Q \propto \rho_{DM}$. Modelos com $Q \propto H\rho_{DM}$ têm sido bastante explorados na literatura, porém, são repletos de instabilidades na evolução das perturbações de densidade (VALIVIITA; MAARTENS; MAJEROTTO, 2010; HE; WANG; ABDALLA, 2009). Modelos com $Q \propto H\rho_{DE}$ não possuem tais instabilidades. Em específico, o modelo com $Q = 3\varepsilon H\rho_{DE}$ foi estudado em (JESUS; PEREIRA S. H., 2009) e o parâmetro ε foi restringido com os dados observacionais SNe Ia como $\varepsilon = -0,026^{+0.021}_{-0.027}$ com intervalo de confiança de 1σ . Isso mostra que um valor negativo de Q é favorecido por observações no intervalo de 1σ , com o limite $\varepsilon = 0$ apenas ligeiramente afastado do valor de melhor ajuste.

Seguindo uma abordagem diferente, em (CAI; SU, 2010) descobriram que deve haver uma mudança no sinal de Q em torno de $z = 0,5$ em um modelo independente do termo de interação específico. Isso levanta um desafio notável para os modelos interativos, uma vez que as formas fenomenológicas usuais de interação não mudam de sinal durante a evolução cosmológica. Um modelo que engloba essa característica tão peculiar é apresentado em (SUN; YUE, 2012).

Um modelo com $Q = \Gamma\rho_{DE}$ foi proposto em (SHAFIELOO et al., 2018), que Γ é uma constante com dimensão de tempo⁻¹, relacionado ao decaimento da energia escura. Com uma equação de estado semelhante a um vácuo, $p_{DE} = -\rho_{DE}$, a equação (6.7) tem uma solução da forma $\rho_{DE}(t) = \rho_{DE}(t_0) \exp[-\Gamma(t - t_0)]$, exatamente como um decaimento radioativo da matéria, e Γ é relacionado com a “meia-vida” do DE. Tal modelo é conhecido como energia escura metaestável com decaimento radioativo. Uma análise mais recente à luz dos dados do Planck 2018 foi feita em (YANG et al., 2020), e uma análise de sistema dinâmico foi feita em (SZYDŁOWSKI; STACHOWSKI; URBANOWSKI,

2020). Um modelo fechado de interação muito interessante foi explorado recentemente com dados CMB completos, que oferecem uma solução muito atraente para a tensão constante de Hubble (YANG et al., 2021; VALENTINO et al., 2021a).

6.2 MODELOS IEE: $Q = \Gamma(t)\rho_{DE}$

O modelo Λ CDM padrão é caracterizado por uma equação constante do parâmetro de estado $w = \frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda} = -1$, onde ρ_Λ e p_Λ são constantes. As evoluções das densidades de matéria escura e Λ podem ser vistas em escala logarítmica na Figura 18 na imagem à esquerda. As densidades logarítmicas nesse caso são dadas por

$$\ln \rho_\Lambda = \ln \rho_{\Lambda 0}, \quad \ln \rho_{DM} = -3 \ln a + \ln \rho_{DM 0}. \quad (6.9)$$

Para modelos em que a equação do parâmetro de estado também é -1, mas com ρ_Λ e p_Λ variando no tempo, a densidade de energia associada a Λ muda com o tempo, e isso define um modelo $\Lambda(t)$ CDM com comportamento típico para a evolução das densidades dado na Figura 18 na imagem à direita.

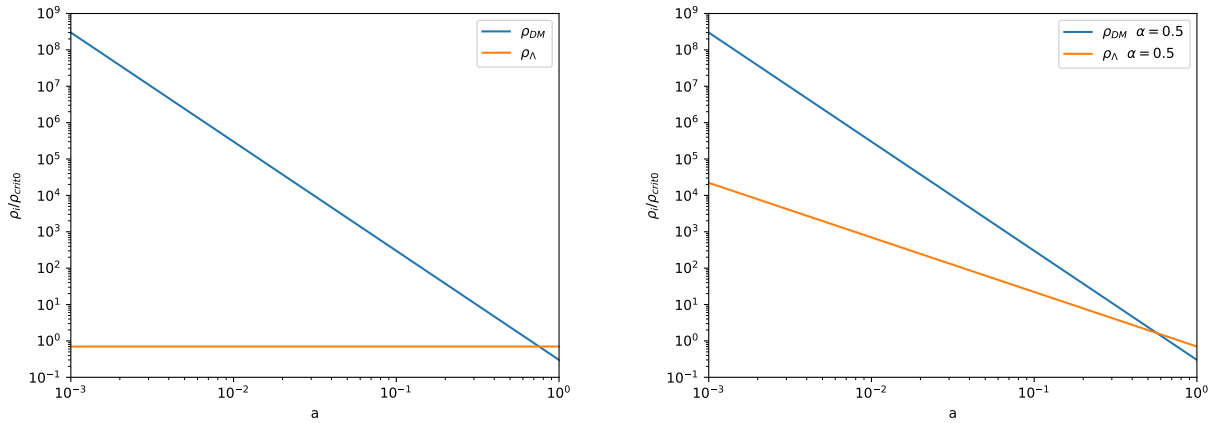


Figura 18 – Evolução das densidades do setor escuro para os modelos Λ CDM (à esquerda) e $\Lambda(t)$ CDM (à direita). As densidades são normalizadas pela densidade crítica atual, ρ_{crit0} .

Se a densidade de energia de $\Lambda(t)$ se aproxima da densidade de energia da matéria escura na Figura 18, resolvemos ou pelo menos aliviamos o problema da coincidência. Para isso, vamos tentar escrever:

$$\ln \rho_\Lambda = k_1 \ln a + \ln \rho_{\Lambda 0}, \quad \ln \rho_{DM} = k_2 \ln a + \ln \rho_{DM 0}. \quad (6.10)$$

Reorganizando as equações, obtemos:

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\Lambda 0}} = \left(\frac{\rho_{DM}}{\rho_{DM 0}} \right)^{k_1/k_2}, \quad (6.11)$$

que corresponde a:

$$\rho_{\text{DE}} = \beta \rho_{\text{DM}}^{\alpha}, \quad (6.12)$$

para um componente DE geral.

Assim, para testar se um modelo de interação pode resolver ou aliviar o CP, assumimos a relação (6.12) para o setor escuro. Com essa suposição, temos que, se os dados indicarem $\alpha \sim 0$, não há interação e o modelo ΛCDM é recuperado. Se $\alpha = 1$, a razão r é exatamente constante e o CP é resolvido. Para $0 < \alpha < 1$, podemos concluir que a interação entre matéria e energia escura pode aliviar o Problema da Coincidência. Na Figura 18 (à direita), vemos como $\alpha = 0.5$ alivia o CP. Abaixo derivamos qual termo de interação Q resulta na relação (6.12).

As densidades de energia da matéria escura e da energia escura são relacionadas por (6.12)

$$\rho_{\text{DE}} = \beta \rho_{\text{DM}}^{\alpha} \equiv f(\rho_{\text{DM}}), \quad (6.13)$$

com constante α e β , tal que para $\alpha \neq 1$ o parâmetro β é uma constante dimensional. E para $\alpha = 1$, vemos que a razão $\rho_{\text{DE}}/\rho_{\text{DM}}$ é apenas uma constante, β , mostrando que ambas as densidades evoluem exatamente da mesma maneira. Um pequeno desvio de α da unidade mostra uma dependência não trivial entre as densidades de energia e matéria escura. Inspirados no modelo metaestável de decaimento da energia escura apresentado acima, optamos por trabalhar com um termo de interação fenomenológica da forma

$$Q = \Gamma(t) \rho_{\text{DE}}, \quad (6.14)$$

onde $\Gamma(t)$ representa uma taxa de decaimento dependente do tempo. A forma do termo de interação Q determina a evolução dinâmica do modelo IEE.

De (6.7), (6.14) e (6.13) obtemos:

$$\Gamma(t) = -3H(1+w) - \alpha \frac{\dot{\rho}_{\text{DM}}}{\rho_{\text{DM}}}, \quad (6.15)$$

e de (6.6):

$$\frac{\dot{\rho}_{\text{DM}}}{\rho_{\text{DM}}} \left[\frac{1 + \alpha \beta \rho_{\text{DM}}^{\alpha-1}}{1 + \beta(1+w) \rho_{\text{DM}}^{\alpha-1}} \right] = -3H = -3 \frac{\dot{a}}{a}. \quad (6.16)$$

A equação acima pode ser integrada para obter $\rho_{\text{DM}}(a)$ em uma equação logarítmica implícita, que é útil apenas para o caso particular $w = -1$. Para o caso geral, a equação (6.16) deve ser resolvida numericamente.

6.2.1 Caso $w \neq -1$: Modelo XCDM com Interação

No caso mais geral, com $w \neq -1$, a equação (6.16) não pode ser resolvida analiticamente para obter $\rho_{\text{DM}}(a)$. Assim, nesse caso, optamos por resolver numericamente as equações diferenciais (6.6)-(6.16) para obter ρ_{DM} , ρ_{DE} e H em função do fator de escala ou redshift.

Com o objetivo de restringir o modelo com dados, reescrevemos a equação (6.16) em termos

de *redshift* e em termos de quantidades adimensionais. Então, usando as definições $r_{\text{DM}} \equiv \frac{\rho_{\text{DM}}}{\rho_{\text{DM}0}}$, $r_{\text{DE}} \equiv \frac{\rho_{\text{DE}}}{\rho_{\text{DE}0}}$ e os parâmetros de densidades, $\Omega_{\text{DM}0}$ e $\Omega_{\text{DE}0}$ dados pela relação (2.39), realizando a mudança da variável temporal para o *redshift* utilizando a expressão (2.67), podemos reescrever a equação (6.16) como:

$$\frac{dr_{\text{DM}}}{dz} = \frac{3r_{\text{DM}}}{1+z} \left[\frac{\Omega_{\text{DM}0} + (1+w)\Omega_{\text{DE}0}r_{\text{DM}}^{\alpha-1}}{\Omega_{\text{DM}0} + \alpha\Omega_{\text{DE}0}r_{\text{DM}}^{\alpha-1}} \right], \quad (6.17)$$

com a condição inicial $r_{\text{DM}}(z=0) = 1$. A relação (6.13) agora é simplesmente:

$$r_{\text{DE}} = r_{\text{DM}}^{\alpha}, \quad (6.18)$$

e o $E(z)$ é dado por:

$$E(z) = [\Omega_{b0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{\text{DM}0}r_{\text{DM}}(z) + \Omega_{\text{DE}0}r_{\text{DE}}(z)]^{1/2}. \quad (6.19)$$

Quando deixamos o w da EOS da energia escura como parâmetro livre, permitindo $w \neq -1$, temos o chamado modelo XCDM. Neste caso, os dados SNe Ia+ $H(z)$ são insuficientes para restringir os parâmetros livres ($\Omega_{b0}, \Omega_{\text{DM}0}, w, \alpha, H_0$) e nós temos que adicionar restrições de outros dados. Assim, adicionamos as restrições de Planck 2018 (AGHANIM et al., 2020) com os chamados priors de distância, que incluem o parâmetro de deslocamento ℓ_A e $\Omega_{b0}h^2$. Também incluímos restrições do BAO de várias pesquisas.

Os priors assumidos sobre os parâmetros livres são planos e englobam um grande intervalo, abrangendo toda a região não desprezível das funções de verossimilhanças, exceto onde limites físicos eram necessários, como $\Omega_{\text{DM}} > 0$ e $\Omega_b > 0$. Os priors escolhidos podem ser vistos na Tabela 5.

Parâmetro	Intervalo do prior plano
Ω_{b0}	$[0, 0.2]$
$\Omega_{\text{DM}0}$	$[0, 1]$
w	$[-2, 0]$
α	$[-1, 1]$
H_0 (km/s/Mpc)	$[20, 120]$

Tabela 5 – Priors escolhidas para os parâmetros livres.

A Tabela 6 apresenta as restrições combinadas nos parâmetros livres do modelo de interação DM-DE do Pantheon, do $H(z)$, dos dados BAO e do Planck 2018 para ambos os priors, ou seja, Λ CDM-plano e XCDM. O valor do parâmetro de densidade da matéria $\Omega_{\text{M}0} = \Omega_{\text{DM}0} + \Omega_{b0}$, calculado com as quantidades da Tabela 6 com intervalo de confiança de 1σ é $\Omega_{\text{M}0} = 0.3196 \pm 0.0063$ para o prior Λ CDM-plano e $\Omega_{\text{M}0} = 0.3193 \pm 0.0064$ para o prior XCDM, que estão muito próximos do valor obtido em Planck 2018 (AGHANIM et al., 2020), $\Omega_{\text{M}0} = 0.3153 \pm 0.0073$. Os valores para H_0 são também compatíveis com o Planck 2018 (AGHANIM et al., 2020), $H_0 = 67, 36 \pm 0, 54$ km/s/Mpc, para ambos os priors. Os resultados obtidos para o parâmetro w da EOS, como pode ser visto na Tabela 6, é compatível com -1 a $1,6\sigma$ para o prior Λ CDM-plano e a $1,5\sigma$ para o prior XCDM. Isso mostra que a energia escura do tipo fantasma, com ($w < -1$), é ligeiramente favorecida por essas análises.

Outra característica interessante da IEE é que o parâmetro α agora muda de sinal quando comparado com $\Lambda(t)$ CDM. Para o prior Λ CDM o valor obtido é $\alpha = -0.078 \pm 0.046$, e para o prior XCDM é $\alpha = -0.076 \pm 0.047$, que são marginalmente compatíveis com zero em 1.7 e 1,6 σ , respectivamente. Para uma melhor visualização dos resultados, plotamos as restrições dos parâmetros livres em até 2 σ de intervalo de confiança.

Parâmetros	Prior Λ CDM-plano	Prior XCDM
Ω_{b0}	$0.0496^{+0.0012+0.0024}_{-0.0012-0.0023}$	$0.0497 \pm 0.0012 \pm 0.0023$
Ω_{DM0}	$0.2700^{+0.0062+0.013}_{-0.0062-0.012}$	$0.2696^{+0.0063+0.013}_{-0.0063-0.012}$
w	$-1.071 \pm 0.045 \pm 0.090$	$-1.068^{+0.045+0.090}_{-0.045-0.091}$
α	$-0.078^{+0.046+0.094}_{-0.046-0.092}$	$-0.076 \pm 0.047 \pm 0.093$
H_0 (km/s/Mpc)	$67.13 \pm 0.74 \pm 1.5$	$67.09 \pm 0.74 \pm 1.5$

Tabela 6 – Plot das restrições, com intervalo de confiança de 68% e 95% , sobre os parâmetros livres do modelo IEE para a combinação dos dados $H(z)$ +Planck18+BAO+Pantheon.

Na Figura 19 estão as restrições obtidas com o prior Λ CDM e na Figura 20 os resultados com prior XCDM.

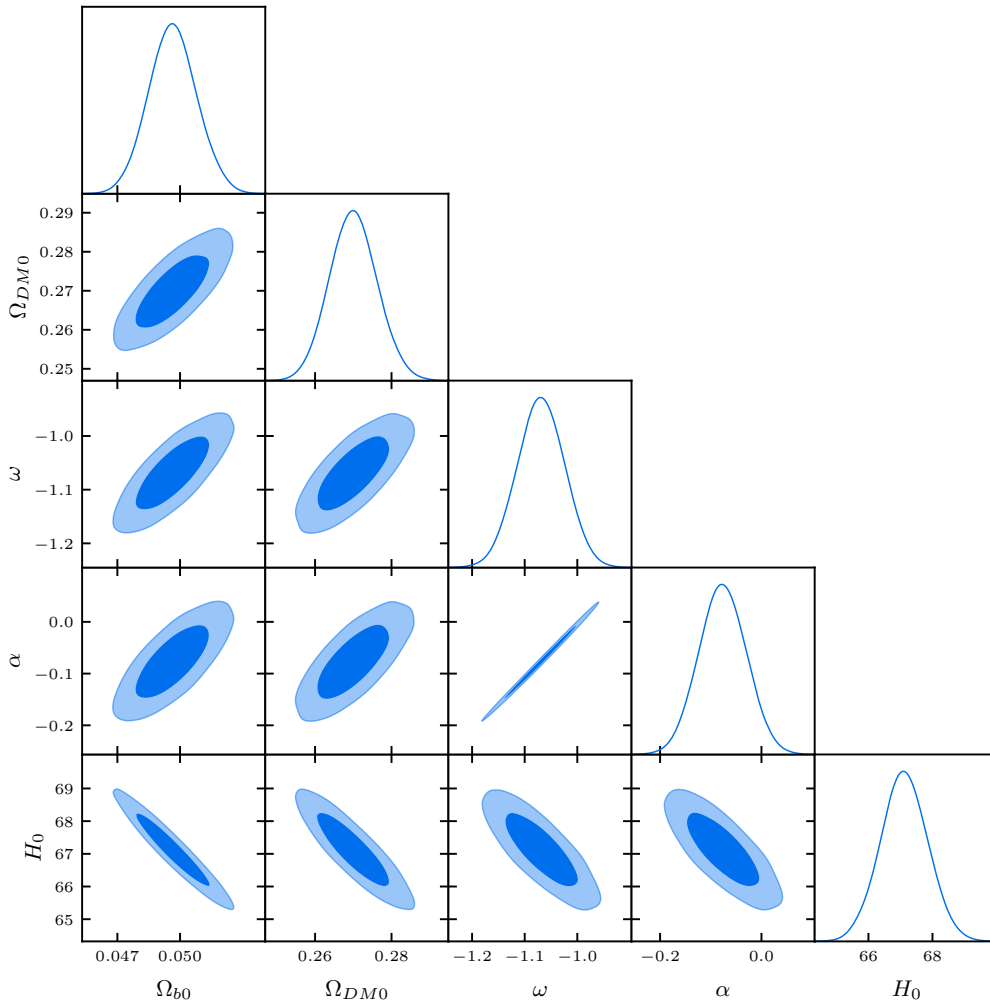


Figura 19 – Plot das restrições, com intervalo de confiança de 68% e 95%, sobre os parâmetros livres do modelo IEE com $w \neq -1$. Obtidas da combinação das amostras $H(z)$ +Planck18 (prior Λ CDM-plano)+BAO+Pantheon

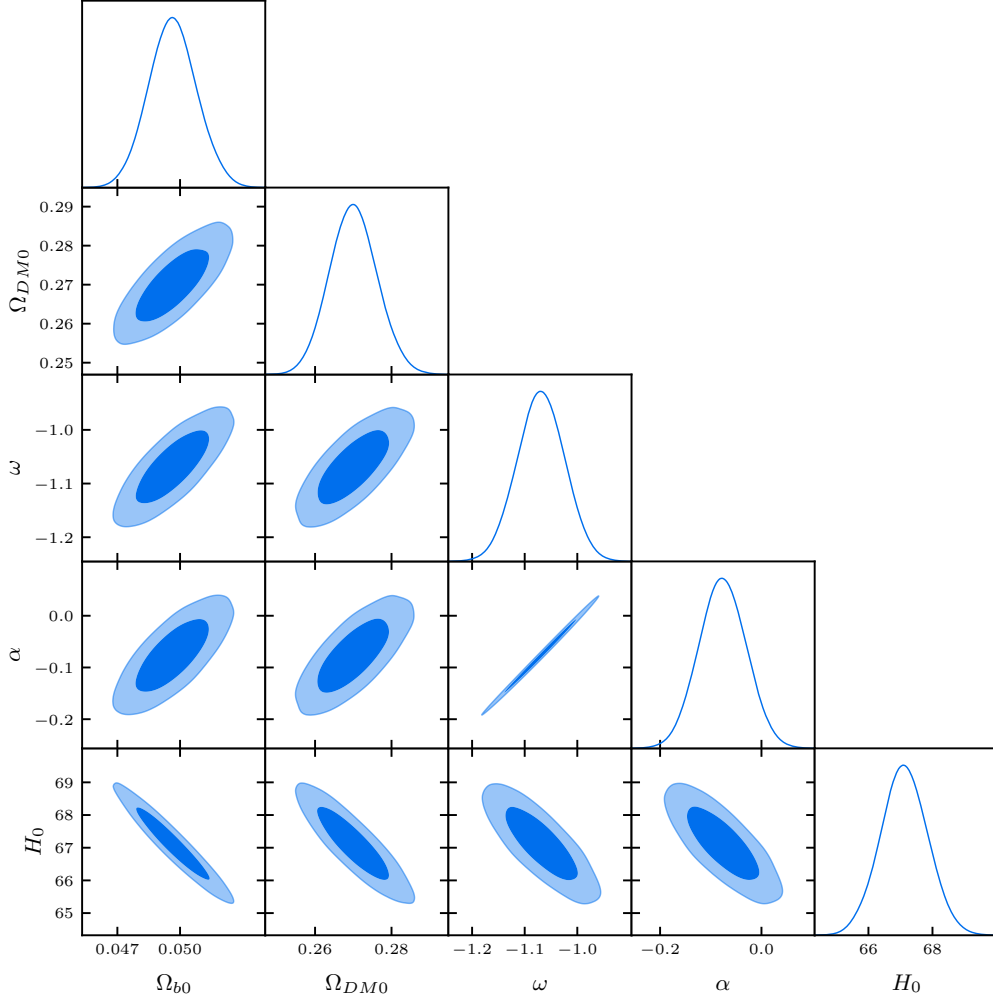


Figura 20 – Restrições sobre os parâmetros livres do modelo IEE com $w \neq -1$, com intervalo de confiança de 68% e 95%. Provenientes da combinação das amostras $H(z)$ +Planck18(prior XCDM)+BAO+Pantheon.

6.2.2 Caso $w = -1$: Modelo $\Lambda(t)$ CDM

O caso $w = -1$ pode ser resolvido analiticamente com o auxílio da função w de Lambert. A solução para $\rho_{\text{DM}}(z)$ é:

$$\rho_{\text{DM}} = \rho_{\text{DM}0} \left[\frac{W(\alpha r_0 e^{\alpha r_0} (1+z)^{3(\alpha-1)})}{\alpha r_0} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (6.20)$$

Definindo a razão $r \equiv \frac{\rho_{\text{DE}}}{\rho_{\text{DM}}}$, a relação (6.12) resulta em $r = \beta \rho_{\text{DM}}^{\alpha-1}$, de modo que podemos usar a razão DE-DM hoje, $r_0 = \beta \rho_{\text{DM}0}^{\alpha-1}$, para reescrever a solução (6.20) como

$$\rho_{\text{DE}}(z) = \rho_{\text{DE}0} \left[\frac{W(\alpha r_0 e^{\alpha r_0} (1+z)^{3(\alpha-1)})}{\alpha r_0} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \quad (6.21)$$

E para o $E(z)$ temos

$$E^2 = \frac{H(z)^2}{H_0^2} = \Omega_{b0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \frac{\rho_{DM} + \rho_{DE}}{\rho_{crit0}}. \quad (6.22)$$

No caso do modelo $\Lambda(t)$ CDM, ou seja, um modelo IEE onde a energia escura tem EOS $w = -1$, fixamos o parâmetro de densidade dos bárions em $\Omega_{b0} = 0.0493$ de acordo com as restrições impostas pela CMB do Planck 2018 (AGHANIM et al., 2020), que também está de acordo com as restrições da Nucleossíntese do Big Bang. Assim, os parâmetros livres são H_0 , Ω_{DM0} e α .

Os parâmetros livres são fortemente restringidos por SNe Ia em combinação para $H(z)$, como pode ser visto na Figura 21 e Figura 22 e os resultados quantitativos são apresentados na Tabela 7.

Parâmetro	$\Lambda(t)$ CDM
Ω_{DM0}	$0.287^{+0.036+0.071}_{-0.036-0.075}$
α	$0.109^{+0.062+0.14}_{-0.072-0.12}$
H_0 (km/s/Mpc)	$68.7^{+1.1+2.2}_{-1.1-2.1}$

Tabela 7 – Restrições sobre os parâmetros livres do modelo IEE $\Lambda(t)$ CDM para a combinação de dados $H(z)$ +Pantheon, exibidas em 68% e 95% de intervalo de confiança.

Como observamos na Figura 21, principalmente no plano $\Omega_{DM0} - \alpha$, a combinação de SNe Ia e $H(z)$ reduz fortemente o espaço de parâmetros. Na Tabela 7, o valor para H_0 está muito próximo do valor obtido para Λ CDM em Planck (2018) (AGHANIM et al., 2020), ou seja, $H_0 = 67,4 \pm 00,5$ km/s/Mpc. Com nosso valor fixo de $\Omega_{b0} = 0,0493$, obtemos $\Omega_{M0} = \Omega_{b0} + \Omega_{DM0} = 0,336 \pm 0,036$ com intervalo de confiança de 68%, que está muito próximo do valor obtido em Planck 2018 (AGHANIM et al., 2020), $\Omega_{M0} = 0.315 \pm 0.007$. O valor obtido para α , como pode ser visto na Tabela 7, é compatível com zero apenas com $1,6\sigma$, portanto, a interação não é descartada por esta análise.

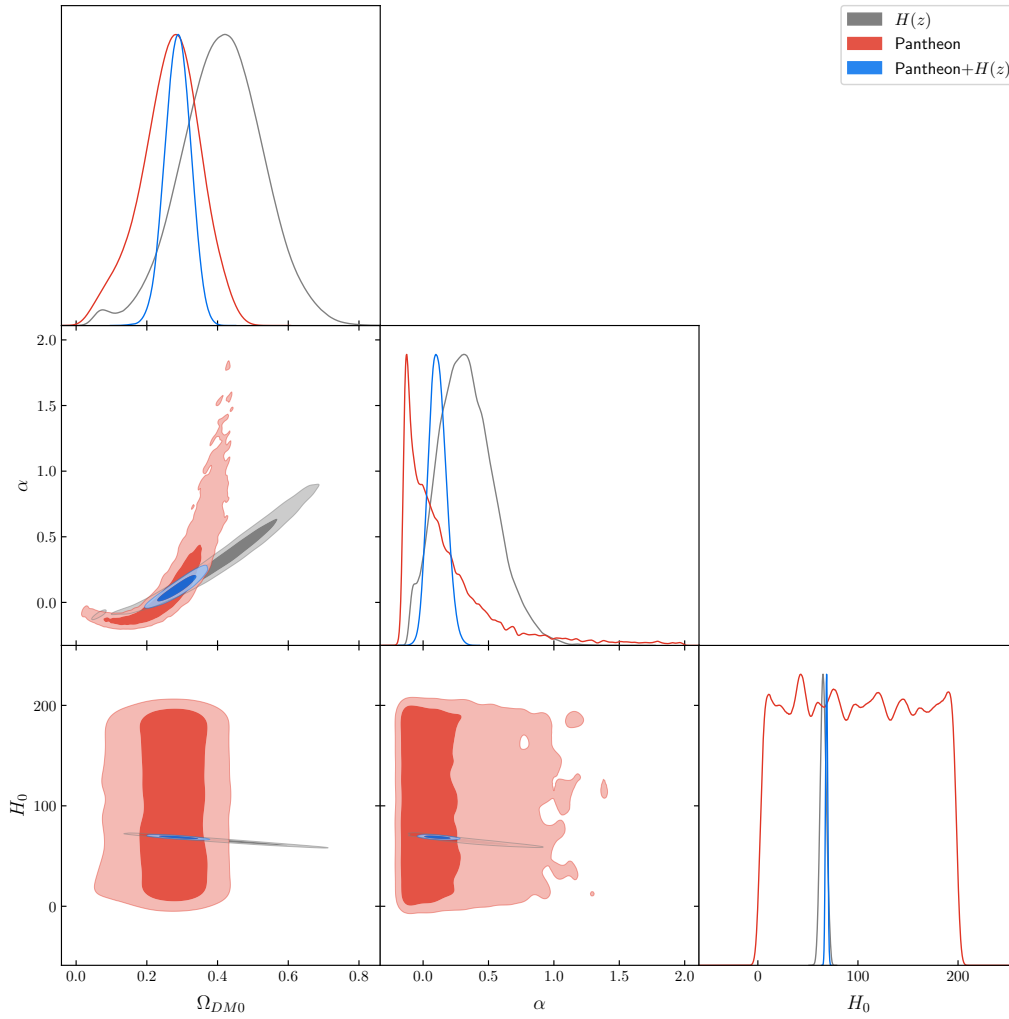


Figura 21 – Plot das restrições para o modelo $\Lambda(t)$ CDM obtidas das amostra Pantheon, $H(z)$ e para o combinado Pantheon+ $H(z)$.

A Figura 22 mostra com mais detalhes as restrições sobre os parâmetros livres (Ω_{DM0} , α , H_0). Podemos ver que os parâmetros são muito restritos, com uma correlação maior no plano $\Omega_{DM0} - \alpha$.

Em (NUNES; VALENTINO, 2021) os autores estudam outro modelo, $\Lambda(t)$ CDM, em que assumem $Q = aH\xi\rho_{DE}$ e $w = -0.999$. É interessante notar que usando dados do Pantheon, BAO e BBN, eles encontram $\xi < 0$, o que implica $Q < 0$, enquanto encontramos $\alpha > 0$, que implica $Q > 0$ (energia escura decaindo em matéria escura). A diferença entre esses resultados deve vir das diferentes dependências dos termos de interação.

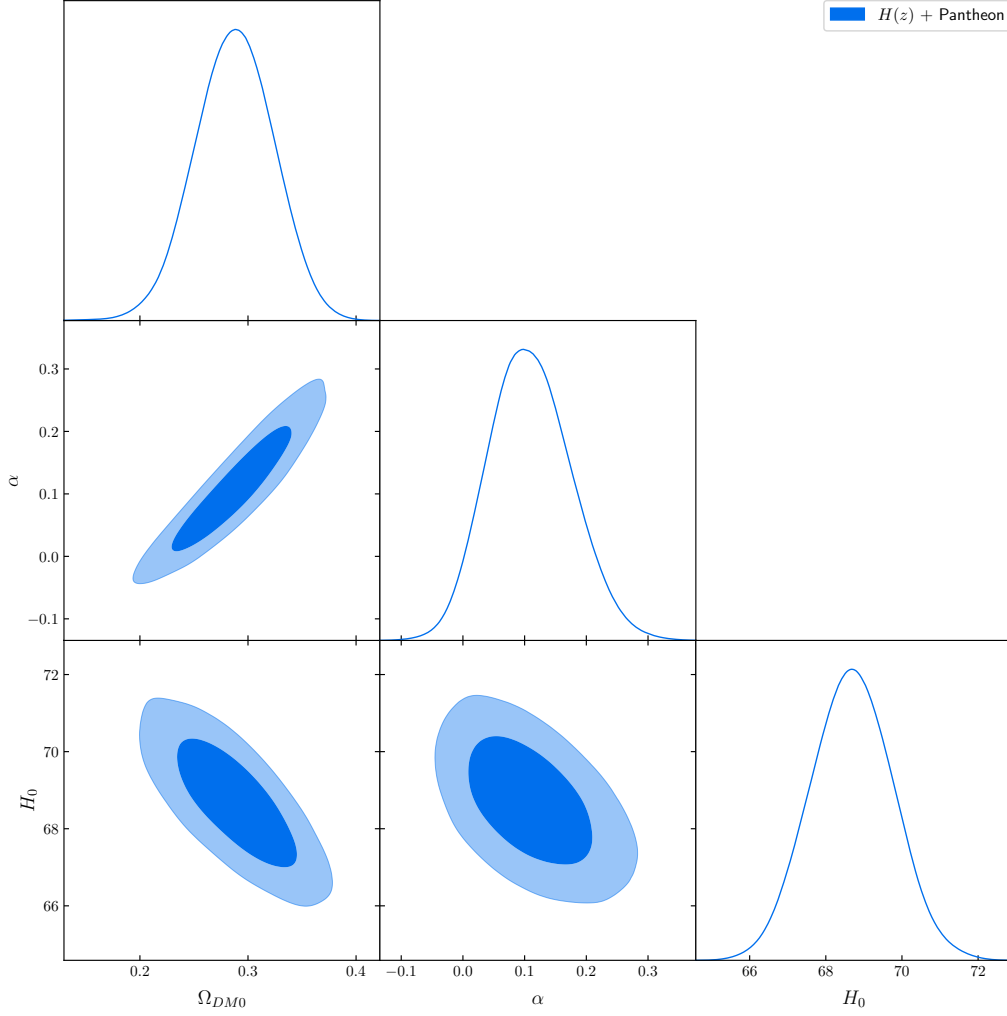


Figura 22 – Plot das restrições, em até 2σ de intervalo de confiança, para o modelo $\Lambda(t)$ CDM obtidas da combinação $H(z)$ +Pantheon.

6.3 MODELO IEE: $Q = \varepsilon \mathcal{H} \rho_\Lambda$

Ainda no contexto dos modelos $\Lambda(t)$ CDM plano, supondo um termo de interação fenomenológico Q da forma

$$Q = \varepsilon \mathcal{H} \rho_\Lambda, \quad (6.23)$$

sendo $\mathcal{H} \equiv aH$, as equações diferenciais para as densidades de energia ρ_{DM} e ρ_{DE} dadas, respectivamente, por (6.6) e (6.7), dependem do tempo. Porém, é mais vantajoso expressá-las em termo do fator de escala $a(z)$. Vamos então realizar uma mudança da variável temporal para o fator de escala, através da relação (2.29),

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial}{\partial a} = aH \frac{\partial}{\partial a}.$$

Assim, as equações (6.6) e (6.7) em termos do fator de escala tomam a forma:

$$a \frac{\partial \rho_{\text{DM}}}{\partial a} + 3\rho_{\text{DM}} = \varepsilon a \rho_{\Lambda} , \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial \rho_{\Lambda}}{\partial a} = -\varepsilon \rho_{\Lambda} . \quad (6.25)$$

A solução para a ED (6.25) é dada por:

$$\rho_{\Lambda} = e^{-\varepsilon a} C_1 . \quad (6.26)$$

Sendo a constante de integração C_1 determinada a partir da condição inicial hoje, em $a = 1$,

$$C_1 = \rho_{\Lambda 0} \cdot e^{\varepsilon} , \quad (6.27)$$

e assim a densidade de energia ρ_{Λ} , é escrita como

$$\rho_{\Lambda} = \rho_{\Lambda 0} e^{\varepsilon(1-a)} . \quad (6.28)$$

Então a equação (6.6) para ρ_{DM} toma a forma

$$a \frac{\partial \rho_{\text{DM}}}{\partial a} + 3\rho_{\text{DM}} = \varepsilon a \rho_{\Lambda 0} e^{\varepsilon(1-a)} , \quad (6.29)$$

cujas solução é dada por:

$$\rho_{\text{DM}} = \frac{c_1}{a^3} - \frac{\rho_{\Lambda 0} e^{(1-a)\varepsilon} (a^3 \varepsilon^3 + 3a^2 \varepsilon^2 + 6a\varepsilon + 6)}{a^3 \varepsilon^3} . \quad (6.30)$$

A constante de integração c_1 é determinada hoje em $a = 1$, como sendo

$$c_1 = \frac{(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 6) \rho_{\Lambda 0}}{\varepsilon^3} + \rho_{\text{DM}0} . \quad (6.31)$$

Temos então, que a densidade de energia da matéria é dada por

$$\rho_{\text{DM}}(a) = \frac{\rho_{\Lambda 0} [-e^{\varepsilon(1-a)} (a^3 \varepsilon^3 + 3a^2 \varepsilon^2 + 6a\varepsilon + 6) + \varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 6]}{a^3 \varepsilon^3} + \frac{\rho_{\text{DM}0}}{a^3} . \quad (6.32)$$

Substituindo (6.32) e (6.28), a equação de Friedmann adimensional, $E(a)$, toma a forma:

$$E(a)^2 = \frac{e^{-a\varepsilon}}{a^3 \varepsilon^3} [e^{a\varepsilon} (\varepsilon^3 (\Omega_{\text{M}0} + \Omega_{\Lambda 0}) + \Omega_{\Lambda 0} (3\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 6)) - 3e^{\varepsilon} \Omega_{\Lambda 0} (a^2 \varepsilon^2 + 2a\varepsilon + 2)] . \quad (6.33)$$

Sendo mais vantajoso para análise numérica utilizar o parâmetro $\Omega_{\text{M}0} = \Omega_{\text{DM}0} + \Omega_{b0}$, já que a amostra de dados utilizada nas análises estatísticas não restringe a densidade de bárions e por serem dados de baixo redshift, o termo de radiação foi omitido. Com base na descrição estatística discutida no (4), iremos vincular os parâmetros livres do modelo IEE com $Q = \varepsilon \mathcal{H} \rho_{\Lambda(t)}$ com os dados de SNe Ia da amostra Pantheon+SH0ES (BROUT et al., 2022) e as medidas de $H(z)$ provenientes dos 32 dados

de CCs, com matriz de covariância completa (MORESCO et al., 2022). Os priors impostos sobre o conjunto de parâmetros livres analisado estão indicados na Tabela 8. Foram utilizados priors planos bem abrangentes sobre os parâmetros, permitindo que o χ^2 seja avaliado em um grande intervalo dos parâmetros.

Parâmetro	Intervalo do prior plano
Ω_{M0}	$[0, 1.0]$
ϵ	$[-1, 1]$
H_0 (km/s/Mpc)	$[20, 120]$

Tabela 8 – Priors escolhidos para os parâmetros livres.

As restrições obtidas estão apresentadas, em até 2σ de intervalo de confiança, na Tabela 9. Foi encontrado $H_0 = 73.0^{+2.0}_{-1.9}$, $\Omega_{M0} = 0.354^{+0.069}_{-0.078}$ e $\epsilon = 0.32^{+0.58}_{-0.68}$, todos em 2σ . Os valores de H_0 e Ω_{M0} obtidos estão de acordo com os obtidos para o modelo Λ CDM-plano utilizando a mesma amostra de dados.

Parâmetros	$Q = \epsilon \mathcal{H} \rho_\Lambda$
$H_0 (km/s/Mpc)$	$73.0^{+2.0}_{-1.9}$
Ω_{M0}	$0.354^{+0.069}_{-0.078}$
ϵ	$0.32^{+0.58}_{-0.68}$

Tabela 9 – Restrições sobre os parâmetros livres, com intervalo de confiança de 2σ , obtidas da combinação das amostras Pantheon+SH0ES e CCs.

Na Figura 23, podemos visualizar as restrições dos parâmetros livres, em até 2σ de intervalo de confiança, para cada conjunto de dados utilizado e também plotamos a combinação das amostras. Para uma melhor visualização, na Figura 24 estão apresentadas apenas as restrições da combinação das amostras.

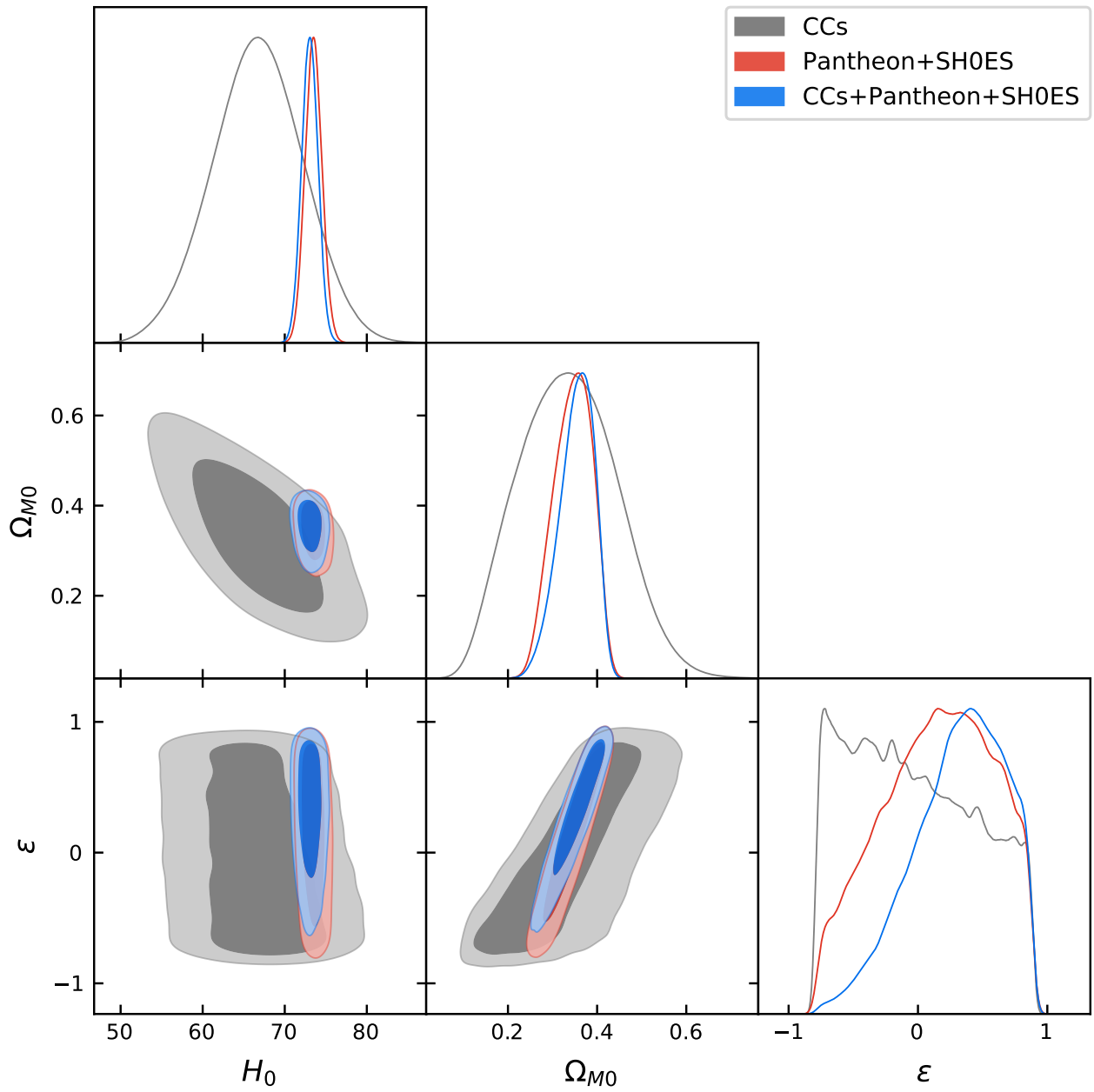


Figura 23 – Plot das restrições, em até 2σ de intervalo de confiança, dos parâmetros livres para cada amostra de dados Pantheon+SH0ES e CCs e para combinação delas.

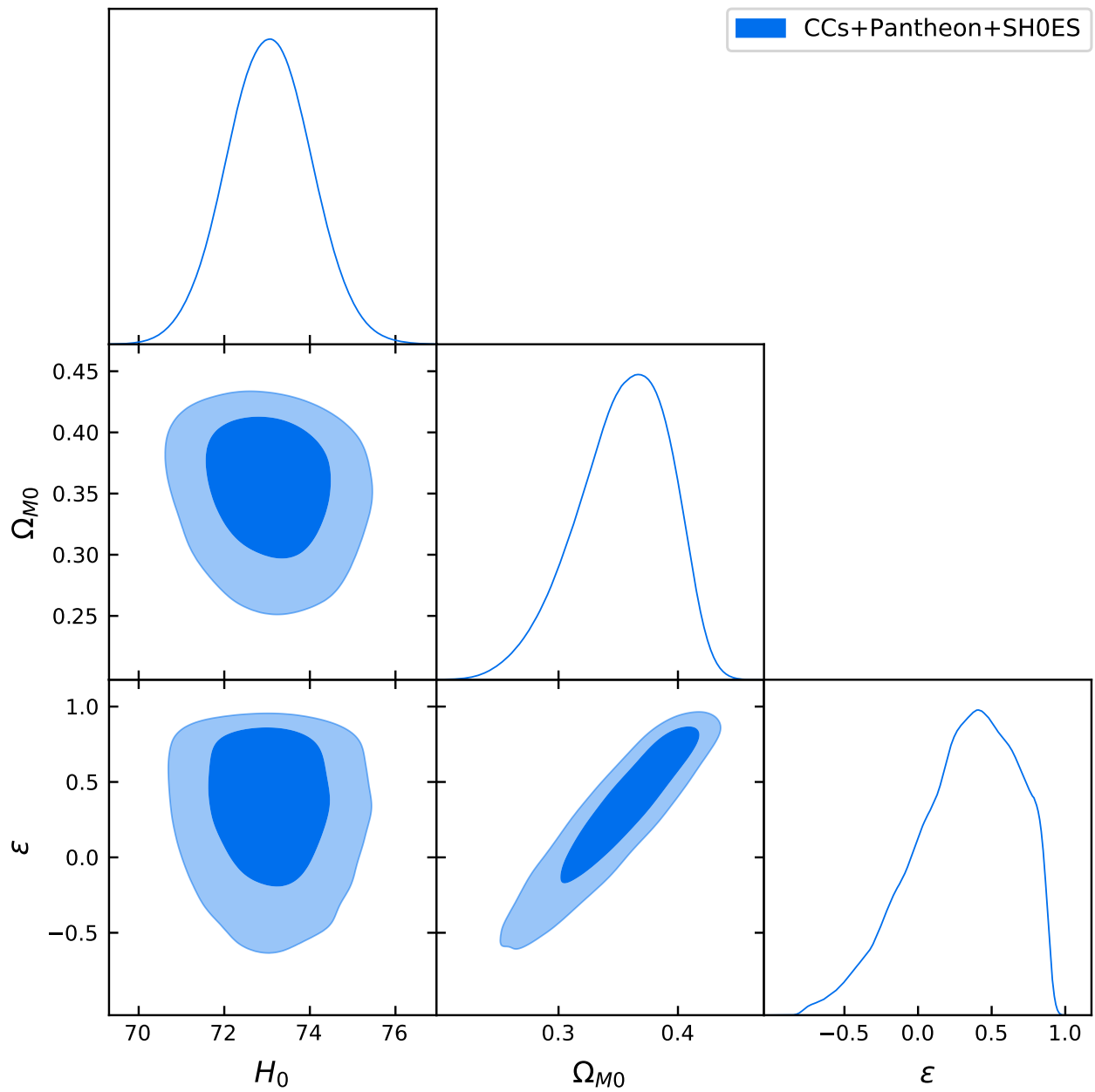


Figura 24 – Plot das restrições, em até 2σ de intervalo de confiança, dos parâmetros livres para Combinação das amostra de dados Pantheon+SH0ES e CCs.

6.4 MODELO IEE: $Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$

Analisaremos agora a evolução dinâmica de um modelo cosmológico IEE do tipo $\Lambda(t)$ CDM plano, sendo o termo de interação fenomenológico, Q , dado por:

$$Q = \varepsilon H \rho_\Lambda . \quad (6.34)$$

Com a mudança da variável temporal para o fator de escala dado por (2.29), as equações (6.6) e (6.7) são escritas como:

$$a \frac{\partial \rho_{\text{DM}}}{\partial a} + 3\rho_{\text{DM}} = \varepsilon \rho_\Lambda , \quad (6.35)$$

$$a \frac{\partial \rho_\Lambda}{\partial a} = -\varepsilon \rho_\Lambda . \quad (6.36)$$

A equação diferencial para a densidade de energia ρ_Λ expressa em (6.36) possui solução dada por:

$$\rho_\Lambda = a^{-\varepsilon} A_1 . \quad (6.37)$$

A constante de integração A_1 é determinada hoje, em $a = 1$,

$$A_1 = \rho_{\Lambda 0} . \quad (6.38)$$

Temos então que a densidade de energia ρ_Λ é

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} a^{-\varepsilon} , \quad (6.39)$$

e para (6.35) obtemos

$$a \frac{\partial \rho_{\text{DM}}}{\partial a} + 3\rho_{\text{DM}} = \varepsilon \rho_{\Lambda 0} a^{-\varepsilon} , \quad (6.40)$$

a solução da EDP acima é dada por

$$\rho_{\text{DM}} = \frac{B_1}{a^3} + \frac{\varepsilon \rho_{\Lambda 0} a^{-\varepsilon}}{3 - \varepsilon} , \quad (6.41)$$

a constante de integração B_1 é determinada hoje em $a = 1$ como sendo

$$B_1 = \frac{\varepsilon (\rho_{\Lambda 0} + \rho_{\text{DM}0}) - 3\rho_{\text{DM}0}}{\varepsilon - 3} , \quad (6.42)$$

assim, a densidade de energia ρ_{DM} é expressa por

$$\rho_{\text{DM}}(a) = \frac{a^{-\varepsilon-3} [a^\varepsilon ((\varepsilon - 3) \rho_{\text{DM}0} + \varepsilon \rho_{\Lambda 0}) - a^3 \varepsilon \rho_{\Lambda 0}]}{\varepsilon - 3} . \quad (6.43)$$

Nesse contexto, utilizando a densidade de energia (6.43) para ρ_{DM} e a densidade de energia ρ_Λ

dada em (6.39), a equação de Friedmann é dada por

$$H(a)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{a^{-\varepsilon-3}}{(\varepsilon-3)} \left(a^\varepsilon [(\varepsilon-3)(\rho_{DM0} + \rho_{b0}) + \varepsilon\rho_{\Lambda0}] - 3a^3\rho_{\Lambda0} \right). \quad (6.44)$$

Assim como foi feito na seção anterior, é mais vantajoso para a análise numérica utilizar o parâmetro $\Omega_{M0} = \Omega_{DM0} + \Omega_{b0}$, uma vez que a amostra de dados utilizada nas análises estatísticas não restringe a densidade de bárions e, por serem dados de baixo redshift, o termo de radiação foi omitido. Os vínculos observacionais foram realizados da mesma forma como na seção anterior: com base nos priors da Tabela 8, amostramos o χ^2 sobre o espaço dos parâmetros livres para poder restringi-los com base nos dados de SNe Ia da amostra Pantheon+SH0ES, nas medidas dos 32 dados de cronômetros cósmicos e na combinação delas. Para esse modelo os valores obtidos foram $H_0 = 73.1^{+2.0}_{-2.0}$, $\Omega_{M0} = 0.354^{+0.069}_{-0.075}$ e $\varepsilon = 0.27^{+0.51}_{-0.56}$ como apresentado na Tabela 10.

Parâmetros	$Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$
$H_0 (km/s/Mpc)$	$73.1^{+2.0}_{-2.0}$
Ω_{M0}	$0.354^{+0.069}_{-0.075}$
ε	$0.27^{+0.51}_{-0.56}$

Tabela 10 – Restrições dos parâmetros livres com 2σ intervalo de confiança obtidas da análise combinada dos dados de CCs e do Pantheon+SH0ES.

As restrições sobre os parâmetros livres para cada uma das amostra e para análise combinada estão plotadas na (Figura 25) em até 2σ de intervalo de confiança. Somente a análise combinada está na Figura 26 para melhor visualização.

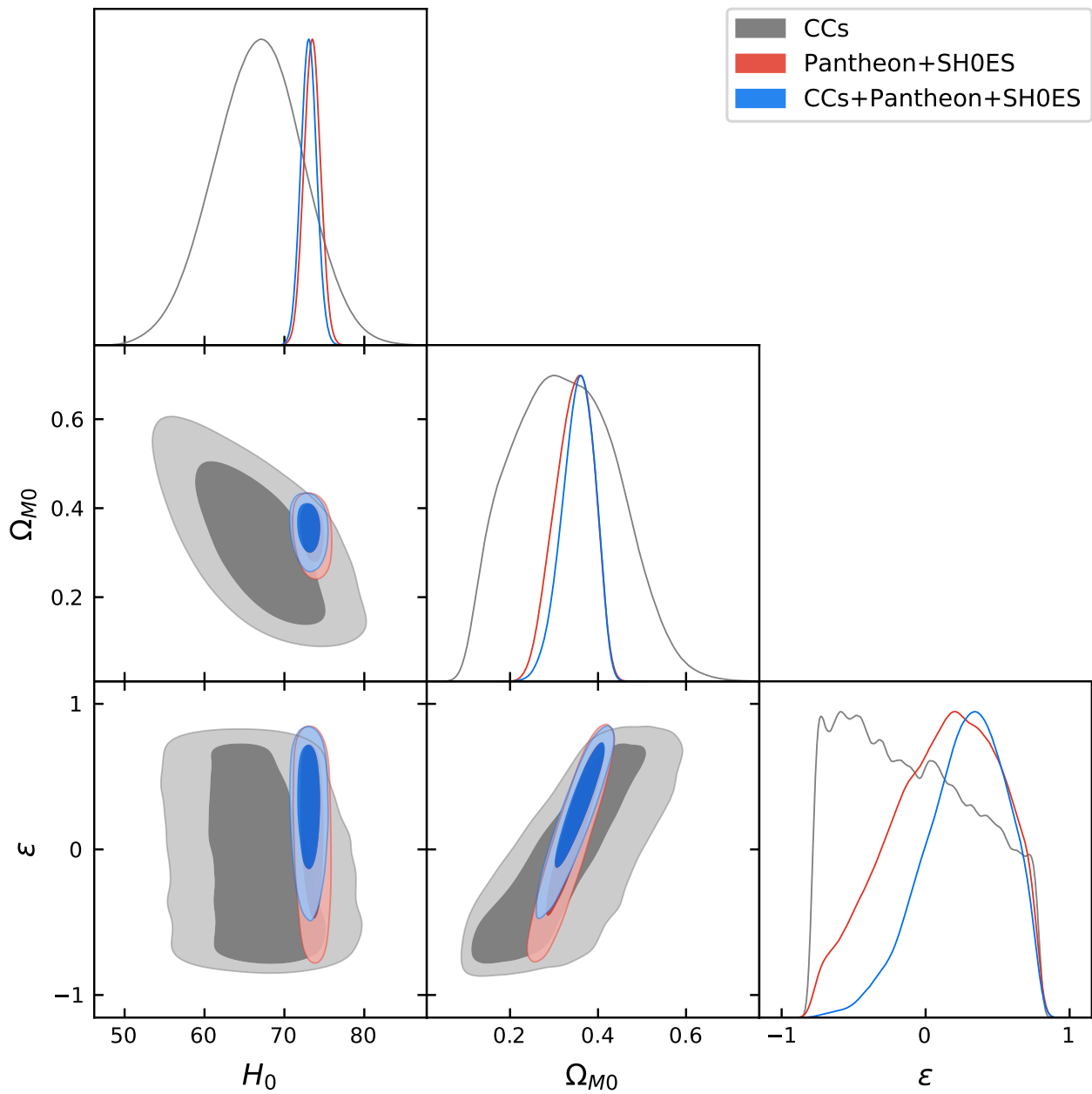


Figura 25 – Plot das restrições dos parâmetros livres, em 2σ intervalo de confiança, para cada amostra de dados de CCs e Pantheon+SH0ES e para a combinação

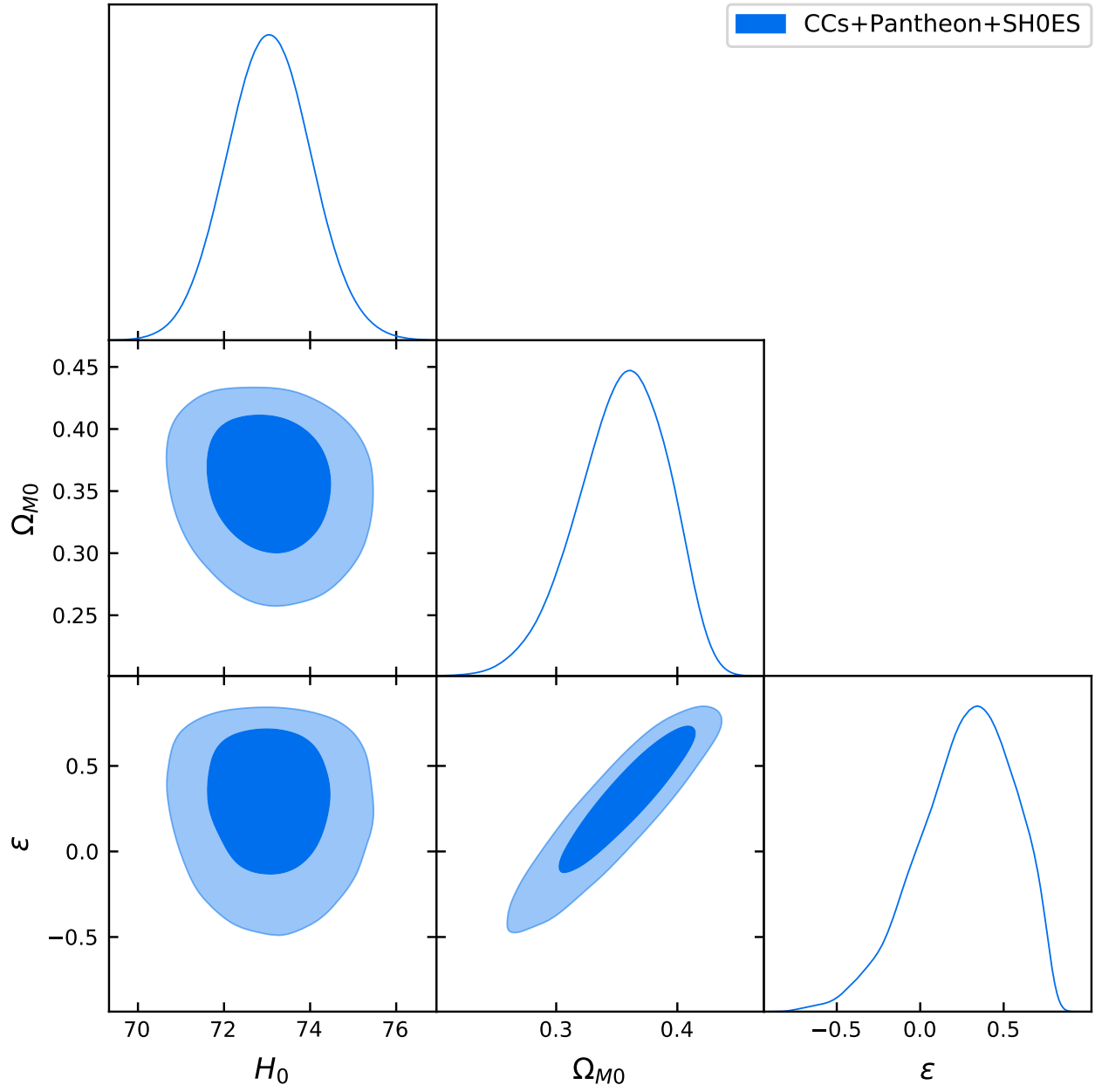


Figura 26 – Plot das restrições dos parâmetros livres, em 2σ intervalo de confiança, para combinação das amostra de dados de CCs e Pantheon+SH0ES.

7 EVOLUÇÃO LINEAR DAS PERTURBAÇÕES DE DENSIDADE DA MATÉRIA ESCURA EM MODELOS IEE

O Princípio Cosmológico garante que o Universo é, estatisticamente, homogêneo e isotrópico em larga escala. Porém, em pequenas escalas isso não ocorre devido à existência das estruturas que observamos. Afinal, quando olhamos para o Universo local, percebemos claramente regiões de menor ou de maior densidade. Isso se deve ao fato de que a atração gravitacional da matéria sem pressão, partindo de flutuações iniciais, criou poços de potencial onde tivemos a formação de estruturas.

Inicialmente, no período de coexistência entre bárions, radiação e matéria escura, os bárions não conseguiam colapsar apesar de sua atração gravitacional por estarem fortemente acoplados com a radiação, onde a pressão de radiação impedia seu colapso. Já a matéria escura, devido a sua fraca interação, pôde colapsar mais cedo e mesmo na era da radiação já formava os primeiros poços de potencial aos quais os bárions foram atraídos após a era da recombinação.

Essas foram as sementes das primeiras estruturas que posteriormente formaram aglomerados de galáxias, galáxias e demais objetos astronômicos. A descrição dessa formação de estruturas, principalmente em grandes escalas, pode ser feita de modo perturbativo, isto é, em grandes escalas, o Universo é aproximadamente homogêneo e os desvios de densidade em relação à média universal (*background*) são pequenos. Dessa forma, a evolução dessas perturbações de densidade se dá de modo linear em grandes escalas e não-linear em pequenas escalas (onde já houve o colapso gravitacional). Atualmente, apenas os superaglomerados estão ainda na fase linear da evolução das perturbações de densidade.

Assim, do ponto de vista da Cosmologia, o estudo da evolução dessas perturbações de densidade é essencial para obtermos vínculos mais fortes sobre os modelos cosmológicos, uma vez que modelos que podem ser similares em nível de *background* podem possuir grande divergência nas ordens mais altas das perturbações cosmológicas.

Em princípio, com a relação entre o conteúdo energético e a geometria do Universo imposta pelas Equações de Einstein, não seria possível desvincular a descrição das perturbações de densidade e as perturbações da métrica. Porém, em algumas situações é possível tratar as perturbações de densidade de forma independente de modo similar ao que é feito na Mecânica Newtoniana. Como mencionado por Weinberg (WEINBERG, 1972), podemos empregar com segurança a mecânica Newtoniana para lidar com problemas astronômicos onde a densidade de energia é dominada pelas partículas não-relativísticas, ou seja, com $p \ll \rho$, e nos quais as escalas lineares são pequenas comparadas com a escala característica do Universo.

Por outro lado, enquanto modelos relativísticos sem pressão podem ser bem descritos por esses análogos newtonianos (WEINBERG, 1972; McCrea; Milne, 1934), a inclusão de componentes com pressão não possui análogo na mecânica newtoniana. Porém, é possível modificar as equações de Euler de um fluido para estarem de acordo com a Relatividade Geral também nos casos de fluidos com pressão. Essa descrição neo-Newtoniana foi proposta inicialmente por McCrea (McCrea, 1951) e desenvolvida posteriormente por Harrison (HARRISON, 1965) sem usar conceitos da teoria da Relatividade Geral.

Não obstante, essa descrição neo-Newtoniana ainda apresentava problemas para o cálculo das perturbações de densidade de fluidos com pressão. Isso foi contornado por Lima et al. (LIMA; ZANCHIN; BRANDENBERGER, 1997), visto que eles propõem uma alteração das equações de Euler de modo a torná-las de acordo com a Relatividade Geral em nível de perturbação ao menos no caso da solução de crescimento das perturbações. Finalmente, R. R. R. Reis (REIS, 2003) mostrou a equivalência entre esse formalismo e o formalismo relativístico no caso em que $c_{eff}^2 = \delta p / \delta \rho = 0$, onde δp é a perturbação de pressão e $\delta \rho$ é a perturbação de densidade.

As flutuações na densidade da matéria durante o início do Universo geraram as sementes para a formação das estruturas em larga escala que observamos hoje. As anisotropias no espectro de potência da CMB (AGHANIM et al., 2020) são as evidências do efeito das amplitudes de flutuações de densidade no Universo primordial. No Universo recente, as amplitudes são estimadas pelas medidas de baixo *redshift* provenientes, por exemplo, da distorção no espaço dos redshifts (NUNES; VAGNOZZI, 2021), por lentes gravitacionais fracas (ASGARI et al., 2021), com contagem de clusters (LESCI et al., 2022), entre outros (PERIVOLAROPOULOS; SKARA, 2022).

Existe atualmente uma tensão em torno de $2 \sim 3\sigma$ entre as estimativas das amplitudes das flutuações de densidade da matéria para amostras de baixo e alto *redshift* (ABDALLA et al., 2022; PERIVOLAROPOULOS; SKARA, 2022), assim como ocorre com a tensão em H_0 . Essa tensão é quantizada no parâmetro S_8 (BENISTY, 2021; NUNES; VAGNOZZI, 2021; JOSEPH et al., 2023; AMON et al., 2023; SHAH; MUKHERJEE; PAL, 2024; POULIN et al., 2023), que representa a relação entre o parâmetro de densidade total da matéria hoje, Ω_{M0} , com o valor da amplitude das flutuações de matéria em esferas de raio $8h^{-1}\text{Mpc}$ calculada hoje, σ_{80} . O parâmetro S_8 é definido como:

$$S_8 = \sigma_{80} \sqrt{\frac{\Omega_{M0}}{3}}. \quad (7.1)$$

As estimativas observacionais de S_8 dependem do modelo cosmológico de fundo. Na Figura 27 são apresentadas medidas¹ obtidas utilizando o modelo cosmológico padrão ΛCDM -plano, que embora represente bem as amostras de dados, prevê uma menor formação de estruturas em relação ao esperado devido aos dados de CMB (AGHANIM et al., 2020). Como apresentado na Figura 27, as fontes de baixo *redshift* fornecem um valor menor para S_8 , já os dados de alto *redshift* do Planck TT,TE,EE+lowE e análise mais recente de CT WMAP CMB analysis (AIOLA et al., 2020) encontram um valor maior para S_8 .

Analisaremos neste Capítulo a evolução linear das perturbações de densidade da matéria em modelos IEE. A descrição será realizada do ponto de vista do formalismo Neo-Newtoniano (LIMA; ZANCHIN; BRANDENBERGER, 1997; JESUS et al., 2011; FABRIS; VELTEN, 2012; POPOLO; PACE; LIMA, 2013; FABRIS; VELTEN, 2014), e buscaremos obter vínculos observacionais sobre o parâmetro S_8 no contexto de modelos IEE. Os resultados apresentados nesse Capítulo estão em fase de submissão para publicação.

¹ As medidas de S_8 apresentadas foram tiradas da Tabela II de (PERIVOLAROPOULOS; SKARA, 2022).

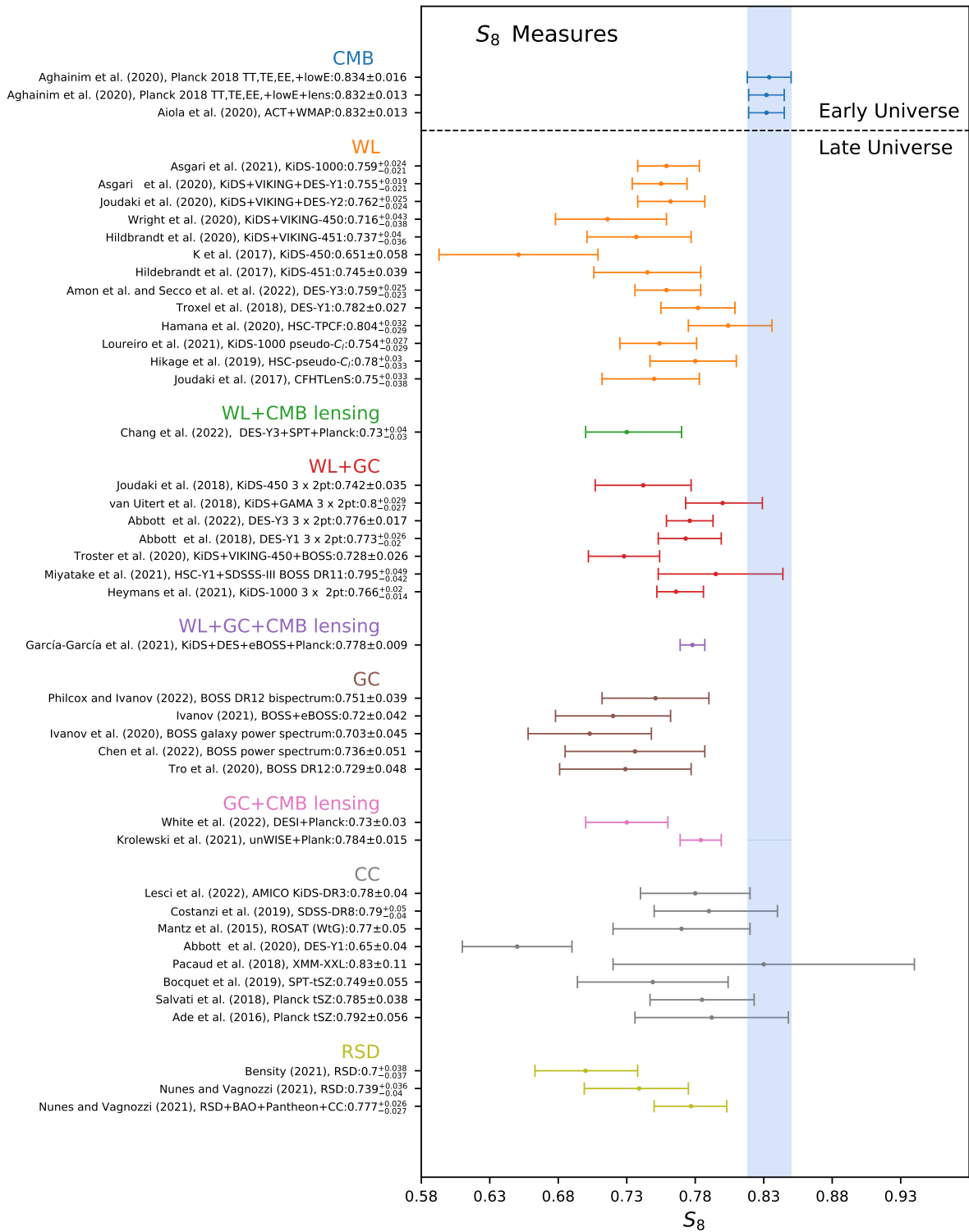


Figura 27 – Valores do parâmetro S_8 com intervalo de confiança de 1σ , a partir dos seguintes dados: CMB (AGHANIM et al., 2020; AIOLA et al., 2020), WL (ASGARI et al., 2021; ASGARI et al., 2020; JOUDAKI et al., 2020; WRIGHT et al., 2020; HILDEBRANDT et al., 2020; AMON et al., 2022; TROXEL et al., 2018; HAMANA et al., 2020; LOUREIRO et al., 2022; HIKAGE et al., 2019; JOUDAKI et al., 2017), WL+CMB lensing (CHANG et al., 2023), WL+GC (MIYATAKE et al., 2022; HEYMANS et al., 2021; JOUDAKI et al., 2018; UITERT et al., 2018; COSTA et al., 2018; ABBOTT et al., 2018; TRÖSTER et al., 2020; ABBOTT et al., 2022), WL+GC+CMB lensing (GARCÍA-GARCÍA et al., 2021), GC (PHILCOX; IVANOV, 2022; IVANOV, 2021; IVANOV; SIMONOVIC; ZALDARRIAGA, 2020; CHEN; VLAH; WHITE, 2022; TRÖSTER et al., 2020), GC+CMB lensing (WHITE et al., 2022; KROLEWSKI; FERRARO; WHITE, 2021), CC (LESCI et al., 2022; COSTANZI et al., 2019; MANTZ et al., 2015; ABBOTT et al., 2020; PACAUD et al., 2018; BOCQUET et al., 2019; SALVATI; DOUSPIS; AGHANIM, 2018; ADE et al., 2016), RSD (NUNES; VAGNOZZI, 2021; BENISTY, 2021). O plot foi obtido com base no código publicamente disponível fornecido em (VALENTINO et al., 2021a).

7.1 FORMULAÇÃO NEO-NEWTONIANA PARA MODELOS IEE

O modelo Cosmológico $\Lambda(t)$ CDM plano descreve um Universo preenchido com matéria escura não relativística e sem pressão que está interagindo com a energia escura que, por sua vez, possui o termo da equação de estado da forma $w = -1$. Nesse contexto, considerando a matéria escura como um fluido perfeito, com quadrivelocidade u_{DM} e densidade de energia ρ_{DM} sujeito a um potencial gravitacional Φ , temos a equação de Euler, da continuidade e Poisson dadas por

$$\left(\frac{\partial \rho_{\text{DM}}}{\partial t} \right)_r + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho_{\text{DM}} \cdot \vec{u}_{\text{DM}}) = Q, \quad (7.2)$$

$$\left(\frac{\partial u_{\text{DM}}}{\partial t} \right)_r + (u_{\text{DM}} \cdot \vec{\nabla}_r) \cdot u_{\text{DM}} = -\vec{\nabla}_r \Phi, \quad (7.3)$$

$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G(\rho_{\text{DM}}) - \Lambda, \quad (7.4)$$

sendo Q o termo de interação fenomenológico. Iniciaremos nossa análise realizando a mudança de variável da coordenada própria $(\vec{r}, t)$ para a coordenada comóvel $(\vec{x}, t)$ utilizando as relações

$$\vec{r} = a\vec{x}, \quad (7.5)$$

$$\vec{\nabla}_r = \frac{\vec{\nabla}_x}{a}, \quad (7.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_x - H(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x). \quad (7.7)$$

Em nossas análises vamos considerar pequenas perturbações dadas por:

$$\vec{u}_{\text{DM}} = \dot{a}\vec{x} + \vec{v}_{\text{DM}}, \quad (7.8)$$

$$\rho_{\text{DM}} = \bar{\rho}_{\text{DM}} + \delta\rho_{\text{DM}} = \bar{\rho}_{\text{DM}}(1 + \delta), \quad (7.9)$$

$$\Phi = \phi + \frac{2\pi G}{3}(\bar{\rho}_{\text{DM}})a^2\vec{x}^2 - \frac{\Lambda}{6}a^2\vec{x}^2, \quad (7.10)$$

onde $\delta \equiv \frac{\delta\rho_{\text{DM}}}{\bar{\rho}_{\text{DM}}}$ é o contraste de densidade da matéria escura e $\bar{\rho}_{\text{DM}}$ corresponde à densidade de energia da matéria escura em *background*. As perturbações na matéria escura são consideradas adiabáticas e supomos também que não houve perturbação na pressão do fluido de matéria escura, ou seja, $\delta p_{\text{DM}} = 0$. Consequentemente, para a velocidade efetiva do som, c_{eff}^2 , temos:

$$c_{\text{eff}}^2 \equiv \frac{\delta p_{\text{DM}}}{\delta \rho_{\text{DM}}} = 0. \quad (7.11)$$

Sendo assim, o sistema de equações (7.2)-(7.4) definidas anteriormente toma a forma:

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right) + \frac{(\vec{v}_{\text{DM}} \cdot \vec{\nabla}) \delta}{a} + \frac{(1 + \delta) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\text{DM}}}{a} = -\frac{Q}{\bar{\rho}_{\text{DM}}} \delta, \quad (7.12)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{v}_{\text{DM}}}{\partial t}\right) + H \vec{v}_{\text{DM}} + \frac{(\vec{v}_{\text{DM}} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v}_{\text{DM}}}{a} = -\frac{\vec{\nabla} \phi}{a}, \quad (7.13)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho}_{\text{DM}} a^2 \delta. \quad (7.14)$$

Vamos linearizar as expressões acima eliminando os termos de perturbação de ordem superior $\vec{v}_{\text{DM}} \cdot \delta$ e $\vec{v}_{\text{DM}} \cdot \vec{v}_{\text{DM}}$. Assim, obtemos:

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right) + \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\text{DM}}}{a} = -\frac{Q}{\bar{\rho}_{\text{DM}}} \delta, \quad (7.15)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{v}_{\text{DM}}}{\partial t}\right) + H \vec{v}_{\text{DM}} = -\frac{\vec{\nabla} \phi}{a}, \quad (7.16)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho}_{\text{DM}} a^2 \delta. \quad (7.17)$$

Aplicando o divergente em (7.16) e utilizando as relações (7.17) e (7.15), temos:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \left(2H + \frac{Q}{\bar{\rho}_{\text{DM}}}\right) + \delta \left[2H \frac{Q}{\bar{\rho}_{\text{DM}}} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{Q}{\bar{\rho}_{\text{DM}}}\right) - 4\pi G \bar{\rho}_{\text{DM}}\right] = 0 \quad (7.18)$$

É mais vantajoso numericamente escrever a equação (7.18) em termos do fator de escala. Utilizando a mudança de variável dada em (2.29), obtemos

$$\frac{d^2 \delta(a)}{da^2} = -\frac{\delta(a) \left[aH(a) \frac{d}{da} \left(\frac{Q}{\bar{\rho}_{\text{DM}}} \right) + \frac{2H(a)Q(a)}{\bar{\rho}_{\text{DM}}} - 4\pi G \bar{\rho}_{\text{DM}} \right]}{a^2 H(a)^2} - \frac{d\delta(a)}{da} \frac{\left[3H(a) + \frac{Q(a)}{\bar{\rho}_{\text{DM}}} + a \frac{dH(a)}{da} \right]}{aH(a)}. \quad (7.19)$$

Vamos analisar o comportamento da evolução das perturbações de densidade para os termos de interação $Q = \varepsilon \mathcal{H} \rho_\Lambda$ e $Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$ analisados em nível de *background* nas seções 6.3 e 6.4, respectivamente. Para efeitos de comparação, também analisamos a equação (7.19) para o modelo de concordância cósmica Λ CDM-plano.

7.2 CASO $Q = \varepsilon \mathcal{H} \rho_\Lambda$

Para o termo de interação fenomenológico da forma $Q = \varepsilon \mathcal{H} \rho_{\Lambda 0}$, a equação diferencial de segunda ordem para o contraste de densidade $\delta(a)$ dada em (7.19) toma a forma:

$$\begin{aligned} \delta''(a) = -\delta'(a) & \left[\frac{a^3 \varepsilon^4 \Omega_{\Lambda 0} e^{\varepsilon(1-a)}}{\Omega_{\Lambda 0} (B - e^{\varepsilon(1-a)} A) + \varepsilon^3 \Omega_{M 0}} + \frac{3e^{a\varepsilon} (B\Omega_{\Lambda 0} + \varepsilon^3 \Omega_{M 0}) - 3e^\varepsilon \Omega_{\Lambda 0} A}{6ae^\varepsilon \Omega_{\Lambda 0} F - 2ae^{a\varepsilon} (B\Omega_{\Lambda 0} + \varepsilon^3 \Omega_{M 0})} + \frac{3}{a} \right] + \\ & + \delta(a) \frac{\varepsilon^3}{2a^2} \left[\frac{3e^{a\varepsilon} (\Omega_{\Lambda 0} (B - e^{\varepsilon(1-a)} A) + \varepsilon^3 \Omega_{M 0})}{\varepsilon^3 (e^{a\varepsilon} (B\Omega_{\Lambda 0} + \varepsilon^3 \Omega_{M 0}) - 3e^\varepsilon \Omega_{\Lambda 0} F)} + \frac{4a^4 e^\varepsilon \varepsilon \Omega_{\Lambda 0}}{e^\varepsilon \Omega_{\Lambda 0} A - e^{a\varepsilon} (B\Omega_{\Lambda 0} + \varepsilon^3 \Omega_{M 0})} + \right. \\ & \left. + \frac{a^4 e^\varepsilon \varepsilon \Omega_{\Lambda 0} \left(3e^{2\varepsilon} \Omega_{\Lambda 0}^2 D - 2\Omega_{\Lambda 0} e^{\varepsilon(1+a)} C (B\Omega_{\Lambda 0} + \varepsilon^3 \Omega_{M 0}) + e^{2a\varepsilon} (2a\varepsilon - 5) (B\Omega_{\Lambda 0} + \varepsilon^3 \Omega_{M 0})^2 \right)}{(e^\varepsilon \Omega_{\Lambda 0} A - e^{a\varepsilon} (B\Omega_{\Lambda 0} + \varepsilon^3 \Omega_{M 0}))^2 (e^{a\varepsilon} (B\Omega_{\Lambda 0} + \varepsilon^3 \Omega_{M 0}) - 3e^\varepsilon \Omega_{\Lambda 0} F)} \right]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Sendo os termos, A , B , C , D e F dados por

$$A \equiv (a^3 \varepsilon^3 + 3a^2 \varepsilon^2 + 6a\varepsilon + 6), \quad (7.21)$$

$$B \equiv (\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 6), \quad (7.22)$$

$$C \equiv (5a^3 \varepsilon^3 - 3a^2 \varepsilon^2 - 18a\varepsilon - 30), \quad (7.23)$$

$$D \equiv (a^6 \varepsilon^6 + 4a^5 \varepsilon^5 + 5a^4 \varepsilon^4 - 16a^3 \varepsilon^3 - 72a^2 \varepsilon^2 - 96a\varepsilon - 60), \quad (7.24)$$

$$F \equiv (a^2 \varepsilon^2 + 2a\varepsilon + 2). \quad (7.25)$$

Esses termos foram utilizados para simplificar a equação (7.20). Como não foi considerada a perturbação nos bárions, o parâmetro de densidade Ω_{b0} foi acoplado no parâmetro de densidade total da matéria $\Omega_{M0} = \Omega_{DM0} + \Omega_{b0}$. A equação (7.20) apresentou algumas divergências numéricas no intervalo $-0.01 < \varepsilon < 0.01$, por isso foi necessário expandi-la em séries de potências em até primeira ordem. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta''(a) = -\delta'(a) & \left[\frac{3(2a^3 \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M 0})}{2aL} + \frac{\varepsilon a \Omega_{\Lambda 0} (8a^7 \Omega_{\Lambda 0}^2 + (13a^4 + 3) \Omega_{\Lambda 0} \Omega_{M 0} - 4(a - 3) \Omega_{M 0}^2)}{8\Omega_{M 0} L^2} \right] \\ & + \delta(a) \left[\frac{3\Omega_{M 0}}{2a^2 L} - \frac{3\varepsilon a \Omega_{\Lambda 0} (16a^7 \Omega_{\Lambda 0}^2 + 27a^4 \Omega_{\Lambda 0} \Omega_{M 0} + 8a \Omega_{M 0}^2 + \Omega_{M 0} (\Omega_{\Lambda 0} + 4\Omega_{M 0}))}{8\Omega_{M 0} L^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Sendo $L \equiv (a^3 \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M 0})$, introduzido para compactar a expressão acima. As condições iniciais para o contraste de densidade, $\delta(a)$, e sua primeira derivada, $\delta'(a)$, dadas em $a_0 = 1/1000$, aproximadamente, na época da ultima superfície de espalhamento, o que equivale a $z \approx 1000$, nesse período o universo estava na chamada era matéria, onde a evolução do universo era dominada pela matéria sem pressão levando a uma evolução equivalente a proposta no modelo Einstein-de Sitter (WEINBERG, 1972).

Nesse contexto as condições iniciais são as mesmas do modelo Einstein-de Sitter, dadas por:

$$\delta'(a_0) = 1, \quad (7.27)$$

$$\delta(a_0) = a_0 = \frac{1}{1000}. \quad (7.28)$$

A evolução do contraste de densidade $\delta(a)$ obtida numericamente através da solução da equação (7.20), utilizando a condição de inicial acima, está apresentado na Figura 31. A imagem à esquerda mostra a evolução do contraste de densidade, $\delta(a)$, para diferentes valores de ε . Os outros parâmetros livres foram fixados nos valores apresentados na Tabela 12 para o modelo IEE analisado e na curva em laranja foram utilizados especificamente todos os valores da Tabela. Quando o parâmetro ε é nulo, reobtemos o modelo Λ CDM-plano. Este caso está representado pela curva em azul, que está basicamente sobreposta à curva laranja. Isso mostra que a evolução do contraste de densidade $\delta(a)$ para o modelo IEE analisado é semelhante à obtida com o modelo Λ CDM-plano utilizando o mesmo conjunto de parâmetros livres $(H_0, \Omega_{M0}, \sigma_{80})^2$ do modelo IEE.

A imagem à esquerda da Figura 31 apresenta a reconstrução da evolução do contraste de densidade $\delta(a)$ obtida a partir da amostra de parâmetros livres gerada pelo emcee durante a análise estatística.

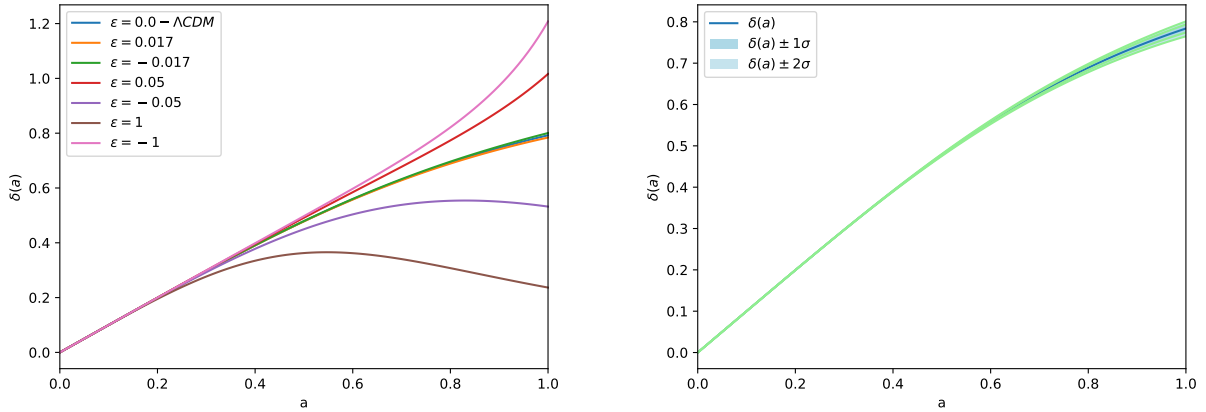


Figura 28 – **Direita:** Evolução do Contraste de densidade para diferentes valores de ε .
Esquerda: Reconstrução do Contraste de densidade gerados pelas amostra do emcee.

Com a determinação da solução numérica para $\delta(a)$, podemos restringir o modelo com os dados observacionais fazendo a estimativa dos seus parâmetros livres utilizando a análise estatística discutida na seção 4. Para realizar os vínculos com os dados 32 de $H(z)$ (MORESCO et al., 2022), as medidas de SNe Ia da amostra Pantheon+SH0ES (BROUT et al., 2022) e os dados de $f\sigma_8$ (SKARA; PERIVOLAROPOULOS, 2020), novamente utilizaremos priors largos e planos sobre os parâmetros livres exibidos na Tabela 11.

² Esses parâmetros correspondem à coluna do meio da Tabela 12.

Parâmetro	Intervalo do prior plano
H_0 (km/s/Mpc)	[20, 120]
Ω_{M0}	[0, 1.0]
ε	[-1, 1]
σ_{80}	[0.1, 2.5]

Tabela 11 – Priors escolhidas sobre os parâmetros livres.

No contexto do modelo analisado, amostramos sobre o espaço dos parâmetros livres o χ^2 de cada conjunto de dados observacionais utilizado e também o χ^2 obtido com a combinação dos dados. Os resultados provenientes da análise combinada em até 2σ de intervalo de confiança podem ser visualizados na Tabela 12, onde adicionamos também os resultados obtidos com base no modelo Λ CDM-plano para efeito de comparação.

Parâmetros	Modelo IEE ($Q = \varepsilon\mathcal{H}\rho_\Lambda$)	Λ CDM- plano
H_0	$73.1 \pm 0.98^{+2.0}_{-1.9}$	$73.2 \pm 0.98 \pm 2.0$
Ω_{M0}	$0.323 \pm 0.017^{+0.035}_{-0.033}$	$0.315 \pm 0.015^{+0.030}_{-0.029}$
ε	$0.017^{+0.019+0.043}_{-0.021-0.039}$	0
σ_{80}	$0.754 \pm 0.017^{+0.033}_{-0.033}$	$0.750 \pm 0.016^{+0.032}_{-0.031}$
S_8	$0.782 \pm 0.022^{+0.045}_{-0.044}$	$0.768 \pm 0.016^{+0.033}_{-0.032}$

Tabela 12 – Restrições dos parâmetros livres em 68% e 98% de intervalo de confiança, obtidas da análise combinada de CCs, $f\sigma_8$ e Pantheon+SH0ES.

Os resultados encontrados para o modelo IEE com $Q = \varepsilon\mathcal{H}\rho_\Lambda$ foram $H_0 = 73.1^{+2.0}_{-1.9}$, $\Omega_{M0} = 0.323^{+0.035}_{-0.033}$, $\varepsilon = 0.017^{+0.043}_{-0.039}$, $\sigma_{80} = 0.754^{+0.033}_{-0.033}$ e $S_8 = 0.782^{+0.045}_{-0.044}$. O parâmetro S_8 não é um parâmetro livre fundamental do modelo, por isso não foi adicionado um prior sobre ele. Esse parâmetro foi derivado a partir das amostras de parâmetros livres gerada pelo emcee.

Os resultados do modelo IEE com $Q = \varepsilon\mathcal{H}\rho_\Lambda$ são todos compatíveis, em menos de 1σ de incerteza, com os resultados encontrados para o modelo de concordância cósmica Λ CDM-plano utilizando a mesma análise estatística e amostra de dados.

No trabalho (BERNUI et al., 2023), os autores estudaram um modelo IEE com termo de interação $Q = \varepsilon\mathcal{H}\rho_{DE}$ semelhante ao que analisamos nesta seção, sendo o mesmo no caso $\rho_{DE} = \rho_\Lambda$. Os autores analisaram o modelo do ponto de vista relativístico. Utilizando dados de CMB e BAO, eles encontraram $\varepsilon > -0.207$, $H_0 = 68.93^{+0.79}_{-1.2}$ e $S_8 = 0.891^{+0.025}_{-0.062}$ ambos em 1σ de intervalo de confiança. Embora os resultados deles tenham sido obtidos por amostras de dados diferentes das que utilizamos nesta seção, o valor de ε apresentado na Tabela 12 é compatível com o obtido em (BERNUI et al., 2023) a partir de $\sim 1.1\sigma$ de intervalo de confiança. Para o parâmetro S_8 , a compatibilidade se dá a partir de $\sim 1.5\sigma$ e, para o valor de H_0 , a compatibilidade é alcançada a partir de $\sim 2.4\sigma$ de intervalo de confiança.

O valor do parâmetro S_8 obtido por (NUNES; VAGNOZZI, 2021) para o modelo Λ CDM-plano utilizando os dados de RSD+BAO+Pantheon+CCs foi $S_8 = 0.777^{+0.026}_{-0.027}$ em 1σ de incerteza. Este resultado é compatível em menos de 1σ de incerteza com o valor $S_8 = 0.782 \pm 0.022$ obtido para o modelo IEE analisado e com o valor $0.768^{+0.016}_{-0.016}$ que obtivemos para o modelo Λ CDM-plano. Contudo, as perturbações consideradas em (NUNES; VAGNOZZI, 2021) foram relativísticas. O valor

de $S_8 = 0.835 \pm 0.016$ encontrado a partir da missão Planck 2018 (AGHANIM et al., 2020), com uma análise no contexto relativístico, é compatível a partir de $\sim 1.9\sigma$ de intervalo de confiança com o valor de S_8 para o modelo IEE e a partir de $\sim 3\sigma$ para o resultado obtido com nossa análise para o modelo Λ CDM-plano.

Na Figura 29 estão apresentadas as restrições obtidas, em até 2σ de intervalo de confiança, para todas as amostra de dados utilizadas e para a combinação das amostras. Somente a combinação está plotada na Figura 30.

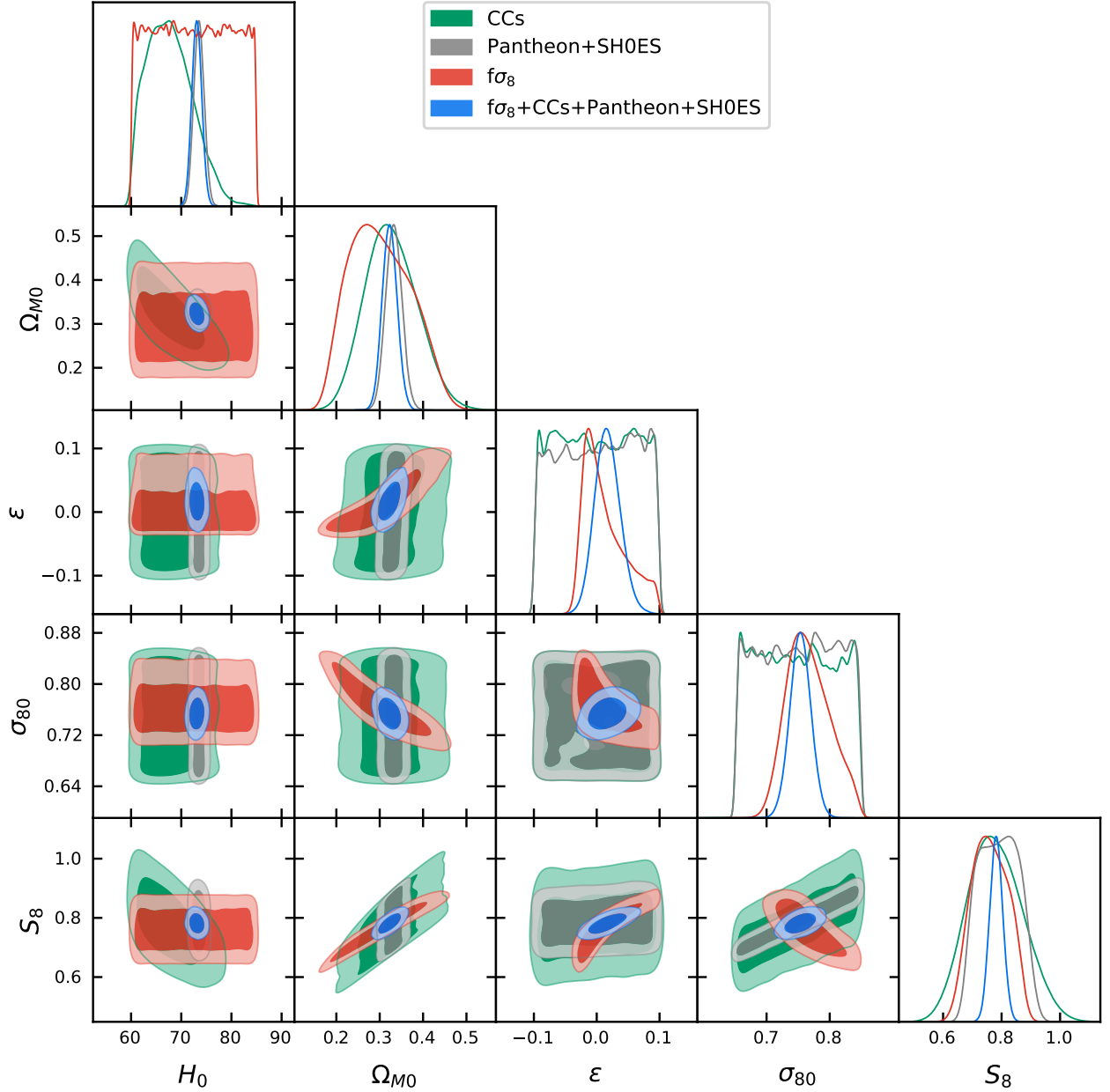


Figura 29 – Plot das restrições sobre os parâmetros livres, em até 2σ de intervalo de confiança, obtidas para cada amostra de dados CCs (contornos verdes), $f\sigma_8$ (contornos vermelhos) e Pantheon+SH0ES (contornos cinzas). A análise combinada (contornos azuis) também é apresentada

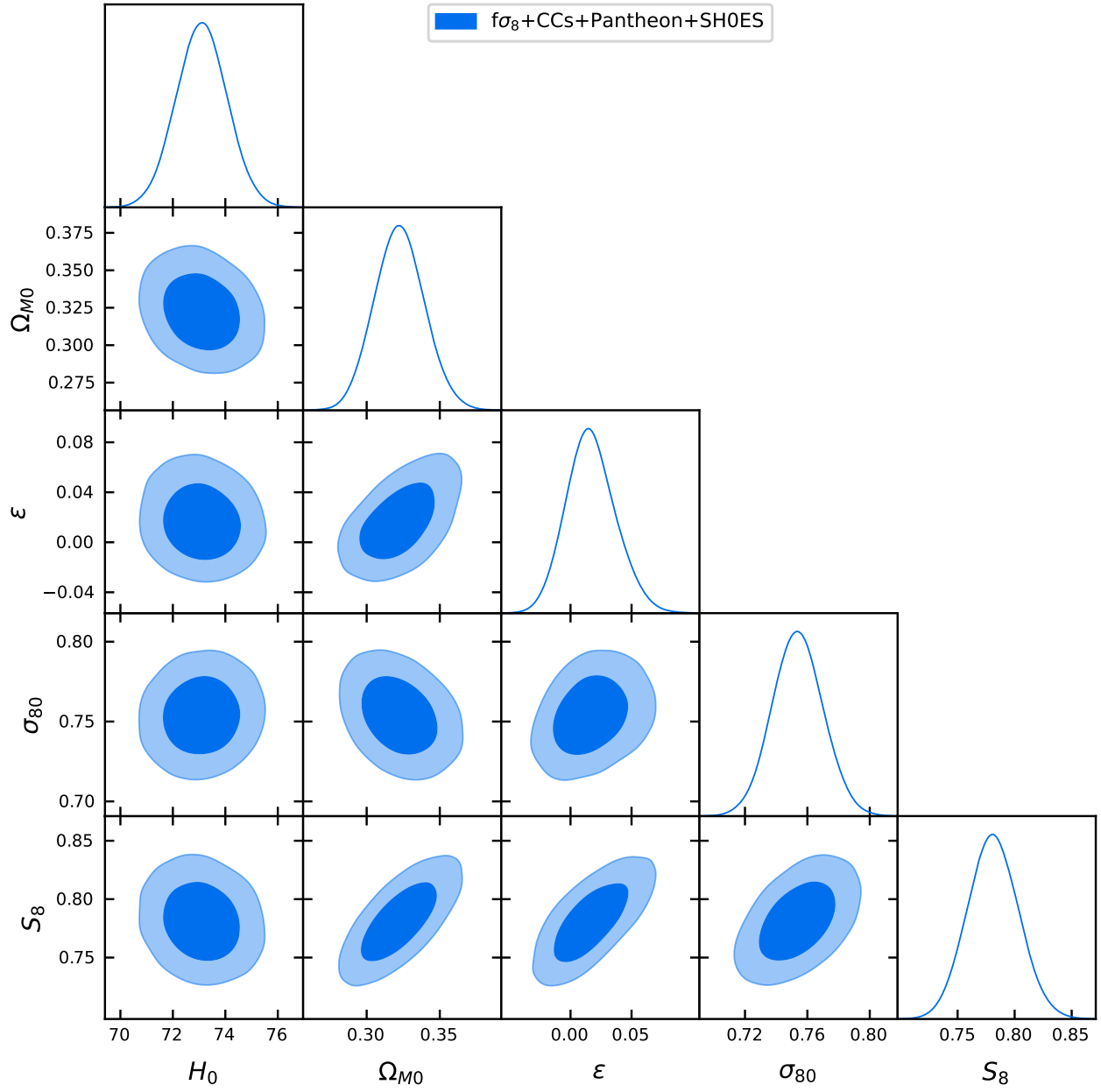


Figura 30 – Plot das restrições sobre os parâmetros livres, em até 2σ de intervalo de confiança, obtidas para a análise combinada das amostra de dados CCs + $f\sigma_8$ + Pantheon+SH0ES.

7.3 CASO $Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$

Para o termo de interação $Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$ a equação (7.19) toma a forma:

$$\begin{aligned} \delta''(a) = & -\delta'(a) \left[\frac{a^2(\varepsilon - 3)\varepsilon\Omega_{\Lambda 0}}{a^\varepsilon(\varepsilon - 3\Omega_{M0}) - a^3\varepsilon\Omega_{\Lambda 0}} + \frac{3a^\varepsilon(\varepsilon - 3\Omega_{M0}) - 3a^3\varepsilon\Omega_{\Lambda 0}}{6a^4\Omega_{\Lambda 0} - 2a^{\varepsilon+1}(\varepsilon - 3\Omega_{M0})} + \frac{3}{a} \right] + \\ & + \delta(a) \left[\frac{a(\varepsilon - 3)\varepsilon\Omega_{\Lambda 0} ((2\varepsilon - 3)a^{2\varepsilon}(\varepsilon - 3\Omega_{M0})^2 - 6(2\varepsilon - 3)\Omega_{\Lambda 0}a^{\varepsilon+3}(\varepsilon - 3\Omega_{M0}) + 3a^6\varepsilon^2\Omega_{\Lambda 0}^2)}{2(a^3\varepsilon\Omega_{\Lambda 0} - a^\varepsilon(\varepsilon - 3\Omega_{M0}))^2(a^\varepsilon(\varepsilon\Omega_{\Lambda 0} + (\varepsilon - 3)\Omega_{M0}) - 3a^3\Omega_{\Lambda 0})} + \right. \\ & \left. - \frac{3a^\varepsilon(\varepsilon\Omega_{\Lambda 0} + (\varepsilon - 3)\Omega_{M0}) - 3a^3\varepsilon\Omega_{\Lambda 0}}{6a^5\Omega_{\Lambda 0} - 2a^{\varepsilon+2}(\varepsilon - 3\Omega_{M0})} - \frac{2a(\varepsilon - 3)\varepsilon\Omega_{\Lambda 0}}{a^\varepsilon(\varepsilon - 3\Omega_{M0}) - a^3\varepsilon\Omega_{\Lambda 0}} \right]. \end{aligned} \quad (7.29)$$

A equação (7.29) apresentou algumas divergências numéricas para um determinado intervalo de ε e, por isso, foi necessário expandir a expressão (7.29) em séries de potências em até primeira ordem. Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta''(a) = & -\delta'(a) \left[\frac{3(2a\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M0})}{2a^2L} + \frac{\varepsilon a^2\Omega_{\Lambda 0} (2a^6\Omega_{\Lambda 0}^2 + 3a^3\Omega_{\Lambda 0}\Omega_{M0} - 3\Omega_{M0}^2 \log(a) + \Omega_{M0}(1 + \Omega_{M0}))}{2\Omega_{M0}L^2} \right] \\ & + \delta(a) \left[\frac{3\Omega_{M0}}{2a^2L} - \frac{\varepsilon a\Omega_{\Lambda 0} (10a^6\Omega_{\Lambda 0}^2 + 16a^3\Omega_{\Lambda 0}\Omega_{M0} - 3\Omega_{M0}^2 \log(a) + \Omega_{M0}(\Omega_{\Lambda 0} + 7\Omega_{M0}))}{2\Omega_{M0}L^2} \right], \end{aligned}$$

sendo $L \equiv (a^3\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M0})$ introduzido para compactar a expressão acima, utilizando as condições iniciais para o contraste de densidade e sua derivada dadas em (7.28) para $\delta(a)$ e (7.27) para $\delta'(a)$.

A evolução do contraste de densidade $\delta(a)$ obtido numericamente através da solução da equação (7.29) está apresentada na Figura 31.

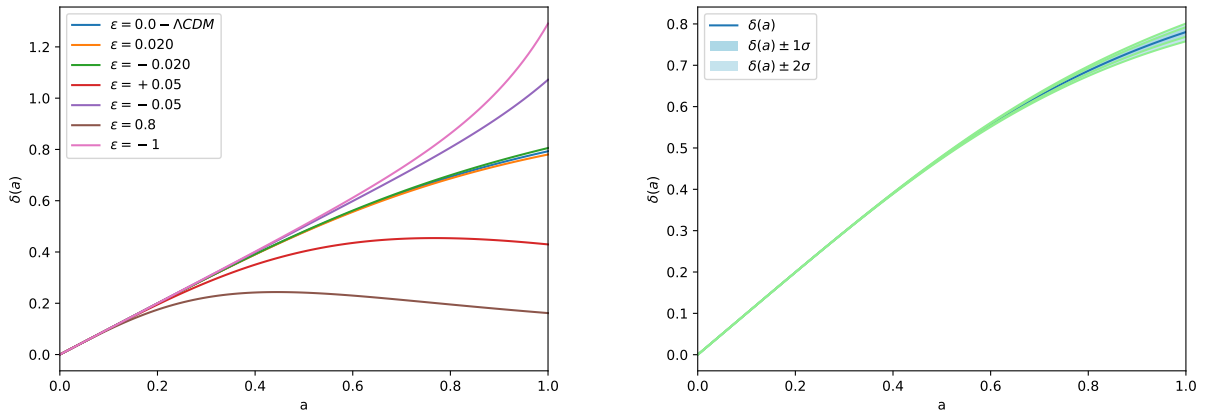


Figura 31 – **Direita:** Evolução do contraste de densidade para diferentes valores de ε .

Esquerda: Reconstrução da evolução do contraste de densidade.

A imagem à esquerda mostra a evolução do contraste de densidade, $\delta(a)$, para diferentes valores de ε . Os outros parâmetros livres foram fixados nos valores apresentados na Tabela 13 para o modelo IEE analisado e na curva em laranja foram utilizados especificamente todos os valores da Tabela. Quando o parâmetro ε é nulo, reobtemos o modelo ΛCDM -plano. Este caso está representado pela curva em azul que está basicamente sobreposta à curva laranja. Isso mostra que a evolução do contraste de densidade

$\delta(a)$ para o modelo IEE analisado é semelhante à obtida com o modelo Λ CDM-plano utilizando o mesmo conjunto de parâmetros livres $(H_0, \Omega_{M0}, \sigma_{80})^3$ do modelo IEE.

Com a determinação da solução para equação diferencial do contraste de densidade $\delta(a)$, podemos vincular os parâmetros livres do modelo analisado com os dados observacionais utilizando os métodos estatísticos discutidos na seção 4.

Para impor restrição sobre os parâmetros livres do modelo, a partir dos 32 dados de CCs (MORESCO et al., 2022), das medidas de SNe Ia da amostra Pantheon+ SH0ES (BROUT et al., 2022) e os dados de $f\sigma_8$ (SKARA; PERIVOLAROPOULOS, 2020), amostraremos o χ^2 do modelo para cada amostra de dados e para a combinação das amostras. Novamente utilizaremos priors planos e largos sobre os parâmetros livres exibidos na Tabela 11.

Na Tabela 13 são apresentadas as restrições sobre os parâmetros livres do modelo IEE, com $Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$, e do modelo Λ CDM-plano, ambos os resultados com 2σ de incerteza. Encontramos $H_0 = 73.1^{+2.0}_{-1.9}$, $\Omega_{M0} = 0.324^{+0.036}_{-0.034}$, $\varepsilon = 0.020^{+0.045}_{-0.040}$, $\sigma_{80} = 0.757^{+0.036}_{-0.035}$ e $S_8 = 0.787^{+0.0524}_{-0.049}$. Assim como na seção anterior, os resultados encontrados para o modelo IEE analisado são compatíveis em menos de 1σ com as restrições obtidas para o modelo padrão.

Parâmetros	Modelo IEE ($Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$)	Λ CDM - plano
H_0	$73.1 \pm 0.98^{+2.0}_{-1.9}$	$73.2 \pm 0.98 \pm 2.0$
Ω_{M0}	$0.324 \pm 0.017^{+0.036}_{-0.034}$	$0.315 \pm 0.015^{+0.030}_{-0.029}$
ε	$0.020^{+0.019+0.045}_{-0.022-0.040}$	0
σ_{80}	$0.757 \pm 0.018^{+0.036}_{-0.035}$	$0.750 \pm 0.016^{+0.032}_{-0.031}$
S_8	$0.787 \pm 0.025^{+0.052}_{-0.049}$	$0.768 \pm 0.016^{+0.033}_{-0.032}$

Tabela 13 – Restrições dos parâmetros livres, com 68% e 95% de intervalo de confiança, obtidas da análise combinada de CCs, $f\sigma_8$ e Pantheon+SH0ES.

No trabalho de (NUNES; VAGNOZZI, 2021), o valor $S_8 = 0.777^{+0.026}_{-0.027}$, em 1σ de incerteza, foi obtido para o modelo Λ CDM-plano utilizando os dados de RSD+BAO+Pantheon+CC. Este resultado é compatível em menos de 1σ de incerteza com o valor $S_8 = 0.787 \pm 0.025$ obtido para o modelo IEE. Porém, as perturbações realizadas em (NUNES; VAGNOZZI, 2021) foram no contexto relativístico. Já o valor de $S_8 = 0.835 \pm 0.016$ encontrado a partir da missão Planck 2018 (AGHANIM et al., 2020), também com uma análise realizada no contexto relativístico, é compatível a partir de $\sim 1.6\sigma$ de intervalo de confiança com o valor de S_8 para o modelo IEE.

Na Figura 32 são apresentadas as restrições, em até 2σ de intervalo de confiança, para todas as amostras de dados utilizadas e para combinação das amostras. Somente as restrições obtidas com a combinação das amostras são apresentadas na Figura 33.

³ Esses parâmetros correspondem à coluna do meio da Tabela 13.

⁴ Como vimos na seção anterior, o parâmetro S_8 não é um parâmetro livre fundamental do modelo. Esse parâmetro foi obtido realizando manipulações realizadas com as amostra de parâmetros livres geradas pelo emcee.

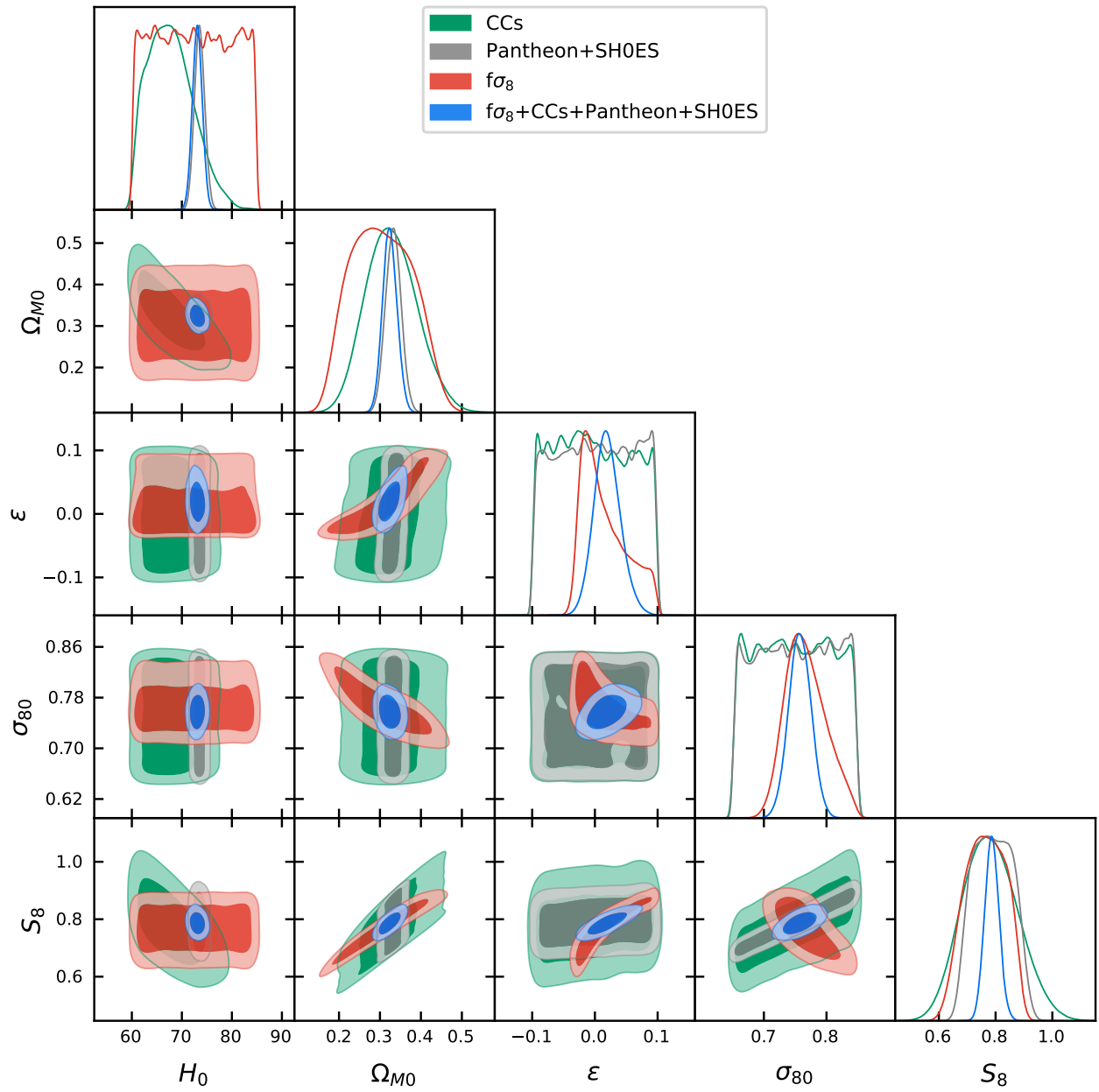


Figura 32 – Plot das restrições sobre os parâmetros livres, com intervalo de confiança de até 2σ , obtidas para cada amostra de dados CCs (contornos verdes), $f\sigma_8$ (contornos vermelhos) e Pantheon+SH0ES (contornos cinzas). A análise combinada (contornos azuis) também é apresentada

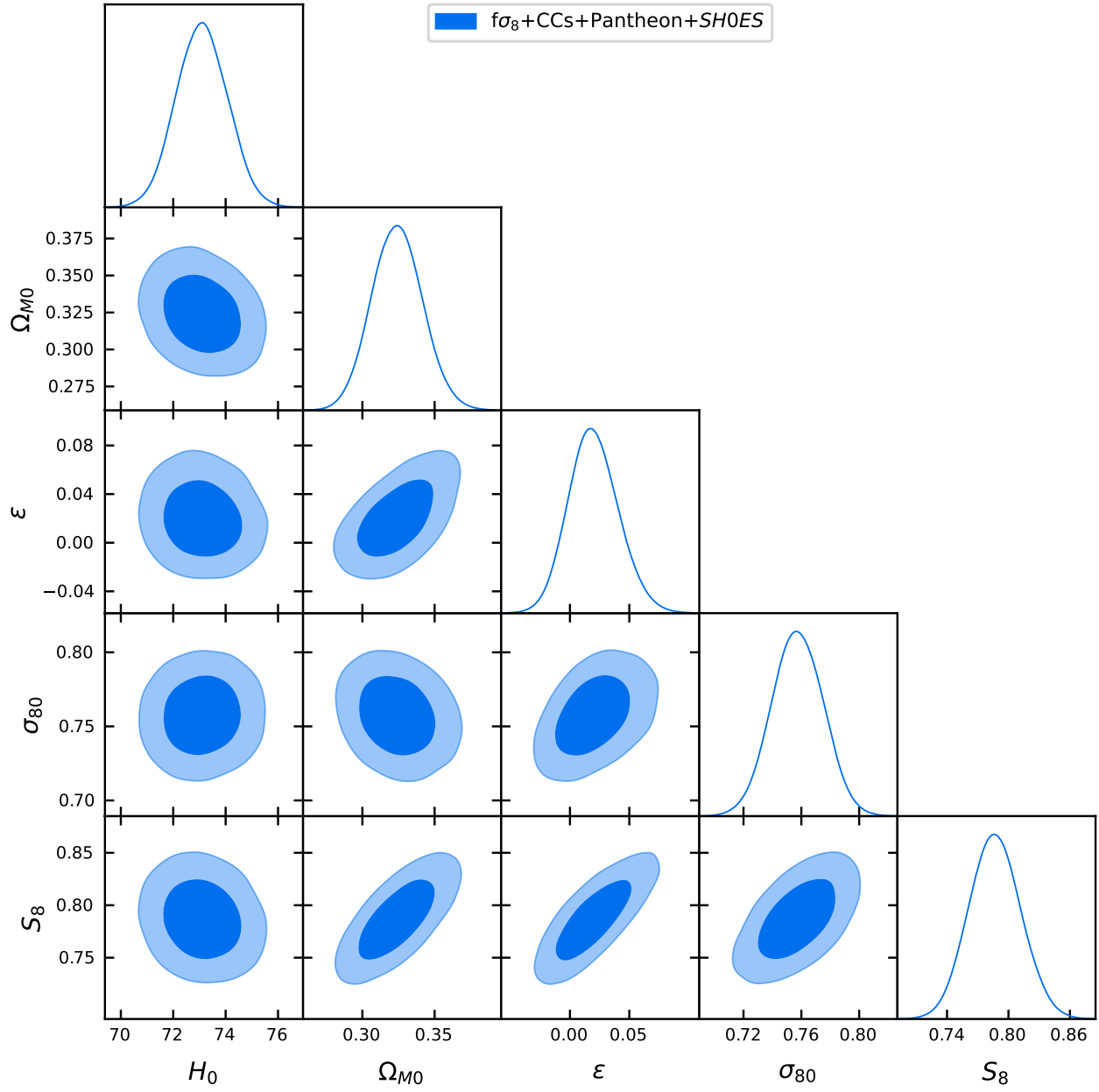


Figura 33 – Plot das restrições sobre os parâmetros livres, com intervalo de confiança de até 2σ , obtidas para análise combinada das amostra de dados CCs + $f\sigma_8$ + Pantheon+SH0ES.

8 RELAÇÕES DE CONSISTÊNCIA

Nos últimos anos, diversos modelos cosmológicos alternativos emergiram na tentativa de resolver os problemas do modelo Λ CDM. Paralelamente ao aumento no número de modelos alternativos, também foram desenvolvidos métodos para testar a consistência de diferentes modelos.

Os primeiros testes de consistência foram desenvolvidos para comparar o modelo padrão com modelos de energia escura variável no tempo. O método da hierarquia Statefinder foi introduzido como um diagnóstico geométrico da energia escura (SAHNI et al., 2003; ARABSALMANI; SAHNI, 2011), sendo relacionado algebricamente à equação de estado da energia escura e a sua primeira derivada temporal. Sahni, Shafieloo e Starobinsky (SAHNI; SHAFIELOO; STAROBINSKY, 2008) introduziram dois métodos diagnósticos para testar modelos de energia escura.

O primeiro, chamado $Om(z)$, é uma combinação do desvio cosmológico e do parâmetro de Hubble. Basicamente, se o valor de $Om(z)$ for constante para diferentes desvios cosmológicos, então a energia escura corresponde exatamente ao termo de constante cosmológica. O segundo diagnóstico, denominado *sonda de aceleração* $\bar{q}$, pode ser usado para determinar o desvio cosmológico em que o universo começou a acelerar. O método calcula o valor médio do parâmetro de desaceleração sobre uma pequena faixa de desvio cosmológico. Ambos os métodos diagnósticos são realizados sem referência ao valor atual da densidade de matéria. Em seguida, os mesmos autores introduziram o diagnóstico $Om3$ (SHAFIELOO; SAHNI; STAROBINSKY, 2012), que combina informações de vela padrão de SNe Ia com informações de régua padrão de BAO para fornecer um novo diagnóstico nulo do paradigma da constante cosmológica. O teste foi recentemente usado com as observações mais recentes de BAO da pesquisa eBOSS (SHAFIELOO et al., 2023). Outros testes também foram desenvolvidos.

Em (SHAFIELOO; CLARKSON, 2010), Shafieloo e Clarkson discutiram como medidas diretas do parâmetro de Hubble podem ser usadas para testar o paradigma padrão na cosmologia. Particularmente, tais medições podem ser usadas para procurar desvios do modelo padrão independentemente da energia escura ou de uma teoria de gravidade baseada em métrica. Testes nulos usando dados de supernovas foram feitos em (YAHYA et al., 2014) usando Processos Gaussianos (GP) para obter derivadas independentes do modelo da distância. Eles descobriram que, ao usar os dados da União 2.1, o modelo de concordância é compatível, mas as barras de erro são grandes. Quando conjuntos de dados simulados foram usados para a Pesquisa de Energia Escura, um teste nulo mais preciso da constante cosmológica foi obtido. Testes de consistência semelhantes para a constante cosmológica Λ , para o princípio copernicano e para diferentes modelos de energia escura foram desenvolvidos anteriormente (ZUNCKEL; CLARKSON, 2008; CLARKSON; BASSETT; LU, 2008; CLARKSON, 2012; NESSERIS; SAPONE, 2015).

Neste Capítulo, inicialmente verificamos a consistência dos modelos Λ CDM plano e com curvatura e o modelo XCDM plano. Ampliamos a análise de (YAHYA et al., 2014), pois, além dos dados de SNe Ia, também adicionamos dados de $H(z)$ e utilizamos os dados mais recentes de SNe Ia fornecidos pela compilação Pantheon+ (BROUT et al., 2022). Os resultados obtidos nesse estudo foram publicado em

(JESUS et al., 2023).

Para avaliar a consistência dos modelos cosmológicos mais aceitos no contexto da métrica FLRW, o modelo Λ CDM plano e com curvatura e o modelo X CDM plano, realizaremos testes usando dados do universo tardio no nível de fundo. Para isso, adotaremos métodos não paramétricos para reconstruir quantidades de interesse em cada modelo. Essas quantidades serão definidas abaixo.

8.1 MODELO Λ CDM PLANO

8.1.1 Relações de Consistência a partir de Dados $H(z)$

A equação de Friedmann na métrica FLRW relaciona o parâmetro de Hubble $H(z)$ com o conteúdo material do universo. Para o modelo Λ CDM espacialmente plano, ela é escrita em termos do *redshift* como

$$H(z)^2 = H_0^2 [\Omega_{M0}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{M0}] . \quad (8.1)$$

Derivando essa equação em relação ao redshift, temos

$$2H(z)H'(z) = 3H_0^2\Omega_{M0}(1+z)^2 , \quad (8.2)$$

onde o linha, $(')$, denota a derivada em relação ao redshift. Derivando novamente, obtemos

$$2H(z)H''(z) + 2H'(z)^2 = 6H_0^2\Omega_{M0}(1+z) . \quad (8.3)$$

As equações (8.1)-(8.2) formam um sistema que pode ser resolvido para fornecer os parâmetros H_0^2 e Ω_{M0} como

$$H_0^2 = \frac{H(z) [3(1+z)^2 H(z) - 2z(z^2 + 3z + 3) H'(z)]}{3(1+z)^2} , \quad (8.4)$$

$$\Omega_{M0} = -\frac{2H'(z)}{2z(z^2 + 3z + 3) H'(z) - 3(1+z)^2 H(z)} . \quad (8.5)$$

Usando as equações. (8.4) e (8.5) para eliminar H_0 e Ω_{M0} na equação (8.3), encontramos a relação

$$H(z)H''(z) + H'(z)^2 = \frac{2H(z)H'(z)}{1+z} , \quad (8.6)$$

ou, resolvendo para $H''(z)$:

$$H''(z) = \frac{2H'(z)}{1+z} - \frac{H'(z)^2}{H(z)} . \quad (8.7)$$

Podemos ver essa equação como uma previsão do modelo Λ CDM plano. Pode-se reconstruir $H''(z)$ a partir dos dados de $H(z)$ e compará-lo com a reconstrução do lado direito da equação (8.7).

Em vez de comparar duas reconstruções, vamos definir e reconstruir o seguinte diagnóstico $\delta_H^{(2)}$:

$$\delta_{HF\Lambda\text{CDM}}^{(2)} \equiv H_{GP}'' - H_{model}'' , \quad (8.8)$$

onde H_{GP}'' é o $H''(z)$ obtido dos dados usando Processos Gaussianos (GP) e H_{model}'' é o lado direito da equação (8.7) (a previsão do modelo teórico para $H''(z)$). É bom enfatizar a diferença entre H_{model}'' e H_{GP}'' . Enquanto ambos são estimados com Processos Gaussianos, eles são obtidos de maneiras bastante diferentes. H_{GP}'' é estimado diretamente a partir dos dados, já que o método GP estima não apenas $H(z)$, mas também suas derivadas ($H'(z)$, $H''(z)$, etc.), portanto, é independente de qualquer modelo cosmológico. Por outro lado, H_{model}'' é obtido assumindo um modelo cosmológico, ou seja, é estimado como o lado direito da equação (8.7), que será igual a $H''(z)$ apenas se o modelo ΛCDM plano for válido. A vantagem de obter H_{model}'' dessa maneira e não derivando diretamente a equação (8.1) é que ele não depende de nenhum parâmetro livre, assim, não são necessários priors externos sobre esses parâmetros.

8.1.2 Relações de Consistência a partir de Supernovas Tipo Ia

Dado que os dados de SNe Ia não restringem H_0 , é necessário trabalhar com a função $E(z)$. Para o modelo ΛCDM plano, temos:

$$E(z)^2 = \Omega_{M0}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{M0} . \quad (8.9)$$

A partir dessa relação, podemos encontrar Ω_m :

$$\Omega_{M0} = \frac{E(z)^2 - 1}{(1+z)^3 - 1} . \quad (8.10)$$

Isso corresponde ao diagnóstico $Om(z)$ (SAHNI; SHAFIELOO; STAROBINSKY, 2008). Assumindo um Universo espacialmente plano, podemos relacionar isso à distância comóvel $D_C(z)$:

$$D_C(z) = \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} , \quad (8.11)$$

de modo que $E(z) = \frac{1}{D'_C(z)}$. A partir da equação (8.10), podemos escrever:

$$\Omega_{M0} = \frac{1}{(1+z)^3 - 1} \left(\frac{1}{D'_C(z)^2} - 1 \right) . \quad (8.12)$$

Derivando a expressão (8.12) e isolando a maior derivada de $D_C(z)$, obtemos:

$$D_C''(z) = \frac{3(1+z)^2 D'_C(z) (D'_C(z)^2 - 1)}{2z(z^2 + 3z + 3)} . \quad (8.13)$$

É possível observar que a partir da equação (8.13) pode ocorrer uma divergência para D_C'' conforme z tende a zero. Portanto, o método GP pode não reconstruir bem $D_C''(z)$ nesse caso, pois não funciona

bem com funções que variam rapidamente (SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012). Para testar a validade do modelo Λ CDM plano contra dados de SNe Ia precisamos definir a seguinte função:

$$\mathcal{L}_{F\Lambda\text{CDM}} \equiv 2z (z^2 + 3z + 3) D_C''(z) - 3(1+z)^2 D_C'(z) (D_C'(z)^2 - 1) , \quad (8.14)$$

que corresponde à $\mathcal{L}$ definida por (ZUNCKEL; CLARKSON, 2008).

Essas relações de consistência permitem avaliar a compatibilidade dos dados observacionais com o modelo Λ CDM plano verificando se a reconstrução do GP dos dados de SNe Ia está de acordo com as previsões teóricas do modelo.

8.2 MODELO Λ CDM COM CURVATURA

8.2.1 Relações de Consistência a partir dos dados de $H(z)$

Para o modelo Λ CDM com curvatura, a equação de Friedmann é

$$H(z)^2 = H_0^2 [\Omega_{M0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{\Lambda0} - \Omega_{M0})(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda0}] , \quad (8.15)$$

onde o parâmetro de curvatura é dado por $\Omega_{k0} = 1 - \Omega_{\Lambda0} - \Omega_{M0}$. Derivando a equação (8.15) obtemos:

$$2H(z)H'(z) = H_0^2 [2(1+z)(1 - \Omega_{\Lambda0} - \Omega_{M0}) + 3\Omega_{M0}(1+z)^2] , \quad (8.16)$$

e

$$H(z)H''(z) + H'(z)^2 = H_0^2 [(1 - \Omega_{\Lambda0} - \Omega_{M0}) + 3\Omega_{M0}(1+z)] . \quad (8.17)$$

Derivando novamente,

$$H(z)H'''(z) + 3H'(z)H''(z) = 3H_0^2\Omega_{M0} . \quad (8.18)$$

Ao resolver as equações (8.15)-(8.17) para obter os parâmetros H_0 , Ω_{M0} e $\Omega_{\Lambda0}$ e inserir os resultados na equação (8.18), podemos encontrar:

$$2 [H(z)H''(z) + H'(z)^2] = H(z) \left[(1+z)H'''(z) + \frac{2H'(z)}{1+z} \right] + 3(1+z)H'(z)H''(z) , \quad (8.19)$$

ou, resolvendo para $H'''(z)$:

$$H'''(z) = \frac{(1+z)H'(z) [2H'(z) - 3(1+z)H''(z)] + H(z) [2(1+z)H''(z) - 2H'(z)]}{(1+z)^2 H(z)} . \quad (8.20)$$

Definimos $H'''_{model} \equiv H'''(z)$, onde $H'''(z)$ é dado pelo lado direito da expressão (8.20) acima. Assim, definimos uma relação de consistência $\delta_H^{(3)}$ para o modelo Λ CDM com curvatura baseado nos

dados de $H(z)$, sendo,

$$\delta_{H\Lambda\text{CDM}}^{(3)} \equiv H_{GP}''' - H_{model}''' . \quad (8.21)$$

Onde H_{GP}''' é a reconstrução da terceira derivada de $H(z)$ obtida pelo Processo Gaussiano .

8.2.2 Relações de Consistência a partir de SNe Ia

Para obter relações de consistência no modelo ΛCDM com curvatura que possam ser testadas com os dados de supernovas do tipo Ia, utilizaremos os resultados da discussão realizada na seção 5.3, onde relacionamos o parâmetro de Hubble adimensional $E(z)$ com a distância comóvel transversal adimensional, $D_M(z)$, sua derivada com relação ao *redshift* $D'_M(z)$ e o parâmetro de densidade da curvatura hoje, Ω_{k0} , através da relação (5.34) expressa por

$$E(z)^2 = \frac{1 + \Omega_{k0} D_M(z)^2}{D'_M(z)^2} .$$

Da equação (8.15), podemos escrever:

$$E(z)^2 = \Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + 1 - \Omega_{M0} - \Omega_{k0} , \quad (8.22)$$

onde utilizamos o vínculo de Friedmann $\Omega_{M0} + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{k0} = 1$. Resolvendo a equação (8.22) para Ω_{M0} , obtemos

$$\Omega_{M0} = \frac{E(z)^2 - \Omega_{k0}z^2 - 2\Omega_{k0}z - 1}{z(z^2 + 3z + 3)} . \quad (8.23)$$

Utilizando a equação (5.33) para escrever Ω_{M0} em termos de D_M , obtemos

$$\Omega_{M0} = \frac{\Omega_{k0} D_M(z)^2 + 1 - D'_M(z)^2 [\Omega_{k0} z(2+z) + 1]}{z(z^2 + 3z + 3) D'_M(z)^2} . \quad (8.24)$$

Derivando-a em relação ao *redshift* e resolvendo para Ω_{k0} , obtemos a forma compacta:

$$\Omega_{k0} = \frac{2z(z^2 + 3z + 3) D''_M - 3(1+z)^2 D'^3_M + 3(1+z)^2 D'_M}{z^2(z^2 + 4z + 3) D'^3_M + 2z(z^2 + 3z + 3) D_M D'^2_M - D_M^2 (2z(z^2 + 3z + 3) D''_M + 3(1+z)^2 D'_M)} . \quad (8.25)$$

Derivando novamente e resolvendo para D'''_M , encontramos

$$D'''_M(z) = \frac{g(z)}{f(z)} , \quad (8.26)$$

e $g(z)$ é dado por

$$g(z) \equiv 3(1+z) \left(z^2(3+z)D_M''(z)^2 - 2(1+z)D_M'(z)^4 + 2(1+z)D_M'(z)^2 + \right. \\ \left. + 2z(2+z)D_M'(z)D_M''(z) + D_M(z) \left(D_M'(z)^2 - 1 \right) (3(1+z)D_M''(z) + 2D_M'(z)) \right. \\ \left. - D_M(z)^2 D_M''(z) (3(1+z)D_M''(z) + 2D_M'(z)) \right), \quad (8.27)$$

e $f(z)$ é:

$$f(z) \equiv (z^2 + 4z + 3) z^2 D_M'(z) - 3(1+z)^2 D_M(z)^2 D_M'(z) + 2(z^2 + 3z + 3) z D_M(z). \quad (8.28)$$

Para o modelo Λ CDM não plano, definimos a relação de consistência $\mathcal{L}_{\Lambda\text{CDM}}$ como:

$$\mathcal{L}_{\Lambda\text{CDM}} \equiv f(z)D_{M,GP}''' - g(z), \quad (8.29)$$

onde $D_{M,GP}'''$ é a reconstrução da terceira derivada de $D_M(z)$ obtida pelo GP (Processo Gaussiano).

8.3 MODELO XCDM - PLANO

8.3.1 Relações de Consistência a partir dos dados de $H(z)$

No modelo XCDM plano, onde a equação de estado da energia escura é da forma

$$p_x = w\rho_x, \quad (8.30)$$

a equação de Friedmann é

$$H(z)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{M0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{M0})(1+z)^{3(w+1)} \right]. \quad (8.31)$$

Realizando as derivadas primeira, segunda e terceira, respectivamente, obtemos

$$2H(z)H'(z) = 3H_0^2(1+z)^2 \left[\Omega_{M0} + (w+1)(1 - \Omega_{M0})(1+z)^{3w} \right], \quad (8.32)$$

$$2 \left(H(z)H''(z) + H'(z)^2 \right) = 3H_0^2(1+z) \left[2\Omega_{M0} + (w+1)(3w+2)(1 - \Omega_{M0})(1+z)^{3w} \right], \quad (8.33)$$

$$2H(z)H'''(z) + 6H'(z)H''(z) = H_0^2 \left[6\Omega_{M0} + 3(w+1)(3w+1)(3w+2)(1 - \Omega_{M0})(1+z)^{3w} \right]. \quad (8.34)$$

Resolvendo as equações (8.31)-(8.34) e isolando a derivada de maior ordem de $H(z)$, obtemos

$$H'''(z) = - \frac{3H'(z)H''(z)}{2H(z)} + \frac{H(z) \left[(1+z)^2 H''(z)^2 + 6H'(z)^2 - 4(1+z)H'(z)H''(z) \right]}{(1+z)H(z) \left[2(1+z)H'(z) - 3H(z) \right]} + \\ + \frac{(1+z)^3 H'(z)^4 - 3H(z)^3 H'(z) + 2(1+z)^2 H(z)H'(z)^2 \left((1+z)H''(z) - 2H'(z) \right)}{(1+z)^2 H(z)^2 \left[2(1+z)H'(z) - 3H(z) \right]}. \quad (8.35)$$

Definimos $H'''_{model} \equiv H'''(z)$, onde $H'''(z)$ é dado por (8.35). Então, a relação de consistência $\delta_H^{(3)}$ para o modelo XCDM com base nos dados de $H(z)$ é dada por:

$$\delta_{HFXCDM}^{(3)} \equiv H'''_{GP} - H'''_{model}. \quad (8.36)$$

8.3.2 Relações de Consistência a partir de SNe Ia

Não foi possível determinar relações de consistência com base em SNe Ia para o modelo XCDM plano, pois não foi possível obter analiticamente os parâmetros (w, Ω_{M0}, H_0) a partir das equações de $(D_C(z), D'_C(z), D''_C(z))$. Deve-se recorrer a métodos numéricos para resolver um sistema de equações não linear, o que está além da proposta realizada.

Para realizar os testes de relações de consistência baseados em dados observacionais, o método não paramétrico dos Processos Gaussianos foi usado para reconstruir quantidades cosmológicas de interesse a partir da amostra de dados disponível. O parâmetro de Hubble $H(z)$ e suas derivadas foram reconstruídos a partir das 32 medidas dos cronômetros cósmicos fornecidas por (MORESCO et al., 2022), enquanto a distância comóvel transversal $D_M(z)$ e suas derivadas foram reconstruídas a partir dos dados da amostra Pantheon+ (BROUT et al., 2022). Com essas quantidades reconstruídas, foi possível testar as relações de consistência para cada modelo cosmológico considerado utilizando apenas as amostras de dados observacionais.

8.4 TESTES DE CONSISTÊNCIA PARA OS DADOS DE $H(z)$

A partir da reconstrução da função $H(z)$ e suas derivadas usando GP, foi possível realizar testes de consistência nos modelos analisados. A Figura 34 apresenta a reconstrução de $\delta_{HF\Lambda CDM}^{(2)}$ para o modelo plano Λ CDM, que é dado pela expressão (8.8). A reconstrução obtida é compatível com zero dentro do intervalo de confiança de 2σ em quase todo o intervalo de *redshift* analisado, exceto no trecho de $1.79 \lesssim z \lesssim 2.45$, no qual a reconstrução se torna negativa em mais de 2σ .

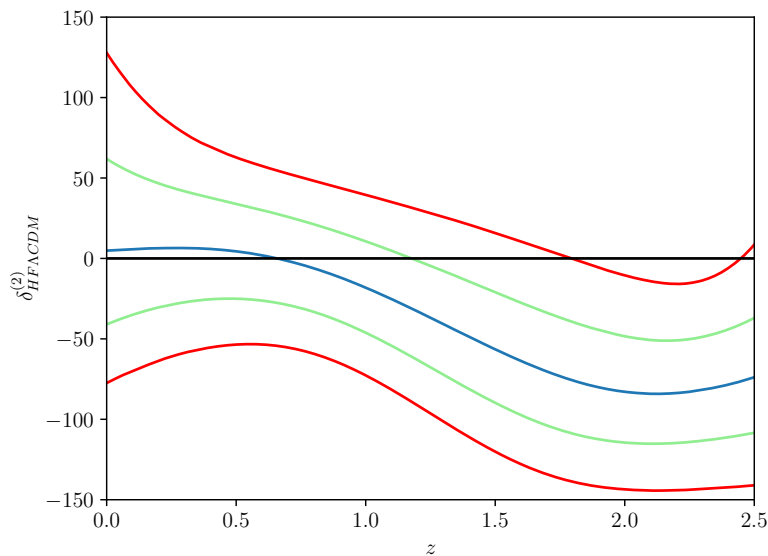


Figura 34 – Gráfico de $\delta_{HF\Lambda CDM}^{(2)} = H''_{GP} - H''_{F\Lambda CDM}$. Com intervalo de confiança de 2σ .

O $\delta_{H\Lambda\text{CDM}}^{(3)}$ para o modelo ΛCDM com curvatura, dada pela relação (8.21) e reconstruída pelo GP, é mostrada na Figura 35. Obtemos uma compatibilidade com zero dentro de um intervalo de incerteza de 2σ em toda a faixa de *redshift* analisada.

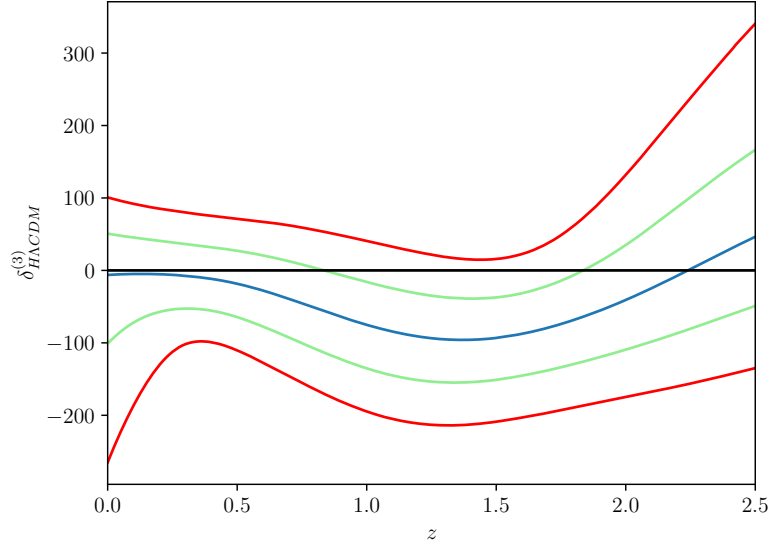


Figura 35 – Plot de $\delta_{H\Lambda\text{CDM}}^{(3)} = H_{GP}''' - H_{\Lambda\text{CDM}}'''$. Com intervalo de confiança de 2σ .

Para o modelo XCDM plano o $\delta_{H\text{FXCDM}}^{(3)}$ é dado por (8.36) e sua reconstrução está plotada na Figura 36. A reconstrução é compatível com zero em até um intervalo de confiança de 2σ em toda a faixa de *redshift* e, na maior parte do intervalo de redshift, $z \lesssim 2.05$, a reconstrução é compatível com zero em menos de 1σ .

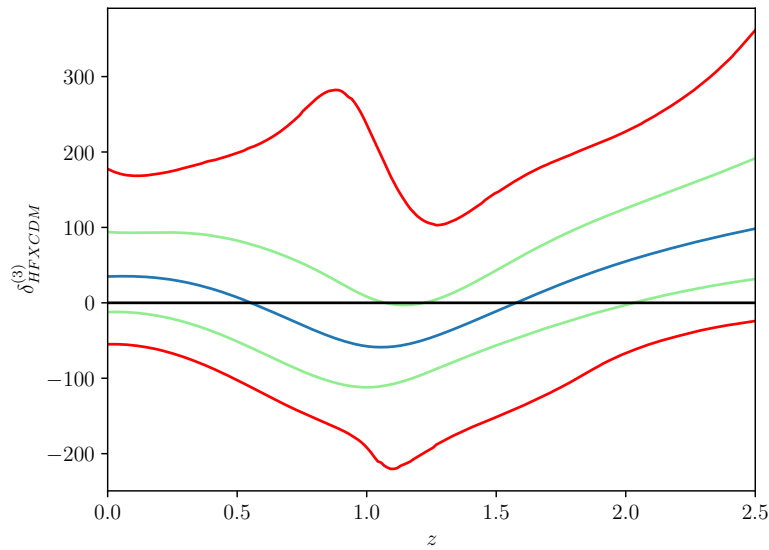


Figura 36 – Plot de $\delta_{H\text{FXCDM}}^{(3)} = H_{GP}''' - H_{\text{FXCDM}}'''$. Com intervalo de confiança de 2σ .

8.5 TESTES DE CONSISTÊNCIA PARA OS DADOS DE SNE IA

Usando a reconstrução da distância comóvel transversal $D_M(z)$ e suas derivadas, obtidas pelo GP com os dados da amostra Pantheon+, realizamos testes de consistência para os modelos analisados.

Para o modelo Λ CDM plano, reconstruímos a $\mathcal{L}_{F\Lambda\text{CDM}}$ dada por (8.14). A reconstrução é mostrada na imagem esquerda da Figura 37. Similarmente ao trabalho (YAHYA et al., 2014), escolhemos plotar $(1+z)^{-4}\mathcal{L}_{F\Lambda\text{CDM}}(z)$, garantindo a estabilidade dos erros. Como explicado em (YAHYA et al., 2014), podemos fazer isso porque estamos testando a igualdade dessas quantidades com zero. Como resultado, as bandas de erro das reconstruções não aumentam com o redshift, conforme esperado. A reconstrução é compatível com zero em menos de 1σ de intervalo de confiança em toda a faixa de *redshift* analisada.

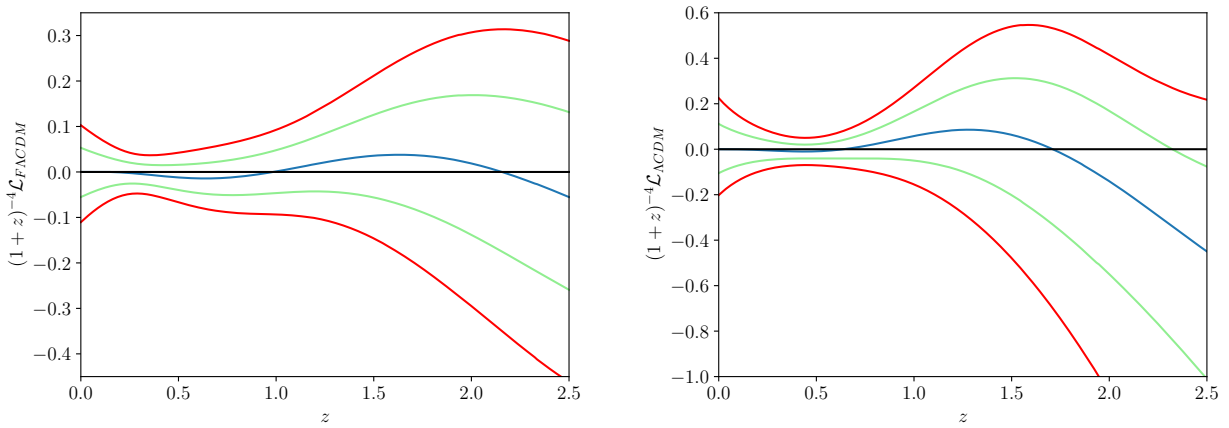


Figura 37 – Plot de $(1+z)^{-4}\mathcal{L}_{F\Lambda\text{CDM}}$.

O teste de relação de consistência para o modelo Λ CDM com curvatura foi realizado usando a $\mathcal{L}_{\Lambda\text{CDM}}$ expressa em (8.29). A reconstrução obtida é mostrada na imagem direita da Figura 37. Novamente, escolhemos plotar $(1+z)^{-4}\mathcal{L}_{\Lambda\text{CDM}}(z)$ garantindo, assim, a estabilidade dos erros. A reconstrução é compatível com zero em menos de 1σ intervalo de confiança em aproximadamente 93% da faixa de *redshift* analisada.

Os testes de consistência para o modelo XCDM plano não foram apresentados devido a divergências na reconstrução das relações de consistência, já que as soluções para XCDM plano não puderam ser obtidas analiticamente e métodos numéricos seriam necessários.

9 PARÂMETROS CINEMÁTICOS: DO PARÂMETRO DE HUBBLE ATÉ O SNAP

Uma abordagem alternativa para o estudo da evolução cósmica é a utilização dos chamados modelos cosmográficos ou cinemáticos (VISSER, 2004; VISSER, 2005; SHAPIRO; TURNER, 2006; BLANDFORD et al., 2005; ELGARROY; MULTAMAKI, 2006; RAPETTI et al., 2007; RIESS et al., 2007). Esses modelos focam na análise da evolução do Universo sem se preocupar diretamente com sua composição. Em vez disso, eles buscam medidas diretas da expansão cósmica através de parâmetros cinemáticos, como o parâmetro de Hubble, H_0 , o parâmetro de desaceleração, $q(z)$, e os parâmetros jerk, $j(z)$, e snap, $s(z)$. A principal vantagem dessa metodologia é a capacidade de obter medições diretas dos parâmetros de expansão com menos suposições do que aquelas presentes na modelagem dinâmica tradicional.

Recentemente, diversos modelos cosmográficos de energia escura têm sido estudados. Por exemplo, a execução de modelos de vácuo foi abordada por (REZAEI; PERACAUULA; MALEKJANI, 2021), enquanto o estudo dos parâmetros cosmográficos em abordagens independentes de modelo foi realizado por (MEHRABI; REZAEI, 2021). Além disso, a análise de funções cosmográficas até a quarta ordem da derivada do fator de escala usando o método não-paramétrico de Processos Gaussianos foi explorada por (VELASQUEZ-TORIBIO; FABRIS, 2022).

Uma forma de implementar a modelagem cosmográfica é parametrizando os parâmetros cosmológicos como H_0 , q , j e s , ou até ordens superiores, como crackle e pop (LOBO; MIMOSO; VISSER, 2020). Outra metodologia envolve a obtenção desses parâmetros por meio da reconstrução utilizando processos gaussianos. Bilicki e Seikel (BILICKI; SEIKEL, 2012) reconstruíram $q(z)$, o parâmetro de Hubble adimensional $E(z)$ e suas duas derivadas em relação ao *redshift* (z). Hai-Nan Lin e colaboradores (LIN; LI; TANG, 2019) reconstruíram a distância comóvel adimensional $D_C(z)$, $E(z)$, $q(z)$ e o parâmetro da equação de estado $w(z)$. Zhang e Xia (ZHANG; XIA, 2016) focaram na reconstrução de $q(z)$ e da distância de luminosidade comóvel adimensional $D(z)$, assim como suas derivadas. No trabalho (HARIDASU et al., 2018), os autores reconstruíram $q(z)$ e $E(z)$, enquanto Mukherjee e Banerjee (MUKHERJEE; BANERJEE, 2022; MUKHERJEE; BANERJEE, 2021)) focaram na reconstrução de $q(z)$, $H(z)$, $D_C(z)$ (e suas duas derivadas) e $j(z)$.

Nesse Capítulo realizamos a reconstrução dos parâmetros cinemáticos utilizando os processos Gaussianos a partir dos dados de SNe Ia e CCs. Reconstruímos o $E(z)$, o parâmetro de desaceleração $q(z)$, o Jerk $j(z)$ e o Snap $s(z)$. Os resultados obtidos foram publicados em (JESUS et al., 2024).

9.1 EQUAÇÕES PARA OS PARÂMETROS CINEMÁTICOS

Vamos agora expressar os parâmetros cosmológicos $H(z)$, $q(z)$, $j(z)$ e $s(z)$ em termos das quantidades que representam os dados de Supernovas do tipo Ia (SNe Ia) e os dados de $H(z)$ para obtermos a reconstrução dos parâmetros cinemáticos com auxílio dos Processos Gaussianos. Os

parâmetros cinemáticos são definidos em função do fator de escala como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (9.1)$$

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}, \quad (9.2)$$

$$j = \frac{\dddot{a}}{aH^3}, \quad (9.3)$$

$$s = \frac{\dddot{a}}{aH^4}, \quad (9.4)$$

sendo eles o parâmetro de Hubble, desaceleração, jerk e snap, respectivamente.

9.2 PARÂMETROS CINEMÁTICOS EM FUNÇÃO DE $H(z)$

A reconstrução de $H(z)$ e suas derivadas a partir dos dados de $H(z)$ com os Processos Gaussianos possibilita a reconstrução de quantidades que possam ser expressas em termos de $H(z)$ e suas derivadas. Vamos então escrever os parâmetros cinemáticos em termos de $H(z)$ e suas derivadas. Utilizando a relação (5.28), o parâmetro de desaceleração $q(z)$ toma a forma:

$$q(z) = (1+z) \frac{H'(z)}{H(z)} - 1. \quad (9.5)$$

Uma forma de determinar o jerk, $j(z)$, é utilizando a definição encontrada por (BENNDORF; JESUS; PEREIRA, 2022), que permite escrever o jerk em termos do parâmetro de desaceleração como

$$j(z) = (1+z)q'(z) + q(1+2q) \quad (9.6)$$

Assim, a partir de (9.5), obtemos

$$j(z) = 1 - 2(1+z) \frac{H'(z)}{H(z)} + (1+z)^2 \frac{H'(z)^2}{H(z)^2} + (1+z)^2 \frac{H''(z)}{H(z)}. \quad (9.7)$$

Como foi mostrado em (BENNDORF; JESUS; PEREIRA, 2022), o snap pode ser expresso por

$$s(z) = -(1+z)j'(z) - [2+3q(z)]j(z). \quad (9.8)$$

Então, utilizando as equações (9.5) e (9.7), obtemos

$$\begin{aligned} s(z) = & 1 - 3(1+z) \frac{H'}{H} + 3(1+z)^2 \frac{H'^2}{H^2} - (1+z)^3 \frac{H'^3}{H^3} + \\ & - 4(1+z)^3 \frac{H'H''}{H^2} + (1+z)^2 \frac{H''}{H} - (1+z)^3 \frac{H'''}{H} \end{aligned} \quad (9.9)$$

onde as linhas, $(')$, denotam derivadas em relação ao *redshift* z .

9.3 PARÂMETROS CINEMÁTICOS A PARTIR DA $D_M(z)$

Para usar a reconstrução feita pelos Processos Gaussianos para os dados de SNe Ia, vamos escrever os parâmetros cinemáticos em termos da distância comóvel transversal adimensional $D_M(z)$ e suas derivadas com relação ao redshift. Utilizaremos os resultados obtidos na seção 5.3, onde encontramos a relação (5.35) entre o parâmetro de Hubble adimensional $E(z)$ com o parâmetro de densidade Ω_{k0} , a distância comóvel transversal adimensional $D_M(z)$ e suas derivadas dadas por

$$E^2 = \frac{1 + \Omega_{k0} D_M^2}{D_M'^2}.$$

Tomando a derivada em relação ao *redshift* z da relação acima, encontramos a expressão (5.35),

$$E \frac{dE}{dz} = \frac{\Omega_k D_M (D_M'^2 - D_M D_M'') - D_M''}{D_M'^3},$$

O parâmetro de desaceleração $q(z)$, dado em (9.5), é obtido utilizando a divisão da (5.34) pela (5.35), sendo expresso por

$$q(z) = \frac{\Omega_k (1+z) D_M(z) D_M'(z)}{1 + \Omega_k D_M(z)^2} - (1+z) \frac{D_M''(z)}{D_M'(z)} - 1. \quad (9.10)$$

De forma análoga, para o jerk temos:

$$\begin{aligned} j(z) = & 1 + \frac{\Omega_k (1+z)^2}{1 + \Omega_k D_M^2} \left[D_M'^2 - \frac{2 D_M D_M'}{1+z} - 3 D_M D_M'' \right] \\ & + \frac{(1+z)^2}{D_M'} \left[\frac{3 D_M''^2}{D_M'} + \frac{2 D_M'''}{(1+z)} - D_M''' \right] \end{aligned} \quad (9.11)$$

A partir dos resultados obtidos, podemos observar a possibilidade de separar as equações em um termo que dependa e outro que não dependa de Ω_{k0} . Vamos então separá-las para poder simplificar as equações. Começando com o parâmetro de desaceleração $q(z)$, expresso em (9.10), que pode ser escrito como:

$$q(z) = q_f(z) + q_k(z), \quad (9.12)$$

onde os termos $q_f(z)$ e $q_k(z)$ são definidos como

$$q_f(z) \equiv -1 - (1+z) \frac{D_M''(z)}{D_M'(z)}, \quad (9.13)$$

$$q_k(z) \equiv \frac{\Omega_k (1+z) D_M(z) D_M'(z)}{1 + \Omega_k D_M(z)^2}. \quad (9.14)$$

De forma semelhante, para o jerk $j(z)$ temos

$$j(z) = j_f(z) + j_k(z) \quad (9.15)$$

com os termos $j_f(z)$ e $j_k(z)$, definidos por

$$j_f(z) \equiv 1 + \frac{(1+z)^2}{D'_M} \left[\frac{3D_M''^2}{D'_M} + \frac{2D_M''}{(1+z)} - D_M''' \right] \quad (9.16)$$

$$j_k(z) \equiv \frac{\Omega_k(1+z)^2}{1 + \Omega_k D_M^2} \left[D_M'^2 - \frac{2D_M D_M'}{1+z} - 3D_M D_M'' \right] \quad (9.17)$$

Com base na expressão (9.8), o snap $s(z)$ é determinado como

$$s(z) = -(1+z)j_f' - (2+3q_f)j_f - (1+z)j_k' - (2+3q_f+3q_k)j_k - 3j_f q_k. \quad (9.18)$$

Podemos escrever a expressão acima na forma,

$$s(z) = s_f(z) + s_k(z), \quad (9.19)$$

definindo os termos $s_f(z)$ e $s_k(z)$, como sendo

$$s_f(z) \equiv -(1+z)j_f' - (2+3q_f)j_f, \quad (9.20)$$

$$s_k(z) \equiv -(1+z)j_k' - (2+3q_f+3q_k)j_k - 3j_f q_k. \quad (9.21)$$

Explicitamente, os termos $s_f(z)$ e $s_k(z)$ são escritos em função de $D_M(z)$ e suas derivadas como

$$\begin{aligned} s_f(z) = 1 + \frac{(1+z)^3 D_M^{(4)}}{D_M'} - \frac{(1+z)^2 D_M^{(3)}}{D_M'} + \frac{15(1+z)^3 D_M''^3}{D_M'^3} + \\ + \frac{5(1+z)^2 D_M''^2}{D_M'^2} + \frac{3(1+z) D_M''}{D_M'} - \frac{10(1+z)^3 D_M^{(3)} D_M''}{D_M'^2} \end{aligned} \quad (9.22)$$

$$\begin{aligned} s_k = \frac{\Omega_k(1+z)}{(1 + \Omega_k D_M^2)^2 D_M'} \{ \Omega_k(1+z) D_M^2 D_M''^2 (7(1+z) D_M'' + 3D_M') + \\ + (1+z) D_M'^2 (4(1+z) D_M'' + D_M') + \\ - \Omega_k D_M^3 [18(1+z)^2 D_M''^2 + 3D_M'^2 + \\ + (1+z) D_M' (7D_M'' - 6(1+z) D_M^{(3)})] + \\ - D_M [18(1+z)^2 D_M''^2 + \Omega_k(1+z)^2 D_M'^4 + 3D_M'^2 + \\ + (1+z) D_M' (7D_M'' - 6(1+z) D_M^{(3)})] \}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Com essas expressões, podemos reconstruir a evolução dos parâmetros cinemáticos a partir dos 32 dados de $H(z)$ provenientes dos CCs (MORESCO et al., 2022) e medidas SNe Ia da amostra Pantheon+ (BROUT et al., 2022).

Nessa análise foi necessário modificar o software de código aberto GaPP (SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012) para obter a reconstrução da derivada de quarta ordem, $D_M^{(4)}(z)$, já que o software original só era capaz de reconstruir derivadas de funções até a terceira ordem.

Para obter a reconstrução dos parâmetros cinemáticos em termos de $D_M(z)$ usando as equações (5.34), (9.10), (9.11) e (9.18), no entanto, precisamos obter um parâmetro livre, Ω_{k0} . Este parâmetro não é obtido a partir da reconstrução, mas deve ser restrito com o auxílio de outras observações que podem fornecer um prior em Ω_{k0} .

O prior utilizado foi fornecido pelo Planck 18 (TT,TE,EE+lowE) (AGHANIM et al., 2020), onde $\Omega_{k0} = -0.044 \pm 0.050$ a um nível de confiança de 3σ . Escolhemos trabalhar com um prior de 3σ para permitir uma análise mais independente do modelo. Com esse prior sobre (Ω_{k0}) , podemos obter os parâmetros cinemáticos amostrando esse prior e a Gaussiana multivariada correspondente a $H(z)$, $D_M(z)$ e suas derivadas.

Também foi realizada a reconstrução dos parâmetros cinemáticos utilizando a combinação de dados $H(z)$ e da amostra Pantheon+ no intervalo de *redshift* onde as respectivas reconstruções eram compatíveis em 1σ . Assim como discutido na seção 4.2.4, esta análise foi realizada ponderando a reconstrução obtida para $D_M(z)$ com a reconstrução de $H(z)$ por um método MCMC conhecido como amostragem de importância.

Para cada reconstrução dos parâmetros cinemáticos abaixo, também apresentamos as restrições obtidas a partir do Planck 18 (Plik,TT,TE,EE+lowE+lensing) (AGHANIM et al., 2020). Para o modelo Λ CDM plano correspondente a $\Omega_{M0} = 0.3153 \pm 0.0073$, $H_0 = 67.36 \pm 0.54$ km/s/Mpc. Embora na análise independente de modelo dos Processos Gaussianos foi permitido alguma curvatura espacial, optamos por comparar com o modelo Λ CDM plano, pois este é o modelo de concordância cósmica. Em relação à tensão de H_0 , como Pantheon+ sozinho não restringe H_0 e pretendemos combinar reconstruções de dados de $H(z)$ e SNe Ia, não reconstruímos $H(z)$, mas $E(z)$, que é independente de H_0 . No final da seção, no entanto, comparamos as determinações de H_0 a partir de $H(z)$, Planck 18 e SH0ES.

9.4 RECONSTRUÇÃO DO $E(z)$

As reconstruções do $E(z)$ obtidas com os Processos Gaussianos são mostradas com intervalos de confiança de 1 e 2σ na Figura 38. Na Figura 38, no canto superior esquerdo, mostramos a reconstrução de $E(z)$ para os dados de $H(z)$. A linha tracejada corresponde a $E(z)$ para o modelo Λ CDM plano, com Ω_{M0} obtido do Planck 18. A previsão do modelo Λ CDM é compatível dentro de 1σ com a reconstrução GP para $z \lesssim 2.3$, sendo compatível dentro de 2σ no intervalo restante. A Figura superior direita mostra a reconstrução de $E(z)$ feita com os dados da amostra Pantheon+. Como podemos ver, o modelo padrão Λ CDM é compatível com a reconstrução GP dentro de 1σ na maior parte do intervalo de *redshift*, sendo compatível em 2σ apenas para um intervalo inicial, $0.1 \lesssim z \lesssim 0.8$.

Na Figura inferior esquerda, mostramos as reconstruções sobrepostas para ver em qual intervalo de *redshift* elas são compatíveis em 1σ , permitindo-nos fazer uma análise conjunta com segurança. Descobrimos que elas são compatíveis dentro de 1σ para todo o intervalo analisado, $0 < z < 2.5$, então procedemos à análise conjunta completa, que pode ser vista na Figura inferior direita. Como pode ser visto na Figura 38d, no intervalo $0.4 \lesssim z \lesssim 0.8$ e para $z \gtrsim 1.6$, o modelo padrão não é compatível com a análise conjunta dos GP dentro de 1σ , sendo compatível em 2σ .

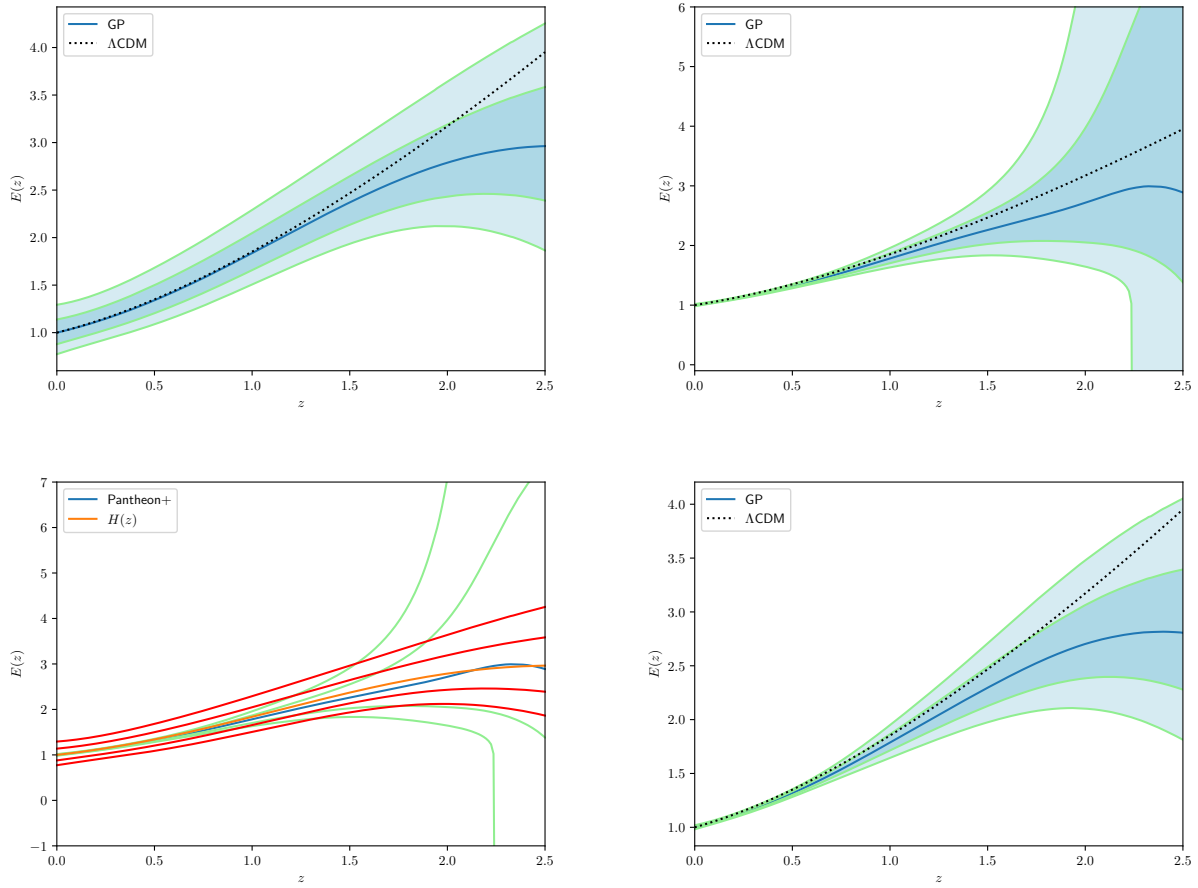


Figura 38 – Reconstrução do $E(z)$. **a) Superior Esquerda:** Reconstrução a partir dos dados de $H(z)$. **b) Superior Direita:** Reconstrução a partir dos dados de SNe Ia. **c) Inferior Esquerda:** Comparação entre reconstruções. **d) Inferior Direita:** Reconstrução conjunta.

9.5 RECONSTRUÇÃO DO $q(z)$

Na Figura 39a vemos a reconstrução do parâmetro de desaceleração, $q(z)$, a partir dos cronômetros cósmicos. É possível observar que o modelo Λ CDM plano é compatível com a reconstrução dos Processos Gaussianos dentro de 2σ para um grande intervalo até $z \approx 2.3$. Para a reconstrução a partir das SNe Ia apresentada na Figura 39b, no entanto, a compatibilidade a menos de 1σ é obtida na maior parte do intervalo analisado, apenas em $0 \lesssim z \lesssim 0.4$ temos compatibilidade até 2σ .

Na Figura 39c as reconstruções estão sobrepostas para verificar se é possível combiná-las. Pode-se ver que são compatíveis dentro de 1σ em todo o intervalo de *redshift* analisado, a reconstrução combinada é apresentada na Figura 39d. Podemos observar que a previsão do modelo Λ CDM plano está dentro do nível de confiança de 2σ da reconstrução conjunta em $z \lesssim 2.1$.

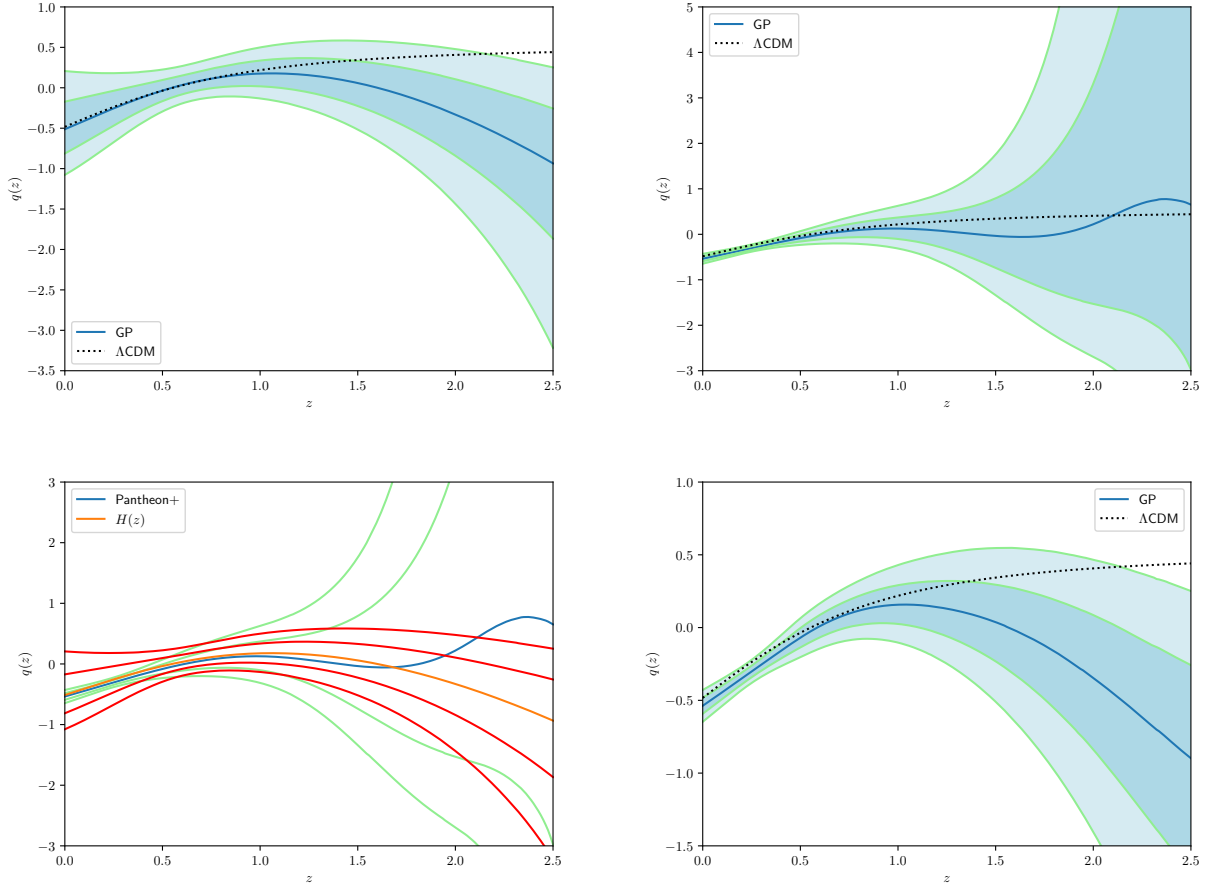


Figura 39 – Reconstrução de $q(z)$ com intervalo de confiança de 2σ . **a) Superior Esquerda:** Reconstrução a partir dos dados $H(z)$. **b) Superior Direita:** Reconstrução a partir das SNe Ia. **c) Inferior Esquerda:** Comparação entre as reconstruções. **d) Inferior Direita:** Reconstrução conjunta.

9.6 RECONSTRUÇÃO DO $j(z)$

Mostramos a reconstrução do Jerk, $j(z)$, com intervalo de confiança de 2σ na Figura 40. Na Figura 40a podemos ver a reconstrução do jerk a partir dos cronômetros cósmicos. A comparação com o modelo Λ CDM aqui é bastante interessante, pois o modelo Λ CDM plano padrão prevê um valor exato $j(z) = 1$. Como podemos observar, nesta Figura apenas em um intervalo de alto redshift, $1.9 \lesssim z \lesssim 2.4$, Λ CDM está fora do intervalo de 2σ da reconstrução dos GP. Para a reconstrução com as SNe Ia, no entanto, como apresentado na Figura 40b o modelo Λ CDM está inicialmente dentro de 1σ até $z \approx 2.0$ e, então, entra na região de 2σ .

Na Figura 40c superpomos ambas as reconstruções. Pode-se ver que ambas as reconstruções concordam para $z \lesssim 1.9$, então, na Figura 40d fizemos a combinação das reconstruções apenas neste intervalo. Vemos que o modelo Λ CDM concorda com a reconstrução conjunta em todo o intervalo de *redshift* dentro do nível de confiança de 2σ . Essa compatibilidade é inferior a 1σ em aproximadamente 90% do intervalo de redshift.

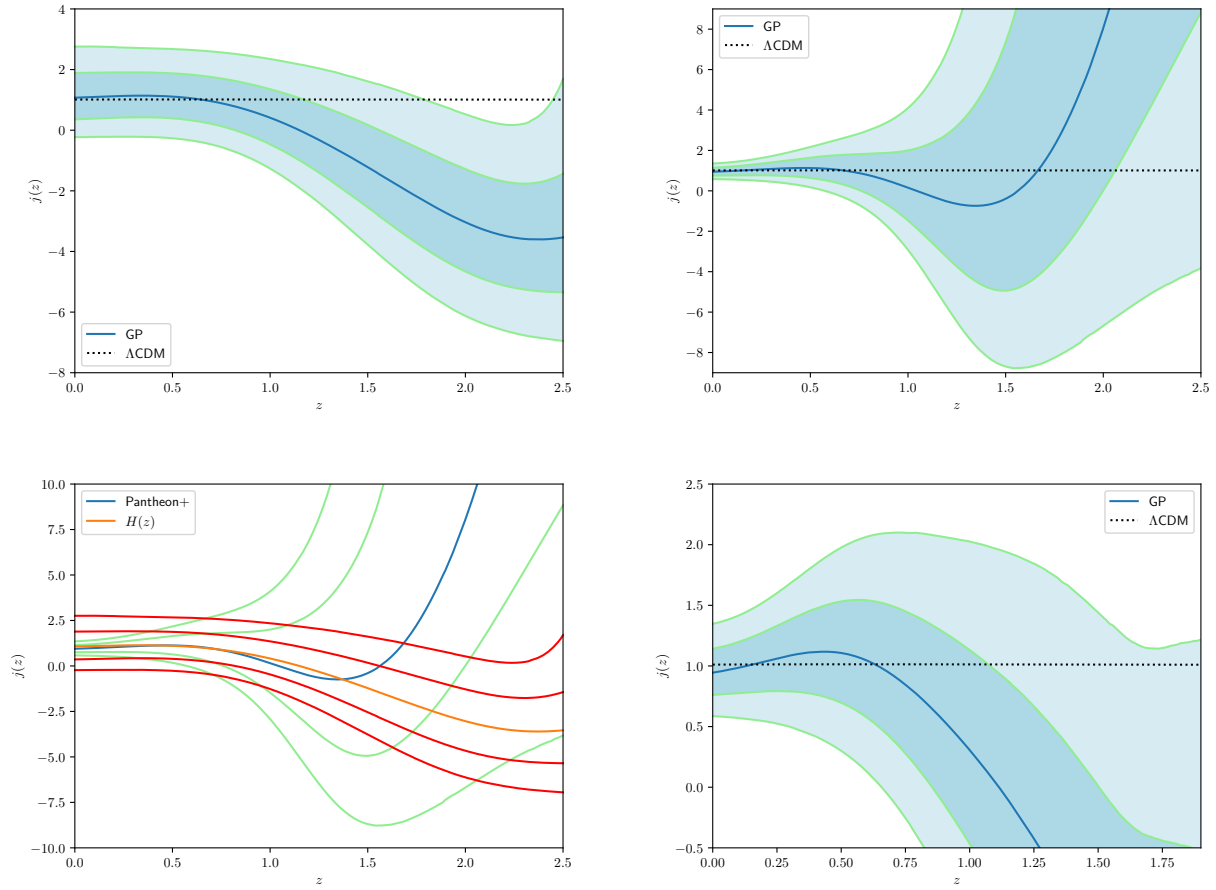


Figura 40 – Reconstrução do $j(z)$ em até 2σ de intervalo de confiança. **a) Superior Esquerda:** Reconstrução a partir dos dados $H(z)$. **b) Superior Direita:** Reconstrução a partir das SNe Ia. **c) Inferior Esquerda:** Comparação entre as reconstruções. **d) Inferior Direita:** Reconstrução conjunta.

9.7 RECONSTRUÇÃO DO $s(z)$

A reconstrução do Snap, $s(z)$, obtida com os Processos Gaussianos é mostrada na Figura 41. Como pode ser visto na Figura 41a e Figura 41b, o modelo Λ CDM é compatível dentro de 2σ com ambas as reconstruções. Na Figura 41c podemos observar que ambas as reconstruções concordam dentro de 1σ apenas para um pequeno intervalo, $z \lesssim 1.6$. A reconstrução conjunta neste intervalo é apresentada na Figura 41d, onde pode-se ver que o modelo Λ CDM é compatível com ele para todo este intervalo até o nível de confiança de 2σ .

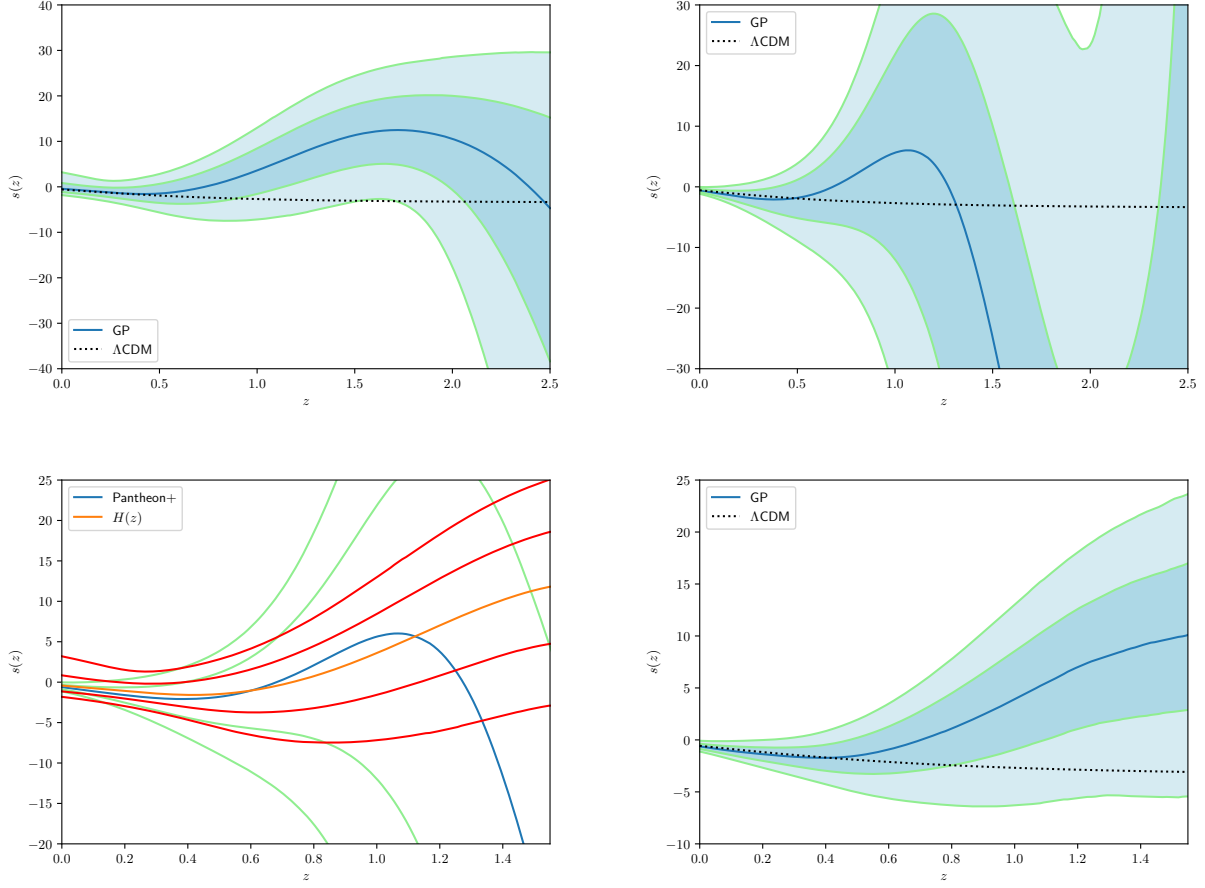


Figura 41 – Reconstrução de $s(z)$ com intervalo de confiança em até 2σ . **a) Superior Esquerda:** Reconstrução a partir dos dados $H(z)$. **b) Superior Direita:** Reconstrução a partir das SNe Ia. **c) Inferior Esquerda:** Comparação entre as reconstruções. **d) Inferior Direita:** Reconstrução conjunta.

9.8 VALORES ATUAIS DOS PARÂMETROS CINEMÁTICOS A PARTIR DOS PROCESSOS GAUSSIANOS

Como discutido anteriormente, os parâmetros cinemáticos foram melhor restringidos em redshifts menores. Portanto, nesta subseção focamos nas restrições para os valores atuais dos parâmetros cinemáticos, que têm grande interesse na literatura. Na Tabela 14 mostramos os valores dos parâmetros cinemáticos hoje, em $z = 0$, que obtivemos através das reconstruções GP. Também mostramos as restrições obtidas do Planck 18 (AGHANIM et al., 2020) para um modelo Λ CDM plano, correspondente a $\Omega_{M0} = 0.315 \pm 0.007$. Temos a compatibilidade dentro do intervalo de confiança de 1σ entre o modelo Λ CDM plano com nossos resultados. O valor de H_0 obtido com os Processos Gaussianos também é compatível em 1σ com o valor $H_0 = 73.2 \pm 1.7 \pm 2.4$ km/s/Mpc encontrado por SH0ES (RIESS et al., 2016).

Devemos também comparar esses valores com os obtidos das parametrizações cinemáticas em (BENNDORF; JESUS; PEREIRA, 2022). Em sua melhor parametrização, $j(z) = j_0$, eles obtiveram $H_0 = 68.8 \pm 1.9$ km/s/Mpc, $q_0 = -0.578 \pm 0.067$, $j_0 = 1.15 \pm 0.28$ e $s_0 = -0.255^{+0.094}_{-0.21}$ em 1σ

de intervalo de confiança. Este resultado é dos dados da amostra Pantheon e conjunto com os 31 dados de CCs. Temos que esses resultados são compatíveis dentro de 1σ com os nossos resultados apresentados na Tabela 14. No entanto, enquanto o valor de H_0 era compatível com SH0ES apenas em 2σ de intervalo de confiança, agora temos compatibilidade com SH0ES em 1σ graças à consideração das sistemáticas nas novas medidas de CCs. Podemos também comparar esses resultados com, por exemplo, (MUKHERJEE; BANERJEE, 2021), que reconstruíram $H(z)$, $q(z)$ e $j(z)$ com GP, usando CCs e Pantheon. Eles encontraram a partir dos CCs $H_0 = 71.2 \pm 4.6$ km/s/Mpc, que é compatível com nosso resultado dentro de 1σ de intervalo de confiança. Os outros resultados que eles encontraram, a saber, q_0 , j_0 de dados CCs, SNe Ia e CC+SNe Ia Tabela 5 de (MUKHERJEE; BANERJEE, 2021), são todos compatíveis com os resultados apresentados na Tabela 14. É importante notar que eles não consideraram as sistemáticas de $H(z)$, usaram a amostra do Pantheon (SCOLNIC et al., 2018) e a propagação de erros para obter essas estimativas de incertezas.

Parâmetro	Reconstrução com Processos Gaussianos			Modelo Λ CDM
	$H(z)$	SNe Ia	Combinado	Planck 18
H_0 (km/s/Mpc)	$67.2 \pm 6.2 \pm 12.3$			$67.4 \pm 0.5 \pm 1.0$
$q(z=0)$	$-0.51^{+0.34+0.72}_{-0.30-0.56}$	$-0.54^{+0.05+0.11}_{-0.06-0.11}$	$-0.54^{+0.06+0.11}_{-0.05-0.11}$	$-0.528 \pm 0.011 \pm 0.021$
$j(z=0)$	$1.07^{+0.82+1.68}_{-0.71-1.30}$	$0.94^{+0.20+0.41}_{-0.18-0.36}$	$0.94^{+0.20+0.40}_{-0.18-0.36}$	1
$s(z=0)$	$-0.43^{+1.3+3.6}_{-0.71-1.4}$	$-0.62^{+0.28+0.59}_{-0.27-0.53}$	$-0.62^{+0.26+0.54}_{-0.25-0.49}$	$-0.418 \pm 0.032 \pm 0.064$

Tabela 14 – Valores dos parâmetros cinemáticos hoje em ($z=0$), com intervalo de confiança de 1σ e 2σ , obtidos com GP.

Na Figura 42 apresentamos as distribuições conjuntas encontradas para os valores atuais dos parâmetros cinemáticos q_0 , j_0 e s_0 . Não mostramos a distribuição de H_0 aqui porque ela vem apenas dos dados $H(z)$ e é uma distribuição Normal, como o esperado dos Processos Gaussianos.

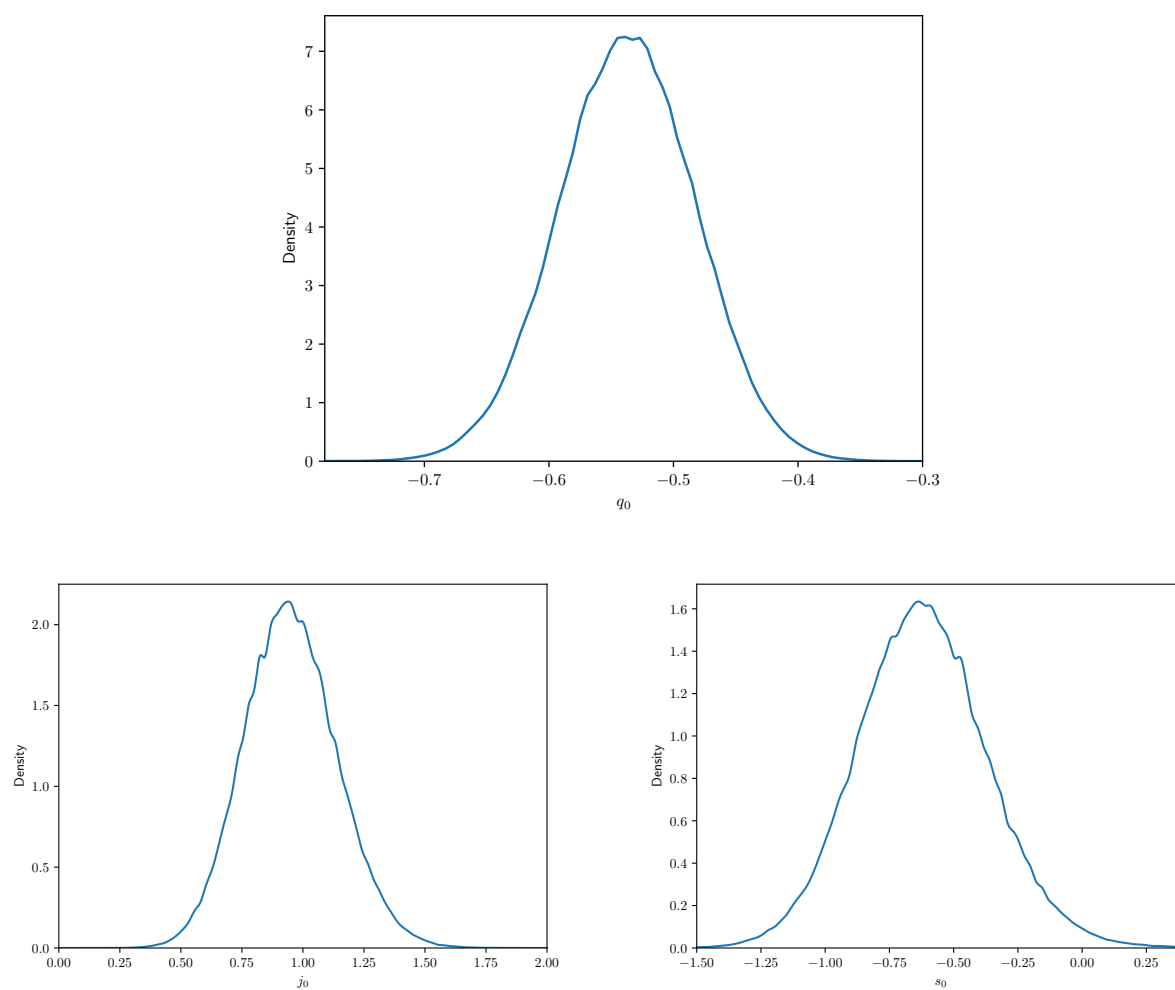


Figura 42 – Valores atuais dos parâmetros cinemáticos a partir das reconstruções conjuntas utilizando Processos Gaussianos.

10 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nessa Tese estudamos algumas formas alternativas de descrever o setor escuro. Analisamos a formulação dos modelos ϕ CDM para um dado potencial $V(\phi)$ e, com o auxílio dos Processos Gaussianos, encontramos restrições sobre o potencial do campo escalar diretamente dos dados $H(z)$ e SNe Ia sem ter que assumir qualquer forma para o potencial. Também permitimos que a curvatura espacial e o parâmetro de densidade total da matéria variassem de acordo com duas premissas supostas, ou seja, um prior de 3σ da sonda de CMB Planck 2018 e um “prior Largo” que abrange muitas das observações atuais. Como resultado, descobrimos que os dois potenciais teste que utilizamos, U_{PL} e U_{FF} , são compatíveis com nossas reconstruções pelo menos para alguns valores de seus parâmetros e algumas regiões dentro do intervalo de *redshift* dos dados. Especificamente para $z = 0$ mostramos que os modelos de teste são todos compatíveis com as reconstruções dentro de 1σ de intervalo de confiança. Esta análise pode ser melhorada no futuro quando mais dados estiverem disponíveis, principalmente dados SNe Ia em alta *redshift*, como vimos que a reconstrução SNe Ia tem erros muito maiores em *redshift* maiores.

Analisamos também o modelo ϕ CDM proposto em (CARVALHO et al., 2006), que permite uma desaceleração da expansão do Universo no futuro. Esse modelo de campo escalar é uma extensão da quintessência da cosmologia exponencial Ratra-Peebles (RP), cujo potencial agora depende de um par de parâmetros (α, λ) e prevê uma expansão desacelerada no futuro. Diferente da abordagem RP, o parâmetro α permite uma cosmologia em desaceleração no futuro, frustrando, assim, a evolução esperada para uma cosmologia de Sitter típica de Λ CDM. A análise estatística do modelo foi atualizada em nossa análise: adotamos a amostra Pantheon SNe Ia e os 31 dados dos cronômetros cósmicos resultando em $H_0 = 68.6 \pm 3.7$ km/s/Mpc, $\Omega_{\phi 0} = 0.735^{+0.083}_{-0.069}$, $\alpha < 6,56$ e $\lambda < 0,879$ em 2σ de intervalo de confiança. No contexto deste modelo, encontramos uma grande possibilidade de desaceleração no futuro distante, como pode ser visto na Figura 16. Também tentamos encontrar evidências para a desaceleração futura no contexto de um método independente do modelo, ou seja, os Processos Gaussianos. Nesse caso, usando os dados $H(z)$ provenientes das 31 medidas de CCs, também obtemos uma grande possibilidade de desaceleração nas proximidades do *redshift* futuro $z \approx -0.5$. No entanto, usando dados de SNe Ia, nenhuma evidência de desaceleração futura foi encontrada com base no método independente de modelo baseado nos Processos Gaussianos. Análises adicionais, incluindo outros conjuntos de dados ou outros métodos não paramétricos, podem ser feitas em estudos futuros.

Além disso, estudamos um modelo de IEE onde as densidades de energia do setor escuro satisfazendo uma relação da forma $\rho_{DE} \propto \rho_{DM}^\alpha$, onde ρ_{DE} e ρ_{DM} são as densidades de energia dos componentes de energia e matéria escura, respectivamente, e α é um parâmetro livre. Em seguida, comparamos a razão ρ_{DM}/ρ_{DE} ao longo do tempo para dois modelos distintos: o modelo $\Lambda(t)$ CDM e o modelo XCDM iterativo. Dizemos que o Problema da Coincidência é resolvido se a razão for ~ 1 ao longo da evolução do tempo e é aliviado se a razão for menor que a prevista pelo modelo padrão Λ CDM-plano.

No caso de $\Lambda(t)$ CDM, no intervalo de confiança de 2σ do parâmetro α , a relação ρ_{DM}/ρ_Λ em

$z = 1000$ é reduzida de $\approx 10^9$ a $\approx 3 \times 10^5$, e PC é aliviado. Para XCDM com interação, no entanto, uma degenerescência surge no plano $w - \alpha$ de tal forma que α torna-se negativo, levando a energia escura *phantom*. Para o melhor ajuste, o PC é ainda pior, $\rho_{\text{DM}}/\rho_{\text{DE}} \approx 2 \times 10^9$ em $z = 1000$. No intervalo 2σ do parâmetro α , a razão $\rho_{\text{DM}}/\rho_{\text{DE}}$ é levemente reduzida para $\approx 2 \times 10^8$, e o PC nem mesmo é aliviado. Nesse caso, uma conclusão final só seria possível realizando a análise completa do espectro da CMB.

Outra característica interessante é que, como o modelo com $w \neq -1$ se estende a valores com soluções de energia fantasma ($w \leq -1$), existe a possibilidade do decaimento da energia escura na matéria escura conter a singularidade do Big Rip, seja alterando toda a evolução da expansão ou causando grande produção de matéria escura nos últimos momentos, conforme a escolha dos parâmetros. Da mesma forma, existe a possibilidade de haver um Big Rip mesmo com $w \geq -1$, se a matéria escura estiver decaindo em energia escura a uma taxa grande o suficiente. Tais possibilidades podem ser analisadas em trabalhos futuros.

A análise estatística realizada para os modelos IEE que possuem termo de interação da forma $Q = \varepsilon \mathcal{H} \rho_\Lambda$ e $Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$ forneceram resultados bem semelhantes. Com os vínculos obtidos sobre os parâmetros livres dos modelos em nível de *background*, apresentados na Tabela 9 e 10, obtemos $H_0 = 73.0^{+2.0}_{-1.9}$ km/s/Mpc para o termo $Q = \varepsilon \mathcal{H} \rho_\Lambda$ e $H_0 = 73.1^{+2.0}_{-2.0}$ km/s/Mpc para $Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$, ambos resultados com intervalo de confiança de 2σ obtidos da análise combinada dos dados de SNe Ia e $H(z)$. Já em nível de perturbações lineares, o modelo com $Q = \varepsilon \mathcal{H} \rho_\Lambda$ forneceu $H_0 = 73.1^{+2.0}_{-1.9}$ km/s/Mpc e $S_8 = 0.782^{+0.045}_{-0.044}$ determinados com intervalo de confiança de 2σ e, para o caso com $Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$, obtemos $H_0 = 73.1^{+2.0}_{-1.9}$ km/s/Mpc $S_8 = 0.787^{+0.052}_{-0.049}$ em 2σ , e, os resultados foram exibidos nas Tabelas 12 e 13. É possível notar que os resultados em nível de *background* e em nível de perturbações lineares são muito próximos, diferenciando-se apenas na segunda casa decimal. Temos então que a diferença causada pela multiplicação do fator de escala ao termo $\varepsilon H \rho_\Lambda$ não levou à obtenção de resultados distintos.

A partir das evoluções lineares das perturbações de densidade da matéria escura, foi possível estimar o valor do parâmetro S_8 no contexto dos modelos IEE, do tipo $\Lambda(t)$ CDM-plano. Os modelos IEE analisados em nível perturbativo possuíam termo de interação $Q = \varepsilon \mathcal{H} \rho_\Lambda$ e $Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$. As restrições obtidas para o parâmetro S_8 com base na análise combinada dos dados de RSD, CCs e do Pantheon+SH0ES são compatíveis a partir de $\sim 2\sigma$ de intervalo de confiança com o valor, $S_8 = 0.835 \pm 0.016$, fornecido para Λ CDM-plano a partir dos dados de CMB do Planck (AGHANIM et al., 2020) e para os dois casos analisados. Especificamente, a compatibilidade do modelo IEE com $Q = \varepsilon \mathcal{H} \rho_\Lambda$ é obtida a partir de 1.9σ de intervalo de confiança com o resultado do Planck. Já para o modelo com $Q = \varepsilon H \rho_\Lambda$, a compatibilidade se dá a partir de 1.6σ de intervalo de confiança. Em (NUNES; VAGNOZZI, 2021), os autores encontraram $S_8 = 0.777^{+0.026}_{-0.027}$ em 1σ de incerteza para o modelo Λ CDM-plano com base nos dados de RSD, BAO, CCs e a amostra Pantheon. Esse resultado é compatível em menos de 1σ de intervalo de confiança para o valor de S_8 que encontramos para ambos os modelos IEE analisados. É necessário lembrar que a análise perturbativa realizada em (AGHANIM et al., 2020) e (NUNES; VAGNOZZI, 2021) foi no contexto relativístico. O desenvolvimento das perturbações de densidade no contexto relativístico permite analisar todo o espectro de potência

completo da CMB fornecendo vínculos mais fortes para os modelos analisados, o que pode ser explorado em trabalhos futuros.

Um método geral foi desenvolvido para construir relações de consistência para modelos cosmológicos com base nos dados de $H(z)$. Aplicamos as relações obtidas aos modelos Λ CDM-plano e com curvatura e o XCDM plano. A análise dessas relações de consistência com os 32 dados de CCs mostrou uma leve inconsistência apenas para o modelo Λ CDM plano no intervalo $1.8 \lesssim z \lesssim 2.4$, em 2σ de intervalo de confiança, enquanto Λ CDM com curvatura e XCDM plano foram consistentes em todo o intervalo $0 < z < 2,5$. Para os dados de SNe Ia que levaram a reconstrução da distância comóvel, conseguimos obter relações de consistência específicas apenas para os modelos Λ CDM plano e com curvatura. A análise das relações de consistência com os dados de SNe Ia da amostra Pantheon+ mostrou que o modelo Λ CDM plano é consistente ao longo de todo o intervalo $0 < z < 2.5$ em menos de 1σ de intervalo de confiança, enquanto o modelo com curvatura, embora tenha sido consistente no mesmo intervalo, chegou a alcançar a região entre 1σ e 2σ de intervalo de confiança.

Reconstruímos a evolução dos parâmetros cinemáticos, $E(z)$, $q(z)$, $j(z)$ e $s(z)$, a partir dos dados do Pantheon+ e CCs. Para obter reconstruções independentes do modelo, permitimos um prior na curvatura espacial, proveniente da análise do Planck 18. O H_0 obtido a partir dos dados de $H(z)$ é compatível dentro de 1σ tanto com Planck 18 quanto com SH0ES, não favorecendo nenhum dos polos da tensão em H_0 . Fizemos uma combinação das reconstruções em cada caso para os intervalos de *redshift* onde era seguro fazê-lo. Para todas as reconstruções o modelo de concordância cósmica Λ CDM-plano é compatível dentro de 2σ nos intervalos de *redshift* analisados. Uma tendência geral é que os dados de SNe Ia vinculem melhor em redshifts mais baixos, enquanto os dados de $H(z)$ restringem melhor em redshifts mais altos, evidenciando a importância de tal combinação. Os valores atuais dos parâmetros cinemáticos encontrados foram: $H_0 = 67,2 \pm 6,2$ km/s/Mpc, $q_0 = -0,54^{+0,06}_{-0,05}$, $j_0 = 0,94^{+0,20}_{-0,18}$, $s_0 = -0,62^{+0,26}_{-0,25}$ em 1σ de intervalo de confiança. Descobrimos que essas reconstruções são compatíveis com as previsões do modelo Λ CDM plano, pelo menos para intervalos de confiança de 2σ .

Uma possível forma de estender os resultados atuais é através de novos dados de $H(z)$ e SNe Ia, que podem dar origem a reconstruções mais rigorosas, mostrando, assim, mais inconsistências dos modelos ou confirmando-os. Portanto, nesta linha, novas pesquisas são essenciais para confirmar ou mostrar eventuais inconsistências no contexto dessa análise. Os métodos revisados e desenvolvidos aqui também podem ser aplicados a outros modelos cosmológicos. No entanto, quando o modelo é mais complexo, as equações envolvidas são ainda mais complexas e, possivelmente, seria necessário recorrer a métodos numéricos e não analíticos. Um próximo passo envolve a aplicação de redes neurais (WANG et al., 2020) para obter as quantidades de interesse diretamente a partir da amostra de dados.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, T. M. C. et al. Dark Energy Survey year 1 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing. **Phys. Rev. D**, v. 98, n. 4, p. 043526, 2018.
- ABBOTT, T. M. C. et al. Dark Energy Survey Year 1 Results: Cosmological constraints from cluster abundances and weak lensing. **Phys. Rev. D**, v. 102, n. 2, p. 023509, 2020.
- ABBOTT, T. M. C. et al. Dark Energy Survey Year 3 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing. **Phys. Rev. D**, v. 105, n. 2, p. 023520, 2022.
- ABDALLA, E. et al. Signature of the interaction between dark energy and dark matter in galaxy clusters. **Phys. Lett. B**, v. 673, p. 107–110, 2009.
- ABDALLA, E. et al. Cosmology intertwined: A review of the particle physics, astrophysics, and cosmology associated with the cosmological tensions and anomalies. **JHEAp**, v. 34, p. 49–211, 2022.
- ADE, P. A. R. et al. Planck 2015 results. XXIV. Cosmology from Sunyaev-Zeldovich cluster counts. **Astron. Astrophys.**, v. 594, p. A24, 2016.
- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. **Astron. Astrophys.**, v. 641, p. A6, 2020. [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].
- AHN, C. P. et al. The Tenth Data Release of the Sloan Digital Sky Survey: First Spectroscopic Data from the SDSS-III Apache Point Observatory Galactic Evolution Experiment. **Astrophys. J. Suppl.**, v. 211, p. 17, 2014.
- AIOLA, S. et al. The Atacama Cosmology Telescope: DR4 Maps and Cosmological Parameters. **JCAP**, v. 12, p. 047, 2020.
- ALAM, S. et al. Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Cosmological implications from two decades of spectroscopic surveys at the Apache Point Observatory. **Phys. Rev. D**, v. 103, n. 8, p. 083533, 2021.
- ALCANIZ, J. S.; LIMA, J. A. S.; CUNHA, J. V. Cosmological implications of the APM 08279+5255, an old quasar at $z = 3.91$. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 340, p. L39, 2003.
- ALCOCK, C.; PACZYNSKI, B. An evolution free test for non-zero cosmological constant. **Nature**, v. 281, p. 358–359, 1979.
- ALLISON, R.; DUNKLEY, J. Comparison of sampling techniques for Bayesian parameter estimation. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 437, n. 4, p. 3918–3928, 2014.
- ALPHER, R. A.; BETHE, H.; GAMOW, G. The origin of chemical elements. **Phys. Rev.**, v. 73, p. 803–804, 1948.
- ALPHER, R. A.; HERMAN, R. Evolution of the Universe. **Nature**, v. 162, n. 4124, p. 774–775, 1948.
- AMENDOLA, L. Coupled quintessence. **Phys. Rev. D**, v. 62, p. 043511, 2000.
- AMON, A. et al. Dark Energy Survey Year 3 results: Cosmology from cosmic shear and robustness to data calibration. **Phys. Rev. D**, v. 105, n. 2, p. 023514, 2022.
- AMON, A. et al. Consistent lensing and clustering in a low- S_8 Universe with BOSS, DES Year 3, HSC Year 1 and KiDS-1000. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 518, n. 1, p. 477–503, 2023.

- ANCHORDOQUI, L. A. et al. Dissecting the H_0 and S_8 tensions with Planck + BAO + supernova type Ia in multi-parameter cosmologies. **JHEAp**, v. 32, p. 28–64, 2021.
- ARABSALMANI, M.; SAHNI, V. The Statefinder hierarchy: An extended null diagnostic for concordance cosmology. **Phys. Rev. D**, v. 83, p. 043501, 2011.
- ASGARI, M. et al. KiDS+VIKING-450 and DES-Y1 combined: Mitigating baryon feedback uncertainty with COSEBIs. **Astron. Astrophys.**, v. 634, p. A127, 2020.
- ASGARI, M. et al. KiDS-1000 Cosmology: Cosmic shear constraints and comparison between two point statistics. **Astron. Astrophys.**, v. 645, p. A104, 2021.
- BENISTY, D. Quantifying the S_8 tension with the Redshift Space Distortion data set. **Phys. Dark Univ.**, v. 31, p. 100766, 2021.
- BENISTY, D. et al. Late-Time constraints on Interacting Dark Energy: Analysis independent of H_0 , r_d and M_B . 2 2024.
- BENNENDORF, D.; JESUS, J. F.; PEREIRA, S. H. Determination of the kinematic parameters from SNe Ia and cosmic chronometers. **Eur. Phys. J. C**, v. 82, n. 5, p. 457, 2022.
- BENNETT, C. L. et al. Four year COBE DMR cosmic microwave background observations: Maps and basic results. **Astrophys. J. Lett.**, v. 464, p. L1–L4, 1996.
- BERNARDO, R. C.; SAID, J. L. A data-driven Reconstruction of Horndeski gravity via the Gaussian processes. **JCAP**, v. 09, p. 014, 2021.
- BERNUI, A. et al. Exploring the H_0 tension and the evidence for dark sector interactions from 2D BAO measurements. **Phys. Rev. D**, v. 107, n. 10, p. 103531, 2023.
- BERTOLAMI, O.; PEDRO, F. G.; DELLIOU, M. L. The Abell Cluster A586 and the Equivalence Principle. **Gen. Rel. Grav.**, v. 41, p. 2839–2846, 2009.
- BEUTLER, F. et al. The 6dF Galaxy Survey: Baryon Acoustic Oscillations and the Local Hubble Constant. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 416, p. 3017–3032, 2011.
- BEUTLER, F. et al. The 6dF Galaxy Survey: $z \approx 0$ measurement of the growth rate and σ_8 . **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 423, p. 3430–3444, 2012.
- BILICKI, M.; SEIKEL, M. We do not live in the $R_h = c t$ universe. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 425, p. 1664–1668, 2012.
- BLAKE, C. et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: small-scale clustering of Lyman Break Galaxies at $z < 1$. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 395, p. 240, 2009.
- BLANDFORD, R. D. et al. Cosmokinetics. **ASP Conf. Ser.**, v. 339, p. 27, 2005.
- BLUMENTHAL, G. R. et al. Formation of Galaxies and Large Scale Structure with Cold Dark Matter. **Nature**, v. 311, p. 517–525, 1984.
- BOCQUET, S. et al. Cluster Cosmology Constraints from the 2500 deg² SPT-SZ Survey: Inclusion of Weak Gravitational Lensing Data from Magellan and the Hubble Space Telescope. **Astrophys. J.**, v. 878, n. 1, p. 55, 2019.
- BOND, J. R.; EFSTATHIOU, G.; TEGMARK, M. Forecasting cosmic parameter errors from microwave background anisotropy experiments. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 291, p. L33–L41, 1997.

- BOURBOUX, H. du Mas des et al. The Completed SDSS-IV Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Baryon Acoustic Oscillations with Ly α Forests. **Astrophys. J.**, v. 901, n. 2, p. 153, 2020.
- BOUSIS, D.; PERIVOLAROPOULOS, L. Hubble tension tomography: BAO vs SnIa distance tension. 5 2024.
- BROUT, D. et al. The Pantheon+ Analysis: Cosmological Constraints. **Astrophys. J.**, v. 938, n. 2, p. 110, 2022.
- BROWN, P. J. et al. The Absolute Magnitudes of Type Ia Supernovae in the Ultraviolet. **Astrophys. J.**, v. 721, p. 1608–1626, 2010.
- CAI, R.-G.; SU, Q. On the Dark Sector Interactions. **Phys. Rev. D**, v. 81, p. 103514, 2010.
- CALDERA-CABRAL, G.; MAARTENS, R.; SCHAEFER, B. M. The Growth of Structure in Interacting Dark Energy Models. **JCAP**, v. 07, p. 027, 2009.
- CALDWELL, R. R.; DAVE, R.; STEINHARDT, P. J. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. **Phys. Rev. Lett.**, v. 80, p. 1582–1585, 1998.
- CALDWELL, R. R.; KAMIONKOWSKI, M.; WEINBERG, N. N. Phantom energy and cosmic doomsday. **Phys. Rev. Lett.**, v. 91, p. 071301, 2003.
- CAMARENA, D.; MARRA, V. Impact of the cosmic variance on H_0 on cosmological analyses. **Phys. Rev. D**, v. 98, n. 2, p. 023537, 2018.
- CAO, S.; RYAN, J.; RATRA, B. Cosmological constraints from H ii starburst galaxy apparent magnitude and other cosmological measurements. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 497, n. 3, p. 3191–3203, 2020.
- CARROLL, S. M. Quintessence and the rest of the world. **Phys. Rev. Lett.**, v. 81, p. 3067–3070, 1998.
- CARROLL, S. M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. ISBN 978-0-8053-8732-2, 978-1-108-48839-6, 978-1-108-77555-7.
- CARVALHO, F. C. et al. Scalar-field-dominated cosmology with a transient accelerating phase. **Phys. Rev. Lett.**, v. 97, p. 081301, 2006.
- CARVALHO, J. C.; LIMA, J. A. S.; WAGA, I. On the cosmological consequences of a time dependent lambda term. **Phys. Rev. D**, v. 46, p. 2404–2407, 1992.
- CHANG, C. et al. Joint analysis of Dark Energy Survey Year 3 data and CMB lensing from SPT and Planck. II. Cross-correlation measurements and cosmological constraints. **Phys. Rev. D**, v. 107, n. 2, p. 023530, 2023.
- CHEN, L.; HUANG, Q.-G.; WANG, K. Distance Priors from Planck Final Release. **JCAP**, v. 02, p. 028, 2019.
- CHEN, S.-F.; VLAH, Z.; WHITE, M. A new analysis of galaxy 2-point functions in the BOSS survey, including full-shape information and post-reconstruction BAO. **JCAP**, v. 02, n. 02, p. 008, 2022.
- CHEVALLIER, M.; POLARSKI, D. Accelerating universes with scaling dark matter. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 10, p. 213–224, 2001.

- CHIBA, T.; SUGIYAMA, N.; NAKAMURA, T. Cosmology with x matter. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 289, p. L5–L9, 1997.
- CHIBA, T.; SUGIYAMA, N.; NAKAMURA, T. Observational tests of x matter models. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 301, p. 72–80, 1998.
- CHIMENTO, L. P. Linear and nonlinear interactions in the dark sector. **Phys. Rev. D**, v. 81, p. 043525, 2010.
- CHIMENTO, L. P.; FORTE, M. I.; KREMER, G. M. Cosmological model with interactions in the dark sector. **Gen. Rel. Grav.**, v. 41, p. 1125–1137, 2009.
- CHUANG, C.-H.; WANG, Y. Modeling the Anisotropic Two-Point Galaxy Correlation Function on Small Scales and Improved Measurements of $H(z)$, $D_A(z)$, and $\beta(z)$ from the Sloan Digital Sky Survey DR7 Luminous Red Galaxies. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 435, p. 255–262, 2013.
- CID, A. et al. Bayesian Comparison of Interacting Scenarios. **JCAP**, v. 03, p. 030, 2019.
- CLARK, S. J. et al. H_0 and S_8 tensions necessitate early and late time changes to Λ CDM. **Phys. Rev. D**, v. 107, n. 8, p. 083527, 2023.
- CLARKSON, C. Establishing homogeneity of the universe in the shadow of dark energy. **Comptes Rendus Physique**, v. 13, p. 682–718, 2012.
- CLARKSON, C.; BASSETT, B.; LU, T. H.-C. A general test of the Copernican Principle. **Phys. Rev. Lett.**, v. 101, p. 011301, 2008.
- COLE, S. et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: Power-spectrum analysis of the final dataset and cosmological implications. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 362, p. 505–534, 2005.
- COLLESS, M. et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: Spectra and redshifts. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 328, p. 1039, 2001.
- COSTA, A. A. et al. Interacting Dark Energy: Possible Explanation for 21-cm Absorption at Cosmic Dawn. **Eur. Phys. J. C**, v. 78, n. 9, p. 746, 2018.
- COSTANZI, M. et al. Methods for cluster cosmology and application to the SDSS in preparation for DES Year 1 release. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 488, n. 4, p. 4779–4800, 2019.
- CUNHA, J. V.; LIMA, J. A. S.; ALCANIZ, J. S. Deflationary cosmology: Constraints from angular size and ages of globular clusters. **Phys. Rev. D**, v. 66, p. 023520, 2002.
- D. J. Spiegelhalter, W. S. Markov chain monte carlo in practice. 1996.
- D. Stern, R. L. T. **Astrophys. J.**, v. 593, 2003.
- D’AGOSTINI, G. Bayesian reasoning in data analysis: a critical introduction. **World Scientific Publishing**, 2003.
- DAS, S.; CORASANITI, P. S.; KHOURY, J. Super-acceleration as signature of dark sector interaction. **Phys. Rev. D**, v. 73, p. 083509, 2006.
- DAS, S.; CORASANITI, P. S.; KHOURY, J. Super-acceleration as signature of dark sector interaction. **Phys. Rev. D**, v. 73, p. 083509, 2006.
- DODELSON, S.; KAPLINGHAT, M.; STEWART, E. Solving the Coincidence Problem : Tracking Oscillating Energy. **Phys. Rev. Lett.**, v. 85, p. 5276–5279, 2000.

- DODELSON SCOTT, S. F. **Modern Cosmology 2nd Edition**. Amsterdam: Academic Press, 2020. ISBN 978-0128159484.
- DOYA, K. et al. **Bayesian Brain: Probabilistic Approaches to Neural Coding**. [S.l.]: The MIT Press, 2006.
- EINSTEIN, A. The foundation of the general theory of relativity. **Annalen Phys.**, v. 49, n. 7, p. 769–822, 1916.
- EISENSTEIN, D. J. et al. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. **Astrophys. J.**, v. 633, p. 560–574, 2005.
- ELGARROY, O.; MULTAMAKI, T. Bayesian analysis of friedmannless cosmologies. **JCAP**, v. 09, p. 002, 2006.
- ELGARROY, O.; MULTAMAKI, T. On using the CMB shift parameter in tests of models of dark energy. **Astron. Astrophys.**, v. 471, p. 65, 2007.
- ESCOBAL, A. A.; JESUS, J. F.; PEREIRA, S. H. Cosmological constraints on scalar field dark matter. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 30, n. 15, p. 2150108, 2021.
- ESCOBAL, A. A. et al. Can the Universe decelerate in the future? 2 2023.
- ETHERINGTON, I. Lx. on the definition of distance in general relativity. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 15, n. 100, p. 761–773, 1933.
- FABRIS, J. C.; VELTEN, H. Neo-newtonian theories. In: . [S.l.: s.n.], 2014.
- FABRIS, J. C.; VELTEN, H. E. S. Cosmologia neo-newtoniana: um passo intermediário em direção à relatividade geral. **Rev. Bras. Ens. Fis.**, v. 34, n. 4, p. 4302, 2012.
- FARRAR, G. R.; PEEBLES, P. J. E. Interacting dark matter and dark energy. **Astrophys. J.**, v. 604, p. 1–11, 2004.
- FENG, C. et al. Testing the viability of the interacting holographic dark energy model by using combined observational constraints. **JCAP**, v. 09, p. 005, 2007.
- FIXSEN, D. J. The Temperature of the Cosmic Microwave Background. **Astrophys. J.**, v. 707, p. 916–920, 2009.
- FOREMAN-MACKEY, D. et al. emcee: The MCMC hammer. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, IOP Publishing, v. 125, n. 925, p. 306–312, mar 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/670067>>.
- Fowler, W. A., H. Nucleosynthesis in supernovae. **Astroph. J.**, v. 132, 1960.
- FREESE, K. et al. Cosmology with Decaying Vacuum Energy. **Nucl. Phys. B**, v. 287, p. 797–814, 1987.
- GARCÍA-GARCÍA, C. et al. The growth of density perturbations in the last ~ 10 billion years from tomographic large-scale structure data. **JCAP**, v. 10, p. 030, 2021.
- GARIAZZO, S. et al. Late-time interacting cosmologies and the Hubble constant tension. **Phys. Rev. D**, v. 106, n. 2, p. 023530, 2022.
- GAVELA, M. B. et al. Dark Coupling and Gauge Invariance. **JCAP**, v. 11, p. 044, 2010.

GAZTANAGA, E.; CABRE, A.; HUI, L. Clustering of Luminous Red Galaxies IV: Baryon Acoustic Peak in the Line-of-Sight Direction and a Direct Measurement of $H(z)$. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 399, p. 1663–1680, 2009.

GELMAN, A. Bayesian data analysis. **CRC Press**, 2014.

GELMAN A., C. J. S. H. D. D. V. A. . R. D. **Bayesian Data Analysis (3rd ed.)**. New York: Chapman and Hall/CRC, 2013. ISBN 9780429113079.

GÓMEZ-VALENT, A.; PETTORINO, V.; AMENDOLA, L. Update on coupled dark energy and the H_0 tension. **Phys. Rev. D**, v. 101, n. 12, p. 123513, 2020.

Goodman, J.; Weare, J. Ensemble samplers with affine invariance. **Communications in Applied Mathematics and Computational Science**, v. 5, n. 1, p. 65–80, jan. 2010.

Goodman, J.; Weare, J. Ensemble samplers with affine invariance. **Communications in Applied Mathematics and Computational Science**, v. 5, n. 1, p. 65–80, jan. 2010.

GUTH, A. H. **The Inflationary Universe The Quest for a New Theory of Cosmic Origins**. [S.l.]: Perseus Books, 1997.

GUTH, A. H.; PI, S. Y. Fluctuations in the New Inflationary Universe. **Phys. Rev. Lett.**, v. 49, p. 1110–1113, 1982.

GUY, J. et al. SALT2: Using distant supernovae to improve the use of Type Ia supernovae as distance indicators. **Astron. Astrophys.**, v. 466, p. 11–21, 2007.

HAMANA, T. et al. Cosmological constraints from cosmic shear two-point correlation functions with HSC survey first-year data. **Publ. Astron. Soc. Jap.**, v. 72, n. 1, p. 16, 2020. [Erratum: *Publ.Astron.Soc.Jap.* 74, 488-491 (2022)].

HAMILTON, A. J. S. The evolving universe. **Astrophysics and Space Science Library**, v. 231, n. 185, 1998.

HAMUY, M. et al. A Hubble diagram of distant type IA supernovae. **Astron. J.**, v. 109, p. 1–13, 1995.

HARIDASU, B. S. et al. An improved model-independent assessment of the late-time cosmic expansion. **JCAP**, v. 10, p. 015, 2018.

HARRISON, E. Cosmology without general relativity. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 35, n. 3, p. 437–446, 1965.

HE, J.-H.; WANG, B.; ABDALLA, E. Stability of the curvature perturbation in dark sectors' mutual interacting models. **Phys. Lett. B**, v. 671, p. 139–145, 2009.

HEYMANS, C. et al. KiDS-1000 Cosmology: Multi-probe weak gravitational lensing and spectroscopic galaxy clustering constraints. **Astron. Astrophys.**, v. 646, p. A140, 2021.

HIKAGE, C. et al. Cosmology from cosmic shear power spectra with Subaru Hyper Suprime-Cam first-year data. **Publ. Astron. Soc. Jap.**, v. 71, n. 2, p. 43, 2019.

HILBERT, D. Die grundlagen der physik . (erste mitteilung.). **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, v. 1915, p. 395–408, 1915. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/58946>>.

HILDEBRANDT, H. et al. KiDS+VIKING-450: Cosmic shear tomography with optical and infrared data. **Astron. Astrophys.**, v. 633, p. A69, 2020.

- HINSHAW, G. et al. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. **Astrophys. J. Suppl.**, v. 208, p. 19, 2013.
- HOERNING, G. A. et al. Constraints on interacting dark energy revisited: implications for the Hubble tension. 8 2023.
- HOFLICH, P. et al. Models for Type Ia supernovae and cosmology. 2003.
- HU, J.-P.; WANG, F.-Y. Hubble Tension: The Evidence of New Physics. **Universe**, v. 9, n. 2, p. 94, 2023.
- HU, W.; SUGIYAMA, N. Small scale cosmological perturbations: An Analytic approach. **Astrophys. J.**, v. 471, p. 542–570, 1996.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proc. Nat. Acad. Sci.**, v. 15, p. 168–173, 1929.
- I.C.R.A., C. **Programa mínimo de Cosmología**. [S.l.]: JAUÁ, 2010.
- IVANOV, M. M. Cosmological constraints from the power spectrum of eBOSS emission line galaxies. **Phys. Rev. D**, v. 104, n. 10, p. 103514, 2021.
- IVANOV, M. M.; SIMONOVIĆ, M.; ZALDARRIAGA, M. Cosmological Parameters from the BOSS Galaxy Power Spectrum. **JCAP**, v. 05, p. 042, 2020.
- JESUS, J.; PEREIRA S. H., F. Can Dark Matter Decay in Dark Energy? **Phys. Rev.**, D79, p. 043517, 2009.
- JESUS, J. F. Constraints from the old quasar apm 08279+5255 on two classes of $\lambda(t)$ -cosmologies. **Gen. Rel. Grav.**, v. 40, p. 791–798, 2008.
- JESUS, J. F. et al. From Hubble to snap parameters: a Gaussian process reconstruction. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 528, n. 2, p. 1573–1581, 2024.
- JESUS, J. F. et al. Can dark matter–dark energy interaction alleviate the cosmic coincidence problem? **Eur. Phys. J. C**, v. 82, n. 3, p. 273, 2022.
- JESUS, J. F. et al. A Method for Obtaining Cosmological Models Consistency Relations and Gaussian Processes Testing. 11 2023.
- JESUS, J. F. et al. Newtonian Perturbations on Models with Matter Creation. **Phys. Rev. D**, v. 84, p. 063511, 2011.
- JESUS, J. F. et al. New coupled quintessence cosmology. **Phys. Rev. D**, v. 78, p. 063514, 2008.
- JESUS, J. F. et al. Gaussian Process Estimation of Transition Redshift. **JCAP**, v. 04, p. 053, 2020.
- JESUS, J. F. et al. Gaussian processes reconstruction of the dark energy potential. **JCAP**, v. 11, p. 037, 2022.
- Jha, S. Riess A., K. Improved distances to type ia supernovae with multicolor light-curve shapes: Mlcs2k2. **Astroph. J.**, v. 659, 2007.
- JOSEPH, M. et al. A Step in understanding the S8 tension. **Phys. Rev. D**, v. 108, n. 2, p. 023520, 2023.
- JOUDAKI, S. et al. CFHTLenS revisited: assessing concordance with Planck including astrophysical systematics. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 465, n. 2, p. 2033–2052, 2017.

- JOUDAKI, S. et al. KiDS-450 + 2dFLenS: Cosmological parameter constraints from weak gravitational lensing tomography and overlapping redshift-space galaxy clustering. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 474, n. 4, p. 4894–4924, 2018.
- JOUDAKI, S. et al. KiDS+VIKING-450 and DES-Y1 combined: Cosmology with cosmic shear. **Astron. Astrophys.**, v. 638, p. L1, 2020.
- KAISER, N. Clustering in real space and in redshift space. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 227, p. 1–27, 1987.
- KAZANTZIDIS, L.; PERIVOLAROPOULOS, L. Evolution of the $f\sigma_8$ tension with the Planck15/ Λ CDM determination and implications for modified gravity theories. **Phys. Rev. D**, v. 97, n. 10, p. 103503, 2018.
- KOLB, E. W.; TURNER, M. S. The Early Universe. **Nature**, v. 294, p. 521, 1981.
- KROLEWSKI, A.; FERRARO, S.; WHITE, M. Cosmological constraints from unWISE and Planck CMB lensing tomography. **JCAP**, v. 12, n. 12, p. 028, 2021.
- LANDIM, R. G. Cosmological perturbations and dynamical analysis for interacting quintessence. **Eur. Phys. J. C**, v. 79, n. 11, p. 889, 2019.
- LEAVITT, H. S. 1777 variables in the Magellanic Clouds. **Harvard Obs. Annals**, v. 60, p. 87–108, 1908.
- LEMOS, N. **Mecânica Analítica**. LIVRARIA DA FÍSICA, 2007. ISBN 9788588325241. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XpOS2eOdDR4C>>.
- LESCI, G. F. et al. AMICO galaxy clusters in KiDS-DR3: Cosmological constraints from counts and stacked weak lensing. **Astron. Astrophys.**, v. 659, p. A88, 2022.
- LEWIS, A.; BRIDLE, S. Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo approach. **Phys. Rev. D**, v. 66, p. 103511, 2002.
- LI, B.; SHAPIRO, P. R.; RINDLER-DALLER, T. Bose-Einstein-condensed scalar field dark matter and the gravitational wave background from inflation: new cosmological constraints and its detectability by LIGO. **Phys. Rev. D**, v. 96, n. 6, p. 063505, 2017.
- LIDDLE, D. H. L. A. R. **Cosmological inflation and large scale structure**. 2000: Cambridge University Press, 1997.
- LIMA, J. A. S. Alternative dark energy models: An Overview. **Braz. J. Phys.**, v. 34, n. 1A, p. 194–200, 2004.
- LIMA, J. A. S.; ZANCHIN, V.; BRANDENBERGER, R. H. On the Newtonian cosmology equations with pressure. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 291, p. L1–L4, 1997.
- LIN, H.-N.; LI, X.; TANG, L. Non-parametric reconstruction of dark energy and cosmic expansion from the Pantheon compilation of type Ia supernovae. **Chin. Phys. C**, v. 43, n. 7, p. 075101, 2019.
- LINDE, A. D. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. **Phys. Lett.**, v. 108B, p. 389–393, 1982.
- LINDER, E. V. Exploring the expansion history of the universe. **Phys. Rev. Lett.**, v. 90, p. 091301, 2003.

- LIVIO, M.; PANAGIA, N.; SAHU, K. **Supernovae and Gamma-Ray Bursts: The Greatest Explosions Since the Big Bang**. Cambridge University Press, 2001. (Space Telescope Science Institute Symposium Series). ISBN 9780521791410. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VlfSviM9eIIC>>.
- LOBO, F. S. N.; MIMOSO, J. P.; VISSER, M. Cosmographic analysis of redshift drift. **JCAP**, v. 04, p. 043, 2020.
- LÓPEZ, L. A. Ureña; NO, F. X. L. C. Cosmological evolution of scalar field dark matter in the class code: Accuracy and precision of numerical solutions. **Phys. Rev. D**, v. 109, n. 2, p. 023512, 2024.
- LOUREIRO, A. et al. KiDS and Euclid: Cosmological implications of a pseudo angular power spectrum analysis of KiDS-1000 cosmic shear tomography. **Astron. Astrophys.**, v. 665, p. A56, 2022.
- LUCCA, M.; HOOPER, D. C. Shedding light on dark matter-dark energy interactions. **Phys. Rev. D**, v. 102, n. 12, p. 123502, 2020.
- MACAULAY, E.; WEHUS, I. K.; ERIKSEN, H. K. Lower Growth Rate from Recent Redshift Space Distortion Measurements than Expected from Planck. **Phys. Rev. Lett.**, v. 111, n. 16, p. 161301, 2013.
- MAGANA, J. et al. The Cardassian expansion revisited: constraints from updated Hubble parameter measurements and type Ia supernova data. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 476, n. 1, p. 1036–1049, 2018.
- MAGAÑA, J.; MATOS, T. A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model. **J. Phys. Conf. Ser.**, v. 378, p. 012012, 2012.
- MAJEROTTO, E.; VALIVIITA, J.; MAARTENS, R. Adiabatic initial conditions for perturbations in interacting dark energy models. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 402, p. 2344–2354, 2010.
- MANTZ, A. B. et al. Weighing the giants – IV. Cosmology and neutrino mass. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 446, p. 2205–2225, 2015.
- MARCONDES, R. J. F. et al. Analytic study of the effect of dark energy-dark matter interaction on the growth of structures. **JCAP**, v. 12, p. 009, 2016.
- MARTIN, J. Quintessence: a mini-review. **Mod. Phys. Lett. A**, v. 23, p. 1252–1265, 2008.
- MARTTENS, R. F. vom et al. CMB and matter power spectra with non-linear dark-sector interactions. **JCAP**, v. 01, p. 050, 2017.
- MARTTENS, R. von et al. Model-independent reconstruction of dark sector interactions. **Phys. Rev. D**, v. 104, n. 4, p. 043515, 2021.
- MARTTENS, R. von et al. Dark degeneracy I: Dynamical or interacting dark energy? **Phys. Dark Univ.**, v. 28, p. 100490, 2020.
- MARTTENS, R. von et al. Null test for interactions in the dark sector. **Phys. Rev. D**, v. 99, n. 4, p. 043521, 2019.
- MATOS, T.; URENA-LOPEZ, L. A. A Further analysis of a cosmological model of quintessence and scalar dark matter. **Phys. Rev. D**, v. 63, p. 063506, 2001.
- McCrea, W. H. Relativity Theory and the Creation of Matter. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, v. 206, n. 1087, p. 562–575, maio 1951.

McCrea, W. H.; Milne, E. A. Newtonian Universes and the curvature of space. **The Quarterly Journal of Mathematics**, v. 5, p. 73–80, jan. 1934.

MEHRABI, A.; REZAEI, M. Cosmographic Parameters in Model-independent Approaches. **Astrophys. J.**, v. 923, n. 2, p. 274, 2021.

MIYATAKE, H. et al. Cosmological inference from an emulator based halo model. II. Joint analysis of galaxy-galaxy weak lensing and galaxy clustering from HSC-Y1 and SDSS. **Phys. Rev. D**, v. 106, n. 8, p. 083520, 2022.

MORESCO, M. Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at $z \sim 2$. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 450, n. 1, p. L16–L20, 04 2015.

MORESCO, M. et al. Improved constraints on the expansion rate of the universe up to $z \sim 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. **Jour. of Cosmo. and Astro. P.**, IOP Publishing, v. 2012, n. 08, p. 006–006, aug 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/08/006>>.

MORESCO, M. et al. Unveiling the Universe with emerging cosmological probes. **Living Rev. Rel.**, v. 25, n. 1, p. 6, 2022.

MORESCO, M. et al. A 6% measurement of the Hubble parameter at $z \sim 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. **Jour. of Cosmo. and Astro. P.**, IOP Publishing, v. 2016, n. 05, p. 014–014, may 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/05/014>>.

MUKHERJEE, P.; BANERJEE, N. Non-parametric reconstruction of the cosmological jerk parameter. **The European Physical Journal C**, Springer Science and Business Media LLC, v. 81, n. 1, jan 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-08830-5>>.

MUKHERJEE, P.; BANERJEE, N. Revisiting a non-parametric reconstruction of the deceleration parameter from combined background and the growth rate data. **Phys. Dark Univ.**, v. 36, p. 100998, 2022.

NAIR, R.; JHINGAN, S.; JAIN, D. Exploring scalar field dynamics with Gaussian processes. **JCAP**, v. 01, p. 005, 2014.

NESSERIS, S.; SAPONE, D. Novel null-test for the Λ cold dark matter model with growth-rate data. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 24, n. 06, p. 1550045, 2015.

NUNES, R. C.; VAGNOZZI, S. Arbitrating the S8 discrepancy with growth rate measurements from redshift-space distortions. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 505, n. 4, p. 5427–5437, 2021.

NUNES, R. C. et al. New tests of dark sector interactions from the full-shape galaxy power spectrum. **Phys. Rev. D**, v. 105, n. 12, p. 123506, 2022.

NUNES, R. C.; VALENTINO, E. D. Dark sector interaction and the supernova absolute magnitude tension. **Phys. Rev. D**, v. 104, n. 6, p. 063529, 2021.

OKA, A. et al. Simultaneous constraints on the growth of structure and cosmic expansion from the multipole power spectra of the SDSS DR7 LRG sample. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 439, p. 2515–2530, 2014.

OVERDUIN, J. M.; COOPERSTOCK, F. I. Evolution of the scale factor with a variable cosmological term. **Phys. Rev. D**, v. 58, p. 043506, 1998.

- OZER, M.; TAHA, M. O. A Model of the Universe with Time Dependent Cosmological Constant Free of Cosmological Problems. **Nucl. Phys. B**, v. 287, p. 776–796, 1987.
- PACAUD, F. et al. The XXL Survey: XXV. Cosmological analysis of the C1 cluster number counts. **Astron. Astrophys.**, v. 620, p. A10, 2018.
- PANDEY, K. L.; KARWAL, T.; DAS, S. Alleviating the H_0 and σ_8 anomalies with a decaying dark matter model. **JCAP**, v. 07, p. 026, 2020.
- P.C., G. Bayesian logical data analysis for the physical sciences: A comparative approach with ‘mathematica’ support. **Cambridge University Press**, 2005.
- PEEBLES, P. J. E. **The Large-Scale Structure of the Universe**. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1980.
- PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. Cosmology with a Time Variable Cosmological Constant. **Astrophys. J.**, v. 325, p. L17, 1988.
- PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The Cosmological Constant and Dark Energy. **Rev. Mod. Phys.**, v. 75, p. 559–606, 2003.
- PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s. **Astrophys. J.**, v. 142, p. 419–421, 1965.
- PERIVOLAROPOULOS, L.; SKARA, F. Challenges for Λ CDM: An update. **New Astron. Rev.**, v. 95, p. 101659, 2022.
- PERLMUTTER, S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae. **Astrophys. J.**, v. 517, p. 565–586, 1999.
- PHILCOX, O. H. E.; IVANOV, M. M. BOSS DR12 full-shape cosmology: Λ CDM constraints from the large-scale galaxy power spectrum and bispectrum monopole. **Phys. Rev. D**, v. 105, n. 4, p. 043517, 2022.
- POPOLO, A. D.; PACE, F.; LIMA, J. A. S. Spherical collapse model with shear and angular momentum in dark energy cosmologies. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 430, p. 628–637, 2013.
- POULIN, V. et al. Sigma-8 tension is a drag. **Phys. Rev. D**, v. 107, n. 12, p. 123538, 2023.
- POURTSIDOU, A.; SKORDIS, C.; COPELAND, E. J. Models of dark matter coupled to dark energy. **Phys. Rev. D**, v. 88, n. 8, p. 083505, 2013.
- PRITCHET, C. J.; HOWELL, D. A.; SULLIVAN, M. The Progenitors of Type Ia Supernovae. **Astrophys. J. Lett.**, v. 683, p. L25, 2008.
- QUARTIN, M. et al. Dark Interactions and Cosmological Fine-Tuning. **JCAP**, v. 05, p. 007, 2008.
- RAPETTI, D. et al. A kinematical approach to dark energy studies. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 375, p. 1510–1520, 2007.
- RASMUSSEN, C. E.; WILLIAMS, C. K. I. **Gaussian Processes for Machine Learning**. The MIT Press, 2005. ISBN 9780262256834. Disponível em: <<https://doi.org/10.7551/mitpress/3206.001.0001>>.
- RATRA, B. Expressions for linearized perturbations in a massive scalar field dominated cosmological model. **Phys. Rev. D**, v. 44, p. 352–364, 1991.

- RATRA, B.; PEEBLES, P. J. E. Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field. **Phys. Rev.**, D37, p. 3406, 1988.
- REIS, R. R. R. Domain of validity of the evolution of perturbations in Newtonian cosmology with pressure. **Phys. Rev. D**, v. 67, p. 087301, 2003. [Erratum: Phys.Rev.D 68, 089901 (2003)].
- REZAEI, M.; PERACLAULA, J. S.; MALEKJANI, M. Cosmographic approach to Running Vacuum dark energy models: new constraints using BAOs and Hubble diagrams at higher redshifts. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 509, n. 2, p. 2593–2608, 2021.
- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **Astron. J.**, v. 116, p. 1009–1038, 1998.
- RIESS, A. G. et al. New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z \geq 1$: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy. **Astrophys. J.**, v. 659, p. 98–121, 2007.
- RIESS, A. G. et al. A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. **Astrophys. J.**, v. 826, n. 1, p. 56, 2016.
- RIESS, A. G. et al. A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km s⁻¹ Mpc⁻¹ Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team. **Astrophys. J. Lett.**, v. 934, n. 1, p. L7, 2022.
- RIESS, A. G.; PRESS, W. H.; KIRSHNER, R. P. Using SN-Ia light curve shapes to measure the Hubble constant. **Astrophys. J.**, v. 438, p. L17–20, 1995.
- RUBIN, V. C.; FORD JR., W. K. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. **Astrophys. J.**, v. 159, p. 379–403, 1970.
- SAHNI, V. et al. Statefinder: A New geometrical diagnostic of dark energy. **JETP Lett.**, v. 77, p. 201–206, 2003.
- SAHNI, V.; SHAFIELOO, A.; STAROBINSKY, A. A. Two new diagnostics of dark energy. **Phys. Rev. D**, v. 78, p. 103502, 2008.
- SALVATELLI, V. et al. Indications of a late-time interaction in the dark sector. **Phys. Rev. Lett.**, v. 113, n. 18, p. 181301, 2014.
- SALVATI, L.; DOUSPIS, M.; AGHANIM, N. Constraints from thermal Sunyaev-Zel'dovich cluster counts and power spectrum combined with CMB. **Astron. Astrophys.**, v. 614, p. A13, 2018.
- SANTOS, L. et al. Constraining interacting dark energy with CMB and BAO future surveys. **Phys. Rev. D**, v. 96, n. 10, p. 103529, 2017.
- SCHÖNEBERG, N. et al. The H0 Olympics: A fair ranking of proposed models. **Phys. Rept.**, v. 984, p. 1–55, 2022.
- SCHUTZ, B. F. **A FIRST COURSE IN GENERAL RELATIVITY**. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr., 1985. ISBN 978-0-511-98418-1.
- SCOLNIC, D. M. et al. The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample. **Astrophys. J.**, v. 859, n. 2, p. 101, 2018.
- SEIKEL, M.; CLARKSON, C.; SMITH, M. Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using Gaussian processes. **JCAP**, v. 1206, p. 036, 2012.

- SELJAK, U.; ZALDARRIAGA, M. A Line of sight integration approach to cosmic microwave background anisotropies. **Astrophys. J.**, v. 469, p. 437–444, 1996.
- SHAFIELOO, A.; CLARKSON, C. Model independent tests of the standard cosmological model. **Phys. Rev. D**, v. 81, p. 083537, 2010.
- SHAFIELOO, A. et al. Metastable Dark Energy with Radioactive-like Decay. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 473, n. 2, p. 2760–2770, 2018.
- SHAFIELOO, A.; KIM, A. G.; LINDER, E. V. Gaussian Process Cosmography. **Phys. Rev. D**, v. 85, p. 123530, 2012.
- SHAFIELOO, A. et al. Testing Λ CDM with eBOSS data using a model independent diagnostic. **Phys. Rev. D**, v. 108, n. 8, p. 083505, 2023.
- SHAFIELOO, A.; SAHNI, V.; STAROBINSKY, A. A. A new null diagnostic customized for reconstructing the properties of dark energy from BAO data. **Phys. Rev. D**, v. 86, p. 103527, 2012.
- SHAH, R.; MUKHERJEE, P.; PAL, S. Reconciling S_8 : Insights from Interacting Dark Sectors. 4 2024.
- SHAPIRO, C.; TURNER, M. S. What do we really know about cosmic acceleration? **Astrophys. J.**, v. 649, p. 563–569, 2006.
- SILVA, E. et al. Non-Linear Matter Power Spectrum Modeling in Interacting Dark Energy Cosmologies. 3 2024.
- SILVA, W. J. C. da; SILVA, R. Extended Λ CDM model and viscous dark energy: A Bayesian analysis. **JCAP**, v. 05, p. 036, 2019.
- SIMON, J.; VERDE, L.; JIMENEZ, R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. **Phys. Rev.**, D71, p. 123001, 2005.
- SIMON, J.; VERDE, L.; JIMENEZ, R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. **Phys. Rev. D**, v. 71, p. 123001, 2005.
- SKARA, F.; PERIVOLAROPOULOS, L. Tension of the E_G statistic and redshift space distortion data with the Planck - Λ CDM model and implications for weakening gravity. **Phys. Rev. D**, v. 101, n. 6, p. 063521, 2020.
- STEPHENS, M.; SMITH, N. J.; DONNELLY, P. A new statistical method for haplotype reconstruction from population data. **The American Journal of Human Genetics**, v. 68, n. 4, p. 978–989, 2001. ISSN 0002-9297. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0002929707614244>>.
- STERN, D. et al. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. $i:h(z)$ measurements. **Jour. of Cosmo. and Astro. P.**, IOP Publishing, v. 2010, n. 02, p. 008–008, feb 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/02/008>>.
- SUN, C.-Y.; YUE, R.-H. New Interaction between Dark Energy and Dark Matter Changes Sign during Cosmological Evolution. **Phys. Rev. D**, v. 85, p. 043010, 2012.
- SUNTZEFF, N. B. et al. Optical Light Curve of the Type Ia Supernova 1998bu in M96 and the Supernova Calibration of the Hubble Constant. **Astron. J.**, v. 117, p. 1175, 1999.
- SZYDŁOWSKI, M.; STACHOWSKI, A.; URBANOWSKI, K. The evolution of the FRW universe with decaying metastable dark energy—a dynamical system analysis. **JCAP**, v. 04, p. 029, 2020.

- Tammann, G. A., S. Steps toward the hubble constant. viii - the global value. **Astroph. J.**, v. 256, 1982.
- TRIPP, R. A Two-parameter luminosity correction for type Ia supernovae. **Astron. Astrophys.**, v. 331, p. 815–820, 1998.
- TRÖSTER, T. et al. Cosmology from large-scale structure: Constraining Λ CDM with BOSS. **Astron. Astrophys.**, v. 633, p. L10, 2020.
- TROXEL, M. A. et al. Dark Energy Survey Year 1 results: Cosmological constraints from cosmic shear. **Phys. Rev. D**, v. 98, n. 4, p. 043528, 2018.
- TSUJIKAWA, S. Quintessence: A Review. **Class. Quant. Grav.**, v. 30, p. 214003, 2013.
- TURNER, M. S.; WHITE, M. J. CDM models with a smooth component. **Phys. Rev. D**, v. 56, n. 8, p. R4439, 1997.
- UITERT, E. van et al. KiDS+GAMA: cosmology constraints from a joint analysis of cosmic shear, galaxy–galaxy lensing, and angular clustering. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 476, n. 4, p. 4662–4689, 2018.
- URENA-LOPEZ, L. A.; REYES-IBARRA, M. J. On the dynamics of a quadratic scalar field potential. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 18, p. 621–634, 2009.
- VALENTINO, E. D. A combined analysis of the H_0 late time direct measurements and the impact on the Dark Energy sector. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 502, n. 2, p. 2065–2073, 2021.
- VALENTINO, E. D. Challenges of the Standard Cosmological Model. **Universe**, v. 8, n. 8, p. 399, 2022.
- VALENTINO, E. D. et al. Interacting dark energy in the early 2020s: A promising solution to the H_0 and cosmic shear tensions. **Phys. Dark Univ.**, v. 30, p. 100666, 2020.
- VALENTINO, E. D. et al. In the realm of the Hubble tension—a review of solutions. **Class. Quant. Grav.**, v. 38, n. 15, p. 153001, 2021.
- VALENTINO, E. D. et al. Cosmology Intertwined III: $f\sigma_8$ and S_8 . **Astropart. Phys.**, v. 131, p. 102604, 2021.
- VALENTINO, E. D. et al. Snowmass2021 - Letter of interest cosmology intertwined II: The hubble constant tension. **Astropart. Phys.**, v. 131, p. 102605, 2021.
- VALIVIITA, J.; MAARTENS, R.; MAJEROTTO, E. Observational constraints on an interacting dark energy model. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 402, p. 2355–2368, 2010.
- VELASQUEZ-TORIBIO, A. M.; FABRIS, J. C. Constraints on Cosmographic Functions of Cosmic Chronometers Data Using Gaussian Processes. **Braz. J. Phys.**, v. 52, n. 4, p. 115, 2022.
- VERDE, L.; TREU, T.; RIESS, A. G. Tensions between the Early and the Late Universe. **Nature Astron.**, v. 3, p. 891, 7 2019.
- VISSER, M. Jerk and the cosmological equation of state. **Class. Quant. Grav.**, v. 21, p. 2603–2616, 2004.
- VISSER, M. Cosmography: Cosmology without the Einstein equations. **Gen. Rel. Grav.**, v. 37, p. 1541–1548, 2005.

VUOLO, J. **Fundamentos da teoria de erros**. E. Blucher, 1996. ISBN 9788521216636. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=q-uyDwAAQBAJ>>.

W. H. Press S. A. Teukolsky, W. B. Numerical recipes in fortran. the art of scientific computing. **Cambridge University Press**, 1992.

WANG, B. et al. Dark Matter and Dark Energy Interactions: Theoretical Challenges, Cosmological Implications and Observational Signatures. **Rept. Prog. Phys.**, v. 79, n. 9, p. 096901, 2016.

WANG, B. et al. Further understanding the interaction between dark energy and dark matter: current status and future directions. **Rept. Prog. Phys.**, v. 87, n. 3, p. 036901, 2024.

WANG, B.; LIN, C.-Y.; ABDALLA, E. Constraints on the interacting holographic dark energy model. **Phys. Lett. B**, v. 637, p. 357–361, 2006.

WANG, B. et al. Interacting Dark Energy and Dark Matter: Observational Constraints from Cosmological Parameters. **Nucl. Phys. B**, v. 778, p. 69–84, 2007.

WANG, G.-J. et al. Reconstructing Functions and Estimating Parameters with Artificial Neural Networks: A Test with a Hubble Parameter and SNe Ia. **Astrophys. J. Suppl.**, v. 246, n. 1, p. 13, 2020.

WANG, L.-M. et al. Cosmic concordance and quintessence. **Astrophys. J.**, v. 530, p. 17–35, 2000.

WANG, P.; MENG, X.-H. Can vacuum decay in our universe? **Class. Quant. Grav.**, v. 22, p. 283–294, 2005.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 978-0-471-92567-5, 978-0-471-92567-5.

WEINBERG, S. The Cosmological Constant Problem. **Rev. Mod. Phys.**, v. 61, p. 1–23, 1989.

WEINBERG, S. **Cosmology**. [S.l.]: Oxford University Press, 2008.

WETTERICH, C. The Cosmon model for an asymptotically vanishing time dependent cosmological 'constant'. **Astron. Astrophys.**, v. 301, p. 321–328, 1995.

WHITE, M. et al. Cosmological constraints from the tomographic cross-correlation of DESI Luminous Red Galaxies and Planck CMB lensing. **JCAP**, v. 02, n. 02, p. 007, 2022.

WOOSLEY, S. E.; HEGER, A. The Deaths of Very Massive Stars. **Astrophys. Space Sci. Libr.**, v. 412, p. 199–225, 2015.

WORKMAN, R. L. et al. Review of Particle Physics. **PTEP**, v. 2022, p. 083C01, 2022.

WRIGHT, A. H. et al. KiDS+VIKING-450: Improved cosmological parameter constraints from redshift calibration with self-organising maps. **Astron. Astrophys.**, v. 640, p. L14, 2020.

YAHYA, S. et al. Null tests of the cosmological constant using supernovae. **Phys. Rev. D**, v. 89, n. 2, p. 023503, 2014.

YANG, W.; PAN, S.; BARROW, J. D. Large-scale Stability and Astronomical Constraints for Coupled Dark-Energy Models. **Phys. Rev. D**, v. 97, n. 4, p. 043529, 2018.

YANG, W. et al. 2021-H0 odyssey: closed, phantom and interacting dark energy cosmologies. **JCAP**, v. 10, p. 008, 2021.

YANG, W. et al. Metastable dark energy models in light of *Planck* 2018 data: Alleviating the H_0 tension. **Phys. Rev. D**, v. 102, n. 6, p. 063503, 2020.

ZHAI, Y. et al. A consistent view of interacting dark energy from multiple CMB probes. **JCAP**, v. 07, p. 032, 2023.

ZHANG, C. et al. Four new observational $H(z)$ data from luminous red galaxies in the sloan digital sky survey data release seven. **Research in Astronomy and Astrophysics**, IOP Publishing, v. 14, n. 10, p. 1221–1233, sep 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1674-4527/14/10/002>>.

ZHANG, M.-J.; XIA, J.-Q. Test of the cosmic evolution using Gaussian processes. **JCAP**, v. 12, p. 005, 2016.

ZUNCKEL, C.; CLARKSON, C. Consistency Tests for the Cosmological Constant. **Phys. Rev. Lett.**, v. 101, p. 181301, 2008.

ZWICKY, F. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. **Helv. Phys. Acta**, v. 6, p. 110–127, 1933.