

unesp  UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA - CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil

**"ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS DELGADAS
UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES
E RETANGULARES"**

LEANDRO WAIDEMAM

Dissertação apresentada à
Faculdade de Engenharia de Ilha
Solteira - UNESP, como parte
dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Engenharia
Civil - Área de Concentração:
Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Rogério De Oliveira Rodrigues

Ilha Solteira - SP

Janeiro de 2004

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da FEIS/UNESP

W138a Waidemam, Leandro
Análise dinâmica de placas delgadas utilizando elementos finitos triangulares e retangulares / Leandro Waidemam . -- Ilha Solteira : [s.n.], 2004
vi, 153 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de concentração : Estruturas, 2004

Orientador: Rogério de Oliveira Rodrigues
Bibliografia: p. 127-130

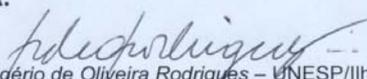
1. Dinâmica estrutural. 2. Placas delgadas. 3. Método dos elementos finitos.
4. Teoria clássica de flexão de placas.

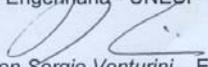
Análise Dinâmica de Placas Delgadas Utilizando Elementos Finitos Triangulares e Retangulares

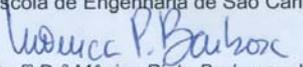
Leandro Waidemam

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA DO
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL.

COMISSÃO EXAMINADORA:


Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues – UNESP/Ilha Solteira
Professor Adjunto do Deptº de Engenharia Civil
Faculdade de Engenharia - UNESP – Câmpus de Ilha Solteira


Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini – EESC/USP/São Carlos
Professor Titular do Deptº de Engenharia de Estruturas
Escola de Engenharia de São Carlos – USP – São Carlos/SP


Profª Drª Mônica Pinto Barbosa – UNESP/Ilha Solteira
Professor Adjunto do Deptº de Engenharia Civil
Faculdade de Engenharia - UNESP – Câmpus de Ilha Solteira

Ilha Solteira/SP, janeiro de 2004.

*Aos meus pais, Nelson e Evanir,
e aos meus irmãos, Juliane e Rafael,
dedico este trabalho.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela presença constante em minha vida.

Ao Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues, pelos ensinamentos, incentivo e confiança, pela contribuição que deu à minha formação acadêmica e profissional e, sobretudo, pela amizade.

Ao Prof. Dr. Luís Carlos Facundo Sanches, pelos conhecimentos transmitidos referentes à linguagem de programação FORTRAN.

Aos amigos do Departamento de Engenharia Civil da FEIS/UNESP, pelos bons momentos proporcionados.

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - pelo apoio financeiro ao trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	iv
RESUMO	v
ABSTRACT	vi
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Tema e motivação	1
1.2 - Objetivos	4
1.3 - Apresentação	4
CAPÍTULO 2 - ANÁLISE DINÂMICA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	6
2.1 - Princípio de D'Alembert	7
2.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais	8
2.3 - Métodos de discretização do contínuo	11
2.4 - Conceitos da Mecânica dos Sólidos Deformáveis .	12
2.4.1 - Esforços atuantes em um sistema estrutural devidos ao meio externo	12
2.4.1.1 - Esforços volumétricos	13
2.4.1.2 - Esforços superficiais	13
2.4.1.3 - Esforços concentrados	14
2.4.2 - Forças atuantes em um sistema estrutural devidas ao movimento	14
2.4.2.1 - Forças inerciais	14
2.4.2.2 - Forças dissipativas	15
2.4.3 - Forças restauradoras	16

2.4.3.1 - Trabalho virtual realizado pelas forças restauradoras.....	18
2.4.4 - Relações cinemáticas	21
2.4.5 - Relações constitutivas	21
2.4.6 - Condições de contorno	22
2.5 - Formulação do Método dos Elementos Finitos	23
2.6 - Equação do movimento para um sistema estrutural discreto	25
2.6.1 - Equação de equilíbrio via P.T.V.	25
2.6.2 - Equação geral do movimento	28

CAPÍTULO 3 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO..... 30

3.1 - Métodos de integração numérica	30
3.2 - Equações de Newmark	31
3.2.1 - Aceleração constante durante o intervalo de tempo.....	32
3.2.2 - Aceleração variando linearmente durante o intervalo de tempo.....	33
3.2.3 - Equações generalizadas	34
3.3 - Algoritmos numéricos para resolução de sistemas de equações lineares e não-lineares	35
3.3.1 - Processos iterativos	35
3.3.2 - Processo incremental	37
3.4 - Método de Newmark para integração numérica ao longo do tempo	37
3.4.1 - Equacionamento básico	37
3.5 - Algoritmo numérico para resolução do processo .	40
3.6 - Matriz de amortecimento	43
3.6.1 - Amortecimento Rayleigh	44
3.6.2 - Freqüências naturais de vibração	45

CAPÍTULO 4 - TEORIA CLÁSSICA PARA FLEXÃO DE PLACAS	50
4.1 - Generalidades	50
4.2 - Hipóteses	50
4.3 - Deslocamentos e deformações	51
4.4 - Tensões e esforços solicitantes	53
4.5 - Equilíbrio de um elemento de placa	57
4.6 - Condições de contorno	58
4.6.1 - Borda simplesmente apoiada	58
4.6.2 - Borda engastada	59
4.6.3 - Borda livre	59
CAPÍTULO 5 - ELEMENTO FINITO RETANGULAR	61
5.1 - Relação geral entre coordenadas	61
5.2 - Funções de forma	62
5.3 - Matriz de rigidez	68
5.4 - Matriz de massas	73
CAPÍTULO 6 - ELEMENTO FINITO TRIANGULAR	75
6.1 - Relação geral entre coordenadas	75
6.2 - Funções de forma	80
6.3 - Matriz de rigidez	86
6.4 - Matriz de massas	89
CAPÍTULO 7 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS	93
7.1 - Generalidades	93
7.2 - Esquema geral de cálculo	93
7.3 - Descrição das sub-rotinas	95
CAPÍTULO 8 - ANÁLISE NUMÉRICA	99
8.1 - Generalidades	99
8.2 - Exemplo 1 - Placa quadrada	99
8.3 - Exemplo 2 - Influência das malhas	103

8.4 - Exemplo 3 - Exemplo de um transiente	110
8.5 - Exemplo 4 - Exemplo de aplicação	115
CAPÍTULO 9 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	124
9.1 - Conclusões	124
9.2 - Propostas de desenvolvimento	126
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E BIBLIOGRAFIA CONSULTADA .	127
ANEXO	131

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Modelo reológico.....	10
Figura 2.2 - Sistema estrutural arbitrário.....	12
Figura 2.3 - Tensões atuantes em um cubo infinitesimal.....	17
Figura 2.4 - Deformação tangencial provocada por um deslocamento virtual.....	19
Figura 3.1 - Diagrama de blocos do método de Newmark..	42
Figura 4.1 - Deslocamento de um ponto situado sobre uma normal ao plano médio da placa.....	51
Figura 4.2 - Tensões e esforços atuantes em uma placa plana.....	53
Figura 4.3 - Tensões atuantes em um elemento da placa.	54
Figura 4.4 - Momentos atuando sobre o plano médio de um elemento de placa.....	55
Figura 4.5 - Esforços cortantes atuando sobre o plano médio de um elemento de placa.....	55
Figura 5.1 - Elemento finito retangular.....	61
Figura 5.2 - Graus de liberdade.....	61
Figura 3.3 - Sistema de coordenadas adimensionais.....	62
Figura 6.1 - Elemento finito triangular.....	75
Figura 6.2 - Graus de liberdade.....	75
Figura 6.3 - Sistemas de coordenadas.....	76
Figura 6.4 - Sistemas de coordenadas oblíquas.....	77
Figura 6.5 - Coordenadas dos pontos nodais.....	80
Figura 7.1 - Fluxograma do esquema geral de cálculo...	94
Figura 8.1 - Placa quadrada.....	99
Figura 8.2 - Deslocamento do eixo central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.....	100
Figura 8.3 - " M_{yy} " atuante no eixo central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.....	101

Figura 8.4 - Deslocamento do eixo central considerando-se os bordos engastados.....	101
Figura 8.5 - " M_{yy} " atuante no eixo central considerando-se os bordos engastados.....	102
Figura 8.6 - Deslocamento do ponto central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.....	103
Figura 8.7 - Momento atuante no ponto central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.....	104
Figura 8.8 - Deslocamento do ponto central considerando-se os bordos engastados.....	105
Figura 8.9 - Momento atuante no ponto central considerando-se os bordos engastados.....	105
Figura 8.9 - Momento atuante no bordo considerando-se os bordos engastados.....	106
Figura 8.10 - Associação de elementos: deslocamento do ponto central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.....	107
Figura 8.11 - Associação de elementos: momento atuante no ponto central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.....	107
Figura 8.12 - Associação de elementos: deslocamento do ponto central considerando-se os bordos engastados...	108
Figura 8.13 - Associação de elementos: momento atuante no ponto central considerando-se os bordos engastados...	108
Figura 8.14 - Associação de elementos: momento atuante no bordo considerando-se os bordos engastados.....	109
Figura 8.15 - Placa simplesmente apoiada com carregamento " $P(t)$ ".....	110
Figura 8.16 - Deslocamento do ponto central em função do tempo.....	111
Figura 8.17 - Primeiro modo de vibração da estrutura.	111
Figura 8.18 - Segundo modo de vibração da estrutura..	112

Figura 8.19 - Tempo x deslocamento do ponto central considerando-se a discretização com 64 elementos retangulares.....	113
Figura 8.20 - Tempo x deslocamento do ponto central considerando-se a discretização com 128 elementos triangulares.....	113
Figura 8.21 - Disposição geométrica das lajes.....	118
Figura 8.22 - Primeiro modo de vibração para lajes quadradas.....	118
Figura 8.23 - Relação espessura x vão de lajes quadradas para diversos valores de resistência de concreto.....	119
Figura 8.24 - Primeiro modo de vibração para lajes retangulares.....	120
Figura 8.25 - Relação espessura x vão de lajes retangulares para diversos valores de resistência de concreto.....	121
Figura 8.26 - Laje quadrada: (a) Primeiro modo de vibração; (b) Segundo modo de vibração; (c) Terceiro modo de vibração; (d) Quarto modo de vibração.....	123
Figura 8.27 - Laje retangular: (a) Primeiro modo de vibração; (b) Segundo modo de vibração; (c) Terceiro modo de vibração; (d) Quarto modo de vibração.....	123

LISTA DE TABELAS

Tabela 8.1 - Freqüências naturais de vibração.....	112
Tabela 8.2 - Deslocamentos máximos para os diversos tipos de análise.....	114
Tabela 8.3 - Valores de espessuras obtidos para lajes quadradas com $f_{ck}=20MPa$	119
Tabela 8.4 - Valores de espessuras obtidos para lajes retangulares com $f_{ck}=20MPa$	120

RESUMO

WAIDEMAM, L. **Análise dinâmica de placas delgadas utilizando elementos finitos triangulares e retangulares.** 153 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.

Este trabalho tem como objetivo principal analisar o comportamento dinâmico de estruturas laminares planas com carregamento perpendicular ao plano médio, em particular as placas delgadas, utilizando-se, para isso, a teoria clássica de flexão de placas e a discretização estrutural feita com os elementos finitos triangulares e retangulares trabalhando em conjunto e em separado.

Na dedução das matrizes de rigidez e de massas dos elementos finitos em questão utiliza-se a formulação com parâmetros generalizados e com coordenadas homogêneas, cujas funções aproximadoras contêm nove e doze monômios, respectivamente, extraídos do polinômio algébrico cúbico em "x" e "y". Para a consideração do amortecimento utiliza-se o Método de Rayleigh e para a integração numérica ao longo do tempo utiliza-se o Método de Newmark, via algoritmo previsor / corretor.

Ao final deste são elaborados vários exemplos elucidativos visando uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Dinâmica estrutural; Comportamento estrutural de placas delgadas; Método dos elementos finitos; Teoria clássica de flexão de placas.

ABSTRACT

WAIDEMAM, L. **Dynamic analysis of thin plates using triangular and rectangular finite elements.** 153 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.

In this work the dynamic behavior of plane laminate structures, with load applied perpendicularly to the middle plan, has been analyzed. The classic theory of bending plates and structural subdivision - done with triangular and rectangular finite elements working together as well as in separate - are used to study thin plates.

The formulation employing generalized parameters and homogeneous coordinates, using approximating functions containing nine and twelve terms starting from the cubic algebraic polynomial in Cartesian coordinates "x" and "y", is used to obtain the stiffness and mass matrices for the triangular and rectangular finite element, respectively. The Rayleigh Method is used to take into account the structural dumping while the Newmark Method is used to perform the numeric integration in the time, by means of predictor / corrector scheme.

Additionally, several elucidating examples are elaborated in order to analyze the final results.

Keywords: Structural dynamics; Structural behavior of thin plates; Finite Element Methods; Classic theory of bending plates.

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Tema e motivação

A análise do comportamento estático e dinâmico de sistemas estruturais é, sem dúvida, um dos principais objetivos almejados pelo Engenheiro de Estruturas.

Através da análise estrutural pode-se quantificar a magnitude dos esforços internos e dos deslocamentos que se manifestam em qualquer sistema estrutural quando o mesmo é submetido a um carregamento arbitrário. Tal procedimento deverá fornecer uma ampla gama de resultados numéricos compatíveis com o carregamento aplicado, cuja avaliação de forma qualitativa permitirá a sua utilização na elaboração do projeto estrutural do sistema analisado.

Em geral as estruturas são analisadas supondo-se as forças atuantes aplicadas muito lentamente. Tal hipótese é a base da análise estática sendo apropriada para o tratamento de ações invariantes no tempo, como por exemplo, o peso próprio.

No entanto, nos casos em que as ações variáveis no tempo estão presentes os efeitos dinâmicos podem ser importantes, devendo ser considerados no projeto. Como exemplos desses carregamentos podem ser citados, entre outros, a incidência do vento sobre edifícios altos, sismos, frenagem / aceleração de veículos em pontes e movimentos de pessoas (caminhar, pular, dançar) sobre uma laje.

Com a disseminação da informática ocorrida no final da década de 1980, e principalmente em função do aumento vertiginoso da capacidade de armazenamento, gerenciamento e processamento de dados apresentado pelos computadores de pequeno porte, o Engenheiro de Estruturas passou a ter

acesso a equipamentos e programas computacionais que possibilitam uma análise estrutural baseada em modelos mais refinados, proporcionando um aumento da confiabilidade e diminuição de custos dos projetos e das construções.

Paralelamente a essa evolução pesquisas no campo dos materiais de construção civil vêm sendo realizadas e materiais cada vez mais resistentes têm sido desenvolvidos.

Os processos de cálculo mais evoluídos aliados aos materiais mais resistentes propiciam a execução de estruturas cada vez mais esbeltas e flexíveis, sendo essas mais susceptíveis às ações variáveis no tempo. Dessa forma uma análise dinâmica mais acurada em tais sistemas estruturais torna-se imprescindível.

Para o caso particular de pisos de edificações, a tendência é projetá-los com vãos cada vez maiores, ocasionando problemas de vibrações causados por excitações rítmicas associadas à movimentação de pessoas.

Já há algum tempo o Método dos Elementos Finitos vem sendo largamente empregado, dentre outras áreas, na análise dinâmica de estruturas. A sua rápida aceitação deve-se, principalmente, à obtenção de resultados satisfatórios para problemas de árdua resolução por outros meios.

Os métodos finitos permitem expressar a solução exata dos sistemas contínuos de uma forma aproximada, através da utilização de sistemas discretos que contém um número finito de graus de liberdade.

Entende-se por meio contínuo o meio resultante da distribuição homogênea da matéria no volume. Fisicamente, a hipótese do contínuo consiste em abstrair-se da

composição molecular da matéria que compõe o meio, e da sua conseqüente descontinuidade.

O sistema estrutural é definido como sendo uma estrutura física qualquer composta por uma série de elementos estruturais adequadamente associados, formando um conjunto resistente. Esses elementos são corpos sólidos elástico-deformáveis, com capacidade de receber e transmitir esforços de uma forma geral.

Deste modo, pode-se dizer que um sistema estrutural é contínuo desde que o menor elemento estrutural retirado do sistema possua as mesmas propriedades físicas específicas e que não haja descontinuidade no conjunto.

Em função dessa continuidade os sistemas estruturais contínuos possuem um número infinito de graus de liberdade, fato este que dificulta a resolução do problema.

Para contornar tal problema, empregam-se métodos numéricos que transformam um sistema estrutural contínuo em um sistema estrutural discreto, através da divisão do modelo geométrico dos elementos estruturais em pequenas regiões chamadas de elementos finitos, sendo essas interconectadas entre si para formar o conjunto estrutural. Esse processo de discretização é um dos conceitos necessários para a formulação do método dos elementos finitos.

Dentro desse contexto, o presente trabalho tem como tema principal a análise estrutural dinâmica de placas delgadas, utilizando-se elementos finitos triangulares combinados com elementos finitos retangulares, através da teoria clássica de flexão de placas.

Com a motivação de formar uma biblioteca de softwares para análise estrutural, desenvolveu-se um programa computacional, em linguagem FORTRAN, que

contemple as análises estática e dinâmica de placas delgadas de comportamento linear, permitindo, sempre que possível, realizar a comparação do comportamento estático e dinâmico de tais sistemas estruturais.

1.2 - Objetivos

Este trabalho tem por objetivos:

- apresentar, de forma clara e concisa, o desenvolvimento matemático do modelo estrutural referente aos elementos finitos triangulares e retangulares e efetuar o acoplamento destes elementos na análise dinâmica estrutural de placas delgadas, através da teoria clássica de flexão de placas;
- elaborar um programa computacional didático, modular, flexível e de fácil utilização e manutenção, que contemple as análises estática e dinâmica de placas delgadas de comportamento linear;
- analisar qualitativamente e quantitativamente o comportamento estático e dinâmico de placas delgadas de comportamento linear.

1.3 - Apresentação

Neste capítulo procura-se apresentar uma visão geral de todo o trabalho, descrevendo-se, para isso, tema e motivação, os objetivos do trabalho e, finalizando, uma descrição sucinta dos capítulos subseqüentes.

No capítulo 2 são apresentadas algumas considerações sobre a análise estrutural dinâmica utilizando o método dos elementos finitos.

No capítulo 3 apresentam-se as equações de Newmark para integração numérica ao longo do tempo e o algoritmo numérico a ser usado para resolução do processo de integração da equação do movimento. Neste capítulo faz-se também a caracterização da matriz de amortecimento.

No capítulo 4 procura-se fazer uma descrição da teoria clássica de flexão de placas, bem como apresentar a equação diferencial do movimento das placas.

No capítulo 5 elabora-se a matriz de rigidez elástica utilizando-se a formulação com coordenadas homogêneas para o elemento retangular, bem como a matriz de massas. O mesmo é feito para o elemento triangular no capítulo 6.

No capítulo 7 são apresentados os aspectos computacionais relativos ao programa computacional desenvolvido, ou seja, esquema geral de cálculo e descrição das sub-rotinas.

Já no capítulo 8 são apresentados exemplos relativos à análise estática e dinâmica de placas delgadas com comportamento linear.

Por fim, no capítulo 9, são apresentadas as conclusões do trabalho e algumas propostas para desenvolvimento em trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2 - ANÁLISE DINÂMICA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Uma análise estrutural dinâmica deve ser entendida como sendo uma análise de estruturas sujeitas à aplicação de carregamentos dinâmicos, ou seja, carregamentos cuja magnitude, direção e/ou posição variam com o tempo. Desse modo, a resposta estrutural ao carregamento dinâmico também varia com o tempo, e isto faz com que esse tipo de problema se torne relativamente mais complexo do que problemas que envolvam apenas carregamentos estáticos.

Assim é evidente que um problema dinâmico não pode ter uma solução simples como um problema estático possui. Complementando, em problemas dinâmicos não se estabelece uma única solução correspondente para todo tempo, mas sim se busca um "histórico de resposta".

Uma distinção mais fundamental entre problemas estáticos e dinâmicos reside no fato de que, no primeiro caso os esforços internos e as deformações dependem apenas de como e onde o carregamento está aplicado pelos princípios estabelecidos pelo equilíbrio de forças, e no caso de problemas dinâmicos os esforços internos e as deformações dependem, como será visto adiante, não só do equilíbrio das forças externas, mas também das forças de inércia resultantes da aplicação do carregamento. Forças de inércia são forças que se opõem à aceleração de uma estrutura quando a mesma está sujeita à ação de um carregamento dinâmico.

Dentro deste contexto deve-se, então, buscar métodos que forneçam os requeridos históricos de deslocamento. Em muitos casos, uma análise aproximada envolvendo apenas um número limitado de graus de liberdade fornece uma

exatidão suficiente e assim, o problema pode ser reduzido à determinação de um histórico temporal dessas componentes escolhidas do deslocamento. É o caso dos sistemas discretos.

As expressões matemáticas que definem os deslocamentos dinâmicos são chamadas de equações do movimento das estruturas e a solução dessas equações fornece os exigidos históricos de deslocamento.

Em um procedimento de análise dinâmica estrutural a formulação das equações de movimento é talvez a fase mais importante e também a mais difícil. Desse modo, vários métodos diferentes são aplicados para a formulação dessas equações, sendo os conceitos fundamentais de alguns deles descritos a seguir.

2.1 - Princípio de D'Alembert

As equações de movimento de qualquer sistema dinâmico podem ser expressas pela segunda Lei de Newton que estabelece que a força atuante em uma certa massa "m" é igual à taxa de alteração da quantidade de movimento. Assim:

$$p(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (2.1)$$

onde:

$p(t)$: força aplicada na massa;

$u(t)$: deslocamento da massa "m".

Para vários problemas estruturais tratados dinamicamente pode-se admitir que a massa não varie com o tempo, e assim a equação (2.1) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} p(t) &= m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ p(t) &= m\ddot{u}(t) \\ p(t) - m\ddot{u}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Neste caso o produto "m $\ddot{u}(t)$ " é chamado de força de inércia resistente à aceleração da massa.

O princípio de D'Alembert diz que uma massa sujeita a uma aceleração desenvolve uma força de inércia que é proporcional e oposta a ela.

Devido ao fato de expressar as equações de movimento como equações de equilíbrio dinâmico, esse método é um dispositivo muito conveniente em problemas de dinâmica estrutural. Se uma força de inércia é introduzida, a expressão da equação do movimento se torna meramente uma expressão de equilíbrio de todas as forças atuantes na massa.

2.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais

Dado um sistema estrutural submetido a "n" esforços externos "F", o mesmo estará em equilíbrio estático se:

$$\sum_j^n F_j = 0$$

Introduzindo-se um deslocamento virtual " δu ", sendo este infinitesimal, cinematicamente compatível com o sistema estrutural e na direção dos esforços externos, pode-se calcular o trabalho virtual realizado pelo sistema através de:

$$\delta W = \sum_j^n F_j \delta u_j \quad (2.3)$$

O Princípio dos Trabalhos Virtuais - P.T.V. - estabelece que se um sistema em equilíbrio, sob a ação de um conjunto de forças, for sujeito a um deslocamento virtual, o trabalho virtual realizado pelas forças é igual a zero.

$$\delta W = 0$$

$$\delta W = \sum_j^n F_j \delta u_j = 0$$

Assim, uma vez identificadas todas as forças atuantes nas massas do sistema, incluindo-se as forças de inércia definidas em concordância com o princípio de D'Alembert, descrito no item 2.1 deste trabalho, as equações de movimento podem ser obtidas pela introdução de deslocamentos virtuais correspondentes a cada grau de liberdade, sendo o trabalho virtual realizado igual a zero, como segue:

$$\delta W = \sum_j^n (F_j - m_j \ddot{u}_j) \delta u_j = 0 \quad (2.4)$$

Uma vez sujeito à ação de esforços externos, um sistema estrutural desenvolve esforços internos que atuam em oposição à ação aplicada. Esses esforços podem ser representados pelo modelo reológico ilustrado na figura 2.1.

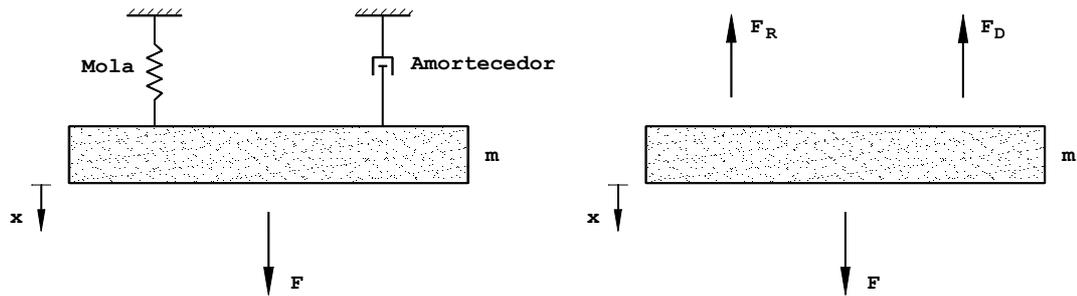


Figura 2.1 - Modelo reológico.

No modelo, as forças restauradoras, representadas por uma mola, surgem com o propósito de restaurar a estrutura no seu estado inicial de equilíbrio.

Concomitantemente, as forças dissipadoras, representadas por um amortecedor, surgem com o propósito de dissipar a energia do sistema estrutural real.

Sendo assim, a equação (2.4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum_j^n (F_j(t) - F_{Rj} - F_{Dj} - m_j \ddot{u}_j) \delta u_j = 0$$

Como os deslocamentos virtuais são arbitrários, obtém-se:

$$\sum_j^n F_j(t) = \sum_j^n F_{Rj} + \sum_j^n F_{Dj} + \sum_j^n m_j \ddot{u}_j \tag{2.5}$$

2.3 - Métodos de discretização do contínuo

Com o recente progresso influenciado pelo rápido desenvolvimento das técnicas computacionais, a resolução de problemas de forma mais exata e o emprego de métodos numéricos ficaram mais acessíveis.

Fala-se atualmente em "discretização do contínuo" como a ferramenta mais universal para a resolução de sistemas mecânicos contínuos.

Os métodos de discretização permitem expressar de forma aproximada a solução de sistemas contínuos contendo um número infinito de graus de liberdade por meio de sistemas discretos contendo um número finito de graus de liberdade.

Dentre os métodos de discretização, um dos mais eficientes e mais utilizados atualmente é o chamado Método dos Elementos Finitos - MEF.

O primeiro passo na aplicação do MEF é dividir a estrutura em um número apropriado de elementos com tamanho adequado. Os deslocamentos dos pontos nodais são, então, generalizados em função das coordenadas da estrutura. Desse modo, os deslocamentos da estrutura podem ser expressos em função dos deslocamentos dos pontos nodais por meio de um arranjo apropriado de funções, chamadas de funções interpoladoras. Via de regra, tais funções podem descrever qualquer curva que seja internamente contínua e que satisfaça as condições de deslocamento geométrico impostas pelos deslocamentos nodais.

Em geral, a utilização adequada de tais funções fornece um eficiente processo para expressar os deslocamentos nodais do sistema estrutural discreto em função dos deslocamentos dos elementos finitos.

2.4 - Conceitos da Mecânica dos Sólidos Deformáveis

2.4.1 - Esforços atuantes em um sistema estrutural devidos ao meio externo

Dado um sistema estrutural arbitrário, conforme ilustra a figura 2.2, pode-se isolar um cubo infinitesimal com volume " dV_e " de qualquer parte do sistema, com a finalidade de se analisar os esforços atuantes no mesmo, de acordo com os itens subseqüentes.

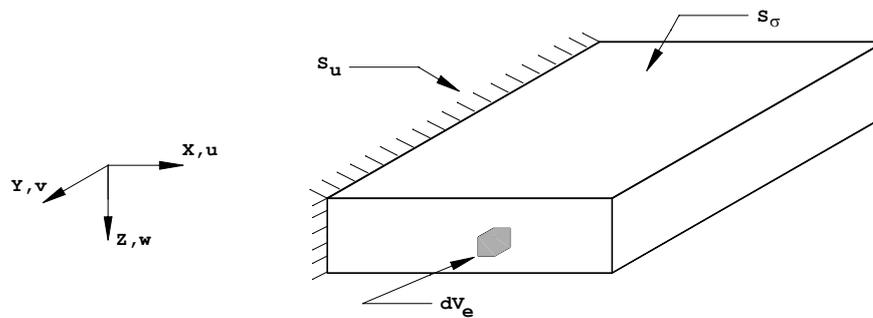


Figura 2.2 - Sistema estrutural arbitrário.

O sistema estrutural está referido a um sistema tri-ortogonal de eixos globais " (X,Y,Z) ", sendo " u ", " v " e " w " as componentes de um deslocamento qualquer nas direções " X ", " Y " e " Z ", respectivamente. Organizando-se na forma matricial, tem-se:

$$\underset{\sim}{u}^T = \{u \quad v \quad w\} \quad (2.6)$$

sendo que tais componentes de deslocamento são funções dependentes do sistema de coordenadas e expressas por " $u=u(X,Y,Z)$ ", " $v=v(X,Y,Z)$ " e " $w=w(X,Y,Z)$ ".

O volume total do sistema estrutural é definido pela letra "V" e o volume de cada elemento é definido por "V_e". Já a superfície do sistema é definido pela letra "S", sendo essa subdividida em:

- superfície na qual os deslocamentos são conhecidos "S_u";
- superfície na qual os esforços atuantes são conhecidos "S_σ".

2.4.1.1 - Esforços volumétricos

Os esforços volumétricos são aplicados em todos os pontos do material e tem dimensão de força por unidade de volume. Em geral são provenientes do campo gravitacional, mas também podem ser provocados por campos magnéticos, elétricos, etc. Logo, sobre cada elemento diferencial de volume "dV_e" atuam as componentes dos esforços volumétricos, que organizadas na forma matricial resultam:

$$\underset{\sim V_e}{p}^T = \{ V_x \ V_y \ V_z \} \quad (2.7)$$

2.4.1.2 - Esforços superficiais

Os esforços superficiais são aplicados de forma distribuída nas superfícies externas dos elementos e tem dimensão de força por unidade de área. Esses podem ser provenientes da ação do vento, da sobrecarga, etc. Logo, sobre cada elemento diferencial com área externa "dS_u"

atuam as componentes dos esforços superficiais, que organizadas na forma matricial resultam:

$$\underset{\sim Se}{p}^T = \{ S_x \ S_y \ S_z \} \quad (2.8)$$

2.4.1.3 - Esforços concentrados

Os esforços concentrados são, geralmente, aplicados nos nós dos elementos e têm dimensão de força e de força vezes unidade métrica, visto que os momentos são incluídos nesta categoria. Esses podem ser provenientes das reações das vigas ou pilares, carregamentos pontuais, etc. Logo, sobre cada nó de um elemento finito atuam as componentes dos esforços concentrados, que organizadas na forma matricial resultam:

$$\underset{\sim C}{p}^T = \{ C_x \ C_y \ C_z \} \quad (2.9)$$

2.4.2 - Forças atuantes em um sistema estrutural devidas ao movimento

2.4.2.1 - Forças inerciais

Considerando-se, agora, que o cubo infinitesimal de volume " dV_e ", cuja densidade específica é " ρ ", seja acelerado nas direções " X ", " Y " e " Z ", então as forças inerciais podem ser obtidas pela segunda lei de Newton, conforme visto no item 2.1 deste trabalho.

Desse modo, as forças inerciais por unidade de volume nas direções das coordenadas "X", "Y" e "Z", são dadas na forma matricial por:

$$\underset{\sim}{p}_I = \rho(x,y,z) \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} = \rho \underset{\sim}{\ddot{u}} \quad (2.10)$$

Cabe ressaltar que as forças inerciais atuantes no elemento infinitesimal são aplicadas no contorno que define o elemento como um todo. Logo, a estrutura sofre uma distribuição de forças na direção oposta ao vetor da aceleração " \ddot{u} " do elemento, fazendo com que as forças inerciais tenham sentido contrário à direção do movimento.

2.4.2.2 - Forças dissipativas

A formulação consistente de um mecanismo que considere as forças dissipativas é de difícil elaboração, visto que tais forças podem ser oriundas do arrasto aerodinâmico, da fricção interna e das microfissuras que ocorrem no interior do material estrutural. Essa dissipação de energia se dá, geralmente, na forma de calor e/ou som, fazendo com que a amplitude da vibração diminua ao longo do tempo.

Em face a esta dificuldade, formalmente pode-se admitir, de uma forma bastante simplista, que todos os elementos do sistema estrutural estejam submetidos aos efeitos de um amortecimento viscoso uniformemente distribuído, de tal forma que as forças dissipativas por

unidade de volume nas direções das coordenadas "X", "Y" e "Z", possam ser definidas de forma análoga à equação (2.10), por:

$$\underset{\sim}{p}_D = \mu(x,y,z) \left\{ \begin{array}{l} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{array} \right\} = \mu \underset{\sim}{\dot{u}} \quad (2.11)$$

onde " μ " é o parâmetro de amortecimento viscoso do material estrutural.

Como o elemento infinitesimal se move com uma velocidade " $\underset{\sim}{\dot{u}}$ " em uma dada direção, então as forças dissipativas serão aplicadas na direção oposta ao sentido do movimento do mesmo.

2.4.3 - Forças restauradoras

As forças restauradoras podem ser entendidas como sendo a reação interna do sistema estrutural à ação de um carregamento externo.

Para a obtenção de tais forças, inicialmente considera-se o elemento genérico extraído do sistema estrutural mostrado na figura 2.2. Efetuando-se um corte perpendicular ao seu eixo, devem aparecer forças que traduzem a ação nas partes separadas para que essas continuem em equilíbrio.

Essas forças estão distribuídas sobre toda a seção transversal, sendo a força por unidade de área denominada tensão.

Generalizando-se tal conceito, entende-se por tensão a força por unidade de área, com componente na direção

perpendicular à seção transversal, chamada de tensão normal, e componente contida no plano, chamada de tensão tangencial ou cisalhante, conforme ilustra a figura 2.3.

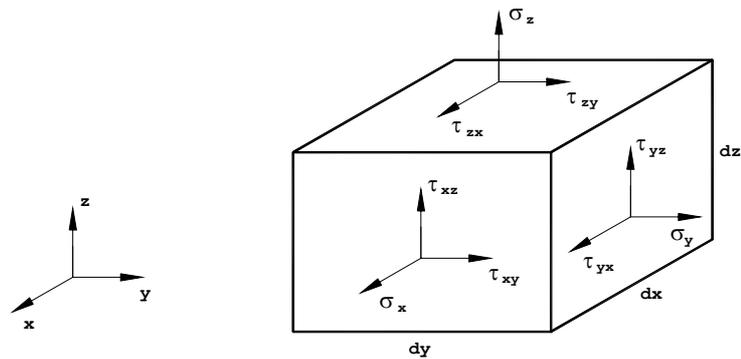


Figura 2.3 - Tensões atuantes em um cubo infinitesimal.

Desse modo, o tensor das tensões pode ser expresso em função das suas componentes nas direções dos eixos locais "x", "y" e "z" como segue.

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

No caso das deformações, a variação de comprimento que ocorre em uma fibra qualquer por unidade de comprimento é chamada de deformação linear ou específica e a variação dos ângulos retos iniciais entre as linhas imaginárias do sólido é chamada de deformação tangencial ou cisalhante. Sendo assim, as componentes do tensor das deformações podem ser explicitadas como segue.

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

As forças restauradoras podem, agora, ser obtidas fazendo-se o produto das tensões pelas respectivas "áreas de atuação". Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cdot dy \cdot dz \\ p_{xy} &= \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \end{aligned} \quad (2.14)$$

De modo análogo pode-se chegar à contribuição das demais componentes das tensões normais e tangenciais.

2.4.3.1 - Trabalho virtual realizado pelas forças restauradoras

Como visto no item 2.2 deste trabalho, o trabalho virtual é dado pelo produto da força pelo deslocamento virtual imposto.

Sendo assim, de acordo com a equação (2.3) pode-se escrever:

$$\delta W = \sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \delta u_x$$

onde " δu_x " é a componente do deslocamento virtual na direção " x ".

Mas

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\delta u_x}{dx} \Rightarrow \delta u_x = \delta \varepsilon_x \cdot dx$$

Dessa forma obtém-se o trabalho virtual realizado pela parcela " σ_x " das tensões normais.

$$\delta W = \sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \delta \varepsilon_x \cdot dx$$

De modo análogo chega-se à contribuição das demais parcelas das tensões normais.

Do mesmo modo pode-se, agora, quantificar o trabalho virtual realizado pela parcela " τ_{xy} " das tensões tangenciais. Assim tem-se:

$$\delta W = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot \delta u_y$$

onde " δu_y " é a componente do deslocamento virtual na direção "y".

A figura 2.4 ilustra a deformação tangencial provocada pelo deslocamento virtual.

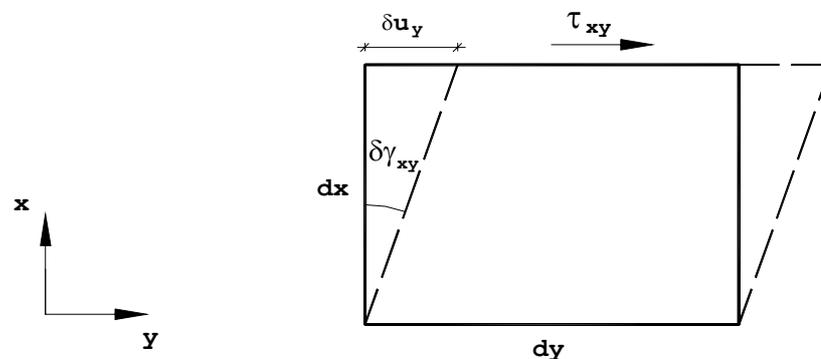


Figura 2.4 - Deformação tangencial provocada por um deslocamento virtual.

Assim:

$$tg\delta\gamma_{xy} = \frac{\delta u_y}{dx} \Rightarrow \delta u_y = \delta\gamma_{xy} dx$$

Dessa forma o trabalho virtual realizado pela parcela " τ_{xy} " das tensões tangenciais pode ser obtido por:

$$\delta W = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot \delta\gamma_{xy} \cdot dx$$

Analogamente obtém-se a contribuição das demais parcelas das tensões tangenciais.

Por superposição dos efeitos, chega-se à equação do trabalho virtual total realizado pelas forças restauradoras em todo o volume do elemento através da seguinte equação:

$$\delta W = \int_{Ve} \delta \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{\sigma} \cdot dV_e \quad (2.15)$$

onde as parcelas das tensões estão organizadas no tensor " $\underset{\sim}{\sigma}$ " e as deformações virtuais no tensor " $\delta \underset{\sim}{\varepsilon}^T$ ".

2.4.4 - Relações cinemáticas

No estudo da deformação de um sólido elástico será presumido que há restrições para impedir seu deslocamento como corpo rígido, de tal forma que nenhum deslocamento de partículas do sólido é possível sem que este sofra uma deformação. Inicialmente, somente pequenas deformações são consideradas de tal modo que a relação entre deformações e deslocamentos pode ser expressa como segue.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

2.4.5 - Relações constitutivas

As equações que definem a relação entre tensão e deformação são chamadas de relações constitutivas. Admitindo-se material isótropo com comportamento elástico linear, as relações constitutivas são dadas pela Lei de Hooke generalizada.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\
\gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \\
\gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

onde “ E ” e “ ν ” são características físicas do material, denominadas respectivamente por módulo de elasticidade longitudinal e coeficiente de Poisson.

2.4.6 - Condições de contorno

A primeira condição de contorno do sistema estrutural é dada em função da vinculação do sólido com o meio externo, sendo portanto conhecidos os valores dos deslocamentos na superfície “ S_u ”.

A segunda condição de contorno é dada em função do carregamento externo aplicado, uma vez que na superfície “ S_σ ” os valores dos esforços atuantes são conhecidos.

2.5 - Formulação do Método dos Elementos Finitos

Conforme foi visto no início deste capítulo, a idéia básica do Método dos Elementos Finitos consiste em utilizar como parâmetros as variáveis nodais de um número finito de pontos previamente escolhidos, denominados pontos nodais ou, simplesmente, nós.

Efetuando-se tal procedimento, os deslocamentos " \tilde{u} " de um elemento finito podem ser escritos em função dos deslocamentos nodais " \tilde{d} " através da utilização de funções de forma apropriadas. Essa relação matricial é definida por:

$$\tilde{u} = \phi \tilde{d} \quad (2.18)$$

onde " ϕ " é a matriz que contém as funções de forma e relaciona os deslocamentos que ocorrem ao longo do eixo longitudinal com os deslocamentos nodais do elemento.

Sendo assim, derivando-se tal equação em relação ao tempo, obtêm-se as seguintes relações básicas:

$$\dot{\tilde{u}} = \phi \dot{\tilde{d}} \quad (2.19)$$

e

$$\ddot{\tilde{u}} = \phi \ddot{\tilde{d}} \quad (2.20)$$

válidas admitindo-se a hipótese de pequenas rotações.

Organizando-se as equações (2.17) na forma matricial, obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{matrix} \sigma \\ \sim \end{matrix} = \begin{matrix} E \\ \sim \end{matrix} \begin{matrix} \varepsilon \\ \sim \end{matrix} \quad (2.21)$$

onde " E " é a matriz que contém os coeficientes elásticos do material estrutural, expressa pela relação apresentada a seguir.

$$\begin{matrix} E \\ \sim \end{matrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Colocando-se as equações (2.16) na forma matricial, obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{matrix} \varepsilon \\ \sim \end{matrix} = \begin{matrix} L \\ \sim \end{matrix} u \quad (2.23)$$

onde " L " é a matriz que contém os operadores diferenciais, dada por:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Substituindo-se a equação (2.18) na equação (2.23), obtém-se:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{d}$$

ou

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{d} \quad (2.25)$$

onde

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\phi} \quad (2.26)$$

2.6 - Equação do movimento para um sistema estrutural discreto

2.6.1 - Equação de equilíbrio via P.T.V.

A equação do equilíbrio que governa a resposta dinâmica de um sistema estrutural discreto pode ser obtida utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais

para estruturas em movimento, conforme visto no item 2.2 deste trabalho.

Aplicando-se, então, um deslocamento virtual e lembrando-se que tal sistema está submetido às forças descritas nos itens 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3, obtém-se, a partir da equação (2.5), a equação de equilíbrio para um elemento genérico do sistema, dada por:

$$\int_{V_e} \delta u^T \tilde{p}_{Ve} dV_e + \int_{S_e} \delta u^T \tilde{p}_{Se} dS_e + \sum_i^{nc} \delta u^T \tilde{p}_{Ci} = \int_{V_e} \delta \varepsilon^T \tilde{\sigma} dV_e + \int_{V_e} \delta u^T \tilde{\mu} \ddot{u} dV_e + \int_{V_e} \delta u^T \tilde{\rho} \ddot{u} dV_e \quad (2.27)$$

onde

δu : é o tensor dos deslocamentos virtuais;

$\delta \varepsilon$: é o tensor das deformações virtuais

correspondentes à " δu ";

σ : é o tensor das tensões restauradoras;

δu_i : é o tensor de deslocamentos virtuais

correspondentes aos pontos onde os esforços do vetor " p_{Ci} " são aplicados;

nc : é o número de pontos nodais do elemento.

A equação (2.27) fornece na primeira parte da igualdade o trabalho dos esforços externos, dado pelo produto dos esforços atuantes no elemento com os respectivos deslocamentos virtuais. Já a segunda parte da igualdade fornece o trabalho total interno dado pelo produto entre as deformações virtuais e as tensões

restauradoras, e pelo produto das forças inerciais e dissipativas com os respectivos deslocamentos virtuais.

Para a obtenção da equação geral do movimento de um sistema estrutural discreto, substituem-se as equações (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) e (2.25) na equação (2.27), resultando:

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} \delta d^T \phi^T p_{V_e} dV_e + \int_{S_e} \delta d^T \phi^T p_{S_e} dS_e + \\ & \sum_i^{nc} \delta d^T p_{C_i} = \int_{V_e} \delta d^T B^T E B d dV_e \qquad (2.28) \\ & + \int_{V_e} \delta d^T \phi^T \mu \phi \dot{d} dV_e + \int_{V_e} \delta d^T \phi^T \rho \phi \ddot{d} dV_e \end{aligned}$$

Colocando-se os deslocamentos nodais virtuais em evidência e rearranjando-se a equação (2.28), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \delta d^T \left\{ \int_{V_e} \phi^T p_{V_e} dV_e + \int_{S_e} \phi^T p_{S_e} dS_e + \sum_i^{nc} p_{C_i} - \right. \\ & \left. \int_{V_e} B^T E B dV_e \cdot d - \int_{V_e} \mu \phi^T \phi dV_e \cdot \dot{d} - \int_{V_e} \rho \phi^T \phi dV_e \cdot \ddot{d} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Para que o produto dado na equação anterior seja nulo, tendo em vista que os deslocamentos nodais virtuais são arbitrários, ou seja, não todos nulos, é necessário que seja mantida a seguinte igualdade:

$$\int_{V_e} \phi^T p_{V_e} dV_e + \int_{S_e} \phi^T p_{S_e} dS_e + \sum_i^{nc} p_{C_i} \tag{2.29}$$

$$= \int_{V_e} B^T E B dV_e \cdot d + \int_{V_e} \mu \phi^T \phi dV_e \cdot \dot{d} + \int_{V_e} \rho \phi^T \phi dV_e \cdot \ddot{d}$$

A expressão (2.29) fornece a equação do movimento para um elemento finito genérico, que escrita de forma simplificada resulta:

$$f_E(t) = kd + c\dot{d} + m\ddot{d}$$

$$m\ddot{d} + c\dot{d} + kd = f_E(t) \tag{2.30}$$

onde:

$$m = \int_{V_e} \rho \phi^T \phi dV_e \tag{2.31}$$

$$c = \int_{V_e} \mu \phi^T \phi dV_e \tag{2.32}$$

$$k = \int_{V_e} B^T E B dV_e \tag{2.33}$$

$$f_E(t) = \int_{V_e} \phi^T p_{V_e} dV_e + \int_{S_e} \phi^T p_{S_e} dS_e + \sum_i^{nc} p_{C_i} \tag{2.34}$$

2.6.2 - Equação geral do movimento

Segundo Argyris et al. (1991), para todo o sistema estrutural discreto utiliza-se o processo de expansão e

acumulação, obtendo-se, finalmente, a equação geral do movimento dada pelo sistema de equações:

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{D}}+\underset{\sim}{C}\dot{\underset{\sim}{D}}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{F}_E(t) \quad (2.35)$$

Cabe ressaltar que na equação anterior os esforços externos " $\underset{\sim}{F}_E$ " dependem apenas do tempo. Já a matriz de rigidez " $\underset{\sim}{K}$ ", a matriz de massas " $\underset{\sim}{M}$ " e a matriz de amortecimento " $\underset{\sim}{C}$ " vão permanecer constantes durante todo o procedimento de integração.

CAPÍTULO 3 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO

3.1 - Métodos de integração numérica

Uma vez obtida a equação geral do movimento para sistemas lineares, deve-se agora partir para a resolução da mesma visando obter os deslocamentos, as velocidades e as acelerações requeridas dos pontos nodais da estrutura.

Sua solução pode ser obtida via métodos numéricos ou então por meio de sua resolução analítica.

As hipóteses básicas utilizadas para a geração de sistemas lineares constituem uma poderosa ferramenta na obtenção de soluções numéricas. Elas permitem, por exemplo, a utilização do princípio da superposição dos efeitos. Tais hipóteses são dadas pelas relações lineares entre carregamento x deslocamento e tensão x deformação.

Dentre os métodos numéricos destacam-se os métodos de integração direta e as técnicas de superposição modal. Por sua vez, os métodos de integração direta classificam-se em métodos explícitos e implícitos.

Os métodos explícitos permitem expressar os deslocamentos finais " $\underset{\sim}{D}_n$ ", do intervalo de tempo " $n\Delta t$ ", em função da história temporal anterior, ou seja, em função dos deslocamentos finais e suas respectivas derivadas temporais referentes aos intervalos de tempo " $(n-1)\Delta t$ " e anteriores, conforme a equação (3.1).

$$\underset{\sim}{D}_n = f \left(\underset{\sim}{D}_{n-1}, \underset{\sim}{\dot{D}}_{n-1}, \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1}, \underset{\sim}{D}_{n-2}, \dots \right) \quad (3.1)$$

Já os métodos implícitos permitem expressar os deslocamentos finais " $\underset{\sim}{D}_n$ ", do intervalo de tempo " $n\Delta t$ ", em função dos deslocamentos finais e suas respectivas derivadas temporais referentes ao intervalo de tempo " $(n-1)\Delta t$ " e anteriores, e das derivadas temporais dos deslocamentos " $\underset{\sim}{D}_n$ " que, a princípio, não são conhecidas. Os métodos implícitos podem ser expressos pela equação (3.2), e, entre eles, destacam-se o processo de Newmark e o processo previsor - corretor.

$$\underset{\sim}{D}_n = f \left(\underset{\sim}{\dot{D}}_n, \underset{\sim}{\ddot{D}}_n, \underset{\sim}{D}_{n-1}, \underset{\sim}{\dot{D}}_{n-1}, \dots \right) \quad (3.2)$$

Existem ainda os chamados métodos implícitos - explícitos, que utilizam os métodos explícitos para resolver uma sub-região específica do sistema estrutural e os métodos implícitos para resolver o restante.

Os métodos implícitos possuem, essencialmente, duas vantagens quando comparados com os métodos explícitos: elevada exatidão e estabilidade numérica melhorada. No entanto, a desvantagem dos métodos implícitos reside na necessidade de ter que se resolver o sistema de equações a cada iteração que ocorre durante o processo de integração para cada intervalo de tempo " $n\Delta t$ ".

Na seqüência deste trabalho abordar-se-á o método implícito de Newmark.

3.2 - Equações de Newmark

Os métodos implícitos, conforme visto no item anterior, estão fundamentados no conhecimento das

derivadas temporais dos deslocamentos finais " \tilde{D}_n " referentes ao intervalo de tempo " $n\Delta t$ ".

Uma vez que essas derivadas temporais não são conhecidas, os seus valores podem ser estimados, conforme será visto nos itens subseqüentes, utilizando-se as chamadas equações de Newmark.

3.2.1 - Aceleração constante durante o intervalo de tempo

Assumindo-se que a aceleração durante o intervalo de tempo " $n\Delta t$ " seja igual à uma constante dada pela média entre a aceleração do início do intervalo e do final do intervalo, seu valor pode ser estimado por:

$$\tilde{\ddot{D}}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\tilde{\ddot{D}}_n + \tilde{\ddot{D}}_{n-1} \right)$$

onde " τ " é uma variável de tempo auxiliar, variando de zero até " Δt ".

Integrando-se duas vezes em relação à variável " τ ", tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\dot{D}}(\tau) &= \tilde{\dot{D}}_{n-1} + \frac{1}{2} \left(\tilde{\ddot{D}}_n + \tilde{\ddot{D}}_{n-1} \right) \tau \\ \tilde{D}(\tau) &= \tilde{D}_{n-1} + \tilde{\dot{D}}_{n-1} \tau + \frac{1}{4} \left(\tilde{\ddot{D}}_n + \tilde{\ddot{D}}_{n-1} \right) \tau^2 \end{aligned}$$

Calculando-se as variáveis ao final do intervalo de tempo, com " $\tau=\Delta t$ ", e reorganizando-se o resultado, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{D}_n &= \dot{D}_{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Delta t \ddot{D}_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{D}_n \\ D_n &= D_{n-1} + \Delta t \dot{D}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \Delta t^2 \ddot{D}_{n-1} + \frac{1}{4} \Delta t^2 \ddot{D}_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2.2 - Aceleração variando linearmente durante o intervalo de tempo

Uma outra forma de estimativa é assumir que a aceleração durante o intervalo de tempo " $n\Delta t$ " varie linearmente entre a aceleração do início do intervalo e do final do intervalo. Assim:

$$\ddot{D}(\tau) = \ddot{D}_{n-1} + \left(\ddot{D}_n - \ddot{D}_{n-1} \right) \frac{\tau}{\Delta t}$$

Analogamente ao item anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{D}(\tau) &= \dot{D}_{n-1} + \ddot{D}_{n-1} \tau + \left(\ddot{D}_n - \ddot{D}_{n-1} \right) \frac{\tau^2}{2\Delta t} \\ D(\tau) &= D_{n-1} + \dot{D}_{n-1} \tau + \ddot{D}_{n-1} \frac{\tau^2}{2} + \left(\ddot{D}_n - \ddot{D}_{n-1} \right) \frac{\tau^3}{6\Delta t} \end{aligned}$$

Calculando-se as variáveis ao final do intervalo de tempo, com " $\tau=\Delta t$ " e, reorganizando-se o resultado, obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{D}_n &= \dot{D}_{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Delta t \ddot{D}_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{D}_n \\ D_n &= D_{n-1} + \Delta t \dot{D}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \Delta t^2 \ddot{D}_{n-1} + \frac{1}{6} \Delta t^2 \ddot{D}_n\end{aligned}\quad (3.4)$$

3.2.3 - Equações generalizadas

Conforme visto nos itens 3.2.1 e 3.2.2, as equações finais (3.3) e (3.4) são praticamente as mesmas, diferenciando-se apenas pelos coeficientes numéricos que aparecem multiplicando determinadas parcelas.

Dessa forma, as respostas encontradas podem ser unificadas, resultando as equações generalizadas de Newmark expressas por:

$$\begin{aligned}\dot{D}_n &= \dot{D}_{n-1} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{D}_{n-1} + \gamma \Delta t \ddot{D}_n \\ D_n &= D_{n-1} + \Delta t \dot{D}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{D}_{n-1} + \beta \Delta t^2 \ddot{D}_n\end{aligned}\quad (3.5)$$

onde " γ " e " β " são conhecidos como parâmetros de Newmark.

Sendo assim, para aceleração constante durante o intervalo de tempo utiliza-se " $\gamma=1/2$ " e " $\beta=1/4$ ", e para aceleração variando linearmente durante o intervalo de tempo adota-se " $\gamma=1/2$ " e " $\beta=1/6$ ".

Por meio das equações (3.5) pode-se calcular o valor dos deslocamentos e das velocidades ao final do intervalo de tempo. No entanto, os valores das acelerações do final do intervalo permanecem ainda indeterminados. Tal problema será contornado no decorrer deste trabalho.

3.3 - Algoritmos numéricos para resolução de sistemas de equações lineares e não-lineares

No presente trabalho a equação geral do movimento gerada resulta um sistema de equações lineares que pode ser resolvido pelos procedimentos já mencionados no item 3.1. Já para problemas não-lineares físicos e/ou geométricos, surge a necessidade de se resolver sistemas de equações não-lineares, onde se deve, obrigatoriamente, utilizar algoritmos numéricos, pois a solução de tais sistemas só é possível com a aplicação de procedimentos incrementais e/ou iterativos.

Assim sendo, destacam-se, na seqüência, os principais processos numéricos relacionados com o assunto em questão, visando tornar o procedimento de resolução a ser utilizado no presente trabalho o mais abrangente possível.

3.3.1 - Processos iterativos

Para os casos em que a equação geral do movimento de um sistema estrutural resulte um sistema de equações não-lineares, um procedimento iterativo deve ser adotado visando encontrar a sua solução.

A primeira relação importante para descrever tal procedimento é dada pelo equilíbrio dinâmico ao longo de

cada intervalo de tempo " Δt ", representado pela equação (2.35).

Em uma primeira análise os valores de deslocamentos " D_k " são teoricamente estimados e, dessa forma, a equação (2.35) pode não ser totalmente satisfeita. Sendo assim, calcula-se, então, o "resíduo" provocado pelos deslocamentos estimados através de uma adaptação da equação (2.35), como segue:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)=\underset{\sim}{F}_E(t)-\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{\ddot{D}}_k-\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{\dot{D}}_k-\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{D}_k \quad (3.6)$$

sendo " $\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)$ " o referido resíduo das forças dinâmicas teoricamente não equilibradas em função dos deslocamentos previstos " $\underset{\sim}{D}_k$ ".

A condição de equilíbrio ao final do intervalo de tempo " $n\Delta t$ " é dada por:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k+\underset{\sim}{\Delta D}_k\right)=0 \quad (3.7)$$

onde " $\underset{\sim}{\Delta D}_k$ " é o acréscimo de deslocamentos que teoricamente ocorre durante o intervalo " $n\Delta t$ ".

Dessa forma, pode-se calcular o acréscimo de deslocamentos para o intervalo de tempo " $n\Delta t$ " de modo que a condição dada pela equação (3.7) seja satisfeita. A descrição detalhada desse procedimento será fornecida no item 3.4 desse trabalho.

3.3.2 - Processo incremental

O procedimento incremental consiste na aplicação gradual do carregamento externo no sistema estrutural, através de pequenas parcelas do carregamento total. Em geral, associa-se este procedimento a um processo iterativo.

3.4 - Método de Newmark para integração numérica ao longo do tempo

A idéia básica do método é dada pela previsão do valor das acelerações ao final do intervalo de tempo que se deseja conhecer. Com isso, aplicando-se as equações generalizadas de Newmark, pode-se prever, também, o valor dos deslocamentos e das acelerações ao final do mesmo intervalo de tempo.

Tal processo será descrito em detalhes nos próximos itens deste trabalho.

3.4.1 - Equacionamento básico

Expandindo-se a equação (3.7) pela relação de Taylor e desprezando-se os termos de ordem superior, obtém-se:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k + \underset{\sim}{\Delta D}_k\right) = \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right) + \frac{\underset{\sim}{\partial R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)}{\underset{\sim}{\partial D}_k} \underset{\sim}{\Delta D}_k = 0$$

ou simplesmente,

$$-\frac{\partial R\left(\underset{\sim}{D}_k\right)}{\partial \underset{\sim}{D}_k} \Delta \underset{\sim}{D}_k = R\left(\underset{\sim}{D}_k\right) \quad (3.8)$$

Derivando-se o resíduo, dado pela equação (3.6), em relação aos deslocamentos " $\underset{\sim}{D}_k$ ", obtém-se:

$$\frac{\partial R\left(\underset{\sim}{D}_k\right)}{\partial \underset{\sim}{D}_k} = \frac{\partial F_E(t)}{\partial \underset{\sim}{D}_k} - M \frac{\partial \ddot{\underset{\sim}{D}}_k}{\partial \underset{\sim}{D}_k} - C \frac{\partial \dot{\underset{\sim}{D}}_k}{\partial \underset{\sim}{D}_k} - K \frac{\partial \underset{\sim}{D}_k}{\partial \underset{\sim}{D}_k} \quad (3.9)$$

Como os esforços externos são dependentes apenas do tempo tem-se:

$$\frac{\partial F_E(t)}{\partial \underset{\sim}{D}_k} = 0 \quad (3.10)$$

Alterando-se apenas os índices das equações generalizadas de Newmark dadas pelas equações (3.5), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{D}}_k &= \dot{\underset{\sim}{D}}_{k-1} + (1-\gamma)\Delta t \ddot{\underset{\sim}{D}}_{k-1} + \gamma\Delta t \ddot{\underset{\sim}{D}}_k \\ \underset{\sim}{D}_k &= \underset{\sim}{D}_{k-1} + \Delta t \dot{\underset{\sim}{D}}_{k-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{\underset{\sim}{D}}_{k-1} + \beta\Delta t^2 \ddot{\underset{\sim}{D}}_k \end{aligned} \quad (3.11)$$

Derivando-se as equações (3.11) em relação a " \dot{D}_k " obtém-se:

$$\frac{\partial \dot{D}_k}{\partial \ddot{D}_k} \cong \gamma \Delta t \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial \ddot{D}_k} \cong \beta \Delta t^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \dot{D}_k}{\partial D_k} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \quad (3.13)$$

Já a derivada de " \dot{D}_k " em relação à " D_k " pode ser expressa pelo produto de duas derivadas, ou seja:

$$\frac{\partial \dot{D}_k}{\partial D_k} = \frac{\partial \dot{D}_k}{\partial \ddot{D}_k} \cdot \frac{\partial \ddot{D}_k}{\partial D_k} = \gamma \Delta t \frac{1}{\beta \Delta t^2} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \quad (3.14)$$

Substituindo-se as equações (3.10), (3.12) e (3.14) na equação (3.9) obtém-se:

$$\frac{\partial R(D_k)}{\partial D_k} = - \left\{ M \frac{1}{\beta \Delta t^2} + C \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + K \right\}$$

Dessa forma, substituindo-se a equação anterior na equação (3.8), obtém-se a equação que fornecerá o acréscimo teórico de deslocamentos " ΔD_k ", dada pela

equação (3.15), que será utilizado na correção dos deslocamentos que ocorrem ao longo de cada iteração.

$$\left\{ \underset{\sim}{M} \frac{1}{\underset{\sim}{\beta} \Delta t^2} + \underset{\sim}{C} \frac{\underset{\sim}{\gamma}}{\underset{\sim}{\beta} \Delta t} + \underset{\sim}{K} \right\} \Delta \underset{\sim}{D}_k = \underset{\sim}{R} \left(\underset{\sim}{D}_k \right) \quad (3.15)$$

3.5 - Algoritmo numérico para resolução do processo

O conhecimento prévio das condições iniciais do problema no instante "t=0", ou seja, os deslocamentos " $\underset{\sim}{D}_0$ " e velocidades " $\underset{\sim}{\dot{D}}_0$ " é o ponto de partida para dar início ao processo de integração. Com isso, pode-se obter as acelerações " $\underset{\sim}{\ddot{D}}_0$ " utilizando-se a equação de equilíbrio (2.35) da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\ddot{D}}_0 = \underset{\sim}{M}^{-1} \left\{ \underset{\sim}{F}_E(0) - \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\dot{D}}_0 - \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{D}_0 \right\}$$

Feito isso, deve-se, então, fazer uma previsão das acelerações, dos deslocamentos e das velocidades para o primeiro intervalo de tempo " $n\Delta t$ ", com " $k=n-1$ ", utilizando-se as equações generalizadas de Newmark como segue:

$$\underset{\sim}{\ddot{D}}_k = \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1}$$

$$\underset{\sim}{\dot{D}}_k = \underset{\sim}{\dot{D}}_{n-1} + (1-\underset{\sim}{\gamma}) \Delta t \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} + \underset{\sim}{\gamma} \Delta t \underset{\sim}{\ddot{D}}_k$$

$$\underset{\sim}{D}_k = \underset{\sim}{D}_{n-1} + \Delta t \underset{\sim}{\dot{D}}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \underset{\sim}{\beta} \right) \Delta t^2 \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} + \underset{\sim}{\beta} \Delta t^2 \underset{\sim}{\ddot{D}}_k$$

Com essa primeira aproximação calculam-se as forças inerciais, dissipativas, restauradoras e, conseqüentemente, o resíduo das forças dinâmicas não equilibradas através da equação (3.6). Em seguida calcula-se o acréscimo de deslocamentos por meio da equação (3.14).

Com o valor do acréscimo de deslocamentos " ΔD_k ", faz-se uma correção nos valores dos deslocamentos:

$$\underset{\sim}{D_k} \underset{\sim}{(corrigido)} = \underset{\sim}{D_k} + \underset{\sim}{\Delta D_k}$$

Com o auxílio da equação (3.14) pode-se fazer o cálculo do acréscimo da velocidade utilizando-se a seguinte equação:

$$\underset{\sim}{\dot{D}_k} \underset{\sim}{(corrigido)} = \underset{\sim}{\dot{D}_k} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underset{\sim}{\Delta D_k}$$

Já para correção das acelerações, com auxílio da equação (3.13), utiliza-se a seguinte equação:

$$\underset{\sim}{\ddot{D}_k} \underset{\sim}{(corrigido)} = \underset{\sim}{\ddot{D}_k} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underset{\sim}{\Delta D_k}$$

É importante salientar que o valor de cada intervalo de tempo " Δt " deverá permanecer constante ao longo de todo o processo de integração.

Apresenta-se na figura 3.1 um diagrama de blocos contendo apenas o equacionamento básico onde se pode

visualizar de forma global todos os passos descritos anteriormente.

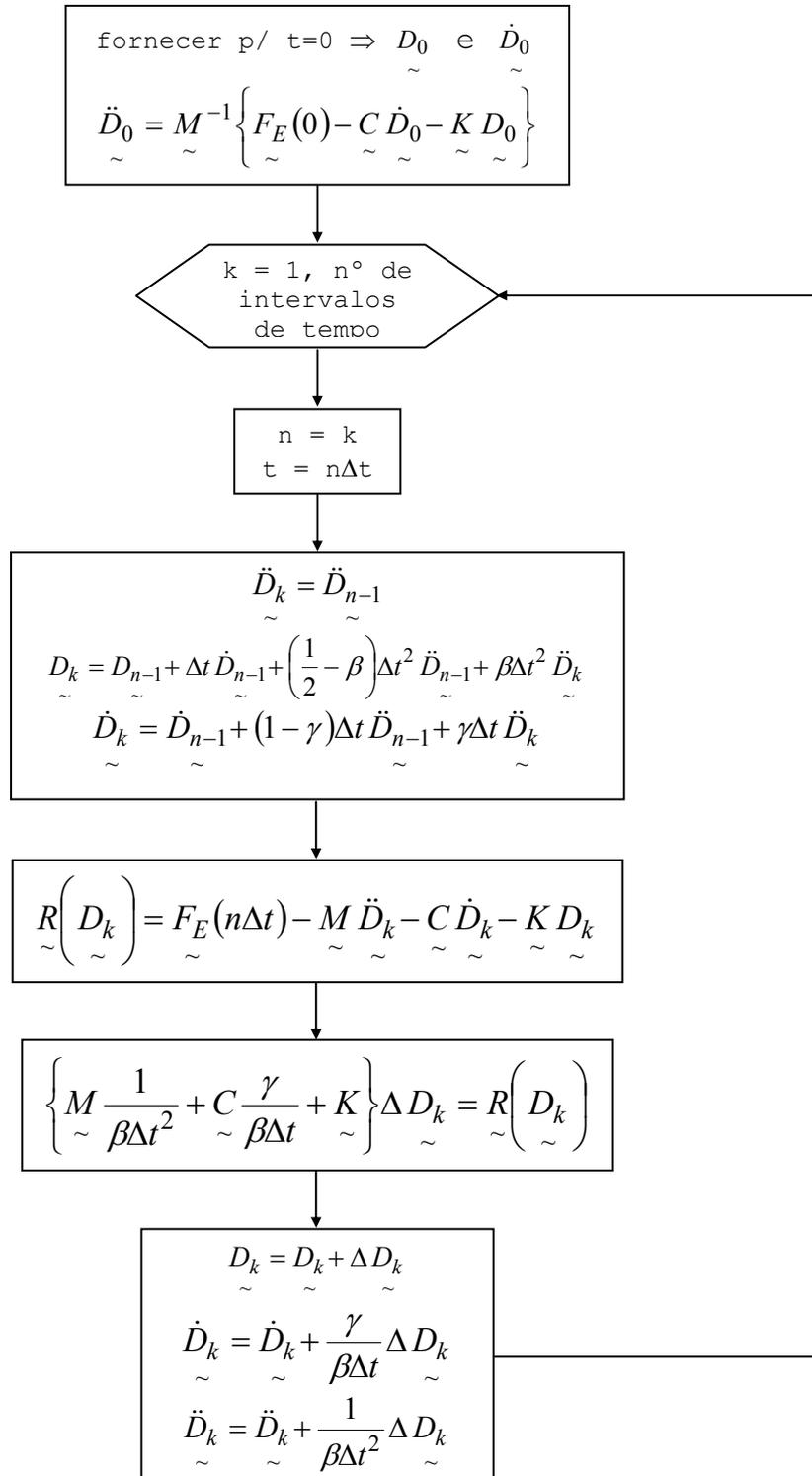


Figura 3.1 - Diagrama de blocos do método de Newmark.

Uma vez descrito todo o processo de integração da equação do movimento, é necessário que se faça, agora, a descrição das matrizes que são fundamentais para a realização do processo.

Dessa forma, a caracterização das matrizes de rigidez e massas será vista de acordo com cada elemento. Já a matriz de amortecimento será objeto de discussão do próximo item deste trabalho.

3.6 - Matriz de amortecimento

Em princípio a matriz de amortecimento elemental " \tilde{c} " pode ser obtida de forma análoga à matriz de massas elemental " \tilde{m} ", visto que a única diferença existente entre as equações (2.31) e (2.32) reside nos parâmetros que multiplicam o produto entre as funções de forma de cada elemento. O grande obstáculo está relacionado com a determinação da magnitude do parâmetro de amortecimento viscoso " μ " do material, sem o qual a matriz " \tilde{c} " fica indeterminada. Segundo Cook *et al.* (1989), tal procedimento é impraticável, pois as propriedades de amortecimento dos materiais não são suficientemente definidas para que se permita uma análise deste tipo.

Para contornar tal problemática utiliza-se neste trabalho, dentre os métodos existentes, o método de amortecimento modal, também conhecido como amortecimento Rayleigh, onde o amortecimento viscoso é introduzido por meio de frações específicas do amortecimento crítico, conforme será visto no item 3.6.1.

3.6.1 - Amortecimento Rayleigh

De acordo com Clough et al. (1975), o amortecimento Rayleigh é definido pela combinação linear entre as matrizes de rigidez e de massas, sendo dado por:

$$\underset{\sim}{C} = \lambda_m \underset{\sim}{M} + \lambda_k \underset{\sim}{K} \quad (3.16)$$

onde " λ_m " e " λ_k " são constantes da matriz de amortecimento e quantificam a proporção existente entre as matrizes de massas e de rigidez, respectivamente.

A relação entre as constantes de amortecimento " λ_m " e " λ_k ", considerando-se uma fração do amortecimento crítico " ξ " para uma dada frequência natural de vibração " ω ", é dada por (Cook et al., 1989):

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\lambda_k \omega_i + \frac{\lambda_m}{\omega_i} \right) \quad (3.17)$$

Dessa forma, as constantes de amortecimento podem ser determinadas utilizando-se frações do amortecimento crítico para duas diferentes frequências naturais de vibração, conforme ilustra o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_k \omega_1 + \frac{\lambda_m}{\omega_1} \right) \\ \xi_2 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_k \omega_2 + \frac{\lambda_m}{\omega_2} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Desenvolvendo-se o sistema (3.18) obtém-se:

$$\lambda_k = \frac{2(\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (3.19)$$

$$\lambda_m = \frac{2\omega_1 \omega_2 (\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}$$

Segundo Cook et al. (1989) os valores das frequências naturais são usualmente tomados da seguinte forma: para " ω_1 " adota-se a menor frequência natural de vibração da estrutura e para " ω_2 " adota-se uma frequência relacionada com o carregamento externo de maior importância. Brasil (1990) propõe utilizar para " ω_2 " a frequência subsequente à " ω_1 ".

Com relação às frações do amortecimento crítico, as mesmas são dadas em função do tipo de material e do tipo de sistema estrutural empregado, lembrando-se que o amortecimento crítico é dado pela relação " $\xi_i=1$ ". Portanto, para estruturas convencionais o valor de " ξ_i " é sempre menor que a unidade (amortecimento subcrítico), sendo que para estruturas de aço adota-se $0,5\% < \xi_i < 5,0\%$ e para estruturas de concreto adota-se $2,0\% < \xi_i < 15,0\%$ (Rodrigues, 1997).

3.6.2 - Frequências naturais de vibração

Dado um sistema estrutural com comportamento linear, livre de carregamentos externos dependentes do tempo e desprovido de qualquer tipo de mecanismo de amortecimento, pode-se particularizar a equação (2.35)

que rege o comportamento dinâmico estrutural da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{D}}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{0} \quad (3.20)$$

onde " $\underset{\sim}{0}$ " é o vetor nulo.

A solução analítica da equação (3.20) é dada pela equação (3.21), sendo que esta descreve um movimento harmônico de todos os pontos nodais do sistema.

$$\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{X}\text{sen}\omega t \quad (3.21)$$

Nesta equação, " $\underset{\sim}{X}$ " é um vetor, também chamado de autovetor, formado pelas máximas amplitudes dos deslocamentos nodais, e " ω " é um escalar que quantifica a frequência natural de vibração da estrutura.

Os valores de " ω " para diferentes modos de vibração devem ser determinados uma vez que, conforme o item 2.6.4, são necessários para a obtenção da matriz de amortecimento do sistema estrutural.

Sendo assim, substituindo-se a solução dada pela equação (3.21) na equação de vibração livre sem amortecimento (3.20) tem-se:

$$\left(\underset{\sim}{-M}\underset{\sim}{X}\omega^2+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{X}\right)\text{sen}\omega t=\underset{\sim}{0}$$

Para que tal produto seja nulo, uma vez que a parcela "sen ωt " pode assumir qualquer valor, é necessário que seja mantida a seguinte igualdade:

$$\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X} \omega^2 = \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{X} \quad (3.22)$$

Multiplicando-se ambos os membros por " $\underset{\sim}{K}^{-1}$ ", obtém-se:

$$\left(\underset{\sim}{K}^{-1} \underset{\sim}{M} \right) \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{\Lambda} \quad (3.23)$$

onde " $\underset{\sim}{\Lambda}$ " é o autovalor dado por:

$$\underset{\sim}{\Lambda} = \frac{1}{\omega^2} \quad (3.24)$$

De acordo com Grad *et al.* citado por Rodrigues (1997), para a obtenção dos autovetores " $\underset{\sim}{X}$ " e do autovalor " $\underset{\sim}{\Lambda}$ " empregando-se a equação (3.23), pode-se utilizar o método de Householder, visto que o produto " $\underset{\sim}{K}^{-1} \underset{\sim}{M}$ " resulta em uma matriz não simétrica.

Aplicando-se a decomposição de Cholesky na matriz " $\underset{\sim}{K}$ ", tem-se:

$$\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{L} \quad (3.25)$$

onde " $\underset{\sim}{L}$ " é uma matriz triangular superior não singular.

Utilizando-se a matriz " L " para transformar os autovetores tem-se:

$$\bar{X} = L X \tag{3.26}$$

ou

$$X = L^{-1} \bar{X} \tag{3.27}$$

Multiplicando-se a equação (3.22) por " $[L^T]^{-1}$ " e utilizando-se as equações (3.24) e (3.27) obtém-se:

$$[L^T]^{-1} M L^{-1} \bar{X} = [L^T]^{-1} K L^{-1} \bar{X} \Lambda \tag{3.28}$$

Substituindo-se a equação (3.25) na equação anterior, obtém-se:

$$[L^T]^{-1} M L^{-1} \bar{X} = \bar{X} \Lambda \tag{3.29}$$

Segundo Bathe (1996), o produto " $[L^T]^{-1} M L^{-1}$ " resulta uma matriz simétrica, permitindo-se a utilização do método de Jacobi que é indicado para a obtenção dos autovalores e autovetores de tal matriz.

Uma vez obtido cada um dos autovalores " Λ ", pode-se calcular as frequências naturais circular de vibração da estrutura através da equação(3.30)

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\Lambda_i}} \quad (3.30)$$

sendo as frequências naturais circulares de vibração " ω_i ", dadas em rad/s, relacionadas com as frequências naturais de vibração " f_i ", dadas em Hz, através da equação (3.31).

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (3.31)$$

CAPÍTULO 4 - TEORIA CLÁSSICA PARA FLEXÃO DE PLACAS

4.1 - Generalidades

Placas são elementos estruturais simétricos em relação a um plano médio, cuja dimensão normal a esse plano, chamada espessura, é pequena em relação às demais. As placas têm a particularidade de serem solicitadas por esforços externos normais ao plano médio, conforme Martinelli *et al.* (1986).

As placas podem ser classificadas com base na relação " t/a ", onde " t " é a espessura e " a " é o menor dos vãos da placa.

Neste trabalho trabalhar-se-á com a teoria clássica (ou teoria de Kirchhoff) aplicável no estudo da flexão de placas delgadas usuais que, segundo Martinelli *et al.* (1986), apresentam relação " t/a " da ordem de $1/5$ a $1/100$. Como exemplo de placas delgadas usuais citam-se as lajes de pontes, as lajes de edifícios e obras especiais como lajes de barragens.

4.2 - Hipóteses

Segundo Martinelli *et al.* (1986), as hipóteses admitidas na teoria clássica para flexão de placas são:

- material elástico seguindo a lei de Hooke;
- pequena espessura da placa;
- pequenas deformações e deslocamentos;

- deslocamentos horizontais desprezíveis dos pontos do plano médio;
- retas normais ao plano médio da placa permanecem normais a esse plano após a deformação (Hipótese de Navier);
- tensão " σ_z " (tensão normal ao plano da placa) desprezível quando comparada aos valores de " σ_x " e " σ_y ".

4.3 - Deslocamentos e deformações

A figura 4.1 ilustra o deslocamento de um ponto situado sobre uma normal ao plano médio da placa e distante de " z " desse plano.

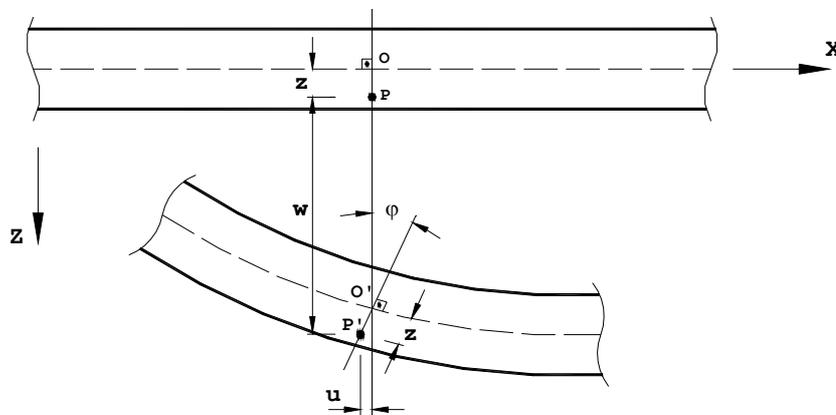


Figura 4.1 - Deslocamento de um ponto situado sobre uma normal ao plano médio da placa.

Pela teoria clássica de flexão de placas tem-se que pontos situados na superfície média ($z=0$) movem-se apenas na direção " z " quando a placa se deforma. Uma linha reta perpendicular à superfície média antes do carregamento permanece reta e perpendicular à mesma após o carregamento (linha $OP - O'P'$).

Um ponto "P" situado a uma distância "z" da superfície média possui deslocamentos "u" e "v" nas direções "x" e "y", respectivamente. Admitindo-se que o deslocamento "w" seja função de "x" e "y", pela figura 4.1 tem-se:

$$u = -z \cdot \operatorname{tg} \varphi = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

Analogamente,

$$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

Para o estado de tensões em questão, as equações (2.16) ficam reduzidas a:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Dessa forma pode-se escrever:

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

4.4 - Tensões e esforços solicitantes

A figura 4.2 ilustra as tensões atuantes em uma placa de espessura " t " e de dimensões " dx " e " dy " sujeita a um carregamento dinâmico " q " uniformemente distribuído em toda a área.

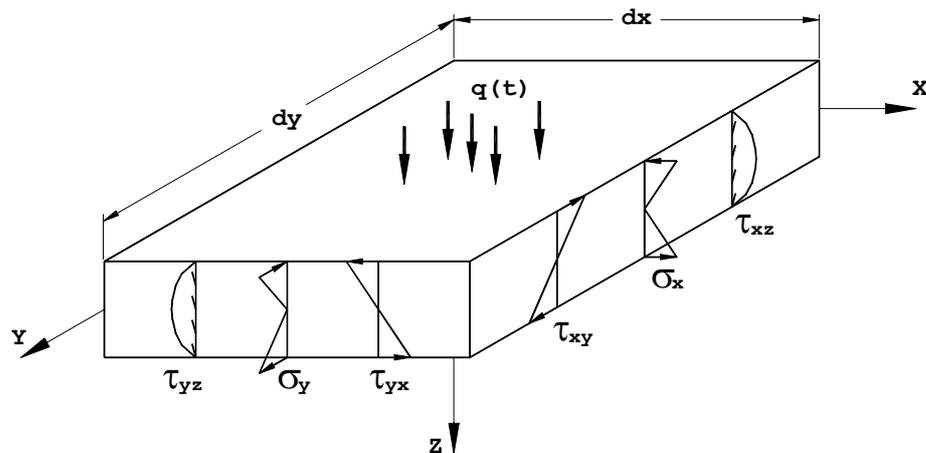


Figura 4.2 - Tensões e esforços atuantes em uma placa plana.

As tensões normais " σ_x " e " σ_y " variam linearmente em " z ", dando origem aos momentos " M_x " e " M_y ", respectivamente. A tensão tangencial " τ_{xy} " também varia linearmente em " z ", dando origem ao momento torçor " M_{xy} ". Tais tensões, " σ_x ", " σ_y " e " τ_{xy} ", assumem valores iguais a zero na superfície média da placa. A tensão normal " σ_z " é considerada desprezível em comparação com " σ_x ", " σ_y " e " τ_{xy} ". Já as tensões tangenciais " τ_{yz} " e " τ_{zx} " variam de forma quadrática em " z " e são usualmente pequenas quando comparadas com " σ_x ", " σ_y " e " τ_{xy} ".

A figura 4.3 ilustra os sentidos das tensões atuantes na borda superior e borda inferior de um elemento da placa plana.

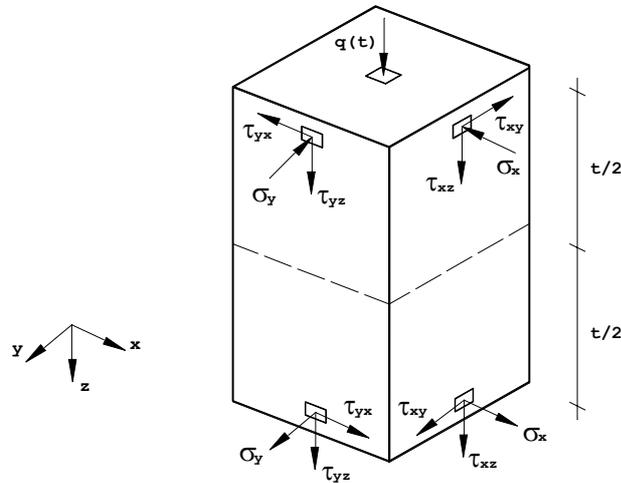


Figura 4.3 - Tensões atuantes em um elemento da placa.

Dessa forma, os esforços solicitantes por unidade de comprimento podem ser definidos como sendo:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz \\
 M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz \\
 M_{xy} &= - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \\
 M_{yx} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} \cdot z \cdot dz
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

As figuras (4.4) e (4.5) ilustram os sentidos positivos dos momentos e esforços cortantes atuando no plano médio da placa, bem como seus incrementos.

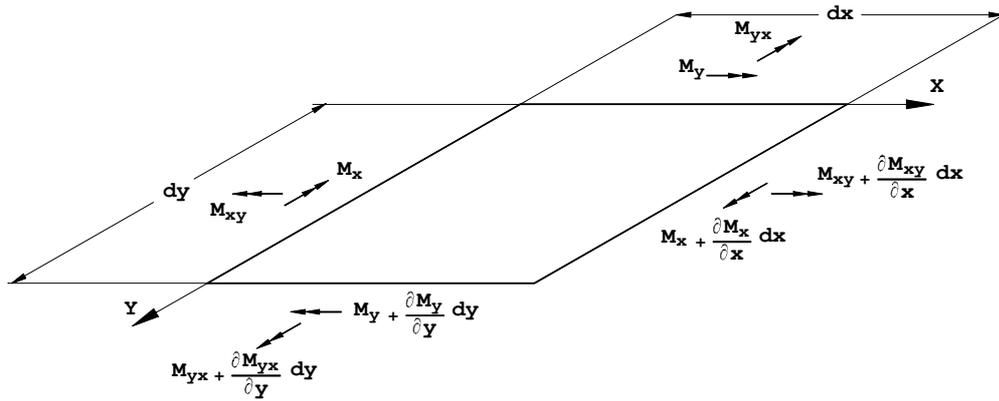


Figura 4.4 - Momentos atuando sobre o plano médio de um elemento de placa.

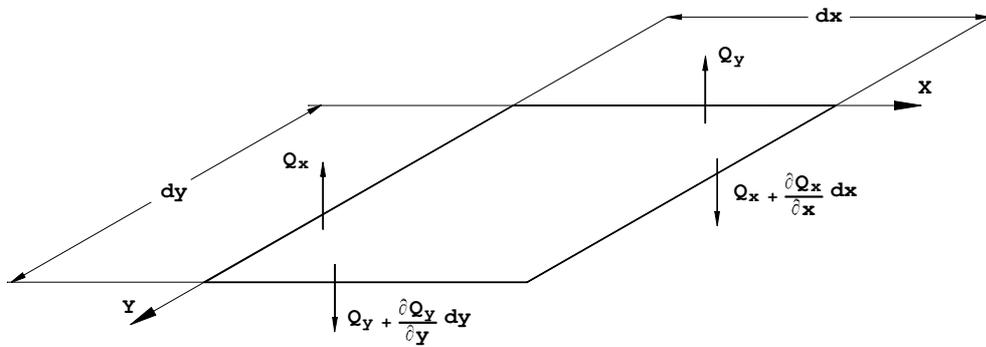


Figura 4.5 - Esforços cortantes atuando sobre o plano médio de um elemento de placa.

Conforme visto no item (2.4.6) e para o estado plano de tensões em questão, as relações tensão-deformação para um material elástico linear podem ser escritas como:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

Dessa forma obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E \cdot z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{E \cdot z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{E \cdot z}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\tag{4.3}$$

Substituindo as equações (4.3) em (4.2) obtém-se:

$$\begin{aligned}M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ M_{yx} &= -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\tag{4.4}$$

onde

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}$$

4.5 - Equilíbrio de um elemento de placa

Observando-se as figuras (4.4) e (4.5) e desprezando-se os termos de ordem superior, podem-se obter as relações de equilíbrio entre os esforços solicitantes que seguem.

⇒ Equilíbrio das forças na direção "z":

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot dx\right) dy + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot dy\right) dx + q \cdot dx \cdot dy = \rho \cdot t \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

ou

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho \cdot t \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q \quad (4.5)$$

⇒ Equilíbrio de momentos em torno do eixo "x":

$$-\left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \cdot dy\right) dx + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cdot dx\right) dy + Q_y \cdot dx \cdot dy = 0$$

ou

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (4.6)$$

⇒ Equilíbrio de momentos em torno do eixo "y":

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \cdot dx\right) dy + \left(\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \cdot dy\right) dx - Q_x \cdot dy \cdot dx = 0$$

ou

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad (4.7)$$

Substituindo-se as equações (4.7) e (4.6) em (4.5) tem-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q \quad (4.8)$$

Substituindo-se (4.4) em (4.8) tem-se, por fim, a equação diferencial do movimento das placas.

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + 2D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{I}{D} \left(q - \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (4.9)$$

4.6 - Condições de contorno

4.6.1 - Borda simplesmente apoiada

Considerando-se uma placa retangular simplesmente apoiada ao longo de uma borda paralela ao eixo "y", sem momento externo aplicado, onde $x=a$, os momentos fletores " M_x " e os deslocamentos serão nulos ao longo de toda a borda. Assim, em $x=a$:

$$w=0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

ou simplesmente

$$w=0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

4.6.2 - Borda engastada

Para o caso onde a borda paralela ao eixo "y", em $x=a$, é engastada, o deslocamento "w" e o giro são nulos. Assim, em $x=a$:

$$w=0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

e a reação " r_x " se reduz a

$$r_x = Q_x$$

4.6.3 - Borda livre

Se a borda da placa em $x=a$ estiver livre e sem carregamento externo, é natural assumir que ao longo desta borda não há momentos fletores, momentos torçores e também esforços cortantes. Assim:

$$M_x = 0 \quad ; \quad M_{xy} = 0 \quad ; \quad Q_x = 0$$

Segundo Timoshenko & Woinowsky-Kriger (1959) apenas duas condições de contorno são necessárias para a

completa determinação de "w" através da equação (4.9). Sendo assim, o momento torçor " M_{xy} " pode ser associado ao esforço cortante " Q_x " como segue:

$$Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$$

Assim sendo, tem-se que:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

e da condição de momento " $M_x=0$ ":

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

CAPÍTULO 5 - ELEMENTO FINITO RETANGULAR

5.1 - Relação geral entre coordenadas

Considere-se inicialmente o elemento finito representado na figura 5.1.

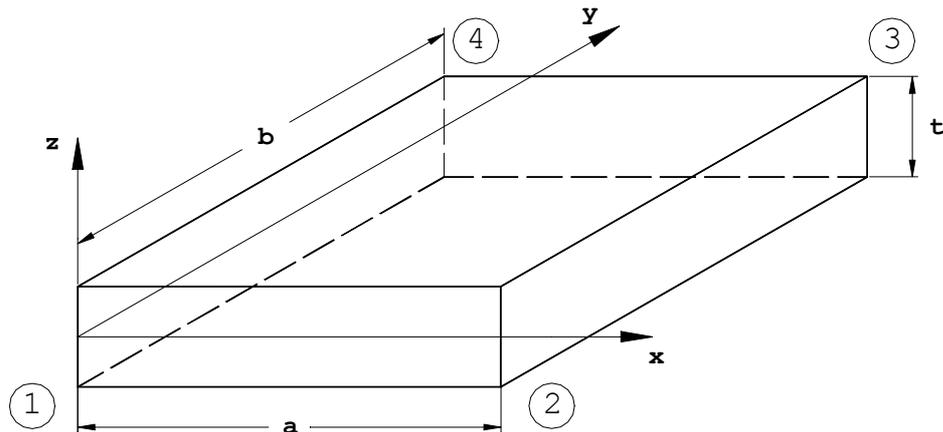


Figura 5.1 - Elemento finito retangular.

O elemento é composto por quatro nós, apresentando em cada nó três graus de liberdade, sendo duas rotações e uma translação. A translação é denotada por " w " na direção " z ", a rotação em torno do eixo " x " é denotada por " θ_x " e sobre o eixo " y " por " θ_y ". A direção positiva destas rotações é dada pela regra da mão direita. A figura 5.2 ilustra os graus de liberdade.

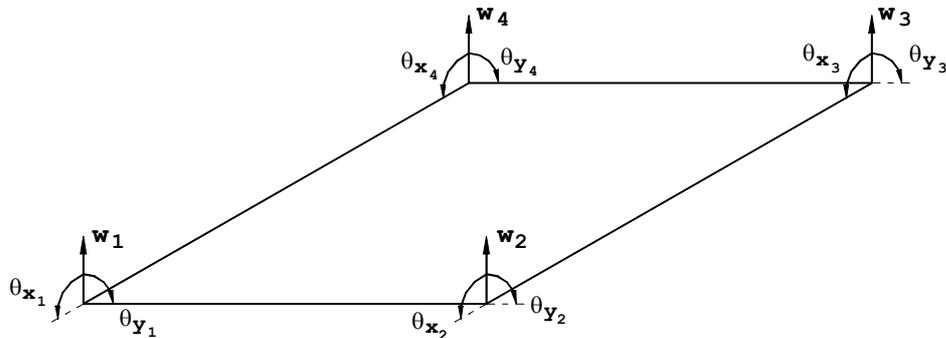


Figura 5.2 - Graus de liberdade.

Considere-se, agora, um sistema de coordenadas cartesianas “(ξ,η)” adimensionais com origem no vértice 1 do retângulo, conforme ilustra a figura 5.3.

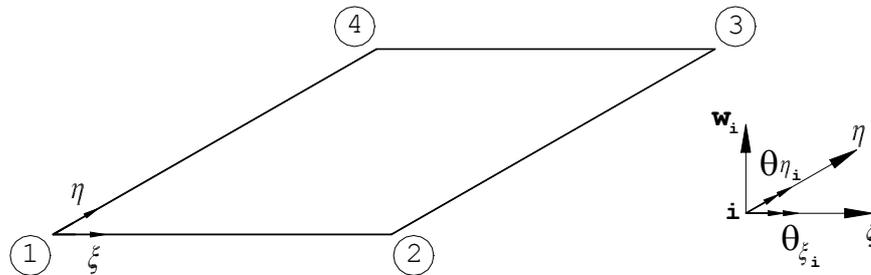


Figura 3.3 - Sistema de coordenadas adimensionais

Dessa forma, as coordenadas adimensionais podem ser definidas como sendo:

$$\xi = \frac{x}{a} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{b}$$

5.2 - Funções de forma

De acordo com o triângulo de Pascal e adotando-se uma variação quadrática, obtém-se a função interpoladora na sua forma explícita:

$$w(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^3$$

Na forma matricial:

$$\begin{matrix} w \\ \sim \\ \sim \\ \sim \end{matrix} = \begin{matrix} \psi \\ \sim \\ \sim \\ \sim \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \alpha \\ \sim \\ \sim \\ \sim \end{matrix} \tag{5.1}$$

onde

$$\underset{\sim}{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\alpha}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12}]$$

As rotações em torno dos eixos "auxiliares" "(ξ,η)" são dadas por:

$$\theta_{\xi}(\xi,\eta) = \frac{\partial w(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \alpha_2 + \alpha_4 \xi + 2\alpha_5 \eta + \alpha_7 \xi^2 + 2\alpha_8 \xi \eta + 3\alpha_9 \eta^2 + \alpha_{10} \xi^3 + 3\alpha_{11} \xi \eta^2$$

$$\theta_{\eta}(\xi,\eta) = \frac{\partial w(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \alpha_1 + 2\alpha_3 \xi + \alpha_4 \eta + 3\alpha_6 \xi^2 + 2\alpha_7 \xi \eta + \alpha_8 \eta^2 + 3\alpha_{10} \xi^2 \eta + \alpha_{11} \eta^3$$

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_{\xi} \\ \theta_{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 2\eta & 0 & \xi^2 & 2\xi\eta & 3\eta^2 & \xi^3 & 3\xi\eta^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2\xi & \eta & 0 & 3\xi^2 & 2\xi\eta & \eta^2 & 0 & 3\xi^2\eta & \eta^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

ou

$$\underset{\sim}{\delta} = \underset{\sim}{\varphi} \cdot \underset{\sim}{\alpha}$$

Substituindo-se os valores das coordenadas nodais na equação (5.2), tem-se:

⇒ para o nó 1, com " $\xi=\eta=0$ ":

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⇒ para o nó 2, com " $\xi=1$ " e " $\eta=0$ ":

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sim & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⇒ para o nó 3, com " $\xi=\eta=1$ ":

$$\varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ \sim & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

⇒ para o nó 4, com " $\xi=0$ " e " $\eta=1$ ":

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \sim & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{\xi_1} \\ \theta_{\eta_1} \\ w_2 \\ \theta_{\xi_2} \\ \theta_{\eta_2} \\ w_3 \\ \theta_{\xi_3} \\ \theta_{\eta_3} \\ w_4 \\ \theta_{\xi_4} \\ \theta_{\eta_4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{Bmatrix}$$

ou

$$\underset{\sim}{\delta} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{\alpha}$$

Invertendo-se a matriz "A":

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & -3 & -2 & 0 & 3 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{b} \theta_\xi$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{a} \theta_\eta$$

pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{\xi_1} \\ \theta_{\eta_1} \\ w_2 \\ \theta_{\xi_2} \\ \theta_{\eta_2} \\ w_3 \\ \theta_{\xi_3} \\ \theta_{\eta_3} \\ w_4 \\ \theta_{\xi_4} \\ \theta_{\eta_4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ w_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ w_3 \\ \theta_{x_3} \\ \theta_{y_3} \\ w_4 \\ \theta_{x_4} \\ \theta_{y_4} \end{Bmatrix}$$

ou

$$\underset{\sim}{\delta} = \underset{\sim}{z} \cdot \underset{\sim}{d}$$

Como

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{A}^{-1} \cdot \underset{\sim}{\delta}$$

tem-se:

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{A}^{-1} \cdot \underset{\sim}{z} \cdot \underset{\sim}{d}$$

Voltando em (5.1):

$$\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{\psi} \cdot \underset{\sim}{\alpha}$$

$$\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{\psi} \cdot \underset{\sim}{A}^{-1} \cdot \underset{\sim}{z} \cdot \underset{\sim}{d}$$

Finalmente:

$$\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{\phi} \cdot \underset{\sim}{d}$$

As doze funções contidas em " $\underset{\sim}{\phi}$ " são descritas a seguir:

$$\underset{\sim}{\phi}(\xi, \eta) = [\underset{\sim}{\phi}_1 \quad \underset{\sim}{\phi}_2 \quad \underset{\sim}{\phi}_3 \quad \underset{\sim}{\phi}_4 \quad \underset{\sim}{\phi}_5 \quad \underset{\sim}{\phi}_6 \quad \underset{\sim}{\phi}_7 \quad \underset{\sim}{\phi}_8 \quad \underset{\sim}{\phi}_9 \quad \underset{\sim}{\phi}_{10} \quad \underset{\sim}{\phi}_{11} \quad \underset{\sim}{\phi}_{12}]$$

sendo

$$\underset{\sim}{\phi}_1 = 2(\eta-1)(\xi-1) \left[\frac{1}{2}(1+\xi+\eta) - \xi^2 - \eta^2 \right]$$

$$\underset{\sim}{\phi}_2 = -b(\eta-1)^2(\xi-1)\eta$$

$$\underset{\sim}{\phi}_3 = -a(\eta-1)(\xi-1)^2\xi$$

$$\phi_4 = 2(\eta-1)\xi \left(\eta^2 + \xi^2 - \frac{3}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta \right)$$

$$\phi_5 = b(\eta-1)^2 \xi \eta$$

$$\phi_6 = -a(\eta-1)\xi^2(\xi-1)$$

$$\phi_7 = 2\xi\eta \left[-\eta^2 - \xi^2 + \frac{3}{2}(\xi+\eta) - \frac{1}{2} \right]$$

$$\phi_8 = b \cdot \eta^2 \xi (\eta-1)$$

$$\phi_9 = a \cdot \eta \xi^2 (\xi-1)$$

$$\phi_{10} = 2\eta(\xi-1) \left[\eta^2 + \xi^2 - \frac{1}{2}\xi - \frac{3}{2}\eta \right]$$

$$\phi_{11} = -b\eta^2(\xi-1)(\eta-1)$$

$$\phi_{12} = a\eta\xi(\xi-1)^2$$

5.3 - Matriz de rigidez

De acordo com a equação (2.33), a matriz de rigidez é dada por:

$$k = \int_{V_e} B^T E B dV_e$$

Tendo em vista a teoria clássica para flexão de placas, tem-se:

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad \varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad ; \quad \gamma_{xy} = -2z \cdot \frac{\partial w}{\partial x \partial y}$$

Assim, de acordo com a equação (2.23):

$$\begin{matrix} \varepsilon = L \cdot u \\ \sim \quad \sim \quad \sim \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \cdot [w]$$

Em termos adimensionais:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \cdot [w]$$

Assim o vetor "L", descrito pela equação (2.24), fica reduzido a:

$$\begin{matrix} L \\ \sim \end{matrix} = -z \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix}$$

ou, simplesmente,

$$\underset{\sim}{L} = -\underset{\sim}{z} \cdot \underset{\sim}{l}$$

Substituindo-se na equação (2.33) tem-se:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{k} &= \int_{V_e} -\underset{\sim}{z} \cdot \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right)^T \cdot \underset{\sim}{E} \cdot (-\underset{\sim}{z}) \cdot \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right) \cdot dV_e \\ \underset{\sim}{k} &= \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \underset{\sim}{z}^2 \cdot \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right)^T \cdot \underset{\sim}{E} \cdot \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right) \cdot dz \cdot dA \\ \underset{\sim}{k} &= \frac{t^3}{12} \int_A \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right)^T \cdot \underset{\sim}{E} \cdot \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right) \cdot dA \end{aligned}$$

Dessa forma, pode-se escrever:

$$\underset{\sim}{k} = \frac{t^3}{12} \cdot \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right)^T \cdot \underset{\sim}{E} \cdot \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right) \cdot d\xi \cdot d\eta \tag{5.3}$$

Para o caso particular das placas para o estado de tensões em questão, a matriz "E" representada pela equação (2.22), fica reduzida a:

$$\underset{\sim}{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

onde

$$\mu = \frac{1-\nu}{2}$$

Partindo-se, então, da equação (5.3) chega-se à forma explícita da matriz de rigidez.

$$k = \frac{I}{60ab} \cdot D \cdot X \cdot \left\{ \begin{matrix} k_1 + k_2 + \nu \cdot k_3 + \mu \cdot k_4 \\ \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \end{matrix} \right\} \cdot X \quad (5.4)$$

onde

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

$$X = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & z & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & z & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 0 & z \\ \sim & \sim & \sim & \sim \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$k_1 = p^{-2} \cdot \left[\begin{array}{cccccccccccc} 240 & & & & & & & & & & & \text{Sim.} \\ 0 & 0 & & & & & & & & & & \\ 120 & 0 & 80 & & & & & & & & & \\ -240 & 0 & -120 & 240 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 120 & 0 & 40 & -120 & 0 & 80 & & & & & & \\ -120 & 0 & -60 & 120 & 0 & -60 & 240 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 60 & 0 & 20 & -60 & 0 & 40 & -120 & 0 & 80 & & & \\ 120 & 0 & 60 & -120 & 0 & 60 & -240 & 0 & 120 & 240 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 60 & 0 & 40 & -60 & 0 & 20 & -120 & 0 & 40 & 120 & 0 & 80 \end{array} \right]$$

sendo

$$p^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 ; p^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

5.4 - Matriz de massas

A matriz de massas, de acordo com a equação (2.31), é definida por:

$$m = \int_{V_e} \rho \phi^T \phi dV_e$$

mas

$$dV_e = t \cdot dA$$

onde "t" é a espessura da placa.

Assim:

$$m = \rho \cdot t \int_{A_e} \phi^T \cdot \phi \cdot dA$$

Em termos das coordenadas cartesianas adimensionais "(ξ,η)", a matriz de massas é dada por:

$$k = \rho \cdot t \cdot a \cdot b \int_0^1 \int_0^1 \phi^T \cdot \phi \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.5)$$

CAPÍTULO 6 - ELEMENTO FINITO TRIANGULAR

6.1 - Relação geral entre coordenadas

Considere-se, inicialmente, o elemento finito representado na figura 6.1.

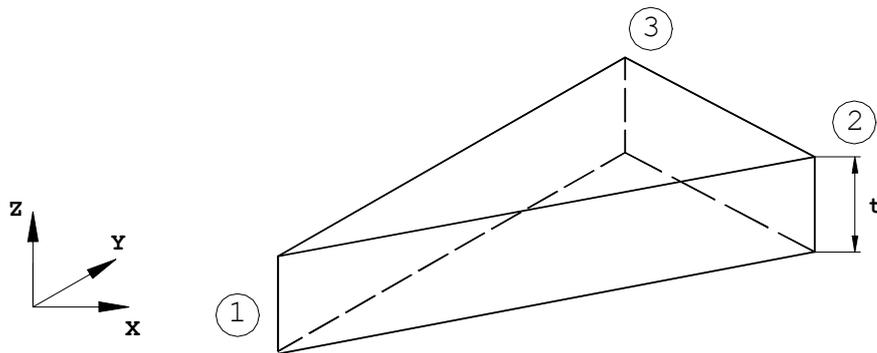


Figura 6.1 - Elemento finito triangular.

O elemento é composto por três nós, com três graus de liberdade por nó, sendo duas rotações e uma translação. A translação é denotada por " w " na direção " z ", a rotação em torno do eixo " x " é denotada por " θ_x " e sobre o eixo " y " por " θ_y ". A direção positiva destas rotações é dada pela regra da mão direita. A figura 6.2 ilustra os graus de liberdade.

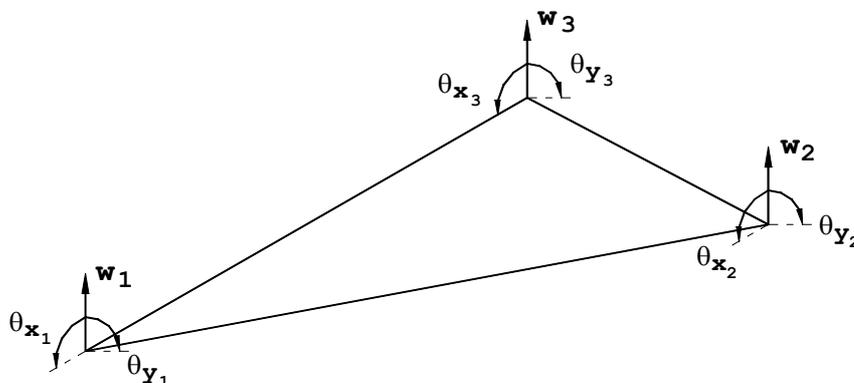


Figura 6.2 - Graus de liberdade.

A formulação do elemento triangular, como será vista adiante, torna-se possível e de maneira mais simplificada quando se utiliza um sistema de coordenadas homogêneas. Sendo assim, considere-se o elemento apresentado na figura a seguir:

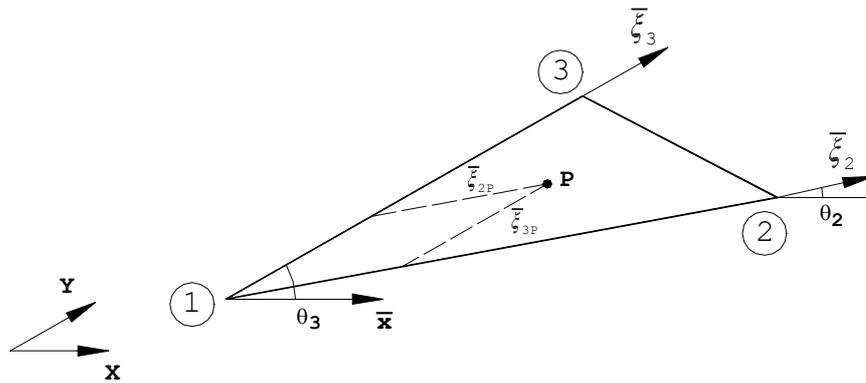


Figura 6.3 - Sistemas de coordenadas

Sendo esse triângulo referido ao sistema cartesiano "x" e "y", adota-se um sistema de coordenadas oblíquas " $(\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ " com origem no vértice 1 e um eixo auxiliar " \bar{x} " também com origem no vértice 1 e paralelo a "x".

Considerando-se um ponto "P" qualquer, a posição deste em relação ao vértice 1 será dado por " $\bar{\xi}_{2P}, \bar{\xi}_{3P}$ ".

A soma das projeções dessas coordenadas sobre " \bar{x} " resultará:

$$\bar{x}_P = \bar{\xi}_{2P} \cos \theta_2 + \bar{\xi}_{3P} \cos \theta_3$$

Definam-se as seguintes coordenadas adimensionais:

$$\xi_2 = \frac{\bar{\xi}_2}{l_{12}} \quad \text{e} \quad \xi_3 = \frac{\bar{\xi}_3}{l_{13}}$$

com " l_{12} " e " l_{13} " iguais aos comprimentos dos lados 12 e 13 respectivamente.

Para o ponto "P" tem-se:

$$\bar{\xi}_{2P} = \xi_{2P} l_{12} \quad \text{e} \quad \bar{\xi}_{3P} = \xi_{3P} l_{13}$$

Introduzindo-se na expressão de " \bar{x}_P ":

$$\begin{aligned} \bar{x}_P &= \xi_{2P} l_{12} \cos \theta_2 + \xi_{3P} l_{13} \cos \theta_3 \\ \bar{x}_P &= \xi_{2P} (x_2 - x_1) + \xi_{3P} (x_3 - x_1) \end{aligned}$$

Uma vez que "P" é um ponto genérico, pode-se dizer que para qualquer ponto:

$$x = x_1 + \xi_2 (x_2 - x_1) + \xi_3 (x_3 - x_1)$$

Além do sistema oblíquo já usado, com vértice no nó 1, poderia ser usado um outro sistema alternativo com vértice no nó 2, como mostra a figura 6.4.

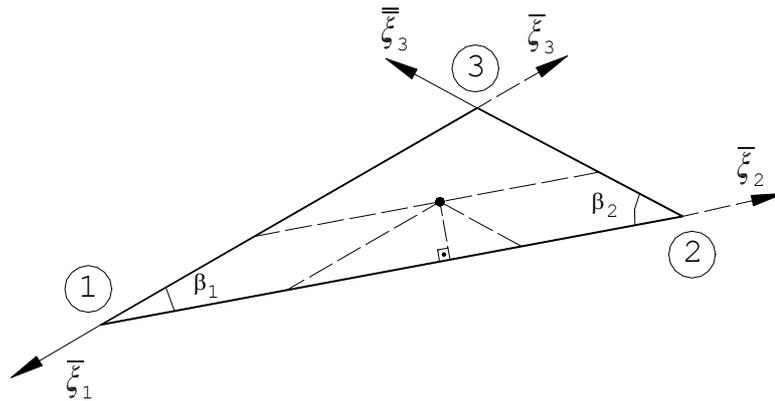


Figura 6.4 - Sistemas de coordenadas oblíquas.

Definam-se as coordenadas adimensionais:

$$\xi_3 = \frac{\bar{\xi}_3}{l_{23}} \quad \text{e} \quad \xi_1 = \frac{\bar{\xi}_1}{l_{12}}$$

Pode-se escrever com base na geometria, segundo a figura 6.4:

$$\begin{aligned}
 l_{12} &= \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_3 \cos \beta_1 + \bar{\xi}_3 \cos \beta_2 \\
 l &= \frac{\bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_3 \cos \beta_1 + \bar{\xi}_3 \cos \beta_2}{l_{12}} \\
 l &= \xi_2 + \xi_1 + \frac{l_{13}}{l_{12}} \xi_3 \cos \beta_1 + \frac{l_{23}}{l_{12}} \xi_3 \cos \beta_2 \\
 l &= \xi_1 + \xi_2 + \frac{\xi_3}{l_{12}} (l_{13} \cos \beta_1 + l_{23} \cos \beta_2) \\
 l &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Substituindo (6.1) na expressão de "x":

$$\begin{aligned}
 x &= x_1(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \xi_2(x_2 - x_1) + \xi_3(x_3 - x_1) \\
 x &= x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

De modo análogo pode-se mostrar que:

$$y = y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 \tag{6.3}$$

Agrupando-se os resultados obtidos na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} l \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}$$

que invertendo:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = T^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

Assim, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

onde "A" é a área do triângulo que pode ser calculada por:

$$\text{Det } T = (x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_2) = 2A$$

Chamando-se

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ m_i = y_j - y_k \\ n_i = x_k - x_j \end{cases}$$

com os índices variando ciclicamente, ou seja:

$$\begin{cases} P/i=1 \rightarrow j=2, k=3 \\ P/i=2 \rightarrow j=3, k=1 \\ P/i=3 \rightarrow j=1, k=2 \end{cases}$$

chega-se à relação geral:

$$\xi_i = \frac{1}{2A}(a_i + m_i x + n_i y) \tag{6.4}$$

Os valores das coordenadas nos nós e ao longo dos lados do elemento assumem os valores ilustrados na figura 6.5.

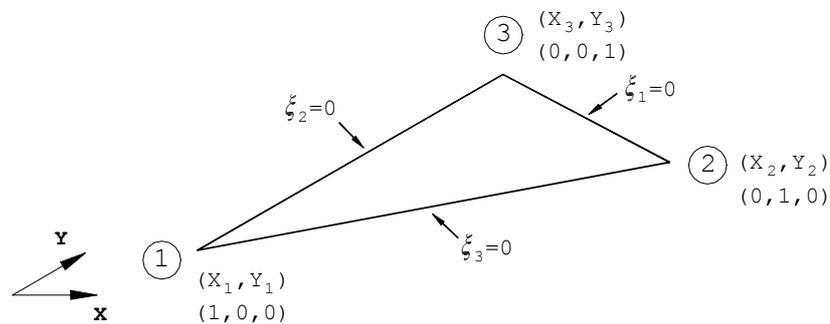


Figura 6.5 - Coordenadas dos pontos nodais.

6.2 - Funções de forma

Segundo Venâncio Filho (1975a), o campo de deslocamentos para o elemento em questão é representado pelo polinômio algébrico em "x" e "y", sendo dado por:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \end{bmatrix} \{ \alpha \}$$

onde "{α}" possui dez elementos.

Como o elemento possui apenas 9 graus de liberdade, um dos termos entre " x^2y " e " xy^2 " deveria ser eliminado, fato este que levaria a perda de simetria do polinômio.

Tocher, citado por Venâncio Filho (1975a), propôs combinar os termos " x^2y " e " xy^2 " em um único termo " (x^2y+xy^2) ", mas neste caso o desenvolvimento do elemento ficaria comprometido quando os eixos " x " e " y " coincidissem com os lados do elemento. Utilizando -se coordenadas homogêneas esse problema desaparece.

Holand & Bell, também citado por Venâncio Filho (1975a), usaram o seguinte campo de deslocamentos para " w " em coordenadas homogêneas:

$$w = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_1\xi_2 & \xi_2\xi_3 & \xi_3\xi_1 \\ (\xi_1\xi_2^2 - \xi_1^2\xi_2) & (\xi_2\xi_3^2 - \xi_2^2\xi_3) & (\xi_3\xi_1^2 - \xi_3^2\xi_1) \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (6.5)$$

onde " $\{\alpha\}$ " possui nove elementos.

A função de deslocamento da equação acima corresponde a um polinômio incompleto de 3º grau em coordenadas homogêneas " ξ_1 ", " ξ_2 ", " ξ_3 ". O termo ausente é " $\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3$ ", o qual corresponde a deslocamentos nulos nos lados do elemento, sendo, conseqüentemente, associado ao deslocamento de um nó interno.

Sendo assim, partindo-se da equação (6.5) pode-se escrever:

$$w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha_0\xi_1 + \alpha_1\xi_2 + \alpha_2\xi_3 + \alpha_3\xi_1\xi_2 + \alpha_4\xi_2\xi_3 + \alpha_5\xi_1\xi_3 \\ + \alpha_6(\xi_1\xi_2^2 - \xi_1^2\xi_2) + \alpha_7(\xi_2\xi_3^2 - \xi_2^2\xi_3) + \alpha_8(\xi_3\xi_1^2 - \xi_3^2\xi_1)$$

Na forma matricial:

$$\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{\psi} \cdot \underset{\sim}{\alpha} \tag{6.6}$$

onde

$$\underset{\sim}{\psi} = \left[\underset{\sim}{\xi}_1 \quad \underset{\sim}{\xi}_2 \quad \underset{\sim}{\xi}_3 \quad \underset{\sim}{\xi}_1 \underset{\sim}{\xi}_2 \quad \underset{\sim}{\xi}_2 \underset{\sim}{\xi}_3 \quad \underset{\sim}{\xi}_1 \underset{\sim}{\xi}_3 \quad (\underset{\sim}{\xi}_1 \underset{\sim}{\xi}_2^2 - \underset{\sim}{\xi}_1^2 \underset{\sim}{\xi}_2) \quad (\underset{\sim}{\xi}_2 \underset{\sim}{\xi}_3^2 - \underset{\sim}{\xi}_2^2 \underset{\sim}{\xi}_3) \quad (\underset{\sim}{\xi}_3 \underset{\sim}{\xi}_1^2 - \underset{\sim}{\xi}_3^2 \underset{\sim}{\xi}_1) \right]$$

$$\underset{\sim}{\alpha}^T = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8]$$

A rotação no eixo "x", em função das coordenadas adimensionais, é expressa como:

$$\theta_x(\underset{\sim}{\xi}_1, \underset{\sim}{\xi}_2, \underset{\sim}{\xi}_3) = \frac{\partial w(\underset{\sim}{\xi}_1, \underset{\sim}{\xi}_2, \underset{\sim}{\xi}_3)}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \underset{\sim}{\xi}_1} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{\xi}_1}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \underset{\sim}{\xi}_2} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{\xi}_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \underset{\sim}{\xi}_3} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{\xi}_3}{\partial y}$$

Assim:

$$\theta_x = \frac{I}{2A} [n_1 \cdot \alpha_0 + n_2 \cdot \alpha_1 + n_3 \alpha_2 + (\underset{\sim}{\xi}_2 n_1 + \underset{\sim}{\xi}_1 n_2) \cdot \alpha_3 + (\underset{\sim}{\xi}_3 n_2 + \underset{\sim}{\xi}_2 n_3) \cdot \alpha_4 + (\underset{\sim}{\xi}_3 n_1 + \underset{\sim}{\xi}_1 n_3) \cdot \alpha_5 +$$

$$+ [(\underset{\sim}{\xi}_2^2 - 2\underset{\sim}{\xi}_1 \underset{\sim}{\xi}_2) n_1 + (2\underset{\sim}{\xi}_1 \underset{\sim}{\xi}_2 - \underset{\sim}{\xi}_1^2) n_2] \cdot \alpha_6 + [(\underset{\sim}{\xi}_3^2 - 2\underset{\sim}{\xi}_2 \underset{\sim}{\xi}_3) n_2 + (2\underset{\sim}{\xi}_2 \underset{\sim}{\xi}_3 - \underset{\sim}{\xi}_2^2) n_3] \cdot \alpha_7 +$$

$$+ [(2\underset{\sim}{\xi}_3 \underset{\sim}{\xi}_1 - \underset{\sim}{\xi}_3^2) n_1 + (\underset{\sim}{\xi}_1^2 - 2\underset{\sim}{\xi}_3 \underset{\sim}{\xi}_1) n_3] \cdot \alpha_8]$$

De forma análoga

$$\theta_y = \frac{I}{2A} [m_1 \cdot \alpha_0 + m_2 \cdot \alpha_1 + m_3 \alpha_2 + (\underset{\sim}{\xi}_2 m_1 + \underset{\sim}{\xi}_1 m_2) \alpha_3 + (\underset{\sim}{\xi}_3 m_2 + \underset{\sim}{\xi}_2 m_3) \alpha_4 + (\underset{\sim}{\xi}_3 m_1 + \underset{\sim}{\xi}_1 m_3) \alpha_5 +$$

$$+ [(\underset{\sim}{\xi}_2^2 - 2\underset{\sim}{\xi}_1 \underset{\sim}{\xi}_2) m_1 + (2\underset{\sim}{\xi}_1 \underset{\sim}{\xi}_2 - \underset{\sim}{\xi}_1^2) m_2] \alpha_6 + [(\underset{\sim}{\xi}_3^2 - 2\underset{\sim}{\xi}_2 \underset{\sim}{\xi}_3) m_2 + (2\underset{\sim}{\xi}_2 \underset{\sim}{\xi}_3 - \underset{\sim}{\xi}_2^2) m_3] \alpha_7 +$$

$$+ [(2\underset{\sim}{\xi}_3 \underset{\sim}{\xi}_1 - \underset{\sim}{\xi}_3^2) m_1 + (\underset{\sim}{\xi}_1^2 - 2\underset{\sim}{\xi}_3 \underset{\sim}{\xi}_1) m_3] \alpha_8]$$

Reunidos na forma matricial:

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{matrix} \right\} = \underset{\sim}{\varphi} \cdot \underset{\sim}{\begin{matrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{matrix}} \end{matrix} \quad (6.7)$$

ou

$$\underset{\sim}{\delta} = \underset{\sim}{\varphi} \cdot \underset{\sim}{\alpha}$$

Substituindo-se os valores das coordenadas nodais na equação (6.7), tem-se:

⇒ para o nó 1, com “ $\xi_1=1$ ” e “ $\xi_2=\xi_3=0$ ”:

$$\underset{\sim}{\varphi}_1 = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_2 & 0 & n_3 & -n_2 & 0 & n_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_2 & 0 & m_3 & -m_2 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

⇒ para o nó 2, com “ $\xi_2=1$ ” e “ $\xi_1=\xi_3=0$ ”

$$\underset{\sim}{\varphi}_2 = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 2A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_1 & n_3 & 0 & n_1 & -n_3 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_1 & m_3 & 0 & m_1 & -m_3 & 0 \end{bmatrix}$$

⇒ para o nó 3, com “ $\xi_3=1$ ” e “ $\xi_1=\xi_2=0$ ”:

$$\varphi_1 \sim = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 & 0 & n_2 & -n_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 & m_2 & m_1 & 0 & m_2 & -m_1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_2 & 0 & n_3 & -n_2 & 0 & n_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_2 & 0 & m_3 & -m_2 & 0 & m_3 \\ 0 & 2A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_1 & n_3 & 0 & n_1 & -n_3 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_1 & m_3 & 0 & m_1 & -m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 & 0 & n_2 & -n_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 & m_2 & m_1 & 0 & m_2 & -m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{\alpha}$$

Isolando-se “ α ”:

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{A}^{-1} \cdot \underset{\sim}{d} \tag{6.8}$$

sendo:

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -m_3 & n_3 & 0 & m_3 & -n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_1 & n_1 & 0 & m_1 & -n_1 \\ 0 & m_2 & -n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_2 & n_2 \\ -2 & m_3 & -n_3 & 2 & m_3 & -n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & m_1 & -n_1 & 2 & m_1 & -n_1 \\ 2 & m_2 & -n_2 & 0 & 0 & 0 & -2 & m_2 & -n_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo-se a equação (6.8) em (6.6):

$$\begin{aligned} w &= \psi \cdot \alpha \\ \sim \quad \sim \quad \sim \\ w &= \psi \cdot A^{-1} \cdot d \\ \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} w &= \phi \cdot d \\ \sim \quad \sim \quad \sim \end{aligned}$$

As nove funções contidas em " ϕ " são descritas a seguir:

$$\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4 \quad \phi_5 \quad \phi_6 \quad \phi_7 \quad \phi_8 \quad \phi_9]$$

sendo

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \xi_1 - (\xi_1 \xi_2^2 - \xi_1^2 \xi_2) + (\xi_3 \xi_1^2 - \xi_3^2 \xi_1) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2} [-m_3 \xi_1 \xi_2 + m_2 \xi_3 \xi_1 + m_3 (\xi_1 \xi_2^2 - \xi_1^2 \xi_2) + m_2 (\xi_3 \xi_1^2 - \xi_3^2 \xi_1)] \\ \phi_3 &= \frac{1}{2} [n_3 \xi_1 \xi_2 - n_2 \xi_3 \xi_1 - n_3 (\xi_1 \xi_2^2 - \xi_1^2 \xi_2) - n_2 (\xi_3 \xi_1^2 - \xi_3^2 \xi_1)] \\ \phi_4 &= \xi_2 + (\xi_1 \xi_2^2 - \xi_1^2 \xi_2) - (\xi_2 \xi_3^2 - \xi_2^2 \xi_3) \\ \phi_5 &= \frac{1}{2} [m_3 \xi_1 \xi_2 - m_1 \xi_2 \xi_3 + m_3 (\xi_1 \xi_2^2 - \xi_1^2 \xi_2) + m_1 (\xi_2 \xi_3^2 - \xi_2^2 \xi_3)] \\ \phi_6 &= \frac{1}{2} [-n_3 \xi_1 \xi_2 + n_1 \xi_2 \xi_3 - n_3 (\xi_1 \xi_2^2 - \xi_1^2 \xi_2) - n_1 (\xi_2 \xi_3^2 - \xi_2^2 \xi_3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_7 &= \xi_3 + (\xi_2 \xi_3^2 - \xi_2^2 \xi_3) - (\xi_3 \xi_1^2 - \xi_3^2 \xi_1) \\ \phi_8 &= \frac{1}{2} [m_1 \xi_2 \xi_3 - m_2 \xi_3 \xi_1 + m_1 (\xi_2 \xi_3^2 - \xi_2^2 \xi_3) + m_2 (\xi_3 \xi_1^2 - \xi_3^2 \xi_1)] \\ \phi_9 &= \frac{1}{2} [-n_1 \xi_2 \xi_3 + n_2 \xi_3 \xi_1 - n_1 (\xi_2 \xi_3^2 - \xi_2^2 \xi_3) - n_2 (\xi_3 \xi_1^2 - \xi_3^2 \xi_1)] \end{aligned}$$

6.3 - Matriz de rigidez

De acordo com a equação (2.33), a matriz de rigidez é dada por:

$$k = \int_{V_e} B^T E B dV_e$$

Tendo em vista a teoria clássica para flexão de placas, tem-se:

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad \varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad ; \quad \gamma_{xy} = -2z \cdot \frac{\partial w}{\partial x \partial y}$$

Assim, conforme a equação (2.23):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= L \cdot u \\ \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} &= -z \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{array} \right] \cdot [w] \end{aligned}$$

Em termos das coordenadas homogêneas:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{z}{4A^2} \cdot \left[\begin{array}{c} m_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + m_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + m_3^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} + 2m_1m_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + 2m_1m_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} + 2m_2m_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \\ n_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + n_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + n_3^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} + 2n_1n_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + 2n_1n_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} + 2n_2n_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \\ 2 \left(m_1n_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + m_2n_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + m_3n_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} + (m_1n_2 + m_2n_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + (m_1n_3 + m_3n_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} + (m_2n_3 + m_3n_2) \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \right) \end{array} \right] \cdot [w]$$

sendo o vetor "L", descrito pela equação (2.24), reduzido a:

$$\underset{\sim}{L} = \frac{z}{4A^2} \cdot \left[\begin{array}{c} m_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + m_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + m_3^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} + 2m_1m_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + 2m_1m_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} + 2m_2m_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \\ n_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + n_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + n_3^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} + 2n_1n_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + 2n_1n_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} + 2n_2n_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \\ 2 \left(m_1n_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + m_2n_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + m_3n_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} + (m_1n_2 + m_2n_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + (m_1n_3 + m_3n_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} + (m_2n_3 + m_3n_2) \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \right) \end{array} \right]$$

ou, simplesmente,

$$\underset{\sim}{L} = \frac{z}{4A^2} \cdot \underset{\sim}{l}$$

Substituindo-se na equação (2.33) tem-se:

$$\underset{\sim}{k} = \int_{V_e} \frac{z}{4A^2} \cdot \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right)^T \cdot \underset{\sim}{E} \cdot \left(-\frac{z}{4A^2} \right) \cdot \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right) \cdot dV_e$$

$$\underset{\sim}{k} = \frac{I}{16A^4} \cdot \int_A \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \cdot \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right)^T \cdot \underset{\sim}{E} \cdot \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right) \cdot dz \cdot dA$$

$$\underset{\sim}{k} = \left(\frac{I}{16A^4} \right) \cdot \left(\frac{t^3}{12} \right) \cdot \int_A \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right)^T \cdot \underset{\sim}{E} \cdot \left(\underset{\sim}{l} \cdot \underset{\sim}{\phi} \right) \cdot dA$$

ou

$$\tilde{k} = \left(\frac{I}{16A^4} \right) \cdot \left(\frac{t^3}{12} \right) \cdot \int_A f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot dA \quad (6.9)$$

Para o caso particular das placas para o estado de tensões em questão, a matriz "E" representada pela equação (2.22), fica reduzida a:

$$\tilde{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

onde

$$\mu = \frac{1-\nu}{2}$$

De acordo com Brebbia & Connor (1973) a integral descrita pela equação (6.9) pode ser resolvida substituindo-se " ξ_3 " e " dA " por:

$$\begin{aligned} \xi_3 &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \\ dA &= 2A \cdot d\xi_1 \cdot d\xi_2 \end{aligned}$$

Dessa forma a integral torna-se:

$$\tilde{k} = \left(\frac{I}{16A^4} \right) \cdot \left(\frac{t^3}{12} \right) \cdot 2A \cdot \int_0^1 \int_0^{(1-\xi_2)} f(\xi_1, \xi_2) \cdot d\xi_1 \cdot d\xi_2 \quad (6.10)$$

Ou então, de uma maneira simplificada, pode-se resolver a mesma integral dada por meio do seguinte procedimento numérico:

$$\int_A \xi_1^i \cdot \xi_2^j \cdot \xi_3^k \cdot dA = \frac{i! \cdot j! \cdot k!}{(i+j+k+2)!} \cdot 2A \quad (6.11)$$

Sendo assim, partindo-se apenas da equação (6.10), ou então da equação (6.9) com o auxílio de (6.11), chega-se a matriz de rigidez em sua forma explícita:

$$\underset{\sim}{k} = \frac{I}{8A^3} \cdot \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{K}$$

onde

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

e “ $\underset{\sim}{K}$ ” é uma matriz 9x9 simétrica que, devido a sua extensão, é apresentada em forma de anexo.

6.4 - Matriz de massas

A matriz de massas, de acordo com a equação (2.31), é definida por:

$$\underset{\sim}{m} = \int_{V_e} \underset{\sim}{\rho} \cdot \underset{\sim}{\phi}^T \cdot \underset{\sim}{\phi} \cdot dV_e$$

mas

$$dV_e = t \cdot dA$$

onde “ t ” é a espessura da placa.

Assim:

$$\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{\rho} \cdot \underset{\sim}{t} \int_A \underset{\sim}{\phi}^T \cdot \underset{\sim}{\phi} \cdot dA \quad (6.12)$$

Partindo-se da equação (6.12) e efetuando-se a integração no domínio do elemento, do modo descrito no item anterior, chega-se a matriz de massas na sua forma explícita.

$$\underset{\sim}{m} = \frac{\underset{\sim}{\rho} \cdot \underset{\sim}{t} \cdot A}{30240} \underset{\sim}{M}$$

onde " $\underset{\sim}{M}$ " é uma matriz simétrica e seus elementos são dados por:

$$M(1,1)=5808$$

$$M(2,1)=624(m_2 - m_3)$$

$$M(3,1)=624(n_3 - n_2)$$

$$M(4,1)=2136$$

$$M(5,1)=408m_3 - 228m_1$$

$$M(6,1)=-408n_3 + 228n_1$$

$$M(7,1)=2136$$

$$M(8,1)=-408m_2 + 228m_1$$

$$M(9,1)=408n_2 - 228n_1$$

$$M(2,2)=93(m_3^2 + m_2^2) - 114m_2m_3$$

$$M(3,2)=-93(m_2n_2 + m_3n_3) + 57(m_2n_3 + m_3n_2)$$

$$M(4,2)=228m_2-408m_3$$

$$M(5,2)=-75m_3^2+39(m_2m_3+m_1m_3)-33m_1m_2$$

$$M(6,2)=75m_3n_3-39(m_2n_3+m_3n_1)+33m_2n_2$$

$$M(7,2)=408m_2-228m_3$$

$$M(8,2)=-75m_2^2+39(m_2m_3+m_1m_2)-33m_1m_3$$

$$M(9,2)=75m_2n_2-39(m_3n_2+m_2n_1)+33m_3n_1$$

$$M(3,3)=93(n_3^2+n_2^2)-57n_2n_3$$

$$M(4,3)=408n_3-228n_2$$

$$M(5,3)=75m_3n_3-39(m_3n_2+m_1n_3)+33m_1n_2$$

$$M(6,3)=-75n_3^2+39(n_1n_3+n_2n_3)-33n_1n_2$$

$$M(7,3)=-408n_2+228n_3$$

$$M(8,3)=75m_2n_2-39(m_2n_3+m_1n_2)+33m_1n_3$$

$$M(9,3)=-75n_2^2+39(n_1n_2+n_2n_3)-33n_1n_3$$

$$M(4,4)=5808$$

$$M(5,4)=624(m_3-m_1)$$

$$M(6,4)=624(n_1-n_3)$$

$$M(7,4)=2136$$

$$M(8,4)=-228m_2+408m_1$$

$$M(9,4)=228n_2-408n_1$$

$$M(5,5)=-114m_1m_3+93(m_1^2+m_3^2)$$

$$M(6,5)=57(m_1n_3+m_3n_1)-93(m_3n_3+m_1n_1)$$

$$M(7,5)=-408m_1+228m_3$$

$$M(8,5)=-75m_1^2+39(m_1m_3+m_1m_2)-33m_2m_3$$

$$M(9,5)=75m_1n_1-39(m_1n_2+m_3n_1)+33m_3n_2$$

$$M(6,6)=-114n_1n_3+93(n_1^2+n_3^2)$$

$$M(7,6)=408n_1-228n_3$$

$$M(8,6)=75m_1n_1-39(m_1n_3+m_2n_1)+33m_2n_3$$

$$M(9,6)=-75n_1^2+39(n_1n_3+n_1n_2)-33n_2n_3$$

$$M(7,7)=5808$$

$$M(8,7)=624(-m_2+m_1)$$

$$M(9,7)=624(n_2-n_1)$$

$$M(8,8)=-114m_1m_2+93(m_1^2+m_2^2)$$

$$M(9,8)=57(m_1n_2+m_2n_1)-93(m_2n_2+m_1n_1)$$

$$M(9,9)=-114n_1n_2+93(n_2^2+n_1^2)$$

CAPÍTULO 7 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS

7.1 - Generalidades

A fim de ilustrar o funcionamento do *software* desenvolvido no decorrer da pesquisa em questão, apresenta-se neste capítulo uma visão geral do código computacional referente à implementação do método de Newmark na análise dinâmica de placas.

Merece destaque o código relativo ao cálculo propriamente dito, visto que os códigos relativos à leitura e saída de dados e outras sub-rotinas auxiliares que fazem parte do programa não possuem papel relevante no contexto deste trabalho.

Devido a sua constituição modular, o programa apresenta subsídios para sua rápida e fácil modificação a fim de que possa ser utilizado na análise linear de outros elementos estruturais. Destaca-se também a simplicidade de inserção de novos elementos finitos e, até mesmo a implementação de modelos de cálculos de estruturas não-lineares, sem que haja a necessidade de grandes modificações no código principal.

7.2 - Esquema geral de cálculo

O fluxograma referente ao esquema geral de cálculo é ilustrado na figura 7.1, sendo que cada bloco contém o nome de uma sub-rotina específica, cuja função é descrita no item 7.3 deste trabalho.

Cabe ressaltar que este esquema de cálculo é genérico, o que permite realizar análises estáticas ou dinâmicas de placas delgadas utilizando-se elementos

finitos triangulares e retangulares atuando isoladamente ou em conjunto.

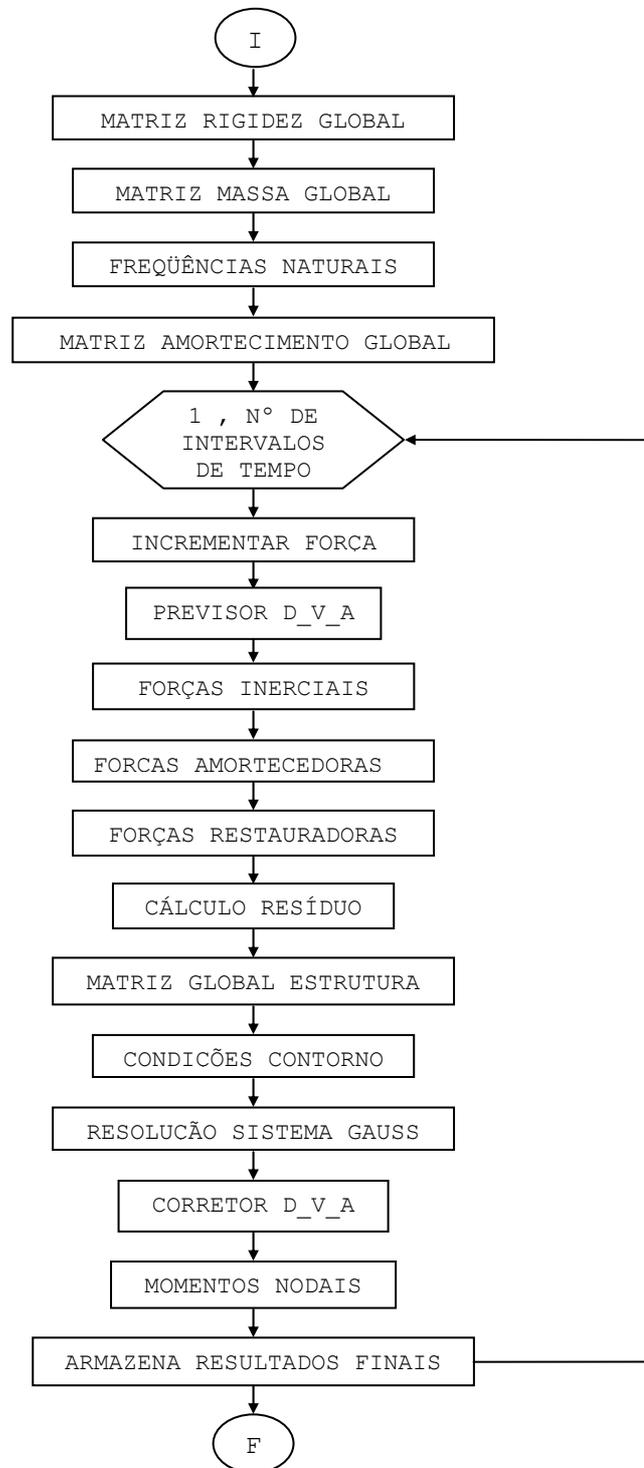


Figura 7.1 - Fluxograma do esquema geral de cálculo.

7.3 - Descrição das sub-rotinas

A descrição das funções de cada sub-rotina contida na figura 7.1 é apresentada a seguir.

⇒ Sub-rotina "MATRIZ RIGIDEZ GLOBAL"

Calcula a matriz de rigidez global " \tilde{K} " da estrutura, a partir da matriz de rigidez dos elementos retangular e triangular fornecida nos itens 5.3 e 6.3 deste trabalho.

⇒ Sub-rotina "MATRIZ MASSA GLOBAL"

Calcula as matrizes de massas dos elementos retangular e triangular, dadas nos item 5.4 e 6.4 deste trabalho, e elabora a matriz de massas global " \tilde{M} " da estrutura.

⇒ Sub-rotina "FREQUÊNCIAS NATURAIS"

Calcula os valores das frequências naturais de vibração da estrutura necessárias para a elaboração da matriz de amortecimento.

Os valores de " ω_1 " e " ω_2 " são obtidos conforme descrito no item 3.6.2 e, com o auxílio das equações (3.19), calculam-se os parâmetros " λ_m " e " λ_k ".

⇒ Sub-rotina "MATRIZ AMORTECIMENTO GLOBAL"

Calcula a matriz de amortecimento global " \tilde{C} " da estrutura, conforme visto no item 3.6 deste trabalho.

⇒ Sub-rotina "INCREMENTAR FORÇA"

Esta sub-rotina tem a função de atualizar o valor das forças externas " F_E " para cada intervalo de tempo " $n\Delta t$ ".

⇒ Sub-rotina "PREVISOR D_V_A"

Realiza a previsão das acelerações " \ddot{D}_k ", dos deslocamentos " D_k " e das velocidades " \dot{D}_k " conforme visto no item 3.5 deste trabalho.

⇒ Sub-rotina "FORÇAS INERCIAIS"

Calcula o valor das forças inerciais através do produto matricial " $M\ddot{D}_k$ ".

⇒ Sub-rotina "FORÇAS AMORTECEDORAS"

Calcula o valor das forças amortecedoras através do produto matricial " $C\dot{D}_k$ ".

⇒ Sub-rotina "FORÇAS RESTAURADORAS"

Calcula o valor das forças restauradoras através do produto matricial " KD_k ".

⇒ **Sub-rotina "CÁLCULO RESÍDUO"**

Calcula o valor do resíduo das forças dinâmicas não equilibradas " $\tilde{R}(D_k)$ " com auxílio da equação (3.6).

⇒ **Sub-rotina "MATRIZ GLOBAL ESTRUTURA"**

Monta a matriz global da estrutura dada pela equação:

$$\tilde{G} = \left\{ \tilde{M} \frac{1}{\beta \Delta t^2} + \tilde{C} \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + \tilde{K} \right\}$$

⇒ **Sub-rotina "CONDIÇÕES CONTORNO"**

Aplica as condições de contorno na matriz de rigidez global utilizando-se a técnica do número grande.

⇒ **Sub-rotina "RESOLUÇÃO SISTEMA GAUSS"**

Resolve o sistema de equações fornecido pela equação (3.15) utilizando-se o método de Gauss (Soriano, 1981). Com isso obtém-se o acréscimo de deslocamento " $\tilde{\Delta D_k}$ ".

⇒ **Sub-rotina "CORRETOR D_V_A"**

Realiza a correção dos deslocamentos " \tilde{D}_k ", das velocidades " \tilde{D}_k " e das acelerações " \tilde{D}_k ", conforme visto no item 3.5 deste trabalho.

⇒ Sub-rotina "MOMENTOS NODAIS"

Calcula os valores dos momentos nos nós. Tendo em vista a descrição dos momentos feita no item (4.4) deste trabalho, as equações (4.4) podem ser resumidas em:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = D \cdot E \cdot \frac{1}{z} \cdot \varepsilon$$

mas

$$\varepsilon = B d$$

logo

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \cdot E \cdot \frac{1}{z} \cdot B \cdot d$$

Dessa forma os momentos nodais podem ser calculados a partir dos deslocamentos nodais, sendo os valores das coordenadas definidas de acordo com o nó em questão.

⇒ Sub-rotina "ARMAZENA RESULTADOS FINAIS"

Esta sub-rotina tem a função de armazenar os resultados obtidos no intervalo de tempo "nΔt", tais como deslocamentos, velocidades e acelerações, necessários para a integração do próximo intervalo de tempo.

CAPÍTULO 8 - ANÁLISE NUMÉRICA

8.1 - Generalidades

O objetivo deste capítulo é analisar o comportamento estático e dinâmico de placas delgadas de comportamento linear. Para tal são apresentados, a seguir, vários exemplos elucidativos, sendo a simulação numérica de tais elementos estruturais efetuada no programa computacional desenvolvido. A precisão dos resultados é aferida tendo como base de comparação soluções analíticas e numéricas fornecidas por outros pesquisadores.

Por fim procurou-se efetuar uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos para cada exemplo estudado.

8.2 - Exemplo 1 - Placa quadrada

Este exemplo é composto por uma placa quadrada sujeita a uma força " F " igual a 1000 kN concentrada em seu ponto central, conforme ilustra a figura 8.1.

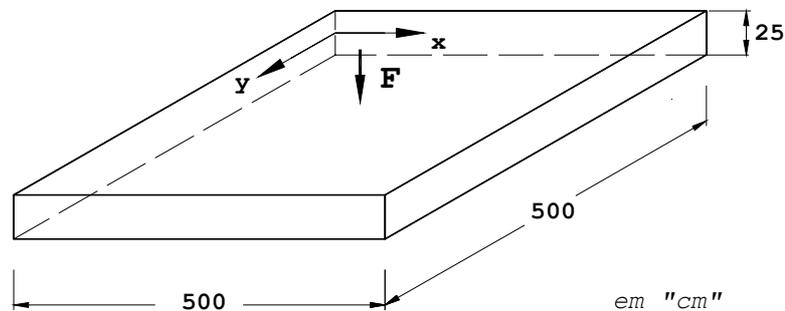


Figura 8.1 - Placa quadrada.

As características físicas do material são dadas por:

$$E=2,5 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \nu=0,20$$

A discretização da placa é efetuada utilizando-se 400 elementos retangulares e 800 elementos triangulares dispostos em malhas de 20 x 20 e 40 x 40 elementos, respectivamente.

Foram simuladas duas condições de contorno diferentes: todos os bordos simplesmente apoiados e todos os bordos engastados.

Os resultados obtidos são comparados com os valores fornecidos por Danson (1980), que apresenta resultados teóricos e numéricos obtidos via método dos elementos finitos e de contorno.

As curvas dos deslocamentos e dos momentos " M_{yy} " referentes à linha central ($y=250 \text{ cm}$) são apresentadas na seqüência.

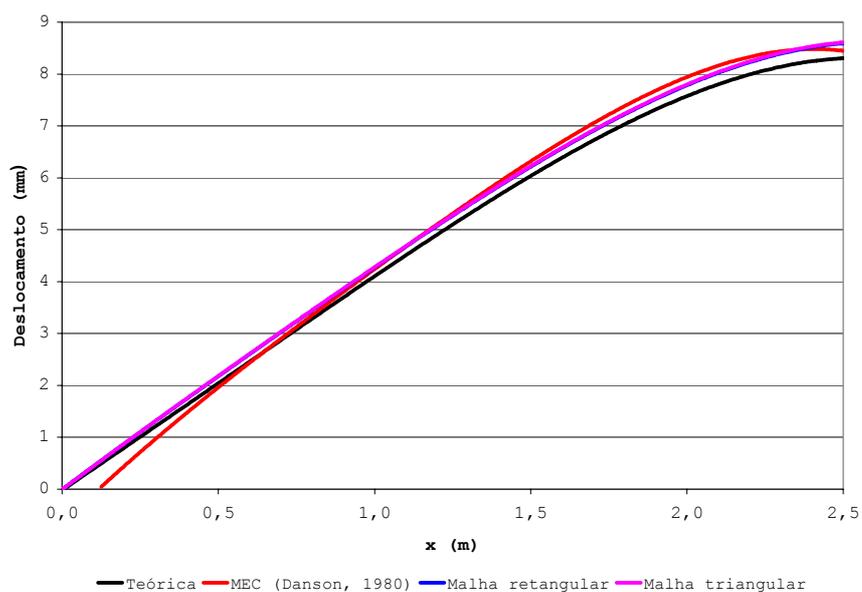


Figura 8.2 - Deslocamento do eixo central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.

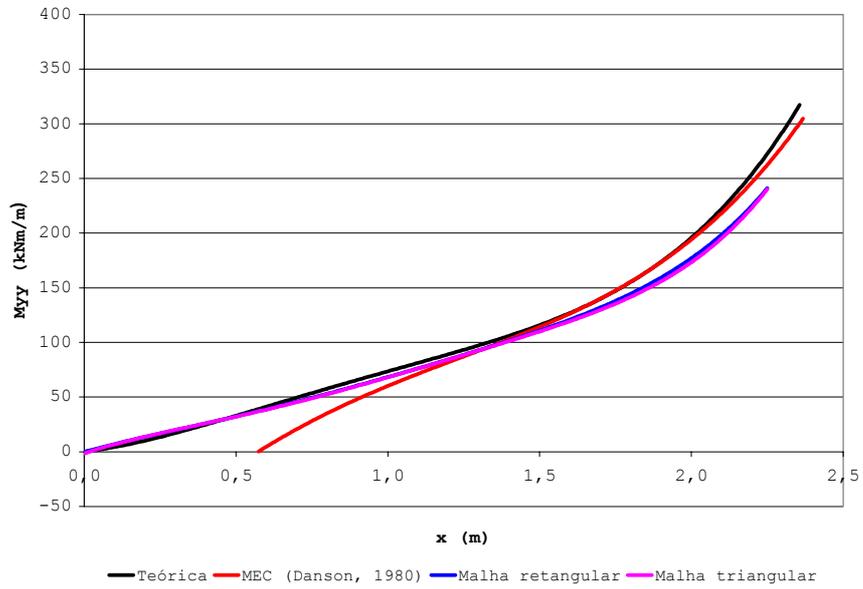


Figura 8.3 - " M_{yy} " atuante no eixo central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.

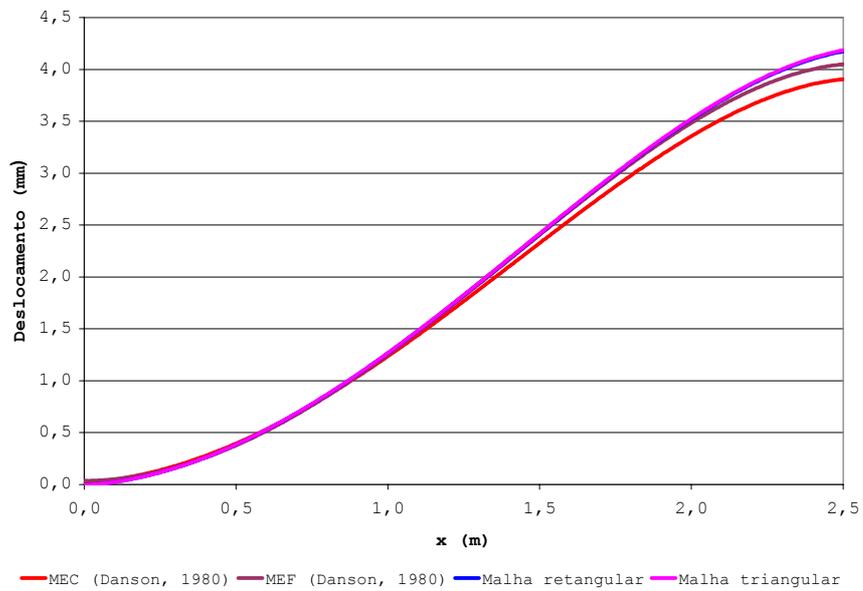


Figura 8.4 - Deslocamento do eixo central considerando-se os bordos engastados.

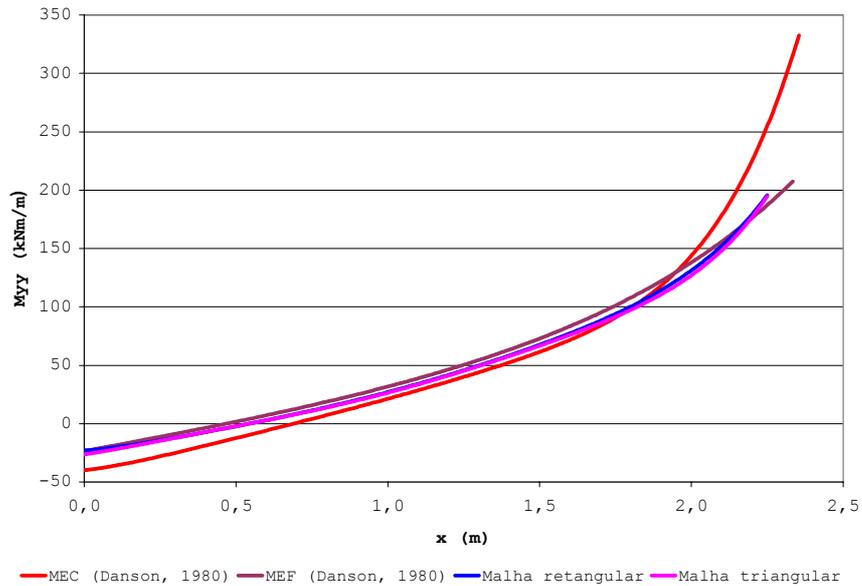


Figura 8.5 - " M_{yy} " atuante no eixo central considerando-se os bordos engastados.

Analisando-se os gráficos ilustrados nas figuras 8.2 e 8.3, que tratam do comportamento da placa considerando-se os bordos simplesmente apoiados, verifica-se que as curvas obtidas utilizando-se a discretização com elementos triangulares foram praticamente idênticas à resposta via discretização com elementos retangulares. Tal característica também é verificada para a condição de bordos engastados.

Em se tratando dos resultados obtidos considerando-se os bordos simplesmente apoiados percebe-se que os valores obtidos neste trabalho apresentam-se muito próximos do resultado teórico, apresentando, inclusive, "melhores" resultados nos bordos quando comparados com os obtidos por Danson (1980) via método dos elementos de contorno.

Já quando se considera a placa totalmente engastada verifica-se que as curvas de momento " M_{yy} " apresentam a mesma tendência até um valor de x próximo a 2,0 metros, sendo que, a partir deste valor, assumem comportamentos totalmente diferentes. Tal fato não ocorre com as curvas de deslocamentos.

8.3 - Exemplo 2 - Influência das malhas

A placa deste exemplo possui vãos com dimensões iguais a " a ", espessura igual a " t " e um carregamento " q " agindo de forma uniforme em toda a sua área.

A placa possui, como características físicas, módulo de elasticidade longitudinal igual a " E " e coeficiente de Poisson igual a 0,25.

Visando estudar a influência da discretização da malha nos resultados finais foram simuladas placas discretizadas com 4, 16, 64 e 256 elementos retangulares e 8, 32, 128 e 512 elementos triangulares.

Inicialmente faz-se um estudo da placa com todos os bordos simplesmente apoiados. Os resultados obtidos são apresentados na seqüência juntamente com os valores fornecidos pelas tabelas de Bares (1972), tendo fatores de multiplicação iguais a " qa^4/Et^3 " para os valores de deslocamentos e " qa^2 " para os de momento.

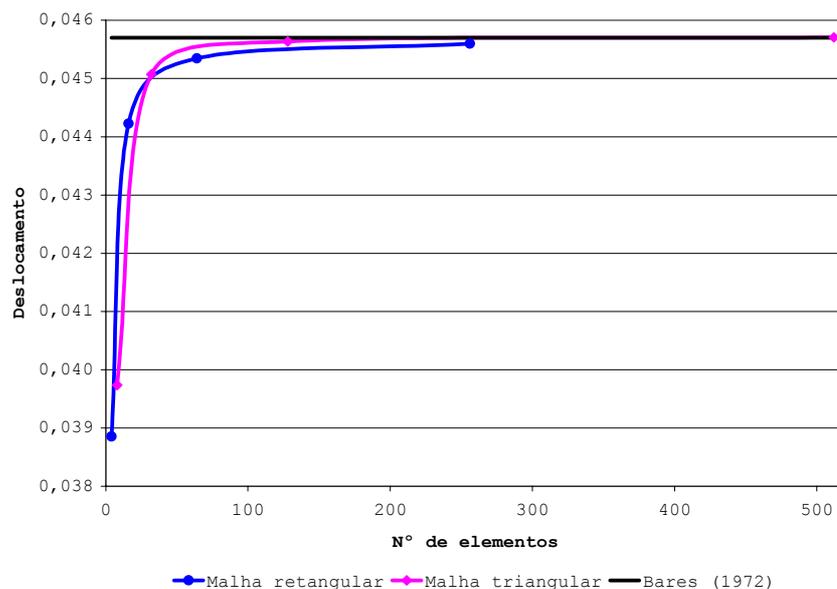


Figura 8.6 - Deslocamento do ponto central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.

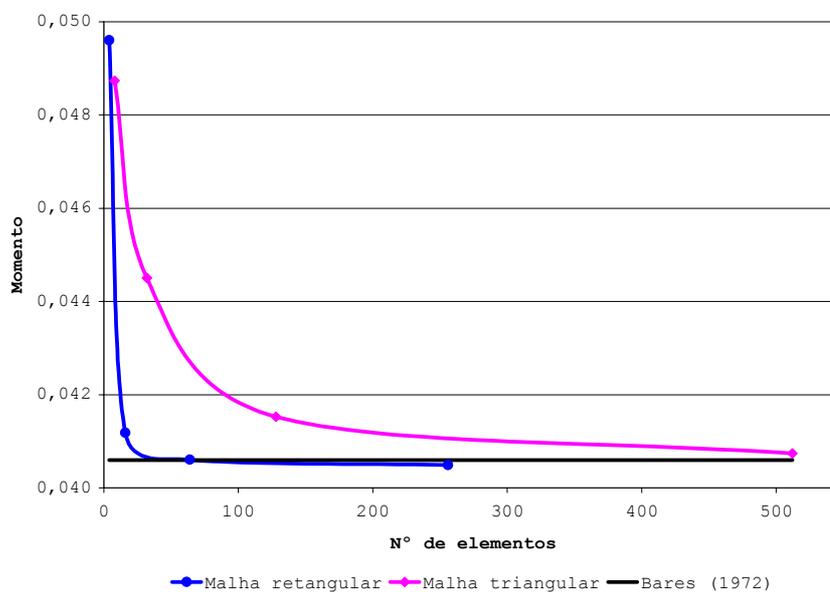


Figura 8.7 - Momento atuante no ponto central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.

As figuras 8.6 e 8.7 ilustram a influência da malha na resposta final da análise. Em ambos os casos verificam-se que a maior discretização da malha conduz a resultados mais próximos do resultado fornecido por Bares (1972), verificando-se também que malhas discretizadas com elementos retangulares convergem para a resposta final com um menor número de elementos quando comparadas com malhas compostas apenas por elementos triangulares.

Uma segunda análise é efetuada tendo a placa todos os bordos engastados. Os resultados de deslocamento do ponto central, momento atuante no centro do vão e momento no bordo são apresentados nas figuras que seguem.

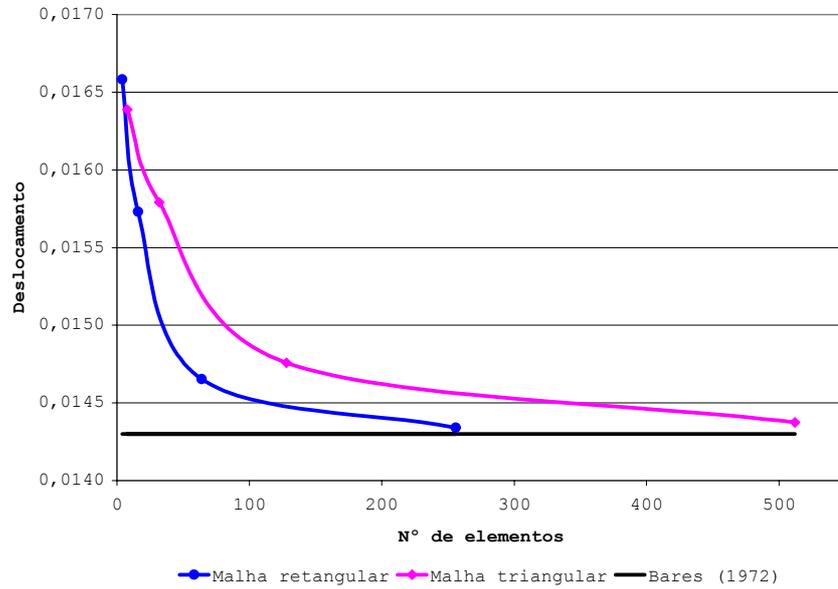


Figura 8.8 - Deslocamento do ponto central considerando-se os bordos engastados.

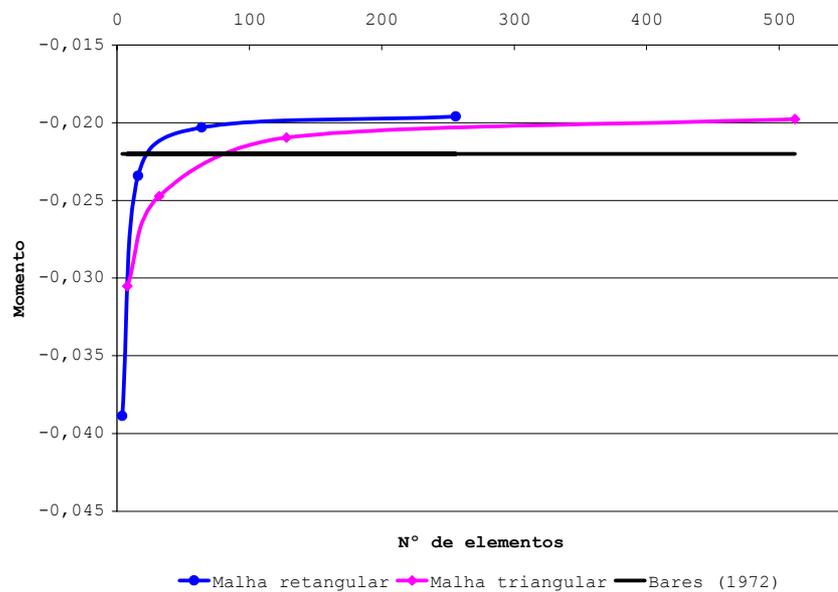


Figura 8.9 - Momento atuante no ponto central considerando-se os bordos engastados.

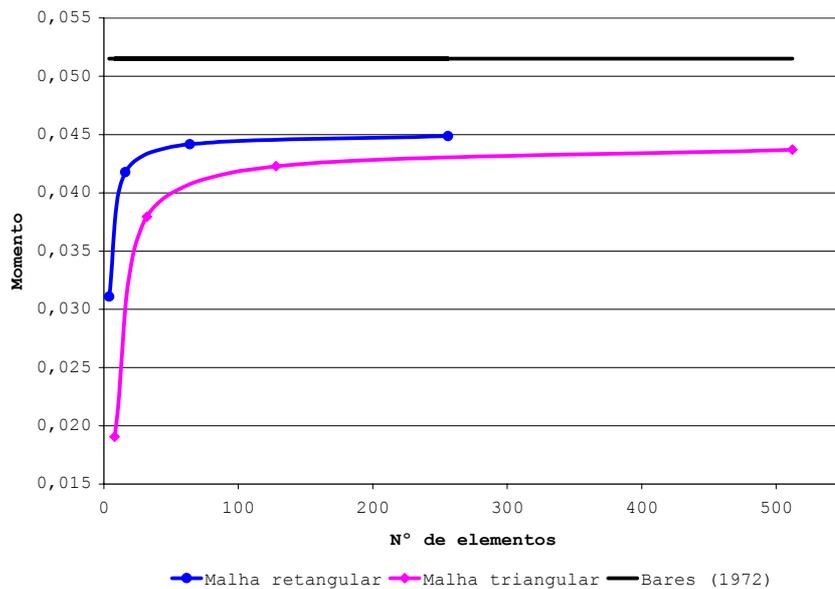


Figura 8.9 - Momento atuante no bordo considerando-se os bordos engastados.

A mesma tendência observada nos resultados obtidos para a placa simplesmente apoiada é também verificada quando se considera a placa totalmente engastada.

Neste último caso verifica-se que a resposta final para o valor de momento no centro da placa diverge levemente do resultado fornecido por Bares (1972), sem contudo comprometer a qualidade e a credibilidade da resposta obtida. Já com relação ao momento no bordo da placa verifica-se que os valores apresentam uma considerável diferença, o que leva a concluir que, em se tratando dos bordos da placa, os elementos utilizados neste trabalho não fornecem resultados próximos ao valor fornecido por Bares (1972).

Visando estudar o comportamento dos elementos finitos triangular e retangular trabalhando em conjunto, considerou-se a mesma placa discretizada com dois tipos de malhas diferentes: malha 1 tendo elementos retangulares adjacentes aos bordos e os demais triangulares e malha 2 tendo os elementos dispostos de maneira inversa ao da malha 1, ou seja, elementos

triangulares adjacentes aos bordos e elementos retangulares completando a discretização.

Também nestes casos foram simuladas as duas condições de contorno utilizadas na discretização da anterior. As respostas obtidas são apresentadas nas figuras subseqüentes.

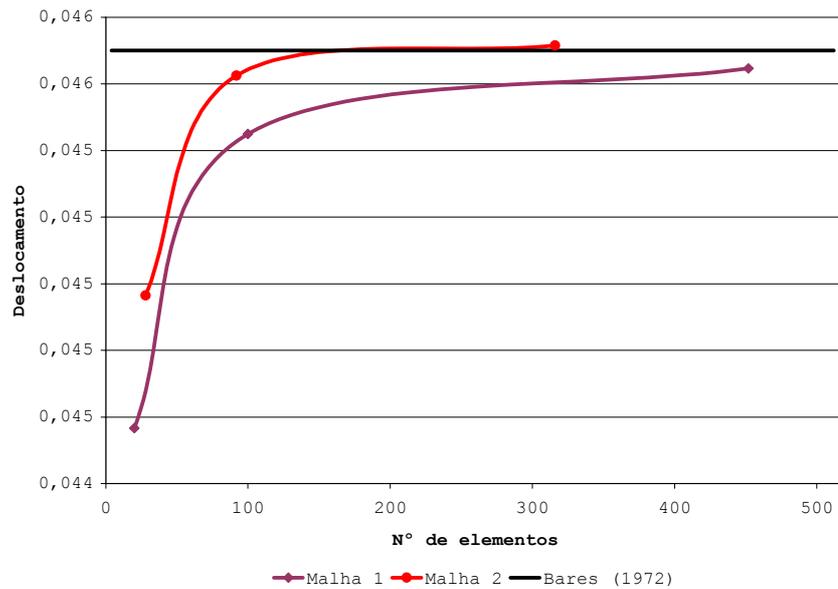


Figura 8.10 - Associação de elementos: deslocamento do ponto central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.

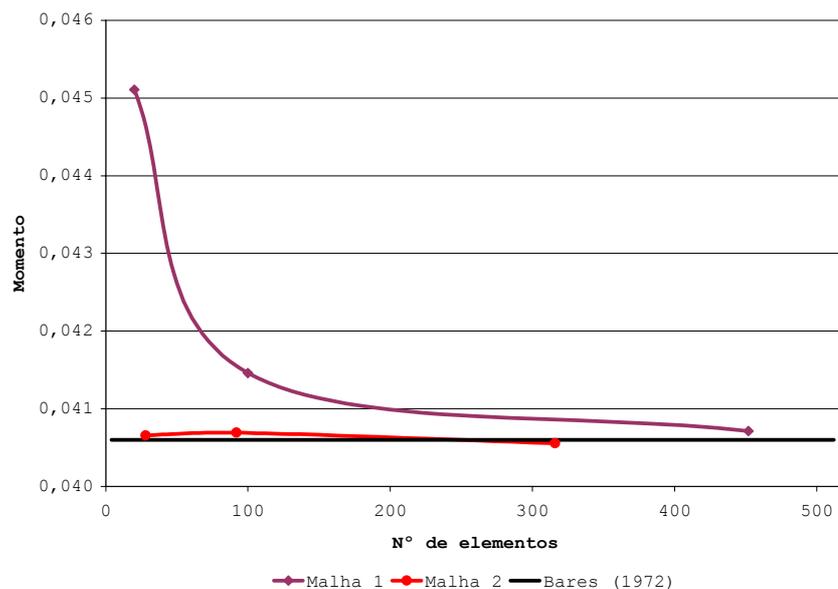


Figura 8.11 - Associação de elementos: momento atuante no ponto central considerando-se os bordos simplesmente apoiados.

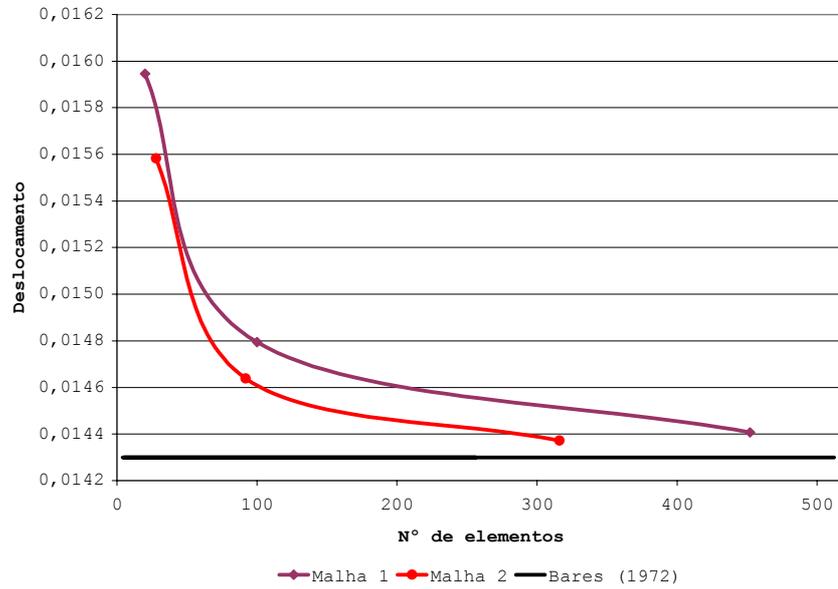


Figura 8.12 - Associação de elementos: deslocamento do ponto central considerando-se os bordos engastados.

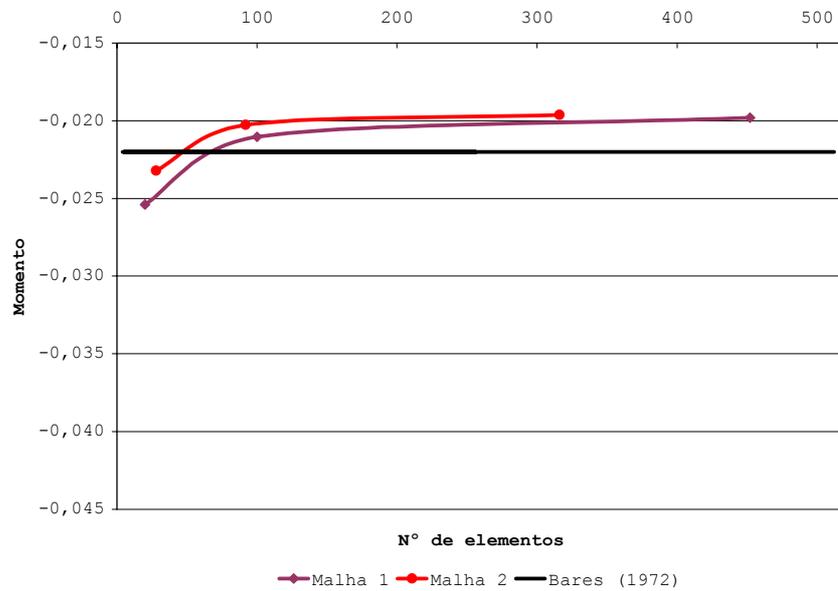


Figura 8.13 - Associação de elementos: momento atuante no ponto central considerando-se os bordos engastados.

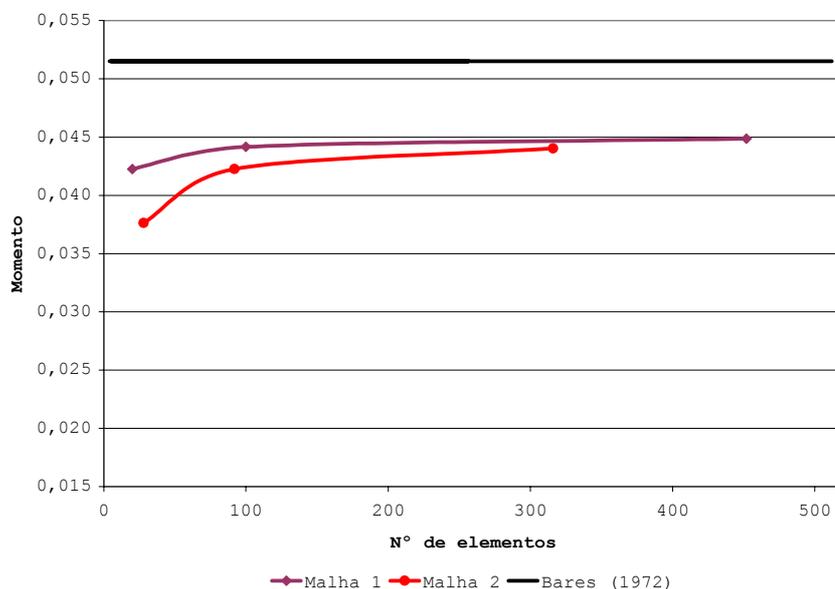


Figura 8.14 - Associação de elementos: momento atuante no bordo considerando-se os bordos engastados.

Analisando-se as curvas da análise contendo elementos triangulares e retangulares trabalhando em conjunto, verifica-se que os resultados obtidos por meio da malha 2 aproximam-se mais "rapidamente" do resultado fornecido por Bares (1972) quando comparados com os valores fornecidos pela malha 1. Isso se deve principalmente ao fato da malha 1 possuir uma maior quantidade de elementos triangulares em relação à malha 2.

Além disso nota-se que as curvas apresentam a mesma tendência já observada, ou seja, resultados mais próximos do valor fornecido por Bares (1972) quanto maior a discretização utilizada. Sendo assim pode-se concluir que o acoplamento entre os elementos finitos foi corretamente implementado no programa computacional desenvolvido.

8.4 - Exemplo 3 - Exemplo de um transiente

Neste exemplo considera-se uma placa quadrada simplesmente apoiada sujeita a um carregamento " $P(t)$ " variando com o tempo, conforme ilustra a figura 8.15.

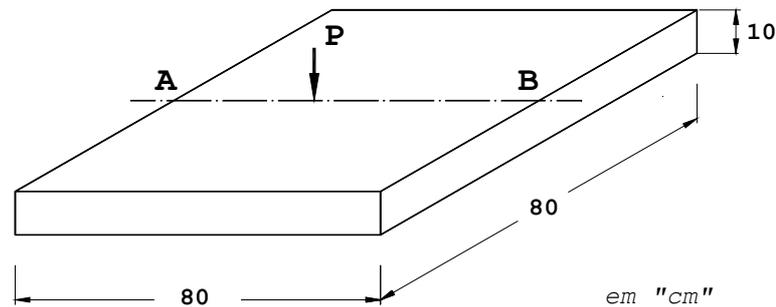


Figura 8.15 - Placa simplesmente apoiada com carregamento " $P(t)$ ".

O carregamento " $P(t)$ ", que possui módulo igual a 20 kN, atua sobre o eixo de simetria da placa e move-se do ponto "A" ao ponto "B" com velocidade constante igual a 153,7 m/s.

Os parâmetros físicos do exemplo são:

$$E=6,9 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2 ; \gamma=2,57022 \times 10^{-5} \text{ kN/cm}^3 ; \nu=0,33$$

A discretização da placa é feita utilizando-se 64 e 128 elementos retangulares e triangulares, respectivamente. A curva do deslocamento do ponto central da placa em função do tempo é apresentada na figura 8.16, juntamente com a curva fornecida por Garzeri (1991).

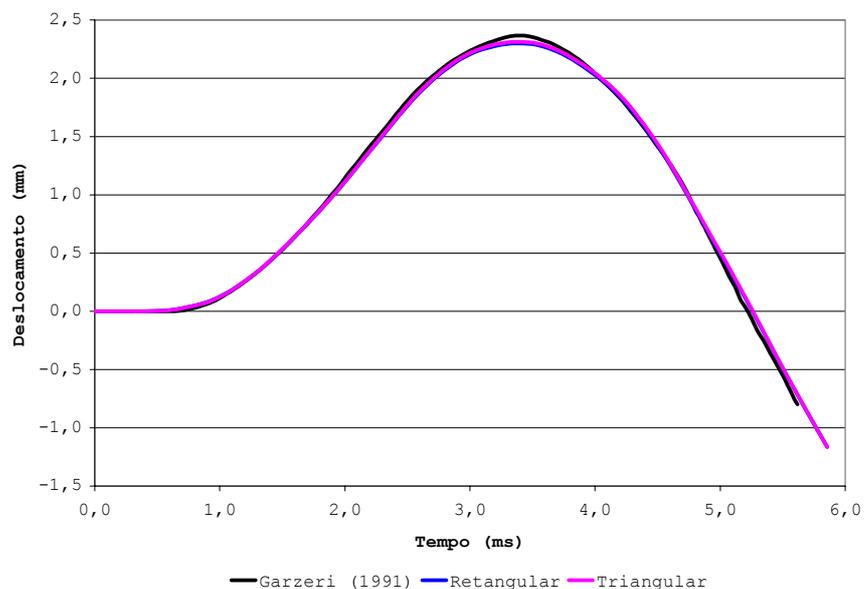


Figura 8.16 - Deslocamento do ponto central em função do tempo.

Analisando-se o gráfico ilustrado na figura 8.16 verifica-se que as curvas fornecidas pelo software desenvolvido apresentam-se praticamente idênticas à curva fornecida por Garzeri (1991), o que vem validar a correta implementação da análise dinâmica no programa desenvolvido.

Uma segunda análise é efetuada introduzindo-se o amortecimento no sistema. Neste caso as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura foram obtidos inicialmente. Sendo assim, os dois primeiros modos de vibração da estrutura são ilustrados nas figuras subsequentes.

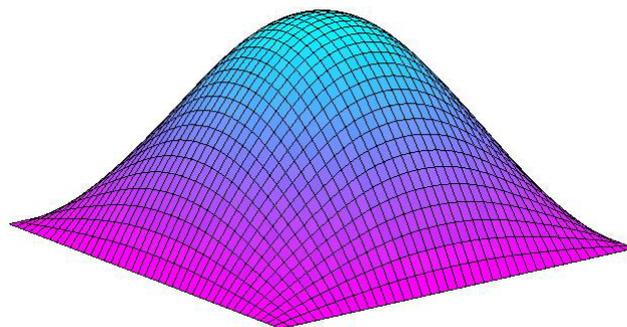


Figura 8.17 - Primeiro modo de vibração da estrutura.

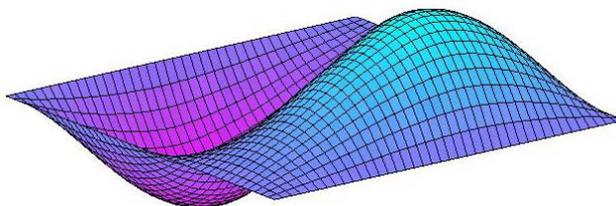


Figura 8.18 - Segundo modo de vibração da estrutura.

As duas primeiras frequências naturais circulares de vibração da estrutura obtidas para as diversas malhas foram organizadas na tabela 8.1.

Tabela 8.1 - Frequências naturais de vibração.

Frequência	Malha retangular	Malha triangular
ω_1 (rad/s)	1200,01	1198,13
ω_2 (rad/s)	2986,62	2971,60

Inicialmente fez-se um estudo com as frações de amortecimento crítico " ξ_1 " e " ξ_2 " iguais a 12,5%. Uma segunda análise foi efetuada com os parâmetros iguais a 50,0%. Os gráficos tempo x deslocamento em função da discretização da placa são ilustrados nas figuras 8.19 e 8.20.

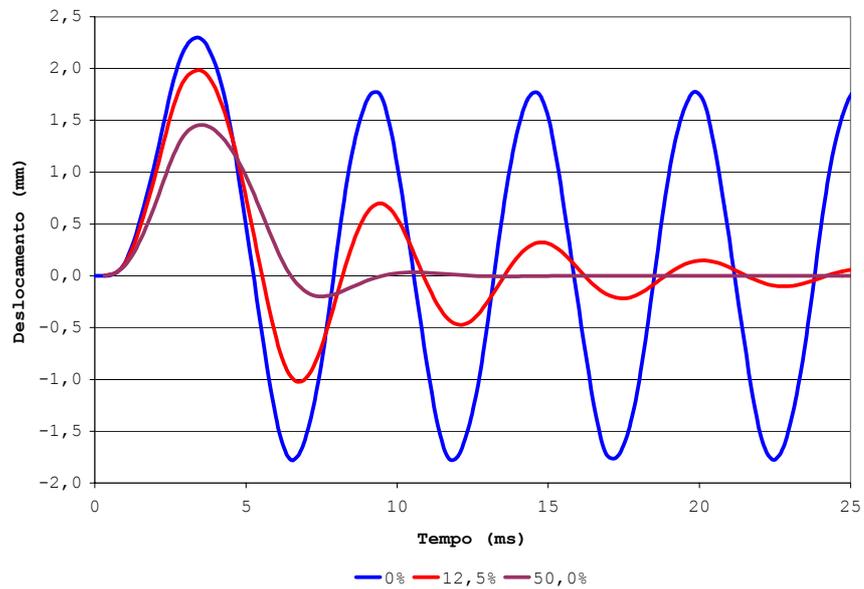


Figura 8.19 - Tempo x deslocamento do ponto central considerando-se a discretização com 64 elementos retangulares.

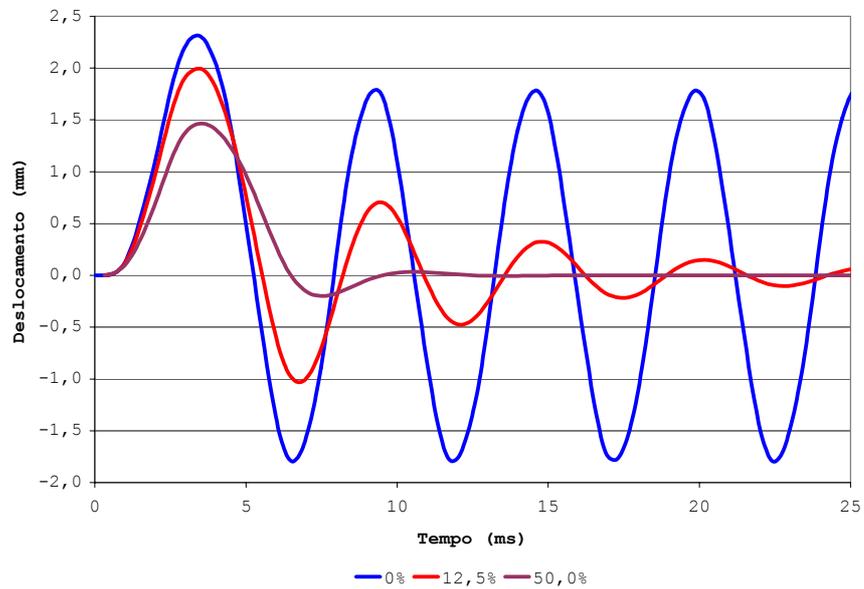


Figura 8.20 - Tempo x deslocamento do ponto central considerando-se a discretização com 128 elementos triangulares.

Os deslocamentos máximos obtidos para cada tipo de análise e discretização da placa são apresentados na tabela 8.2.

Tabela 8.2 - Deslocamentos máximos para os diversos tipos de análise.

Tipo de análise	Deslocamento máximo (mm)	
	Malha retangular	Malha triangular
Sem amortecimento	2,288	2,302
$\xi_1 = \xi_2 = 12,5\%$	1,973	1,985
$\xi_1 = \xi_2 = 50,0\%$	1,457	1,465

As figuras 8.19 e 8.20 ilustram o comportamento dinâmico da estrutura com e sem amortecimento. A discretização efetuada com elementos retangulares e triangulares produziu respostas praticamente idênticas, conforme pode ser observado pelas curvas e pelos valores máximos de deslocamento.

Em se tratando da análise dinâmica sem amortecimento observa-se que, durante o período de aplicação do carregamento ($0 \leq t \leq 5 \text{ ms}$), o deslocamento atinge o seu valor máximo. Para tempos superiores a 5 ms os deslocamentos passam a oscilar em torno de zero, uma vez que o carregamento não atua mais sobre o sistema.

Tal característica também pode ser verificada nas curvas onde há a presença do amortecimento. Neste caso, os deslocamentos atingem "picos" inferiores aos obtidos pela análise sem amortecimento e, posteriormente, oscilam até estabilizarem-se em valores iguais a zero.

Ainda com relação à análise com amortecimento, é interessante notar a influência das taxas de amortecimento no comportamento final do sistema. Quanto menor a taxa, maior o deslocamento máximo atingido e também maior o tempo necessário para que o sistema se estabilize em um valor constante.

Cabe aqui ressaltar a potencialidade do programa computacional desenvolvido. Através do mesmo é possível efetuar análise estática ou dinâmica, esta última com ou sem amortecimento. Os carregamentos podem ser aproximados por funções seno, co-seno, exponencial e outras funções matemáticas, bem como combinações entre as mesmas, além de permitir ao usuário a escolha entre discretização elaborada com elementos retangulares ou triangulares atuando isoladamente ou em conjunto.

8.5 - Exemplo 4 - Exemplo de aplicação

Neste exemplo procura-se fazer um estudo sobre o capítulo de ações dinâmicas e fadiga da nova norma NBR 6118:2003, que foi inserido devido a atual tendência de se projetar estruturas com elementos estruturais cada vez mais esbeltos e flexíveis, tornando-as mais susceptíveis às ações variáveis no tempo.

Em tal capítulo recomenda-se que "para assegurar o comportamento satisfatório das estruturas sujeitas a vibrações deve-se afastar o máximo possível a frequência própria da estrutura (f) da frequência crítica (f_{crit}) que depende da respectiva edificação". Para tal essa norma prescreve que " f " seja maior que " $1,2 \cdot f_{crit}$ ", onde os valores de " f_{crit} " estão relacionados na sua tabela 23.1, sendo, para o caso particular de pisos de escritórios, um valor entre 3 Hz e 4 Hz. Seguindo tal recomendação ficam os projetistas estruturais dispensados da verificação dinâmica de tais elementos estruturais.

Em sua versão anterior, a NBR 6118:1980 estabelece, em seu item 4.2.3.1 - C, que para lajes maciças

retangulares fica dispensado o cálculo das flechas quando a altura útil "d" não for inferior ao valor fornecido pela equação (8.1), onde "l" é o menor vão da laje, " ψ_2 " é um parâmetro dependente das condições de bordo, dado pela tabela 2 da norma, e " ψ_3 " é um parâmetro dependente do aço empregado.

$$d \geq \frac{l}{\psi_2 \cdot \psi_3} \quad (8.1)$$

Já Machado (1989) propôs trabalhar com os valores de altura útil "d" dados pela equação (8.2). Nesta equação, os valores para a altura útil são dados em centímetros e os valores dos vãos em metro. Para "n" utiliza-se o número de bordos engastados.

$$d \cong (2,5 - 0,1 \cdot n) l^* \quad (8.2)$$

sendo

$$l^* \leq \begin{cases} l_x \\ 0,7 \cdot l_y \end{cases} \quad \text{com } l_x \leq l_y$$

Cabe ressaltar que ao valor obtido para a altura útil da laje devem ser acrescentados o valor do cobrimento e a metade do diâmetro da armadura de flexão utilizada. Para os casos comuns de lajes no interior de edifícios usualmente acrescenta-se um centímetro ao valor de "d".

Neste contexto procura-se neste exemplo fazer um comparativo entre as espessuras determinadas por meio das recomendações descritas anteriormente e, além disso,

fornecer aos calculistas estruturais limites mínimos de espessura de diversos tipos de lajes maciças, armadas em cruz, comumente utilizadas em edifícios, permitindo, assim, a dispensa da verificação dinâmica estrutural de tais elementos.

Dessa forma, para cada laje estudada, determinam-se os valores das espessuras com o auxílio das equações (8.1) e (8.2) e, para a recomendação dinâmica, utiliza-se a discretização com 25 elementos finitos retangulares dispostos em uma malha de 5 x 5 elementos.

Utiliza-se, inicialmente, um concreto cujas características físicas são dadas por:

$$f_{ck} = 2,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{cm} = 950(10 \cdot f_{ck} + 8)^{1/3} = 2900,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ kN/cm}^3$$

$$\nu = 0,2$$

sendo o valor de " E_{cm} " calculado de acordo com o CEB (1978).

Posteriormente verifica-se também a recomendação dinâmica para dois outros valores de resistências de concreto: 30 e 40 MPa. Também nestes casos os valores do módulo de elasticidade longitudinal foram determinados em concordância com o CEB (1978).

Para as armaduras de flexão utilizam-se barras de aço CA 50A, o que leva a um parâmetro " ψ_3 " igual a 25.

As dimensões das lajes estudadas seguem o padrão ilustrado na figura 8.21, sendo, no estudo, admitidas lajes quadradas com relação entre os lados " l_y " e " l_x "

igual a unidade e lajes retangulares com a dimensão " l_y " igual ao dobro de " l_x " (relação máxima para lajes maciças armadas em cruz). Tais condições levam a parâmetros " ψ_2 " iguais a 1,5 para as lajes quadradas e 1,1 para as lajes retangulares.

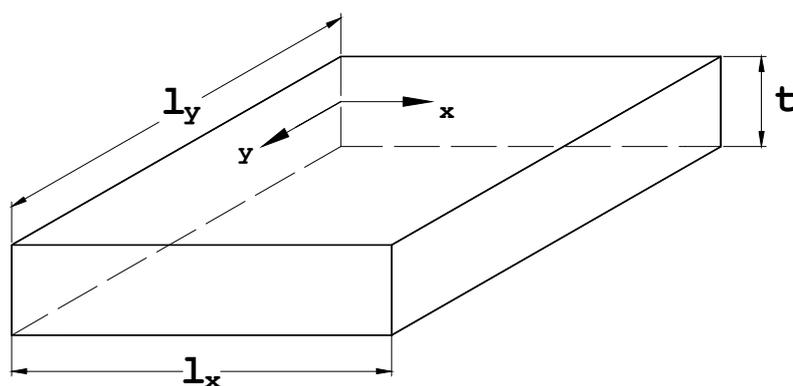


Figura 8.21 - Disposição geométrica das lajes.

O primeiro modo de vibração para lajes quadradas é ilustrado na figura 8.22.

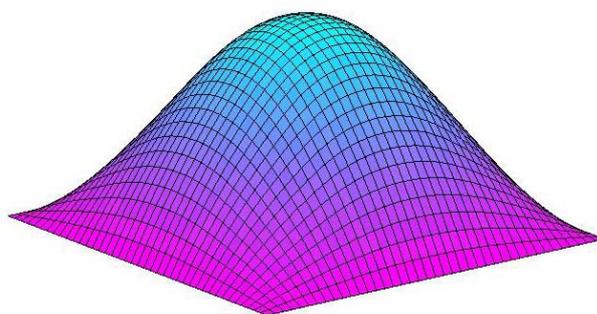


Figura 8.22 - Primeiro modo de vibração para lajes quadradas.

Os valores para a espessura obtidos para lajes quadradas considerando-se a resistência do concreto igual a 20 MPa são apresentados na tabela 8.3

Tabela 8.3 - Valores de espessuras obtidos para lajes quadradas com $f_{ck}=20\text{MPa}$.

Vãos (m)	Espessura (cm)			f (Hz)
	$d \geq \frac{l}{\psi_2 \cdot \psi_3}$	$d \cong (2,5 - 0,1 \cdot n)l^*$	$f > 1,2 \cdot f_{crit}$	
4,0 x 4,0	12,0	8,0	3,0	5,7
5,0 x 5,0	14,0	10,0	4,0	4,9
6,0 x 6,0	17,0	12,0	6,0	5,1
7,0 x 7,0	20,0	13,0	8,0	5,0
8,0 x 8,0	22,0	15,0	11,0	5,3
9,0 x 9,0	25,0	17,0	13,0	4,9
10,0 x 10,0	28,0	19,0	16,0	4,9
11,0 x 11,0	30,0	20,0	20,0	5,1
12,0 x 12,0	33,0	22,0	23,0	4,9

As relações entre espessura x vão para as diversas resistências de concreto estudadas, obedecendo-se à recomendação dinâmica, são apresentadas na figura 8.23.

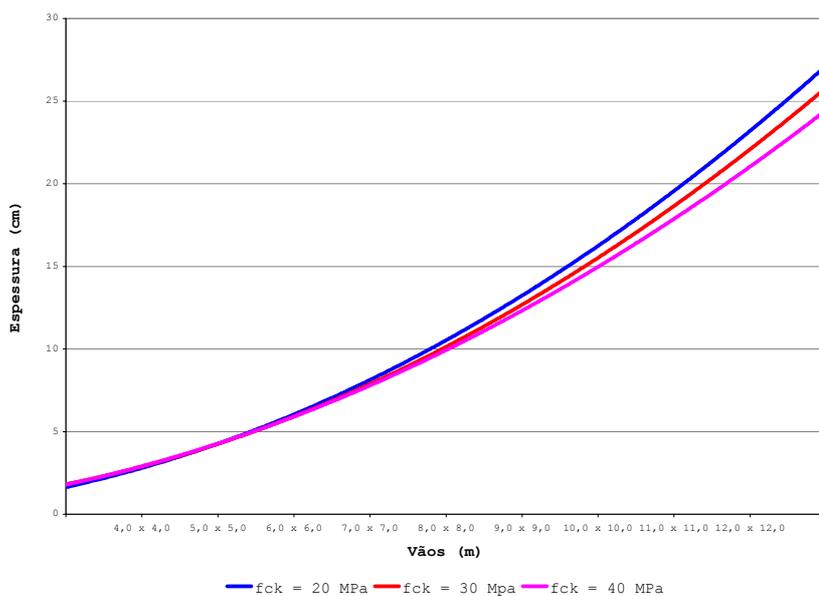


Figura 8.23 - Relação espessura x vão de lajes quadradas para diversos valores de resistência de concreto.

Seguindo-se o mesmo padrão, apresentam-se na seqüência os resultados obtidos para as lajes retangulares estudadas.

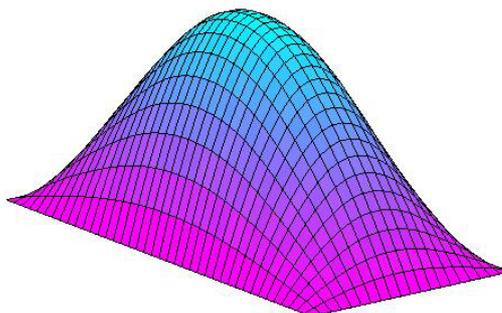


Figura 8.24 - Primeiro modo de vibração para lajes retangulares.

Tabela 8.4 - Valores de espessuras obtidos para lajes retangulares com $f_{ck}=20\text{MPa}$.

Vãos (m)	Espessura (cm)			f (Hz)
	$d \geq \frac{l}{\psi_2 \cdot \psi_3}$	$d \cong (2,5 - 0,1 \cdot n) l^*$	$f > 1,2 \cdot f_{crit}$	
2,0 x 4,0	8,0	6,0	2,0	6,9
2,5 x 5,0	9,0	7,0	3,0	6,6
3,0 x 6,0	12,0	9,0	4,0	6,1
3,5 x 7,0	14,0	10,0	5,0	5,6
4,0 x 8,0	15,0	11,0	6,0	5,5
4,5 x 9,0	17,0	12,0	8,0	5,4
5,0 x 10,0	19,0	14,0	9,0	4,9
5,5 x 11,0	21,0	15,0	11,0	5,0
6,0 x 12,0	23,0	16,0	13,0	5,0

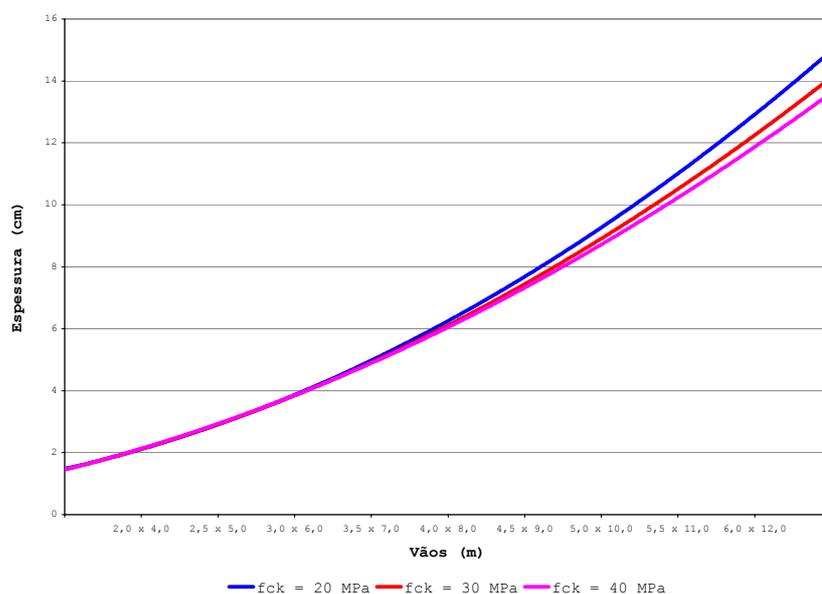


Figura 8.25 - Relação espessura x vão de lajes retangulares para diversos valores de resistência de concreto.

Analisando-se os resultados apresentados, verifica-se que as espessuras obtidas por meio da recomendação descrita no item 4.2.3.1 - C da norma NBR 6118:1980, que prevê a dispensa do cálculo de flecha, são muito superiores aos valores obtidos pela recomendação da nova norma NBR 6118:2003 que prevê a dispensa da verificação da análise dinâmica.

Já os valores obtidos através da proposta feita por Machado (1989) apresentam a mesma característica descrita no parágrafo anterior, porém com valores um pouco mais próximos da espessura que dispensa a análise dinâmica estrutural.

Conclui-se, assim, que as lajes dimensionadas seguindo as recomendações da NBR 6118:1980 e de Machado (1989), satisfazem a recomendação dinâmica da nova norma,

não sendo necessário, portanto, uma análise dinâmica estrutural em tais elementos.

Por fim, apresenta-se a equação deduzida (8.3) que fornece valores mínimos aproximados para espessura de pisos maciços de edifícios, armados em cruz, com todos os bordos, no mínimo, apoiados, de modo a garantir, de acordo com a norma NBR 6118:2003, a dispensa da análise dinâmica estrutural, sendo que, nesse caso, a verificação da flecha se faz necessária.

$$t = \left[\left(\frac{1}{5,90} \right) \cdot \frac{l_y^2}{l_0} - \left(\frac{1}{4,95} \right) \cdot l_y + \left(\frac{1}{0,90} \right) \cdot l_0 \right] \cdot \frac{l_x}{l_y} \cdot \left(1 - \frac{E - E_0}{1,85 \cdot E} \right) \quad (8.3)$$

onde "E" é dado em kN/cm^2 , "l" em metros e "t" em cm, sendo

E_0 : módulo de elasticidade longitudinal de referência igual à $2900 kN/cm^2$;

l_0 : vão de referência igual a 1 metro;

$l_y \geq l_x$.

Visando ilustrar os modos de vibração de lajes quadradas e retangulares apresentam-se, na seqüência, os quatro primeiros modos de vibração para tais elementos estruturais.

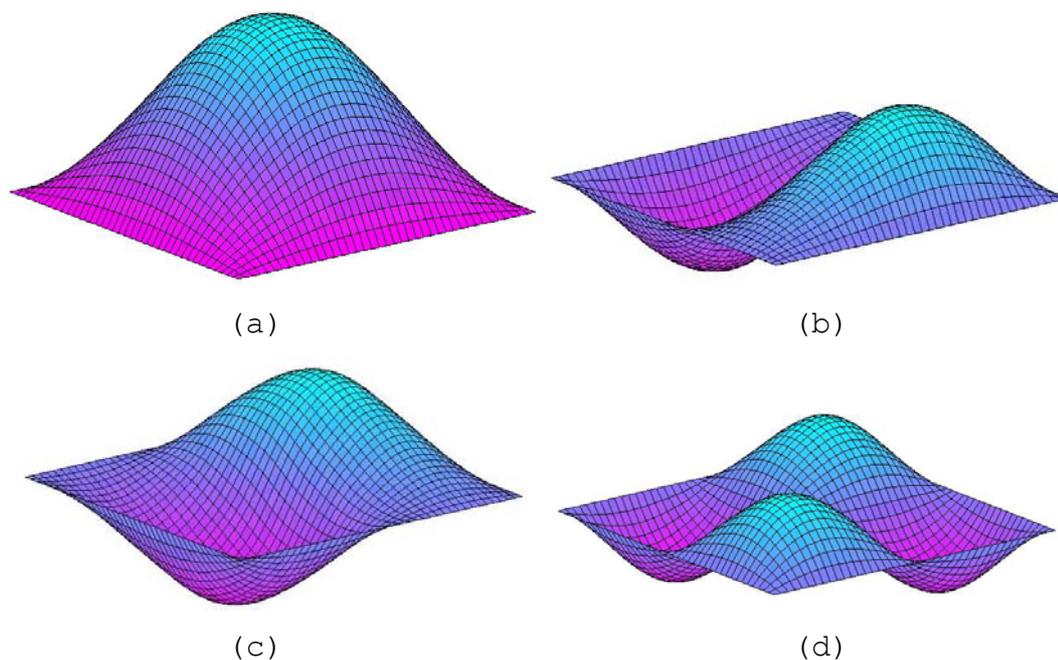


Figura 8.26 - Laje quadrada: (a) Primeiro modo de vibração; (b) Segundo modo de vibração; (c) Terceiro modo de vibração; (d) Quarto modo de vibração.

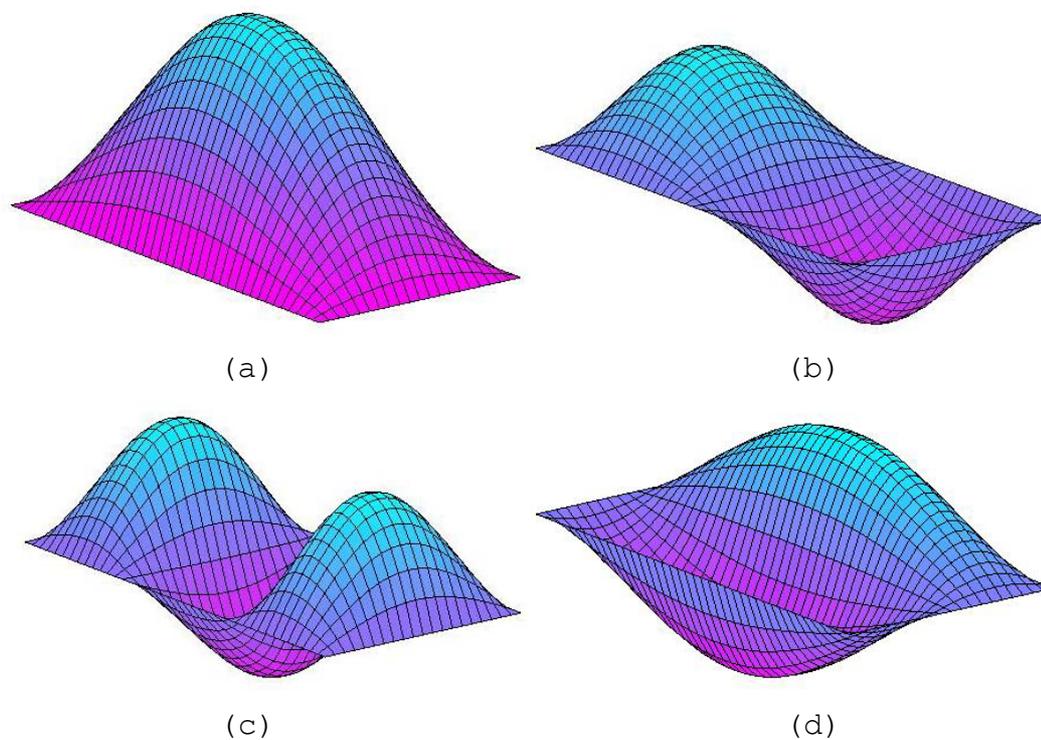


Figura 8.27 - Laje retangular: (a) Primeiro modo de vibração; (b) Segundo modo de vibração; (c) Terceiro modo de vibração; (d) Quarto modo de vibração.

CAPÍTULO 9 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

9.1 - Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo principal analisar o comportamento linear estático e dinâmico de placas delgadas sob a óptica do método dos elementos finitos. Para isso utiliza-se a discretização estrutural feita com elementos finitos triangulares e retangulares atuando isoladamente e em conjunto.

Em uma primeira etapa procurou-se estabelecer toda a teoria referente ao assunto em questão. Foram apresentadas algumas considerações sobre a análise dinâmica estrutural via método dos elementos finitos, o método de Newmark para integração numérica da equação do movimento e uma breve descrição da teoria clássica de flexão de placas. As matrizes de rigidez elástica e de massas dos elementos finitos triangular e retangular foram elaboradas utilizando-se a formulação com coordenadas homogêneas e a matriz de amortecimento caracterizada por meio do método de Rayleigh.

Uma vez estabelecida toda a teoria, desenvolveu-se um programa computacional que contempla diversos tipos de análise numérica, possibilitando caracterizar amplamente o comportamento estrutural de tais sistemas.

Neste contexto, os problemas que foram desenvolvidos no capítulo 8 indicam, por exemplo, que, apesar da utilização de elementos de concepção simples, bons resultados foram alcançados quando comparados aos obtidos por outros pesquisadores. Apenas em se tratando de placas engastadas, os resultados levaram a conclusão que tais

elementos não fornecem valores precisos de momentos nos bordos.

A influência da maior discretização da malha na precisão dos resultados finais ficou evidenciada, indicando, ainda, que malhas compostas somente por elementos retangulares fornecem bons resultados com uma menor quantidade de elementos quando comparadas às malhas compostas apenas por elementos triangulares. Tais resultados comprovam a melhor aproximação do elemento retangular, uma vez que este utiliza um polinômio de grau mais elevado como sua função aproximadora.

Tal fato também ficou demonstrado nos resultados obtidos com os dois elementos atuando em conjunto. Neste caso os resultados finais são intermediários aos obtidos utilizando-se os elementos de forma individual.

Os problemas relativos à análise dinâmica com amortecimento demonstraram a importância da correta caracterização dos parâmetros de amortecimento " ξ_i ", uma vez que esses possuem influência direta nos deslocamentos máximos e no tempo de estabilização dos mesmos.

Por fim, o estudo baseado no capítulo de ações dinâmicas e de fadiga da nova norma NBR 6118:2003, além de gerar uma equação que fornece valores mínimos de projeto aos calculistas estruturais, permitiu concluir que lajes dimensionadas segundo a recomendação da sua versão anterior, a NBR 6118:1980, estão dispensadas da análise dinâmica.

Sendo assim o autor deste trabalho espera ter cumprido todos os objetivos propostos inicialmente e, além disso, ter contribuído, de alguma forma, para o aprimoramento da análise de estruturas usualmente empregadas na Engenharia Estrutural.

9.2 - Propostas de desenvolvimento

Neste item procura-se apresentar algumas propostas de desenvolvimento visando o prosseguimento das pesquisas, uma vez que tal trabalho está inserido dentro de um contexto mais extenso.

Como perspectiva imediata pode-se sugerir o desenvolvimento e a inserção de novos elementos finitos no *software* desenvolvido, como, por exemplo, elementos retangulares de oito nós e triangulares de seis nós.

Como perspectiva futura sugere-se o estudo de outras teorias de flexão de placas, possibilitando, assim, uma gama maior de relação espessura / vão de placas a serem analisadas.

Ainda como perspectiva futura pode-se propor a incorporação de outros tipos de sistemas estruturais e, ainda, a consideração de não-linearidades, física e/ou geométrica, uma vez que o programa desenvolvido apresenta subsídios para uma rápida e fácil modificação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- ARGYRIS, J. H.; MLEJNEK, H. P. **Dynamics of structures**. Netherlands: Elsevier Science, 1991. v.5.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto: procedimento**, NBR 6118. Rio de Janeiro, 2003. 170p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto e execução de obras de concreto armado**, NBR 6118. Rio de Janeiro, 1980. 53p.
- BARES, R. **Tablas para el calculo de placas y vigas pared**. Barcelona: Gustavo Gili, 1972. 537p.
- BATHE, K.J. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996. 1037p.
- BATHE, K.J.; WILSON, E.L. Stability and accuracy analysis of direct integration methods. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v.1, p.283-291. 1973.
- BIGGS, J.M. **Introduction to structural dynamics**. New York: McGraw-Hill, 1964. 341p.
- BRASIL, R.M.L.R.F. **Não-linearidade geométrica na dinâmica de estruturas aporticadas planas: um tratamento pelo método dos elementos finitos**. 223 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1990.
- BREBBIA, C.A.; CONNOR, J.J. **Fundamentals of finite element techniques for structural engineers**. Hungary: Butterworth Group, 1973. 269p.
- CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. New York: McGraw-Hill, 1975. 633p.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON. **Model code for concrete structures**. Bulletin D' Information. Lausanne, 1978. n.124/125.

COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. **Concepts and applications of finite element analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1989. 630p.

DANSON, D.J. **Analysis of plate bending problems by the direct boundary element method**. 93 f. Dissertation (MSc. in Advanced Structural Engineering) - Faculty of Engineering and Applied Science, University of Southampton, 1980.

DEGASPARE, J.C. **Aplicações do elemento finito T18 para flexão de placas delgadas elástico-isótropas**. 139 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1978.

DIOGO, L.A.C. **Análise das placas em regime elasto-plástico pelo método dos elementos finitos**. Anais Epusp, São Paulo, v.1, n.1b, p. 773-786, 1988.

FERRAZ, J.C.F. **Método dos elementos finitos na solução de placas solicitadas no seu plano ou fletidas: vinculação com o método de Ritz**. São Paulo: Epusp, 1987. 15p. Boletim técnico BT/PEF-8712.

GARZERI, F.J. **Elementos finitos (via resíduos ponderados) na análise dinâmica de placas de comportamento linear**. 124 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

HENRYCH, J. **Finite models and methods of dynamics in structures**. Czechoslovakia: Elsevier Science, 1990. 541p.

HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K. Implicit-explicit finite elements in transient analysis: implementation and numerical examples. **Journal of Applied Mechanics**, v.45, p.375-378. 1978.

HURTY, W.C.; RUBINSTEIN, M.F. **Dynamics of structures**. New Delhi: Prentice-Hall of India Private, 1967. 455p.

MACHADO, C. P. **Tensões, deformações e deslocamentos em estruturas de concreto armado e protendido**. v.4, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1989.

MARTINELLI, D.A.O.; MONATANARI, I.; SAVASSI, W. **Placas elásticas: equações gerais e placas retangulares**. Conceituação teórica, métodos das diferenças finitas e elementos finitos. São Carlos: EESC, 1986. 114p. Publicação 026/86

PAZ, M. **Structural dynamics: theory and computation**. New York: VNR, 1991. 626p.

RIBEIRO, G.O. **Sobre a formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas usando as hipóteses de Reissner**. 267 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

RODRIGUES, R.O. **Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado**. 275 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

SAVASSI, W. **Introdução ao método dos elementos finitos: em análise linear de estruturas**. São Carlos: EESC-USP, 1996. 260p.

SORIANO, H. L. **Sistemas de equações algébricas lineares em problemas estruturais.** Lisboa: Ministério da Habitação e Obras Públicas, 1981. Seminário 280.

TIMOSHENKO, S.P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells.** 2nd edition. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1959, 580p.

VENÂNCIO FILHO, F. Plate bending. In: BREBBIA, C.A.; FERRANTE, A.J. **The finite element technique: an introduction for engineers.** Porto Alegre: Edições URGs, 1975a. Cap 7, p. 222-249.

VENÂNCIO FILHO, F. Vibration and dynamic analysis. In: BREBBIA, C.A.; FERRANTE, A.J. **The finite element technique: an introduction for engineers.** Porto Alegre: Edições URGs, 1975b. Cap 9, p. 313-352.

ZIENIEWICZ, O. C.; CHEUNG, Y. K. Bending of plates. In: _____. **The finite element method in structural and continuum mechanics: numerical solution of problems in structural and continuum mechanics.** London: McGraw-Hill, 1968. Cap 7, p. 89-123.

ANEXO

Coeficientes da matriz de rigidez do elemento finito triangular para placas delgadas.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(1,1) = & - (2/3)n_3^2n_1n_2 + (4/3)n_1^2n_2n_3 - (2/3)n_2^2n_1n_3 - \\ & (2/3)m_3^2m_1m_2 + (4/3)m_1^2m_2m_3 - (2/3)m_2^2m_1m_3 + (2/3)n_1^2n_3^2 - (2/3)n_1^3n_2 \\ & + (2/3)n_1^2n_2^2 - (2/3)n_1^3n_3 + (2/3)n_3^2n_2^2 - (2/3)n_3^3n_1 - (2/3)n_1n_2^3 + \\ & (2/3)m_1^2m_3^2 - (2/3)m_1^3m_2 + (2/3)m_1^2m_2^2 - (2/3)m_1^3m_3 + (2/3)m_3^2m_2^2 - \\ & (2/3)m_3^3m_1 - (2/3)m_1m_2^3 + n_1^4 + (1/3)n_3^4 + (1/3)n_2^4 + m_1^4 + (1/3)m_3^4 \\ & + (1/3)m_2^4 + \mu[+ (4/3)m_3^2n_1^2 + (4/3)m_1^2n_2^2 + (4/3)m_1^2n_3^2 + \\ & (4/3)m_2^2n_1^2 - (4/3)m_1^2n_3n_1 - (4/3)m_1n_3^2m_3 + (4/3)m_1^2n_3n_2 - \\ & (4/3)m_3n_1^2m_1 - (4/3)m_3^2n_1n_3 + (4/3)m_3n_1^2m_2 - (4/3)m_1^2n_2n_1 - \\ & (4/3)m_1n_2^2m_2 - (4/3)m_2n_1^2m_1 - (4/3)m_2^2n_1n_2 + 4m_1^2n_1^2 + (4/3)m_3^2n_3^2 + \\ & (4/3)m_2^2n_2^2 + (4/3)m_1n_3m_2n_1 - (4/3)m_1n_3m_2n_2 + (4/3)m_3n_1m_1n_2 - \\ & (4/3)m_3n_1m_2n_2 - (4/3)m_1n_2m_3n_3 - (4/3)m_2n_1m_3n_3 + (8/3)m_3n_3m_2n_2] + \nu[- \\ & (2/3)m_1^2n_1n_2 - (2/3)m_1^2n_1n_3 - (2/3)m_3^2n_1n_2 - (2/3)m_3^2n_1n_3 - \\ & (2/3)m_1m_2n_1^2 - (2/3)m_1m_2n_3^2 - (2/3)m_1m_2n_2^2 - (2/3)m_2^2n_1n_2 - \\ & (2/3)m_2^2n_1n_3 - (2/3)m_1m_3n_1^2 - (2/3)m_1m_3n_3^2 - (2/3)m_1m_3n_2^2 + 2m_1^2n_1^2 - \\ & (2/3)m_1^2n_3^2 - (2/3)m_1^2n_2^2 - (2/3)m_3^2n_1^2 + (2/3)m_3^2n_3^2 + (2/3)m_3^2n_2^2 - \\ & (2/3)m_2^2n_1^2 + (2/3)m_2^2n_3^2 + (2/3)m_2^2n_2^2 + (8/3)m_1m_2n_1n_2 + \\ & (4/3)m_1m_2n_1n_3 + (4/3)m_1m_3n_1n_2 + (8/3)m_1m_3n_1n_3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(1,2) = & + (1/12)m_1^2m_3^2m_2 - (1/12)m_1^2m_2^2m_3 - (1/6)m_3^3m_1m_2 + \\ & 1/4m_1^4m_2 + (1/6)m_3^4m_2 - (1/6)m_3^3m_2^2 - (1/12)m_2^3m_1^2 + (1/6)m_2^3m_3^2 - \\ & (1/6)m_2^4m_3 + 1/4n_1^4m_2 - (1/6)n_2^4m_3 - 1/4n_1^4m_3 - 1/4m_1^4m_3 + \\ & (1/12)m_3^3m_1^2 + (1/2)n_3^2n_2m_3n_1 - (1/6)n_1n_2n_3^2m_2 + (1/3)n_1^2n_2n_3m_2 - \\ & (1/2)n_2^2n_3m_2n_1 + (1/6)n_1n_3n_2^2m_3 - (1/3)n_1^2n_3n_2m_3 + (1/6)n_3^4m_2 + \\ & (1/6)m_1m_2^3m_3 - 5/12n_1^2n_2^2m_3 - (1/3)n_1^3n_2m_3 + 5/12n_1^2n_3^2m_2 \\ & + (1/3)n_1^3n_3m_2 - (1/6)n_3^2n_2^2m_3 - (2/3)n_3^3m_2n_1 + (2/3)n_1n_2^3m_3 - \\ & (1/12)n_2^2n_1^2m_2 + (1/6)n_2^2n_3^2m_2 + (1/12)n_3^2n_1^2m_3 + \mu[- m_1^2n_1^2m_3 + \\ & m_1^2n_1^2m_2 + (2/3)m_1^2n_3^2m_2 + (1/3)m_3^2n_1^2m_2 - (2/3)m_1^2n_1m_3n_2 + \\ & (2/3)m_1^2n_1m_2n_3 - (1/3)m_1^2n_3m_3n_2 - (1/3)m_3^2n_1m_1n_2 + (1/3)m_1^2n_2m_2n_3 - \\ & (2/3)m_1^2n_2^2m_3 - (1/3)m_2^2n_1^2m_3 + (2/3)m_3^2n_3^2m_2 - (2/3)m_2^2n_2^2m_3 + \\ & (1/3)m_2^2n_1m_1n_3 - (4/3)m_1n_3^2m_3m_2 + (1/3)m_3^2n_1m_2n_2 - (1/3)m_3^2n_1n_3m_2 + \\ & (4/3)m_1n_2^2m_2m_3 + (1/3)m_2^2n_1n_2m_3 - (1/3)m_2^2n_1m_3n_3 - (2/3)m_3^2n_3m_2n_2 + \\ & m_3^2n_3m_1n_2 - (1/3)m_2^2n_2m_1n_1 + (2/3)m_2^2n_2m_3n_3 - m_2^2n_2m_1n_3 + \\ & (1/3)m_3^2n_3m_1n_1] + \nu[+ (1/2)n_1^2m_1^2m_2 - 1/4n_1^2m_3^2m_2 + 1/4n_1^2m_2^2m_3 - \\ & 1/4n_3^2m_1^2m_2 + (1/3)n_3^2m_3^2m_2 - (1/6)n_3^2m_2^2m_3 - (1/12)n_2^2m_1^2m_2 + \\ & (1/6)n_2^2m_3^2m_2 - (1/3)n_2^2m_2^2m_3 + 1/4m_1^2n_2^2m_3 + (1/2)m_3^3n_2n_1 - \\ & (1/6)m_1m_2^2n_3^2 - (1/2)m_2^3n_3n_1 + (1/6)m_1m_3^2n_2^2 - (1/2)m_1^2n_1^2m_3 + \\ & (1/12)n_3^2m_1^2m_3 - (1/3)m_1^2n_2m_3n_1 - (1/6)m_3^3n_2^2 - (1/12)m_2^3n_1^2 + \\ & (1/6)m_2^3n_3^2 + (1/12)m_3^3n_1^2 - (1/6)n_3^2m_1m_2m_3 - (1/6)n_1n_2m_3^2m_2 - \\ & n_1n_2m_1m_2m_3 + (2/3)n_1n_2m_2^2m_3 + (1/6)n_2^2m_1m_2m_3 + (1/3)n_1n_3m_1^2m_2 - \\ & (2/3)n_1n_3m_3^2m_2 + n_1n_3m_1m_2m_3 + (1/6)n_1n_3m_2^2m_3 + (1/3)m_1m_2^2n_3n_1 - \\ & (1/3)m_1m_3^2n_2n_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(1,3) = & + (5/12)m_1^2m_2^2n_3 + (1/3)m_1^3m_2n_3 - (5/12)m_1^2m_3^2n_2 - \\ & (1/12)m_3^2m_1^2n_3 - (1/12)n_3^3n_1^2 - (1/6)m_2^2m_3^2n_2 - (1/6)m_3^4n_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/6)m_2^4n_3 - (1/4)n_1^4n_2 + (1/12)m_2^2m_1^2n_2 - (2/3)m_1m_2^3n_3 - \\
& (1/3)m_1^3m_3n_2 + (2/3)m_1m_3^3n_2 - (1/4)m_1^4n_2 + (1/6)n_3^3n_1n_2 + \\
& (1/6)m_3^2m_2^2n_3 - (1/6)m_1m_3m_2^2n_3 - (1/12)n_1^2n_3^2n_2 + (1/12)n_1^2n_2^2n_3 - \\
& (1/6)n_1n_2^3n_3 + (1/2)m_2^2m_3m_1n_2 - (1/2)m_3^2m_2m_1n_3 - (1/3)m_1^2m_2m_3n_2 + \\
& (1/6)m_1m_2m_3^2n_2 + (1/3)m_1^2m_3m_2n_3 - (1/6)n_3^4n_2 + (1/6)n_3^3n_2^2 + \\
& (1/12)n_2^3n_1^2 - (1/6)n_2^3n_3^2 + (1/6)n_2^4n_3 + (1/4)n_1^4n_3 + \mu[- \\
& (2/3)m_3^2n_1^2n_2 - (1/3)m_1^2n_3^2n_2 + (1/3)m_1^2n_2^2n_3 - (1/3)m_1n_3^2m_2n_2 - \\
& (2/3)m_3^2n_3^2n_2 + (2/3)m_2^2n_2^2n_3 + (2/3)m_3n_3^2m_2n_2 + (1/3)m_1n_2^2m_3n_3 - \\
& (2/3)m_2n_2^2m_3n_3 - (1/3)m_2n_1^2n_2m_3 + (1/3)m_1n_3^2m_2n_1 - (2/3)m_3n_1^2m_1n_2 + \\
& (1/3)m_3n_1^2n_3m_2 - (1/3)m_1n_2^2m_3n_1 + (2/3)m_2^2n_1^2n_3 + m_1^2n_1^2n_3 - m_1^2n_1^2n_2 + \\
& (2/3)m_1n_1^2n_3m_2 + (1/3)m_3n_3^2n_2m_1 + (1/3)m_2n_2^2m_1n_1 - (4/3)m_2^2n_2n_3n_1 + \\
& (4/3)m_3^2n_3n_2n_1 - m_3n_3^2m_2n_1 - (1/3)m_2n_2^2m_1n_3 + m_2n_2^2m_3n_1 - \\
& (1/3)m_3n_3^2m_1n_1] + \nu[- (1/6)m_1m_3n_2^2n_3 - (1/12)n_3^3m_1^2 - (1/12)m_3^2n_1^2n_3 \\
& - (1/3)n_3^2m_3^2n_2 + (1/3)n_2^2m_2^2n_3 + (1/6)n_3^3m_2^2 - (1/6)n_2^3m_3^2 + \\
& (2/3)n_3^2m_3m_1n_2 - (2/3)n_2^2m_2m_1n_3 + (1/12)n_2^3m_1^2 - (1/6)n_1n_2m_2^2n_3 + \\
& n_1n_2m_2m_1n_3 - (1/3)n_1n_2^2m_3m_1 - n_1n_3m_3m_1n_2 + (1/3)n_1^2m_2m_1n_3 - \\
& (1/3)n_1^2m_3m_1n_2 + (1/3)n_1n_3^2m_2m_1 + (1/6)n_1n_3m_3^2n_2 + (1/6)m_1m_2n_3^2n_2 + \\
& (1/6)m_3^2n_2^2n_3 + (1/12)m_2^2n_1^2n_2 - (1/6)n_1n_3^2m_2^2 + (1/4)n_1^2m_3^2n_2 - \\
& (1/2)n_1^2m_1^2n_2 - (1/4)m_1^2n_2^2n_3 - (1/4)n_1^2m_2^2n_3 + (1/6)n_1n_2^2m_3^2 - \\
& (1/6)m_2^2n_3^2n_2 + (1/2)n_2^3m_3m_1 - (1/2)n_3^3m_2m_1 + (1/4)n_3^2m_1^2n_2 + \\
& (1/4)m_1^4n_3 + (1/2)m_1^2n_1^2n_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(1,4) = & + (4/3)n_3^2n_1n_2 - (2/3)n_1^2n_2n_3 - (2/3)n_2^2n_1n_3 + \\
& (4/3)m_3^2m_1m_2 - (2/3)m_1^2m_2m_3 - (2/3)m_2^2m_1m_3 - (1/3)n_1^2n_3^2 + (2/3)n_1^3n_2 \\
& - (1/3)n_1^2n_2^2 - (1/3)n_3^2n_2^2 + (2/3)n_1n_2^3 - (1/3)m_1^2m_3^2 + (2/3)m_1^3m_2 \\
& - (1/3)m_1^2m_2^2 - (1/3)m_3^2m_2^2 + (2/3)m_1m_2^3 - (1/2)n_1^4 + (1/6)n_3^4 - \\
& (1/2)n_2^4 - (1/2)m_1^4 + (1/6)m_3^4 - (1/2)m_2^4 + \mu[- (4/3)m_1^2n_2^2 + \\
& (2/3)m_1n_3^2m_2 + (2/3)m_3^2n_1n_2 - (2/3)m_1n_2^2m_3 - (2/3)m_2^2n_1n_3 - \\
& (4/3)m_2^2n_1^2 - (2/3)m_1^2n_3n_2 - (2/3)m_3n_1^2m_2 + (4/3)m_1^2n_2n_1 + \\
& (4/3)m_1n_2^2m_2 + (4/3)m_2n_1^2m_1 + (4/3)m_2^2n_1n_2 - 2m_1^2n_1^2 + (2/3)m_3^2n_3^2 - \\
& 2m_2^2n_2^2 - (2/3)m_1n_3m_2n_1 - (2/3)m_1n_3m_2n_2 - (2/3)m_3n_1m_1n_2 - \\
& (2/3)m_3n_1m_2n_2 + 2m_1n_2m_3n_3 + 2m_2n_1m_3n_3 - (4/3)m_3n_3m_2n_2 + (4/3)m_1n_2m_2n_1 \\
& - (4/3)m_1n_1m_3n_3] + \nu[+ (2/3)m_1^2n_1n_2 + (2/3)m_3^2n_1n_2 + (2/3)m_1m_2n_1^2 + \\
& (2/3)m_1m_2n_3^2 + (2/3)m_1m_2n_2^2 + (2/3)m_2^2n_1n_2 - m_1^2n_1^2 - (1/3)m_1^2n_3^2 \\
& + m_1^2n_2^2 - (1/3)m_3^2n_1^2 + (1/3)m_3^2n_3^2 - (1/3)m_3^2n_2^2 + m_2^2n_1^2 - \\
& (1/3)m_2^2n_3^2 - m_2^2n_2^2 - (8/3)m_1m_2n_1n_2 - (2/3)m_1m_2n_1n_3 - (2/3)m_1m_3n_1n_2 - \\
& (2/3)n_1n_2m_2m_3 + (2/3)m_1m_3n_2n_3 - (2/3)m_1m_2n_2n_3 + (2/3)n_1n_3m_2m_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(1,5) = & - (1/4)n_1^2n_2^2m_1 - (2/3)n_1^2n_2m_1n_3 - (1/2)n_1n_3^2n_2m_1 + \\
& (1/2)n_1n_3n_2^2m_1 - (5/6)m_1^2m_3^2m_2 + (1/12)m_1^2m_2^2m_3 + (1/6)m_3^3m_1m_2 - \\
& (1/4)m_1^3m_2^2 + (1/4)m_1^3m_3^2 + (1/4)n_1^2n_3^2m_1 + (1/3)m_1^3m_2m_3 + \\
& (1/6)m_1m_3^2m_2^2 - (1/6)m_3^3m_2^2 - (1/6)m_2^4m_3 - (1/6)n_2^4m_3 - (1/4)n_1^4m_3 - \\
& (1/4)m_1^4m_3 + (1/12)m_3^3m_1^2 - (1/6)n_3^2n_2m_3n_1 + (1/6)n_1n_3n_2^2m_3 - \\
& (1/3)n_1^2n_3n_2m_3 + (1/3)m_1m_2^3m_3 - (5/12)n_1^2n_2^2m_3 + n_1^3n_2m_3 - \\
& (1/6)n_3^2n_2^2m_3 + (1/12)n_3^2n_1^2m_3 + (1/12)m_2^4m_1 - (1/12)m_3^4m_1 + \\
& (1/12)n_2^4m_1 + (1/3)n_3^3n_2m_1 + (1/3)n_2^3m_1n_3 - (1/12)n_3^4m_1 + \mu[-m_1^2n_1^2m_3 \\
& - (1/3)m_1^2n_3^2m_2 - (1/3)m_3^2n_1^2m_2 + m_1^2n_3n_1m_3 - m_1n_3m_3m_2n_1 + \\
& (1/3)m_3n_1m_2n_2m_1 + 2m_2n_1^2m_1m_3 + (2/3)m_1^2n_1m_3n_2 - (4/3)m_1^2n_1m_2n_3 - \\
& m_1^2n_3m_3n_2 - (2/3)m_3^2n_1m_1n_2 + (2/3)m_1^2n_2m_2n_3 - (1/3)m_1^2n_2^2m_3 - \\
& (2/3)m_2^2n_1^2m_3 - (2/3)m_2^2n_2^2m_3 + (1/3)m_2^2n_1m_1n_3 + (2/3)m_1n_3^2m_3m_2 + \\
& (1/3)m_3^2n_1m_2n_2 - (1/3)m_3^2n_1n_3m_2 + (2/3)m_1n_2^2m_2m_3 - (2/3)m_3^2n_3m_2n_2 + \\
& (1/3)m_3^2n_3m_1n_2 + (2/3)m_2^2n_2m_1n_3 + (1/3)m_3^2n_3m_1n_1 - m_1^2n_1m_2n_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/3)m_1n_3m_2n_2m_3 + (1/3)m_2^2n_2^2m_1 - (1/3)m_3^2n_3^2m_1] + \upsilon[+ (1/4)m_1^3n_3^2 - \\
& (2/3)m_1^3n_2n_3 + (1/4)m_1m_3^2n_1^2 - (1/3)m_1^2m_3n_2n_3 - (1/4)m_1^3n_2^2 + \\
& (1/3)m_1^2m_2n_2n_3 - (1/4)n_1^2m_2^2m_1 + (1/6)n_2^2m_2^2m_1 - (1/6)n_3^2m_3^2m_1 + \\
& (1/4)n_1^2m_2^2m_3 - (1/6)n_3^2m_1^2m_2 - (1/6)n_3^2m_2^2m_3 - (1/3)n_2^2m_2^2m_3 + \\
& (5/12)m_1^2n_2^2m_3 - (1/6)m_3^3n_2n_1 + (1/6)m_1m_3^2n_2^2 - (1/2)m_1^2n_1^2m_3 + \\
& (1/12)n_3^2m_1^2m_3 + m_1^2n_2m_3n_1 - (1/6)m_3^3n_2^2 + (1/12)m_3^3n_1^2 + \\
& (1/6)n_3^2m_1m_2m_3 - n_1n_2m_1m_2m_3 + (1/3)n_2^2m_1m_2m_3 - (2/3)n_1n_3m_1m_2m_3 + \\
& (1/6)n_1n_3m_2^2m_3 + (1/6)m_1m_2^2n_3n_1 - (1/2)m_1m_3^2n_2n_1 + (1/3)m_1m_2n_1^2m_3 + \\
& (1/3)m_3^2n_2m_1n_3 + (1/3)m_2^2n_2m_1n_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(1,6) = & + (5/12)m_1^2m_2^2n_3 - m_1^3m_2n_3 - (1/12)m_3^2m_1^2n_3 - (1/12)n_3^3n_1^2 \\
& + (1/6)m_2^4n_3 - (1/6)n_3^3n_1n_2 + (1/6)m_3^2m_2^2n_3 - (1/6)m_1m_3m_2^2n_3 + \\
& (5/6)n_1^2n_3^2n_2 - (1/3)n_1^3n_2n_3 - (1/12)n_1^2n_2^2n_3 - (1/3)n_1n_2^3n_3 - \\
& (1/6)n_1n_2^2n_3^2 + (1/6)m_3^2m_2m_1n_3 + (1/3)m_1^2m_3m_2n_3 + (1/6)n_3^3n_2^2 + \\
& (1/4)n_1^3n_2^2 + (1/6)n_2^4n_3 + (1/4)m_1^4n_3 - (1/4)n_1^3n_3^2 + (1/4)n_1^4n_3 + \\
& (2/3)m_1^2m_3m_2n_1 - (1/2)m_1m_2^2m_3n_1 + (1/2)m_1m_3^2m_2n_1 + (1/4)m_1^2m_2^2n_1 - \\
& (1/3)m_3^3m_2n_1 - (1/3)m_2^3m_3n_1 - (1/4)m_1^2m_3^2n_1 - (1/12)n_2^4n_1 - \\
& (1/12)m_2^4n_1 + (1/12)n_3^4n_1 + (1/12)m_3^4n_1 + \mu[+ (1/3)m_3^2n_1^2n_2 + \\
& (1/3)m_1^2n_3^2n_2 + (2/3)m_1^2n_2^2n_3 - (1/3)m_1n_3^2m_2n_2 - (1/3)m_3n_1m_2n_2n_3 + \\
& (2/3)m_2^2n_2^2n_3 + (2/3)m_3n_3^2m_2n_2 - (1/3)m_1n_2n_3m_2n_1 - (2/3)m_2n_1^2n_2m_3 \\
& + m_2n_1^2m_1n_2 + m_1n_3n_2m_3n_1 - 2m_1^2n_3n_1n_2 + (2/3)m_1n_3^2m_2n_1 + (4/3)m_3n_1^2m_1n_2 \\
& + m_3n_1^2n_3m_2 - (1/3)m_1n_2^2m_3n_1 + (1/3)m_2^2n_1^2n_3 + m_1^2n_1^2n_3 - m_3n_1^2m_1n_3 - \\
& (2/3)m_1n_1^2n_3m_2 + (1/3)m_3n_3^2n_2m_1 - (2/3)m_2^2n_2n_3n_1 - (2/3)m_3^2n_3n_2n_1 - \\
& (1/3)m_3n_3^2m_2n_1 - (2/3)m_2n_2^2m_3n_1 - (1/3)m_3n_3^2m_1n_1 - (1/3)m_2^2n_2^2n_1 + \\
& (1/3)m_3^2n_3^2n_1] + \upsilon[- (1/12)n_3^3m_1^2 - (1/12)m_3^2n_1^2n_3 + (1/3)n_2^2m_2^2n_3 + \\
& (1/6)n_3^3m_2^2 - (1/3)n_1n_2m_2^2n_3 + n_1n_2m_2m_1n_3 - (1/6)n_1n_2^2m_3m_1 + \\
& (2/3)n_1n_3m_3m_1n_2 - n_1^2m_2m_1n_3 - (1/3)n_1n_3m_1^2n_2 + (1/2)n_1n_3^2m_2m_1 - \\
& (1/6)n_1n_3m_3^2n_2 + (1/6)m_3^2n_2^2n_3 - (1/6)n_1n_3^2m_2^2 + (1/6)n_1^2m_3^2n_2 - \\
& (1/4)m_1^2n_2^2n_3 - (5/12)n_1^2m_2^2n_3 + (1/4)n_1n_2^2m_1^2 + (1/6)n_3^3m_2m_1 - \\
& (1/6)m_1m_3n_2^2n_3 + (1/2)m_1^2n_1^2n_3 - (1/4)n_1n_3^2m_1^2 - (1/6)m_2^2n_2^2n_1 + \\
& (2/3)n_1^3m_3m_2 + (1/4)n_1^3m_2^2 - (1/4)n_1^3m_3^2 - (1/3)n_3^2m_3m_2n_1 - \\
& (1/3)n_1^2n_2m_3m_2 - (1/3)n_2^2m_3m_2n_1 + (1/3)n_1^2n_3m_3m_2 + (1/6)m_3^2n_3^2n_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(1,7) = & - (2/3)n_3^2n_1n_2 - (2/3)n_1^2n_2n_3 + (4/3)n_2^2n_1n_3 - \\
& (2/3)m_3^2m_1m_2 - (2/3)m_1^2m_2m_3 + (4/3)m_2^2m_1m_3 - (1/3)n_1^2n_3^2 - \\
& (1/3)n_1^2n_2^2 + (2/3)n_1^3n_3 - (1/3)n_3^2n_2^2 + (2/3)n_3^3n_1 - (1/3)m_1^2m_3^2 - \\
& (1/3)m_1^2m_2^2 + (2/3)m_1^3m_3 - (1/3)m_3^2m_2^2 + (2/3)m_3^3m_1 - (1/2)n_1^4 - \\
& (1/2)n_3^4 + (1/6)n_2^4 - (1/2)m_1^4 - (1/2)m_3^4 + (1/6)m_2^4 + \mu[- \\
& (4/3)m_3^2n_1^2 - (2/3)m_1n_3^2m_2 - (2/3)m_3^2n_1n_2 + (2/3)m_1n_2^2m_3 + \\
& (2/3)m_2^2n_1n_3 - (4/3)m_1^2n_3^2 + (4/3)m_1^2n_3n_1 + (4/3)m_1n_3^2m_3 - \\
& (2/3)m_1^2n_3n_2 + (4/3)m_3n_1^2m_1 + (4/3)m_3^2n_1n_3 - (2/3)m_3n_1^2m_2 - 2m_1^2n_1^2 - \\
& 2m_3^2n_3^2 + (2/3)m_2^2n_2^2 - (2/3)m_1n_3m_2n_1 + 2m_1n_3m_2n_2 - (2/3)m_3n_1m_1n_2 + \\
& 2m_3n_1m_2n_2 - (2/3)m_1n_2m_3n_3 - (2/3)m_2n_1m_3n_3 - (4/3)m_3n_3m_2n_2 - \\
& (4/3)m_1n_2m_2n_1 + (4/3)m_1n_1m_3n_3] + \upsilon[+ (2/3)m_1^2n_1n_3 + (2/3)m_3^2n_1n_3 + \\
& (2/3)m_2^2n_1n_3 + (2/3)m_1m_3n_1^2 + (2/3)m_1m_3n_3^2 + (2/3)m_1m_3n_2^2 - m_1^2n_1^2 \\
& + m_1^2n_3^2 - (1/3)m_1^2n_2^2 + m_3^2n_1^2 - m_3^2n_3^2 - (1/3)m_3^2n_2^2 - (1/3)m_2^2n_1^2 - \\
& (1/3)m_2^2n_3^2 + (1/3)m_2^2n_2^2 - (2/3)m_1m_2n_1n_3 - (2/3)m_1m_3n_1n_2 - \\
& (8/3)m_1m_3n_1n_3 + (2/3)n_1n_2m_2m_3 - (2/3)m_1m_3n_2n_3 + (2/3)m_1m_2n_2n_3 - \\
& (2/3)n_1n_3m_2m_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(1,8) = & - (1/4)n_1^2n_2^2m_1 + (2/3)n_1^2n_2m_1n_3 - (1/2)n_1n_3^2n_2m_1 + \\
& (1/2)n_1n_3n_2^2m_1 - (1/12)m_1^2m_3^2m_2 + (5/6)m_1^2m_2^2m_3 - (1/3)m_3^3m_1m_2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/4)m_1^3m_2^2 + (1/4)m_1^3m_3^2 + (1/4)n_1^2n_3^2m_1 - (1/3)m_1^3m_2m_3 - \\
& (1/6)m_1m_3^2m_2^2 + (1/4)m_1^4m_2 + (1/6)m_3^4m_2 - (1/12)m_2^3m_1^2 + (1/6)m_2^3m_3^2 \\
& + (1/4)n_1^4m_2 - (1/6)n_1n_2n_3^2m_2 + (1/3)n_1^2n_2n_3m_2 + (1/6)n_2^2n_3m_2n_1 + \\
& (1/6)n_3^4m_2 - (1/6)m_1m_2^3m_3 + (5/12)n_1^2n_3^2m_2 - n_1^3n_3m_2 - (1/12)n_2^2n_1^2m_2 \\
& + (1/6)n_2^2n_3^2m_2 + (1/12)m_2^4m_1 - (1/12)m_3^4m_1 + (1/12)n_2^4m_1 - \\
& (1/3)n_3^3n_2m_1 - (1/3)n_2^3m_1n_3 - (1/12)n_3^4m_1 + \mu[+m_1^2n_1^2m_2 + \\
& (1/3)m_1^2n_3^2m_2 + (2/3)m_3^2n_1^2m_2 + m_1^2n_3n_1m_3 - (1/3)m_1n_3m_3m_2n_1 + m_3n_1m_2n_2m_1 \\
& - 2m_2n_1^2m_1m_3 + (4/3)m_1^2n_1m_3n_2 - (2/3)m_1^2n_1m_2n_3 - (2/3)m_1^2n_3m_3n_2 - \\
& (1/3)m_3^2n_1m_1n_2 + m_1^2n_2m_2n_3 + (1/3)m_1^2n_2^2m_3 + (1/3)m_2^2n_1^2m_3 + \\
& (2/3)m_3^2n_3^2m_2 + (2/3)m_2^2n_1m_1n_3 - (2/3)m_1n_3^2m_3m_2 - (2/3)m_1n_2^2m_2m_3 + \\
& (1/3)m_2^2n_1n_2m_3 - (1/3)m_2^2n_1m_3n_3 - (2/3)m_3^2n_3m_1n_2 - (1/3)m_2^2n_2m_1n_1 + \\
& (2/3)m_2^2n_2m_3n_3 - (1/3)m_2^2n_2m_1n_3 - m_1^2n_1m_2n_2 - (1/3)m_1n_3m_2n_2m_3 + \\
& (1/3)m_2^2n_2^2m_1 - (1/3)m_3^2n_3^2m_1] + \nu[-(1/3)m_1^2m_3n_2n_3 + (1/3)m_1^2m_2n_2n_3 \\
& - (1/4)n_1^2m_2^2m_1 + (1/6)n_2^2m_2^2m_1 + (1/4)m_1^3n_3^2 + (2/3)m_1^3n_2n_3 + \\
& (1/4)m_1m_3^2n_1^2 - (1/4)m_1^3n_2^2 - (1/6)n_3^2m_3^2m_1 + (1/2)n_1^2m_1^2m_2 - \\
& (1/4)n_1^2m_3^2m_2 - (5/12)n_3^2m_1^2m_2 + (1/3)n_3^2m_3^2m_2 - (1/12)n_2^2m_1^2m_2 + \\
& (1/6)n_2^2m_3^2m_2 + (1/6)m_1^2n_2^2m_3 - (1/6)m_1m_2^2n_3^2 + (1/6)m_2^3n_3n_1 - \\
& (1/12)m_2^3n_1^2 + (1/6)m_2^3n_3^2 - (1/3)n_3^2m_1m_2m_3 - (1/6)n_1n_2m_3^2m_2 + \\
& (2/3)n_1n_2m_1m_2m_3 - (1/6)n_2^2m_1m_2m_3 - n_1n_3m_1^2m_2 + n_1n_3m_1m_2m_3 + \\
& (1/2)m_1m_2^2n_3n_1 - (1/6)m_1m_3^2n_2n_1 - (1/3)m_1m_2n_1^2m_3 - (1/3)m_3^2n_2m_1n_3 - \\
& (1/3)m_2^2n_2m_1n_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(1,9) = & - (5/12)m_1^2m_3^2n_2 - (1/6)m_2^2m_3^2n_2 - (1/6)m_3^4n_2 - \\
& (1/4)n_1^4n_2 + (1/12)m_2^2m_1^2n_2 + m_1^3m_3n_2 - (1/4)m_1^4n_2 + (1/3)n_3^3n_1n_2 + \\
& (1/12)n_1^2n_3^2n_2 + (1/3)n_1^3n_2n_3 - (5/6)n_1^2n_2^2n_3 + (1/6)n_1n_2^3n_3 + \\
& (1/6)n_1n_2^2n_3^2 - (1/6)m_2^2m_3m_1n_2 - (1/3)m_1^2m_2m_3n_2 + (1/6)m_1m_2m_3^2n_2 - \\
& (1/6)n_3^4n_2 + (1/4)n_1^3n_2^2 + (1/12)n_2^3n_1^2 - (1/6)n_2^3n_3^2 - (1/4)n_1^3n_3^2 - \\
& (2/3)m_1^2m_3m_2n_1 - (1/2)m_1m_2^2m_3n_1 + (1/2)m_1m_3^2m_2n_1 + (1/4)m_1^2m_2^2n_1 + \\
& (1/3)m_3^3m_2n_1 + (1/3)m_2^3m_3n_1 - (1/4)m_1^2m_3^2n_1 - (1/12)n_2^4n_1 - \\
& (1/12)m_2^4n_1 + (1/12)n_3^4n_1 + (1/12)m_3^4n_1 + \mu[-(1/3)m_3^2n_1^2n_2 - \\
& (2/3)m_1^2n_3^2n_2 - (1/3)m_1^2n_2^2n_3 + (1/3)m_3n_1m_2n_2n_3 - (2/3)m_3^2n_3^2n_2 + \\
& (1/3)m_1n_2^2m_3n_3 - (2/3)m_2n_2^2m_3n_3 - m_1n_2n_3m_2n_1 - m_2n_1^2n_2m_3 + m_2n_1^2m_1n_2 + \\
& (1/3)m_1n_3n_2m_3n_1 + 2m_1^2n_3n_1n_2 + (1/3)m_1n_3^2m_2n_1 + (2/3)m_3n_1^2m_1n_2 + \\
& (2/3)m_3n_1^2n_3m_2 - (2/3)m_1n_2^2m_3n_1 - (1/3)m_2^2n_1^2n_3 - m_1^2n_1^2n_2 - m_3n_1^2m_1n_3 \\
& - (4/3)m_1n_1^2n_3m_2 + (1/3)m_2n_2^2m_1n_1 + (2/3)m_2^2n_2n_3n_1 + (2/3)m_3^2n_3n_2n_1 + \\
& (2/3)m_3n_3^2m_2n_1 - (1/3)m_2n_2^2m_1n_3 + (1/3)m_2n_2^2m_3n_1 - (1/3)m_2^2n_2^2n_1 + \\
& (1/3)m_3^2n_3^2n_1] + \nu[-(1/3)n_3^2m_3^2n_2 - (1/6)n_2^3m_3^2 + (1/12)n_2^3m_1^2 + \\
& (1/6)n_1n_2m_2^2n_3 - (2/3)n_1n_2m_2m_1n_3 - (1/2)n_1n_2^2m_3m_1 - n_1n_3m_3m_1n_2 + \\
& n_1^2m_3m_1n_2 + (1/3)n_1n_3m_1^2n_2 + (1/6)n_1n_3^2m_2m_1 + (1/3)n_1n_3m_3^2n_2 + \\
& (1/6)m_1m_2n_3^2n_2 + (1/12)m_2^2n_1^2n_2 + (5/12)n_1^2m_3^2n_2 - (1/2)n_1^2m_1^2n_2 - \\
& (1/6)n_1^2m_2^2n_3 + (1/6)n_1n_2^2m_3^2 + (1/4)n_1n_2^2m_1^2 - (1/6)m_2^2n_3^2n_2 - \\
& (1/6)n_2^3m_3m_1 + (1/4)n_3^2m_1^2n_2 - (1/4)n_1n_3^2m_1^2 - (1/6)m_2^2n_2^2n_1 - \\
& (2/3)n_1^3m_3m_2 + (1/4)n_1^3m_2^2 - (1/4)n_1^3m_3^2 + (1/3)n_3^2m_3m_2n_1 - \\
& (1/3)n_1^2n_2m_3m_2 + (1/3)n_2^2m_3m_2n_1 + (1/3)n_1^2n_3m_3m_2 + (1/6)m_3^2n_3^2n_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(2,2) = & - (1/12)n_1^4m_2m_3 - (1/2)n_3^3m_2^2n_1 + (1/6)m_1^2m_2^2m_3^2 + \\
& (3/4)n_2^2m_3^2n_1^2 + (1/6)n_1^3m_2^2n_3 + (3/4)n_1^2m_2^2n_3^2 - (1/2)n_2^3m_3^2n_1 + \\
& (1/2)n_2m_3n_1n_3^2m_2 - (4/3)n_2m_3n_1^2n_3m_2 + (1/2)n_2^2m_3n_3m_2n_1 + \\
& (1/12)n_2^2m_3n_1^2m_2 - (1/6)n_2^2m_3n_3^2m_2 - (1/3)n_1^3m_2n_2m_3 + (1/12)n_1^4m_2^2 + \\
& (1/12)m_1^4m_2^2 + (1/12)m_3^4m_2^2 - (1/6)m_3^3m_2^3 + (1/12)m_2^4m_3^2 + \\
& (1/12)n_2^4m_3^2 + (1/12)n_3^4m_2^2 + (1/12)m_1^2m_2^3m_3 - (1/6)m_1^3m_2m_3^2 + \\
& (1/12)m_3^3m_2m_1^2 - (1/12)m_1^4m_2m_3 + (1/12)n_3^2m_2n_1^2m_3 - (1/3)n_3m_2n_1^3m_3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/6) n_2 m_3^2 n_1^3 - (1/6) m_1^3 m_2^2 m_3 + (1/12) n_1^4 m_3^2 + (1/12) m_1^4 m_3^2 + \mu [- \\
& (2/3) m_3 m_1^2 n_2 n_1 m_2 - (2/3) m_2^2 n_2 m_3^2 n_3 + (1/3) m_2^2 n_2^2 m_3^2 + (1/3) m_3^2 n_3^2 m_2^2 - \\
& m_2^2 m_1 n_3^2 m_3 + (1/3) m_1^2 n_1 m_2^2 n_3 + m_3^2 m_1 n_2 n_3 m_2 - (4/3) m_3 m_1^2 n_2 m_2 n_3 - \\
& (1/3) m_3 m_2^2 n_1^2 m_1 - (1/3) m_1 n_1^2 m_3^2 m_2 + (1/3) m_1^2 n_1 m_3^2 n_2 - (1/3) m_1^2 n_1^2 m_3 m_2 \\
& - m_3^2 m_1 n_2^2 m_2 + m_2^2 m_1 n_3 n_2 m_3 + (1/3) m_1 n_1 m_3^2 n_3 m_2 - (2/3) m_1^2 n_1 m_3 m_2 n_3 + \\
& (1/3) m_1 n_1 m_2^2 n_2 m_3 + (5/6) m_2^2 m_1^2 n_3^2 + (1/3) m_1^2 n_1^2 m_3^2 + (1/3) m_1^2 n_1^2 m_2^2 + \\
& (5/6) m_3^2 m_1^2 n_2^2 + (1/3) m_3^2 m_2^2 n_1^2] + \nu [+ (1/12) m_3^3 m_2 n_1^2 + \\
& (1/6) n_3 m_2^2 n_1 m_1^2 - (1/2) n_3 m_2^2 n_1 m_3^2 + (1/3) n_3 m_2^2 n_1 m_1 m_3 + (1/2) n_3 m_2^3 n_1 m_3 \\
& - (1/12) n_3^2 m_2^2 m_1^2 + (1/6) n_3^2 m_2^2 m_3^2 - (1/6) n_3^2 m_3^2 m_3 - (1/2) n_2 m_3^2 n_1 m_2^2 + \\
& (1/6) n_2^2 m_3^2 m_2^2 - (1/6) n_1^2 m_2^2 m_3^2 + (1/12) n_1^2 m_2^3 m_3 + (1/6) n_1^2 m_2^2 m_1^2 - \\
& (1/6) n_1^2 m_2^2 m_1 m_3 - (1/3) n_2 m_3 n_1 m_1^2 m_2 + (1/2) n_2 m_3^3 n_1 m_2 + (1/3) n_2 m_3^2 n_1 m_1 m_2 \\
& + (1/12) n_2^2 m_3 m_1^2 m_2 - (1/6) n_2^2 m_3^3 m_2 - (1/6) m_1 m_2 m_3^2 n_1^2 - (1/6) m_1^2 m_2 n_1^2 m_3 \\
& - (1/3) n_3 m_2 n_1 m_1^2 m_3 + (1/12) n_3^2 m_2 m_1^2 m_3 + (1/6) n_2 m_3^2 n_1 m_1^2 - \\
& (1/12) n_2^2 m_3^2 m_1^2 + (1/6) m_1^2 m_3^2 n_1^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(2,3) = & - (1/12) n_3^4 m_2 n_2 - (1/12) n_1^4 m_2 n_2 - (1/24) n_2^3 m_3 n_1^2 + \\
& (1/12) n_2^3 m_3 n_3^2 - (1/24) m_1^2 m_2^3 n_3 - (1/12) n_2^4 m_3 n_3 + (1/6) n_2^2 m_3 n_1^3 + \\
& (1/12) n_3^3 m_2 n_2^2 - (1/12) m_1^4 m_2 n_2 + (1/4) n_2^3 m_3 n_1 n_3 + (1/24) m_1^4 m_3 n_2 - \\
& (1/24) n_1^2 m_2 n_2^2 n_3 - (1/4) n_2^2 m_3 n_1 n_3^2 - (1/12) n_2^2 m_3 n_1^2 n_3 + (1/4) n_3^3 m_2 n_1 n_2 \\
& - (1/4) n_3^2 m_2 n_1 n_2^2 - (1/12) m_1^2 m_2 m_3^2 n_2 - (1/4) m_3^2 m_2^2 m_1 n_3 + \\
& (1/4) m_3^3 m_2 m_1 n_2 + (1/4) m_1 m_2^3 m_3 n_3 - (1/12) m_1^2 m_2^2 m_3 n_3 - (1/24) m_2^2 m_3 m_1^2 n_2 \\
& - (1/4) m_2^2 m_3^2 m_1 n_2 - (1/12) n_1^2 m_2 n_3^2 n_2 + (1/6) m_1^3 m_2^2 n_3 + (1/12) m_3^2 m_2^3 n_3 \\
& - (1/12) m_3^4 m_2 n_2 - (1/12) m_2^4 m_3 n_3 + (1/12) m_2^2 m_3^3 n_2 - (1/24) m_1^2 m_3^3 n_2 + \\
& (1/6) m_1^3 m_3^2 n_2 + (1/24) m_1^4 m_2 n_3 + (1/24) n_1^4 m_3 n_2 + (1/24) n_1^4 m_2 n_3 - \\
& (1/24) n_3^3 m_2 n_1^2 + (1/6) n_3^2 m_2 n_1^3 - (1/12) m_1^4 m_3 n_3 - (1/12) n_1^4 m_3 n_3 - \\
& (1/24) m_3^2 m_2 m_1^2 n_3 - (1/24) n_1^2 m_3 n_3^2 n_2 + \mu [- (1/3) m_1^2 n_1^2 m_2 n_2 + \\
& (1/3) m_1 n_1^2 m_2^2 n_3 + (1/2) m_3 m_1 n_2^2 m_2 n_3 + (1/3) m_3 m_1^2 n_2^2 n_1 - (1/6) m_3 m_1^2 n_2^2 n_3 \\
& - (1/2) m_3^2 m_1 n_2^2 n_3 + (2/3) m_3^2 m_1 n_2^2 n_1 - (1/2) m_2^2 m_1 n_3^2 n_2 - \\
& (1/6) m_2 m_1^2 n_3^2 n_2 + (2/3) m_2^2 m_1 n_3^2 n_1 + (1/2) m_2 m_1 n_3^2 m_3 n_2 - \\
& (4/3) m_2 m_1 n_3 n_2 m_3 n_1 + (1/2) m_3 m_2^2 n_1 n_2 n_3 - (1/6) m_3 m_2^2 n_1^2 n_3 + \\
& (1/2) m_3^2 m_2 n_1 n_3 n_2 - (1/6) m_3^2 m_2 n_1^2 n_2 - (1/6) m_1 n_1 m_2^2 n_2 n_3 + \\
& (1/6) m_1^2 n_1^2 m_3 n_2 + (1/3) m_1 n_1^2 m_3^2 n_2 - (1/6) m_1 n_1 m_3^2 n_3 n_2 - \\
& (1/6) m_3 n_3^2 m_2 m_1 n_1 + (1/6) m_1^2 n_1^2 m_2 n_3 + (1/3) m_2 m_1^2 n_3^2 n_1 - (1/3) m_1^2 n_1^2 m_3 n_3 \\
& - (1/2) m_2 n_2^2 m_3^2 n_1 + (1/3) m_3 n_3^2 m_2^2 n_2 - (1/2) m_3 n_3^2 m_2^2 n_1 - \\
& (1/3) m_3^2 n_3^2 m_2 n_2 - (1/6) m_2 n_2^2 m_3 m_1 n_1 + (1/3) m_2 n_2^2 m_3^2 n_3 - \\
& (1/3) m_2^2 n_2^2 m_3 n_3] + \nu [+ (1/12) m_1^2 m_2 n_3^2 n_2 - (1/24) m_1^2 m_2 n_2^2 n_3 + \\
& (1/12) m_3^2 m_2 n_1^2 n_2 - (1/6) m_3^2 m_2 n_3^2 n_2 + (1/4) m_3^2 m_2 n_1 n_2 n_3 + \\
& (1/12) m_3^2 m_2 n_2^2 n_3 + (1/4) m_1 m_2 m_3 n_3^2 n_2 - 2 m_1 m_2 m_3 n_1 n_2 n_3 + (1/4) m_1 m_2 m_3 n_2^2 n_3 \\
& - (1/24) m_2^2 m_3 n_1^2 n_2 + (1/12) m_2^2 m_3 n_3^2 n_2 + (1/4) m_2^2 m_3 n_1 n_2 n_3 - \\
& (1/6) m_2^2 m_3 n_2^2 n_3 - (1/6) m_1^2 m_2 n_1^2 n_2 - (1/24) n_2^3 m_3 m_1^2 - (1/4) n_2^3 m_3^2 m_1 - \\
& (1/24) n_1^2 m_2^3 n_3 - (1/4) n_2^2 m_3^3 n_1 - (1/4) n_3^3 m_2^2 m_1 - (1/4) n_3^2 m_2^3 n_1 + \\
& (1/12) n_2^3 m_3^3 + (1/12) n_3^3 m_2^3 + (1/6) n_1^2 m_2^2 m_1 n_3 + (1/6) n_2^2 m_3 n_1 m_1^2 + \\
& (2/3) n_2^2 m_3^2 n_1 m_1 + (2/3) n_3^2 m_2^2 n_1 m_1 - (1/24) n_1^2 m_3^3 n_2 - (1/24) n_3^3 m_2 m_1^2 + \\
& (1/12) n_1^2 m_3 m_2^2 n_3 + (1/12) n_1^2 m_3 m_1^2 n_2 + (1/6) n_1^2 m_3^2 m_1 n_2 + \\
& (1/12) n_2^2 m_3 m_1^2 n_3 + (1/12) n_1^2 m_2 m_1^2 n_3 + (1/6) n_3^2 m_2 n_1 m_1^2 - \\
& (1/6) n_1^2 m_3 m_1^2 n_3 - (1/24) m_1^2 m_3 n_3^2 n_2 - (1/24) m_3^2 m_2 n_1^2 n_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(2,4) = & + (1/3) n_2^2 m_3 n_1 n_3 - (1/6) n_1^2 m_3 n_2 n_3 - (1/6) m_1^2 m_3^2 m_2 - \\
& (1/12) m_1^2 m_2^2 m_3 - (1/6) m_3^3 m_1 m_2 - (1/12) m_3^3 m_2^2 + (1/4) m_2^4 m_3 + \\
& (1/4) n_2^4 m_3 + (1/6) m_1^4 m_3 + (1/6) n_1^4 m_3 - (1/3) m_1^3 m_2 m_3 + (5/6) m_1 m_3^2 m_2^2 \\
& - (1/12) m_1^4 m_2 + (1/12) m_3^4 m_2 + (1/4) m_2^3 m_1^2 - (1/4) m_2^3 m_3^2 - \\
& (1/12) n_1^4 m_2 + (1/6) m_3^3 m_1^2 + (1/2) n_1 n_2 n_3^2 m_2 - (1/2) n_1^2 n_2 n_3 m_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2/3)n_2^2n_3m_2n_1 + (1/12)n_3^4m_2 - (1/3)m_1m_2^3m_3 - (1/3)n_1^3n_3m_2 + \\
& (1/4)n_2^2n_1^2m_2 - (1/4)n_2^2n_3^2m_2 + (5/12)n_2^2m_3n_1^2 + (1/6)n_2m_3n_1n_3^2 - \\
& n_2^3m_3n_1 - (1/12)n_2^2m_3n_3^2 - (1/3)n_3^3m_2n_1 + (1/6)n_1^2m_3n_3^2 + \mu[- \\
& (1/3)m_1^2n_1^2m_2 + m_2^2n_2^2m_3 + (1/3)m_3^2m_1n_2^2 + (1/3)m_2^2m_1n_3^2 - \\
& (1/3)m_1n_3m_3m_2n_1 - (1/3)m_3n_1m_2n_2m_1 - (2/3)m_2n_1^2m_1m_3 - (2/3)m_1^2n_1m_2n_3 - \\
& (1/3)m_3^2n_1m_1n_2 - (1/3)m_1^2n_2m_2n_3 + (2/3)m_1^2n_2^2m_3 + (1/3)m_2^2n_1^2m_3 + \\
& (1/3)m_3^2n_3^2m_2 - (2/3)m_2^2n_1m_1n_3 - (2/3)m_1n_3^2m_3m_2 - (1/3)m_3^2n_1n_3m_2 - \\
& 2m_1n_2^2m_2m_3 - (2/3)m_2^2n_1n_2m_3 + m_2^2n_1m_3n_3 + (1/3)m_3^2n_3m_1n_2 + m_2^2n_2m_1n_1 - \\
& m_2^2n_2m_3n_3 + (4/3)m_2^2n_2m_1n_3 + (2/3)m_1n_1m_3^2n_3 + (2/3)m_1^2n_1^2m_3 + \\
& m_1n_3m_2n_2m_3 + (2/3)m_3^2m_2n_1n_2 - (1/3)m_3^2n_3m_2n_2] + \nu[+ (1/6)n_1^2m_3^3 - \\
& (5/12)n_1^2m_2^2m_3 + (1/2)n_2^2m_3m_2^2 - (1/12)n_3^2m_2^2m_3 + (1/6)n_2m_3^3n_1 - \\
& (1/6)m_1^2m_3n_2n_3 - (1/6)m_1^2m_2n_2n_3 - (1/6)n_1^2m_1^2m_2 - (1/6)n_1^2m_3^2m_2 + \\
& (1/6)n_3^2m_3^2m_2 + (1/4)n_2^2m_1^2m_2 - (1/4)n_2^2m_3^2m_2 - (1/4)m_1^2n_2^2m_3 + \\
& (1/6)m_1m_2^2n_3^2 + (2/3)m_2^3n_3n_1 + (1/4)m_2^3n_1^2 - (1/4)m_2^3n_3^2 - \\
& (1/6)n_3^2m_1m_2m_3 + (1/2)n_1n_2m_3^2m_2 + n_1n_2m_1m_2m_3 - (1/3)n_2^2m_1m_2m_3 - \\
& (1/3)n_1n_3m_1^2m_2 - (1/3)m_1m_2^2n_3n_1 - (1/3)m_1m_2n_1^2m_3 + (1/3)n_1^2m_3m_1^2 + \\
& (1/6)m_1^2m_3n_3^2 + (2/3)m_1m_2m_3n_2n_3 - (1/3)n_3m_2n_1m_3^2 - (1/12)n_2^2m_3^3 + \\
& (1/3)n_3m_2^2n_1m_3 - n_2m_3n_1m_2^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(2,5) = & - (1/24)n_2^4m_3m_1 - (1/24)n_1^4m_2m_3 - (1/4)m_1^2m_2^2m_3^2 - \\
& (1/4)n_2^2m_3^2n_1^2 - (1/6)n_2^3m_3^2n_1 - (1/24)m_1m_2^3m_3^2 - (1/12)n_2m_3n_1n_3^2m_2 + \\
& (1/3)n_2m_3n_1^2n_3m_2 + (1/4)n_2^2m_3n_3m_2n_1 + (1/24)n_2^2m_3n_1^2m_2 - \\
& (1/12)n_2^2m_3n_3^2m_2 + (1/6)n_1^3m_2n_2m_3 - (1/12)m_3^3m_2^3 + (1/12)m_2^4m_3^2 + \\
& (1/12)n_2^4m_3^2 + (1/8)m_1^2m_2^3m_3 - (1/24)m_1^3m_2m_3^2 + (1/8)m_3^3m_2m_1^2 - \\
& (1/24)m_1^4m_2m_3 + (1/24)n_3^2m_2n_1^2m_3 - (1/6)n_3m_2n_1^3m_3 - (1/6)n_2m_3^2n_1^3 + \\
& (1/8)m_3^3m_2^2m_1 + (1/8)m_1^3m_2^2m_3 + (1/12)n_1^4m_3^2 + (1/12)m_1^4m_3^2 - \\
& (1/6)n_2^3m_3m_1n_3 - (1/12)n_1^2m_2n_2^2m_1 + (1/6)n_2^3m_3n_1m_1 + (1/24)n_3^2m_2n_2^2m_1 \\
& + (1/6)n_3^3m_2n_2m_1 + (1/24)n_1^2m_3n_2^2m_1 - (1/12)m_1^3m_2^3 - (1/12)m_1^3m_3^3 - \\
& (1/24)m_2^4m_3m_1 - (1/24)m_3^4m_2m_1 - (1/24)n_3^4m_2m_1 - (1/12)n_1^2m_2n_2m_1n_3 + \\
& (1/3)n_2^2m_3n_1m_1n_3 - (1/12)n_3m_2n_1n_2^2m_1 - (2/3)n_3^2m_2n_1n_2m_1 + \\
& (1/4)n_1^2m_3n_2m_1n_3 - (1/12)n_2m_3n_1n_3^2m_1 + (1/24)n_2^2m_3n_3^2m_1 + \\
& (1/24)n_1^2m_2n_3^2m_1 + (1/6)n_3^3m_2n_1m_1 - (1/12)n_1^2m_3n_3^2m_1 + \mu[+ \\
& (1/3)m_3m_1^2n_2n_1m_2 - (1/3)m_2^2n_2m_3^2n_3 + (1/3)m_2^2n_2^2m_3^2 + (1/3)m_2^2m_1n_3^2m_3 \\
& - (1/6)m_1^2n_1m_2^2n_3 - (2/3)m_3^2m_1n_2m_2n_1 + (1/3)m_3^2m_1n_2n_3m_2 + \\
& (1/6)m_3^2m_2^2n_1n_2 + (1/3)m_3m_2^2n_1^2m_1 - (2/3)m_1n_1^2m_3^2m_2 + (1/6)m_1^2n_1m_3^2n_2 \\
& - (1/6)m_1^2n_1^2m_3m_2 - (2/3)m_3^2m_1n_2^2m_2 - (1/6)m_3^2m_2^2n_1n_3 + \\
& (1/3)m_2^2m_1n_3n_2m_3 + (1/3)m_1n_1m_3^2n_3m_2 + (1/3)m_1^2n_1m_3m_2n_3 + \\
& (1/3)m_1n_1m_2^2n_2m_3 - (2/3)m_2^2m_1^2n_3^2 + (1/3)m_1^2n_1^2m_3^2 - (1/6)m_3^2m_1^2n_2n_3 - \\
& (1/3)m_1^2n_1m_3^2n_3 - (1/3)m_1^2n_1m_2^2n_2 - (1/6)m_2^2m_1^2n_3n_2 + (1/3)m_2m_1^2n_3^2m_3 \\
& + (1/3)m_3m_1^2n_2^2m_2 - (1/6)m_2^2n_2^2m_3m_1 - (1/6)m_3^2n_3^2m_2m_1 + (1/6)m_3^2m_1^2n_2^2 \\
& + (1/6)m_3^2m_2^2n_1^2] + \nu[+ (1/24)m_3^3m_2n_1^2 - (1/3)n_3m_2^2n_1m_1m_3 + \\
& (1/4)n_3m_2^3n_1m_3 - (1/12)n_3^2m_2^3m_3 - (1/6)n_2m_3^2n_1m_2^2 + (1/8)n_3^2m_2^2m_1m_3 + \\
& (1/6)n_2^2m_3^2m_2^2 - (1/12)n_1^2m_2^2m_3^2 + (1/24)n_1^2m_2^3m_3 + (1/8)n_1^2m_2^2m_1m_3 + \\
& (1/6)n_2m_3n_1m_1^2m_2 - (1/12)n_2m_3^2n_1m_2 + (1/3)n_2m_3^2n_1m_1m_2 + \\
& (1/8)n_2^2m_3m_1^2m_2 - (1/24)n_2^2m_3^2m_1m_2 - (1/12)n_2^2m_3^3m_2 - (1/24)m_1m_2m_3^2n_1^2 \\
& - (1/12)m_1^2m_2n_1^2m_3 - (1/6)n_3m_2n_1m_1^2m_3 + (1/8)n_3^2m_2m_1^2m_3 - \\
& (1/6)n_2m_3^2n_1m_1^2 - (1/12)n_2^2m_3^2m_1^2 + (1/6)m_1^2m_3^2n_1^2 - (1/12)n_1^2m_2^3m_1 + \\
& (1/24)n_3^2m_2^3m_1 - (1/12)m_1^3m_2n_2^2 + (1/24)n_2^2m_3^3m_1 + (1/24)m_1^3m_3n_2^2 - \\
& (1/12)n_2^2m_3m_2^2m_1 + (1/6)n_2m_3n_1m_2^2m_1 - (1/12)n_3m_2^3n_1m_1 - \\
& (1/12)m_1^3m_2n_2n_3 + (1/6)m_3^2m_2n_2m_1n_3 - (1/3)m_1^2m_2m_3n_2n_3 - \\
& (1/6)m_2^2m_3n_2m_1n_3 - (1/12)n_2m_3^3n_1m_1 - (1/12)n_3^2m_2m_3^2m_1 + \\
& (1/6)n_3m_2n_1m_3^2m_1 + (1/4)m_1^3m_3n_2n_3 + (1/24)m_1^3m_2n_3^2 - (1/12)n_1^2m_3^3m_1 - \\
& (1/12)m_1^3m_3n_3^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(2,6) = & - (1/6)n_2^3m_3n_1^2 - (1/24)m_1^2m_2^3n_3 - (1/12)n_2^4m_3n_3 - \\
& (1/24)n_2^2m_3n_1^3 + (1/12)n_3^3m_2n_2^2 + (1/3)n_2^3m_3n_1n_3 + (1/24)n_1^2m_2n_2^2n_3 - \\
& (1/24)n_2^2m_3n_1n_3^2 - (1/12)n_2^2m_3n_1^2n_3 - (1/12)n_3^3m_2n_1n_2 - \\
& (7/24)n_3^2m_2n_1n_2^2 + (1/12)m_3^2m_2^2m_1n_3 - (1/12)m_1m_2^3m_3n_3 - \\
& (1/12)m_1^2m_2^2m_3n_3 + (1/3)n_1^2m_2n_3^2n_2 - (1/12)n_1^3m_2n_2n_3 - (1/6)m_1^3m_2^2n_3 + \\
& (1/12)m_3^2m_2^3n_3 - (1/12)m_2^4m_3n_3 + (1/12)m_1^2m_3^3n_1 + (1/24)m_1^4m_2n_3 + \\
& (1/24)n_1^4m_2n_3 - (5/24)n_3^3m_2n_1^2 + (1/8)n_3^2m_2n_1^3 - (1/12)m_1^4m_3n_3 - \\
& (1/12)n_1^4m_3n_3 - (1/24)m_3^2m_2m_1^2n_3 + (1/3)m_1^3m_3m_2n_3 + (1/12)n_1^2m_3n_3^2n_2 \\
& - (1/12)n_1^3m_3n_2n_3 + (1/24)n_2^4m_3n_1 + (1/12)n_1^3m_2n_2^2 + (1/12)m_1^2m_2^3n_1 + \\
& (1/8)m_3^2m_2^3n_1 - (5/24)m_3^3m_2^2n_1 + (1/24)m_2^4m_3n_1 + (1/24)n_3^4m_2n_1 + \\
& (1/24)m_3^4m_2n_1 + (1/12)n_1^3m_3n_3^2 + (1/24)m_1^2m_2^2m_3n_1 - (1/12)m_1m_2^3m_3n_1 + \\
& (1/3)m_1m_2^2m_3^2n_1 - (7/24)m_1^2m_2m_3^2n_1 - (1/12)m_1m_2m_3^3n_1 + \mu[- \\
& (1/6)m_1n_1^2m_2^2n_3 + (1/3)m_3m_1n_2^2m_2n_3 + (1/6)m_3m_1^2n_2^2n_3 - (1/3)m_3^2m_1n_2^2n_1 \\
& - (1/2)m_2^2m_1n_3^2n_2 - (1/3)m_2m_1^2n_3n_1n_2 - (1/3)m_2m_1^2n_3^2n_2 + \\
& (1/3)m_2^2m_1n_3^2n_1 + (1/6)m_2m_1n_3^2m_3n_2 + (2/3)m_2m_1n_3n_2m_3n_1 + \\
& (1/6)m_3m_2^2n_1^2n_3 - (1/2)m_3^2m_2n_1n_3n_2 + (1/3)m_3^2m_2n_1^2n_2 - (1/2)m_1n_1^2m_3^2n_2 \\
& + (1/3)m_1^2n_1m_3n_2n_3 + (1/6)m_1n_1m_3^2n_3n_2 - (1/2)m_3n_3^2m_2m_1n_1 + \\
& (1/6)m_1^2n_1^2m_2n_3 + (1/3)m_2m_1^2n_3^2n_1 - (1/3)m_1^2n_1^2m_3n_3 + (1/3)m_2n_2^2m_3^2n_1 \\
& + (1/3)m_3n_3^2m_2^2n_2 - (1/6)m_3n_3^2m_2^2n_1 - (1/3)m_2n_2^2m_3m_1n_1 - \\
& (1/3)m_2^2n_2^2m_3n_3 + (1/6)m_2^2n_2^2m_3n_1 + (1/6)m_3^2n_3^2m_2n_1 - (1/6)m_3m_2^2n_1^2n_2 \\
& - (1/6)m_3^2m_2n_1^2n_3 + (1/3)m_1n_1^2m_2^2n_2 + (1/3)m_1n_1^2m_3^2n_3] + \nu[- \\
& (1/12)m_1^2m_2n_1n_2n_3 - (1/24)m_1^2m_2n_2^2n_3 - (1/3)m_3^2m_2n_1^2n_2 - \\
& (1/12)m_3^2m_2n_1n_2n_3 + (1/12)m_3^2m_2n_2^2n_3 + (1/3)m_1m_2m_3n_1n_2n_3 - \\
& (1/12)m_1m_2m_3n_2^2n_3 - (1/6)m_2^2m_3n_1^2n_2 + (1/3)m_2^2m_3n_1n_2n_3 - \\
& (1/6)m_2^2m_3n_2^2n_3 + (1/24)n_1^2m_2^3n_3 - (1/24)n_2^2m_3^3n_1 + (1/12)n_3^3m_2^2m_1 - \\
& (7/24)n_3^2m_2^3n_1 + (1/12)n_3^3m_2^3 - (1/6)n_1^2m_2^2m_1n_3 - (1/24)n_2^2m_3n_1m_1^2 - \\
& (1/3)n_3^2m_2^2n_1m_1 + (1/12)n_1^2m_3^3n_2 - (1/24)n_3^3m_2m_1^2 + (3/4)n_1^2m_3m_2^2n_3 + \\
& (1/3)n_1^2m_3m_2m_1n_3 + (1/12)n_2^2m_3m_1^2n_3 + (1/12)n_1^2m_2m_1^2n_3 - \\
& (1/12)n_2m_3n_1m_1^2n_3 + (1/8)n_3^2m_2n_1m_1^2 - (1/6)n_1^2m_3m_1^2n_3 - \\
& (5/24)m_3^2m_2n_1^2n_3 + (1/12)n_1^3m_2^3 + (1/12)m_1^2m_2n_2^2n_1 + (1/8)m_3^2m_2n_2^2n_1 - \\
& (1/12)m_1m_2m_3n_2^2n_1 + (1/12)m_2^2m_3n_2^2n_1 - (5/24)n_3^2m_2^2m_3n_1 + \\
& (1/12)m_3^2m_2n_3^2n_1 - (1/12)m_1m_2m_3n_3^2n_1 + (1/24)n_1^3m_2^2m_3 - (7/24)n_1^3m_2m_3^2 \\
& + (1/12)n_1^3m_3^3 + (1/12)m_1^2m_3n_3^2n_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(2,7) = & + (1/3)n_1^3m_3n_2 - (1/2)n_2^2m_3n_1n_3 + (1/2)n_1^2m_3n_2n_3 + \\
& (1/12)m_1^2m_3^2m_2 + (1/6)m_1^2m_2^2m_3 + (1/3)m_3^3m_1m_2 + (1/4)m_3^3m_2^2 - \\
& (1/12)m_2^4m_3 - (1/12)n_2^4m_3 + (1/12)m_1^4m_3 + (1/12)n_1^4m_3 + (1/3)m_1^3m_2m_3 \\
& - (5/6)m_1m_3^2m_2^2 - (1/6)m_1^4m_2 - (1/4)m_3^4m_2 - (1/6)m_2^3m_1^2 + \\
& (1/12)m_2^3m_3^2 - (1/6)n_1^4m_2 - (1/4)m_3^3m_1^2 - (1/3)n_1n_2n_3^2m_2 + \\
& (1/6)n_1^2n_2n_3m_2 - (1/6)n_2^2n_3m_2n_1 - (1/4)n_3^4m_2 + (1/6)m_1m_2^3m_3 - \\
& (5/12)n_1^2n_3^2m_2 - (1/6)n_2^2n_1^2m_2 + (1/12)n_2^2n_3^2m_2 - (2/3)n_2m_3n_1n_3^2 + \\
& (1/3)n_2^3m_3n_1 + (1/4)n_2^2m_3n_3^2 + n_3^3m_2n_1 - (1/4)n_1^2m_3n_3^2 + \mu[- \\
& (2/3)m_1^2n_1^2m_2 - (2/3)m_1^2n_3^2m_2 - (1/3)m_3^2n_1^2m_2 - (1/3)m_2^2n_2^2m_3 - \\
& (1/3)m_3^2m_1n_2^2 - (1/3)m_2^2m_1n_3^2 + (1/3)m_1n_3m_3m_2n_1 + (1/3)m_3n_1m_2n_2m_1 + \\
& (2/3)m_2n_1^2m_1m_3 + (2/3)m_1^2n_1m_3n_2 + (1/3)m_1^2n_3m_3n_2 + (2/3)m_3^2n_1m_1n_2 - \\
& m_3^2n_3^2m_2 + (1/3)m_2^2n_1m_1n_3 + 2m_1n_3^2m_3m_2 + (2/3)m_3^2n_1n_3m_2 + \\
& (2/3)m_1n_2^2m_2m_3 + (1/3)m_2^2n_1n_2m_3 - (2/3)m_2^2n_1m_3n_3 - (4/3)m_3^2n_3m_1n_2 - \\
& (2/3)m_2^2n_2m_1n_1 + (1/3)m_2^2n_2m_3n_3 - (1/3)m_2^2n_2m_1n_3 - m_1n_1m_3^2n_3 + \\
& (1/3)m_1^2n_1^2m_3 - m_1n_3m_2n_2m_3 - m_3^2m_2n_1n_2 + m_3^2n_3m_2n_2] + \nu[+ \\
& (1/6)m_1^2m_3n_2n_3 + (1/3)m_1^2n_2m_3n_1 + (1/6)n_1^2m_2^2m_3 - (1/6)n_2^2m_3m_2^2 + \\
& (1/4)n_3^2m_2^2m_3 - (2/3)n_2m_3^3n_1 + (1/6)m_1^2m_2n_2n_3 - (1/3)n_1^2m_1^2m_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (5/12) n_1^2 m_3^2 m_2 + (1/4) n_3^2 m_1^2 m_2 - (1/2) n_3^2 m_3^2 m_2 - (1/6) n_2^2 m_1^2 m_2 + \\
& (1/12) n_2^2 m_3^2 m_2 - (1/6) m_2^3 n_3 n_1 - (1/6) m_2^3 n_1^2 + (1/12) m_2^3 n_3^2 + \\
& (1/3) n_3^2 m_1 m_2 m_3 - (1/3) n_1 n_2 m_3^2 m_2 + (1/6) n_2^2 m_1 m_2 m_3 - n_1 n_3 m_1 m_2 m_3 + \\
& (1/3) m_1 m_3^2 n_2 n_1 + (1/3) m_1 m_2 n_1^2 m_3 + (1/6) n_1^2 m_3 m_1^2 - (1/4) m_1^2 m_3 n_3^2 - \\
& (2/3) m_1 m_2 m_3 n_2 n_3 + n_3 m_2 n_1 m_3^2 + (1/4) n_2^2 m_3^3 - (1/4) n_1^2 m_3^3 - \\
& (1/2) n_3 m_2^2 n_1 m_3 + (1/3) n_2 m_3 n_1 m_2^2 - (1/6) n_2^2 m_3^2 m_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(2,8) = & - (1/4) m_1^2 m_2^2 m_3^2 - (1/24) n_2^4 m_3 m_1 - (1/24) n_1^4 m_2 m_3 - \\
& (1/24) m_1^4 m_3 m_2 - (1/24) m_2^4 m_3 m_1 + (1/8) m_1^2 m_2^3 m_3 - (1/4) n_3^2 m_2^2 n_1^2 - \\
& (1/24) m_3^3 m_2^2 m_1 + (1/8) m_3^2 m_2^3 m_1 + (1/4) n_2 m_3 n_1 n_3^2 m_2 + (1/3) n_2 m_3 n_1^2 n_3 m_2 - \\
& (1/6) n_1^3 m_2 n_2 m_3 + (1/24) n_3^2 m_2 n_1^2 m_3 + (1/6) n_3 m_2 n_1^3 m_3 - (1/6) n_3^3 m_2^2 n_1 + \\
& (1/8) m_1^3 m_3^2 m_2 + (1/8) m_1^2 m_3^3 m_2 - (1/24) m_3^4 m_2 m_1 + (1/12) m_1^4 m_2^2 - \\
& (1/12) m_2^3 m_3^3 - (1/24) m_1^3 m_2^2 m_3 - (1/12) m_1^3 m_3^3 + (1/12) m_3^4 m_2^2 - \\
& (1/6) n_1^3 m_2^2 n_3 + (1/12) n_1^4 m_2^2 - (1/12) m_1^3 m_3^3 - (1/12) n_1^2 m_3 n_3 m_1 n_2 - \\
& (1/12) n_1^2 m_3 n_3^2 m_1 + (1/24) n_1^2 m_3 n_2^2 m_1 + (1/12) n_3^4 m_2^2 - (1/12) n_2^2 m_3 n_3^2 m_2 \\
& + (1/24) n_2^2 m_3 n_1^2 m_2 - (1/12) n_2^2 m_3 n_3 m_2 n_1 + (1/6) n_2^3 m_3 m_1 n_3 - \\
& (1/12) n_1^2 m_2 n_2^2 m_1 + (1/6) n_2^3 m_3 n_1 m_1 + (1/24) n_3^2 m_2 n_2^2 m_1 - (1/6) n_3^3 m_2 n_2 m_1 \\
& - (1/24) n_3^4 m_2 m_1 + (1/4) n_1^2 m_2 n_2 m_1 n_3 - (2/3) n_2^2 m_3 n_1 m_1 n_3 - \\
& (1/12) n_3 m_2 n_1 n_2^2 m_1 + (1/3) n_3^2 m_2 n_1 n_2 m_1 - (1/12) n_2 m_3 n_1 n_3^2 m_1 + \\
& (1/24) n_2^2 m_3 n_3^2 m_1 + (1/24) n_1^2 m_2 n_3^2 m_1 + (1/6) n_3^3 m_2 n_1 m_1 + \mu[- \\
& (1/6) m_1^2 n_1 m_3^2 n_2 + (1/3) m_1 n_1^2 m_3^2 m_2 - (1/6) m_3^2 n_3^2 m_2 m_1 - (2/3) m_3 n_3^2 m_2^2 m_1 \\
& + (1/3) m_3^2 n_3 m_2 m_1 n_2 + (1/3) m_3 n_3 m_2^2 n_2 m_1 + (1/6) m_3^2 n_3 m_2^2 n_1 - \\
& (1/6) m_2^2 n_2 m_3^2 n_1 + (1/3) m_2 n_2^2 m_3^2 m_1 - (1/6) m_2^2 n_2^2 m_3 m_1 - (1/6) m_1^2 n_1^2 m_3 m_2 \\
& - (1/3) m_2^2 n_2 m_3^2 n_3 + (1/3) m_3^2 n_3^2 m_2^2 - (1/3) m_1^2 n_1 m_3^2 n_3 - (2/3) m_3^2 m_1^2 n_2^2 \\
& + (1/6) m_2^2 m_1^2 n_3^2 - (2/3) m_2^2 m_1 n_3 m_3 n_1 + (1/6) m_2^2 m_1^2 n_3 n_1 + (1/6) m_3^2 m_2^2 n_1^2 \\
& - (2/3) m_3 m_2^2 n_1^2 m_1 + (1/3) m_3 m_1^2 n_2^2 m_2 + (1/3) m_1^2 n_1 m_2 m_3 n_2 - \\
& (1/3) m_1^2 n_1 m_2^2 n_2 + (1/3) m_3 m_2^2 n_1 n_2 m_1 + (1/3) m_1^2 n_1^2 m_2^2 - (1/6) m_2^2 m_1^2 n_3 n_2 \\
& + (1/3) m_3^2 m_2 n_1 n_3 m_1 + (1/3) m_2 m_1^2 n_3^2 m_3 - (1/6) m_3^2 m_1^2 n_2 n_3 + \\
& (1/3) m_1^2 n_1 m_2 m_3 n_3] + \nu[+ (1/24) m_3^3 m_2 n_1^2 - (1/24) n_3^2 m_2^2 m_1 m_3 - \\
& (1/12) n_1^2 m_2^2 m_3^2 - (1/6) n_2 m_3 n_1 m_1^2 m_2 + (1/4) n_2 m_3^3 n_1 m_2 - (1/3) n_2 m_3^2 n_1 m_1 m_2 \\
& + (1/8) n_2^2 m_3 m_1^2 m_2 + (1/8) n_2^2 m_3^2 m_1 m_2 + (1/8) m_1 m_2 m_3^2 n_1^2 - \\
& (1/12) m_1^2 m_2 n_1^2 m_3 - (1/12) n_2^2 m_3^3 m_2 - (1/12) m_1^3 m_3 n_3^2 - (1/12) n_3 m_2^3 n_1 m_1 \\
& - (1/6) n_3 m_2^2 n_1 m_3^2 + (1/3) n_3 m_2^2 n_1 m_1 m_3 + (1/6) n_2 m_3 n_1 m_2^2 m_1 - \\
& (1/24) n_1^2 m_2^2 m_1 m_3 - (1/6) n_3 m_2^2 n_1 m_1^2 + (1/6) n_1^2 m_2^2 m_1^2 - (1/12) n_1^2 m_2^3 m_1 - \\
& (1/12) n_3^2 m_2^2 m_1^2 + (1/24) n_3^2 m_2^3 m_1 + (1/6) n_3^2 m_2^2 m_3^2 + (1/8) n_3^2 m_2 m_1^2 m_3 + \\
& (1/24) m_1^3 m_3 n_2^2 + (1/6) m_1^2 m_3 n_3 m_2 n_1 - (1/12) m_1^3 m_3 n_3 n_2 + (1/24) n_2^2 m_3^3 m_1 \\
& - (1/12) m_2^3 m_3 n_3^2 + (1/24) m_2^3 m_3 n_1^2 - (1/12) m_2^3 m_3 n_3 n_1 + \\
& (1/6) n_3 m_2 n_1 m_3^2 m_1 - (1/12) n_2 m_3^3 n_1 m_1 - (1/12) n_1^2 m_3^3 m_1 - (1/12) m_1^3 m_2 n_2^2 \\
& - (1/12) n_2^2 m_3 m_2^2 m_1 + (1/4) m_1^3 m_2 n_2 n_3 - (1/6) m_3^2 m_2 n_2 m_1 n_3 - \\
& (1/3) m_1^2 m_2 m_3 n_2 n_3 + (1/6) m_2^2 m_3 n_2 m_1 n_3 - (1/12) n_3^2 m_2 m_3^2 m_1 + \\
& (1/24) m_1^3 m_2 n_3^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(2,9) = & - (5/24) n_2^3 m_3 n_1^2 + (1/8) n_2^2 m_3 n_1^3 + (1/12) n_2^3 m_3 n_3^2 - \\
& (1/12) n_1^4 m_2 n_2 - (1/12) n_3^4 m_2 n_2 - (1/12) m_1^4 m_2 n_2 - (1/12) m_3^4 m_2 n_2 + \\
& (1/12) m_2^2 m_3^3 n_2 + (1/24) n_1^4 m_3 n_2 - (1/12) n_2^3 m_3 n_1 n_3 + (1/12) n_1^2 m_2 n_2^2 n_3 - \\
& (7/24) n_2^2 m_3 n_1 n_3^2 + (1/3) n_2^2 m_3 n_1^2 n_3 + (1/3) n_3^3 m_2 n_1 n_2 - (1/24) n_3^2 m_2 n_1 n_2^2 \\
& - (1/12) n_1^2 m_2 n_3^2 n_2 - (1/12) n_1^3 m_2 n_2 n_3 - (1/12) m_1^2 m_2 m_3^2 n_2 - \\
& (1/12) m_3^3 m_2 m_1 n_2 - (1/24) m_2^2 m_3 m_1^2 n_2 + (1/12) m_2^2 m_3^2 m_1 n_2 + (1/3) m_1^3 m_2 m_3 n_2 \\
& + (1/12) m_1^2 m_3^3 n_1 - (1/6) n_3^3 m_2 n_1^2 - (1/24) n_3^2 m_2 n_1^3 + (1/24) n_1^2 m_3 n_3^2 n_2 \\
& - (1/12) n_1^3 m_3 n_2 n_3 - (1/24) m_1^2 m_3^3 n_2 + (1/24) m_1^4 m_3 n_2 - (1/6) m_1^3 m_3^2 n_2 + \\
& (1/24) n_2^4 m_3 n_1 + (1/12) n_1^3 m_2 n_2^2 + (1/12) m_1^2 m_2^3 n_1 - (5/24) m_3^2 m_2^3 n_1 + \\
& (1/8) m_3^3 m_2^2 n_1 + (1/24) m_2^4 m_3 n_1 + (1/24) n_3^4 m_2 n_1 + (1/24) m_3^4 m_2 n_1 + \\
& (1/12) n_1^3 m_3 n_3^2 - (7/24) m_1^2 m_2^2 m_3 n_1 - (1/12) m_1 m_2^3 m_3 n_1 + (1/3) m_1 m_2^2 m_3^2 n_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1/24)m_1^2m_2m_3^2n_1 - (1/12)m_1m_2m_3^3n_1 + \mu[-(1/2)m_1n_1^2m_2^2n_3 + \\
& (1/6)m_3m_1n_2^2m_2n_3 - (1/3)m_3m_1^2n_2^2n_3 + (1/3)m_3^2m_1n_2^2n_1 + \\
& (1/3)m_2m_1^2n_3n_1n_2 + (1/6)m_2m_1^2n_3^2n_2 - (1/3)m_2^2m_1n_3^2n_1 + \\
& (1/3)m_2m_1n_3^2m_3n_2 + (2/3)m_2m_1n_3n_2m_3n_1 + (1/3)m_3m_2^2n_1^2n_3 + \\
& (1/6)m_3^2m_2n_1^2n_2 + (1/6)m_2^2m_1n_3n_2n_1 - (1/2)m_2^2n_2m_3n_3n_1 + \\
& (1/3)m_3m_1^2n_2^2n_1 + (1/6)m_1^2n_1^2m_3n_2 - (1/3)m_1^2n_1^2m_2n_2 + (1/3)m_2n_2^2m_3^2n_3 \\
& - (1/3)m_3^2n_3^2m_2n_2 - (1/2)m_3^2m_1n_2^2n_3 - (1/6)m_1n_1^2m_3^2n_2 - \\
& (1/3)m_1^2n_1m_3n_2n_3 - (1/3)m_3n_3^2m_2m_1n_1 - (1/6)m_2n_2^2m_3^2n_1 + \\
& (1/3)m_3n_3^2m_2^2n_1 - (1/2)m_2n_2^2m_3m_1n_1 + (1/6)m_2^2n_2^2m_3n_1 + (1/6)m_3^2n_3^2m_2n_1 \\
& - (1/6)m_3m_2^2n_1^2n_2 - (1/6)m_3^2m_2n_1^2n_3 + (1/3)m_1n_1^2m_2^2n_2 + \\
& (1/3)m_1n_1^2m_3^2n_3] + \nu[+ (1/12)m_1^2m_2n_2^2n_1 + (1/12)n_2^3m_3^3 - \\
& (1/12)m_1^2m_2n_1n_2n_3 + (3/4)m_3^2m_2n_1^2n_2 + (1/3)m_3^2m_2n_1n_2n_3 + \\
& (1/3)m_1m_2m_3n_1n_2n_3 - (5/24)m_2^2m_3n_1^2n_2 - (1/12)m_2^2m_3n_1n_2n_3 + \\
& (1/12)n_1^2m_2^3n_3 - (7/24)n_2^2m_3^3n_1 - (1/24)n_3^2m_2^3n_1 - (1/3)n_2^2m_3^2n_1m_1 - \\
& (1/24)n_2^3m_3m_1^2 + (1/12)n_2^3m_3^2m_1 - (1/6)m_3^2m_2n_3^2n_2 + (1/3)m_1m_2m_3n_1^2n_2 - \\
& (1/12)m_1m_2m_3n_3^2n_2 + (1/12)m_2^2m_3n_3^2n_2 + (1/8)n_2^2m_3n_1m_1^2 + \\
& (1/12)m_1^2m_3n_1^2n_2 + (1/24)n_1^2m_3^3n_2 - (1/3)n_1^2m_3m_2^2n_3 - \\
& (1/12)n_2m_3n_1m_1^2n_3 - (1/24)n_3^2m_2n_1m_1^2 - (1/6)n_1^2m_3^2m_1n_2 - \\
& (1/6)m_3^2m_2n_1^2n_3 - (1/24)m_1^2m_3n_3^2n_2 - (1/6)m_1^2m_2n_1^2n_2 + \\
& (1/12)m_1^2m_2n_3^2n_2 + (1/12)n_1^3m_3^3 - (5/24)m_3^2m_2n_2^2n_1 - (1/12)m_1m_2m_3n_2^2n_1 \\
& + (1/12)m_2^2m_3n_2^2n_1 + (1/8)n_3^2m_2^2m_3n_1 + (1/12)m_3^2m_2n_3^2n_1 - \\
& (1/12)m_1m_2m_3n_3^2n_1 - (7/24)n_1^3m_2^2m_3 + (1/24)n_1^3m_2m_3^2 + (1/12)n_1^3m_3^3 + \\
& (1/12)m_1^2m_3n_3^2n_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(3,3) = & + (1/12)n_1^4n_2^2 + (1/6)m_1^3n_3^2m_2 - (1/12)m_1^4n_3n_2 + \\
& (1/12)n_2^2n_3^4 + (3/4)m_1^2m_2^2n_3^2 - (1/2)m_1m_2^3n_3^2 + (1/6)m_1^3n_2^2m_3 - \\
& (1/6)n_2^3n_3^3 + (1/12)n_2^2m_3^4 + (3/4)m_1^2m_3^2n_2^2 - (1/2)m_1m_3^3n_2^2 + \\
& (1/12)n_3^2m_2^4 + (1/12)n_2^4n_3^2 + (1/2)m_1m_2n_3n_2m_3^2 - (4/3)m_1^2m_3n_2m_2n_3 + \\
& (1/2)m_1m_3n_2n_3m_2^2 - (1/12)n_1^4n_2n_3 + (1/12)m_1^4n_3^2 - (1/6)n_1^3n_2^2n_3 + \\
& (1/12)n_1^2n_2^3n_3 - (1/6)n_1^3n_3^2n_2 + (1/12)n_1^2n_3^3n_2 + (1/6)n_2^2n_3^2n_1^2 - \\
& (1/6)n_3m_2^2n_2m_3^2 - (1/3)m_1^3n_2m_2n_3 + (1/12)m_1^2n_2n_3m_2^2 + (1/12)m_1^4n_2^2 - \\
& (1/3)m_1^3n_3m_3n_2 + (1/12)m_1^2n_3n_2m_3^2 + (1/12)n_1^4n_3^2 + \mu[- \\
& (4/3)n_1^2n_3m_2n_2m_3 + m_2n_3n_2^2n_1m_3 - m_2^2n_3^2n_2n_1 - m_3^2n_2^2n_3n_1 + m_3n_2n_3^2n_1m_2 - \\
& (2/3)m_3n_2^2n_3^2m_2 - (1/3)m_1^2n_2n_1^2n_3 - (1/3)m_1^2n_2^2n_1n_3 + (1/3)m_1^2n_1^2n_3^2 - \\
& (1/3)n_2n_3^2m_1^2n_1 + (1/3)n_2^2n_3^2m_1^2 - (2/3)m_1n_2n_1^2n_3m_2 + (1/3)m_1n_2^2n_1^2m_3 \\
& + (1/3)m_1n_2^2n_1n_3m_2 - (2/3)m_1n_1^2n_3n_2m_3 + (1/3)m_1n_1^2n_3^2m_2 + \\
& (1/3)m_1n_1n_3^2m_3n_2 + (1/3)m_1^2n_2^2n_1^2 + (5/6)n_1^2n_2^2m_3^2 + (5/6)n_1^2n_3^2m_2^2 + \\
& (1/3)m_2^2n_3^2n_2^2 + (1/3)m_3^2n_2^2n_3^2] + \nu[- (1/3)n_1^2n_3m_1m_2n_2 - \\
& (1/6)m_1^2n_2^2n_3n_1 - (1/6)m_1^2n_3^2n_2n_1 - (1/6)n_1^2n_3m_1^2n_2 + (1/12)n_1^2n_2n_3m_2^2 \\
& + (1/2)m_1m_2n_3^3n_2 + (1/12)n_2n_3^3m_1^2 + (1/3)m_1m_3n_2^2n_3n_1 - (1/6)n_2^3n_3m_3^2 \\
& + (1/6)n_2^2n_3^2m_3^2 + (1/6)n_3^2m_2^2n_2^2 - (1/6)n_3^3m_2^2n_2 - (1/12)n_1^2n_2^2m_3^2 + \\
& (1/12)m_1^2n_2^3n_3 - (1/6)m_1^2n_2^2n_3^2 + (1/6)m_1^2n_2^2n_1^2 - (1/12)n_1^2n_3^2m_2^2 + \\
& (1/12)n_1^2n_3n_2m_3^2 + (1/2)n_2^3n_3m_1m_3 - (1/2)n_2^2n_3^2m_1m_3 + (1/6)n_1^2n_3^2m_1m_2 \\
& - (1/2)n_2^2n_3^2m_1m_2 + (1/6)n_1^2n_2^2m_1m_3 - (1/3)n_2n_3n_1^2m_1m_3 + \\
& (1/6)m_1^2n_3^2n_1^2 + (1/3)n_2n_3^2m_1m_2n_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(3,4) = & + (1/12)n_2^2n_3^3 + (1/4)n_2^3n_3^2 - (1/12)n_2n_3^4 + \\
& (1/4)n_2m_3^2m_2^2 - (1/4)n_2^4n_3 - (1/4)m_1^2n_2m_2^2 + (1/12)n_1^4n_2 - \\
& (1/4)n_1^2n_2^3 + (1/12)n_1^2n_3n_2^2 + (1/6)n_1^2n_3^2n_2 + (1/3)n_2^3n_3n_1 - \\
& (5/6)n_2^2n_3^2n_1 + (1/3)m_1m_3^3n_2 + (1/3)m_1^3m_3n_2 + (1/12)n_3m_2^2m_3^2 - \\
& (5/12)n_3m_2^2m_1^2 + m_1m_2^3n_3 + (1/6)n_2n_3^3n_1 + (1/12)m_1^4n_2 - \\
& (1/2)m_1m_3^2n_2m_2 - (2/3)m_1m_3n_2m_2^2 - (1/3)m_1m_2^2n_3m_3 + (1/2)m_1^2n_2m_2m_3 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/12)n_2m_3^4 - (1/4)n_3m_2^4 - (1/6)m_1^2n_3m_3^2 + (1/6)m_1^2n_3m_2m_3 - \\
& (1/6)m_1^4n_3 - (1/6)m_1m_2n_3m_3^2 - (1/6)n_1^2n_3^3 + (1/3)n_2n_3n_1^3 - (1/6)n_1^4n_3 \\
& + \mu[-(1/3)n_1n_3^2m_2^2 - (4/3)n_1n_2^2m_3m_2 + (1/3)m_1n_1n_3m_3n_2 + \\
& (2/3)m_1n_2^2n_1m_3 + (1/3)m_1n_1n_3^2m_2 - m_1n_2^2n_1m_2 + 2n_1n_3m_2^2n_2 - n_1n_3m_2m_3n_2 - \\
& (2/3)n_2n_3^2m_1m_2 - n_2^2n_3m_1m_3 + (2/3)n_2^2n_3m_1m_2 - (1/3)m_3^2n_2^2n_1 + \\
& (1/3)m_1n_1n_3m_2n_2 + (2/3)n_2n_3m_1^2n_1 + (1/3)n_2n_3^2m_1m_3 - (1/3)n_1n_3^2m_2m_3 + \\
& (1/3)n_1^2n_2m_3m_2 + (2/3)n_1n_2m_3^2n_3 - m_2^2n_3n_2^2 - (1/3)m_3^2n_2n_3^2 + \\
& (2/3)n_1^2n_2m_3m_1 - (1/3)n_2^2n_3m_1^2 + (1/3)m_1^2n_2n_1^2 + m_2n_3n_2^2m_3 + \\
& (1/3)m_2n_3^2n_2m_3 - (2/3)n_1^2n_3m_2^2 - (2/3)m_1^2n_1^2n_3 - (2/3)m_1n_1n_3^2m_3] + \\
& \nu[+ (1/12)n_3^3m_2^2 - (1/6)m_1m_2n_3^3 - (1/6)n_2^2n_1m_3^2 + (1/4)n_2^3m_3^2 - \\
& (1/4)m_1^2n_2^3 - (2/3)n_2n_3n_1m_2m_3 + (1/3)n_2n_3n_1m_2^2 - (1/2)n_2^2n_3m_2^2 + \\
& (1/4)n_2n_3^2m_2^2 - (1/4)n_1^2n_2m_2^2 + (1/6)n_1^2n_2m_2m_3 + (1/6)n_1^2n_3m_2m_3 + \\
& (1/12)n_2^2n_3m_3^2 + n_2^2n_3m_1m_2 + (5/12)n_2^2n_3m_1^2 + (1/6)n_2n_3n_1m_3^2 + \\
& (1/3)n_2n_3n_1m_1^2 - n_2n_3n_1m_1m_2 - (1/2)n_2n_3^2m_1m_2 + (1/6)n_2n_3^2m_1^2 - \\
& (1/6)n_2n_3^2m_3^2 + (1/6)n_1^2n_2m_1^2 - (1/3)m_1m_3n_2^2n_3 - (2/3)m_1m_3n_2^3 - \\
& (1/6)m_1^2n_3^3 + (1/3)m_1m_3n_2^2n_1 - (1/3)m_1^2n_3n_1^2 - (1/6)n_1^2n_3m_3^2 + \\
& (1/3)m_1m_3n_2n_3^2 + (1/4)n_1^2n_3m_2^2 + (1/3)m_1m_3n_2n_1^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(3,5) = & + (1/24)n_3m_2^4m_1 + (1/12)n_2^3n_3^2m_3 - (5/24)n_2^2n_3^3m_1 + \\
& (1/24)n_2^4n_3m_1 - (1/12)n_2^4n_3m_3 - (1/12)n_2^3n_3n_1m_1 + (1/3)n_2^2n_3^2n_1m_1 + \\
& (1/12)n_2^2n_3^2n_1m_3 - (1/12)n_2^2n_3n_1^2m_3 - (1/12)n_2^3n_3n_1m_3 - (1/24)n_1^2n_2^3m_3 \\
& + (1/8)n_2^3n_3^2m_1 - (7/24)n_2m_3^2m_1m_2^2 + (1/3)m_1^2m_3^2n_2m_2 - \\
& (1/12)m_1^2m_2^2n_3m_3 + (1/24)n_1^2n_2^2n_3m_1 - (1/12)n_2m_3^3m_1m_2 + \\
& (1/24)m_1^2n_2m_2^2m_3 - (1/12)m_1^3n_2m_2m_3 + (1/3)n_3m_2^3m_1m_3 + (1/12)m_1^3n_2m_2^2 \\
& + (1/12)n_2m_3^3m_2^2 - (1/6)m_1^2m_2^3n_3 + (1/12)n_1^2n_2^3m_1 - (1/6)n_1^3n_2^2m_3 + \\
& (1/8)m_1^3n_2m_3^2 - (1/12)n_2n_3^3n_1m_1 + (1/24)n_2n_3^4m_1 - (1/24)n_2n_3^2n_1^2m_3 + \\
& (1/3)n_2n_3n_1^3m_3 - (7/24)n_1^2n_2m_1n_3^2 + (1/24)n_1^4n_2m_3 + (1/24)n_2m_3^4m_1 - \\
& (1/12)n_1^4n_3m_3 + (1/12)n_1^2n_3^3m_1 + (1/12)m_1^3n_3m_3^2 - (1/12)m_1^4n_3m_3 - \\
& (5/24)m_1^2m_3^3n_2 - (1/24)m_1^3n_3m_2^2 - (1/12)m_1^3m_2n_3m_3 + (1/12)m_1^2m_2n_3m_3^2 \\
& + (1/24)m_1^4n_2m_3 - (1/24)n_3m_2^2m_1m_3^2 - (1/12)n_3m_2^4m_3 + \mu[- \\
& (1/2)n_1n_2^2m_3^2m_2 + (1/3)m_2^2n_3^2n_2m_1 - (1/2)m_2n_3^2n_2m_1m_3 + \\
& (1/6)m_3^2n_2n_3m_2n_1 - (1/6)m_3^2n_2^2n_3m_1 + (1/6)m_3^2n_2n_3^2m_1 + \\
& (1/3)m_2^2n_3n_2m_3n_1 + (1/6)m_2^2n_3n_2^2m_1 - (1/2)n_1n_2m_3^2m_1n_3 - \\
& (1/6)n_2n_3^2m_1^2m_3 + (1/3)n_1^2n_2m_3^2m_1 + (1/6)m_1^2n_2n_1^2m_3 + (1/6)n_1n_3^2m_2m_1m_3 \\
& - (1/3)m_1^2n_1^2n_3m_3 + (1/3)m_1^2n_1n_3^2m_3 - (1/6)m_1^2n_2^2n_1m_3 - \\
& (1/3)m_1n_2n_1^2m_2m_3 + (1/3)m_1^2n_2^2n_1m_2 + (1/3)n_1n_2^2m_3^2m_1 - (1/3)n_1^2n_2m_3^2m_2 \\
& + (1/6)n_1^2n_3m_2^2m_3 - (1/3)n_1n_3m_2^2m_1n_2 - (1/2)m_1^2n_1n_3^2m_2 + \\
& (1/6)n_2^2n_3m_1^2m_3 + (2/3)n_2n_3m_1m_2m_3n_1 - (1/6)n_2^2n_3m_1^2m_2 + \\
& (1/3)n_2n_3^2m_1^2m_2 - (1/3)n_1n_3^2m_2^2m_1 + (1/3)m_1n_1^2n_3m_2m_3 - (1/3)m_2^2n_3n_2^2m_3 \\
& + (1/3)m_3^2n_2^2n_3m_2] + \nu[+ (3/4)m_1^2m_3n_2^2n_3 - (1/3)m_1m_3^2n_2^2n_1 - \\
& (1/3)m_1^2m_2n_3^2n_2 + (1/12)n_2^2m_3^3n_1 - (5/24)n_2^2m_3^2n_3m_1 - (1/6)m_1^2n_2^2n_1m_3 \\
& - (1/6)m_1^2m_2n_3n_2^2 + (1/12)n_2^2n_3m_1m_2^2 + (1/12)m_1^3n_2^3 + (1/3)n_2^2n_3m_1m_2m_3 \\
& + (1/12)n_2^3m_3^3 - (1/12)n_1^2n_2m_1m_2m_3 + (1/12)n_1^2n_2m_1m_2^2 + \\
& (1/12)n_2n_3^2m_2^2m_3 - (1/12)n_2n_3^2m_1m_2m_3 - (1/24)n_1^2n_2m_2^2m_3 + \\
& (1/8)n_2n_3^2m_1m_2^2 - (1/12)n_2n_3n_1m_2^2m_3 + (1/3)n_2n_3n_1m_1m_2m_3 - \\
& (1/12)n_2n_3n_1m_1m_2^2 - (1/6)n_2^2n_3m_2^2m_3 + (1/24)m_1^2n_2^3m_3 + (1/24)m_1^3n_2^2n_3 \\
& - (7/24)n_2^3m_3^2m_1 + (1/3)m_1^2n_3n_1n_2m_3 + (1/12)n_3m_2^2n_1^2m_3 + \\
& (1/12)n_2m_3^2m_1n_3^2 + (1/8)m_1m_3^2n_2n_1^2 - (5/24)m_1^2m_3n_2n_3^2 - (1/24)n_2m_3^3n_1^2 \\
& + (1/12)m_1^2n_2n_1^2m_3 - (1/12)m_1m_2n_3n_1^2m_3 - (1/24)n_3^3m_2^2m_1 - \\
& (7/24)m_1^3n_2n_3^2 + (1/12)m_1^2m_2n_3^3 + (1/12)m_1^3n_3^3 - (1/6)n_1^2n_3m_1^2m_3 + \\
& (1/12)n_1^2n_3m_1m_3^2 - (1/24)n_1^2n_3m_1m_2^2 - (1/12)n_2n_3n_1m_1m_3^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(3,6) = & + (1/8)n_2^2n_3^3n_1 - (1/6)m_1^3n_3^2m_2 - (1/24)m_1^4n_3n_2 - \\
& (1/4)m_1^2m_2^2n_3^2 - (1/6)m_1m_2^3n_3^2 - (1/12)n_1^3n_3^3 - (1/12)n_2^3n_3^3 - \\
& (1/24)n_1m_3^4n_2 - (1/12)m_1m_2n_3n_1m_3^2 + (1/24)m_1^2n_3n_1m_2^2 + \\
& (1/4)m_1^2n_3m_2m_3n_1 + (1/3)m_1m_2^2n_3m_3n_1 + (1/6)m_1m_2^3n_3n_1 + (1/12)n_3^2m_2^4 + \\
& (1/12)n_2^4n_3^2 - (1/12)m_1m_2n_3n_2m_3^2 + (1/3)m_1^2m_3n_2m_2n_3 + (1/4)m_1m_3n_2n_3m_2^2 \\
& + (1/24)m_2^2m_3^2n_2n_1 + (1/6)n_2m_3^3m_2n_1 - (1/24)n_1^4n_2n_3 + (1/12)m_1^4n_3^2 + \\
& (1/8)n_1^3n_2^2n_3 + (1/8)n_1^2n_2^3n_3 - (1/24)n_1n_2^4n_3 - (1/24)n_1^3n_3^2n_2 + \\
& (1/8)n_1^2n_3^3n_2 - (1/24)n_1n_3^4n_2 - (1/4)n_2^2n_3^2n_1^2 + (1/6)m_1n_1m_3^3n_2 + \\
& (1/24)m_1^2m_3^2n_2n_1 - (1/24)n_3m_2^4n_1 - (1/12)n_3m_2^2n_2m_3^2 - (1/12)m_1^2n_3n_1m_3^2 \\
& + (1/24)n_3m_2^2n_1m_3^2 - (1/12)m_1^2m_2^2n_2n_1 - (1/6)n_3m_2^3m_3n_1 - \\
& (2/3)m_1m_3^2n_2m_2n_1 - (1/12)m_1m_2^2n_2m_3n_1 + (1/6)m_1^3n_2m_2n_3 + \\
& (1/24)m_1^2n_2n_3m_2^2 - (1/6)m_1^3n_3m_3n_2 - (1/12)m_1^2m_2n_2n_1m_3 + \\
& (1/24)m_1^2n_3n_2m_3^2 - (1/24)n_2^3n_3^2n_1 + (1/12)n_1^4n_3^2 - (1/12)n_1^3n_3^3 + \mu[- \\
& (1/6)m_3n_1^2n_3^2m_2 + (1/3)m_3^2n_1^2n_3n_2 - (1/6)m_3^2n_1n_3^2n_2 + (1/3)m_2n_3n_2^2n_1m_3 \\
& - (2/3)m_2^2n_3^2n_2n_1 + (1/3)m_3^2n_2^2n_3n_1 + (1/3)m_3n_2n_3^2n_1m_2 - \\
& (1/3)m_3n_2^2n_3^2m_2 - (1/6)m_1^2n_2n_1^2n_3 + (1/3)m_1^2n_2^2n_1n_3 + (1/3)m_1^2n_1^2n_3^2 - \\
& (2/3)n_2n_3^2m_1^2n_1 - (1/3)m_3n_1^2n_3^2m_1 + (1/3)m_1n_2n_1^2n_3m_2 - (1/6)m_1n_2^2n_1^2m_3 \\
& + (1/6)n_2^2n_3^2m_1^2 - (1/6)m_2n_1^2n_2^2m_3 + (1/3)m_2^2n_1^2n_2n_3 - (1/6)m_2^2n_1n_2^2n_3 \\
& + (1/3)m_1n_2^2n_1n_3m_2 + (1/3)m_1n_1^2n_3n_2m_3 + (1/6)m_1n_1^2n_3^2m_2 + \\
& (1/3)m_1n_1n_3^2m_3n_2 - (2/3)n_2n_3^2m_1n_1m_2 - (1/6)n_2^2n_3^2m_1m_3 + \\
& (1/6)n_2^2n_3^2m_1m_2 - (1/3)m_1n_2^2m_2n_1^2 - (2/3)n_1^2n_2^2m_3^2 + (1/6)n_1^2n_3^2m_2^2 + \\
& (1/3)m_2^2n_3^2n_2^2] + \nu[+ (1/6)n_1^2n_3m_1m_2n_2 + (1/8)m_1^2n_2^2n_3n_1 - \\
& (1/12)m_1^2n_3^3n_1 + (1/24)n_1^3n_3m_2^2 - (1/3)n_2n_3n_1^2m_2m_3 - (1/12)m_1m_2n_3^3n_1 \\
& - (1/24)m_1^2n_3^2n_2n_1 - (1/12)n_3m_2^2n_1n_2^2 - (1/12)n_1^2n_3m_1^2n_2 - \\
& (1/24)n_2n_3^2n_1m_2^2 + (1/8)n_1^2n_2n_3m_2^2 - (1/12)m_1m_2n_3^3n_2 + (1/24)n_2n_3^3m_1^2 - \\
& (1/3)m_1m_3n_2^2n_3n_1 + (1/24)n_1n_2^3m_3^2 - (1/12)n_2^3n_3m_3^2 + (1/6)n_3^2m_2^2n_2^2 - \\
& (1/12)n_3^3m_2^2n_2 - (1/12)n_1^3n_3m_3^2 + (1/24)m_1^2n_2^3n_3 - (1/12)m_1^2n_2^2n_3^2 + \\
& (1/24)n_1^3n_2m_3^2 - (1/12)n_1^2n_3^2m_2^2 + (1/4)n_1^3n_3m_2m_3 + (1/8)n_1^2n_3n_2m_3^2 - \\
& (1/6)n_2^2n_3m_2m_3n_1 - (1/12)n_1n_3^2n_2m_3^2 + (1/8)n_2^2n_3n_1m_3^2 + \\
& (1/6)n_2n_3^2m_2m_3n_1 + (1/4)n_2^3n_3m_1m_3 - (1/12)n_1^3n_2m_2m_3 - (1/6)n_1^2n_3^2m_1m_2 \\
& - (1/6)n_2^2n_3^2m_1m_2 - (1/12)n_1n_2^3m_1m_3 + (1/6)n_2n_3^2m_1n_1m_3 + \\
& (1/24)n_3^3m_2^2n_1 - (1/12)n_1^3n_2m_2^2 - (1/6)n_2n_3n_1^2m_1m_3 + (1/6)m_1^2n_3^2n_1^2 + \\
& (1/6)n_2^2n_3m_1m_2n_1 + (1/3)n_2n_3^2m_1m_2n_1 - (1/12)m_1^2n_2^3n_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(3,7) = & - (1/4)n_2^2n_3^3 - (1/12)n_2^3n_3^2 + (1/4)n_2n_3^4 - \\
& (1/12)n_2m_3^2m_2^2 + (1/12)n_2^4n_3 + (1/6)m_1^2n_2m_2^2 + (1/6)n_1^4n_2 + \\
& (1/6)n_1^2n_2^3 - (1/6)n_1^2n_3n_2^2 - (1/12)n_1^2n_3^2n_2 - (1/6)n_2^3n_3n_1 + \\
& (5/6)n_2^2n_3^2n_1 - (1/3)m_1^3m_2n_3 - m_1m_3^3n_2 - (1/4)n_3m_2^2m_3^2 + \\
& (5/12)m_1^2n_2m_3^2 - (1/3)m_1m_2^3n_3 - (1/3)n_2n_3n_1^3 - (1/3)n_2n_3^3n_1 + \\
& (1/6)m_1^4n_2 + (1/3)m_1m_3^2n_2m_2 + (1/6)m_1m_3n_2m_2^2 + (1/2)m_1m_2^2n_3m_3 - \\
& (1/6)m_1^2n_2m_2m_3 + (1/4)n_2m_3^4 + (1/12)n_3m_2^4 + (1/4)m_1^2n_3m_3^2 - \\
& (1/2)m_1^2n_3m_2m_3 - (1/12)m_1^4n_3 + (2/3)m_1m_2n_3m_3^2 + (1/4)n_1^2n_3^3 - \\
& (1/12)n_1^4n_3 + \mu[+ (1/3)n_1n_3^2m_2^2 + (1/3)n_1n_2^2m_3m_2 - (1/3)m_1n_1n_3m_3n_2 - \\
& (1/3)m_1n_2^2n_1m_3 - (2/3)m_1n_1n_3^2m_2 + (2/3)m_1n_2^2n_1m_2 - (2/3)n_1n_3m_2^2n_2 + \\
& n_1n_3m_2m_3n_2 + n_2n_3^2m_1m_2 + (2/3)n_2^2n_3m_1m_3 - (1/3)n_2^2n_3m_1m_2 + \\
& (2/3)m_3^2n_1^2n_2 + (1/3)m_3^2n_2^2n_1 - (1/3)m_1n_1n_3m_2n_2 - (2/3)n_2n_3m_1^2n_1 - \\
& (2/3)n_2n_3^2m_1m_3 - (2/3)n_1^2n_3m_2m_1 + (4/3)n_1n_3^2m_2m_3 - 2n_1n_2m_3^2n_3 + \\
& (1/3)m_2^2n_3n_2^2 + m_3^2n_2n_3^2 + (2/3)m_1^2n_2n_1^2 - (1/3)m_2n_3n_2^2m_3 - m_2n_3^2n_2m_3 + \\
& (1/3)n_2n_3^2m_1^2 - (1/3)n_1^2n_3m_2m_3 - (1/3)m_1^2n_1^2n_3 + m_1n_1n_3^2m_3] + \nu[- \\
& (1/4)n_3^3m_2^2 + (2/3)m_1m_2n_3^3 - (1/12)n_2^3m_3^2 - (1/4)n_1^2n_2m_3^2 + \\
& (1/6)m_1^2n_2^3 + (1/6)n_3^2m_2^2n_1 - (1/3)m_1m_2n_3^2n_1 + n_2n_3n_1m_1m_3 + \\
& (2/3)n_2n_3n_1m_2m_3 - (1/6)n_2n_3n_1m_2^2 + (1/6)n_2^2n_3m_2^2 - (1/12)n_2n_3^2m_2^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/6) n_1^2 n_2 m_2^2 - (1/6) n_1^2 n_2 m_2 m_3 - (1/6) n_1^2 n_3 m_2 m_3 - (1/3) n_1^2 n_3 m_1 m_2 - \\
& (1/4) n_2^2 n_3 m_3^2 - (1/3) n_2^2 n_3 m_1 m_2 - (1/6) n_2^2 n_3 m_1^2 - (1/3) n_2 n_3 n_1 m_3^2 - \\
& (1/3) n_2 n_3 n_1 m_1^2 + (1/3) n_2 n_3^2 m_1 m_2 - (5/12) n_2 n_3^2 m_1^2 + (1/2) n_2 n_3^2 m_3^2 + \\
& (1/3) n_1^2 n_2 m_1^2 + (1/2) m_1 m_3 n_2^2 n_3 + (1/6) m_1 m_3 n_2^3 + (1/4) m_1^2 n_3^3 - \\
& (1/6) m_1^2 n_3 n_1^2 + (1/4) n_1^2 n_3 m_3^2 - m_1 m_3 n_2 n_3^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(3,8) = & + (1/24) n_3 m_2^4 m_1 + (1/8) n_2^2 n_3^3 m_1 + (1/24) n_2^4 n_3 m_1 - \\
& (1/12) n_2^3 n_3 n_1 m_1 + (1/3) n_2^2 n_3^2 n_1 m_1 - (5/24) n_2^3 n_3^2 m_1 - (1/24) n_2 m_3^2 m_1 m_2^2 - \\
& - (1/12) m_1^2 m_3^2 n_2 m_2 + (1/3) m_1^2 m_2^2 n_3 m_3 - (7/24) n_1^2 n_2^2 n_3 m_1 + \\
& (1/3) n_2 m_3^3 m_1 m_2 + (1/12) m_1^2 n_2 m_2^2 m_3 - (1/12) m_1^3 n_2 m_2 m_3 - (1/12) n_3 m_2^3 m_1 m_3 \\
& + (1/12) m_1^3 n_2 m_2^2 - (5/24) m_1^2 m_2^3 n_3 + (1/12) n_1^2 n_2^3 m_1 - (1/24) m_1^3 n_2 m_3^2 - \\
& (1/12) n_2 n_3^3 n_1 m_1 + (1/24) n_2 n_3^4 m_1 + (1/24) n_1^2 n_2 m_1 n_3^2 + (1/24) n_2 m_3^4 m_1 + \\
& (1/12) n_1^2 n_3^3 m_1 + (1/12) m_1^3 n_3 m_3^2 - (1/6) m_1^2 m_3^3 n_2 + (1/8) m_1^3 n_3 m_2^2 - \\
& (1/12) m_1^3 m_2 n_3 m_3 + (1/24) m_1^2 m_2 n_3 m_3^2 - (7/24) n_3 m_2^2 m_1 m_3^2 + (1/3) n_1^3 n_2 n_3 m_2 \\
& - (1/12) n_2 n_3^2 n_1^2 m_2 - (1/12) n_2 n_3^4 m_2 + (1/12) n_2^2 n_3^3 m_2 + (1/12) n_3 m_2^3 m_3^2 \\
& - (1/12) n_2 m_3^4 m_2 + (1/24) n_1^4 n_3 m_2 - (1/6) n_1^3 n_3^2 m_2 - (1/24) n_1^2 n_3^3 m_2 + \\
& (1/24) m_1^4 n_3 m_2 - (1/12) n_2 n_3^3 n_1 m_2 + (1/12) n_2^2 n_3^2 n_1 m_2 - (1/24) n_2^2 n_3 m_2 n_1^2 \\
& - (1/12) n_1^4 n_2 m_2 - (1/12) m_1^4 n_2 m_2 + \mu[- (1/6) m_2^2 n_3^2 n_2 m_1 + \\
& (1/3) m_3^2 n_2 n_3 m_2 n_1 + (1/3) m_3^2 n_2^2 n_3 m_1 + (1/6) m_3^2 n_2 n_3^2 m_1 - \\
& (1/2) m_2 n_3 n_2^2 m_1 m_3 + (1/6) m_2^2 n_3 n_2 m_3 n_1 + (1/6) m_2^2 n_3 n_2^2 m_1 - \\
& (1/3) n_1 n_2 m_3^2 m_1 n_3 - (1/6) n_2 n_3^2 m_1^2 m_3 + (1/3) m_1^2 n_1 n_3^2 m_3 - (1/2) m_1^2 n_2^2 n_1 m_3 \\
& + (1/3) m_1 n_2 n_1^2 m_2 m_3 + (1/3) m_1^2 n_2^2 n_1 m_2 - (1/3) n_1 n_2^2 m_3^2 m_1 + \\
& (1/6) n_1^2 n_2 m_3^2 m_2 + (1/6) n_1 n_2^2 m_3 m_1 m_2 - (1/3) n_1^2 n_3 m_2^2 m_3 - \\
& (1/2) n_1 n_3 m_2^2 m_1 n_2 - (1/6) m_1^2 n_1 n_3^2 m_2 + (1/3) n_2^2 n_3 m_1^2 m_3 + \\
& (2/3) n_2 n_3 m_1 m_2 m_3 n_1 - (1/6) n_2^2 n_3 m_1^2 m_2 + (1/6) n_2 n_3^2 m_1^2 m_2 + \\
& (1/3) n_1 n_3^2 m_2^2 m_1 - (1/3) m_1 n_1^2 n_3 m_2 m_3 + (1/6) m_1^2 n_1^2 n_3 m_2 - (1/2) n_1 n_3^2 m_2^2 m_3 \\
& - (1/3) m_3^2 n_2 n_3^2 m_2 + (1/3) m_2^2 n_3^2 n_2 m_3 - (1/3) m_1^2 n_2 n_1^2 m_2 + \\
& (1/3) n_1^2 n_3 m_2^2 m_1] + \nu[- (1/3) m_1^2 m_3 n_2^2 n_3 + (3/4) m_1^2 m_2 n_3^2 n_2 + \\
& (1/8) n_2^2 m_3^2 n_3 m_1 - (5/24) m_1^2 m_2 n_3 n_2^2 + (1/12) n_2^2 n_3 m_1 m_2^2 + (1/12) m_1^3 n_2^3 - \\
& (1/12) n_2^2 n_3 m_1 m_2 m_3 - (1/12) n_1^2 n_2 m_1 m_2 m_3 + (1/12) n_1^2 n_2 m_1 m_2^2 + \\
& (1/3) n_2 n_3^2 m_1 m_2 m_3 - (5/24) n_2 n_3^2 m_1 m_2^2 + (1/3) n_2 n_3 n_1 m_1 m_2 m_3 - \\
& (1/12) n_2 n_3 n_1 m_1 m_2^2 + (1/12) m_1^2 n_2^3 m_3 - (7/24) m_1^3 n_2^2 n_3 - (1/24) n_2^3 m_3^2 m_1 \\
& + (1/12) n_2 m_3^2 m_1 n_3^2 - (1/24) m_1 m_3^2 n_2 n_1^2 - (1/6) m_1^2 m_3 n_2 n_3^2 - \\
& (1/12) m_1 m_2 n_3 n_1^2 m_3 - (7/24) n_3^3 m_2^2 m_1 + (1/24) m_1^3 n_2 n_3^2 + (1/24) m_1^2 m_2 n_3^3 \\
& + (1/12) m_1^3 n_3^3 + (1/12) n_1^2 n_3 m_1 m_3^2 + (1/8) n_1^2 n_3 m_1 m_2^2 - \\
& (1/12) n_2 n_3 n_1 m_1 m_3^2 + (1/12) n_2^2 n_3 m_3^2 m_2 - (1/6) n_2 m_3^2 m_2 n_3^2 - \\
& (1/24) n_1^2 n_3 m_3^2 m_2 + (1/12) n_3^3 m_2^3 + (1/12) m_1^2 n_3 m_2 n_1^2 - (1/6) m_1^2 n_3^2 n_1 m_2 + \\
& (1/12) n_3^2 m_2^3 n_1 - (1/24) n_3 m_2^3 n_1^2 + (1/12) n_1^2 n_2 m_3^2 m_2 - (1/12) n_2 n_3 n_1 m_3^2 m_2 \\
& - (1/6) m_1^2 n_2 m_2 n_1^2 + (1/3) m_1^2 n_2 n_1 n_3 m_2 - (1/3) m_1 m_2^2 n_3^2 n_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(3,9) = & + (1/12) n_1^4 n_2^2 - (1/12) n_1^3 n_2^3 + (1/6) m_1 m_3^3 n_2 n_1 - \\
& (1/24) n_1^4 n_3 n_2 + (1/24) n_3 m_2^2 n_1 m_3^2 + (1/24) m_1^2 n_2 n_1 m_3^2 - (1/24) n_2^4 n_3 n_1 + \\
& (1/12) n_2^2 n_3^4 - (1/12) n_2^3 n_3^3 - (1/24) n_2 n_3^4 n_1 - (1/12) n_1^3 n_3^3 - \\
& (1/24) n_2 m_3^4 n_1 - (1/12) m_1 m_2 n_3 n_1 m_3^2 + (1/8) n_1^3 n_3^2 n_2 - (1/12) m_1^2 n_2 n_1 m_2^2 \\
& + (1/8) n_1^2 n_3^3 n_2 - (1/4) n_1^2 n_2^2 n_3^2 - (1/12) m_1^2 n_3 n_1 m_3^2 - \\
& (1/12) m_1^2 n_3 m_2 m_3 n_1 + (1/24) m_1^2 n_3 n_2 m_3^2 + (1/6) m_1^3 n_3 m_3 n_2 - (1/24) m_1^4 n_3 n_2 \\
& + (1/24) m_1^2 n_3 n_1 m_2^2 + (1/8) n_1^2 n_2^3 n_3 + (1/8) n_2^3 n_3^2 n_1 - (1/24) n_2^2 n_3^3 n_1 - \\
& (1/24) n_1^3 n_2^2 n_3 - (1/6) n_2^2 m_3^3 m_1 - (1/6) m_1^3 n_2^2 m_3 - (1/4) m_1^2 n_2^2 m_3^2 - \\
& (1/24) n_3 m_2^4 n_1 + (1/12) n_2^2 m_3^4 + (1/12) m_1^4 n_2^2 + (1/6) m_1 m_2^3 n_3 n_1 - \\
& (1/6) m_1^3 m_2 n_3 n_2 - (1/6) n_2 m_3^3 m_2 n_1 + (1/24) n_2 m_3^2 n_1 m_2^2 + (1/6) n_3 m_2^3 m_3 n_1 - \\
& (1/12) n_3 m_2^2 n_2 m_3^2 + (1/24) n_3 m_2^2 m_1^2 n_2 - (2/3) m_1 m_2^2 n_3 m_3 n_1 + \\
& (1/4) m_1 m_2 n_3 n_2 m_3^2 + (1/3) m_1^2 m_2 n_3 m_3 n_2 + (1/3) m_1 m_3^2 n_2 m_2 n_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/12)m_1m_3n_2n_1m_2^2 - (1/12)n_3m_2^2m_1m_3n_2 + (1/4)m_1^2n_2m_2m_3n_1 + \mu[- \\
& (2/3)n_1^2n_3^2m_2^2 + (1/6)n_2^2n_3^2m_1^2 + (1/3)m_1^2n_2^2n_1^2 - (1/6)n_1^2n_2^2m_3m_2 + \\
& (1/3)m_3n_2n_3^2n_1m_2 - (2/3)m_3n_2^2n_3m_1n_1 + (1/6)n_1^2n_2^2m_3m_1 + \\
& (1/6)m_3n_2^2n_3^2m_1 + (1/3)n_1^2n_3m_2^2n_2 - (1/3)m_1n_2^2n_1^2m_2 + (1/3)m_1n_2n_1^2n_3m_2 \\
& - (2/3)m_1^2n_2^2n_1n_3 - (1/6)m_2^2n_3n_2^2n_1 + (1/3)m_2^2n_3^2n_2n_1 - \\
& (1/6)m_2n_3^2n_2^2m_1 + (1/6)n_1^2n_2^2m_3^2 + (1/3)m_3n_2^2n_3m_2n_1 + (1/3)m_3^2n_2^2n_3^2 - \\
& (2/3)n_1n_2^2m_3^2n_3 - (1/6)m_1^2n_1^2n_3n_2 + (1/3)m_1n_1^2n_3n_2m_3 + (1/3)m_1^2n_1n_3^2n_2 \\
& - (1/6)m_1n_1^2n_3^2m_2 + (1/3)m_1n_1n_3^2m_3n_2 + (1/3)m_2n_3n_2^2m_1n_1 - \\
& (1/3)m_2n_3^2n_2^2m_3 + (1/3)n_1^2n_2m_3^2n_3 - (1/6)n_1^2n_3^2m_2m_3 - (1/3)m_1n_1^2n_3^2m_3 \\
& - (1/6)m_3^2n_2n_3^2n_1] + \nu[- (1/12)n_3^3m_2^2n_2 + (1/3)n_1n_2^2n_3m_1m_3 + \\
& (1/6)m_1m_2n_3n_1n_2^2 + (1/4)m_1m_2n_3^3n_2 - (1/6)m_1m_2n_3n_1^2n_2 - (1/12)m_1^2n_2^3n_1 \\
& + (1/24)m_1^2n_3^3n_2 - (1/12)m_1m_3n_2^3n_1 + (1/24)n_2^3m_3^2n_1 - \\
& (1/3)m_1m_2n_3^2n_1n_2 + (1/6)m_1m_3n_2n_1n_3^2 - (1/12)m_1^2n_3^3n_1 + (1/8)m_1^2n_3^2n_1n_2 \\
& + (1/8)n_1^2n_2n_3m_3^2 - (1/12)n_2n_3^2n_1m_3^2 + (1/24)n_1^3n_2m_3^2 - \\
& (1/12)m_1m_2n_3^3n_1 - (1/12)m_1^2n_3n_1^2n_2 - (1/6)n_2n_3^2m_2m_3n_1 - \\
& (1/3)n_1^2n_2n_3m_2m_3 + (1/6)n_2^2n_3m_2m_3n_1 - (1/12)n_1^3n_3m_3^2 - (1/12)n_1^3n_3m_2m_3 \\
& + (1/6)n_1^2n_3m_1m_3n_2 + (1/24)n_1^3n_3m_2^2 - (1/12)n_1^3n_2m_2^2 + (1/6)n_1^2n_2^2m_1^2 \\
& - (1/6)n_2^2n_3^2m_1m_3 + (1/8)n_2n_3^2n_1m_2^2 + (1/4)n_1^3n_2m_2m_3 - (1/6)n_1^2n_2^2m_1m_3 \\
& - (1/12)n_2^3n_3m_3^2 + (1/24)n_2^3n_3m_1^2 + (1/6)n_2^2n_3^2m_3^2 - (1/12)n_2^2n_3^2m_1^2 - \\
& (1/12)n_1^2n_2^2m_3^2 - (1/12)n_2^3n_3m_1m_3 - (1/12)n_2^2n_3n_1m_2^2 - \\
& (1/24)n_1n_2^2n_3m_3^2 + (1/8)n_1^2n_2n_3m_2^2 - (1/24)n_1n_2^2n_3m_1^2 + \\
& (1/24)n_3^3m_2^2n_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(4,4) = & + (1/3)n_3^4 + n_2^4 + (2/3)n_2^2n_3^2 + m_2^4 + (1/3)m_3^4 + \\
& (1/3)m_1^4 - (2/3)m_3^3m_2 - (2/3)m_2^3m_1 - (2/3)m_2^3m_3 - (2/3)m_1^3m_2 + \\
& (2/3)m_2^2m_3^2 + (2/3)m_1^2m_2^2 - (2/3)n_1^3n_2 + (2/3)n_1^2n_3^2 + (1/3)n_1^4 - \\
& (2/3)n_2^3n_3 - (2/3)n_2n_3^3 - (2/3)n_2^3n_1 + (2/3)n_2^2n_1^2 + (2/3)m_1^2m_3^2 - \\
& (2/3)n_2n_3n_1^2 + (4/3)n_2^2n_3n_1 - (2/3)n_1n_2n_3^2 - (2/3)m_3^2m_1m_2 - \\
& (2/3)m_1^2m_2m_3 + (4/3)m_1m_2^2m_3 + \mu[- (4/3)m_2n_2^2m_1 - (4/3)m_2^2n_2n_1 - \\
& (4/3)m_2^2n_2n_3 - (4/3)m_2n_2^2m_3 + (4/3)m_2n_3m_1n_2 + (4/3)m_1^2n_2^2 + \\
& (4/3)m_2^2n_1^2 + (4/3)m_3n_2m_2n_1 - (4/3)m_1n_1^2m_2 - (4/3)m_1^2n_1n_2 - \\
& (4/3)m_1n_1m_2n_3 - (4/3)m_1n_1m_3n_2 - (4/3)m_3n_3^2m_2 - (4/3)m_3^2n_3n_2 - \\
& (4/3)m_3n_3m_1n_2 - (4/3)m_3n_3m_2n_1 + (4/3)m_3^2n_3^2 + (8/3)m_1n_1m_3n_3 + \\
& (4/3)m_1^2n_1^2 + 4m_2^2n_2^2 + (4/3)m_3^2n_2^2 + (4/3)m_2^2n_3n_1 + (4/3)m_3n_2^2m_1 + \\
& (4/3)m_2^2n_3^2] + \nu[+ (8/3)m_2m_3n_2n_3 - (2/3)m_2^2n_2n_3 - (2/3)m_2m_3n_1^2 - \\
& (2/3)m_2m_3n_2^2 + (2/3)m_3^2n_3^2 - (2/3)m_1^2n_1n_2 - (2/3)m_3^2n_1n_2 + \\
& (8/3)m_1m_2n_1n_2 - (2/3)m_3^2n_2n_3 - (2/3)m_1m_2n_1^2 - (2/3)m_1m_2n_3^2 + \\
& (4/3)m_1m_2n_2n_3 - (2/3)m_1^2n_2n_3 - (2/3)m_1^2n_2^2 + (4/3)m_2m_3n_1n_2 - \\
& (2/3)m_2m_3n_3^2 - (2/3)m_2^2n_1n_2 - (2/3)m_1m_2n_2^2 - (2/3)m_2^2n_3^2 - \\
& (2/3)m_2^2n_1^2 + 2m_2^2n_2^2 - (2/3)m_3^2n_2^2 + (2/3)m_3^2n_1^2 + (2/3)m_1^2n_3^2 + \\
& (2/3)m_1^2n_1^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(4,5) = & - (1/3)n_1n_2^2n_3m_1 + (1/3)n_2^2n_3n_1m_3 + (1/12)m_1^2m_2^2m_3 - \\
& (5/12)n_2^2n_3^2m_1 - (1/3)n_2^3n_3m_1 - (1/12)m_2^2m_3^2m_1 + (5/12)n_1^2n_2^2m_3 + \\
& (1/3)n_1n_2^3m_3 - (1/4)m_2^4m_1 + (1/12)m_1^3m_2^2 - (1/12)m_3^3m_2^2 - \\
& (1/2)n_3^2n_1n_2m_3 + (1/2)n_1^2n_2n_3m_1 + (1/12)n_1^2m_1n_2^2 - (1/12)n_3^2m_3n_2^2 + \\
& (1/4)m_2^4m_3 + (1/6)m_2m_3^3m_1 - (1/4)n_2^4m_1 + (1/4)n_2^4m_3 - (1/6)n_2n_3n_1^2m_3 \\
& + (1/6)n_1n_2m_1n_3^2 - (2/3)n_1^3n_2m_3 + (2/3)n_2n_3^3m_1 - (1/6)m_1^3m_2m_3 + \\
& (1/6)m_1^4m_3 + (1/6)m_3^3m_1^2 - (1/6)m_3^4m_1 - (1/6)m_1^3m_3^2 + (1/6)n_3^2n_1^2m_3 + \\
& (1/6)n_1^4m_3 - (1/6)n_3^4m_1 - (1/6)n_1^2m_1n_3^2 + \mu[+ (4/3)m_3n_3^2m_1m_2 + \\
& m_1^2n_1m_2n_3 - (1/3)m_1^2n_1m_3n_2 - (4/3)m_1n_1^2m_2m_3 + (1/3)m_1^2n_1m_2n_2 + \\
& (1/3)m_2^2n_3m_3n_1 + (1/3)m_3^2n_2m_2n_1 + (1/3)m_3^2n_3m_1n_2 - (2/3)m_2^2n_2m_1n_3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2/3)m_2^2n_2m_3n_1 - (1/3)m_2^2n_1m_1n_3 - (1/3)m_1^2n_2m_2n_3 - m_3^2n_3m_2n_1 + \\
& (2/3)m_2^2n_1^2m_3 - m_2^2n_2^2m_1 - (2/3)m_2^2n_3^2m_1 - (1/3)m_3^2n_2^2m_1 + \\
& (1/3)m_1^2n_2^2m_3 - (1/3)m_3^2n_2m_1n_1 + (2/3)m_3^2n_3m_1n_1 - (2/3)m_1^2n_1m_3n_3 + \\
& (1/3)m_1^2n_2m_3n_3 - (2/3)m_3^2n_3^2m_1 + (2/3)m_1^2n_1^2m_3 + m_2^2n_2^2m_3 - \\
& (1/3)m_3^2n_3m_2n_2] + \nu [(1/3)m_2m_3^2n_1n_2 - n_2n_3m_1m_2m_3 - (1/3)n_2n_3m_1m_2^2 - \\
& (1/3)m_1^2m_2n_2n_3 + (1/3)n_1n_2m_2^2m_3 + n_1n_2m_1m_2m_3 - (1/4)n_1^2m_2^2m_3 + \\
& (1/12)n_1^2m_1m_2^2 - (1/12)n_3^2m_2^2m_3 + (1/4)n_3^2m_1m_2^2 + (1/4)m_3^2m_1n_2^2 - \\
& (1/2)m_3^3n_1n_2 + (1/2)m_1^3n_2n_3 - (1/4)m_1^2m_3n_2^2 - (1/12)m_3^3n_2^2 + \\
& (2/3)n_2n_3m_1m_3^2 - (2/3)n_1n_2m_1^2m_3 + (1/6)n_1n_2m_1m_3^2 - (1/6)n_2n_3m_1^2m_3 + \\
& (1/2)m_2^2m_3n_2^2 - (1/2)m_2^2m_1n_2^2 + (1/6)m_2m_3m_1n_3^2 - (1/6)m_1m_2n_1^2m_3 + \\
& (1/6)m_1^2m_2n_3^2 - (1/6)m_2m_3^2n_1^2 - (1/6)n_1^2m_1m_3^2 + (1/6)n_3^2m_1^2m_3 - \\
& (1/3)m_3^2m_1n_3^2 + (1/3)m_1^2n_1^2m_3 - (1/6)m_1^3n_3^2 + (1/6)m_3^3n_1^2 + \\
& (1/12)m_1^3n_2^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(4,6) = & + (1/12)n_2^2n_3^3 - (1/4)n_2^4n_3 + (1/3)m_2^3m_3n_1 - \\
& (5/12)m_1^2m_2^2n_3 - (1/12)n_1^3n_2^2 - (1/12)m_1^2n_1m_2^2 - (2/3)m_3^3m_2n_1 + \\
& (1/6)m_3^4n_1 + (1/6)n_1^3n_3^2 + (1/6)n_3^4n_1 - (1/6)m_1m_2n_1m_3^2 - \\
& (1/2)m_1^2m_2m_3n_1 + (1/6)m_1^2n_1m_3^2 - (1/12)n_1^2n_3n_2^2 + (1/12)n_2^2n_3^2n_1 + \\
& (2/3)m_1^3m_2n_3 + (1/12)n_3m_2^2m_3^2 - (1/3)m_1m_2^3n_3 + (1/6)n_2n_3n_1^3 + \\
& (5/12)m_2^2m_3^2n_1 - (1/6)n_2n_3^3n_1 - (1/3)m_1m_2^2n_3m_3 - (1/4)n_3m_2^4 - \\
& (1/6)m_1^2n_3m_3^2 + (1/6)m_1^2n_3m_2m_3 - (1/6)m_1^4n_3 + (1/2)m_1m_2n_3m_3^2 - \\
& (1/6)n_1^2n_3^3 - (1/6)n_1^4n_3 + (1/3)m_1m_2^2m_3n_1 + (1/4)n_2^4n_1 + (1/4)m_2^4n_1 \\
& + \mu [(1/3)m_2n_1^2n_2m_3 - (1/3)m_1n_1^2m_2n_2 - m_1n_1^2n_2m_3 + m_2^2n_2^2n_1 + \\
& (1/3)n_1n_3^2m_2^2 + (2/3)m_1n_1^2m_3n_3 + (2/3)m_3^2n_3^2n_1 + (2/3)n_1n_2^2m_3m_2 + \\
& (1/3)m_1n_2^2n_1m_3 + (1/3)m_1n_1n_3^2m_2 - (1/3)n_2n_3^2m_1m_2 - (1/3)n_2^2n_3m_1m_3 - \\
& (2/3)n_2^2n_3m_1m_2 + (2/3)m_3^2n_2^2n_1 + (4/3)n_2n_3m_1^2n_1 + n_2n_3^2m_1m_3 + \\
& (1/3)n_1^2n_3m_2m_1 - (1/3)n_1n_3^2m_2m_3 - (4/3)n_1n_2m_3^2n_3 - m_2^2n_3n_2^2 + \\
& (1/3)m_2n_3^2n_2m_3 - (1/3)n_1^2n_3m_2m_3 - (2/3)m_1^2n_1^2n_3 - (2/3)m_1n_1n_3^2m_3 - \\
& (2/3)m_1^2n_2^2n_3 - (1/3)m_2^2n_1^2n_3] + \nu [(1/12)n_3^3m_2^2 + (1/2)m_1m_2n_3^3 - \\
& (2/3)m_2m_3n_1n_3^2 - n_1n_2m_1m_2n_3 - (1/12)n_1^3m_2^2 + (1/6)m_1^2n_1n_3^2 + \\
& (1/3)m_3^2n_1n_3^2 - (1/4)m_3^2n_1n_2^2 - (1/12)m_1^2n_1n_2^2 + (1/4)n_1^2n_3m_2^2 - \\
& (1/2)n_1^3m_2m_3 - (1/6)n_1^2n_2m_3^2 + (1/6)n_1^3m_3^2 - (1/4)n_3^2m_2^2n_1 - \\
& (1/6)m_1m_2n_3^2n_1 + n_2n_3n_1m_2m_3 - (1/2)n_2^2n_3m_2^2 + (1/3)n_1^2n_2m_2m_3 + \\
& (1/6)n_1^2n_3m_2m_3 + (2/3)n_1^2n_3m_1m_2 + (1/12)n_2^2n_3m_3^2 - (1/3)n_2^2n_3m_1m_2 + \\
& (1/4)n_2^2n_3m_1^2 - (1/6)n_2n_3n_1m_3^2 + (1/6)n_2n_3n_1m_1^2 - (1/3)n_2n_3^2m_1m_2 + \\
& (1/6)n_2n_3^2m_1^2 - (1/6)m_1^2n_3^3 - (1/3)m_1^2n_3n_1^2 - (1/6)n_1^2n_3m_3^2 + \\
& (1/2)m_2^2n_1n_2^2 + (1/3)m_2m_3n_1n_2^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(4,7) = & - (1/2)n_3^4 - (1/2)n_2^4 - (1/3)n_2^2n_3^2 - (1/2)m_2^4 - \\
& (1/2)m_3^4 + (1/6)m_1^4 + (2/3)m_3^3m_2 + (2/3)m_2^3m_3 - (1/3)m_2^2m_3^2 - \\
& (1/3)m_1^2m_2^2 - (1/3)n_1^2n_3^2 + (1/6)n_1^4 + (2/3)n_2^3n_3 + (2/3)n_2n_3^3 - \\
& (1/3)n_2^2n_1^2 - (1/3)m_1^2m_3^2 + (4/3)n_2n_3n_1^2 - (2/3)n_2^2n_3n_1 - \\
& (2/3)n_1n_2n_3^2 - (2/3)m_3^2m_1m_2 + (4/3)m_1^2m_2m_3 - (2/3)m_1m_2^2m_3 + \mu [+ \\
& (4/3)m_2^2n_2n_3 + (4/3)m_2n_2^2m_3 - (2/3)m_2n_3m_1n_2 + (4/3)m_2n_3m_3n_2 - \\
& (2/3)m_3n_2m_2n_1 - (4/3)m_1n_2m_2n_1 + 2m_1n_1m_2n_3 + 2m_1n_1m_3n_2 + (4/3)m_3n_3^2m_2 \\
& + (4/3)m_3^2n_3n_2 - (2/3)m_3n_3m_1n_2 - (2/3)m_3n_3m_2n_1 - 2m_3^2n_3^2 - \\
& (4/3)m_1n_1m_3n_3 + (2/3)m_1^2n_1^2 - 2m_2^2n_2^2 - (4/3)m_3^2n_2^2 + (2/3)m_1^2n_2n_3 + \\
& (2/3)m_2n_1^2m_3 - (2/3)m_2^2n_3n_1 - (2/3)m_3n_2^2m_1 - (4/3)m_2^2n_3^2 - \\
& (2/3)m_2n_3^2m_1 - (2/3)m_3^2n_2n_1] + \nu [- (8/3)m_2m_3n_2n_3 + (2/3)m_2^2n_2n_3 + \\
& (2/3)m_2m_3n_1^2 + (2/3)m_2m_3n_2^2 - m_3^2n_3^2 + (2/3)m_3^2n_2n_3 - (2/3)m_1m_2n_2n_3 + \\
& (2/3)m_1^2n_2n_3 - (1/3)m_1^2n_2^2 - (2/3)m_2m_3n_1n_2 + (2/3)m_2m_3n_3^2 + \\
& (2/3)n_1n_2m_1m_3 - (2/3)n_2n_3m_1m_3 + m_2^2n_3^2 - (1/3)m_2^2n_1^2 - m_2^2n_2^2 + m_3^2n_2^2]
\end{aligned}$$

$$- (2/3)m_2m_3n_1n_3 + (2/3)m_1m_2n_1n_3 - (1/3)m_3^2n_1^2 - (1/3)m_1^2n_3^2 + (1/3)m_1^2n_1^2]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(4,8) = & - (1/3)n_1n_2^2n_3m_1 - (1/4)m_2^3m_3^2 - (5/6)m_1^2m_2^2m_3 + \\ & (1/4)m_1^2m_2^3 + (1/3)m_1m_2^3m_3 - (5/12)n_2^2n_3^2m_1 + n_2^3n_3m_1 + (1/12)m_2^2m_3^2m_1 \\ & - (1/4)m_2^4m_1 + (1/12)m_1^3m_2^2 - (1/6)n_1^2n_2n_3m_1 + (1/12)n_1^2m_1n_2^2 + \\ & (1/6)m_1^2m_2m_3^2 + (1/3)m_2m_3^3m_1 - (1/4)n_2^4m_1 + (1/6)n_1n_2m_1n_3^2 + \\ & (1/6)m_1^3m_2m_3 - (1/2)n_2n_3m_2n_1^2 + (1/2)n_2n_3^2n_1m_2 - (2/3)n_2^2n_1n_3m_2 - \\ & (1/6)m_3^4m_1 - (1/6)m_1^3m_3^2 - (1/6)n_3^4m_1 - (1/6)n_1^2m_1n_3^2 + (1/4)n_2^2m_2n_1^2 \\ & - (1/4)n_2^2m_2n_3^2 + (1/3)n_3^3n_1m_2 - (1/12)n_1^4m_2 + (1/12)n_3^4m_2 - \\ & (1/12)m_1^4m_2 + (1/12)m_3^4m_2 + (1/3)n_1^3n_3m_2 + \mu [+ (2/3)m_3n_3^2m_1m_2 + \\ & (1/3)m_1^2n_1m_2n_3 - (1/3)m_1^2n_1m_3n_2 + (2/3)m_1n_1^2m_2m_3 + (1/3)m_1^2n_1m_2n_2 + \\ & (2/3)m_2^2n_3m_3n_1 + (1/3)m_3^2n_2m_2n_1 + (1/3)m_2n_3m_1m_3n_2 + m_2^2n_1m_1n_2 + \\ & (2/3)m_2^2n_2m_1n_3 + 2m_2n_2^2m_1m_3 - (4/3)m_2^2n_2m_3n_1 - m_1n_2m_2m_3n_1 - m_2^2n_1m_1n_3 - \\ & (2/3)m_1^2n_2m_2n_3 + (2/3)m_3^2n_3m_2n_1 - (1/3)m_2^2n_1^2m_3 - m_2^2n_2^2m_1 - \\ & (1/3)m_2^2n_3^2m_1 - (2/3)m_3^2n_2^2m_1 - (1/3)m_1^2n_2^2m_3 + (1/3)m_2n_1m_1m_3n_3 - \\ & (2/3)m_1^2n_1m_3n_3 + (1/3)m_1^2n_2m_3n_3 - (2/3)m_3^2n_3^2m_1 - m_2^2n_3m_3n_2 - \\ & (1/3)m_1^2n_1^2m_2 + (1/3)m_3^2n_3^2m_2] + \nu [+ (1/4)m_2^3n_1^2 + (1/4)m_1^2m_2n_2^2 - \\ & (1/4)m_2m_3^2n_2^2 + (1/6)m_2m_3^2n_1n_2 + (1/3)m_1m_2m_3n_2^2 - n_2n_3m_1m_2m_3 + \\ & n_2n_3m_1m_2^2 - (1/2)m_1^2m_2n_2n_3 - (2/3)n_1n_2m_1m_2m_3 - (1/6)n_1^2m_2^2m_3 + \\ & (1/12)n_1^2m_1m_2^2 + (5/12)n_3^2m_1m_2^2 + (1/4)m_3^2m_1n_2^2 - (1/6)m_1^3n_2n_3 + \\ & (1/6)n_1n_2m_1m_3^2 - (1/2)m_2^2m_1n_2^2 + (1/3)m_2m_3m_1n_3^2 + (1/6)m_1m_2n_1^2m_3 + \\ & (1/6)m_1^2m_2n_3^2 - (2/3)m_2^3n_1n_3 - (1/6)m_1^2m_2n_1^2 + (1/6)m_3^2m_2n_3^2 - \\ & (1/6)n_1^2m_1m_3^2 - (1/3)m_3^2m_1n_3^2 - (1/6)m_1^3n_3^2 - (1/3)m_1m_2^2n_1n_3 + \\ & (1/3)m_1^2n_1n_3m_2 + (1/3)m_2^2m_3n_1n_3 + (1/3)m_3^2n_1n_3m_2 - (1/4)m_2^3n_3^2 + \\ & (1/12)m_1^3n_2^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(4,9) = & + (1/4)n_2^3n_3^2 - (1/12)n_2n_3^4 + (1/4)n_2m_3^2m_2^2 - m_2^3m_3n_1 - \\ & (1/4)m_1^2n_2m_2^2 - (1/12)n_1^3n_2^2 - (1/12)m_1^2n_1m_2^2 + (1/6)m_3^4n_1 + \\ & (1/6)n_1^3n_3^2 + (1/6)n_3^4n_1 - (1/6)m_1m_2n_1m_3^2 + (1/6)m_1^2m_2m_3n_1 + \\ & (1/12)n_1^4n_2 - (1/4)n_1^2n_2^3 + (1/6)m_1^2n_1m_3^2 + (5/6)n_1^2n_3n_2^2 - \\ & (1/6)n_1^2n_3^2n_2 - (1/3)n_2^3n_3n_1 - (1/12)n_2^2n_3^2n_1 - (1/3)m_1m_3^3n_2 - \\ & (1/6)n_2n_3n_1^3 + (5/12)m_2^2m_3^2n_1 - (1/3)n_2n_3^3n_1 + (1/12)m_1^4n_2 - \\ & (1/2)m_1m_3^2n_2m_2 + (2/3)m_1m_3n_2m_2^2 + (1/2)m_1^2n_2m_2m_3 - (1/12)n_2m_3^4 - \\ & (1/3)m_1^3m_3n_2 + (1/3)m_1m_2^2m_3n_1 + (1/4)n_2^4n_1 + (1/4)m_2^4n_1 + \mu [+ \\ & (2/3)n_1n_3^2m_2^2 + (2/3)m_2n_1^2n_2m_3 - (1/3)m_1n_1^2m_2n_2 - (1/3)m_1n_1^2n_2m_3 + \\ & m_2^2n_2^2n_1 + (2/3)m_1n_1^2m_3n_3 + (2/3)m_3^2n_3^2n_1 - (2/3)n_1n_2^2m_3m_2 - \\ & (1/3)m_1n_1n_3m_3n_2 + m_1n_2^2n_1m_3 - m_1n_2^2n_1m_2 - 2n_1n_3m_2^2n_2 - (1/3)n_1n_3m_2m_3n_2 \\ & - (1/3)n_2n_3^2m_1m_2 - (2/3)n_2^2n_3m_1m_3 + (4/3)n_2^2n_3m_1m_2 + (1/3)m_3^2n_2^2n_1 + \\ & m_1n_1n_3m_2n_2 - (2/3)n_2n_3m_1^2n_1 - (2/3)n_2n_3^2m_1m_3 + (1/3)n_1^2n_3m_2m_1 - \\ & (2/3)n_1n_2m_3^2n_3 - (1/3)m_3^2n_2n_3^2 + (1/3)m_1^2n_2n_1^2 + m_2n_3n_2^2m_3 - \\ & (1/3)n_1^2n_3m_2m_3 + (1/3)m_1^2n_2^2n_3 + (1/3)m_2^2n_1^2n_3] + \nu [+ (2/3)n_1n_2m_1m_2n_3 \\ & - (1/12)n_1^3m_2^2 + (1/6)m_1^2n_1n_3^2 + (1/3)m_3^2n_1n_3^2 - (5/12)m_3^2n_1n_2^2 - \\ & (1/12)m_1^2n_1n_2^2 + (1/6)n_1^3m_2m_3 + (1/4)n_2^3m_3^2 - (1/6)n_1^2n_2m_3^2 + \\ & (1/6)n_1^3m_3^2 - (1/4)m_1^2n_2^3 - (1/4)n_3^2m_2^2n_1 - (1/6)m_1m_2n_3^2n_1 + \\ & n_2n_3n_1m_2m_3 - (1/3)n_2n_3n_1m_2^2 + (1/4)n_2n_3^2m_2^2 - (1/4)n_1^2n_2m_2^2 + \\ & (1/2)n_1^2n_2m_2m_3 + (1/6)n_2^2n_3m_1^2 - (1/3)n_2n_3n_1m_3^2 - (1/6)n_2n_3n_1m_1^2 - \\ & (1/6)n_2n_3^2m_1m_2 - (1/6)n_2n_3^2m_3^2 + (1/6)n_1^2n_2m_1^2 - (1/3)m_1m_3n_2^2n_3 + \\ & (2/3)m_1m_3n_2^3 - (1/3)n_1^2m_1m_3n_2 + (1/3)n_1n_2^2m_1m_3 - (1/3)m_1m_3n_2n_3^2 + \\ & (1/2)m_2^2n_1n_2^2 - m_2m_3n_1n_2^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(5,5) = & - (1/6)m_1m_2^3m_3^2 - (1/12)m_1n_2^4m_3 + (1/6)n_1n_2^3m_3^2 + \\
& (3/4)n_1^2n_2^2m_3^2 + (1/6)n_2^3n_3m_1^2 - (1/12)m_1m_2^4m_3 - (1/6)m_1^2m_2^3m_3 + \\
& (1/6)m_1^2m_2^2m_3^2 - (1/6)n_1^2m_3m_1n_3^2 + (1/12)n_1^4m_3^2 + (1/12)m_1^2n_3^4 - \\
& (1/2)m_1^2n_3^3n_2 - (1/2)n_1^3m_3^2n_2 + (1/12)m_1m_3^3m_2^2 + (1/12)m_1^3m_3m_2^2 - \\
& (4/3)n_2^2n_3m_1n_1m_3 + (1/12)m_1^2n_2^4 + (1/12)m_1^2m_2^4 + (3/4)n_2^2n_3^2m_1^2 - \\
& (1/3)n_2^3n_3m_1m_3 - (1/3)n_1n_2^3m_3m_1 + (1/12)m_3^2n_2^4 + (1/12)m_2^4m_3^2 + \\
& (1/12)m_1^4m_3^2 - (1/6)m_1^3m_3^3 + (1/12)m_1^2m_3^4 + (1/2)n_1^2m_3n_2n_3m_1 + \\
& (1/2)m_1n_3^2n_1n_2m_3 + (1/12)m_1n_3^2m_3n_2^2 + (1/12)n_1^2m_3m_1n_2^2 + \mu[- \\
& (2/3)m_1^2n_1m_3^2n_3 + (1/3)m_1^2m_3^2n_3^2 + (1/3)m_1^2n_1^2m_3^2 + (1/3)m_2^2m_3^2n_1n_2 - \\
& (1/3)m_1m_3^2n_2^2m_2 - (1/3)m_1^2m_3n_2^2m_2 + (1/3)m_1^2m_2^2n_3n_2 + (5/6)m_2^2m_3^2n_1^2 - \\
& (2/3)m_2^2m_3n_1m_1n_2 - (2/3)m_1m_2^2n_3m_3n_2 + (1/3)m_1^2m_3^2n_2^2 - (1/3)m_1m_2^2n_2^2m_3 \\
& + (5/6)m_1^2m_2^2n_3^2 - (4/3)m_1m_2^2n_3m_3n_1 + (1/3)m_1^2m_2^2n_2^2 + m_1m_3^2n_3m_2n_1 + \\
& (1/3)m_1m_3^2n_3m_2n_2 + (1/3)m_1^2n_1m_3m_2n_2 - m_1n_1^2m_3^2m_2 - m_1^2m_3n_3^2m_2 + \\
& m_1^2n_1m_3m_2n_3 + (1/3)m_2^2m_3^2n_2^2] + \nu[+ (1/3)n_2n_3m_1^2m_2m_3 - (1/3)n_2n_3m_1m_2^2m_3 \\
& - (1/6)m_1^2n_2^2m_2m_3 - (1/6)m_1n_2^2m_2^2m_3 + (1/6)n_1n_2m_3^2m_2^2 + \\
& (1/6)n_2n_3m_1^2m_2^2 + (1/6)m_1^2n_2^2m_2^2 - (1/3)n_1n_2m_3m_1m_2^2 - (1/6)m_1m_2m_3^2n_2^2 \\
& + (1/3)n_1n_2m_3^2m_1m_2 + (1/6)m_3^2n_2^2m_2^2 - (1/12)m_1^2n_3^2m_2^2 - \\
& (1/12)n_1^2m_3^2m_2^2 + (1/12)m_1^3n_2^2m_3 - (1/2)n_2n_3m_1^2m_3^2 + (1/2)n_2n_3m_1^3m_3 + \\
& (1/2)n_1n_2m_3^3m_1 - (1/2)n_1n_2m_3^2m_1^2 + (1/12)m_1n_3^2m_2^2m_3 + (1/12)n_1^2m_3m_1m_2^2 \\
& + (1/12)m_3^3n_2^2m_1 - (1/6)m_1^2n_2^2m_3^2 - (1/6)m_1^3n_3^2m_3 - (1/6)n_1^2m_3^3m_1 + \\
& (1/6)n_1^2m_3^2m_1^2 + (1/6)m_1^2n_3^2m_3^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(5,6) = & + (1/4)m_1m_2m_3^3n_1 - (1/24)m_1n_2^2n_1^2n_3 - (1/4)n_1^2n_2m_3n_3^2 - \\
& (1/4)n_2n_3^2m_1n_1^2 - (1/12)m_1^4m_3n_3 + (1/12)m_1^2m_3^3n_1 + (1/12)m_1^3m_3^2n_3 - \\
& (1/12)m_1m_3^4n_1 - (1/24)m_1^2m_3n_1m_2^2 - (1/4)m_1^2m_3^2m_2n_1 - (1/4)m_1^2m_3^2m_2n_3 - \\
& (1/24)m_1m_3^2n_3m_2^2 - (1/24)m_3n_2^2n_1n_3^2 - (1/24)m_1^3m_2^2n_3 - (1/12)m_1m_2^4n_1 \\
& - (1/24)m_1n_3^3n_2^2 + (1/6)n_1^2n_2^3m_3 + (1/6)n_2^3n_3^2m_1 - (1/24)n_1^3m_3n_2^2 - \\
& (1/12)m_1n_2^4n_1 + (1/24)m_1n_2^4n_3 + (1/6)m_1^2m_2^3n_3 - (1/24)m_2^2m_3^3n_1 - \\
& (1/12)m_1m_2^2m_3^2n_1 - (1/12)m_1^2m_2^2m_3n_3 + (1/6)m_2^3m_3^2n_1 + (1/24)m_2^4m_3n_1 + \\
& (1/4)m_1^3m_2m_3n_3 + (1/4)m_1n_3^3n_1n_2 - (1/12)m_3n_2^4n_3 - (1/12)m_2^4m_3n_3 + \\
& (1/24)m_1m_2^4n_3 + (1/24)m_3n_2^4n_1 - (1/12)n_1^2m_3n_2^2n_3 - (1/12)m_1n_3^4n_1 + \\
& (1/12)m_1n_3^3n_1^2 + (1/12)n_1^3m_3n_3^2 - (1/12)n_1^4m_3n_3 + (1/4)n_1^3m_3n_2n_3 - \\
& (1/12)n_2^2n_3^2m_1n_1 + \mu[+ (1/2)m_1n_1^2m_3n_3m_2 - (1/2)m_1n_1^2m_3^2n_2 - \\
& (1/6)m_1n_1^2m_3m_2n_2 + (1/2)m_1^2n_1m_3n_2n_3 + (1/2)m_1m_3n_3^2n_1m_2 - \\
& (1/2)m_1^2m_3n_3^2n_2 - (1/6)m_1m_3n_3^2m_2n_2 + (2/3)m_2m_3^2n_1^2n_2 + (1/6)m_2^2m_3n_2^2n_1 \\
& - (4/3)m_1m_3n_2n_1n_3m_2 - (1/6)m_1m_3^2n_2^2n_1 + (1/3)m_2^2m_3n_1^2n_2 + \\
& (1/3)m_2m_3^2n_2^2n_1 - (1/6)m_2^2m_3n_1^2n_3 + (1/6)m_1m_2^2n_2^2n_3 - (1/6)m_1^2m_3n_2^2n_3 \\
& - (1/3)m_1m_2^2n_2^2n_1 + (1/3)m_1^2m_2n_2^2n_3 + (1/3)m_1m_2^2n_3^2n_2 - \\
& (1/3)m_2^2m_3n_2^2n_3 + (2/3)m_1^2m_2n_3^2n_2 - (1/6)m_1m_2^2n_3^2n_1 + (1/2)m_1m_3^2n_3n_1n_2 \\
& - (1/3)m_1^2n_1^2m_3n_3 + (1/3)m_1n_1^2m_3^2n_3 - (1/2)m_1^2m_2n_3^2n_1 + \\
& (1/3)m_1^2m_3n_3^2n_1 - (1/3)m_1m_3^2n_3^2n_1 - (1/6)m_1^2m_2n_2n_1n_3 - (1/2)m_2m_3^2n_1^2n_3 \\
& - (1/6)m_2m_3^2n_2n_1n_3] + \nu[+ (1/12)m_1m_3^2n_1n_2^2 + (1/4)m_1^2m_3n_1n_2n_3 - \\
& (1/24)m_1m_3^2n_2^2n_3 + (1/4)m_1m_3^2n_1n_2n_3 + (1/12)m_1^2m_3n_2^2n_3 - \\
& (1/24)m_1^2m_3n_1n_2^2 + (1/12)m_1m_2^2n_2^2n_3 - (1/6)m_1m_2^2n_1n_2^2 - 2m_1m_2m_3n_1n_2n_3 \\
& + (1/12)m_3n_2^2n_1m_2^2 + (2/3)n_1^2n_2m_3^2m_2 - (1/4)n_1^2n_2m_3^3 + (1/6)n_1^2n_2m_3m_2^2 \\
& + (1/6)m_1^2n_2^2m_2n_3 - (1/24)m_1^3n_2^2n_3 + (1/12)m_1^3n_3^3 + (1/12)n_1^3m_3^3 + \\
& (2/3)n_2n_3^2m_1^2m_2 + (1/6)n_2n_3^2m_1m_2^2 - (1/6)m_2^2m_3n_2^2n_3 - (1/24)m_1m_2^2n_1^2n_3 \\
& + (1/12)m_1m_2^2n_1n_3^2 + (1/4)m_1m_2m_3n_1n_3^2 + (1/4)m_1m_2m_3n_1^2n_3 + \\
& (1/6)m_3^2n_2^2m_2n_1 - (1/24)m_3^3n_2^2n_1 - (1/4)n_2n_3^2m_1^3 - (1/24)n_1^3m_3m_2^2 - \\
& (1/4)n_1^3m_3^2m_2 - (1/6)n_1^2m_3m_1^2n_3 - (1/24)m_1n_3^3m_2^2 + (1/12)m_1m_3^2n_1^2n_3 + \\
& (1/12)m_1^2m_3n_1n_3^2 + (1/12)m_2^2m_3n_1^2n_3 - (1/24)m_2^2m_3n_1n_3^2 - (1/4)m_1^2n_3^3m_2 \\
& - (1/6)m_1n_3^2n_1m_3^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(5,7) = & - (1/6) n_1 n_2^2 n_3 m_1 - (1/6) m_1^2 m_2^2 m_3 - (1/3) m_1 m_2^3 m_3 + \\
& (5/12) n_2^2 n_3^2 m_1 - (1/12) m_2^2 m_3^2 m_1 + (1/6) m_2^4 m_1 + (1/6) m_1^3 m_2^2 + \\
& (1/6) n_1^2 n_2 n_3 m_1 + (1/6) n_1^2 m_1 n_2^2 + (5/6) m_1^2 m_2 m_3^2 - (1/3) m_2 m_3^3 m_1 + \\
& (1/6) n_2^4 m_1 + (1/3) n_1 n_2 m_1 n_3^2 - (1/6) m_1^3 m_2 m_3 + (1/12) m_1^4 m_3 - \\
& (1/4) m_1^2 m_3^3 + (1/4) m_3 n_2^2 n_3^2 - (1/12) m_3 n_2^4 - (1/4) n_1^2 m_3 n_3^2 + \\
& (1/12) n_1^4 m_3 - (1/12) m_2^4 m_3 + (1/4) m_2^2 m_3^3 - n_2 n_3^3 m_1 + (2/3) n_1 n_2 m_3 n_3^2 + \\
& (1/2) n_1^2 n_2 m_3 n_3 - (1/2) n_1 n_2^2 m_3 n_3 + (1/4) m_3^4 m_1 - (1/12) m_1^3 m_3^2 - \\
& (1/3) n_1^3 n_2 m_3 - (1/3) n_1 n_2^3 m_3 + (1/4) n_3^4 m_1 - (1/12) n_1^2 m_1 n_3^2 + \mu [- \\
& 2 m_3 n_3^2 m_1 m_2 + (1/3) m_1^2 n_1 m_2 n_3 - (1/3) m_1^2 n_1 m_3 n_2 - (2/3) m_1 n_1^2 m_2 m_3 + \\
& (2/3) m_1^2 n_1 m_2 n_2 - (1/3) m_2^2 n_3 m_3 n_1 - (2/3) m_3^2 n_2 m_2 n_1 - (1/3) m_2 n_3 m_1 m_3 n_2 - \\
& (2/3) m_2 n_2^2 m_1 m_3 - (2/3) m_2^2 n_2 m_3 n_1 - (1/3) m_1 n_2 m_2 m_3 n_1 - (1/3) m_1^2 n_2 m_2 n_3 + \\
& (4/3) m_3^2 n_3 m_2 n_1 + (2/3) m_2^2 n_2^2 m_1 + (2/3) m_2^2 n_3^2 m_1 + (1/3) m_3^2 n_2^2 m_1 - \\
& (2/3) m_1 m_3^2 n_2 n_3 - m_1 n_1 m_3^2 n_3 + (1/3) m_1^2 n_1^2 m_3 + m_1 m_3^2 n_2 n_1 + (1/3) m_1^2 m_2 n_3^2 \\
& + (1/3) m_2 m_3^2 n_1^2 + m_2 n_1 m_1 m_3 n_3 - (1/3) m_1^2 n_1 m_3 n_3 + (2/3) m_1^2 n_2 m_3 n_3 + \\
& m_3^2 n_3^2 m_1 + m_2 m_3^2 n_2 n_3 - (1/3) m_2^2 m_3 n_2^2] + \nu [- (1/3) m_2 m_3^2 n_1 n_2 - \\
& (1/3) m_1 m_2 m_3 n_2^2 + n_2 n_3 m_1 m_2 m_3 + (1/6) n_1^2 m_1 m_2^2 - (1/4) n_3^2 m_1 m_2^2 - \\
& (5/12) m_3^2 m_1 n_2^2 + (1/6) m_1^3 n_2 n_3 + (1/3) n_1 n_2 m_1 m_3^2 + (1/3) m_2^2 m_1 n_2^2 - \\
& (1/3) m_2 m_3 m_1 n_3^2 - (1/6) m_1 m_2 n_1^2 m_3 - (1/4) n_1^2 m_3^3 + (1/6) n_1^2 m_3^2 m_2 + \\
& (1/4) m_2^2 m_3 n_3^2 - (1/3) n_1 n_2 m_3 m_1^2 - (1/3) n_1 n_2 m_3 m_2^2 + (2/3) n_1 n_2 m_3^3 - \\
& (1/6) m_3 n_2^2 m_2^2 + (1/4) m_3^3 n_2^2 - (1/4) m_1^2 m_3 n_3^2 + (1/2) m_1^2 m_3 n_2 n_3 - \\
& m_1 m_3^2 n_2 n_3 + (1/6) m_1^2 m_3 n_1^2 - (1/6) m_1^2 m_3 n_2^2 + (2/3) m_1 m_2 m_3 n_1 n_3 - \\
& (1/12) n_1^2 m_1 m_3^2 + (1/2) m_3^2 m_1 n_3^2 - (1/12) m_1^3 n_3^2 - (1/6) m_1 m_2^2 n_1 n_3 - \\
& (1/6) m_2^2 m_3 n_1 n_3 + (1/6) m_1^3 n_2^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(5,8) = & + (1/8) m_1 m_2^3 m_3^2 - (1/24) m_1 n_2^4 m_3 - (1/6) n_2^3 n_3 m_1^2 - \\
& (1/24) m_1 m_2^4 m_3 - (1/24) m_1^2 m_2^3 m_3 - (1/4) m_1^2 m_2^2 m_3^2 - (1/12) n_1^2 m_3 m_1 n_3^2 + \\
& (1/12) m_1^2 n_3^4 - (1/6) m_1^2 n_3^3 n_2 - (1/24) m_1^2 m_3^3 m_2 + (1/8) m_1 m_3^3 m_2^2 + \\
& (1/8) m_1^3 m_3 m_2^2 + (1/8) m_1^3 m_3^2 m_2 - (1/12) n_2 n_3 m_1 m_2 n_1^2 + (1/3) n_2 n_3^2 m_1 n_1 m_2 - \\
& (2/3) n_1^2 n_2 m_3 n_3 m_2 - (1/12) n_1 n_2 m_3 m_2 n_3^2 + (1/4) m_1 n_2^2 n_1 n_3 m_2 + \\
& (1/3) n_2^2 n_3 m_1 n_1 m_3 - (1/24) n_1^4 m_3 m_2 + (1/12) m_1^2 n_2^4 + (1/12) m_1^2 m_2^4 - \\
& (1/4) n_2^2 n_3^2 m_1^2 - (1/12) m_3 n_2^2 n_1 n_3 m_2 - (1/24) m_1 n_3^4 m_2 + (1/6) n_2^3 n_3 m_1 m_3 - \\
& (1/6) n_1 n_2^3 m_3 m_1 - (1/12) m_1^3 m_3^3 + (1/12) m_1^2 m_3^4 - (1/12) n_1^2 m_3 n_2 n_3 m_1 + \\
& (1/4) m_1 n_3^2 n_1 n_2 m_3 + (1/24) m_1 n_3^2 m_3 n_2^2 + (1/24) n_1^2 m_3 m_1 n_2^2 - (1/24) m_1^4 m_3 m_2 - \\
& (1/24) m_1 m_3^4 m_2 - (1/12) m_1^3 m_2^3 - (1/12) m_2^3 m_3^3 + (1/6) n_2 n_3^3 m_1 m_2 + \\
& (1/6) n_1^3 n_2 m_3 m_2 - (1/12) m_1 n_2^2 m_2 n_1^2 + (1/24) m_1 n_2^2 m_2 n_3^2 + (1/6) n_1^3 m_3 n_3 m_2 \\
& + (1/24) n_1^2 m_3 m_2 n_3^2 + (1/24) m_1 n_3^2 m_2 n_1^2 - (1/6) m_1 n_3^3 n_1 m_2 + \\
& (1/24) m_3 n_2^2 m_2 n_1^2 - (1/12) m_3 n_2^2 m_2 n_3^2 + \mu [- (1/3) m_1^2 n_1 m_3^2 n_3 + \\
& (1/3) m_1^2 m_3^2 n_3^2 - (1/6) m_2^2 m_3^2 n_1 n_2 + (1/3) m_1 m_3^2 n_2^2 m_2 - (2/3) m_1^2 m_2 n_3 m_3 n_2 \\
& - (2/3) m_1^2 m_3 n_2^2 m_2 + (1/6) m_1^2 m_2^2 n_3 n_2 - (2/3) m_2^2 m_3^2 n_1^2 + \\
& (1/3) m_2^2 m_3 n_1 m_1 n_2 + (1/3) m_1 m_2^2 n_3 m_3 n_2 + (1/6) m_1^2 m_3^2 n_2^2 - (1/6) m_1 m_2^2 n_2^2 m_3 \\
& + (1/6) m_1^2 m_2^2 n_3^2 - (1/3) m_1^2 m_2^2 n_2 n_1 + (1/3) m_2^2 m_3 n_1^2 m_1 - (1/6) m_2^2 m_3^2 n_1 n_3 \\
& - (1/3) m_2^2 m_3^2 n_2 n_3 - (1/6) m_1^2 m_2^2 n_3 n_1 + (1/3) m_1 m_2^2 n_3^2 m_3 + (1/3) m_1^2 m_2^2 n_2^2 \\
& - (1/6) m_1^2 n_1 m_3^2 n_2 + (1/3) m_1 m_3^2 n_3 m_2 n_1 + (1/3) m_1 m_3^2 n_3 m_2 n_2 + \\
& (1/3) m_1^2 n_1 m_3 m_2 n_2 + (1/3) m_1 n_1^2 m_3^2 m_2 + (1/6) m_1^2 m_3^2 n_3 n_2 - (2/3) m_1^2 m_3 n_3^2 m_2 \\
& + (1/3) m_1^2 n_1 m_3 m_2 n_3 - (1/6) m_1 m_3^2 n_3^2 m_2 - (1/6) m_1^2 n_1^2 m_3 m_2] + \nu [- \\
& (1/3) m_1 m_2^2 m_3 n_1 n_3 + (1/4) m_1 m_2^3 n_1 n_3 + (1/3) n_2 n_3 m_1^2 m_2 m_3 + \\
& (1/6) n_2 n_3 m_1 m_2^2 m_3 - (1/12) n_1^2 m_3 m_1^2 m_2 - (1/12) m_1 n_3^2 m_3^2 m_2 - \\
& (1/12) n_2 n_3 m_1^3 m_2 + (1/6) n_2 n_3 m_1 m_3^2 m_2 + (1/6) n_1 n_2 m_3 m_1^2 m_2 - \\
& (1/12) n_1 n_2 m_3^3 m_2 - (1/24) m_1^2 n_2^2 m_2 m_3 - (1/12) m_1 n_2^2 m_2^2 m_3 - \\
& (1/6) n_2 n_3 m_1^2 m_2^2 - (1/12) m_1^3 n_2^2 m_2 + (1/6) m_1^2 n_2^2 m_2^2 - (1/12) m_2^3 m_3 n_1 n_3 - \\
& (1/6) n_1 n_2 m_3 m_1 m_2^2 + (1/8) m_1 m_2 m_3^2 n_2^2 - (1/3) n_1 n_2 m_3^2 m_1 m_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/6)m_1^2m_3n_1n_3m_2 - (1/6)m_1m_3^2n_1n_3m_2 - (1/12)m_1^2n_3^2m_2^2 + (1/24)m_1^3n_2^2m_3 \\
& - (1/6)n_2n_3m_1^2m_3^2 - (1/12)n_2n_3m_1^3m_3 + (1/4)n_1n_2m_3^3m_1 - \\
& (1/24)m_1^2n_3^2m_2m_3 + (1/8)m_1n_3^2m_2^2m_3 + (1/8)n_1^2m_3m_1m_2^2 + (1/8)n_1^2m_3^2m_1m_2 \\
& + (1/24)m_3^3n_2^2m_1 - (1/12)m_1^2n_2^2m_3^2 - (1/12)m_1^3n_3^2m_3 - (1/12)n_1^2m_3^3m_1 \\
& + (1/6)m_1^2n_3^2m_3^2 + (1/24)n_1^2m_3^3m_2 + (1/24)m_1^3n_3^2m_2 - (1/12)m_1m_2^3n_1^2 + \\
& (1/24)m_1m_2^3n_3^2 + (1/24)m_2^3m_3n_1^2 - (1/12)m_3^3n_2^2m_2 - (1/12)m_2^3m_3n_3^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(5,9) = & - (1/12)m_1m_2m_3^3n_1 - (1/12)m_1n_2^3n_1n_3 + (1/12)m_1n_2^2n_1^2n_3 - \\
& (7/24)n_1^2n_2m_3n_3^2 - (1/24)n_2n_3^2m_1n_1^2 + (1/12)m_1^2m_3^3n_1 - (1/12)m_1m_3^4n_1 \\
& - (1/24)m_1^2m_3n_1m_2^2 + (1/12)m_1^2m_3^2m_2n_1 + (1/24)m_3n_2^2n_1n_3^2 - \\
& (1/12)m_1m_2^4n_1 - (1/6)m_1n_3^3n_2^2 + (1/8)n_1^2n_2^3m_3 - (1/24)n_2^3n_3^2m_1 - \\
& (5/24)n_1^3m_3n_2^2 - (1/12)m_1n_2^4n_1 + (1/12)m_3n_2^3n_3^2 + (1/12)m_1^3m_2^2n_2 + \\
& (1/12)m_2^2m_3^3n_2 + (1/24)n_1^4m_3n_2 - (1/24)m_2^2m_3^3n_1 - (1/12)m_1m_2^2m_3^2n_1 - \\
& (1/6)m_2^3m_3^2n_1 + (1/24)m_2^4m_3n_1 - (5/24)m_1^3m_3^2n_2 - (1/12)m_1^3m_2m_3n_2 + \\
& (1/3)m_1^2m_2m_3^2n_2 - (1/12)m_1m_2m_3^3n_2 - (7/24)m_1^2m_2^2m_3n_2 + \\
& (1/24)m_1m_2^2n_2m_3^2 + (1/12)m_1n_2^3n_1^2 + (1/3)m_1m_2^3m_3n_1 + (1/24)m_1n_3^4n_2 + \\
& (1/24)m_1m_3^4n_2 + (1/24)m_1^4m_3n_2 + (1/3)m_1n_3^3n_1n_2 - (1/12)n_1n_2^3m_3n_3 + \\
& (1/24)m_3n_2^4n_1 + (1/8)m_1^2m_3^3n_2 + (1/3)n_1^2m_3n_2^2n_3 - (1/12)m_1n_3^4n_1 + \\
& (1/12)n_1^3m_3n_3^2 - (1/12)n_1^3m_3n_2n_3 - (1/12)n_2^2n_3^2m_1n_1 + \mu[+ \\
& (1/6)m_1n_1^2m_3n_3m_2 - (1/6)m_1n_1^2m_3^2n_2 - (1/2)m_1n_1^2m_3m_2n_2 - \\
& (1/2)m_1^2n_1m_3n_2n_3 + (1/3)m_1m_3n_3^2n_1m_2 + (1/3)m_1^2m_3n_3^2n_2 - \\
& (1/3)m_1m_3n_3^2m_2n_2 + (1/3)m_2m_3^2n_1^2n_2 + (1/6)m_2^2m_3n_2^2n_1 + \\
& (2/3)m_1m_3n_2n_1n_3m_2 + (1/6)m_1m_3^2n_2^2n_1 + (1/3)m_2^2m_3n_1^2n_2 - \\
& (1/6)m_2m_3^2n_2^2n_1 - (1/3)m_2^2m_3n_1^2n_3 + (1/3)m_1m_2^2n_2n_1n_3 + (1/3)m_1^2m_3n_2^2n_3 \\
& - (1/3)m_1m_2^2n_2^2n_1 - (1/2)m_1^2m_2n_2^2n_3 - (1/3)m_1^2m_2n_3^2n_2 + \\
& (1/6)m_1m_2^2n_3^2n_1 - (1/3)m_2^2m_3n_1n_3n_2 + (1/3)m_1n_1^2m_3^2n_3 - (1/3)m_1m_3^2n_3^2n_1 \\
& + (1/6)m_1^2m_2n_2n_1n_3 - (1/2)m_2m_3^2n_1^2n_3 + (1/6)m_1^2n_1^2m_3n_2 + \\
& (1/3)m_2m_3^2n_2^2n_3 - (1/6)m_1m_3^2n_2^2n_3 + (1/3)m_1^2m_2n_2^2n_1 - (1/6)m_1^2m_3n_2^2n_1 \\
& + (1/6)m_1m_3^2n_3^2n_2] + \nu[+ (3/4)m_1m_3^2n_1n_2^2 - (1/12)m_1^2m_3n_1n_2n_3 - \\
& (1/6)m_1m_3^2n_2^2n_3 + (1/3)m_1m_3^2n_1n_2n_3 - (1/12)m_1m_2^2n_1n_2n_3 - \\
& (1/3)m_1^2m_3n_2^2n_3 - (5/24)m_1^2m_3n_1n_2^2 + (1/3)m_1m_2m_3n_1n_2^2 - \\
& (1/6)m_1m_2^2n_1n_2^2 + (1/3)m_1m_2m_3n_1n_2n_3 + (1/12)m_3n_2^2n_1m_2^2 - \\
& (1/3)n_1^2n_2m_3^2m_2 - (7/24)n_1^2n_2m_3^3 + (1/8)n_1^2n_2m_3m_2^2 + (1/12)m_1^3n_2^2n_3 + \\
& (1/12)n_1^3m_3^3 - (1/24)n_2n_3^2m_1m_2^2 - (1/12)m_2^2m_3n_1n_2n_3 + (1/12)m_1m_2^2n_1n_3^2 \\
& - (1/12)m_1m_2m_3n_1n_3^2 - (1/6)m_3^2n_2^2m_2n_1 + (1/24)m_3^3n_2^2n_1 - \\
& (1/24)n_2n_3^2m_1^3 - (1/24)n_1^3m_3m_2^2 + (1/12)n_1^3m_3^2m_2 + (1/12)m_1^2m_3n_1n_3^2 - \\
& (1/24)m_2^2m_3n_1n_3^2 - (1/6)m_1n_3^2n_1m_3^2 + (1/12)m_1^3n_2^3 + (1/12)m_3^3n_2^3 - \\
& (1/12)m_1m_2m_3n_1^2n_2 + (1/12)m_1m_2^2n_1^2n_2 - (7/24)m_1^2n_2^3m_3 + (1/24)m_1n_2^3m_3^2 \\
& + (1/12)m_1n_3^2n_2m_3^2 + (1/8)m_1^2n_3^2m_3n_2 + (1/12)m_1^2m_3n_1^2n_2 - \\
& (5/24)m_1m_3^2n_1^2n_2 + (1/12)m_2^2m_3n_2n_3^2 - (1/12)m_1m_2m_3n_2n_3^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(6,6) = & + (3/4)m_2^2m_3^2n_1^2 + (3/4)m_1^2m_2^2n_3^2 - (4/3)m_1m_2^2n_3m_3n_1 + \\
& (1/2)m_1^2n_1m_3m_2n_3 + (1/2)m_1m_3^2n_3m_2n_1 - (1/3)n_3m_2^3m_3n_1 - (1/6)n_2^3n_3^2n_1 - \\
& (1/12)n_2^4n_3n_1 + (1/6)n_1^2n_2^2n_3^2 - (1/6)n_1^2n_2^3n_3 - (1/12)n_1m_2^4n_3 + \\
& (1/12)n_2^4n_3^2 + (1/12)n_1^2n_2^4 + (1/12)n_1^2m_2^4 + (1/12)n_3^2m_2^4 - \\
& (1/6)n_1^3n_3^3 + (1/12)n_1^2n_3^4 + (1/12)m_1^4n_3^2 - (1/3)n_1m_2^3m_1n_3 + \\
& (1/6)n_1^2m_2^3m_3 + (1/6)n_3^2m_2^3m_1 + (1/12)n_1^3n_2^2n_3 - (1/6)m_1^2n_1m_3^2n_3 + \\
& (1/12)n_1^2m_3^4 + (1/12)n_1n_3^3n_2^2 - (1/2)m_1^3m_2n_3^2 - (1/2)m_2m_3^3n_1^2 + \\
& (1/12)n_1^4n_3^2 + (1/12)m_2^2m_3^2n_1n_3 + (1/12)m_1^2m_2^2n_3n_1 + \mu[- \\
& (2/3)m_3n_2^2n_1n_3m_2 - (1/3)n_1n_3^2m_2^2n_2 - (1/3)m_2^2n_1n_2^2n_3 + (1/3)m_1n_2^2m_2n_3^2 \\
& + (1/3)m_2^2n_3^2n_2^2 - n_2n_3^2m_1^2n_1 + m_1n_3^2n_1n_2m_3 + (1/3)n_2n_3m_1m_2n_1^2 - \\
& (2/3)m_1n_2^2n_1n_3m_2 - (1/3)n_1^2n_3m_2^2n_2 + (1/3)m_3n_2^2m_2n_1^2 + n_1^2m_3n_2n_3m_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (4/3)n_2^2n_3m_1n_1m_3 - n_1^2n_2m_3^2n_3 + (1/3)n_1^2n_3^2m_2^2 + (5/6)n_1^2n_2^2m_3^2 + \\
& (5/6)n_2^2n_3^2m_1^2 + (1/3)m_2^2n_1^2n_2^2 + (1/3)m_1^2n_1^2n_3^2 + (1/3)m_3^2n_1^2n_3^2 - \\
& (2/3)n_1^2m_3m_1n_3^2 + (1/3)n_1n_2m_3m_2n_3^2] + \nu[(1/6)n_1^2m_2^2n_2^2 + \\
& (1/6)n_3^2m_2^2n_2^2 + (1/2)m_2m_3n_1^3n_3 - (1/2)m_2m_3n_1^2n_3^2 - (1/2)m_1m_2n_3^2n_1^2 + \\
& (1/2)m_1m_2n_3^3n_1 + (1/12)n_1^3m_2^2n_3 - (1/6)n_1^2m_2^2n_3^2 - (1/12)n_1^2m_3^2n_2^2 + \\
& (1/6)m_1^2n_3^2n_1^2 - (1/6)m_1^2n_3^3n_1 - (1/6)n_1^3m_3^2n_3 + (1/6)n_1^2m_3^2n_3^2 - \\
& (1/12)m_1^2n_3^2n_2^2 - (1/6)n_1m_2^2n_2^2n_3 - (1/6)n_1^2m_2^2n_2n_3 + (1/6)m_1m_2n_3^2n_2^2 \\
& + (1/3)m_1m_2n_3^2n_1n_2 - (1/3)m_1m_2n_3n_1n_2^2 - (1/6)n_3^2m_2^2n_1n_2 - \\
& (1/3)m_2m_3n_1n_2^2n_3 + (1/3)m_2m_3n_1^2n_2n_3 + (1/6)m_2m_3n_1^2n_2^2 + \\
& (1/12)n_1m_3^2n_2^2n_3 + (1/12)n_3^3m_2^2n_1 + (1/12)m_1^2n_3n_1n_2^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(6,7) = & - (1/6)m_2m_3n_1m_1^2 - (1/3)m_2m_3^2n_1m_1 - (1/2)m_1^2m_2n_3m_3 + \\
& (1/2)m_1m_2^2n_3m_3 + (1/6)n_1m_2^2m_1m_3 - (1/6)n_1m_2^2m_1^2 + (1/12)n_1^3n_3^2 - \\
& (1/4)n_1n_3^4 + (1/3)m_1^3m_2n_3 - (2/3)m_1m_2n_3m_3^2 - (1/12)m_1^4n_3 + \\
& (1/3)m_1m_2^3n_3 + (1/12)n_1m_3^2m_1^2 + (1/4)m_1^2n_3m_3^2 - (1/6)n_1n_2^4 + \\
& (1/4)n_1^2n_3^3 - (1/12)n_1^4n_3 + (1/6)n_1^3n_2n_3 + (1/12)n_3m_2^4 - (1/4)n_1m_3^4 \\
& - (1/4)n_2^2n_3^3 - (1/6)n_1^3n_2^2 + m_3^3m_2n_1 + (1/12)n_2^4n_3 + (1/6)n_1^2n_3n_2^2 - \\
& (5/6)n_1^2n_3^2n_2 + (1/3)n_2^3n_3n_1 + (1/12)n_2^2n_3^2n_1 - (1/4)n_3m_2^2m_3^2 - \\
& (5/12)m_2^2m_3^2n_1 + (1/3)n_2n_3^3n_1 - (1/6)m_2^4n_1 + \mu[-m_3^2n_1n_3^2 + \\
& (2/3)n_2n_3m_1^2n_1 + (1/3)m_2n_1^2n_2m_3 - (2/3)m_2n_1^2n_2m_1 - (2/3)m_2^2n_1n_2^2 - \\
& (1/3)n_2n_3^2m_1^2 - (1/3)n_1n_3^2m_2^2 + (1/3)m_2^2n_3n_2^2 - (1/3)n_1^2n_2m_3^2 - \\
& (2/3)n_1n_2^2m_3^2 - (2/3)n_1^2n_3m_2m_3 - m_2n_3^2n_2m_3 + (1/3)m_2n_1n_2m_3n_3 - \\
& (1/3)n_1^2n_2m_3m_1 + 2n_1n_2m_3^2n_3 + (1/3)m_2n_1n_2m_1n_3 - n_2n_3m_1m_3n_1 + \\
& (2/3)n_2^2n_3m_1m_2 - (4/3)n_2n_3^2m_1m_3 + (2/3)m_2^2n_1n_2n_3 + (2/3)n_2n_3^2m_1m_2 + \\
& (1/3)n_2^2n_3m_1m_3 + (1/3)n_1^2n_3m_2m_1 + (2/3)n_1n_3^2m_2m_3 - n_1n_3^2m_2m_1 - \\
& (1/3)m_1^2n_1^2n_3 + (1/3)m_1n_1^2n_3m_3 + m_3n_1n_3^2m_1] + \nu[-(1/2)m_2m_3n_1^2n_3 + \\
& (1/3)m_1m_2n_3n_1^2 + (1/6)n_1n_2^2m_1m_3 + (1/6)n_1n_2n_3m_1^2 - (2/3)n_1n_2n_3m_1m_3 + \\
& m_2m_3n_1n_3^2 - (1/6)m_2m_3n_1^3 + (1/4)n_1^2m_3^2n_3 - (1/2)n_1m_3^2n_3^2 + \\
& (1/12)n_1^3m_3^2 - (1/6)m_1^2n_3^2n_2 - (1/6)m_1^2n_3n_1^2 + (1/12)m_1^2n_3^2n_1 + \\
& (5/12)n_1m_2^2n_3^2 + (1/6)n_1^2m_2^2n_3 - (2/3)m_1m_2n_3^3 + (1/3)m_1m_2n_3^2n_2 + \\
& (1/4)m_1^2n_3^3 + (1/3)m_1m_2n_3n_2^2 - (1/6)n_1^3m_2^2 - (1/6)n_1n_2^2m_1^2 + \\
& (1/6)n_2^2n_3m_2^2 - (1/4)n_3^3m_2^2 + (1/4)m_3^2n_1n_2^2 - (1/4)n_2^2n_3m_3^2 - \\
& (1/3)m_1m_2n_3^2n_1 - n_2n_3n_1m_2m_3 + (1/3)n_2n_3n_1m_2^2 + (1/3)n_2n_3n_1m_3^2 + \\
& (1/6)m_1m_3n_2^2n_3 - (1/3)m_2^2n_1n_2^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(6,8) = & + (1/3)m_1m_2m_3^3n_1 + (1/3)m_1n_2^3n_1n_3 - (1/24)m_1n_2^2n_1^2n_3 + \\
& (1/12)n_2n_3^2m_1n_1^2 - (1/12)m_1m_3^4n_1 + (1/24)n_3m_2^2m_1m_3^2 - (1/12)n_3m_2^3m_1m_3 \\
& + (1/12)m_1^2m_3n_1m_2^2 - (1/24)m_1^2m_3^2m_2n_1 + (1/12)n_3m_2^3m_3^2 - \\
& (5/24)n_1^4n_3^2m_2 + (1/8)n_1^2n_3^3m_2 + (1/24)n_1n_3^4m_2 + (1/24)n_2^4n_3m_1 + \\
& (1/24)n_1^4n_3m_2 + (1/24)n_1n_2^2m_2n_3^2 - (7/24)n_1^2n_2^2n_3m_2 - (1/12)n_1^3n_2n_3m_2 \\
& + (1/3)n_1^2n_2n_3^2m_2 - (1/12)n_1n_2n_3^3m_2 + (1/12)n_1^3n_2^2m_2 - \\
& (7/24)m_1^2m_2n_3m_3^2 + (1/3)m_1^2m_2^2n_3m_3 - (5/24)m_1^3m_2^2n_3 + (1/12)n_1m_2^3m_1^2 + \\
& (1/8)n_3m_2^3m_1^2 + (1/24)n_3m_2^4m_1 + (1/12)n_2^2n_3^3m_2 + (1/12)n_1^2n_3^3m_1 - \\
& (1/12)m_1m_2^4n_1 - (1/24)m_1n_3^3n_2^2 - (1/6)n_2^3n_3^2m_1 - (1/12)m_1n_2^4n_1 - \\
& (1/12)m_1^3n_3m_2m_3 + (1/24)m_1^4n_3m_2 + (1/24)n_1m_3^4m_2 - (1/6)m_2^2m_3^3n_1 + \\
& (1/12)m_1^3n_3m_3^2 - (1/12)m_1m_2^2m_3^2n_1 - (1/24)m_2^3m_3^2n_1 - (1/12)m_1m_2^3m_3n_1 \\
& - (1/12)m_1n_3^3n_1n_2 - (1/12)m_1n_3^4n_1 - (1/12)n_2^2n_3^2m_1n_1 + \mu[- \\
& (1/2)m_1n_1^2m_3n_3m_2 + (1/6)m_1n_1^2m_3m_2n_2 + (1/6)m_1^2n_1m_3n_2n_3 - \\
& (1/2)m_1^2m_3n_3^2n_2 - (1/3)m_2m_3^2n_1^2n_2 + (2/3)m_1m_3n_2n_1n_3m_2 + \\
& (1/6)m_1m_3^2n_2^2n_1 - (1/2)m_2^2m_3n_1^2n_2 + (1/3)m_2^2m_3n_1^2n_3 - (1/3)m_1^2m_3n_2^2n_3 \\
& - (1/3)m_1m_2^2n_2^2n_1 + (1/3)m_1^2m_2n_2^2n_3 + (1/3)m_1^2m_2n_3^2n_2 + \\
& (1/6)m_1m_2^2n_3^2n_1 - (1/3)m_1m_3^2n_3^2n_1 - (1/2)m_1^2m_2n_2n_1n_3 + (1/3)m_2m_3^2n_1^2n_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (1/6)n_1^2n_3m_2^2m_1 + (1/3)m_2n_1n_2^2m_1m_3 + (1/3)m_2^2n_1^2n_2m_1 - \\
& (1/6)n_1n_3^2m_2^2m_3 + (1/6)m_2^2n_3n_2^2m_1 - (1/6)m_2^2n_3^2n_2m_1 + (1/3)m_2^2n_3^2n_2m_3 \\
& - (1/3)n_1n_2m_3^2m_2n_3 - (1/3)m_2n_3n_2^2m_1m_3 + (1/6)m_1^2n_1^2n_3m_2 + \\
& (1/3)n_1n_2m_3^2m_1n_3 - (1/6)m_1^2n_1n_3^2m_2 + (1/3)m_1^2n_1n_3^2m_3 + \\
& (1/6)m_3^2n_1n_3^2m_2] + \nu [+ (1/12)m_1m_3^2n_1n_2^2 - (1/24)m_1m_3^2n_2^2n_3 - \\
& (1/12)m_1m_3^2n_1n_2n_3 + (1/3)m_1m_2^2n_1n_2n_3 - (1/12)m_1m_2m_3n_1n_2^2 - \\
& (1/6)m_1m_2^2n_1n_2^2 + (1/3)m_1m_2m_3n_1n_2n_3 - (1/24)m_1^3n_2^2n_3 - (1/6)n_2n_3^2m_1m_2^2 \\
& + (3/4)m_1m_2^2n_1n_3^2 + (1/3)m_1m_2m_3n_1n_3^2 - (1/24)m_3^2n_2^2m_2n_1 + \\
& (1/12)n_2n_3^2m_1^3 + (1/12)n_1^3m_3m_2^2 - (1/24)n_1^3m_3^2m_2 - (1/6)m_2^2m_3n_1n_3^2 - \\
& (1/6)m_1n_3^2n_1m_3^2 + (1/12)n_2^2n_3m_3^2m_2 - (1/12)n_1n_2n_3m_3^2m_2 + \\
& (1/8)n_1^2m_3^2n_3m_2 + (1/12)n_1m_3^2m_2n_3^2 + (1/12)m_1^2n_3m_2n_1^2 - \\
& (5/24)m_1^2n_3^2n_1m_2 - (7/24)m_1^2n_3^3m_2 + (1/24)m_1m_2^2n_3^3 - (7/24)n_1^2m_3^2n_3 + \\
& (1/24)n_1m_2^3n_3^2 + (1/12)n_1^3m_2^3 - (1/3)m_2^2m_3n_1^2n_3 - (5/24)m_1m_2^2n_3n_1^2 - \\
& (1/3)m_1^2m_2n_3^2n_2 - (1/12)n_2^2n_3m_1m_2m_3 + (1/8)n_2^2n_3m_1^2m_2 + \\
& (1/12)n_2^2n_3m_1m_2^2 - (1/12)n_1n_2n_3m_1^2m_2 + (1/12)n_1n_2^2m_1^2m_2 + (1/12)m_1^3n_3^3 \\
& + (1/12)n_3^3m_2^3 + (1/12)n_1^2n_3m_1m_3^2 - (1/12)n_1^2n_3m_1m_2m_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(6,9) = & - (1/4)m_2^2m_3^2n_1^2 + (1/3)m_1m_2^2n_3m_3n_1 - (1/12)m_1^2n_1m_3m_2n_3 + \\
& (1/4)m_1m_3^2n_3m_2n_1 + (1/6)m_1^3m_2n_3n_2 - (1/12)n_1m_2^2m_1^2n_2 + \\
& (1/24)n_3m_2^2m_1^2n_2 - (1/12)m_1m_2n_3n_2m_3^2 + (1/24)n_1m_2^2n_2m_3^2 + \\
& (1/6)m_2m_3^3n_1n_2 - (2/3)m_1^2m_2n_3m_3n_2 + (1/3)m_2m_3^2n_1m_1n_2 - \\
& (1/12)n_3m_2^2m_1m_3n_2 - (1/12)m_2m_3n_1m_1^2n_2 + (1/4)n_1m_2^2m_1m_3n_2 - \\
& (1/12)n_1^3n_2^3 + (1/24)m_1^2n_3n_2m_3^2 - (1/24)n_1m_3^4n_2 + (1/6)n_3m_2^3m_3n_1 + \\
& (1/24)n_1m_3^2m_1^2n_2 - (1/6)n_1m_3^3m_1n_2 + (1/8)n_2^3n_3^2n_1 - (1/24)n_2^4n_3n_1 - \\
& (1/4)n_1^2n_2^2n_3^2 - (1/24)n_1^2n_2^3n_3 - (1/24)n_1m_2^4n_3 - (1/24)m_1^4n_3n_2 + \\
& (1/6)m_1^3n_3m_3n_2 + (1/12)n_1^2n_2^4 + (1/12)n_1^2m_2^4 - (1/12)n_1^3n_3^3 + \\
& (1/12)n_1^2n_3^4 - (1/24)n_1^4n_3n_2 - (1/24)n_1n_3^4n_2 - (1/6)n_1m_2^3m_1n_3 - \\
& (1/6)n_1^2m_2^3m_3 + (1/8)n_1^3n_2n_3^2 - (1/24)n_1^2n_2n_3^3 + (1/8)n_1^3n_2^2n_3 - \\
& (1/12)n_3m_2^2n_2m_3^2 - (1/12)m_1^2n_1m_3^2n_3 - (1/12)n_2^3n_3^3 + (1/12)n_1^2m_3^4 + \\
& (1/8)n_1n_3^3n_2^2 - (1/6)m_2m_3^3n_1^2 + (1/24)m_2^2m_3^2n_1n_3 + (1/24)m_1^2m_2^2n_3n_1 + \\
\mu [+ & (1/3)m_3n_2^2n_1n_3m_2 + (1/3)n_1n_3^2m_2^2n_2 - (1/6)m_2^2n_1n_2^2n_3 - \\
& (1/6)m_1n_2^2m_2n_3^2 + (1/3)n_2n_3^2m_1^2n_1 + (1/3)m_1n_3^2n_1n_2m_3 + \\
& (1/3)n_2n_3m_1m_2n_1^2 + (1/3)m_1n_2^2n_1n_3m_2 - (2/3)n_1^2n_3m_2^2n_2 - \\
& (1/6)m_1n_3^2m_2n_1^2 - (2/3)n_1^2n_2m_3n_3m_2 + (1/6)n_1^2m_3m_2n_3^2 + (1/6)m_3n_2^2m_2n_1^2 \\
& + (1/3)n_1^2m_3n_2n_3m_1 - (2/3)n_1^2n_2m_3^2n_3 + (1/6)n_1^2n_3^2m_2^2 + (1/6)n_1^2n_2^2m_3^2 \\
& - (2/3)n_2^2n_3^2m_1^2 + (1/3)m_2^2n_1^2n_2^2 + (1/3)m_3^2n_1^2n_3^2 + (1/3)n_2^2n_3m_1^2n_1 - \\
& (1/3)m_1n_2^2m_2n_1^2 - (1/6)n_1^2m_3m_1n_2^2 - (1/3)n_1^2m_3m_1n_3^2 - (1/6)m_1n_3^2m_3n_2^2 \\
& + (1/3)n_1n_2^2m_3^2n_3 - (1/3)m_3n_2^2m_2n_3^2 - (1/6)m_1^2n_1^2n_3n_2 + \\
& (1/3)n_1n_2m_3m_2n_3^2 - (1/6)m_3^2n_1n_3^2n_2 + \nu [+ (1/24)n_2^3n_3m_1^2 - \\
& (1/12)n_1n_2^3m_1^2 - (1/12)m_2m_3n_1^3n_2 + (1/24)n_1n_2^3m_3^2 + (1/4)n_1n_2^3m_1m_3 - \\
& (1/12)n_2^3n_3m_1m_3 - (1/3)n_1n_2^2n_3m_1m_3 + (1/6)n_1^2m_2^2n_2^2 - (1/6)n_1n_3^2m_1m_3n_2 \\
& + (1/6)n_1^2n_3m_1m_3n_2 - (1/12)n_1m_3^2n_2n_3^2 - (1/12)m_1^2n_3n_1^2n_2 + \\
& (1/6)m_2m_3n_1n_2n_3^2 + (1/6)m_1m_2n_3n_1^2n_2 - (1/12)m_1m_2n_3^3n_2 - (1/12)n_1^3m_2^2n_2 \\
& + (1/24)m_1^2n_3^3n_2 + (1/24)n_1^3m_3^2n_2 - (1/12)m_2m_3n_1^3n_3 - (1/6)m_2m_3n_1^2n_3^2 \\
& + (1/4)m_1m_2n_3^3n_1 + (1/24)n_1^3m_2^2n_3 - (1/12)n_1^2m_2^2n_3^2 - (1/12)n_1^2m_3^2n_2^2 \\
& - (1/12)m_1^2n_3^3n_1 - (1/12)n_1^3m_3^2n_3 + (1/6)n_1^2m_3^2n_3^2 - (1/12)n_1m_2^2n_2^2n_3 \\
& - (1/24)n_1^2m_2^2n_2n_3 - (1/3)m_1m_2n_3^2n_1n_2 - (1/6)m_1m_2n_3n_1n_2^2 + \\
& (1/8)n_3^2m_2^2n_1n_2 + (1/6)m_2m_3n_1n_2^2n_3 + (1/3)m_2m_3n_1^2n_2n_3 - \\
& (1/6)m_2m_3n_1^2n_2^2 - (1/12)n_2^3n_3m_3^2 - (1/12)n_3^3m_2^2n_2 + (1/8)n_1m_3^2n_2^2n_3 + \\
& (1/24)n_3^3m_2^2n_1 + (1/8)m_1^2n_3^2n_1n_2 + (1/8)m_1^2n_3n_1n_2^2 - (1/24)n_1^2m_3^2n_2n_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(7,7) = & - (2/3)n_2^3n_3 + (2/3)n_2^2n_3^2 - (2/3)n_1^3n_3 + (2/3)n_1^2n_2^2 + \\
& (2/3)n_1^2n_3^2 - (2/3)n_2n_3^3 - (2/3)n_2n_3n_1^2 + (4/3)n_2n_3^2n_1 + (1/3)n_1^4 + \\
& (1/3)n_2^4 + n_3^4 + (1/3)m_1^4 + (1/3)m_2^4 + m_3^4 - (2/3)m_2m_3^3 - (2/3)m_1^3m_3 \\
& + (2/3)m_1^2m_2^2 + (2/3)m_1^2m_3^2 - (2/3)m_2^3m_3 + (2/3)m_2^2m_3^2 - (2/3)m_1m_3^3 \\
& - (2/3)m_1^2m_2m_3 - (2/3)m_1m_3m_2^2 + (4/3)m_1m_3^2m_2 - (2/3)n_1n_3^3 - \\
& (2/3)n_1n_3n_2^2 + \mu[-(4/3)m_1n_1m_2n_3 - (4/3)m_1n_1m_3n_2 - (4/3)m_2n_2m_1n_3 - \\
& (4/3)m_2n_2m_3n_1 + (4/3)m_2n_3m_3n_1 + (4/3)m_3n_2m_1n_3 + (8/3)m_1n_1m_2n_2 - \\
& (4/3)m_1n_1^2m_3 - (4/3)m_2^2n_2n_3 - (4/3)m_2n_2^2m_3 + (4/3)m_2n_3^2m_1 + \\
& (4/3)m_3^2n_2n_1 - (4/3)m_1^2n_1n_3 + (4/3)m_1^2n_1^2 + (4/3)m_2^2n_2^2 + (4/3)m_2^2n_3^2 \\
& + (4/3)m_3^2n_2^2 + (4/3)m_1^2n_3^2 + (4/3)m_3^2n_1^2 + 4m_3^2n_3^2 - (4/3)m_3n_3^2m_1 - \\
& (4/3)m_3^2n_3n_1 - (4/3)m_3n_3^2m_2 - (4/3)m_3^2n_3n_2] + \nu[+ (2/3)m_1^2n_1^2 + \\
& (2/3)m_1^2n_2^2 + (2/3)m_2^2n_1^2 + (2/3)m_2^2n_2^2 + 2m_3^2n_3^2 - (2/3)m_2^2n_3^2 - \\
& (2/3)m_3^2n_1^2 - (2/3)m_3^2n_2^2 - (2/3)m_1m_3n_3^2 - (2/3)m_2m_3n_3^2 - \\
& (2/3)m_3^2n_1n_3 - (2/3)m_3^2n_2n_3 + (8/3)m_1m_3n_1n_3 + (4/3)m_1m_3n_2n_3 + \\
& (4/3)m_2m_3n_1n_3 + (8/3)m_2m_3n_2n_3 - (2/3)m_1^2n_3^2 - (2/3)m_1^2n_1n_3 - \\
& (2/3)m_1^2n_2n_3 - (2/3)m_1m_3n_1^2 - (2/3)m_1m_3n_2^2 - (2/3)m_2^2n_1n_3 - \\
& (2/3)m_2^2n_2n_3 - (2/3)m_2m_3n_1^2 - (2/3)m_2m_3n_2^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(7,8) = & - (1/12)m_1^2m_3^2m_2 - (1/6)m_1^4m_2 + (1/6)m_1^3m_2^2 - \\
& (1/6)m_2^3m_1^2 + (1/6)m_2^4m_1 + (1/12)m_2^3m_3^2 - (1/4)m_3^4m_2 + (1/6)m_1^3m_2m_3 \\
& - (1/6)m_2^3m_1m_3 + (1/12)m_2^2m_3^2m_1 - (2/3)n_2^3n_3m_1 + (5/12)n_2^2n_3^2m_1 + \\
& (1/6)n_1^2m_1n_2^2 + (2/3)n_1^3n_3m_2 - (5/12)n_1^2m_2n_3^2 - (1/3)n_1n_3^3m_2 - \\
& (1/6)n_2^2m_2n_1^2 + (1/12)n_2^2m_2n_3^2 + (1/4)m_3^4m_1 - (1/4)n_3^4m_2 - \\
& (1/12)m_1^3m_3^2 - (1/12)n_1^2m_1n_3^2 + (1/4)n_3^4m_1 + (1/3)n_3^3n_2m_1 + \\
& (1/3)n_1n_3^2n_2m_1 + (1/2)n_2^2n_1n_3m_2 + (1/6)n_2^4m_1 + (1/6)n_2n_3m_2n_1^2 - \\
& (1/3)n_2n_3^2n_1m_2 - (1/2)n_1^2n_2n_3m_1 - (1/6)n_1n_3m_1n_2^2 - (1/6)n_1^4m_2 + \mu[+ \\
& (2/3)m_3^2n_2^2m_1 + (1/3)m_2^2n_2m_3n_3 - (2/3)m_3^2n_3m_2n_1 + (2/3)m_3^2n_3m_1n_2 + \\
& (2/3)m_1^2n_1m_2n_2 + (1/3)m_1^2n_1m_2n_3 + (4/3)m_1n_1^2m_2m_3 - m_1^2n_1m_3n_2 - \\
& (1/3)m_1^2n_3m_2n_2 + (1/3)m_1^2n_3m_3n_2 + (1/3)m_3^2n_1m_1n_2 - (2/3)m_2^2n_2m_1n_1 - \\
& (1/3)m_2^2n_2m_1n_3 + m_2^2n_2m_3n_1 - (4/3)m_2n_2^2m_1m_3 - m_3^2n_3^2m_2 - (2/3)m_1^2n_1^2m_2 \\
& - (1/3)m_1^2n_3^2m_2 - (2/3)m_3^2n_1^2m_2 + (2/3)m_2^2n_2^2m_1 + (1/3)m_2^2n_3^2m_1 - \\
& (1/3)m_1^2n_1m_3n_3 + m_3^2n_3^2m_1 + (1/3)m_2^2n_3m_1n_1 - (1/3)m_2^2n_3m_3n_1 - \\
& (1/3)m_3^2n_2m_2n_1] + \nu[-(1/12)n_1^2m_1m_3^2 - (1/3)n_1^2m_1^2m_2 + (1/6)n_1^2m_1m_2^2 \\
& + (1/4)n_1^2m_3^2m_2 - (1/6)n_2^2m_1m_2m_3 + (1/6)n_2n_3m_1^2m_2 - (2/3)n_2n_3m_1m_2^2 + \\
& n_2n_3m_1m_2m_3 + (1/6)m_1^3n_2^2 - (1/6)m_2^3n_1^2 + (1/12)m_2^3n_3^2 + (1/3)n_2n_3m_1m_3^2 \\
& - (1/2)m_1^3n_2n_3 - (1/6)m_1^2m_3n_2^2 - (1/4)n_3^2m_1m_2^2 - (1/4)n_2^2m_1m_3^2 + \\
& (1/2)n_3^2m_1m_3^2 - (1/2)n_3^2m_3^2m_2 + (1/6)n_1^2m_1m_2m_3 + (2/3)n_1n_3m_1^2m_2 - \\
& (1/6)n_1n_3m_1m_2^2 - (1/3)n_1n_3m_3^2m_2 - n_1n_3m_1m_2m_3 - (1/6)n_2^2m_1^2m_2 + \\
& (1/3)n_2^2m_1m_2^2 + (1/12)n_2^2m_3^2m_2 + (1/4)n_3^2m_1^2m_2 - (1/12)m_1^3n_3^2 - \\
& (1/3)m_2^2m_3n_1n_3 + (1/3)m_1^2m_3n_2n_3 + (1/2)m_2^3n_1n_3 + (1/6)m_2^2m_3n_1^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(7,9) = & + (1/6)n_2^3n_1^2 - (1/6)n_2^4n_1 + (1/6)n_1^4n_2 - (1/6)n_1^3n_2^2 - \\
& (1/12)n_2^3n_3^2 + (1/6)m_1^4n_2 - (1/6)m_2^4n_1 + (1/4)m_3^4n_2 - (1/3)m_3^3m_2n_1 + \\
& (1/3)m_3^3m_1n_2 - (5/12)m_3^2n_1m_2^2 + (2/3)m_2^3m_3n_1 - (1/12)m_2^2n_2m_3^2 + \\
& (1/6)m_2^2m_1^2n_2 + (5/12)m_1^2n_2m_3^2 - (2/3)m_1^3m_3n_2 - (1/6)m_1^2n_1m_2^2 - \\
& (1/6)n_1^3n_2n_3 + (1/12)n_1^2n_2n_3^2 - (1/12)n_2^2n_3^2n_1 + (1/6)n_2^3n_3n_1 - \\
& (1/4)n_3^4n_1 + (1/3)m_2m_3^2m_1n_2 - (1/3)m_1m_3^2m_2n_1 - (1/6)m_2m_3m_1^2n_2 + \\
& (1/2)m_1^2m_2m_3n_1 + (1/4)n_3^4n_2 - (1/4)m_3^4n_1 + (1/12)m_1^2n_1m_3^2 - \\
& (1/2)m_2^2m_1m_3n_2 + (1/6)m_1m_3n_1m_2^2 + (1/12)n_1^3n_3^2 + \mu[+ (1/3)m_3^2n_1^2n_2 - \\
& (2/3)m_2^2n_3^2n_1 - (1/3)m_3^2n_2^2n_1 - (1/3)m_1n_3^2n_1m_2 - m_2n_2^2n_3m_1 - \\
& (1/3)m_1n_1^2n_2m_3 + (1/3)m_1n_1^2m_3n_3 - (2/3)m_1n_1^2m_2n_2 + m_1n_1^2n_3m_2 - \\
& (4/3)m_1^2n_1n_2n_3 + (2/3)m_1^2n_1^2n_2 - (2/3)m_2^2n_2^2n_1 - m_3^2n_3^2n_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2/3)m_1^2n_3^2n_2 - (1/3)m_3n_2^2m_1n_1 + (1/3)m_3n_1^2m_2n_2 - (1/3)m_3n_1^2n_3m_2 + \\
& (1/3)m_2n_3^2n_2m_1 + (1/3)m_3n_2^2n_3m_1 + (1/3)m_2n_2^2n_1m_3 + (2/3)m_2n_2^2m_1n_1 + \\
& (4/3)m_2^2n_2n_1n_3 + (2/3)m_3n_3^2n_2m_1 - (2/3)m_3n_3^2n_1m_2 + m_3^2n_3^2n_2 - \\
& (1/3)m_2n_2^2m_3n_3] + \nu[-m_2m_3n_1n_2n_3 - (1/6)m_2m_3n_1^2n_2 + (2/3)m_2m_3n_1n_2^2 + \\
& (1/6)m_2^2n_1n_2n_3 - (1/12)m_2^2n_2n_3^2 + m_1m_3n_1n_2n_3 - (1/3)m_2^2n_1n_2^2 + \\
& (1/3)m_1m_3n_2n_3^2 + (1/6)m_1m_3n_1n_2^2 - (1/6)m_1^2n_1n_2n_3 - (2/3)m_1m_3n_1^2n_2 + \\
& (1/3)m_1^2n_1^2n_2 - (1/6)m_1^2n_1n_2^2 - (1/12)n_2^3m_3^2 + (1/6)n_2^3m_1^2 - \\
& (1/6)n_1^3m_2^2 + (1/3)n_2^2n_3m_1m_3 - (1/3)n_1^2n_3m_2m_3 + (1/6)n_1^2n_3m_2^2 - \\
& (1/6)n_2^2n_3m_1^2 - (1/3)n_3^2m_2m_3n_1 + (1/4)n_3^2n_1m_2^2 - (1/2)n_2^3m_1m_3 + \\
& (1/2)n_1^3m_2m_3 - (1/4)m_1^2n_2n_3^2 + (1/6)m_2^2n_1^2n_2 + (1/4)m_3^2n_1n_2^2 + \\
& (1/2)m_3^2n_2n_3^2 - (1/4)m_3^2n_1^2n_2 - (1/2)n_3^2n_1m_3^2 + (1/12)n_1^3m_3^2 + \\
& (1/12)m_1^2n_1n_3^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(8,8) = & + (1/6)n_2n_3^3m_1^2 - (1/3)n_1n_3^3m_2m_1 + (1/12)m_2n_1^2m_1n_3^2 + \\
& (1/2)n_1n_3m_2m_1n_2^2 + (1/2)m_2n_1^2n_2n_3m_1 + (3/4)n_2^2n_3^2m_1^2 - (1/2)n_1^3n_3m_2^2 - \\
& (1/2)m_1^2n_2^3n_3 + (3/4)n_1^2n_3^2m_2^2 - (4/3)n_1n_3^2m_2n_2m_1 - (1/6)m_1n_2^2m_2n_1^2 + \\
& (1/12)m_1^2n_2^4 + (1/12)m_2^2n_1^4 + (1/12)m_1^2n_3^4 + (1/12)m_1n_2^2m_2n_3^2 - \\
& (1/3)n_2n_3^3m_1m_2 + (1/6)n_1n_3^3m_2^2 - (1/12)m_1n_3^4m_2 - (1/6)m_1m_2^2m_3^3 + \\
& (1/12)m_1m_2^3m_3^2 - (1/12)m_1m_3^4m_2 - (1/6)m_1^2m_3^3m_2 + (1/6)m_1^2m_3^2m_2^2 + \\
& (1/12)m_1^3m_3^2m_2 + (1/12)m_1^2m_3^4 - (1/6)m_1^3m_2^3 + (1/12)m_1^2m_2^4 + \\
& (1/12)m_1^4m_2^2 + (1/12)m_3^4m_2^2 + (1/12)m_2^2n_3^4 + \mu[-(1/3)m_1^2m_2n_3^2m_3 + \\
& (1/3)m_1m_2^2n_2m_3n_3 - m_1m_2^2n_1^2m_3 + m_1^2m_2n_1m_3n_2 + m_2^2m_3n_1m_1n_2 + \\
& (1/3)m_1^2m_2^2n_2^2 + (1/3)m_2^2m_3^2n_1n_3 - (4/3)m_2m_3^2n_1m_1n_2 - m_1^2m_3n_2^2m_2 - \\
& (2/3)m_1m_3^2n_2m_2n_3 + (1/3)m_1^2m_2^2n_1^2 + (5/6)m_2^2m_3^2n_1^2 + (5/6)m_1^2m_3^2n_2^2 - \\
& (2/3)m_1^2m_2^2n_1n_2 - (1/3)m_1m_3^2n_3^2m_2 - (1/3)m_1m_2^2n_3^2m_3 - (2/3)m_2m_3^2n_1m_1n_3 \\
& + (1/3)m_1^2m_3^2n_3n_2 + (1/3)m_1^2m_3^2n_3^2 + (1/3)m_1^2m_3n_3m_2n_1 + (1/3)m_1^2m_2^2n_3^2 \\
& + (1/3)m_2^2m_3^2n_3^2] + \nu[-(1/6)m_1^2m_2m_3n_3^2 + (1/6)m_1^2m_3^2n_3^2 + \\
& (1/3)m_1^2m_2m_3n_2n_3 + (1/3)m_1m_2^2m_3n_1n_3 - (1/3)m_1m_3^2n_1n_3m_2 - \\
& (1/12)m_1^2m_3^2n_2^2 + (1/6)m_1^2m_3^2n_2n_3 - (1/2)m_1^2m_2^2n_2n_3 + (1/2)m_1m_2^3n_1n_3 + \\
& (1/12)m_1m_3^2m_2n_1^2 - (1/6)m_1^2m_2^2n_3^2 + (1/2)m_1^3m_2n_2n_3 - (1/6)m_1^3m_2n_2^2 - \\
& (1/6)m_1m_2^3n_1^2 + (1/6)m_1^2m_2^2n_2^2 + (1/12)m_1^3m_2n_3^2 - (1/2)m_1^2m_2^2n_1n_3 + \\
& (1/6)m_1^2m_2^2n_1^2 - (1/6)m_2^2n_3^2m_1m_3 + (1/12)m_2^3n_3^2m_1 - (1/6)m_1n_3^2m_3^2m_2 - \\
& (1/3)n_2n_3m_1m_3^2m_2 + (1/12)m_1n_2^2m_3^2m_2 + (1/6)n_1n_3m_2^2m_3^2 - \\
& (1/12)m_2^2n_1^2m_3^2 + (1/6)m_2^2n_3^2m_3^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(8,9) = & - (1/12)m_2n_1^4n_2 + (1/12)m_2n_1^3n_2^2 + (1/12)m_1n_2^3n_1^2 - \\
& (1/12)m_1n_2^4n_1 + (1/6)n_1^2n_3^3m_2 + (1/24)m_2n_3^4n_1 + (1/4)m_1m_2^3m_3n_1 - \\
& (1/24)m_1^2m_2n_1m_3^2 - (1/12)m_1m_2^2n_1m_3^2 - (1/4)m_1^2m_2^2m_3n_1 - \\
& (1/4)m_1^2m_2^2m_3n_2 - (1/12)m_1^4m_2n_2 + (1/12)m_1^2m_2^3n_1 + (1/12)m_1^3m_2^2n_2 - \\
& (1/12)m_1m_2^4n_1 + (1/4)m_1^3m_2m_3n_2 - (1/24)m_1n_3^2n_1^2n_2 - (1/24)m_1n_2^3n_3^2 + \\
& (1/24)m_1n_3^4n_2 + (1/6)n_2^2n_3^3m_1 - (1/4)n_2^2n_3m_1n_1^2 + (1/4)m_2n_1^3n_2n_3 - \\
& (1/24)m_2n_1^3n_3^2 - (1/12)m_1n_2^2n_1n_3^2 + (1/4)m_1n_2^3n_1n_3 - (1/12)n_1^2n_3^2m_2n_2 \\
& - (1/4)n_1^2n_3m_2n_2^2 - (1/24)m_2n_3^2n_1n_2^2 - (1/12)m_1n_3^4n_1 - (1/12)m_1m_3^4n_1 \\
& - (1/24)m_1^3m_3^2n_2 + (1/6)m_1^2m_3^3n_2 - (1/12)m_1^2m_2m_3^2n_2 + (1/6)m_3^3m_2^2n_1 - \\
& (1/24)m_3^2m_2^3n_1 - (1/24)m_1m_2^2n_2m_3^2 + (1/24)m_1m_3^4n_2 - (1/12)m_3^4m_2n_2 + \\
& (1/24)m_3^4m_2n_1 - (1/12)m_2n_3^4n_2 + \mu[-(1/6)m_1m_3^2n_2^2n_1 + (1/3)m_1m_3^2n_2^2n_3 \\
& - (1/6)m_1m_2n_2^2m_3n_3 - (1/6)m_2^2m_3n_3n_1n_2 - (1/6)m_2m_3^2n_1^2n_2 - \\
& (1/3)m_2m_3^2n_3^2n_2 + (1/3)m_2^2m_3n_3^2n_1 - (1/2)m_1^2m_3n_2^2n_1 + (2/3)m_1^2m_3n_2^2n_3 \\
& + (1/2)m_1m_3n_2^2m_2n_1 - (1/2)m_1^2m_2n_2^2n_3 - (1/3)m_1m_2^2n_2^2n_1 - \\
& (1/3)m_1^2m_2n_1^2n_2 - (1/2)m_1m_2^2n_1^2n_3 + (1/3)m_1^2m_2n_2^2n_1 + (1/3)m_1m_2^2n_1^2n_2 \\
& - (1/6)m_1^2m_2n_3^2n_2 - (1/6)m_1m_2^2n_3^2n_1 + (1/2)m_1m_2^2n_3n_1n_2 + \\
& (1/2)m_2m_3n_1^2m_1n_2 - (4/3)m_2m_3n_1n_2n_3m_1 + (1/2)m_1^2m_2n_3n_2n_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2/3)m_2^2m_3n_1^2n_3 - (1/2)m_2^2m_3n_1^2n_2 - (1/6)m_1^2m_3n_3n_2n_1 + (1/3)m_1^2m_3n_3^2n_2 \\
& + (1/6)m_2m_3^2n_3^2n_1 - (1/3)m_1m_3^2n_3^2n_1 - (1/6)m_1m_2n_1^2m_3n_3 + \\
& (1/3)m_2m_3^2n_1^2n_3 + (1/6)m_1m_3^2n_3^2n_2] + v[+ (1/12)m_1^2m_2n_1n_2^2 + \\
& (1/12)m_1m_2^2n_1n_3^2 + (1/12)m_1m_2^2n_1^2n_2 + (1/4)m_1m_2^2n_1n_2n_3 - \\
& (1/24)m_1^2m_2n_1n_3^2 - (1/6)m_1^2m_2n_1^2n_2 + (1/4)m_1^2m_2n_1n_2n_3 + \\
& (1/6)n_1^2n_3m_2m_3^2 + (2/3)n_2^2n_3m_1^2m_3 + (2/3)n_1^2n_3m_2^2m_3 - (1/4)m_2^2n_1^3m_3 - \\
& (1/4)n_1^2n_3m_2^3 - (1/4)n_2^2n_3m_1^3 - (1/4)m_1^2n_2^3m_3 - (1/24)m_2n_1^3m_3^2 + \\
& (1/12)m_2^3n_1^3 + (1/12)m_1^3n_2^3 - (1/24)m_1m_2^2n_2n_3^2 + (1/12)m_1m_3^2n_2n_3^2 + \\
& (1/12)m_1m_3^2n_1n_2^2 + (1/12)m_1^2m_2n_2n_3^2 + (1/4)m_1m_2m_3n_1^2n_2 - 2m_1m_2m_3n_1n_2n_3 \\
& + (1/4)m_1m_2m_3n_1n_2^2 + (1/12)m_3^2m_2n_1n_3^2 + (1/12)m_3^2m_2n_1^2n_2 - \\
& (1/24)m_3^2m_2n_1n_2^2 - (1/6)m_1m_2^2n_1n_2^2 - (1/24)m_1m_3^2n_1^2n_2 - \\
& (1/6)m_1n_3^2n_1m_3^2 + (1/6)m_1^2n_3^2m_3n_2 - (1/24)m_1^3n_3^2n_2 - (1/24)m_1n_2^3m_3^2 + \\
& (1/6)n_2^2n_3m_1m_3^2 + (1/6)m_2^2n_3^2m_3n_1 - (1/24)m_2^3n_3^2n_1 - (1/6)m_2n_3^2n_2m_3^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(9,9) = & - (1/2)m_1^3n_2^2m_3 - (1/6)m_1^2m_2^2n_1n_2 + (1/2)m_1^2m_2n_1m_3n_2 + \\
& (1/2)m_2^2m_3n_1m_1n_2 - (4/3)m_2m_3^2n_1m_1n_2 + (3/4)m_1^2m_3^2n_2^2 + (3/4)m_2^2m_3^2n_1^2 \\
& + (1/12)n_1^2n_3^4 + (1/12)n_1^3n_2n_3^2 - (1/6)n_1^2n_3^3n_2 + (1/6)n_1^2n_2^2n_3^2 + \\
& (1/12)n_1n_2^3n_3^2 - (1/6)n_2^2n_3^3n_1 + (1/6)n_2^2m_3^3m_1 - (1/3)n_2m_3^3m_2n_1 + \\
& (1/12)m_1^4n_2^2 + (1/12)n_1^2m_2^4 + (1/12)n_2^2m_3^4 + (1/12)n_1^4n_2^2 - \\
& (1/6)n_1^3n_2^3 + (1/12)n_1^2n_2^4 + (1/12)n_2^2n_3^4 - (1/2)n_1^2m_2^3m_3 + \\
& (1/12)n_1^2m_3^4 + (1/12)m_1^2n_2n_1m_3^2 - (1/3)m_1m_3^3n_2n_1 - (1/12)n_2n_3^4n_1 + \\
& (1/6)m_2m_3^3n_1^2 - (1/12)n_1m_3^4n_2 + (1/12)n_1m_2^2n_2m_3^2 + \mu[- \\
& (2/3)m_1n_2^2m_2n_1^2 - m_1^2n_2^2n_1n_3 + m_2n_1^2n_2n_3m_1 + n_1n_3m_2m_1n_2^2 + \\
& (1/3)n_2^2n_3^2m_1m_3 - (4/3)n_1n_3^2m_2n_2m_1 - n_1^2n_3m_2^2n_2 - (2/3)n_1n_3^2m_2m_3n_2 + \\
& (1/3)m_2n_1n_2^2m_3n_3 - (2/3)n_2n_3^2m_1m_3n_1 - (1/3)n_1^2n_2m_3^2n_3 + \\
& (1/3)m_3n_1^2n_3^2m_2 + (1/3)m_3n_1^2n_3m_1n_2 + (1/3)n_1^2n_2^2m_3^2 + (1/3)m_3^2n_1^2n_3^2 + \\
& (1/3)m_3^2n_2^2n_3^2 - (1/3)m_3^2n_1n_3^2n_2 - (1/3)n_1n_2^2m_3^2n_3 + (1/3)m_1^2n_2^2n_1^2 + \\
& (5/6)n_2^2n_3^2m_1^2 + (5/6)n_1^2n_3^2m_2^2 + (1/3)m_2^2n_1^2n_2^2] + v[- (1/12)n_1^2m_2^2n_3^2 \\
& + (1/12)n_1^3m_3^2n_2 + (1/12)m_1^2n_2n_1n_3^2 - (1/3)m_1m_3n_2n_1n_3^2 + \\
& (1/6)m_2m_3n_1^2n_3^2 - (1/2)n_1^2n_2^2m_1m_3 + (1/2)n_1^3n_2m_2m_3 + (1/2)n_1n_2^3m_1m_3 - \\
& (1/2)n_1^2n_2^2m_2m_3 + (1/12)n_2n_3^2n_1m_2^2 + (1/6)n_2^2n_3^2m_1m_3 - \\
& (1/3)n_2n_3^2m_2m_3n_1 + (1/3)n_1n_2^2n_3m_1m_3 - (1/6)n_1n_2^2n_3m_3^2 + \\
& (1/3)n_1^2n_2n_3m_2m_3 + (1/6)n_1^2n_2^2m_1^2 - (1/6)n_1^3n_2m_2^2 - (1/6)n_1^2n_2^2m_3^2 - \\
& (1/6)n_1n_2^3m_1^2 + (1/6)n_1^2n_2^2m_2^2 + (1/12)n_1n_2^3m_3^2 - (1/12)n_2^2n_3^2m_1^2 + \\
& (1/6)n_2^2n_3^2m_3^2 - (1/6)n_2m_3^2n_1n_3^2 - (1/6)n_1^2m_3^2n_2n_3 + (1/6)n_1^2m_3^2n_3^2]
\end{aligned}$$