



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

**O MOVIMENTO DE CONSTITUIÇÃO DO
CONHECIMENTO EM GEOMETRIA DESCRITIVA
COM REALIDADE AUMENTADA**

Raissa Samara Sampaio

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

RAISSA SAMARA SAMPAIO

**O MOVIMENTO DE CONSTITUIÇÃO DO CONHECIMENTO
EM GEOMETRIA DESCRITIVA COM REALIDADE
AUMENTADA**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Unesp, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rosa Monteiro Paulo

Rio Claro – SP
2025

S192m	<p>Sampaio, Raissa Samara</p> <p>O movimento de constituição do conhecimento em geometria descritiva com realidade aumentada / Raissa Samara Sampaio. -- Rio Claro, 2025</p> <p>153 p.</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro</p> <p>Orientadora: Rosa Monteiro Paulo</p> <p>1. Fenomenologia. 2. Educação Matemática. 3. GeoGebra AR. 4. Formação de Professores. I. Título.</p>
-------	--

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

A pesquisa amplia o conhecimento sobre o ensino de Geometria Descritiva com Realidade Aumentada, impulsionando novas investigações e inovações didáticas. Socialmente, torna o ensino mais acessível e inclusivo. Economicamente, reduz a evasão e otimiza investimentos. Alinhada aos ODS 4, 9 e 10, democratiza o acesso à tecnologia educacional e fortalece a formação para os desafios futuros.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

The research expands knowledge about teaching Descriptive Geometry with Augmented Reality, driving new research and teaching innovations. Socially, it makes education more accessible and inclusive. Economically, it reduces dropout rates and optimizes investments. Aligned with SDGs 4, 9 and 10, it democratizes access to educational technology and strengthens training for future challenges.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

RAISSA SAMARA SAMPAIO

**O MOVIMENTO DE CONSTITUIÇÃO DO CONHECIMENTO EM GEOMETRIA
DESCRITIVA COM REALIDADE AUMENTADA**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof(a). Dr(a). Rosa Monteiro Paulo - Orientador(a)
FEG/UNESP/Guaratinguetá (SP)

Prof(a). Dr(a). Rúbia Barcelos Amaral Schio
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof(a). Dr(a). José Milton Lopes Pinheiro
CCENT/UEMASUL/Imperatriz (MA)

Prof(a). Dr(a). Marli Regina dos Santos
UFOP/Ouro Preto (MG)

Prof(a). Dr(a). Rony Cláudio de Oliveira Freitas
IFES/Vitória (ES)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro/SP, de 20 de fevereiro de 2025

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, Aquele que me orientou, me deu saúde e prudência em meus passos. Foi Nele que busquei força e discernimento durante a minha caminhada, obrigada;

à Professora Dra Rosa Monteiro Paulo, com quem tenho imensa gratidão e, muito além de ser somente orientadora, foi um exemplo de profissional e pessoa. Sua sabedoria me inspira e está presente em cada conselho/orientação. Para ela, meu muito obrigada;

aos professores José Milton Lopes Pinheiro, Marli Regina dos Santos, Rony Cláudio de Oliveira Freitas e Rúbia Barcelos Amaral por todas as contribuições e por todo cuidado e atenção na leitura realizada, obrigada;

em memória dos meus pais, Elisabeth e Numa, cujos ensinamentos e exemplos foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. A saudade que sinto de vocês é diária. Sou imensamente grata, sobretudo, por todo o amor com que fui cercada ao longo da vida;

à minha família, meu marido Marcos Vinicius, minha irmã Raiane e meu filho Bento, que estão sempre ao meu lado, me apoiando, dando suporte e muito amor. Sem vocês nada seria de mim, muito obrigada;

aos amigos Michael, Valeria, Victor, Gabriel e Douglas, expresso minha profunda gratidão pelo incentivo constante e pelo apoio inestimável ao longo desta jornada, obrigada;

ao grupo Mini Trip – amigas Vanessa, Ingrid e Laís – pela amizade. Essa caminhada do doutorado não seria a mesma sem vocês! Agradeço a partilha, ombros de amparo, as ajudas, as conversas e os congressos compartilhados, obrigada;

aos colegas, professores e amigos de Rio Claro, em especial, Anderson, Carolina, Juliana, Nathalia e Fábio, que me acolheram fortemente e estavam presentes em momentos tão especiais, obrigada;

às minhas primas Nathalia e Natanne, expresso minha sincera gratidão pelo auxílio dedicado durante o longo e desafiador processo de transcrição, muito obrigada;

aos meus colegas e amigos do Instituto São José, em especial à equipe da Matemática. Por esse colégio que se tornou parte daquilo que chamo de lar, obrigada;

a universidade participante do projeto de pesquisa e todos os alunos envolvidos. Esse projeto é de vocês, obrigada;

por fim, expresso minha gratidão aos desafios enfrentados ao longo da vida, os quais contribuíram para a minha resiliência e determinação. Sem essas características, não teria alcançado o meu objetivo.

“Aquele que leva a preciosa semente, andando e chorando, voltará sem dúvida com alegria, trazendo consigo os seus feixes.”
Salmo 126:6

RESUMO

Neste texto apresenta-se a pesquisa desenvolvida na sala de aula, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado de São Paulo, na disciplina Desenho Geométrico e Geometria Descritiva (DGGD). As tarefas realizadas pelos alunos envolveram temas relativos aos tópicos de Geometria Descritiva presentes na ementa do curso. Na pesquisa, o objetivo é entender a compreensão do aluno acerca desses temas quando realizam investigações com a Realidade Aumentada (RA). Para elaborar e desenvolver as tarefas, bem como analisar os dados na pesquisa, assume-se uma postura fenomenológica. Para a tese foi realizada uma revisão teórica sobre a RA e tarefas exploratórias com a qual se pôde entender sua relevância para o ensino de Geometria. Considerando-se o compreendido nessas leituras foram elaboradas as tarefas para a investigação com o aplicativo GeoGebra AR. Essas tarefas foram realizadas pelos alunos durante os 8 encontros que ocorriam às quartas-feiras no período noturno. Utilizaram-se os iPads da universidade que tinham o aplicativo instalado e possibilitavam gravar a tela e o áudio durante as explorações. Essas gravações foram transcritas e constituíram os dados de análise da pesquisa. A análise foi feita seguindo o rigor da pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica e levando em consideração a pergunta orientadora da pesquisa: *Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?* No movimento interpretativo três categorias de análise foram evidenciadas. Estas, ao serem discutidas, permitem dizer dos modos pelos quais os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com-RA. As categorias são: *Processo investigativo com-a-RA*, *Abertura ao estar-com-RA* e *Movimento do Corpo-vivente com-RA*. Com elas podem-se dizer que o processo investigativo com-a-Realidade-Aumentada possibilita compreensões em decorrência da abertura do aluno ao estar-com-RA, pois este aluno é corpo-vivente que, ao estar-com o objeto em movimento com-RA, se dispõe a compreendê-lo.

Palavras-chave: Fenomenologia. Educação Matemática. GeoGebra AR. Formação de Professores.

ABSTRACT

This text presents the research developed in the classroom with students of the Mathematics Degree course at a public university in the state of São Paulo, in the Geometric Drawing and Descriptive Geometry (DGGD) discipline. The tasks performed by the students involved themes related to the Descriptive Geometry topics present in the course syllabus. The research objective is to understand the students' understanding of these themes when they conduct investigations with Augmented Reality (AR). To design and develop the tasks, as well as to analyze the data in the research, a phenomenological approach was assumed. For the thesis, a theoretical review of AR and exploratory tasks were carried out with which it was possible to understand their relevance for the teaching of Geometry. Considering what was understood in these readings, the tasks for the investigation with the GeoGebra AR application were developed. These tasks were performed by the students during the 8 meetings that took place on Wednesday evenings. The university iPads were used, which had the application installed and allowed them to record the screen and audio during the explorations. These recordings were transcribed and constituted the data for the analysis of the research. The analysis was carried out following the rigor of qualitative research with a phenomenological approach and considering the guiding question of the research: How do students understand Descriptive Geometry when exploring with Augmented Reality? In the interpretative movement, three categories of analysis were highlighted. When discussed, these allow us to speak of the ways in which students understand Descriptive Geometry when exploring with AR. The categories are: Investigative process with-AR, Openness to being with-AR, and Movement of the living-body with-AR. With them, it can be said that the investigative process with Augmented Reality enables understanding as a result of the student's openness to being-with-AR, as this student is a living body that, when being-with the object in movement with-AR, is willing to understand it.

Keywords: Phenomenology. Mathematical Education. GeoGebra AR. Teacher Training.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Head-mounted display desenvolvido por Ivan Sutherland	23
Figura 2 – Representação de um sólido pelo HyperCAL3D AR	24
Figura 3 – Realidade Virtual	24
Figura 4 – Realidade Virtual	24
Figura 5 – HoloLens 2 com QR Code para acesso ao site	26
Figura 6 – Meta Quest Pro com QR Code para acesso ao site	27
Figura 7 – Vision Pro com QR Code para acesso ao vídeo.....	28
Figura 8 – Pokémon Go.....	28
Figura 9 – Aparelho localizador de veias com QR Code para acesso ao site.....	29
Figura 10 – Representação do conceito de épura	48
Figura 11 – Cartões marcadores reconfiguráveis em ambientes de Realidade Aumentada	50
Figura 12 – VSTARGD	50
Figura 13 – Exemplo das vistas do IsoMetrik	61
Figura 14 – QR Code I	62
Figura 15 – QR Code II	63
Figura 16 – QR Code III.....	64
Figura 17 – QR Code IV.....	66
Figura 18 – Movimento realizado com a RA	101
Figura 19 – Movimento realizado com a RA	102
Figura 20 – Localização do ponto A em 3D (Sistema Mongeano)	103
Figura 21 – Localização do ponto A em RA (Sistema Cartesiano)	104
Figura 22 – QR Code com a fala de Charles Darwin E2T1	106
Figura 23 – QR Code com a fala de Mary Jackson E2T1	107
Figura 24 – QR Code com a fala de Isaac Newton E4T4.....	108
Figura 25 – QR Code com o GIF do movimento realizado por Ada Lovelace E2T1	111
Figura 26 – QR Code com o áudio da fala de Galileu Galilei E2T1	112
Figura 27 – Construção do círculo no GeoGebra 3D	126
Figura 28 – Construção do ponto externo ao círculo no GeoGebra 3D	127
Figura 29 – Construção do círculo gerado pela interseção dos pontos no plano no GeoGebra 3D	128
Figura 30 – Projeção dos círculos em RA no GeoGebra AR	128
Figura 31 – Construção de um polígono no GeoGebra 3D	129

Figura 32 – Construção do polígono gerado pela interseção dos pontos no plano no GeoGebra 3D	130
Figura 33 – Projeção dos polígonos em RA no GeoGebra AR	131
Figura 34 – Diedros	132
Figura 35 – Superfície em Realidade Aumentada	133
Figura 36 – Visualização nos diedros	135
Figura 37 – 1°, 2°, 3° e 4° diedros	137
Figura 38 – Vistas ortográficas	139
Figura 39 – Aplicação de linhas em desenhos	141
Figura 40 – Vistas ortográficas	142
Figura 41 – Atividade GeoGebra	142

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Análise Ideográfica dos dados das transcrições	70
Quadro 2 – Análise Ideográfica dos dados do Formulário	89
Quadro 3 – Convergências	95
Quadro 4 – Categorias Abertas	99

LISTA DE SIGLAS

2D – 2 Dimensões

3D – 3 Dimensões

AR – Augmented Reality

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

DGGD – Desenho Geométrico e Geometria Descritiva

GD – Geometria Dinâmica

FEM – Grupo de pesquisa Fenomenologia em Educação Matemática

ODS - Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

RA – Realidade Aumentada

SENAI – Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
2. SEÇÃO I – REALIDADE AUMENTADA: O SER-COM-RA.	19
2.1 Um olhar para as tecnologias digitais	19
2.2 Realidade Aumentada	22
2.3 RA e o corpo-vivente.....	30
3. SEÇÃO II – O ENSINO DE GEOMETRIA	37
3.1 Compreensões acerca da Geometria	37
3.2 Constituição do conhecimento geométrico	42
3.3 Geometria Descritiva	46
3.4 Geometria com RA.....	49
4. SEÇÃO III – METODOLOGIA DE PESQUISA	53
4.1 Pesquisa qualitativa	53
4.2 A abordagem fenomenológica	55
4.3 A vivência com os alunos da Licenciatura em Matemática.	59
4.3.1 PRIMEIRO ENCONTRO.....	60
4.3.2 SEGUNDO ENCONTRO	62
4.3.3 TERCEIRO ENCONTRO.....	62
4.3.4 QUARTO ENCONTRO.....	64
4.3.5 QUINTO ENCONTRO	65
4.3.6 SEXTO ENCONTRO.....	65
4.3.7 SÉTIMO ENCONTRO.....	66
4.3.8 OITAVO ENCONTRO	67
5. SEÇÃO IV – UM OLHAR PARA OS DADOS DA PESQUISA	69
5.1 Expondo o movimento de análise fenomenológica	69
6. SEÇÃO V – DISCUSSÃO DAS CATEGORIAS ABERTAS	100
6.1 Processo investigativo com-a-Realidade-Aumentada.....	100
6.2 Abertura ao estar-com-RA.....	105
6.3 Movimento do Corpo-vivente com-RA	110
7. CONSIDERAÇÕES SOBRE O INVESTIGADO	116
REFERÊNCIAS	120
APÊNDICE A	126
APÊNDICE B	132
APÊNDICE C	135
APÊNDICE D	137
APÊNDICE E	139
APÊNDICE F	141
APÊNDICE G	143
APÊNDICE H	147
APÊNDICE I	151

1. INTRODUÇÃO

Iniciarei esta pesquisa optando pela primeira pessoa do singular para apresentar minha trajetória acadêmica e as escolhas que me conduziram até aqui, permitindo ao leitor conhecer a pesquisadora deste estudo. Um ano (e apenas um ano) foi o período que havia “me dado de descanso” entre o fim do mestrado e o início do doutorado. Terminei o mestrado em 2018 e pretendia voltar em 2020. Ao final de 2019 me questionei sobre o sentido de realizar um doutorado e, para aquele momento, não havia encontrado. Veio a pandemia em 2020 e a vida tornou-se ficar trancada em casa e permanecer conectada para trabalhar e manter os relacionamentos entre familiares e amigos de forma online.

A vida do professor online exigiu que nos reinventássemos. Como ensinar de modo que tivesse significado ao aluno? Como chamar esse aluno para ser presente e não apenas um nome online? Foi com essas interrogações que eu buscava maneiras de transformar minha aula e tentar que os alunos fossem mais ativos.

Em 2020 estava com aulas de Geometria para turmas do 6º ano do ensino fundamental. Trabalhava em uma escola privada e todos os alunos tinham um iPad disponível para seus estudos. Fui trabalhar com eles o tema Sólidos Geométricos e pensei: “Vou usar todos os recursos disponíveis”. Pedi para que os alunos fizessem o *download* do GeoGebra AR em seus aparelhos e, na aula sobre sólidos, os projetamos em Realidade Aumentada (RA). Essa foi a aula com maior interação que tive em tempos de ensino remotos e as reflexões sobre o ensino com tecnologias ressurgiram. E se eu estudasse mais a RA? Quais são os trabalhos que exploram as potencialidades da RA? O que mais eu poderia explorar com a RA?

Meu “tempo de descanso” acabara. As indagações e reflexões me movimentaram e iniciei a escrita do projeto de doutorado. O desejo de trabalhar com alunos mais velhos me levou a optar pela graduação. Esse desejo veio da própria experiência vivida, já que em minhas pesquisas anteriores, tanto para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) quanto para a dissertação de mestrado, trabalhei com alunos do ensino fundamental. Como seria trabalhar com alunos da graduação? O interesse em RA surgiu, como mencionei, dessa exploração durante a pandemia. Comecei a olhar para os trabalhos dos próprios integrantes do grupo de pesquisa Fenomenologia em Educação Matemática (FEM) do qual faço parte, bem como para outros que fui encontrando no levantamento que fazia para a elaboração do projeto.

Após me familiarizar com alguns trabalhos que envolviam a RA para o ensino de Matemática e considerar minha afeição por Geometria, defini a disciplina do curso de Licenciatura em Matemática com a qual gostaria de trabalhar: a Geometria Descritiva. Dentre

as muitas reflexões e interrogações que se faziam (e permaneceram) presentes, hoje a pergunta que melhor expõe a intenção interrogativa pode ser assim enunciada: *Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?*

Tendo definido a disciplina e os alunos com os quais gostaria de fazer a investigação reafirma-se a opção metodológica: conduzir a pesquisa segundo uma abordagem fenomenológica, pois ela possibilita a busca pela compreensão de características de determinado fenômeno que, em nossa pesquisa, é a compreensão da Geometria Descritiva ao estar-com-RA. Nessa abordagem, toda ação é orientada por uma interrogação que permeia o percurso investigativo, sendo constantemente revisitada para que se possa atribuir significado aos dados constituídos (no percurso da pesquisa).

Com a interrogação posso explicitar o modo pelo qual entendo o ensino de Geometria com tecnologias, agora não mais sozinha, mas em comunhão com os outros com quem estabeleço diálogo: autores lidos, orientadora, colegas do FEM, etc. Isso me leva a, deste ponto do texto, mudar o “eu” por “nós”, embora mesmo quando traço minha trajetória entenda que há “outros” que comigo estiveram presentes influenciando-a.

De modo geral posso dizer que, para o doutorado, nos propusemos a desenvolver um trabalho com alunos da Licenciatura em Matemática de uma universidade pública paulista, na disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva (DGGD). Os temas tratados com os alunos, eleitos em consonância com a ementa do curso, requereram 8 encontros de 100 minutos cada. Em todos eles as tarefas visavam explorar conceitos de Geometria Descritiva com a RA no software GeoGebra Calculadora 3D. Foram disponibilizados aos alunos 8 iPads da Universidade que haviam sido adquiridos com recursos provenientes de um projeto financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)¹. As tarefas foram disponibilizadas aos alunos por meio do Google Classroom, sendo acessadas com o suporte da conexão à internet disponibilizada pela universidade.

Neste texto, para expor o que na pesquisa foi feito, organizamos 5 seções seguidas das referências bibliográficas e apêndices.

Na [Seção I – REALIDADE AUMENTADA: O SER-COM-RA](#) apresentamos as leituras sobre tecnologias digitais trazendo a nossa concepção da tecnologia de RA e o trabalho com ela no ambiente escolar. Entendemos que a RA “possibilita ao seu usuário grande liberdade para interagir, já que por meio da composição entre objetos virtuais e mundanos, podemos

¹ Processo 2019/16799-4, “A constituição do conhecimento matemático com Realidade Aumentada” (2019-2022) coordenado pela Profa. Dra. Rosa Monteiro Paulo.

“tocar”, circundar e visualizar os objetos em um ambiente 3D” (Schuster; Rosa, 2021, p. 132). Com base nos autores, compreendemos que o “tocar” em RA não se refere ao contato físico, mas sim à visualização “de maneira sobreposta, de modo que possamos manipular o objeto virtual utilizando o nosso corpo biologicamente encarnado, mas sem a possibilidade de descrever a textura do que tocamos.” (Schuster; Rosa, 2021, p. 132).

Rosa (2017, p. 160) ressalta que o uso dessa tecnologia em sala de aula pode “fornecer o feedback da ação tátil, do movimento, do modo de participação do envolvido no processo de estudo, de produção de conhecimento matemático com RA”. Assim, a RA nos proporciona um amplo conjunto de possibilidades a serem exploradas e analisadas no contexto da constituição do conhecimento.

Neste capítulo, expomos nossa forma de ver essa tecnologia, alguns recursos oferecidos e nossa compreensão sobre a postura fenomenológica assumida nesta pesquisa.

Na [Seção II – O ENSINO DE GEOMETRIA](#) apresentamos nossa compreensão acerca da constituição do conhecimento, trazendo um contexto histórico da Geometria Descritiva. No ensino de Geometria, é possível realizar uma análise reflexiva sobre as expressões dos alunos. A partir de suas expressões, pode-se compreender a constituição de conhecimento deles ao realizarem investigações. “Compreendemos que dar-se conta da própria ação, da análise dessa ação em expressões intencionais de quem as atualiza, nos modos de ser realizada e nos desdobramentos e reflexões do realizado se configura em uma ‘forma/ação’” (Bicudo; Mocrosky; Orłowski, 2022, p. 96). As ações realizadas pelos alunos ao fazer explorações com RA dão forma ao modo de compreender.

Uma característica destacada por Bicudo, Mocrosky e Orłowski sobre a forma/ação e que nos chama a atenção, é o modo de realizar-se sendo, ou seja, elas dizem que o professor torna-se professor ensinando/aprendendo, entrelaçando-se em um movimento de intencionalidade. Entendemos que o aluno, ao estar-com a RA, se coloca em um movimento intencional que o leva à ação que vai dando forma ao modo de compreender Geometria Descritiva. Nesse sentido, suas ações vão dando forma ao modo de conhecer a Geometria.

Disso destaca-se que nossa atenção na pesquisa volta-se para a expressão do aluno ao estudar Geometria Descritiva, um ramo da Matemática que possibilita explorações visando modos de ser produzida e analisada criticamente, assim como

a Matemática [...] visa os seus modos de proceder, de ser constituída e produzida, bem como à análise crítica e reflexiva do que diz e faz no âmbito da ciência e da tecnologia do mundo todo, presente em diferentes culturas; do que diz da vida do ser humano; de como está presente em outras culturas, tendo em vista não tomá-la como onisciente e universalmente válida para toda e qualquer questão da realidade mundana, porém tão

somente como um modo de lidar e tratar com essa realidade. (Bicudo; Mocrosky; Orłowski, 2022, p. 95)

Com isso compreende-se que “a investigação faz sentido no entrelaçar das formas e ações em atos atualizadores do agir reflexivo” (Bicudo; Mocrosky; Orłowski, 2022, p. 96) abrindo espaço à constituição de conhecimento com tecnologia.

Ao final dessa seção discutimos alguns estudos já realizados acerca do ensino e da aprendizagem de Geometria e de Realidade Aumentada.

Na [Seção III – METODOLOGIA DE PESQUISA](#) detalhamos a pesquisa qualitativa na abordagem fenomenológica. Trazemos a postura assumida na pesquisa e os procedimentos para a análise dos dados. A postura fenomenológica

revela um modo de ser pessoa preocupada com a outra, ouvindo-a e respondendo ao que ouve, respeitosamente. Estar preocupado com o outro é um modo pelo qual o cuidado se manifesta. Cuidar é estar atento, fazendo-se presente ao outro, apontando caminhos visualizados, colocando uma questão indagadora sobre o que está sendo enfrentado como uma disputa, ou problema, de modo a alavancar mais compreensões e reflexões. (Bicudo, 2020b, p.106)

Nesse sentido, a postura fenomenológica é assumida na condução da pesquisa, sempre atentos, preocupados com o aluno, cuidando para que a compreensão seja possível. Ainda, nesta seção detalhamos cada encontro realizado, apresentando as tarefas realizadas durante a pesquisa e o seu objetivo.

Na [Seção IV – UM OLHAR PARA OS DADOS DA PESQUISA](#) iniciamos a análise fenomenológica dos dados da pesquisa, oriundos da transcrição dos encontros com os alunos. A análise fenomenológica envolve dois movimentos: o da análise ideográfica e o da nomotética. Optamos pela sua apresentação em quadros, procurando expor o movimento realizado para expor e interpretar as categorias abertas, entendidas como as regiões de generalidades que possibilitam ao pesquisador explicitar sua compreensão acerca do interrogado.

Na [Seção V – DISCUSSÃO DAS CATEGORIAS ABERTAS](#) discutimos as três categorias identificadas em nossa pesquisa: “*Processo investigativo com a Realidade Aumentada*”, “Abertura ao estar-com-RA” e “**Movimento do Corpo-vivente com-RA**”. O propósito desta seção é estabelecer um diálogo entre as falas dos alunos e os referenciais teóricos que fundamentaram o estudo para expor a compreensão do interrogado.

Finalizamos o texto com as [Referências](#), apresentando os autores cujas contribuições foram significativas para as ideias discutidas neste documento, juntamente com os [Apêndices](#),

que incluem o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (conforme modelo do Comitê de Ética na Pesquisa²), as tarefas realizadas em sala e as listas de exercícios sugeridas aos alunos.

² Comitê de Ética da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Unesp, Instituto de Biociências de Rio Claro. O projeto foi aprovado e emitido o Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE) com o número 46972721.2.0000.5465.

2. SEÇÃO I – REALIDADE AUMENTADA: O SER-COM-RA.

Nesta seção explicitamos concepções de Tecnologias Digitais (TD)³ e seu papel na sala de aula considerando o que se mostra na literatura. Para tanto, fizemos uma revisão bibliográfica considerando os artigos publicados em periódicos nacionais e internacionais, livros, teses e dissertações. Traçamos um percurso da evolução das TD ao longo do tempo até a Realidade Aumentada (RA) - uma tecnologia que despertou o nosso interesse e motivou o início da nossa investigação. Inicialmente, abordamos a RA sob a perspectiva trazida pelos autores que tratam dessa tecnologia e, ao final, apresentamos nossa compreensão explicitando as ações do sujeito em relação a essa tecnologia em uma perspectiva fenomenológica.

2.1 Um olhar para as tecnologias digitais

O progresso tecnológico é evidente na sociedade contemporânea. “A crescente disseminação do uso de tecnologias móveis, smartphones e tablets consolida-os como alguns dos principais recursos para entretenimento e comunicação usados no mundo atual.” (Mousa; Ymai; Camargo, 2017, p. 53), além das potencialidades de uso como ferramenta de ensino e aprendizagem dos dispositivos móveis, como também é destacado pelos autores. A relevância do trabalho com tecnologias no contexto educacional já vem sendo discutida por diversos autores, bem como está presente em documentos curriculares desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e, mais recentemente, na Base Curricular Nacional Comum (BNCC). Nesse documento ressalta-se que o conhecimento tem sido transformado ao longo do tempo e a tecnologia é um dos principais fatores que influencia esse processo.

Em 2001, Borba e Penteado (2001) já abordavam a temática do emprego de computadores no ambiente educacional. Esses autores defendiam que o acesso à informática deveria ser considerado um direito dos alunos. No entanto, é importante ressaltar que o mero uso da informática não pode ser considerado um avanço na área da educação. O foco deve estar na finalidade com a qual essa tecnologia é inserida em sala de aula. A inclusão das TD na educação amplia opções, mas compete ao professor explorá-las, buscando uma abordagem de ensino que incentive a autonomia do estudante ao investigar.

³ Destaca-se que, neste texto, se opta por utilizar a sigla TD para as Tecnologias Digitais em vez de TIC (Tecnologias de Informação e Comunicação) ou TDIC (Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação). Essa opção se dá por entendermos que a sigla TD abrange tanto as TIC quanto as TDIC, visto que uma tecnologia digital, por sua natureza, já possui capacidade intrínseca de informação e comunicação propiciando a inter-relação com o usuário durante o processo de interação com a tecnologia.

As TD englobam uma diversidade de recursos e ferramentas digitais, incluindo softwares educacionais, aplicativos móveis, plataformas de aprendizagem online e dispositivos interativos. Essas tecnologias permitem que os alunos explorem conceitos de maneira visual e dinâmica, requerendo uma abordagem pedagógica que enfatize o desenvolvimento de habilidades digitais essenciais para a era atual.

Borba, Silva e Gadanidis (2015) trazem as fases das TD e apontam, na Educação Matemática, o uso de softwares de Geometria dinâmica a partir do que eles consideram a segunda fase das tecnologias, que se iniciou na primeira metade dos anos 1990. Para os autores, “em Geometria dinâmica (GD), o dinamismo pode ser atribuído às possibilidades em podermos utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação.” (Borba; Silva; Gadanidis, 2015, p. 23). Alguns softwares destacados como relevantes para o ensino de Matemática na época eram o Winplot, Fun, Graphmathica, Cabri Géomètre, Geometricks e Maple, sendo para GD o Cabri Géomètre e o Geometricks.

A utilização desses softwares em sala de aula diferenciou a construção geométrica e o desenho, dando destaque para a construção dinâmica através das TD cujas ferramentas permitiram enfatizar as características do objeto em estudo. Por exemplo, com as TD se tornou possível mover os vértices de um paralelepípedo para ver que o paralelismo dos lados se mantém, ou construir um retângulo com lados congruentes para que, ao mover seus vértices, deixasse de ser congruentes. Tarefas como essas permitem que o aluno possa entender que todos os quadrados são retângulos, mas nem todos os retângulos são quadrados.

Com isso, o indivíduo que está envolvido na análise do objeto é capaz de pensar-com-a-tecnologia, buscando “evidenciar que a produção de conhecimento não acontece somente internamente ao ser humano, assim como, não ocorre em relações sociais compostas somente por humanos, mas em um coletivo de seres humanos e mídias” (Rosa, 2008, p. 105), onde há a imersão em um processo colaborativo em que ocorre a interação entre sujeito e objeto e entre sujeitos.

Nesse processo, a tecnologia desempenha um papel importante, contribuindo para o desenvolvimento da autonomia e fomentando as habilidades de descoberta e análise.

Com Mocosky *et al.* (2016), pode-se dizer

que Educação, por ter **ação** dando forma a palavra, solicita o movimentar de significados atribuídos a ela para que a ação educativa na sociedade atual, ao enlaçar a tecnologia e ao compreender-se no mundo tal como ele tem sido, tecnológico, faça sentido por avançar para além do uso de ferramentas disponíveis no cotidiano,

promovendo o desenvolvimento da pessoa. (Mocrosky *et al*, 2016, p. 173, grifo das autoras)

Assim, considerar para o ensino de Matemática as TD como um modo de envolver o aluno em um processo investigativo é importante para a compreensão do que é feito e isso nos leva a optar pelo estudo de um software que permita explorar aspectos da Geometria Descritiva: o GeoGebra AR.

O GeoGebra é um software de Geometria dinâmica desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter, um professor de Matemática austríaco, com a intenção de fornecer uma ferramenta poderosa e acessível para o ensino e a aprendizagem da Matemática. O GeoGebra é um software educacional que integra recursos de Geometria, Álgebra e Cálculo em uma única plataforma e “foi consolidando seu *status* enquanto uma *tecnologia inovadora* na educação Matemática” (Borba; Silva; Gadanidis, 2015, p. 46, grifo do autor). Sua interface e ferramentas permitem que estudantes e professores explorem conceitos matemáticos de maneira interativa e visual, o que favorece a compreensão do investigado.

Santos (2020, p. 27) ressalta outro aspecto importante do GeoGebra que

diz respeito às redes de instituições criadas para o suporte e desenvolvimento do mesmo. Existem cerca de 63 institutos de GeoGebra dividido em vários países, no Brasil temos quatro dessas instituições, localizadas nos estados Rio de Janeiro, São Paulo, Minas Gerais e Goiás.

No website <https://www.geogebra.org/> pode-se acessar vários recursos educacionais relacionados ao GeoGebra, bem como um aplicativo *online* que permite diferentes formas de acesso e interação com a ferramenta. Além disso, a plataforma disponibiliza fóruns e comunidades nas quais os usuários podem participar de discussões relacionadas à utilização do GeoGebra. Esses recursos proporcionam aos educadores e aos estudantes a oportunidade de compartilhar experiências, obter suporte e colaborar com outros usuários interessados em conhecer o GeoGebra.

O GeoGebra é um aplicativo de uso frequente em diversas instituições educacionais de todos os níveis ao redor do mundo. Isso se deve tanto à variedade de recursos que ele oferece, como a facilidade de poder, em um mesmo software, fazer construções geométricas dinâmicas, realizar cálculos, criar gráficos interativos e muito mais.

Em nossa pesquisa busca-se analisar “*Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?*” e o software GeoGebra, com os aplicativos de Realidade Aumentada (RA) - O GeoGebra AR e a Calculadora 3D - permitem realizar as construções e fazer a investigação em RA.

O aplicativo Calculadora 3D apresenta uma maior gama de ferramentas para as construções e permite a visualização 3D. Acionando o botão “AR” (Augmented Reality) projeta-se, através da câmera de um smartphone ou tablet, o objeto virtual no ambiente em que o usuário está.

Na sequência do texto vamos trazer um pouco da tecnologia de Realidade Aumentada.

2.2 Realidade Aumentada

A Realidade Aumentada (RA) é uma tecnologia que combina elementos virtuais com aqueles do ambiente físico, criando uma experiência envolvente e interativa para os usuários. Segundo Kirner e Kirner (2009, p. 100), a RA “trouxe os objetos virtuais para o ambiente do usuário, facilitando sua atuação no mundo real com dispositivos de visualização mais simples”.

Os aplicativos de Realidade Aumentada permitem a sobreposição de informações digitais, tais como imagens, vídeos, gráficos e objetos tridimensionais, no ambiente físico apenas com uma câmera de um smartphone ou tablet. Para o uso dessa tecnologia, é necessário que o sujeito possua um dispositivo compatível e um aplicativo previamente instalado. Alguns aplicativos permitem o uso da RA sem a necessidade de conexão com a internet durante a projeção, enquanto outros requerem estar conectados à internet para realizar a projeção desejada.

A Realidade Aumentada (RA) é uma tecnologia como a Realidade Virtual (RV) que oportuniza experiências imersivas, porém apresentam diferenças significativas e a principal é relativa ao nível de imersão do usuário e interação com o ambiente.

Segundo Kirner e Tori (2006, p. 22),

Diferentemente da realidade virtual, que transporta o usuário para o ambiente virtual, a realidade aumentada mantém o usuário no seu ambiente físico e transporta o ambiente virtual para o espaço do usuário, permitindo a interação com o mundo virtual, de maneira mais natural e sem necessidade de treinamento ou adaptação. Novas interfaces multimodais estão sendo desenvolvidas para facilitar a manipulação de objetos virtuais no espaço do usuário, usando as mãos ou dispositivos mais simples de interação.

Ou seja, com a RV a experiência imersiva se dá em um ambiente completamente virtual, transportando os usuários para uma realidade simulada. A Realidade Virtual está presente como tecnologia desde a década de 1960, quando Ivan Sutherland desenvolveu o primeiro sistema de RV chamado de "Head-Mounted Display" (HMD). Esse sistema consistia em um capacete com óculos acoplados (Souza *et al*, 2016) assim como mostra a imagem a seguir.

Figura 1 - Head-mounted display desenvolvido por Ivan Sutherland

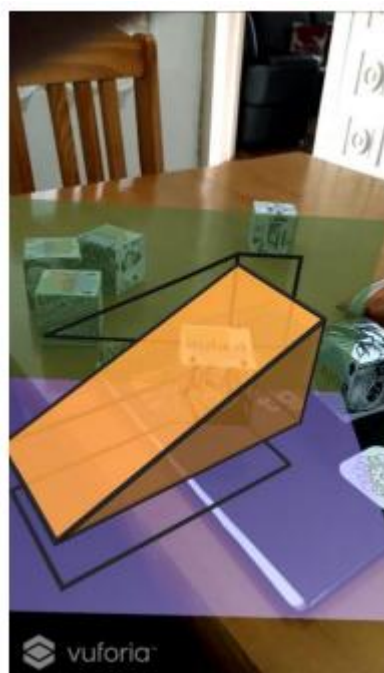


Fonte: Vales (2020, p. 41)

Utilizando os óculos de RV o usuário é inserido em um ambiente digital 3D e perde o contato visual com o ambiente físico ao seu redor. Já a RA combina elementos virtuais com o mundo real, sobrepondo informações digitais ao ambiente físico. Com isso a RA permite que os usuários interajam com o mundo real enquanto visualizam e manipulam objetos virtuais. Os aplicativos de Realidade Aumentada geralmente precisam da câmera de dispositivos móveis, como smartphones ou tablets, ou de óculos especiais como o Microsoft HoloLens que será apresentado posteriormente.

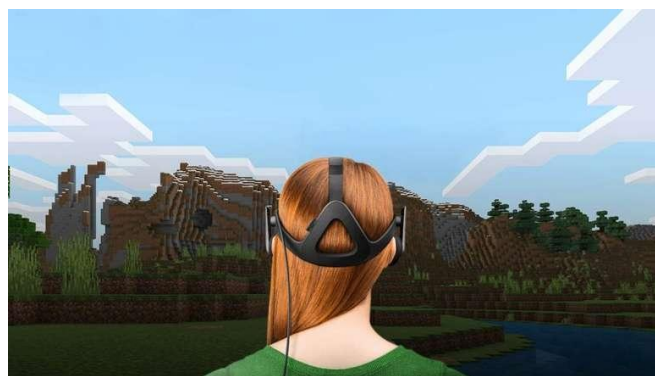
Kirner e Tori (2006, p. 24) enfatizam que a “Realidade virtual trabalha unicamente com o mundo virtual; transfere o usuário para o ambiente virtual; e prioriza as características de interação do usuário” enquanto a “Realidade aumentada possui um mecanismo para combinar o mundo real com o mundo virtual; mantém o senso de presença do usuário no mundo real; e enfatiza a qualidade das imagens e a interação do usuário” (Kirner; Tori; 2006, p. 24). As imagens a seguir mostram exemplos de RA e RV. Na Figura 1 temos a representação de um sólido geométrico projetado em RA sobre uma mesa, usando-se o software HyperCAL^{3D} AR; a Figura 2 apresenta um indivíduo utilizando óculos de RV e um controle de videogame, exemplificando a participação em uma experiência de jogo em ambiente virtual e a Figura 3 exibe uma perspectiva potencial de uma cena em um jogo em RV.

Figura 2 - Representação de um sólido pelo HyperCAL3D AR



Fonte: Dewes, Teixeira, Braga (2019, p. 49)

Figuras 3 e 4 – Realidade Virtual



Fonte: Figura 3 - Página de reportagem G1 Globo sobre jogos RV ; Figura 4 - Página de reportagem do Terra sobre jogos no metaverso no Xbox⁴

Ambas as tecnologias requerem dispositivos eletrônicos que viabilizem a imersão do usuário e/ou a projeção de objetos, porém, a RV demanda um conjunto de equipamentos multissensoriais, como óculos de projeção e dispositivos capazes de rastrear os movimentos corporais para reproduzi-los no ambiente virtual. Por outro lado, a RA possibilita a projeção do

⁴ Disponíveis em: <<https://g1.globo.com/tecnologia/games/e3/noticia/2016/06/e3-2016-coloca-em-jogo-realidade-virtual-e-novas-versoes-de-videogames.html>> ; <<https://www.terra.com.br/gameon/microsoft-anuncia-planos-para-levar-jogos-ao-metaverso-com-xbox.9906955cfef952e6559b4149173e98d8gexfbabg.html>>

conteúdo virtual por meio de dispositivos mais acessíveis usando a câmera de tablets e smartphones, o que, no contexto escolar, por exemplo, é importante.

Nos últimos anos, houve um avanço tecnológico impulsionado pela popularização de dispositivos móveis, como smartphones e tablets, que viabilizaram o acesso à RA. Segundo Souza *et al.* (2016), a acessibilidade expandiu tanto a tecnologia quanto as aplicações da RA que, além dos jogos eletrônicos, da publicidade e do entretenimento, também está em setores como o automobilístico, cirurgias médicas, mercado imobiliário e outros. Com ela surgem novas formas de interação e experiências visuais para os usuários.

Em nossa pesquisa optamos pela Realidade Aumentada considerando a sua característica imersiva e os equipamentos necessários. É relevante destacar que o conceito de Realidade Aumentada está inserido em um contexto mais abrangente, conhecido como Realidade Misturada.

A realidade misturada pode ser definida como a sobreposição de objetos virtuais tridimensionais gerados por computador com o ambiente físico, mostrada ao usuário, com o apoio de algum dispositivo tecnológico, em tempo real /.../ a meta de um sistema de realidade misturada é criar um ambiente tão realista que faça com que o usuário não perceba a diferença entre os elementos virtuais e os reais participantes da cena, tratando-os como uma coisa só. (Kirner; Tori, 2006, p. 23).

No contexto da Realidade Misturada pode-se tanto incorporar elementos virtuais no mundo real, como objetos reais em ambientes virtuais. A tecnologia de Realidade Aumentada (RA) está no primeiro cenário, no qual o usuário é capaz de visualizar e interagir com objetos virtuais em seu ambiente real. Já na situação conhecida como Virtualidade Aumentada o usuário é imerso no mundo virtual, permitindo-lhe manipular objetos reais e virtuais que foram incorporados nesse ambiente.

Uma característica da RA que a particulariza no contexto da Realidade Misturada é manter o usuário no ambiente físico, ou seja, ele não perde de vista o ambiente e identifica os objetos virtuais junto a materialidade física⁵ dos objetos desse ambiente. Essa característica permite dizer que,

A RA não está separada da realidade do mundo físico (ou da realidade mundana) e permite ao sujeito vivenciar os objetos digitais de outra maneira. Com isso, o usuário

⁵ Estamos nomeando “materialidade física” a característica dos objetos que estão dispostos no ambiente da pessoa em articulação com os objetos projetados pela RA. Usamos essa expressão para diferenciar tais objetos uma vez que ambos possuem realidade. “O corpo virtual é um ícone da cultura do espetáculo, na qual a imagem atinge uma materialidade singular que compete pelo estatuto de realidade com a materialidade do corpo físico. A esse modelo se opõe nossa experiência encarnada do corpo físico unificado, como sujeito de ação no mundo, que implica o conjunto dos sentidos e que escapa na mera apreensão visual e objetivante da mídia e das tecnologias de imageamento.” (Ortega, 2005, p. 237).

pode visualizar os elementos digitais e os elementos do mundo físico como se coexistissem no mesmo ambiente. Essa é a principal característica da RA, o sentimento de coexistência de objetos físicos e digitais. (Pereira, 2022, p. 47)

Com o progresso tecnológico, houve um aprimoramento significativo da Realidade Aumentada (RA). A tecnologia mais recente nesse campo é representada pelos óculos de RV e RA. Atualmente, um exemplo é o Microsoft HoloLens 2, um dispositivo holográfico autônomo, ergonomicamente projetado e de uso livre. As imagens a seguir, que compõe a Figura 4, foram obtidas do [site da Microsoft](#), e as trazemos para ilustrar as diversas aplicações dessa tecnologia em diferentes contextos.

Figura 5 – HoloLens 2 com QR Code para acesso ao site



Fonte: site da Microsoft⁶

Os óculos HoloLens 2 são propostos para serem utilizados em áreas como Manufatura, Engenharia e construção, Serviços de saúde e Educação. Na área de Manufatura, a Microsoft destaca que seu uso permite que os funcionários aprendam rapidamente tarefas complexas e colaborem instantaneamente em qualquer local. Na Engenharia e construção, a tecnologia possibilita que os profissionais identifiquem antecipadamente os riscos e validem de maneira precisa os projetos, além de permitir a instalação de condições desde as fases iniciais do projeto até a construção propriamente dita. Nos Serviços de saúde, os profissionais podem estabelecer conexões com especialistas remotos por meio do HoloLens 2, obtendo dados dos pacientes e utilizando imagens tridimensionais de ressonância magnética (MRI) no local de atendimento, ultrapassando as limitações das radiografias convencionais. Por fim, no campo da Educação, os estudantes podem aprender de forma prática em qualquer lugar, utilizando instruções holográficas e avaliações interativas.

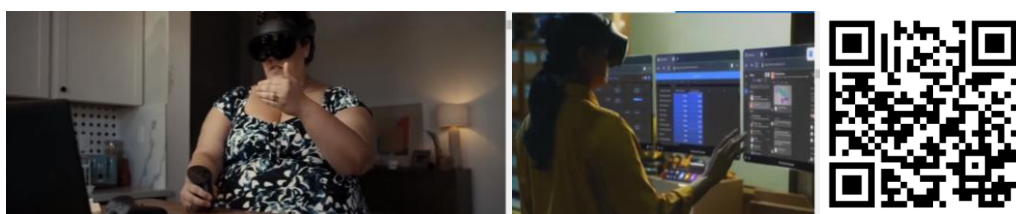
É fundamental ressaltar que, embora a empresa proponha que o uso do dispositivo resulte em uma aprendizagem prática com avaliações interativas, é importante reconhecer que,

⁶ Disponível em: < <https://www.microsoft.com/pt-br/hololens> >

como entendemos, o aparelho tecnológico por si só não é capaz de proporcionar aprendizagem. O uso do dispositivo deve ser orientado por um objetivo claramente definido, visando o desenvolvimento de habilidades específicas. Além disso, para que haja aprendizagem é preciso que o aluno esteja disposto a investigar, envolvendo-se com as tarefas em busca de compreensões.

Outra tecnologia da empresa Meta é o Meta Quest Pro, um dispositivo que combina RV e RA e oferece diversas possibilidades de criação e colaboração. A proposta do Meta Quest Pro é permitir que o usuário "trabalhe no mundo virtual e permaneça no mundo real". Além das sugestões de trabalho em ambientes colaborativos e exploratórios, a plataforma oferece uma ampla seleção de jogos em Realidade Virtual que podem ser adquiridos e utilizados com o Meta Quest Pro.

Figura 6 – Meta Quest Pro com QR Code para acesso ao site

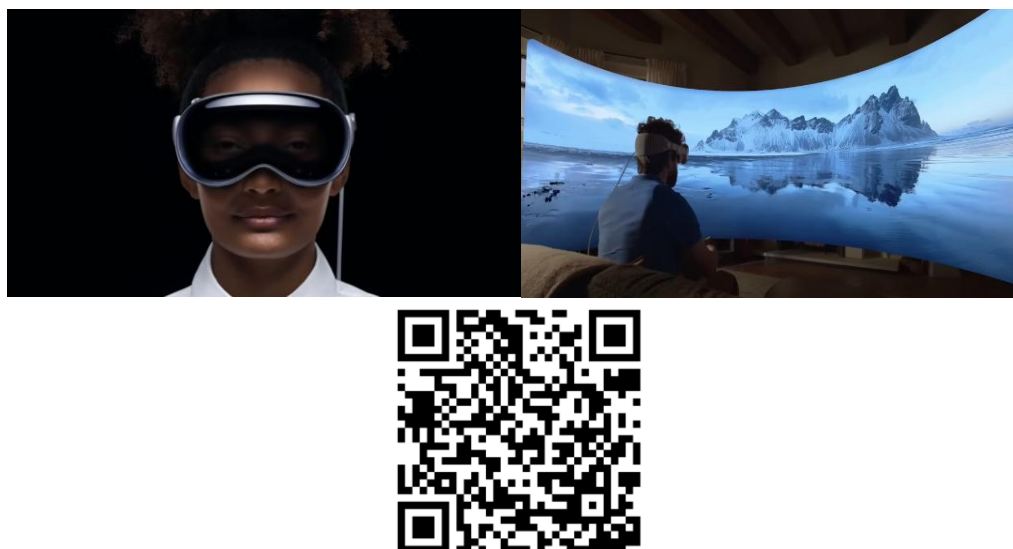


Fonte: site da Meta⁷

A Apple lançou em fevereiro de 2024 o Vision Pro nos Estados Unidos, um sistema operacional com uma interface espacial e um sistema de entrada que permite navegar pelo conteúdo usando os olhos, as mãos e a voz. Esses óculos adotam a mesma premissa do HoloLens 2 e do Meta Quest Pro, cujo objetivo é que o usuário esteja imerso na atividade. Porém, o Vision Pro permite a projeção de objetos virtuais no ambiente do usuário sem que este perca a referência ao seu ambiente físico. Esses dispositivos visam proporcionar uma experiência imersiva e interativa, permitindo que o usuário se envolva plenamente na tarefa ou manipule elementos virtuais em seu ambiente físico, de acordo com suas necessidades e desejos individuais.

⁷ Disponível em: < <https://www.meta.com/quest/quest-pro/> >

Figura 7 – Vision Pro com QR Code para acesso ao vídeo



Fonte: Vídeo de lançamento da Apple⁸

Conforme dissemos, a popularização de equipamentos como tablets e smartphones tornou a RA mais acessível, pois não necessita de dispositivos ópticos especializados, como mencionados anteriormente. A RA em jogos eletrônicos também se popularizou, sendo um dos primeiros exemplos de sucesso o jogo Pokémon Go, desenvolvido pela Nintendo. Nesse jogo, o usuário é capaz de "caçar" personagens fictícios chamados Pokémons por meio do recurso de RA. Os Pokémons podem ser encontrados em diversos locais físicos de cidades ao redor do mundo e leva o jogador a percorrer as ruas da cidade para encontrar diferentes tipos de Pokémons, arremessar uma "pokébola" e capturá-los para sua coleção pessoal. Na Figura 7 é trazida uma imagem que retrata a caça de Pokémons (sem e com RA).

Figura 8 – Pokémon Go



Fonte: Elaborado pela autora

⁸ Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=TX9qSaGXFyg> >

Pereira (2022) investigou as potencialidades da RA para o ensino de Cálculo e traz em seu texto outras áreas nas quais a RA tem estado presente, citando o investimento feito pelas empresas *Boeing* e *AccuVein*. A *Boeing*, empregando a tecnologia de RA no treinamento de funcionários novos, teve uma redução de 35% do tempo de instrução e a *AccuVein* considera que tal tecnologia auxilia os funcionários que trabalham com coleta de amostras sanguíneas e diversos tipos de exames clínicos, pois permite localizar com maior precisão a veia dos pacientes.

Figura 9 – Aparelho localizador de veias com QR Code para acesso ao site



Fonte: Vídeo do site da *Accuvein*⁹

Outros aplicativos que fazem uso da RA, conforme destacado por Pereira (2022), são o Instagram e o Google Arts and Culture¹⁰. O Instagram permite aos usuários aplicar filtros que os caracterizam e incorporar elementos virtuais na imagem capturada pela câmera do dispositivo. Já o Google Arts and Culture possibilita ao usuário posicionar obras de arte, como a *Mona Lisa* de Leonardo da Vinci, em seu ambiente físico, permitindo que ela seja visualizada de diferentes perspectivas.

Já na área acadêmica, alguns estudos sobre RA já podem ser encontrados. Pereira (2022), como dissemos, traz uma investigação fenomenológica sobre a RA para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, Souza *et al.* (2016) estudam a RA na apresentação de Produtos Cartográficos, Kaufmann (2004) explora, com a RA, o ensino de Geometria, entre outros. Trabalhos como esses são relevantes na área de educação Matemática, pois contribuem para que se possa compreender como com a RA se pode explorar conteúdos matemáticos.

Em nossa pesquisa focamos a Geometria Descritiva, pois entendemos que “tal disciplina exige um alto grau de abstração dos estudantes, e pode-se dizer que os recursos computacionais têm um grande potencial para qualificar o ensino de GD, contudo seu uso ainda é pouco empregado” (Dewes; Teixeira; Braga, 2019, p. 45). Consideramos que, com a RA, abre-se a

⁹ Disponível em: < <https://www.accuvein.com> > Acesso em 04 de julho de 2024.

¹⁰ Disponível em: < <https://artsandculture.google.com/> >

possibilidade para criar um espaço de exploração do objeto, permitindo ao aluno investigar e superar as dificuldades de abstração que são destacadas pelos autores mencionados.

Assumimos, na condução da pesquisa, uma postura fenomenológica sendo importante dizer como se entende as possibilidades do aluno para aprender quando ele realiza uma investigação com RA.

2.3 RA e o corpo-vivente

No ambiente escolar nos preocupamos em trazer elementos que possam estimular o desenvolvimento de habilidades nos estudantes. Para tanto, aspectos da “realidade” vivida pelos alunos são sempre mencionados. Porém, o que se pode entender por realidade? Essa é uma questão complexa que pode ser respondida de diversas formas de acordo com a perspectiva filosófica que se assume. Nesta pesquisa falamos de Realidade Aumentada (RA), uma tecnologia digital que possibilita ao professor explorar diversas situações em sala de aula, e destacamos que assumimos, com Bicudo (2010), que a RA é uma modalidade do real, sendo a realidade entendida como o que se revela na experiência vivida sem ser reduzida a uma construção social ou mesmo à subjetividade.

Em uma perspectiva fenomenológica, assume-se que o sujeito ao estar-com-TD é um sujeito que se coloca intencionalmente na busca de uma compreensão. Essa intencionalidade não é sinônimo de propósito ou de objetivo. Como afirma Bicudo (2022b, p. 129),

não é um estado passivo do corpo no qual as impressões do mundo externo imprimem sua marca, mas é, ao contrário, uma atividade que pervade o corpo todo, de modo dinâmico e no fluxo da temporalidade dos seus atos do corpo-vivente, e, concomitantemente se estende ao mundo circunvizante. Noematicamente, se dirige ao objeto; noeticamente, ela opera os modos pelos quais ele lhe é dado, por exemplo, pelas sensações de frieza sentida no corpo ao tocar uma pedra de gelo. A consciência é sempre situada na carnalidade do corpo e, ao mesmo tempo, pela intencionalidade, ela se estende para além dele. Pela sua própria característica de ser intencional e, portanto, de se esticar para além de si, ela intenciona mais do que é dado no sentir sensorial, transcendendo os contornos do corpo (Körper).

Ou seja, a intencionalidade impregna todo o nosso corpo. Ela se estende ao mundo, ao que está ao nosso redor, se direciona aos objetos buscando compreendê-los. A “intencionalidade é o movimento da consciência, que sempre está atenta, dirigindo-se para algo” (Bicudo, 2000, p. 29). A consciência está sempre ligada ao corpo, mas também se estende para além dele, por ser intencional. Isso significa que a consciência vai além do que simplesmente sentimos sensorialmente, transcendendo os limites do corpo. Logo, trata-se de “reconhecer a própria consciência como projeto do mundo, destinada a um mundo que ela não abarca nem possui,

mas em direção ao qual ela não cessa de se dirigir - e o mundo como este indivíduo pré-objetivo cuja unidade imperiosa prescreve à consciência a sua meta” (Merleau-Ponty, 1999, p. 15).

A consciência não é, portanto, separada do corpo, embora o transcenda, vai além dele, pela intencionalidade, sua característica. Por essa sua característica, ela intenciona mais do que é dado no sentir sensorial, transcendendo os contornos do corpo (Körper) e abarcando, na percepção, o objeto ao qual se dirige. O objeto, por sua vez, oferece-se, doando-se em possibilidades de ser sentido e ser percebido. (Bicudo, 2022b, p. 127)

A intencionalidade é, então, o modo pelo qual o sujeito está sempre direcionado a algo, o que se reflete em seus atos, em sua relação com o mundo. O sujeito orienta-se para aquilo que a ele se apresenta em um horizonte de possibilidades, de transformação.

A consciência está em constante movimento abarcando sensações e percepções, e criando conexões de significado, dessa forma ela nunca é suspensa. “Ou seja, abarca os modos de doação da coisa, doação essa que se dá no ato de perceber, ou seja, na percepção. Esta não é vazia, como se captasse uma ideia imaterial da coisa. É preenchida pelo que vem pelas sensações.” (Bicudo, 2022b, p. 128)

Com isso se entende que a consciência é sempre consciência de algo ou voltada para algo com o desejo de compreender. Por exemplo, quando o sujeito se põe a ler, ele organiza as palavras de forma coesa, seus olhos as percorrem ansiosos por compreender o que essas palavras comunicam.

Outro aspecto que considero relevante, trazido na discussão que Husserl contempla-nos a respeito do Leib¹¹, é a consciência, do modo como ele a concebe na Fenomenologia Transcendental, presente, em sua fluidez e dinamicidade, na totalidade do corpo-vivente. Essa concepção é complexa e solicita estudo analítico e aprofundado, para que possamos avançar pelos meandros das ideias que nela estão entrelaçadas [...] Entretanto a consciência transcendental é compreendida como a-regional, fluída, em movimento, originadora de sentido. A consciência não é, portanto, separada do corpo, embora o transcenda, vai além dele, pela intencionalidade, sua característica. (Bicudo, 2022b, p. 124)

Assim, conforme entendemos com Bicudo (2022b), a consciência é orientada pela intencionalidade que nos faz atentos a algo que nos chama a atenção. Esse direcionamento coloca nosso corpo em movimento, trazendo à percepção aquilo que se doa ao perceber.

Segundo Santos e Batistela (2023), há um movimento do sujeito em direção à Geometria, caracterizado por um olhar intencional. Esse sujeito é capaz de revisitar e reconsiderar suas constatações conforme necessário, mantendo uma abordagem reflexiva e aberta a revisões. “Trata-se portando de um movimento que abarca a consciência subjetiva e o

¹¹ Corpo-vivente.

solo intersubjetivo, na direção da constituição das idealidades geométricas” (Santos; Batistela, 2023, p. 156).

Ao direcionarmos nossa atenção para esse movimento, compreendemos, conforme a perspectiva de Merleau-Ponty (1999, p. 517), que

O sujeito da Geometria é um sujeito motor. Isso significa, em primeiro lugar, que nosso corpo não é um objeto, nem seu movimento um simples deslocamento no espaço objetivo /.../ É preciso que exista /.../ um “movimento gerador do espaço”, que é nosso movimento intencional, distinto do “movimento no espaço”, que é aquele das coisas e de nosso corpo passivo.

É importante ressaltar que o movimento realizado pelo sujeito transcende o mero deslocamento no espaço objetivo, pois o sujeito que se move é intencional. Entendemos que a RA possibilita um modo de ser no mundo-da-vida¹², “possibilita um modo de ser dinâmico que não é estranho ou desconhecido a um sujeito que nunca habitou o ambiente no qual ele se realiza. /.../ pode-se construir e mover objetos, arrastando-os; pode-se, também, perceber características invariantes nesse movimento” (Pinheiro; Bicudo; Detoni, 2019, p. 266).

Ainda, segundo Pinheiro, Bicudo e Detoni (2019), o movimento fenomenologicamente compreendido é intrinsecamente intencional, o que significa que nos *movimentamos para...* Ou seja, nos movimentamos em direção ao mundo da vida, trazendo as experiências vividas na abertura perceptiva.

Nesse movimento, “quem percebe e o percebido são indissociáveis no movimento perceber-percebido. Esse movimento os abarca e dá sentido à experiência de perceber.” (Pinheiro, 2018, p. 35), ou seja, não há uma separação entre o sujeito e o objeto, entre um observador externo e um objeto observado, em vez disso, há um sujeito que vivencia uma experiência com-o-objeto, lançando-se ao movimento de ser-com.

“Esse sujeito percebe-se no ato de perceber, percebe-se em movimento e percebe as implicações de seus movimentos que fazem com que a situação perceptiva se mantenha, tenha uma duração em fluxo, e avance” (Pinheiro, 2018, p. 39). Trata-se de um sujeito intencional que, ao se lançar na vivência com o objeto, torna-se consciente do próprio ato de perceber, de “perceber-se percebendo” (Pinheiro, 2018, p. 40, grifo nosso). Assim, perceber, pensar e

¹² Mundo-vida, traduzido da palavra alemã *Lebenswelt*, ou mundo da vida /.../ é entendido como a espacialidade (modos de ser no espaço) e a temporalidade (modos de ser no tempo) em que vivemos com os outros seres humanos e os demais seres vivos e a natureza, bem como com todas as explicações científicas, religiosas e de outras áreas de atividades e conhecimento humano. Mundo não é um recipiente, uma coisa, mas um espaço que se estende à medida que as ações são efetuadas e cujo horizonte de compreensão se expande à medida que o sentido vai se fazendo para cada um de nós e a comunidade em que estamos inseridos (Bicudo, 2010, p.23)

comunicar constituem modos de vivenciar o mundo da vida, em que a compreensão se estende de uma totalidade até o entendimento de nós mesmos.

Pinheiro, Bicudo e Detoni (2019) analisam o movimento do sujeito em interação com o software de Geometria dinâmica, destacando que “realizando movimentos, há uma modificação naquele que realiza o movimento e, por sua vez, no modo de efetuar o movimento no próprio campo de possibilidades presentes na lógica do a” (Pinheiro; Bicudo; Detoni, 2019, p. 267). Com a RA o sujeito não apenas se volta para a tela do dispositivo eletrônico (smartphone ou tablet) e interage com ela por meio de controles deslizantes ou toque na tela. O movimento com a RA é da pessoa que se desloca no espaço físico buscando ver algo que, para ela, se põe em destaque. Quando o sujeito realiza o deslocamento de um ponto no espaço, ele não está simplesmente alterando a posição física da representação desse ponto; em vez disso, está expressando sua intencionalidade, como corpo-próprio (*Leib*) que se coloca em movimento com esse ponto buscando ver características que permanecem inalteradas independentemente de sua movimentação. A ação do sujeito se traduz na materialização dessas mudanças através da tela de seu smartphone, por exemplo.

Desse modo, mostra-se relevante para nós entendermos esse movimento do corpo-próprio, compreender a natureza do "*Leib*", investigar a constituição do corpo-vivente, sua concepção fenomenológica e o modo como se apresenta esse movimento com RA.

O corpo-vivente não é estático, mas se locomove e sempre o faz de modo intencional, dirigido para o que se sente chamado a fazer. Pelo seu modo de se movimentar, revela-se como um polo de orientação, dado o sentido cinestésico que é primordial para a ação de localizar. Esse sentido, o sexto, acrescido dos cinco comumente apontados como tato, audição, visão, olfato e paladar, está na base de o corpo se portar como um objeto livre e imediatamente móvel. Ou seja, independe de outro objeto que o mova; é livre para ir e vir. Move-se e não apenas se move, mas se sente movendo e se dá conta de que está se movimentando. Vivencia seu movimento. Sente-se localizado em algum lugar, mediante uma ligação do todo psíquico com o todo físico, formando uma unidade: corpo-vivente. Entrelaçada a essa sensação difusa, de sentir-se localizado em algum lugar, está a vontade de se mover; porém ele não se movimenta de qualquer maneira, mas de modo orientado. (Bicudo, 2022b, p. 129)

Entendemos, com a autora, que o corpo-vivente não apenas se move, mas se move vivenciando conscientemente esse movimento, sentindo-se localizado, situado com o espaço físico e psíquico, formando uma unidade integrada. O corpo-vivente age de maneira orientada ou com propósito em suas ações. Além dos cinco sentidos habitualmente conhecidos, o cinestésico, também conhecido como o sexto sentido, desempenha um papel fundamental na liberdade e mobilidade do corpo, dado que ele se move de forma independente, isto é, sente-se livre para agir.

Essa liberdade é sentida, pois podemos eleger àquilo em direção ao que queremos ir.

O movimento do corpo só pode desempenhar um papel na percepção do mundo se ele próprio é uma intencionalidade original, uma maneira de se relacionar ao objeto distinta do conhecimento. E preciso que o mundo esteja, em torno de nós, não como um sistema de objetos dos quais fazemos a síntese, mas como um conjunto aberto de coisas em direção às quais nós nos projetamos (Merleau-Ponty, 1999, p. 517).

Com isso, pode-se dizer que o sujeito que está-com-RA é corpo-vivente¹³ com a possibilidade de movimentar-se livremente, agir, direcionar-se, posicionar-se juntamente com a TD. A liberdade de movimento que não diz de uma escolha de “lugar” ou “para onde ir”, mas indica a possibilidade de mover-se e de se sentir movendo-se, permite explorar os objetos, objetos intencionais, ou seja, que se doam à exploração.

Ao estar-com-RA o sujeito tem a possibilidade de estabelecer conexões entre o objeto virtual projetado através da tela de um smartphone no ambiente físico e os objetos abstratos, por exemplo, aqueles que são objetos de estudo da Matemática. As explorações levam a compreensão de características que se destacam na percepção.

Bicudo (2022b) diz que na visão husserliana o corpo-vivente se apresenta como uma totalidade, sendo que suas experiências são vivenciadas por meio de movimentos intencionais, mas é no “próprio movimento que entrelaça as sensações advindas dos sentidos, o sentir as sensações e o perceber-se sentindo as sensações, o que se dá nas vivências. Realiza esse entrelaçamento de modo vivo, fluído, em um movimento uno” (Bicudo, 2022b, p. 127).

O corpo-vivo também é visto, naturalmente, como toda outra coisa, mas se torna corpo-vivo apenas por meio da introdução das sensações [...]; e assim surge a ideia de uma coisa sensitiva, que “tem” e pode ter, em certas circunstâncias certas sensações (sensação de tato, de pressão, de calor, de frio, de dor etc.) e justamente como localizadas nela primária e propriamente; isto é, ato seguido, pré-condição para a existência de todas as sensações (e aparições) em geral, inclusive as visuais e as acústicas, que não trazem nelas, sem dúvida, uma localização primária (Husserl, 2005, p.191¹⁴ apud Bicudo, 2022b, p. 125, tradução da autora).

Husserl enfatiza as sensações que o corpo-vivente experiencia, principalmente a sensação do tato. Com a Realidade Aumentada se abrem possibilidades de o sujeito mover-se e interagir com objetos virtuais. O corpo-vivente ao realizar movimentos com o dispositivo eletrônico visualiza em sua tela as consequências de suas ações. A totalidade do corpo-vivente

¹³ Vale destacar que, conforme Bicudo (2022b, p. 126), “O ato de sentir as próprias sensações o preenche com a dimensão psíquica e, nesse entrelaçamento, torna-se um corpo-vivente, *Leib*. As próprias sensações sentidas já irradiam modos de sentir, gostar e não gostar.”

¹⁴ Husserl, E. (2005). Ideas relativas a uma Fenomenología pura y una filosofia fenomenológica. Libro segundo. Investigaciones fenomenológicas sobre la constitución. (A. Ziri6n Q., Trad). M6xico Fondo de Cultura Econ6mica.

abrange tanto os movimentos físicos como as conexões emocionais estabelecidas com o objeto virtual durante a vivência.

Deste modo, portanto, a consciência toda de um homem está de certo modo ligada ao seu corpo-vivo por meio de sua base hilética, pelo que, naturalmente, as vivências intencionais não são nunca localizadas propriamente, de modo direto e pelo que não constituem jamais um estrato no corpo-vivo (Husserl, 2002, p.155¹⁵ apud Bicudo, 2022b, p. 127, tradução da autora).

Portanto, as vivências intencionais nunca estão diretamente localizadas no corpo vivo e nunca se tornam uma camada física nele. O corpo-vivente, em seu estado de estar-com-RA, demonstra uma mobilidade fluida, revela o agir e o deslocar-se de forma orientada espaço-temporalmente. Ao interagir com o objeto por meio de um dispositivo tecnológico, o indivíduo avança, circundando-o e está atento, imerso em sua experiência.

Pereira (2022), para a sua pesquisa de doutorado, também explorou a tecnologia de Realidade Aumentada e propõe um curso no qual discute temas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Suas análises, realizadas segundo a perspectiva fenomenológica, evidenciam que as vivências dos alunos com investigações Matemáticas ganham destaque. Como em nosso caso, os sujeitos da pesquisa de Pereira (2022), à medida que vão analisando as características dos objetos matemáticos com a RA, procuram compreender o que se mostra, abrindo-se às possibilidades de fazer Matemática. Segundo o autor,

O modo pelo qual o corpo-próprio tem acesso e se dirige aos objetos em RA se difere de quando estão com um computador, por exemplo. Compreendemos que os participantes assumem uma postura de abertura, em que o corpo-próprio se move em modos de ser e de se dirigir aos objetos em RA, o que possibilita ver os objetos matemáticos (Pereira, 2022, p. 186).

Enfatizamos que o corpo-próprio é no mundo e sempre com o outro favorecendo a abertura para ir ao encontro do que a ele se mostra. Com a RA o corpo está em movimento e se direciona para compreender. A motricidade do corpo não é apenas um instrumento com o qual eu me movimento no espaço; aliás, conforme Merleau-Ponty (1999) não há um movimento *no* espaço, há sim um “movimento gerador de espaço” (Merleau-Ponty, 1999, p. 158), pois o movimento é “intencionalidade original, uma maneira de se relacionar ao objeto” dando possibilidade para, no contexto de ensino, realizar a investigação.

Assim, a investigação com a RA gera um espaço de diálogo, de discussão, de articulação do percebido favorecendo certo modo de perceber e compreender os objetos explorados. A

¹⁵ HUSSERL, E. *Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenológica*. Vol. II. Tradução de E. Filippini. Torino: Einaudi, 2002.

percepção, conforme entendemos na perspectiva fenomenológica, se dá no mundo que pode ser visto

não como um sistema de objetos dos quais fazemos a síntese, mas como um conjunto aberto de coisas em direção às quais nós nos projetamos. O "movimento gerador do espaço" não desdobra a trajetória de algum ponto metafísico sem lugar no mundo, mas de um certo aqui em direção a um certo ali, aliás por princípio substituíveis. O projeto de movimento é um ato, quer dizer, ele traça a distância espaço-temporal atravessando-a. O pensamento do geômetra, na medida em que necessariamente se apoia nesse ato, não coincide então consigo mesmo: ele é a própria transcendência. Se posso, por meio de uma construção, fazer aparecer as propriedades do triângulo, se a figura assim transformada não deixa de ser a mesma figura da qual eu parti, e se enfim posso operar uma síntese que conserva o caráter da necessidade, não é que minha construção esteja subtendida por um conceito do triângulo em que todas as propriedades estariam incluídas, e que, saído da consciência perceptiva, eu chegue ao eidos: é que eu efetuo a síntese da nova propriedade por meio do corpo, que de um só golpe me insere no espaço, e cujo movimento autônomo me permite alcançar, por uma série de passos precisos, esta visão global do espaço (Merleau-Ponty, 1999, p. 518).

Pereira (2022) defende que o sujeito não é separado da experiência, pois experiência na perspectiva fenomenológica é sempre experiência vivida ou vivência e o sujeito “é em movimento, doando-se em aberturas, sempre de maneira intencional.” (Pereira, 2022, p. 68). Dizemos que o sujeito é corpo-vivente e todo movimento é intencional. Portanto, ao considerar o estudo da Geometria Descritiva por meio das explorações com o aplicativo GeoGebra AR, as ações intencionais dos alunos direcionam o nosso olhar e passamos a focar não o objeto projetado em RA, mas o que se revela da compreensão Matemática dos alunos. Nesse sentido interrogamos: *Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?* A partir dessa indagação, busca-se analisar falas, atos e gestos que nos ajudem a entender como os alunos compreendem tópicos relativos a Geometria Descritiva quando estes estão fazendo explorações com-RA,

3. SEÇÃO II – O ENSINO DE GEOMETRIA

Nesta seção trazemos algumas compreensões concernentes à Geometria e à constituição do conhecimento geométrico. Relativamente à Geometria Descritiva destacamos o conteúdo tratado com os alunos do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática que acompanhamos e, por fim, concluímos esta seção com algumas considerações acerca do ensino de Geometria com Realidade Aumentada.

3.1 Compreensões acerca da Geometria

A Geometria desempenha um papel fundamental na Matemática e foi construída a partir de um legado cultural compartilhado por diversas comunidades sociais. Baldini e Moran (2022, p. 11) afirmam que a história da Matemática mostra que “a Geometria surgiu desde tempos remotos na antiguidade, desenvolveu-se conforme a necessidade humana, inicialmente de forma empírica e intuitiva em diversas situações, sugeridas pelas experiências e pelas relações sociais”.

No contexto escolar, conforme Paulo (2010), há orientações metodológicas em documentos curriculares que recomendam o ensino de Geometria a partir de vivências com elementos físicos e tais explorações desempenham um papel importante no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Mondini, Mocrosky e Santos (2010, p. 150) ressaltam que a Geometria escolar, que é baseada “na linguagem proposicional e no tratamento do conhecimento geométrico formalizado, não valoriza os atos intuitivos presentes na experiência vivida”. Na abordagem fenomenológica é enfatizada a exploração do significado e a relevância do mundo da vida para professores e alunos, considerados como sujeitos imersos nesse mundo. Essa abordagem procura conhecer o significado que é dado nas experiências, sem preconceitos preestabelecidos, visando compreender a constituição de conhecimento pelo sujeito. Uma vez que é “Situado no mundo, o ser humano vive-com o seu entorno, compreendendo-o e compreendendo-se ao realizar as possibilidades de ser” (Mondini; Mocrosky; Santos, 2010, p. 150).

Porém, a Matemática escolar traz um ensino de Geometria predominantemente centrado na abordagem euclidiana, talvez porque, conforme salientam Baldini e Moran (2022, p. 11), “a Geometria foi a primeira teoria Matemática axiomatizada”, sistematizada por Euclides 300 a.C e que organizou, a partir de cinco axiomas considerados verdades evidentes, todo um programa de Geometria. No entanto, quando nos voltamos para o ensino da Geometria algumas questões

emergem: Qual é a relevância do estudo da Geometria? Como, a estrutura euclidiana contribui para a aprendizagem das ideias geométricas? Questões dessa natureza nos conduzem a uma análise que vai além do conteúdo predefinido no contexto escolar.

A presença das Geometrias no âmbito escolar é de grande relevância para a formação do estudante, pelo fato de que se associam ao interesse, à criatividade e contribuem para o desenvolvimento da percepção espacial e do pensamento. Essas dimensões favorecem a compreensão e a capacidade de resolver problemas peculiares, que não são possíveis apenas com os conhecimentos de Aritmética e Álgebra. (Baldini; Moran, 2022, p. 13)

Nessa perspectiva, entendemos que a Geometria no contexto escolar deve estimular a investigação e a exploração para auxiliar o desenvolvimento de competências fundamentais para a aprendizagem Matemática. Ou seja, a Geometria pode ser uma área propícia a investigação e exploração e isso contribui para que os indivíduos sejam engajados na formulação de conjecturas, no levantamento de hipóteses, na avaliação de teorias, bem como na verificação ou refutação dos argumentos levando à uma autonomia inerente ao processo de aprendizagem.

Entendemos esse movimento de levantamento de hipóteses, verificação ou refutação como um trabalho investigativo esclarecendo, com Ponte (2003, p. 2), que:

Numa investigação Matemática, parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas a partir das quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas. Depois, testam-se essas conjecturas, algumas das quais, perante contra-exemplos, poderão ser desde logo abandonadas. Outras, sem se revelarem inteiramente correctas, poderão ser aperfeiçoadas. Neste processo, por vezes formulam-se novas questões e abandonam-se, em parte ou no todo, as questões iniciais. As conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade Matemática.

No estudo da Geometria o processo investigativo se dá por meio da construção e exploração de objetos geométricos em um processo que requer que o aluno adote uma postura de abertura, consciente de que não há respostas imediatas. As indagações devem orientar sua busca, sendo fundamental que ele desenvolva autonomia para formular hipóteses, testá-las e avaliá-las criticamente, como entendemos com Ponte, Quaresma e Branco (2011). Esses autores destacam que,

Tal como um problema, uma tarefa de investigação e exploração não é de resolução imediata, requerendo do aluno um esforço de compreensão aprofundado, a formulação de uma estratégia de resolução, a concretização desta estratégia e uma reflexão sobre os resultados obtidos (Ponte; Quaresma; Branco, 2011, p. 1).

Essas explorações não devem ser vistas como uma atividade complementar na sala de aula, mas, conforme argumentado por esses autores, devem ser incorporadas como um componente essencial do trabalho do professor. Essas tarefas podem promover uma dinâmica diferenciada, permitindo a interação e o diálogo entre os alunos. Essa abordagem introduz características inovadoras ao contexto educacional, com o objetivo de valorizar e evidenciar os diferentes estilos e processos de aprendizagem que se evidenciam em uma sala de aula.

Embora nosso enfoque não esteja direcionado especificamente à formação de professores, trabalhamos em um curso de Licenciatura em Matemática, com alunos do primeiro ano. Assim, os sujeitos de nossa pesquisa são futuros professores de Matemática e, conforme entendemos, para eles é importante conhecer diversas metodologias e discutir sobre a constituição de uma identidade profissional própria. Além disso, no decorrer dos encontros, buscamos favorecer a atividade investigativa, estimulando uma postura crítica e reflexiva em relação ao processo de ensinar Matemática.

Ponte (2003) contribui para que se dê destaque a importância do trabalho investigativo nos cursos de formação inicial. Conforme esse autor,

Em termos gerais, verificamos que as actividades de investigação têm vindo a ser introduzidas em diversos momentos da formação inicial de professores, sendo acolhidas por vezes com algumas reservas, outras vezes de modo favorável pelos futuros professores. As suas resistências surgem, por vezes, por estes não se sentirem bem na realização destas actividades, dada a sua experiência anterior de aprendizagem da Matemática, muito mais baseada em actividades fechadas e repetitivas. Outras vezes surgem por sentirem que se trata de actividades pouco valorizadas no currículo oficial e no sistema de avaliação e pouco presentes na prática profissional, e além disso, cuja realização em aula coloca muito mais problemas ao professor do que as actividades mais tradicionais, como a exposição de matéria e a realização de exercícios /.../ Embora seja importante que os cursos de formação inicial de professores façam uma sensibilização neste campo, não nos devemos esquecer que no processo de socialização profissional os jovens professores irão ainda ser sujeitos a muitas experiências, algumas delas marcantes e possivelmente contraditórias com estas perspectivas. O papel que esta perspectiva curricular poderá assumir nas suas práticas depende, por isso, tanto do trabalho que for feito nesta altura como do modo como se processar a sua integração profissional (Ponte, 2003, p. 62).

Para o aluno da Licenciatura vivenciar modos de explorar a Matemática com um aplicativo de Realidade Aumentada é importante inclusive para entender o fazer matemático. Ponte (2003) enfatiza que,

[é] interessante verificar como, nos anos mais recentes, estas actividades não só têm vindo a ser introduzidas na formação inicial de professores, como os respectivos docentes se têm vindo a preocupar com o modo como podem melhorar o seu alcance, numa lógica de investigação sobre a sua própria prática profissional (Ponte, 2003, p. 63).

As experiências vivenciadas em sala de aula dão ao futuro professor a oportunidade de conhecer e explorar possibilidades para a futura atuação docente, compreendendo a relevância da postura investigativa para promover um ensino mais dinâmico e desenvolver uma postura reflexiva.

Richit, Ponte e Quaresma (2021) ressaltam que o aprendizado profissional promove mudanças na prática docente, as quais impactam diretamente o desempenho dos alunos e, por consequência, influenciam as crenças e atitudes dos professores. Nesse sentido, enfatiza-se a importância de considerar diversas abordagens de ensino na formação de futuros docentes, de modo a ampliar seu repertório pedagógico e prepará-los para a condução de suas próprias turmas.

A abordagem investigativa no ensino já era discutida nos estudos de Freudenthal (1968) que trazia uma concepção sobre o ensino de Matemática enfatizando a importância da vivência do aluno com o objeto de estudo, isto é, sua exploração, pois em uma aula em que o aluno seja convocado a apenas decorar os assuntos apresentados, as regras do “fazer” logo serão esquecidas e o assunto não será compreendido. O aluno deveria fazer Matemática partindo de fenômenos, criando hipóteses, aprendendo a refutá-las ou confirmá-las para produzir conhecimento. Para entender a perspectiva desse autor, vamos acompanhar um trecho de sua explicação.

“A raiz etimológica do espaço é *spatium*, que significa distância. Espaço e seus análogos em outras línguas significam originalmente uma coisa fechada, e para indicar o espaço muito grande a terminologia moderna foi enriquecida pelo ‘espaço exterior’”¹⁶ (Freudenthal, 1983, p. 223-224, tradução nossa). Neste trecho o autor discute os objetos geométricos e o espaço por ele ocupados, fazendo uma distinção dos objetos geométricos como são e o espaço físico. Para ele, “o universo é finito e o fato de que, segundo um dos postulados de Euclides, toda linha reta pode ser estendida indefinidamente não implica nada sobre o meio em que isso deve ser possível.”¹⁷ (Freudenthal, 1983, p. 223, tradução nossa). Vê-se que, para Freudenthal, há uma diferença entre a concepção do objeto em si e sua representação, que nos aproxima de questões colocadas por Husserl em uma perspectiva fenomenológica.

Husserl afirma que, para compreender a Geometria, há três níveis de investigação importantes a serem considerados. O primeiro ele nomeia como uma reflexão radical necessária

¹⁶ Texto original: The etymological root of space is *spatium*, which means distance. Space and its analogues in other languages originally mean a closed thing, and to indicate the very big space modern terminology was enriched by “outer space”.

¹⁷ Texto original: The universe is finite and the fact that, according to one of Euclid’s postulates, every straight line can indefinitely be extended does not imply anything about the medium in which this should be possible.

para se entender os conceitos geométricos e não apenas aplicá-los livre de contradições, o que interpretamos como uma aproximação com a discussão de Freudenthal. O segundo é relativo à

espacialidade em relação às formas geométricas, à possibilidade de identificar espaços diferentes; o terceiro nível aprofunda [...] a relação entre as coisas da experiência e as formas geométricas, as ferramentas gnosiológicas necessárias à sua elaboração e, desta maneira, a relação entre a percepção e idealização (Ales Bello, 2022, p. 116).

Segundo a perspectiva fenomenológica, é na experiência vivida que o espaço faz sentido para o sujeito, primeiramente pela percepção.

Na percepção do espaço que se dá na intuição de experiências vividas no cotidiano do mundo-vida, o espaço não é percebido como uma unidade, pois esta é o fruto de uma elaboração lógica. A lógica não é fundamentação da percepção do espaço, mas a intuição do espaço é importante para o processo de (re)elaboração lógica do espaço percebido. Essa (re)elaboração conta com a intuição e também com um processo de idealização do espírito. Esse modo de compreender a ciência Geometria é crucial para o desenvolvimento da fenomenologia husserliana (Bicudo; Kluth, 2010, p. 133).

Nesse contexto, compartilhamos a interpretação das autoras de que a concepção de espaço emerge dos variados modos pelos quais minha maneira de ser se manifesta em diferentes campos de minha sensibilidade, num voltar-se que é intencional, na vivência espacial.

Ao *voltar-se intencional* há uma evidência originária, há uma “verdade dada na percepção como presença, momento em que a evidência ilumina o visto e as interligações com a totalidade do solo-horizonte onde a percepção se dá” (Bicudo; Kluth, 2010, p. 135). Em nossa pesquisa, ao elaborarmos as tarefas de exploração, tínhamos a intenção de que o aluno pudesse manter sua atenção focada naquilo que se revela para ele na percepção.

Na vivência do sujeito, os processos conscientes se manifestam no corpo-próprio, na sensibilidade daquele que realiza as explorações, resultando na formação de conceitos, na elaboração de hipóteses e na sua subsequente verificação, refutação ou confirmação. Com isso, pode-se entender que a “fenomenologia de um conceito matemático, de uma estrutura ou ideia significa a ação de descrevê-la em sua relação com os fenômenos para os quais foi criada” (Ferreira; Buriasco, 2016, p. 248).

Pesquisas como as de Kaufmann (2004) destacam as dificuldades enfrentadas pelos alunos no estudo de Geometria,

muitos estudantes têm dificuldades em resolver tarefas que requerem habilidades de visualização espacial e pensamento. Para passar de ano, eles usam estratégias como memorizar as etapas da construção, sem entender completamente os problemas espaciais e suas soluções no espaço 3D¹⁸ (Kaufmann, 2004, p. 1, tradução nossa).

¹⁸ Texto original: Many students have difficulties solving tasks that require spatial visualization skills and spatial thinking. To get passing grades they use strategies such as learning construction steps by heart without fully understanding spatial problems and their solutions in 3D space.

Husserl já nos alertava que para compreender as idealidades geométricas seria preciso “rastrear a ‘evidência originária’ [...] uma passagem da perspectiva categorial para a pré-categorial que possa, realmente, ‘iluminar’ as sedimentações históricas” (Ales Bello, 2022, p. 113). As investigações que possibilitam aos estudantes se engajarem de forma intencional na exploração dos objetos matemáticos, são relevantes a essa evidência originária. No entanto, é importante salientar que ao falarmos de uma idealidade na perspectiva da fenomenologia “não nos referimos a algo que já está dado na forma última. O que temos, no decorrer da idealização, são perfis construídos, abertos às compreensões que vão se articulando e se complementando na constituição de um todo coerente” (Bicudo; Kluth, 2010, p. 139). Ou seja, o que o sujeito identifica como possíveis abordagens de um mesmo objeto matemático que se mostra com diferentes perfis em suas explorações contínuas é o que vai dando subsídios para a constituição de uma ideia primordial.

Husserl nos permite entender que esses perfis que se mostram para a constituição de uma ideia levam à verdade, “não aquela finita, cotidiana, relativa, limitada – mas à verdade, absolutamente, evidente.” (Ales Bello, 2012, p.114).

A constituição dessa ideia é, desse modo,

um trabalho contínuo de reunião de variedades de percepções, evidências e compreensões noemáticas em “todos” que manifestam aquelas variedades específicas, mas que as transcendem, uma vez que dizem algo mais. De maneira intencional, são elaboradas organizações estruturais que os sustentam e lhes permitem ser tomados agora como unidades passíveis de serem vivenciadas, intuídas e vistas na clareza de evidências nos modos característicos de se apresentarem no mundo-vida e na região do conhecimento com a qual aqui estamos trabalhando (Bicudo; Kluth, 2010, p. 143).

Em outras palavras, essa formação conceitual se desenvolve no mundo da vida, onde o sujeito direciona sua atenção em busca de uma compreensão mais profunda do objeto investigado. Essa é a busca pelo sentido que se manifesta na dimensão espacial e temporal, sendo moldada por uma série de indagações e questionamentos que são vivenciados de maneira subjetiva pelo sujeito e que se apoiam em conexões pré-indicativas.

3.2 Constituição do conhecimento geométrico

Para explicitar nossa compreensão sobre a constituição do conhecimento geométrico, apresentamos algumas leituras realizadas que corroboram nosso ponto de vista fenomenológico.

A constituição do conhecimento geométrico “diz da articulação dos dados sensórios, sentidos que se fazem no corpo-encarnado e que vão se articulando na própria carnalidade desse corpo, e no movimento dessa articulação vai definindo unidades, percebendo fenômenos e articulando e expressando compreensão” (Rosa; Bicudo, 2018, p. 620). Logo, na constituição do conhecimento o sujeito é criador de sua compreensão. Criador, pois efetua a revelação por meio de sínteses realizadas durante o processo de conhecimento. Na comunicação isso que foi constituído na percepção do sujeito ganha objetividade.

Husserl afirma que todo fruto de uma idealização tem início na história e é por ela transmitido, pois “através da comunicação, uma formação subjetiva adquire a característica de um objeto em si, semelhante a objetividade real em sua consistência, apesar da diversidade da origem” (Ales Bello, 2012, p. 114).

Quando pensamos o sujeito com-tecnologias fazendo explorações visando à constituição de conhecimento, entendemos “a tecnologia e o sujeito que com ela trabalha como unidade, não cabendo, portanto, afirmativas teoricamente ou ingenuamente postas referindo-se ao sujeito como mero usuário” (Pinheiro, 2022, p. 71). Ou seja, não há separação entre o sujeito que realiza a exploração e o objeto que ele está investigando; o objeto é objeto-explorado-pelo-sujeito. No movimento de voltar-se para o que se evidencia no processo exploratório buscando compreensão, o conhecimento se constitui com-a-tecnologia. Portanto, a tecnologia não é uma ferramenta, mas o meio através do qual o processo de exploração e investigação se dá de certo modo.

Pinheiro (2022) analisa os movimentos realizados pela pessoa com-a-tecnologia e estabelece comparações entre os movimentos realizados em uma interface de jogo em “Realidade Virtual” em que o sujeito se transmuta para o personagem do avatar. Segundo o autor,

o avatar e seus movimentos expressos na interface computacional são materializações da intencionalidade do sujeito que frente ao computador age com ele, que se move, movendo, que configura os movimentos do avatar sincronicamente às configurações que realizam em si, em atos cinestésicos com os quais fluem a percepção do movimento e a percepção de si, como realizador do movimento, que constitui o ato de perceber-se, percebendo (Pinheiro, 2022, p. 72).

Ao nos voltarmos para a tecnologia de RA, vê-se que o sujeito que explora o objeto geométrico move-se com essa TD e, ao mover-se, faz mover para si o objeto. Nesse processo, a percepção do movimento torna-se a percepção de si, configurando o ato de perceber-se

enquanto percebe. O sujeito ao voltar-se para o objeto está intencionalmente voltado para a exploração que realiza, ou seja, é um sujeito intencionado.

Com isso se assume, com Pinheiro (2022), que ao ser-com tecnologias, as TD não são vistas como meros instrumentos a serem utilizados ou removidos conforme a conveniência do sujeito. Elas fazem parte da constituição do conhecimento que se dá por meio de um processo investigativo. O sujeito é-com as tecnologias e o conhecimento por ele gerado resulta desse movimento contínuo de exploração e interação.

Assim, o ser é sempre com TD, haja vista que se abre um novo horizonte ao olhar, um novo ponto de vista, configura-se uma visão de mundo, um modo de ser e de estar que expande noções de tempo e de espaço e, dessa forma, configura-se um ser sempre em transformação, sendo as TD elementos constituintes e transformadores do mesmo (Pinheiro, 2022, p. 73).

Entendemos que o movimento investigativo é importante para a constituição do conhecimento matemático, pois, “o movimento, mesmo sendo objeto da aprendizagem, também se mostra na ação de um sujeito como correlato ao processo de aprender, constituindo, assim, a unidade *movimento-percepção-conhecimento*” (Pinheiro *et al*, 2021, p. 352).

Pinheiro *et al*. destacam que, nos âmbitos da Física e da Matemática, as concepções do movimento “têm em comum o campo de produção de significados, o mundo, diferindo-se o modo de conhecê-lo.” (Pinheiro *et al*, 2021, p. 352). Para os autores, atividades dinâmicas que explorem o movimento investigativo são uma proposta de sala de aula que permite que o sujeito “compreenda o movimento como modo de conhecer junto a uma experiência vivenciada.” (Pinheiro *et al*, 2021, p. 352). Dando a oportunidade da constituição de um pensar dinâmico.

Bicudo (2023, p. 109) nos permite dizer que a constituição do conhecimento é, desse modo, o “que se dá na dinamicidade da vida que flui, organicamente, no corpo vivente”. A autora enfatiza que o movimento intencional do sujeito é de extrema relevância para a constituição do conhecimento matemático.

Entretanto, não é um movimentar-se caótico, sem direção, porém sempre se locomover em direção a algo que intende fazer /.../ no caso do corpo-vivente humano, ao ir ao encontro do objeto, de modo articulado, posiciona-se em relação aos outros corpos que estão no seu entorno; à medida que se movimenta, as coisas aparecem situadas e em movimento para ele (Bicudo, 2023, p. 117).

A constituição do conhecimento, portanto, diz do “movimento que subjaz ao conhecimento visto em seus muitos aspectos histórico-sócio-culturais” (Bicudo, 2023, p. 123), uma vez que diz do processo da pessoa que conhece, do sujeito que se direciona ao objeto

investigando-o e desvelando o que já está presente e lhe faz sentido no mundo-da-vida. A percepção do sujeito se dá pelo que o objeto revela, uma vez que ele existe de forma autêntica.

Mondini, Mocrosky e Santos (2010) destacam que a constituição do conhecimento geométrico se inicia na experiência pré-predicativa. Para as autoras, o nosso conhecimento “dá-se no corpo-próprio, que é a intencionalidade motriz que se movimenta em direção ao visado no espaço-tempo, ao estar-com. Não temos outra maneira de sentir, perceber, compreender, conhecer, senão vivendo.” (Mondini; Mocrosky; Santos, 2010, p. 153). Esses dizeres corroboram a ideia de que o conhecimento se constitui na percepção, no corpo vivente e, ao vivenciar o desconhecido, somos capazes de apreender.

A constituição do conhecimento com as TD, segundo Rosa (2023), revela que o corpo-próprio incorpora diferentes tecnologias que potencializam o processo investigativo com vistas ao conhecimento matemático. “Dessa forma, evidenciamos que no processo de educar matematicamente ou no processo de educar pela Matemática, a postura educacional que evoca a ideia de que as TD podem e devem ser tomadas como meios de revelação” (Rosa, 2023, p. 220).

Para o Rosa (2023), além do conhecimento matemático constituído, novas formas de aprender são necessárias para a formação do indivíduo como um todo.

Ou seja, nossas fronteiras estão fluidas, nossas formas de pensar, sob uma estrutura rígida, definindo exatamente conjuntos matemáticos onde elementos são encaixados, precisam evoluir enquanto forma de compreender o mundo. Não somente em uma perspectiva Matemática, mas, de modo geral, nossos modos de perceber, refletir e compreender o mundo necessita de bases criativas, inventivas, de respeito, de política, de movimentos abertos ao outrem e ao mundo, respeitando suas especificidades e suas transgressividades (Rosa, 2023, p. 220).

Isso implica que o corpo-próprio esteja-no-mundo, com o outro, aberto a novas percepções.

Em nossa pesquisa, as tarefas realizadas com os sujeitos visavam à investigação, o ser-com a Realidade Aumentada (RA), pois com Paulo, Batista e Pereira (2023, p. 234) entendemos que o papel da RA na constituição do conhecimento matemático é dar “liberdade de exploração que transforma tanto a forma de movimento para as investigações (relativamente ao que se faz com o mouse ou na tela touch) quanto o modo pelo qual se está junto ao ‘conteúdo matemático’ fazendo explorações.” A RA, segundo os autores, amplia as possibilidades do corpo-próprio sentir o mundo, percebê-lo e constituir-se nele.

A ‘realidade’ não se aumenta, pois é o mundo da vida; aumentam-se as possibilidades perceptivas, abrem-se novos modos de fazer exploração. O movimento da pessoa que segura um smartphone na mão (o aluno ou o professor que faz explorações) é intencionalidade originária do corpo-próprio, veículo do ser-no-mundo (Paulo; Batista; Pereira, 2023, p. 236).

O indivíduo que investiga com-RA move-se para investigar o objeto em um movimento que vai além do simples ato de manipular um dispositivo eletrônico, como o ajuste de uma câmera. Trata-se de um movimento do corpo vivente, que se posiciona intencionalmente com o dispositivo de RA para explorar o ambiente e se abrir às perspectivas emergentes. No contexto de nosso estudo, as pesquisas citadas contribuem para explicitarmos nossa compreensão sobre a constituição do conhecimento geométrico. Destacamos que o sujeito que investiga é intencionado no mundo-da-vida e é capaz de realizar explorações, pois se vê-com-a-RA. O sujeito de pesquisa é-no-mundo com a RA e com o outro, portanto capaz de levantar hipóteses, construir argumentos, dialogar e chegar a conclusões que se destacam nas experiências vivenciadas e no diálogo com o outro.

Em nossa pesquisa, as TD tornaram-se o meio através do qual entendemos que essas investigações seriam possíveis ao sujeito. Elegemos as TD, pois na pesquisa de mestrado (Sampaio, 2018) já se evidenciou que um software de visualização 3D pôde contribuir para a aprendizagem geométrica, especificamente para compreender a ideia de volume. Na pesquisa de doutorado interrogando “*Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?*”, o aplicativo GeoGebra AR será importante para que os alunos façam as explorações e explicitem os modos pelos quais estão entendendo o que a eles se apresenta.

3.3 Geometria Descritiva

A Geometria Descritiva é um segmento da Geometria concebido no século XVIII cuja propagação, de acordo com Barbin (2019), ocorreu posteriormente à Revolução Francesa período em que houve uma reorganização do sistema educacional francês, com ênfase na criação de instituições de ensino voltadas para a formação de engenheiros civis e militares. Segundo a autora, “Gaspard Monge esteve envolvido nos projectos de criação destas escolas e propôs o que ele chamou de ‘Geometria descritiva’ para todos eles.”¹⁹ (Barbin, 2019, p. 3).

¹⁹ Texto original: Gaspard Monge was involved in the projects to create these schools and he proposed what he called “descriptive geometry” for all of them.

Apesar de a difusão ter ocorrido com a implementação das escolas politécnicas em 1794-1795, Monge concebeu um método de projeções durante sua participação na École royale du génie de Mézières a partir de 1764. Contudo, “ele introduziu o termo ‘Geometria descritiva’ pela primeira vez em um texto de 1793 sobre ensino em ‘escolas secundárias’”²⁰ (Barbin, 2019, p. 4). Monge posteriormente publicou sua obra, que se tornou uma referência mundial, intitulada *Géométrie descriptive*, em 1799.

Pinho, Santos e Xavier (2019) ressaltam que a origem da Geometria Descritiva em língua portuguesa remonta ao Brasil, sendo publicada a primeira tradução em 1812. O primeiro livro de Geometria Descritiva escrito em português em 1812 foi traduzido pelo capitão José Victorino dos Santos e Souza cujo título é *Elementos da Geometria Descritiva; com aplicações às artes*. Nesse texto, Souza (1812, p. 205) descreve que

A Geometria Descritiva tem por objecto não só de nos conduzir a hum grande numero de theoremas, para dar a solução de huma infinidade de problemas deduzidos das propriedades, que tem os pontos, as linhas, e os planos, quando se considerão collocados de qualquer maneira no espaço huns a respeito dos outros, e referidos a tres dimensões dos quaes as questões da Geometria tomadas sobre o plano, que se tratão ordinariamente nos primeiros elementos, não são mais do que casos particulares; mas tambem ao modo de representar sobre huma folha de desenho, as fórmas dos corpos da natureza, ou da arte, que, como sabemos, tem tres dimensoes, ou seja, para transmitir estas descrições ás pessoas instruidas com as convenções, e methodos desta Geometria, ou para deduzir desta representação novas verdades sobre as propriedades, e as fórmas dos mesmos objectos, e as suas dimensões em diferentes sentidos.

Em outras palavras, a Geometria Descritiva constitui um ramo da Geometria que une a compreensão tridimensional com a representação bidimensional de objetos geométricos. Essa disciplina proporciona uma forma de representação destinada a investigar as potenciais propriedades dos objetos. O ponto de partida para o início do estudo da Geometria Descritiva engloba a compreensão da representação mongeana que “é um método de dupla projeção ortogonal em dois planos perpendiculares, um horizontal, denominado π , e um vertical, denominado π' [...] A linha de intersecção desses planos é denominada linha de terra.” (Coelho, 2012, p. 3).

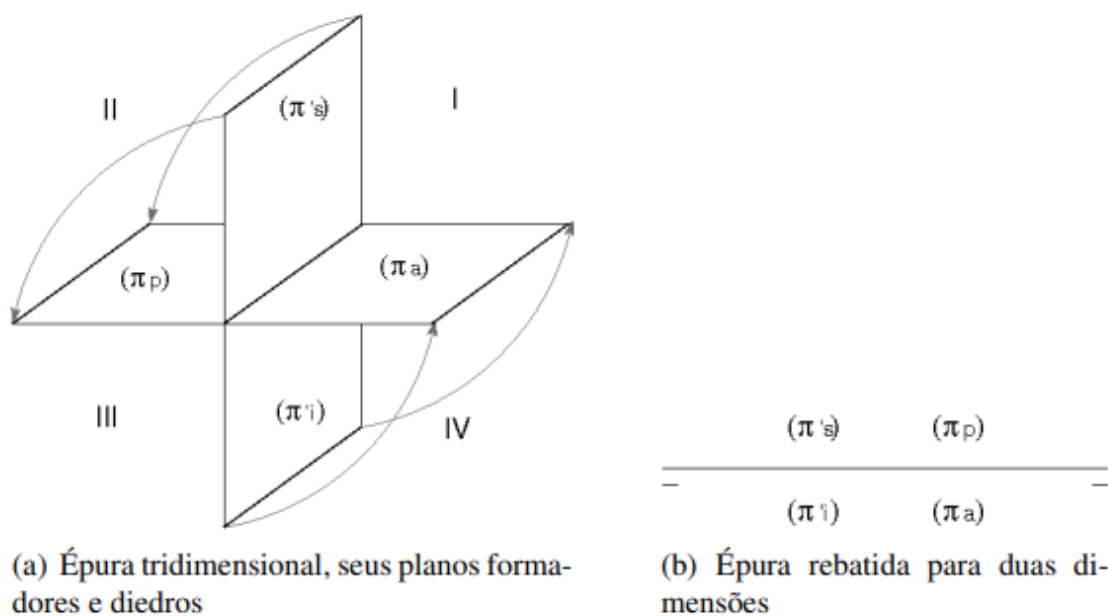
A principal representação desse sistema envolve o rebatimento desses planos pela linha de terra de maneira a torná-los coincidentes, caracterizando o conceito de *épura*. Os livros didáticos trazem em *épura* os objetos geométricos ponto, reta e plano.

“A distância de projeção de pontos no espaço ao plano horizontal é chamada de ‘cota’ e a ‘distância’ ao plano vertical de ‘afastamento’. É denominada ‘linha de projeção’ [...] toda

²⁰ Texto original: he introduced the term “descriptive geometry” for the first time in a text of 1793 on teaching in “secondary schools”.

linha perpendicular à linha de terra, na é pura rebatida, que une as projeções de um mesmo ponto.” (Coelho, 2012, p. 3). A imagem a seguir representa o conceito de é pura.

Figura 10 – Representação do conceito de é pura



Fonte: (Coelho, 2012, p. 4)

A partir do sistema de representação de Monge, torna-se possível realizar uma ampla gama de tarefas que vão desde a representação de um ponto no espaço até a realização de verificações geométricas relativas às propriedades entre as primitivas geométricas. Isso inclui determinar a pertinência de um ponto a uma reta, de uma reta a um plano, avaliar perpendicularismo e paralelismo entre retas e planos, verificar a verdadeira grandeza, realizar mudanças de planos, rotação e rebatimento, examinar as relações das posições dos objetos em relação aos planos da é pura, medir distâncias e ângulos entre objetos, bem como representar poliedros, secções planas e intersecções em poliedros, entre outras aplicações (Coelho, 2012).

No contexto de nossa pesquisa, a Geometria Descritiva presente no primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática traz os seguintes tópicos: Sistemas de Projeção Cônico e Cilíndrico; Diedros e É puras; Estudo do ponto; Posições particulares de um ponto: Pontos no 1° , 2° , 3° e 4° diedros; Posições particulares de um ponto: Pontos nos planos de projeção e nos bissetores; Estudo da reta; Posições particulares de uma reta: horizontal, frontal, fronto-horizontal, de topo, vertical, de perfil e qualquer; Traços de uma reta nos planos de projeção; Posições relativas entre duas retas: paralelas, convergentes e reversas; Estudo do plano; Planos: Qualquer, Vertical, de Topo, de Perfil, Horizontal e Frontal.

Teixeira *et al.* (2015, p. 81) dizem que os métodos de resolução de problemas característicos da Geometria Descritiva contribuem “para a formação e potencialização de habilidades do pensamento, sendo fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico e espacial, e de uma linguagem para a comunicação no projeto”.

Alguns estudos que se voltam para a Geometria Descritiva relatam a dificuldade dos alunos quando seu ensino é feito com uso apenas do quadro e giz. Jesus, Oliveira e Oliveira (2019) destacam que as dificuldades dos alunos de um curso de engenharia relacionam-se à “percepção espacial, justamente pelo fato de não ter tido contato com programas como este durante todo seu percurso no ensino fundamental e médio” (Jesus; Oliveira; Oliveira, 2019, p.145). As autoras relatam que, apesar da dificuldade encontrada, a disciplina é importante e um caminho que pode auxiliar o professor é o uso de aplicativos de Geometria Dinâmica.

No próximo item, apresentamos as potencialidades da Realidade Aumentada no contexto da disciplina de Geometria Descritiva, considerando as dificuldades mencionadas.

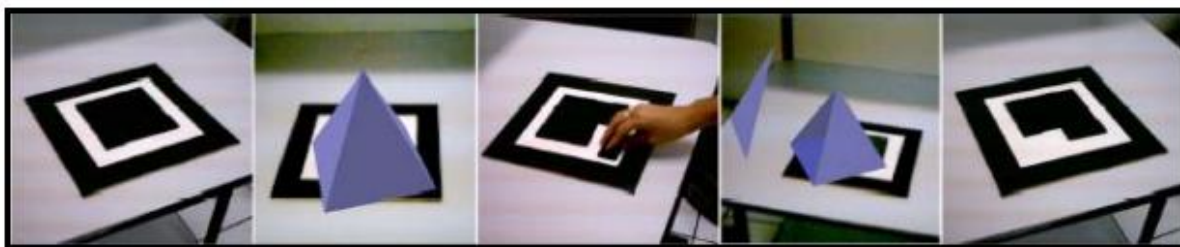
3.4 Geometria com RA

Trabalhos como os de Lima, Cunha e Haguenaer (2008), Coelho (2012) e Dewes, Teixeira e Braga (2019) apontam a RA como uma possibilidade para a exploração da Geometria Descritiva visando o desenvolvimento da autonomia e atitude reflexiva do aluno.

Dewes, Teixeira e Braga (2019) ressaltam que a Geometria Descritiva requer um elevado nível de abstração por parte dos estudantes, sendo possível afirmar que os recursos computacionais apresentam um considerável potencial para favorecer seu ensino. Entretanto, segundo os autores, sua utilização ainda é pouco difundida.

Lima, Cunha e Haguenaer (2008) discutiram as aplicações da RA na Geometria Descritiva em seu trabalho de 2008. Os autores apresentaram a tecnologia como uma inovação contemporânea, mencionando, contudo, alguns estudos preexistentes conduzidos na Universidade Federal do Pará e na Escola de Belas Artes da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Essas pesquisas envolveram o uso de cartões marcadores reconfiguráveis em ambientes de Realidade Aumentada, como apresenta a figura a seguir.

Figura 11 – Cartões marcadores reconfiguráveis em ambientes de Realidade Aumentada



Fonte: (Lima; Cunha; Haguenaer, 2008, p. 9)

A pesquisa de Lima, Cunha e Haguenaer (2008) envolveu a elaboração do VSTARGD - Visualizador de Superfícies Tóricas em Geometria Descritiva, empregando a Realidade Aumentada. Este instrumento possibilitava ao usuário a visualização de objetos estudados por meio de vinte e uma modalidades distintas. O aplicativo também fazia uso de cartões marcadores, conforme ilustrado na figura a seguir.

Figura 12 – VSTARGD



Fonte: (Lima; Cunha; Haguenaer, 2008, p. 13)

Para os autores, de modo geral, o ensino da Geometria Descritiva privilegiava “as chamadas Inteligência Lingüística e a Lógico-Matemática, negligenciando a Inteligência Espacial, daí resultando na dificuldade dos alunos em aprenderem a disciplina” (Lima; Cunha; Haguenaer, 2008, p. 14). Desse modo, o estudo com a RA seria considerado uma alternativa para fomentar o desenvolvimento de habilidades espaciais, visando minimizar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

Coelho (2012) também ressalta que a compreensão dos princípios da Geometria Descritiva não se revela uma tarefa trivial, demandando a capacidade de visualizar as configurações geométricas no espaço e a transformação que ocorre para sua projeção no plano. O autor separa três linhas de pesquisa que são mais comuns ao se investigar sobre Realidade Aumentada e Geometria Descritiva: a criação de situações geométricas tridimensionais específicas, em ambientes animados; o desenvolvimento de ambiente colaborativo, normalmente empregando HMD²¹; a avaliação da eficácia na aprendizagem e da aceitação dos alunos.

Em nossa pesquisa sobre Geometria Descritiva com RA foram desenvolvidas situações geométricas tridimensionais em um ambiente colaborativo em que os estudantes exploravam o aplicativo em duplas ou trios utilizando iPads, portanto sem a necessidade de um HMD. Houve uma boa aceitação dos alunos e, embora compartilhe esse aspecto com pesquisas anteriores, em relação ao exposto, nossa investigação se diferencia das demais por ser desenvolvida em uma perspectiva fenomenológica considerando que o aluno em interação com-a-RA constitui conhecimento geométrico. Ou seja, assumimos que, durante a exploração, não há uma separação entre o sujeito e o dispositivo. Ao estar-com-RA na exploração dos objetos espaciais o sujeito se torna ativo e suas ações delineiam o ambiente perceptivo que, de acordo com Bicudo e Kluth (2010), emerge como o pano de fundo no qual coexistimos, proporcionando um enquadramento para a apreensão espacial. “Portanto, a noção de espaço, conforme a compreende a Fenomenologia, não é construída pela ciência Geometria. Nós não nos localizamos porque nos baseamos em suas teorias, mas, ao contrário, sempre estamos localizados” (Bicudo; Kluth, 2010, p. 137).

Bicudo e Kluth (2010) afirmam que a origem do espaço reside nas relações orgânicas que se estabelecem entre o sujeito e o mundo, ou seja, na pertinência do sujeito ao mundo. Nesse contexto, compreendemos que não existe uma separação entre o sujeito e o objeto, pois ao se engajar na experiência com-a-RA, a realidade na qual ele se insere é a mesma em que ele conduz a investigação. A realidade é intrínseca à interação com o objeto investigado e, portanto, sujeito e objeto coexistem no mundo da vida.

A RA não é apenas um recurso potencializador para o ensino de Geometria, ela é o meio através do qual a investigação se torna possível. Com-a-RA o sujeito se depara com oportunidades de investigação singulares que envolvem os objetos que, frequentemente, não estão fisicamente ao seu alcance. É pela presença propiciada pela RA que ele tem meios para

²¹ head-mounted three dimensional display

fazer certo tipo de investigação. O aluno ao estar-com-a-RA pode “‘tocar’, circundar e visualizar os objetos em um ambiente 3D, o que pode possibilitar um grau de compreensão maior sobre ele, comparado a sua visualização apenas por meio de uma projeção 2D” (Schuster, 2020, p. 36). Quando nos referimos ao ato de tocar no contexto de RA, esse ato

não se refere ao contato físico, no sentido do tato. Tocar, no contexto da RA, refere-se a visualizar de maneira sobreposta, de modo que possamos manipular o objeto virtual utilizando o nosso corpo biologicamente encarnado, mas sem a possibilidade de descrever a textura do que tocamos. Também, de modo específico podemos circundar os objetos virtuais. O ato de circundar extrapola o significado literal do verbo, que é estar em volta, rodear, já que no contexto da RA podemos romper a limitação de observação externa do objeto virtual. Romper essa limitação de observação, significa que podemos entrar no objeto, mas esse entrar não é como quem entra numa piscina, é um entrar onde podemos nos acoplar a ele, unindo-nos, compondo-nos (Schuster, 2020, p. 36).

Dessa forma, essa materialidade oferecida pela RA, possibilita uma reinterpretação na qual o sujeito se identifica com-o-objeto a ser investigado. O participante não estabelece uma distinção entre a realidade física e a virtual, percebendo que o objeto “ocupa” a mesma localidade que ele ou “está” em um mesmo ambiente.

A interação entre sujeito e objeto ocorre no corpo-próprio ou corpo-vivente, conforme abordado na seção 2 desta tese. O envolvimento se dá em uma totalidade permitindo ao aluno que está-com-a-RA movimentar-se explorando o objeto. Ao se deslocar o aluno leva consigo o objeto e elege perspectivas para olhar. Essas perspectivas revelam aspectos dos objetos que, ao serem compartilhados, vão dando a idealidade que anteriormente discutimos.

Na seção subsequente, apresentamos a metodologia assumida na pesquisa expondo nossa compreensão acerca da abordagem fenomenológica.

4. SEÇÃO III – METODOLOGIA DE PESQUISA

Nesta seção, descrevemos a metodologia assumida na pesquisa, bem como os procedimentos para a constituição dos dados e sua análise. Começamos por explorar o significado que a pesquisa qualitativa e a abordagem fenomenológica têm na pesquisa. Em seguida, trazemos o contexto da coleta de dados, apresentamos os participantes e a estrutura da análise realizada.

4.1 Pesquisa qualitativa

“Pesquisar vem de *perquiro*, do latim *perquirere*, ou seja, quer dizer, buscar. Buscar o quê? Conhecer. Conhecer o quê? A realidade daquilo que esteja sob foco” (Bicudo, 2022a, p. 73, grifo da autora).

Ao conduzir uma pesquisa, mantemos um processo contínuo de ação, reflexão e ação, impulsionado pelo desejo de abordar questões que nos suscitem inquietação. Bicudo (2021) fala sobre como os primeiros filósofos pré-socráticos, que viveram nos séculos VIII, VII e VI a.C., apresentavam questionamentos acerca da natureza da realidade e buscavam fundamentar suas perspectivas por meio de argumentações embasadas em princípios lógicos e racionais. A autora nos leva a entender que, para viabilizar reflexões acerca do interrogado, é essencial que se estabeleça uma abordagem investigativa com procedimentos claramente definidos, orientando a ação que o pesquisador empreenderá e proporcionando uma estrutura para os possíveis desdobramentos que a pesquisa pode assumir.

Bicudo (2011) enfatiza que a pesquisa é uma forma de buscar respostas a uma pergunta, permitindo o retorno a essa questão sempre que necessário. Ela sustenta que a pesquisa abrange não apenas a busca pela resposta, mas também a consideração dos diversos caminhos que podem ser percorridos ao longo da investigação, incluindo a formulação da pergunta, a estruturação do projeto e a abordagem dos métodos de procedimento, entre outros aspectos. Isso nos fez atentos à busca pelo caminho e vimos que a postura qualitativa era o que melhor poderia contribuir para compreendermos a pergunta que norteia nossa pesquisa: *Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?*

“A consonância entre as dimensões ontológicas e epistemológicas ‘do quê’ e ‘do como’ se investiga o investigando confere um grau de confiança que transcende as análises apenas baseadas em cálculos e em explicitações de procedimentos metodológicos” (Bicudo, 2021, p. 11). A autora destaca para a relevância da pesquisa qualitativa a importância da apresentação dos procedimentos e da estrutura da análise dos dados.

Na pesquisa que desenvolvemos, a busca é pela compreensão que o aluno explicita ao investigar tarefas de Geometria Descritiva com o software de Realidade Aumentada. Nosso objetivo visa, portanto, as qualidades dos dados. Segundo Bicudo (2020a, p. 111), o termo qualitativo “engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões”. Ou, de acordo com Chizzotti (2003), o termo qualitativo se refere a uma

partilha densa com pessoas, fatos e locais que constituem objetos de pesquisa, para extrair desse convívio os significados visíveis e latentes que somente são perceptíveis a uma atenção sensível e, após este tirocínio, o autor interpreta e traduz em um texto, zelosamente escrito, com perspicácia e competência científicas, os significados patentes ou ocultos do seu objeto de pesquisa (Chizzotti, 2003, p. 221).

Dessa forma, entende-se que a pesquisa qualitativa nos proporciona explorar os significados que se tornam evidentes ou perceptíveis ao pesquisador. Ela privilegia

a objetividade dada pela neutralidade do investigador e pela consistência dos dados tratados, a racionalidade explicitada como quantificação, a definição prévia de conceitos e a construção de instrumentos para garantir a objetividade da pesquisa, privilegiam-se descrições de experiências, relatos de compreensões, respostas abertas a questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos, etc. (Bicudo, 2020a, 112-113).

Ou seja, a abordagem de pesquisa é delineada pela intenção de compreender elementos da experiência humana sem se restringir à mensuração, métodos estritamente pré-determinados, quantificação ou cálculos associados.

Dar prioridade aos aspectos qualitativos representa uma alternativa para a investigação. Sendo qualitativa a abordagem requer a presença de um pesquisador que procura compreender a realidade por meio de uma relação entre sujeito e objeto de estudo. O pesquisador descreve o que observa, buscando atribuir significado às questões que surgem. Nesse ponto, ocorre uma distinção entre os métodos (ou abordagens) da pesquisa qualitativa. Dizemos que quando o pesquisador se volta intencionalmente para o que a ele se mostra, visando compreender isso que se mostra, ele adota uma perspectiva fenomenológica. Ou seja, assume-se que o objeto (aquilo que se mostra) é correlato ao sujeito (que se volta intencionalmente). Portanto, não há separação sujeito e objeto.

Pode-se dizer que o que diferencia a pesquisa qualitativa de uma pesquisa quantitativa na abordagem fenomenológica “é a pedra angular da Fenomenologia: a intencionalidade e a atitude dela decorrente que já não é mais natural” (Bicudo, 2020a, p. 115). Ainda segundo essa autora, “para a Fenomenologia, a intencionalidade é a essência da consciência, ou seja, sua característica peculiar” (Bicudo, 2020a, p. 115). Desse modo, o sujeito deve estar atento ao que

se mostra na pesquisa, suspendendo os seus conhecimentos prévios para que o que se doa na percepção possa ser compreendido tal qual se mostra.

“Não há uma separação entre o percebido e a percepção de quem percebe, uma vez que é exigida uma correlação de sintonia, entendida como doação” (Bicudo, 2011, p. 19). O percebido é comunicado por meio de diferentes modalidades, como a oralidade, a escrita, a expressão artística, entre outras, possibilitando que “o percebido já não é do sujeito, mas está apresentado (dado) à comunidade, solicitando, então, procedimentos de análise e interpretação” (Bicudo, 2011, p. 19).

Para compreender o interrogado em nossa pesquisa adotamos uma abordagem fenomenológica com a qual elaboramos e conduzimos as tarefas para os alunos do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva (DGDD). Durante os oito encontros, as ações foram registradas em vídeo mediante as gravações da tela dos iPads e a transcrição dessas gravações se constituíram nos dados para a análise. Os detalhes desses encontros serão apresentados na seção 4.3. A seguir, abordaremos a postura adotada e introduziremos os aspectos da análise de dados segundo a postura fenomenológica para dar clareza ao que foi feito na pesquisa.

4.2 A abordagem fenomenológica

A fenomenologia²², segundo Bicudo (2010), é uma escola filosófica, cujo núcleo central reside na busca pelo significado que as coisas do nosso entorno, no horizonte do mundo da vida, fazem para nós. “É essa busca de sentido que faz a diferença e se coloca como significativa, em especial no contexto da Educação [...] Tal compreensão pode se dar em níveis diferenciados da experiência vivida, nos próprios atos realizados, em seus desdobramentos e expressões” (Bicudo, 2010, p. 26).

Fenomenologia é uma palavra composta por fenômeno + *logos*. Fini (1994, p. 25), diz que fenômeno é “aquilo que surge para a consciência e se manifesta para esta consciência como resultado de uma interrogação. Isso quer dizer que só existirá um fenômeno educacional se existir um sujeito no qual ele se situa ou que o vivencia.” e Bicudo (2010, p. 29) diz que *logos*

²² Edmund Husserl é tido como o “criador” da Fenomenologia. Nasceu em Prossnitz, na Morávia, no antigo Império Austríaco (hoje Prostějov, na República Checa), em 8 de abril de 1859, e morreu em Freiburg, em 27 de abril de 1938. A fim de completar seus estudos de Matemática, iniciados nas universidades alemãs, foi, em 1884, para Viena, onde, sob a influência de Franz Brentano, tomou consciência de sua vocação filosófica. Em 1887, Husserl, que fora judeu, converteu-se à Igreja Luterana. Ensinou Filosofia, como livre-docente, em Halle, de 1887 a 1901; em Göttingen, de 1901 a 1918; e, em Freiburg, de 1918 a 1928, quando se aposentou. Na raiz do pensamento de Husserl encontram-se as seguintes influências principais: Franz Brentano e, por seu intermédio, a tradição grega e escolástica; Bolzano, Descartes, Leibniz, o empirismo inglês e o kantismo. (Bicudo, 2011, p. 29)

é entendido “como pensamento, reflexão, reunião, articulação”, Entendemos Fenomenologia como uma reflexão daquilo que se mostra ao sujeito.

Assim, o fenômeno não é a aprendizagem, por exemplo, mas a aprendizagem para o sujeito que aprende. Em nosso caso, os alunos, ao estarem com o software GeoGebra AR na aula de DGGD, em Geometria Descritiva especificamente, construindo formas, manipulando imagens com o aparelho eletrônico, demonstram diferentes modos de compreender o que estão realizando. O fenômeno ou aquilo que se mostra, aquilo que buscamos ver ou o que se revela em seus modos de aparecer, se dá na expressão; em nosso caso nas expressões dos alunos que expõem suas compreensões. Essas manifestações possibilitam ao pesquisador abordar o tema de sua pesquisa destacando o fenômeno que, nesta pesquisa é *A compreensão da Geometria Descritiva ao estar-com-RA*. Esse fenômeno se manifesta na disposição do aluno para a compreensão e abertura à experiência com-RA. Novamente salientamos que o fenômeno não é a compreensão em si, mas a compreensão do aluno que faz explorações e explicita o sentido que o feito tem para ele. Ou seja, focamos a compreensão dos alunos que é explicitada por eles de diferentes formas: oralmente, corporalmente (por meio de gestos), pela escrita etc.

Considerando a fenomenologia como uma reflexão daquilo que se mostra ao sujeito, questionamos: Onde se mostra? A quem se mostra? Como se mostra? Essas questões podem ser compreendidas com Bicudo (2010) para quem “o que se mostra está ligado ao mundo físico, fenomênico, mas também à subjetividade daquele a quem se mostra. [...] O fenômeno é o que é visto disso que se mostra. Nós o compreendemos como o *encontro entre quem olha com atenção e o que é visto*” (p. 29, grifo nosso). Esse encontro ocorre de maneira intencional para aquele que direciona sua atenção ao que se manifesta buscando compreender os seus questionamentos. Em um ato intencional da consciência o que é dado, é dado na percepção, na vivência do sujeito. É uma “verdade compreendida como presença” (Bicudo, 2020a, p. 30).

A interrogação, “*Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?*”, permeia todo o processo de busca de compreensão, em um ato intencional da pesquisadora que a faz atenta a compreensão geométrica dos alunos. Pode-se dizer que ao interrogar a compreensão nos voltamos para a constituição do conhecimento desse aluno que faz explorações com RA.

Compreender é movimento que busca harmonia e que se dá no corpo que vive. Isso não significa que o conhecimento histórico-sócio-cultural seja gerado e materializado nessa dimensão corpórea. Também não quer dizer que a constituição do conhecimento seja uma atividade eminentemente solipsista, encerrada na subjetividade de um sujeito que cria o conhecimento do mundo, separado do mundo. Na dimensão histórico-sócio-cultural, entendo, já adentrando por modos fenomenológicos de explicar

compreensões sobre esse assunto, que o conhecimento se instaura como uma produção que abrange tanto a compreensão do sujeito, quanto todos os modos pelos quais essa compreensão é expressa pela linguagem e por respectivas possibilidades de inscrevê-las em materialidades disponíveis no mundo, passando por filtros de compreensões intersubjetivas acordadas por culturas. Por isso temos falado em constituição e produção de conhecimento (Bicudo, 2023, p. 112).

Em nossa pesquisa, consideramos a abertura à aprendizagem geométrica do aluno quando eles fazem explorações com o software GeoGebra AR e nos voltamos para o sentido que as tarefas vão fazendo para o aluno, um sentido que é explicitado por gestos, palavras e ações. As tarefas foram elaboradas de modo a suscitarem questionamentos, favorecendo o processo investigativo. No movimento de análise dos dados, da busca de sentido para o que estava sendo interrogado, a retomada da pergunta orientadora da pesquisa é crucial. Também nas aulas ela estava presente orientando um modo de mediar as situações para oportunizar a expressão dos alunos dando-nos a ver os modos pelos quais suas compreensões se manifestavam enquanto investigavam com o software de RA. Compreendemos com Bicudo (2010) que na condução de uma pesquisa fenomenológica todos os passos realizados pelo pesquisador são intencionais, e este deve manter a devida atenção para transitar do mundo percebido para a elaboração da estrutura do fenômeno. “Nesse solo, a interrogação floresce, instala-se como intencionalidade e se estabelece como interrogação geradora de investigação” (Bicudo, 2010, p. 42).

A interrogação é infundável, uma vez que o fenômeno pode se apresentar de maneira diversa dependendo da perspectiva do olhar ou dos modos pelos quais o analisamos. Ou, nos dizeres de Fini (1994), o fenômeno é perspectival, é subjetivo, porém “a subjetividade, nesta abordagem, não é evitada, mas desejada, pois tudo que é objetivo foi antes subjetivo” (Fini, 1994, p. 26) já que é compreensão do sujeito. Essa compreensão expressa no diálogo, nas situações de sala de aula e na exploração com o software é para o que, no decorrer da análise dos dados, nos voltamos.

A produção dos dados na pesquisa fenomenológica se dá na experiência vivida, na vivência com os sujeitos, é documentada por meios diversos – em nosso caso, pela gravação das telas dos iPads - e convertida em texto, disponível para interpretação.

No decorrer da análise dos dados “[d]izemos que colocamos o fenômeno em suspensão, ou seja, em *epoché*, deixando-o livre de conceitos e concepções teóricas prévias que possam postular o que ele é” (Bicudo, 2010, p. 41). Essa postura indica que os significados são buscados na expressão dos sujeitos, no modo pelo qual os alunos que investigavam situações geométricas no GeoGebra AR se dispõem a falar sobre o feito, sendo essa busca orientada pela interrogação. “Sobre esse procedimento é importante esclarecer que o pesquisador não é neutro. A

Fenomenologia não diz que ele deve partir do ponto zero, em que fingiria nada saber sobre o investigado” (Bicudo, 2010, p. 41), mas que o pesquisador opera dentro de um contexto histórico e nosso entendimento sobre o fenômeno se dá pelas bases históricas que delimitam nossa atuação.

A interrogação, portanto, está presente em toda a pesquisa e, principalmente, durante a análise, quando o pesquisador busca nas falas/gestos dos sujeitos as expressões que o ajudem a compreender o interrogado.

Após a transcrição da experiência vivenciada, o pesquisador volta sua atenção ao texto. À luz de sua pergunta norteadora, questiona as perspectivas ou o que emerge nas distintas declarações dos sujeitos visando uma compreensão mais profunda do que está sendo investigado. O ponto de partida é o processo de análise ideográfica, que “se refere ao emprego de ideogramas, ou seja, de expressões de ideias por meio de símbolos” (Bicudo, 2011, p. 58) para organizar aspectos da transcrição relevantes ao interrogado. Ou seja, nessa fase da análise o pesquisador busca tornar visível a ideologia presente nas transcrições, derivada das interações individuais e das contribuições de cada aluno no diálogo. Para tanto, o pesquisador identifica os elementos relevantes que podem ser palavras ou frases das falas dos sujeitos que irão compor o que se denomina Unidades de Significado (U.S.).

Destacadas as U.S. de todo o texto, o pesquisador passa a interpretar o dito. Esse procedimento visa à busca pelas ideias centrais, chamadas de Ideias Nucleares (I. N.). Tais ideias reforçam elementos presentes nas declarações individuais, porém ganham significado para o pesquisador no contexto global da pesquisa, contribuindo para sua compreensão do que é interrogado. Contudo, uma vez que nenhum objeto se manifesta de forma isolada, realiza-se uma síntese dessas proposições (I.N.) agrupando-as por temas. Nesse processo interpretativo vai se adentrando a análise nomotética.

A análise nomotética “indica o movimento de reduções que transcendem o aspecto individual da análise ideográfica” (Bicudo, 2011, p. 58) visa, portanto, extrapolar o aspecto individual em busca do sentido do fenômeno. Em outras palavras, o pesquisador se desloca do nível individual, que se relaciona com a compreensão de cada expressão analisada no contexto ideográfico, em direção à identificação de “padrões gerais” ou generalidades de fala que possibilitam a elaboração de categorias abertas apontando para a estrutura do fenômeno.

As categorias abertas permitem explorar o que é interpretado como elemento essencial para a compreensão daquilo que se está investigando na pesquisa. Importante ressaltar, como mencionado anteriormente, que o fenômeno nunca é esgotado, uma vez que ele é *perspectival*. No entanto, as generalidades articuladas pelo pesquisador durante o processo de análise

fornecem uma compreensão possível. Considerando-se essa característica do fenômeno, o pesquisador fenomenólogo não identifica universalidades absolutas em sua pesquisa, mas sim proposições gerais que possibilitam expor sua compreensão do objeto de estudo. Em outras palavras, no movimento de análise fenomenológica, o objetivo é elucidar o significado das convergências identificadas e expor a compreensão do interrogado.

Assumindo a postura fenomenológica buscamos *as compreensões explicitadas por alunos que investigam Geometria Descritiva com realidade aumentada* e, para isso trilhamos um caminho com o qual seja possível interpretar os diálogos entre os alunos durante a investigação com a Realidade Aumentada. Esse percurso nos leva a uma análise crítica e reflexiva ao realizarmos o movimento de transcendência²³, elucidando as compreensões dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

4.3 A vivência com os alunos da Licenciatura em Matemática.

A pesquisa foi realizada em uma universidade pública situada em um município do interior paulista. O curso de Licenciatura em Matemática iniciou em 2002 e oferece, anualmente, 30 vagas. Em sua grade curricular o curso oferece as disciplinas obrigatórias - **Desenho Geométrico e Geometria Descritiva**, Fundamentos de Álgebra Moderna, Fundamentos de Matemática Elementar, Programação de Computadores, Geometria Analítica e Vetores, Cálculo Diferencial e Integral I e II, Álgebra Linear, Cálculo Numérico, Equações Diferenciais Ordinárias, Geometria Euclidiana, Modelagem Matemática I, Didática Especial da Matemática, Metodologia da Pesquisa Científica, Prática de Ensino de Matemática I e II, Álgebra Moderna, Fundamentos de Análise Matemática e História da Matemática.

A disciplina DGGD, em que realizamos a pesquisa, é um componente curricular de 60 horas, oferecida no segundo semestre do primeiro ano. Está organizada no horário da turma para que tenha dois encontros semanais, com duração de 100 minutos cada. Em 2022, ano que realizamos a pesquisa, os encontros ocorriam às quartas-feiras, das 21h10 às 22h50, e aos sábados, das 08h00 às 09h40. Em acordo com o professor da turma, que chamaremos de Euclides, foram disponibilizadas 8 quartas-feiras para os encontros de modo que fosse possível trabalhar os temas de Geometria Descritiva.

²³ Em fenomenologia, diz-se transcendência o ato de perceber e intencionalmente, portanto de modo atento, consciente, voltar sobre o percebido em busca de seu sentido. É sempre transcendência intencional, que solicita atos de reflexão. Atos esses que possibilitam “saltos” de sínteses, que reúnem compreensões e interpretações em “todos” os que se mostram em diferentes perspectivas. O próprio ato de perceber traz em si a transcendência e imanência, ou seja, mostra a coisa percebida, na perspectiva do visto, e insinua o que não está mais ali, o ausente (Bicudo, 2010, p. 27).

É relevante destacar que o professor Euclides estava presente em todas as aulas que foram conduzidas pela pesquisadora, auxiliando os alunos e esclarecendo dúvidas que surgiam durante a utilização do software. Tínhamos um total de 20 alunos inscritos na disciplina e, nas aulas de quarta-feira, as atividades eram conduzidas no Laboratório de Ensino de Matemática, um ambiente (sala de aula) especialmente organizado para a realização de trabalho em grupo. Trata-se de uma sala espaçosa cujas mesas estão dispostas de tal forma que os alunos podem trabalhar em quartetos, proporcionando uma dinâmica mais favorável à interação e colaboração.

Como a pesquisa foi realizada na disciplina, para a avaliação foram agendados dois momentos no semestre em que o professor fez uma prova abrangendo temas pertinentes ao Desenho Geométrico e à Geometria Descritiva. Essas provas compuseram 80% da nota semestral. As atividades dos alunos durante os encontros com a pesquisadora, acompanhadas pelo professor Euclides, corresponderam aos restantes 20% da nota semestral. É importante destacar que houve um convite aos alunos para a participação na pesquisa e aqueles que optassem por não participar realizariam as atividades da mesma forma que os demais; contudo, seus dados seriam excluídos da análise para a elaboração desta tese²⁴.

Com a intenção de expor as atividades realizadas pelos alunos durante os encontros, apresentaremos a seguir uma descrição detalhada de cada encontro.

4.3.1 PRIMEIRO ENCONTRO

No primeiro encontro apresentamos aos alunos a ementa do curso e o projeto de doutorado. Após o esclarecimento de dúvidas e comentários, fizemos o convite para a participação deles na pesquisa e apresentamos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) que deveria ser assinado por aqueles que concordassem fazer parte da pesquisa. Nesse momento, foi-lhes assegurado que, caso não desejassem participar da pesquisa, sua participação nas aulas e nas atividades não seriam comprometidas, apenas as informações sobre o que eles faziam seriam excluídas quando fizéssemos a transcrição para a análise dos dados. No entanto, todos os alunos concordaram em fazer parte da pesquisa e assinaram o TCLE.

Dando continuidade aos esclarecimentos informamos que seria criada uma turma no ambiente virtual Google Classroom, pois ao longo dos encontros as tarefas seriam postadas nessa plataforma, ficando acessíveis a todos os participantes.

²⁴ Todos os alunos consentiram em participar da pesquisa, o que dispensou a necessidade de exclusão de dados para a realização da análise e a elaboração da tese.

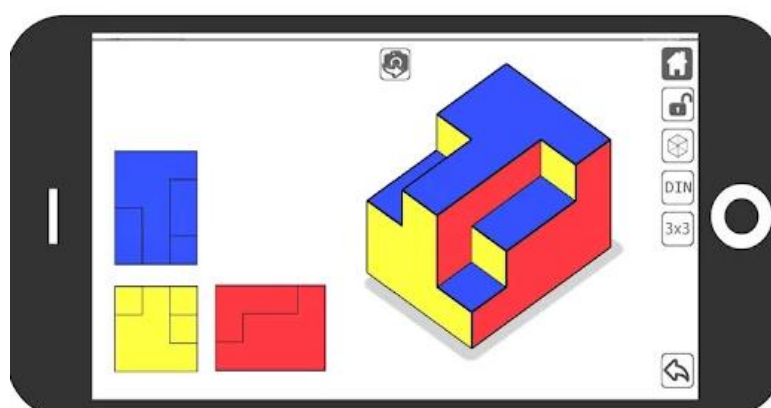
Posteriormente às informações iniciais, indagamos os alunos sobre a familiaridade que tinham com o software. Vimos que a maioria não havia tido experiência prévia com o GeoGebra e, então, realizamos uma atividade introdutória para lhes apresentar o aplicativo e as ferramentas básicas para a construção no GeoGebra Calculadora 3D. Para isso, os alunos foram organizados em duplas (ou trios) e foi disponibilizado um iPad por grupo.

Após a exposição das ferramentas básicas, foi proposto que os alunos construíssem um prisma pentagonal, uma pirâmide quadrangular e um cone. Após a conclusão das construções, os alunos foram orientados a projetar esses sólidos em RA.

Visando ampliar a exploração das ferramentas do software, sugerimos aos alunos que planificassem o prisma e a pirâmide construídos e classificassem os polígonos das faces desses poliedros. O objetivo da classificação foi utilizar as ferramentas de medição (para lados e ângulos).

Para finalizar as explorações sugerimos aos alunos um aplicativo chamado IsoMetrik. Ele é um aplicativo que permite explorar as vistas ortogonais de um cubo (com diferentes cortes). Esse aplicativo traz um cubo em perspectiva e permite fazer cortes em suas faces. Ou seja, a proposta é que, com base nas projeções das faces, seja possível destacar as vistas. A indicação era ter um aplicativo adicional para a visualização das faces dos poliedros, aspecto importante para a compreensão do que será tratado na disciplina. No exemplo abaixo, a vista da face frontal (amarela), superior (azul) e lateral (vermelha).

Figura 13 – Exemplo das vistas do IsoMetrik



Fonte: Google Play²⁵

²⁵ <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.garrojohn.juegos.isometrik&hl=pt>

4.3.2 SEGUNDO ENCONTRO

No segundo encontro iniciamos a abordagem do primeiro tema a ser tratado na disciplina, que era sobre os Sistemas de Projeção Cônico e Cilíndrico. Para a exploração desse tema foi disponibilizado, pelo Google Classroom, a Tarefa 1 que será detalhada a seguir. No encerramento da aula, promovemos uma discussão com os alunos para que eles compartilhassem suas observações e elaborássemos conclusões coletivamente.

A Tarefa 1 (Clique no link para ir ao Apêndice A) propôs a construção de um ponto inicial, denominado A, bem como a construção de figuras planas e suas respectivas projeções. Para conduzir a investigação e responder aos questionamentos apresentados na atividade, os alunos foram instigados a movimentar-se com o ponto A, analisando e verificando quais propriedades se mantinham constantes ao longo do deslocamento realizado.

O QR Code²⁶ a seguir traz um pequeno vídeo com uma exploração da construção proposta na Tarefa 1. O aluno movimentava-se para ver como ficava a projeção à direita e à esquerda do plano de interseção do objeto.

Figura 14 – QR Code I



Fonte: Elaborado pela autora²⁷

4.3.3 TERCEIRO ENCONTRO

No terceiro encontro, fizemos uma breve introdução sobre Gaspar Monge e sua contribuição para a Geometria Descritiva, nomeadamente em relação ao Sistema Mongeano. Gaspar Monge desenvolveu um sistema de projeção baseado em projeções ortogonais que estabelece uma correspondência biunívoca entre os elementos de um plano e do espaço tridimensional.

²⁶ Estes vídeos são recortes das gravações do trabalho com os alunos.

²⁷ https://drive.google.com/file/d/1tqYC35MbqH_fZ_LprzdFOTPyLDkrC8Tv/view

Após essa introdução, os alunos foram convidados a explorar a [Tarefa 2](#) (Clique no link para ir ao Apêndice B). Nela o objetivo era explorar as características do Sistema Mongeano. Os alunos construíram o Sistema Mongeano e, em seguida, fizeram a projeção em Realidade Aumentada (RA). Quando projetado em RA, o GeoGebra automaticamente realizava a volta para o Sistema Cartesiano. Com base nessa observação, pedimos que os alunos registrassem o que entendiam relativamente às diferenças entre esses sistemas: mongeano e cartesiano.

Ao término da tarefa, promovemos uma discussão com os alunos para que eles pudessem compartilhar suas percepções e discutir suas conclusões. Ao final dessa discussão sistematizamos as diferenças fundamentais entre os eixos do Sistema Mongeano (Abscissa, Afastamento e Cota) e os eixos do Sistema Cartesiano (x, y e z).

Em seguida os alunos passaram para a [Tarefa 3](#) (Clique no link para ir ao Apêndice C), ainda sobre o estudo do Sistema Mongeano. Para essa tarefa elaboramos, previamente, duas outras tarefas que foram disponibilizadas nos recursos online do site geogebra.org. Os alunos acessaram essas atividades por meio dos links²⁸ fornecidos no ambiente virtual Google Classroom e fizeram as explorações.

Neste QR Code é trazida a exploração feita para transitar da visualização 3D para a visualização em RA, explorando o sistema (Mongeano - Cartesiano).

Figura 15 – QR Code II



Fonte: Elaborado pela autora²⁹

Para a finalização da aula, foi feito o fechamento das ideias explicitadas na discussão destacando-se o estudo do Diedro e das Épuras.

²⁸ Link I - <https://www.geogebra.org/3d/z6srqgtm>

Link II - <https://www.geogebra.org/3d/jbz8tmny>

²⁹ https://drive.google.com/file/d/1EMthofFv4rYCKM92lQrmn_F0rDhOw6IM/view

O QR Code a seguir apresenta a visualização da projeção de uma face de um sólido em é pura.

Figura 16 – QR Code III



Fonte: Elaborado pela autora³⁰

4.3.4 QUARTO ENCONTRO

No quarto encontro, os alunos realizaram a [Tarefa 4](#) (Clique no link para ir ao Apêndice D), ainda com explorações sobre Diedro e É pura. Elaboramos três tarefas que foram disponibilizadas aos alunos no site geogebra.org. Os alunos tiveram acesso às atividades por meio dos links³¹ fornecidos no ambiente virtual Google Classroom.

Na primeira etapa da tarefa, os alunos deveriam utilizar o primeiro link disponibilizado para visualizar as faces dos sólidos em RA e, posteriormente, responder a questões específicas relacionadas às faces em determinados diedros. Nos dois links subsequentes, os sólidos eram fornecidos e os alunos foram orientados a construir suas respectivas faces em é pura, registrando suas construções por meio de capturas de tela.

Terminada a Tarefa pedimos aos alunos que fizessem a construção de um sólido (de livre escolha) no diedro que preferissem e as projeções desse sólido em um plano. Estando em um contexto de disciplina regular do curso, como etapa final, foi distribuída aos alunos uma [lista de exercícios](#) (Clique no link para ir ao Apêndice G) cujo objetivo era que eles transpusessem as vistas obtidas no software para o papel. A lista incluía, ainda, exercícios de vestibulares acerca da projeção de sólidos. Os alunos iniciaram a lista em sala de aula e finalizariam como tarefa para o próximo encontro. O conteúdo dessa lista pode ser encontrado no Apêndice A.

³⁰ <https://drive.google.com/file/d/11B-yWvax-U5LjnTtaFwxvqQqFSfqKjLZ/view>

³¹ Link I - <https://www.geogebra.org/3d/zfesdmfn>

Link II - <https://www.geogebra.org/3d/u6mkkrej>

Link III - <https://www.geogebra.org/3d/wxcm2d9g>

4.3.5 QUINTO ENCONTRO

No início da aula fizemos a correção da lista de exercícios procurando organizar os assuntos trabalhados até aquele momento. Durante a correção fomos tirando dúvidas e esclarecendo os critérios de avaliação referentes ao conteúdo de Geometria Descritiva que seria abordado na prova (exigência da disciplina). A prova, como dissemos, envolveria tanto os temas relacionados ao Desenho Geométrico, ministrados pelo professor Euclides nas aulas de sábado, quanto os aspectos de Geometria Descritiva desenvolvidos nas aulas de quarta-feira com a pesquisadora.

Como atividade de encerramento da aula os alunos construíram um novo sólido, escolheram o diedro de sua preferência e fizeram suas projeções, tanto no software quanto com papel, lapiseira e régua.

4.3.6 SEXTO ENCONTRO

Neste encontro foi feita uma breve introdução sobre o Sistema de Projeção Ortogonal e as vistas ortográficas³². Em seguida, os alunos realizaram a [Tarefa 5](#) (Clique no link para ir ao Apêndice E).

Para a Tarefa 5 foram elaboradas previamente três outras tarefas disponibilizadas no site geogebra.org, cujos links³³ foram enviados aos alunos pelo Google Classroom. O objetivo da tarefa era que os alunos explorassem a projeção do primeiro link e, em seguida, realizassem a épura das projeções dos segundo e terceiro links.

A proposta desta tarefa apresentava similaridade com a anterior, porém com ênfase nas construções no sistema ortogonal. Na etapa inicial, os alunos deveriam acessar o primeiro link disponibilizado para visualizar, em Realidade Aumentada, as faces dos sólidos previamente construídos em projeção ortogonal. Nos dois links subsequentes, os sólidos foram fornecidos e os alunos foram instruídos a elaborar as respectivas faces no referido sistema, documentando suas construções por meio de capturas de tela.

É relevante destacar que os questionamentos dos alunos foram sendo reduzidos à medida que o curso avançava. Durante as construções, eles eram orientados a selecionar a opção de Realidade Aumentada (AR) para a visualização. Entretanto, muitos optavam por pular essa etapa e passavam diretamente para a representação das vistas em papel sulfite.

³² Vistas ortográficas, segundo Scalco (2016), derivam das projeções cilíndricas ortogonais e são descritas em um único plano denominado Épura Mongeana.

³³ Link I - <https://www.geogebra.org/3d/yqraudjn>

Link II - <https://www.geogebra.org/3d/kdcg3wzp>

Link III - <https://www.geogebra.org/3d/an3hfm7g>

Devido à defasagem no calendário escolar decorrente da pandemia da COVID-19, após este encontro houve o recesso de final de ano e os alunos retornaram em janeiro de 2023 para encerramento do ano letivo.

Com o QR Code a seguir apresenta-se trecho de uma discussão sobre as vistas ortogonais.

Figura 17 – QR Code IV³⁴



Fonte: Elaborado pela autora

4.3.7 SÉTIMO ENCONTRO

Neste primeiro encontro após o recesso fizemos a correção das questões da prova relativas aos temas de Geometria Descritiva. Esclarecemos as dúvidas explicitadas e aproveitamos para rever alguns temas que não haviam ficado claros para os alunos.

Terminado esse momento de correção e revisão, os alunos realizaram a [Tarefa 6](#) (Clique no link para ir ao Apêndice F) que envolvia projeções de sólidos.

Essa atividade teve como objetivo apresentar os diferentes tipos de linhas empregadas na representação das vistas dos sólidos quando projetados bidimensionalmente. Com base na tabela da ABNT, que especifica os padrões de utilização das linhas, os alunos foram orientados a construir as vistas dos sólidos no GeoGebra AR aplicando, de forma adequada, cada tipo de linha em suas representações.

Para sistematizar o que foi exposto sobre as linhas empregadas na representação das projeções, indicamos uma atividade de livre acesso nos recursos do GeoGebra que tratava das Vistas Ortográficas.

Após a conclusão da tarefa, foi entregue aos alunos a segunda [lista de exercícios](#) (Clique no link para ir ao Apêndice H) explorando temas que seriam avaliados na segunda prova da

³⁴ <https://drive.google.com/file/d/1qCEyx6GIIW8kKvNQbIte4YoGIN2MLAGk/view>

disciplina. Os alunos iniciaram a resolução dessa lista em sala de aula e concluíram como tarefa. A lista encontra-se no Apêndice C.

4.3.8 OITAVO ENCONTRO

No oitavo e último encontro, procedemos à correção da lista de exercícios, esclarecendo as dúvidas remanescentes relacionadas aos tópicos discutidos ao longo do curso e fizemos o encerramento.

Ainda, neste encontro apresentamos aos alunos um Formulário Google e pedimos a eles que respondessem para dar um *feedback* acerca da experiência vivida na disciplina. As questões desse formulário foram as seguintes:

1. Descreva como era sua experiência com o GeoGebra anterior à disciplina de DGGD.
2. Você já teve contato com a Realidade Aumentada anteriormente, mesmo que em outro software? Como foi essa experiência?
3. Assinale uma ou mais alternativas que descrevam o que você achou das atividades
 - Agradáveis
 - Chatas
 - Confusas
 - Curiosas
 - Desafiadora
 - Difíceis
 - Empolgantes
 - Envolvente
 - Fácil compreensão
 - Interessantes
 - Intuitivas
 - Monótonas
4. Descreva a facilidade/dificuldade nas construções no software.
5. A Realidade Aumentada te ajudou na compreensão dos sistemas de projeção? Justifique.
6. Explique como (ou se) a Realidade Aumentada foi relevante para sua diferenciação dos espaços entre Monge e Descartes.
7. Você sugeriria alguma alteração nas atividades da disciplina? Se sim, qual(is)?
8. Escolha uma palavra que possa definir a sua experiência com a Realidade Aumentada e comente. (Exemplo: surpresa, pois não esperava que...)

Enfatizamos que a resposta ao formulário não era obrigatória e que eles poderiam responder calmamente e nos entregar em duas semanas. Enfatizamos que a sinceridade representava um fator crucial nas respostas e que eles deveriam se expressar de maneira franca, tanto em relação a aspectos positivos quanto negativos da disciplina e a respeito da utilização da RA. Dos 20 alunos matriculados na disciplina, 13 responderam ao formulário.

Na próxima seção apresentamos a análise dos dados da pesquisa.

5. SEÇÃO IV – UM OLHAR PARA OS DADOS DA PESQUISA

Nesta seção apresentamos à análise dos dados de pesquisa. Destaca-se que esses dados são oriundos da transcrição dos oito encontros nos quais discutimos com os alunos temas relativos à Geometria Descritiva.

5.1 Expondo o movimento de análise fenomenológica

Para iniciar a análise dos dados, conforme destacamos na seção de metodologia, começamos com a análise ideográfica. Ou seja, após ter transcritos os encontros, fizemos a leitura atenta de cada um deles para compreender o sentido do todo. Voltamos lendo de forma mais intensa para destacar algumas falas dos alunos que entendemos serem relevantes para compreender a nossa interrogação: *Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?*

Para apresentar o modo pelo qual a análise ideográfica foi realizada, optamos por utilizar códigos que identifiquem o encontro (1, 2, 3, ... 8) e a tarefa (1, 2, 3, ...). Adotamos pseudônimos para os alunos visando manter sua privacidade. Elegemos, para os pseudônimos, cientistas cujo envolvimento simboliza, para nós, a natureza significativa de suas contribuições - a cada encontro, uma nova descoberta se revelava.

Com isso os códigos empregados ficam da seguinte forma: Ada Lovelace E2T1. Esse código denota que nos referimos à fala de Lovelace na 1ª tarefa do 2º Encontro. Com os códigos pudemos elaborar o quadro em que apresentamos a análise ideográfica. As colunas desse quadro estão nomeadas como “Identificação”, onde se traz os códigos acima explicitados, “Fala do sujeito”, que exhibe a transcrição da fala do aluno sem modificações, ou seja, são as Unidades de Sentido. A terceira coluna “Explicitação da pesquisadora” (Unidades de Significado) traz a interpretação da pesquisadora em relação à fala do sujeito, considerando-se, além do que é dito à exploração feita, o que foi gravado na tela do iPad. Ou seja, como há frases curtas procuramos detalhar retomando as gravações. Na coluna “Ideias nucleares”, procura-se destacar na fala daquele sujeito o que é nuclear para a pesquisadora à luz de sua interrogação.

No quadro 2, que traz a análise das respostas do formulário, a “Fala do sujeito” foi substituída por “Escrita do sujeito”, embora a ideia interpretativa seja a mesma do quadro 1. Vale destacar que, para a compreensão da vivência nos diferentes encontros, inserimos linhas para explicitar o que foi realizado naquele encontro.

Quadro 1 - Análise Ideográfica dos dados das transcrições

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
<p>Encontro 2: Neste encontro foi proposto aos alunos que investigassem os sistemas de projeção cônica e cilíndrica utilizando o GeoGebra AR. Durante as explorações eles foram desafiados a identificar cada projeção. Havia, para a tarefa, um roteiro para a construção e uma série de perguntas com o objetivo de estimular a reflexão acerca do que se mostrava nas explorações. A Tarefa 1 propôs a construção de um ponto inicial, denominado A, bem como a construção de figuras planas e suas respectivas projeções. Para conduzir a investigação e responder aos questionamentos apresentados na atividade, os alunos foram instigados a movimentar-se com o ponto A, analisando e verificando quais propriedades se mantinham constantes ao longo do deslocamento realizado. Clique no link para ser direcionado à Tarefa 1. Ao término da aula conduzimos uma discussão para que os alunos partilhassem suas observações e conclusões. Fizemos uma sistematização do que foi discutido para caracterizar cada um dos sistemas de projeção abordados. É relevante salientar que, nesse primeiro encontro, os alunos tiveram dificuldade com as construções no GeoGebra. Essas construções eram feitas primeiro no GeoGebra 3D para em seguida serem projetadas em AR.</p>			
Carl Gauss E2T1	“Aonde que é pra ir? No A?”	Na tentativa de abordar a questão proposta na tarefa, Gauss pergunta sobre qual a direção a ser tomada com a RA. Ele indaga se deve dirigir-se ao Ponto A (Ponto de fuga), evidenciando que concebia o ponto A como um local no espaço ao qual poderia deslocar-se fisicamente em direção ao objeto.	1. Busca para onde ir.
Ada Lovelace E2T1	“E aí? O que acontece quando você se afasta do círculo inicial?” Ao ouvir a questão de Lovelace, Gauss se afasta, levando consigo o ponto A, para tentar responder ao questionamento.	Lovelace indaga o que acontece ao se afastar do círculo inicial e Gauss se distancia levando consigo o ponto A. Ao se deslocar, Gauss move-se para investigar o questionado.	2. Afasta-se do círculo para investigar.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
Nicolau Copérnico E2T1	“Quanto mais perto, maior.”	Copérnico faz a exploração com a RA, se levanta, aumenta o zoom do iPad e retorna diversas vezes. Movimenta-se em torno do eixo $y=0$ buscando ver o objeto sob diferentes perspectivas.	3. Movimenta-se para investigar.
Carl Gauss E2T1	Ao projetar sua construção em RA diz: “Ó que legal!”	Ao concluir a construção de polígonos semelhantes, Gauss manifesta seu interesse e admiração em relação ao que vê.	4. Surpreende-se com a projeção em RA.
Ada Lovelace E2T1	“O círculo inicial ele vai aumentar.”	Lovelace ficava se movimentando para frente e para trás com o iPad para ver o círculo no plano. Ela caminhava na direção do círculo e voltava. Em seguida começou a movimentar o ponto A para a direita e para a esquerda.	5. Movimenta-se para ver.
Galileu Galilei E2T1	“Bem difícil de imaginar né?”	Após realizar a construção em colaboração com Euclides, Galileu depara-se com o desafio de visualizar o objeto (círculo) quando se afasta “infinitamente” com o ponto A. Procura mover-se com o iPad ao redor do círculo para ver o que acontece e manifesta dificuldade para	6. Manifesta impossibilidade de ver a transformação no “infinito”.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
		entender.	
Galileu Galilei E2T1	“Olha lá! É puro Pokémon Go isso! No Pokémon funciona entre aspas. É que você quer pegar um Blastoise e colocar em cima da mesa.”	Galileu relaciona a projeção que vê em RA ao jogo que tinha familiaridade. Diz que ao projetar um personagem do jogo ele o coloca em cima da mesa.	7. Relaciona as projeções em RA com o jogo Pokémon Go.
Galileu Galilei E2T1	“A proporcionalidade é top. Tem que criar as semirretas agora, Euclides”.	Galileu visualizava o objeto no GeoGebra 3D com o zoom. Ao projetar em RA as dimensões se alteraram (pois não tem o zoom). Ele compara a proporção das medidas do objeto construído em 3D e o apresentado em Realidade Aumentada.	8. Compara as medidas do objeto em 3D e projetado em RA.
Charles Darwin E2T1	“Meu Deus, cara! Que abalo!”	Ao projetar o objeto em RA Darwin se surpreende com o visto.	9. Surpreende-se com a projeção em RA.
Galileu Galilei E2T1	“Eu coloquei [um] raio pequeno também... Ficou proporcional ó... Tira aí e põe de novo.”	Por meio da projeção do sistema apresentado por Darwin, Galileu identifica uma discrepância em sua construção, identificando que não estava proporcional à construção que pretendiam realizar.	10. Na projeção em RA identifica a falta de proporcionalidade.
Galileu Galilei E2T1	“Ah lá Euclides... Falei...”	Após realizar investigações com a RA, Galileu não fica satisfeito	11. Identifica na projeção com a RA um erro na construção.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
		com a projeção. Faz ajustes na construção e vê que há um círculo com um raio maior, o que resulta na projeção expandida que ocupa uma extensa área do plano e não condiz com a construção feita.	
Galileu Galilei E2T1	“Fixe seu olhar no ponto A e se movimente... Daí, tipo, você vai se movimentando e o ponto A também se movimenta... [en]tendeu?”	Galileu explicava para Darwin a forma como poderia explorar a tarefa. Em sua fala evidencia que o movimento é integrado, não se limita exclusivamente a mover o iPad, mas envolve a movimentação conjunta da pessoa que segura o iPad para ver mover-se os objetos.	12. Identifica que o movimento do objeto se dá junto ao movimento da pessoa.
Charles Darwin E2T1	“Ah! E o dela deve tá a mesma coisa... Nossa, cara... Cara, você tem que ser mais sensível... O ‘bagueio’ é muito sensível.”	Darwin não conseguia interagir com os objetos projetados em RA, pois não estava acostumado com o toque em tela. Com o auxílio do colega, faz a projeção em RA.	13. Entende que ao se mover, faz mover os objetos.
Galileu Galilei E2T1	“Quando você se move ‘pra’ esquerda (movendo o iPad e vendo o ponto se distanciar) o ponto se move ‘pra’ direita Quando ‘cê’ vai ‘pra’ direita, o ponto se move ‘pra’ esquerda, ‘tá ligado’?”	Galileu deslocava-se com o iPad para entender as variações de posição ao mover-se para a esquerda ou para a direita. Nota que o movimento que se realiza para uma direção com o iPad, gera	14. Identifica modos de localizar-se com a RA. 15. Situa-se no espaço com o objeto.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
		um movimento do objeto em direção contrária.	
Charles Darwin E2T1	“Porque não faz a forma de cilindro. É ‘mano’... É isso.”	Quando indagado sobre qual projeção era apresentada, se cônico ou cilíndrico, o estudante analisa o projetado e diz que não tem como ter a forma cilíndrica, pois o visto se assemelhava à um cone.	16. Identifica a forma cônica na projeção.
Galileu Galilei E2T1	“Cônico porque não é cilíndrico. Pois tem angulação...”	Quando questionado sobre a característica do sistema, se cônico ou cilíndrico, o aluno considera a falta de paralelismo para dar sua resposta. A projeção faz ver retas concorrentes com certa angulação.	17. Identifica a forma cônica na projeção.
Katherine Johnson E2T1	“Mary, eu não sei mexer nisso... Vai ter que me ajudar... Quando a gente se afasta do círculo inicial oh... então... Quando a gente afasta não acontece nada, continua igual... Continua igual.”	Katherine utilizava o zoom do iPad ao invés de mover-se com ele. Com isso, o círculo projetado em RA não se movia.	18. Usa o zoom e vê que o objeto não se move.
Mary Jackson E2T1	“‘Vamo’ projetar ele de uma forma que a gente consiga ver ele assim... ai, dá licença... porque eu sou a professora dos baixinhos...”	Em diálogo com Katherine, Mary entende que o movimento não é dado pelo zoom, mas a pessoa precisa mover-se com o iPad. Ela	19. Identifica a forma de fazer mover o objeto. 20. Move-se com-o-objeto.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	óóóóó... Tá aqui, mas eu tenho que... Não é a gente mover ele... é a gente ir até ele. ‘Vamo’ entrar aqui? Tipo, a gente se afasta... é isso?”	sugere “entrar” nos eixos projetados e não apenas visualizá-los. Ela identifica que esse movimento gera resultado.	
Katherine Johnson E2T1	“Eu consigo ver ele todo... Mas ele tá estranho parece... Tá certo?”	Com a RA Katherine consegue andar ao redor do objeto para vê-lo. No entanto, ela identifica que “algo está estranho” e questiona se há algum erro.	21. Faz explorações com RA e reconhece algo “estranho”.
Mary Jackson E2T1	“Nossa! Olha que legal a gente aqui de lado... A gente consegue ver essa coisa do... do espaço... Não tem como...”	Mary e Katherine posicionavam-se para ocupar o espaço de projeção. Uma delas segurando o iPad orientava a outra para posicionar-se junto à figura projetada. As estudantes ajustavam os pontos e efetuavam deslocamentos em torno do objeto para ver se as características se mantinham constantes.	22. Busca situar-se em relação ao objeto projetado. 23. Orientam-se para ver as características dos objetos.
Katherine Johnson E2T1	“Mas então, eu acho que é isso... Não é? Se afaste do círculo inicial.. Eu acho que ele vai ficando tipo do tamanho desse círculo maior.”	Katherine deslocava-se com o iPad a fim de analisar as variações observadas ao movimentar-se em torno do objeto.	24. Movimenta-se para explorar com RA.
Katherine Johnson E2T1	“Tipo, em relação... Tipo, quando	A aluna identifica o ponto A e vê	25. Identifica a relação entre o

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	a gente tá no ponto A, a gente olha pra esse círculo menor, quando a gente afasta dele, ele fica do tamanho desse maior, porque ele tá aumentando”	que o raio do círculo se altera à medida que ela se aproxima ou se afasta do ponto A.	ponto A e o tamanho do raio do círculo.
Katherine Johnson E2T1	“Que o círculo inicial que é pequeno, ele fica do tamanho do maior. Que daí você vai, tipo, afastando e aí... e aí ele vai ficando do tamanho do grande.”	Katherine, ao se movimentar com o software, vê que o tamanho do círculo varia de acordo com a sua posição.	26. Identifica que pode mover-se para aproximar o tamanho dos raios dos círculos.
Katherine Johnson E2T1	“Quando você vai pra direita, o círculo do plano vai pra esquerda.”	Katherine ao se movimentar identifica sua posição em relação à posição do objeto projetado. Percebendo que há um movimento contrário.	27. Localiza-se espacialmente em relação ao objeto.
Katherine Johnson E2T1	“Acho que não... Acho que sempre vira um círculo, não? Tipo... Mesmo se você aumentar...”	A questão de Mary sobre se o círculo projetado perde sua forma durante algum movimento, leva a Katherine a fazer uma investigação com RA para entender o que está acontecendo.	28. Faz investigação com RA.
Stephen Hawking E2T1	“Tá certo... Então a distância do centro até a extremidade são distintas nos círculos.”	Ao analisar o tipo de projeção, Stephen vê que os raios dos círculos são distintos à medida que ele se movimenta, como em um tronco de cone.	29. Investiga o objeto na projeção em RA.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
Katherine Johnson E2T1	“Ele fica maior, Ele para de ser semelhante, porque o que a gente tá vendo inicialmente é esse daqui. E o outro é esse maiorzão. Se a gente se distanciar, ele se ‘desforma’ e não fica semelhante ao outro.”	Ao construir os objetos no iPad, Katherine não selecionou os pontos de interseção e ao movimentar-se, os polígonos não eram semelhantes.	30. Identifica que as figuras não são semelhantes.
Katherine Johnson E2T1	“Ah cara, é isso. O polígono 1 continua igual e o polígono 2 se amplia.”	Após corrigir sua construção, Katherine consegue ver a semelhança entre os polígonos.	31. Identifica a semelhança entre os polígonos.
Katherine Johnson E2T1	“Ele vira um cilindro porque vai fechando as retas? É isso não é? Você se distancia tanto que os lados vão ficando iguais e viram cilindro?”	Ao analisar o tipo de projeção, Katherine observa o que é invariante e conclui que se trata de um sistema cilíndrico.	32. Investiga o objeto na projeção em RA. 33. Identifica invariantes.
Stephen Hawking E2T1	“É uma projeção cilíndrica, pois a medida que eles vão se afastando, eles vão igualando... Eles vão igualando as medidas.”	Ao analisar o tipo de projeção, Stephen identifica que as medidas dos lados dos polígonos serão iguais. Com isso, ele conclui que se trata de um sistema cilíndrico.	34. Investiga o objeto na projeção em RA. 35. Identifica a congruência de polígonos. 36. Reconhece o sistema cilíndrico.
Stephen Hawking E2T1	“é uma projeção cilíndrica, não necessariamente vai formar um cilindro, mas a projeção é cilíndrica, pois a medida que se afasta as medidas vão se	Ao explicar para Katherine o porquê de ser uma projeção cilíndrica, ele diz que não precisa ser necessariamente um cilindro, mas deve preservar a distância em	37. Justifica o que é projeção cilíndrica. 38. Usa a projeção em RA como argumento.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	igualando”	relação aos vértices.	
<p>Encontro 3: Neste encontro foi proposto aos alunos que investigassem o método de representação gráfica criado por Gaspard Monge. Com o GeoGebra AR eles exploraram a visualização em épura. Na tarefa 2 (Clique no link para ser direcionado à Tarefa 2) os alunos foram questionados sobre as diferenças entre o Sistema Mongeano e o Sistema Cartesiano. Foi elaborado um roteiro para a construção e uma série de perguntas que visavam estimular a reflexão sobre o explorado. Ao término da aula, conduzimos uma discussão com os alunos para que eles pudessem compartilhar suas conclusões. Expusemos as características de cada sistema de representação gráfica abordado. É pertinente destacar que os estudantes desenvolveram o Sistema Mongeano no ambiente do GeoGebra 3D e, ao realizarem a projeção em RA, o software automaticamente mudava para o Sistema Cartesiano. Essa conversão feita pelo software desafiou os alunos a identificarem as alterações ocorridas durante a mudança de sistema. Na tarefa 3 (Clique no link para ser direcionado à Tarefa 3), cujo propósito era a visualização da épura de um objeto, demos um arquivo predefinido no GeoGebra em que as faces desse objeto estavam projetadas nos planos perpendiculares. Os alunos puderam movimentar os planos e sobrepor-los para ver a projeção do objeto em um único plano.</p>			
Isaac Newton E3T2	“Se tem a mesma coordenada? Na minha cabeça é... [...] AAAAAAAH! O vermelho tá ao contrário! [exaltação] É isso!”	Ao ser questionado se os pontos da folha e o do GeoGebra tinham a mesma posição, o aluno responde que sim. Ao fazer a investigação no software percebe as diferenças entre os Sistemas Mongeano e Cartesiano.	39. Realiza investigação com RA para determinar as diferenças.
Isaac Newton E3T2	“Pera aí ó.... O vermelhinho... isso... Põe o verdinho pra esquerda... Pra direita, aliás...”	Para tentar justificar a mudança nos eixos em cada um dos sistemas, o aluno diz quais movimentos foram realizados.	40. Identifica as mudanças necessárias para igualar os sistemas.
Isaac Newton E3T2	“Por que que o vermelho não gira? Que ódio! Alá... Girou, girou, girou... O vermelho tá lá atrás [enquanto isso movimentavam o	Newton, ao efetuar as manipulações, investiga o objeto e realiza ajustes modificando elementos para entender a	41. Faz investigação com a RA.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	GeoGebra] Tá vendo... o vermelho pra trás, verdinho para direita, azulzinho pra esquerda.”	situação.	
Albert Einstein E3T2	“Quando vira de ponta cabeça esse ponto ficou pra cá... Daí eu virei de novo e virou pra cá.”	Einstein realiza movimentos com o iPad, faz as construções no 3D, muda para RA e observa as mudanças. Dessa forma, vê a posição do ponto nos distintos sistemas e os compara.	42. Faz investigação com a RA. 43. Compara os sistemas.
Isaac Newton E3T2	“É isso mesmo! Ele está para trás... Se você vem pra cima e volta... Não... E se eu for para baixo e voltar, ele vem para baixo...”	Durante a investigação, Newton se posiciona para se aproximar e recuar em relação ao objeto, procurando observar suas características.	44. Movimenta-se para ver mover-se o objeto. 45. Estabelece uma relação entre a sua posição e a posição do objeto.
Isaac Newton E3T2	“Então é isso mesmo! eu vou pra cima e volto... Você muda ele de sentido, está ao contrário... coloca aqui: sentido ao contrário.”	Por meio de sua investigação, Newton formula uma conclusão com base no movimento que realiza.	46. Investiga com a RA. 47. Identifica a posição do objeto.
Albert Einstein E3T2	“Eu olhei o desenho da figura e ali onde tá abscissa... Eu coloquei a abscissa pra cima. Depois eu li afastamento e coloquei o afastamento pra cá ...”	Ao descrever os movimentos executados durante a transformação do sistema de projeção, Einstein relata suas ações dando-se conta do que fez com a RA.	48. Descreve o que fez para adequar os eixos.
Isaac Newton E3T2	“Tá vendo o ponto ali? É que na	Ao realizar a transição do modo	49. Identifica divergência na

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	verdade... acho que era melhor ter colocado ali... O verdinho à direita... Mas o ponto tá errado!”	tridimensional para a RA, Newton vê divergência na localização do ponto.	posição do ponto ao explorar com RA.
Rosalind Franklin E3T2	“Não era para estar na direita não?”	Durante a transição do ambiente tridimensional para a RA, Rosalind identifica que o ponto não está onde deveria.	50. Identifica divergência na posição do ponto ao explorar com RA.
Isaac Newton E3T2	“Mas aí o vermelho tá pra cá? Não... Mas aí eu girei aí o vermelho... tá pra cá agora... Não faz sentido... Aqui tá certo, ó... [visualização 3D]”	Newton alterna entre os modos de visualização (3D e RA) para realizar comparações e dizia não fazer sentido.	51. Compara a construção 3D e RA. 52. Considera a alteração sem sentido.
Rosalind Franklin E3T2	“Eu acho... Eu apertei e virou... Porque quando você volta ele volta”	Rosalind variava entre os modos de visualização (3D e RA) para efetuar comparações.	53. Faz investigação com a RA.
Isaac Newton E3T2	“Ó... Vermelhinho tá rebelde agora... Ele tá pra fora...”	Ao explicar a discrepância entre os sistemas, Newton interpreta sua posição na RA como interna, enquanto o alinhamento do eixo vermelho está orientado para "fora".	54. Localiza eixos com a projeção em RA. 55. Compara a posição do eixo em relação à sua posição.
Isaac Newton E3T2	“Porque que ele muda, velho? Porque em realidade aumentada as posições do eixo foram modificadas? Depende do	Newton realiza movimentos com o iPad em RA. Ao se indagar, ele responde a si mesmo, mostrando entender que a posição muda em	56. Reconhece a diferença dos sistemas.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	referencial.”	relação ao referencial.	
Albert Einstein E3T2	“Mongeano não pode ser ao contrário? No eixo x? [...] Faz sentido ser ao contrário... As coordenadas são ao contrário... O sentido das coordenadas são ao contrário...”	Após discussões das diferenças entre os sistemas, Einstein conclui que a direção de um dos eixos poderia ser invertida.	57. Sugere alterar a direção de um dos eixos. 58. Identifica que o sentido das coordenadas é invertido.
Albert Einstein E3T2	“Não... Só a abscissa e o afastamento. A cota sempre mantém.”	Ao ser indagado sobre a possibilidade de mudanças em todos os eixos, Einstein diz que não e justifica sua resposta.	59. Identifica invariante nos eixos.
Katie Bouman E3T2	“Porque o ponto não sai do lugar, mas ele está espelhado. As retas continuam positivas ao editar a direção do ponto e mesmo girando ele permanece no mesmo lugar.”	Bouman elucida as observações realizadas no software, visando responder às diferenças entre os sistemas.	60. Identifica invariantes na construção.
Katie Bouman E3T2	“Ele inverteu os eixos x e y que são a abscissa e o afastamento?”	Bouman se questiona sobre as observações feitas no software com o propósito de destacar as diferenças entre os sistemas.	61. Faz investigação com RA.
Rosalind Franklin E3T3	“Olha aqui... Olha aqui pra você ver.”	Rosalind chama Newton para que investigassem juntos a épura do objeto. Eles levantaram, movimentaram-se, trouxeram o plano mais próximo de si.	62. Movimenta-se para poder ver. 63. Realiza investigação com RA.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
		Afastavam e voltavam... Iam com a câmera até os polígonos das faces e depois se afastavam novamente. Arrastaram a bolinha laranja que possibilitava movimentar os planos e os juntava para formar a épora.	
Isaac Newton E3T3	“Épora é aquele negócio de juntar os 2 planos.”	Newton, ao examinar os objetos e realizar comparações com a solicitação da tarefa, estabelece uma relação para associar a formação do plano único contendo as projeções das faces como sendo a épora.	64. Estabelece relações a partir da investigação realizada.
Isaac Newton E3T3	“Você lembra do outro exercício que você traçava uma reta infinita assim?”	Newton estabelece relações entre as construções efetuadas em RA, conectando o que havia sido estudado.	65. Estabelece relações entre as construções realizadas.
Isaac Newton E3T3	“Eu gosto muito dessa aula, tá?”	Newton diz gostar da aula quando esta envolve RA.	66. Expressa interesse ao estudar com RA.
<p>Encontro 4: Nesse encontro, os alunos realizaram a tarefa 4 (Clique no link para ser direcionado à Tarefa 4). Na primeira etapa da tarefa, os alunos deveriam utilizar o primeiro link disponibilizado para visualizar as faces dos sólidos em RA e, posteriormente, responder a questões específicas relacionadas às faces em determinados diedros. Nos dois links subsequentes, os sólidos eram fornecidos e os alunos foram orientados a construir suas respectivas faces em épora, registrando suas construções por meio de capturas de tela. Após as construções foram explorados os diedros e, em seguida, eles realizaram exercícios.</p>			

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
Isaac Newton E4T4	“Isso aqui passou para 2D né?”	Ao projetar a é pura em RA, Newton faz uma associação com as projeções no plano que são visualizadas em duas dimensões.	67. Interpreta a projeção em RA como uma projeção plana.
Isaac Newton E4T4	“Essa parte de baixo ficou um pouquinho para cima.”	Newton observa características do objeto ao realizar a projeção em RA e adota uma perspectiva a partir de sua posição.	68. Vê características a partir da investigação.
Isaac Newton E4T4	“Ela muda, difícil explicar, mas ela ó, isso aqui vira 2D, é como se fosse na lateral, como se estivesse olhando da lateral, passa imagem em 2D, aí quando você mexe na laranja, olha o que acontece, não sei como que eu escrevo passa para 2D.”	Newton, ao rodear o objeto, vê suas laterais e compara com a projeção em é pura, associando à visualização bidimensional. Não encontra “palavras” para descrever o que vê.	69. Movimenta-se para observar características. 70. Identifica a projeção como uma visualização 2D.
Arthur Schopenhauer E4T4	“Está difícil visualizar. Tem como colocar de novo aqui?”	A posição para a qual projetaram em RA encontrava-se em um local de movimentação restrita. Schopenhauer realiza uma nova projeção e, assim, consegue se deslocar e interagir com o objeto.	71. Reconhece que o local da projeção não está bom. 72. Movimenta-se para buscar um novo local para a projeção.
Isaac Newton E4T4	“É a visão de frente.”	Ao examinar um objeto no segundo diedro, Newton procura responder o questionado considerando a sua posição em	73. Reconhece as faces do objeto ao posicionar-se frente a ele.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
		relação ao objeto.	
Arthur Schopenhauer E4T4	“Calma aí, deixa eu tentar imaginar aqui. Porque não faz muito sentido.”	Para Schopenhauer, mesmo com a projeção ainda era difícil visualizar.	74. Busca alternativas para a visualização.
Isaac Newton E4T4	“Porque eu vi no SENAI isso aí. Deixa-me explicar para você, vem para cá; aqui é a parte baixa e aqui é do lado. Não pode fazer isso pode? É que é como se isso se levantasse, está vendo?”	Newton para ajudar Schopenhauer tenta trazer seu ponto de vista e “explicar” o movimento realizado. Ao dizer “É que é como se isso se levantasse, está vendo?”, Newton realiza o movimento com o seu corpo.	75. Auxilia o colega para entender o movimento. 76. Movimenta-se para mover o objeto.
Isaac Newton E4T4	“Em desenho técnico eu aprendi a fazer, por exemplo, essa peça aqui, eu aprendi as listras, certo? Então, para mim isso aqui não existe, isso aqui não é uma representação dessa parte 3D.”	Newton recorre aos seus conhecimentos prévios para analisar o que vê, mostrando uma compreensão sobre os cortes da peça.	77. Recorre aos conhecimentos prévios. 78. Estabelece relação entre o conhecimento prévio e a projeção em RA.
Euclides de Alexandria E4T4	“Mas o que aconteceu aqui que pegou a vista de cima e jogou para cá?”	Euclides busca mostrar para Newton o movimento utilizado para projetar a face do objeto. Ao falar com o colega, se movimenta para mostrar o que diz.	79. Auxilia o colega para entender o movimento. 80. Movimenta-se para mover o objeto.
Euclides de Alexandria E4T4	“Ele pega a projeção debaixo, você tem uma projeção aqui e uma aqui, ela está jogando as duas	Prosseguindo na tentativa de esclarecer o movimento para seu colega, Euclides detalha o que foi	81. Auxilia o colega para entender o movimento. 82. Movimenta-se para mostrar o

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	junto, e está sobrepondo, está vendo? Ele pega a parte debaixo”	feito para elucidar a sua dúvida.	visto ao colega.
Isaac Newton E4T4	“Então em um desenho só ele representa tudo, ah tá entendi...”	Após realizar o movimento conforme a orientação de Euclides, Newton entende a representação em épura.	83. Realiza o movimento para compreender.
Euclides de Alexandria E4T4	“Agora você tem a representação dela aqui e a do fundo. Então, aqui é o ‘degrauzinho’ que tá aqui, aí quando você junta os dois, aí ele mostra a parte debaixo, aqui quando juntou os dois, aqui o ‘degrauzinho’, aí ele vai mostrando tudo, ai vai pegando.”	Euclides expõe o modo pelo qual compreende as projeções.	84. Auxilia o colega para entender o movimento. 85. Explica a figura ao colega.
Isaac Newton E4T4	“Mas aqui não teria que ser meio que pontilhado essa linha aqui ó...”	Newton continuava a realizar comparações com base em seu conhecimento prévio. Entretanto, os alunos chegaram à conclusão de que, nesse tipo de projeção, a utilização de linhas pontilhadas não seria necessária (em épura a linha pontilhada é empregada; no entanto, na vista que estava sendo considerada, as linhas seriam contínuas.)	86. Analisa a projeção considerando seu conhecimento de desenho técnico.
Euclides de Alexandria E4T4	“Mas nesse caso ele não está	Euclides mostra o que foi	87. Explica o entendimento da

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	pegando o desenho técnico, são dois planos e ir juntando.”	entendido a partir da junção dos planos.	construção.
Isaac Newton E4T4	“Claro que muda. Aqui você vai olhar em relação aqui e aqui em cima e na direita.”	Observando em RA, Newton argumenta que, ao modificar a posição do objeto nos diedros, as faces são visualizadas em “locais distintos”.	88. Identifica as projeções das faces do objeto.
Isaac Newton E4T4	“Então eu estou olhando em relação a esquerda, a direita da peça da parte de cima, aqui ó.”	Newton se movimenta ao redor do objeto projetado em RA para realizar investigação.	89. Movimenta-se para investigar o objeto.
Isaac Newton E4T4	“Professora é isso mesmo né?”	Newton capturou imagens das faces do objeto ao movimentar-se ao redor dele; fotografou, utilizando o recurso de captura de tela, a face em uma perspectiva bidimensional.	90. Movimenta-se ao redor do objeto para fotografar as diferentes vistas.
Rosalind Franklin E4T4	“Agora eu consegui entender essa pergunta, que nem isso eu estava conseguindo entender.”	Rosalind acompanhava os colegas, contudo ainda não havia expressado dúvidas ou manifestado sua compreensão. Foi somente após as capturas de tela e a observação das faces que Rosalind começou a entender o que estava sendo questionado.	91. Utiliza o recurso do colega para compreender.
Arthur Schopenhauer E4T4	“O terceiro diedro, pois dá para	Schopenhauer, ao escolher o	92. Movimenta-se para entender o

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	observar nitidamente.”	diedro mais apropriado para a projeção, diz que ele ficou mais nítido em sua visualização após realizar movimentos ao redor dele.	objeto.
<p>Encontro 5: Neste encontro, foi realizada a correção da lista de exercícios e a revisão dos tópicos abordados e, portanto, não houve tarefas previamente elaboradas como as descritas na seção 4. Após a revisão e o esclarecimento de dúvidas, os alunos foram desafiados a criar um sólido que fosse distinto de todos os anteriormente apresentados, fazendo suas projeções conforme o método mongeano e projetá-las em RA. Nesse encontro houve um pequeno envolvimento dos alunos com a exploração em RA, pois eles tinham dúvidas relativamente à construção tridimensional no GeoGebra 3D. Isso ocorreu, pois nas tarefas anteriores eles recebiam sólidos previamente construídos, logo a construção era a “novidade” e não a projeção em RA.</p>			
Isaac Newton E5	“Agora para projetar, nossa ele ficou compridão, dá para projetar.”	Ao construírem o sólido tridimensional, os alunos já percebem quais os tamanhos ficariam mais adequados para a projeção em RA.	93. Projeção em RA para melhor visualização.
<p>Encontro 6: Neste encontro foi proposto aos alunos que explorassem as vistas ortogonais de sólidos geométricos na tarefa 5 (Clique no link para ser direcionado à Tarefa 5). Na etapa inicial, os alunos deveriam acessar o primeiro link disponibilizado para visualizar, em Realidade Aumentada, as faces dos sólidos previamente construídos em projeção ortogonal. Nos dois links subsequentes, os sólidos foram fornecidos, e os alunos foram instruídos a elaborar as respectivas faces no referido sistema, documentando suas construções por meio de capturas de tela.</p>			
Max Planck E6T5	“Resenha do plano. Que legal!”	Plank ao ver a tarefa proposta demonstra interesse e entusiasmo ao que será apresentado.	94. Demonstra interesse pela aula.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
Max Planck E6T5	“Tem uns ‘bagulho’ de percepção que é um saco de fazer. [...] Essa aqui é muito mais de boa.”	Plank compara as construções identificando a que ele considera mais fácil de ser feita.	95. Identifica a construção que considera mais fácil.
Elizabeth Blackburn E6T5	“Então espera aí, primeiro vai ser aqui. Está errado... Assim fica melhor para visualizar.”	Elizabeth, ao ver a dificuldade de Plank, tenta ajudá-lo a se posicionar para ver o objeto.	96. Auxilia o colega para entender o movimento. 97. Movimenta-se para visualizar o objeto.
Albert Einstein E6T5	“A vista de frente acho que não vai precisar dela porque não tem o corte. [...] Essa aqui também não vai precisar que você faça; a de cima vai precisar”	Einstein, ao se posicionar frente ao objeto, consegue ver quais segmentos de reta deveriam ser desenhados nas projeções das vistas.	98. Identifica as faces a serem desenhadas. 99. Movimenta-se para visualizar o objeto.
Albert Einstein E6T5	“Você está vendo vários retângulos. Você vai ter que pegar esses retângulos aqui embaixo e essas que são atravessadas são tracejadas”	Ao ser questionado por Elizabeth Blackburn sobre as faces, Einstein tenta gesticular apontando para mostrar à ela as faces a serem construídas.	100. Auxilia o colega para entender o movimento. 101. Mostra as faces a serem desenhadas.
Max Planck E6T5	“Faz sentido, é fácil é só você desenhar. [...] Você vai fazer isso aqui, [...] aí você vai transpor o amarelo para cá e o vermelho para cá.”	Após a investigação, Plank vê facilidade para transpor o visto em RA para a folha da atividade e expõe para a colega o modo como entende.	102. Auxilia o colega para entender o movimento. 103. Considera fácil desenhar após a visualização.
Elizabeth Blackburn E6T5	“Eu achando que o negócio é mais trabalhoso.”	Elizabeth afirma que considerava que seria mais difícil a tarefa.	104. Diz que a tarefa é fácil.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO (US)	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
Marie Curie E6T5	“Gente, que legal, como eu faço para virar?”	Marie se interessa por um movimento com RA e pede ajuda aos colegas para realizá-lo.	105. Mostra interesse pela construção. 106. Pede ajuda para realizar o movimento desejado

Quadro 2 - Análise Ideográfica dos dados do Formulário

IDENTIFICAÇÃO	ESCRITA DO SUJEITO	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
Formulário: Ao final da disciplina solicitamos que os alunos respondessem a um formulário para expor sua opinião sobre as atividades realizadas com a Realidade Aumentada. Trazemos para a análise, as questões que estão diretamente relacionadas com a interrogação da pesquisa.			
Questão 5: A Realidade Aumentada te ajudou na compreensão dos sistemas de projeção? Justifique.			
Katie Bouman E7Q5	A realidade aumentada me ajudou na compreensão, pois pude visualizar as imagens, as vistas de todos os ângulos, conseguindo compreender melhor as questões de pontos de vistas.	Katie destaca que pôde compreender as vistas dos objetos devido às explorações com RA.	107. Favorece a visualização. 108. Compreende perspectivas distintas.
Rosalind Franklin E7Q5	Sim, com certeza. Como disse anteriormente, foi meu primeiro contato com realidade aumentada, antes disso as construções que já fiz foram todas feitas em papel o	Rosalind diz que foi seu primeiro contato com a RA e que fazia as construções com lápis e papel, embora não conseguisse ver o sentido. Já com a RA pôde compreender as construções.	109. Investiga com RA. 110. RA auxilia a compreensão.

IDENTIFICAÇÃO	ESCRITA DO SUJEITO	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	que não conseguia demonstrar e muito menos fazer sentido para mim mesma.		
Isaac Newton E7Q5	Sim, o que mais me interessou foi poder "andar ao redor da peça no ar", dando a impressão de construir algo real, quase palpável e podendo ver de frente de cada plano.	Newton viu a RA como um modo de ter objetos matemáticos presentes no ambiente físico, junto com ele e poder investigá-los quase "apalpando-os".	111. Compreende perspectivas distintas. 112. Sente que os objetos projetados são "quase palpáveis"
Mary Jackson E7Q5	Sim, acredito que foi muito mais fácil a compressão usando as ferramentas, fez com que a gente pudesse ver de outra forma além do papel e com toda certeza isso facilitou muito.	Mary destaca a facilidade de compreensão com a RA, pois entende que pode visualizar de outra forma.	113. Com a RA vê de modo distinto.
Katherine Johnson E7Q5	Sim, pois com a realidade aumentada a gente conseguia visualizar as construções de outra forma e assim foi mais fácil a compreensão.	A visualização em RA facilitou a compreensão de Katherine, pois lhe permitiu "ver de outra forma".	114. Facilidade para compreender. 115. Com a RA vê de modo distinto.
Carl Gauss E7Q5	Pra ser bem sincero, ajudou sim, porém, por ter um pouco de dificuldade, tanto nas atividades no software quanto nas feitas a mão, eu sempre prefiro o plano 2D, pois pra mim é mais fácil de	Gauss relata que, embora o aplicativo tenha ajudado a visualização, ele prefere as construções em 2D.	116. Considera que a RA facilita a compreensão, mas prefere o 2D.

IDENTIFICAÇÃO	ESCRITA DO SUJEITO	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	visualizar, e já na realidade aumentada em 3D eu ficava um pouco perdido.		
Ada Lovelace E7Q5	Sim! Principalmente para visualizar a é pura das figuras propostas; com a Realidade Aumentada foi possível trabalhar com apenas uma parte da figura e ver em diferentes ângulos.	Lovelace considera que a investigação com a RA lhe permite ver somente as partes da figura que lhe importava no momento. Considera que com a RA pode ver de diferentes ângulos.	117. Movimenta-se para ver em diferentes ângulos. 118. Elege partes que considera importantes para visualizar.
Nicolau Copérnico E7Q5	Sim, pois com elas [com a RA] eu conseguia me posicionar e ver as formas do meu ponto de vista, como se estivessem na minha frente, assim assimilando melhor as projeções	Nicolau diz que com a RA ele pode eleger perspectivas para ver as formas como se estivessem em seu ambiente físico o que lhe permitiu compreender as projeções.	119. Possibilita eleger perspectivas. 120. Compreende as projeções porque pode se posicionar para ver.
Arthur Schopenhauer E7Q5	Com toda certeza fez com que eu tivesse uma compreensão melhor das imagens e como eram suas projeções, ficou bem mais fácil a visualização, já que eu podia ver as imagens de todos os ângulos.	Schopenhauer considera que pôde compreender as imagens, pois podia se posicionar para ver de diferentes perspectivas.	121. Facilidade para compreender. 122. Compreende as projeções porque pode se posicionar para ver.
Marie Curie E7Q5	Sim ajudou, pois olhar e fazer no papel é uma coisa, você tenta imaginar como ficaria e com a realidade aumentada você de fato consegue ver como fica a	Marie compara a construção feita em papel com a do software. Diz que, no papel você tem que imaginar e em RA você vê como fica a projeção e as suas partes.	123. Com a RA vê de modo distinto. 124. A RA facilita a compreensão.

IDENTIFICAÇÃO	ESCRITA DO SUJEITO	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	projeção, cada parte dela, então facilita bastante a compreensão.		
Stephen Hawking E7Q5	Sim, pois mostra todos os ângulos e facilita a visualização da construção.	Stephen considera que com a RA a visualização é favorecida pois você pode ver de todos os ângulos.	125. Compreende perspectivas distintas.
Questão 6: Explique como (ou se) a Realidade Aumentada foi relevante para sua diferenciação dos espaços entre Monge e Descartes.			
Katie Bouman E7Q6	Com a realidade aumentada dá para entender bem melhor a diferença de Monge e Descartes, já que o sistema Monge possui muito mais detalhes, onde dá pra visualizar melhor no GeoGebra.	Katie destaca que como o sistema Monge tem mais detalhes, a RA contribui para ver a diferença entre os sistemas.	126. Destaca a possibilidade de ver detalhes com a RA.
Rosalind Franklin E7Q6	Para mim a Realidade Aumentada não afetou a diferenciação de espaços entre Monge e Descartes.	Para Rosalind a RA não afetou a diferenciação dos espaços.	127 Não percebe com a RA a diferença entre os sistemas.
Isaac Newton E7Q6	A realidade aumentada facilitou a visualização da épura no sistema mongeano, entretanto pelo GeoGebra trabalhar no sistema de Descartes os eixos não estavam de acordo como o sistema mongeano deveria estar.	Newton identifica que o GeoGebra trabalha com o sistema cartesiano e, embora no 3D consiga fazer alteração, a projeção em RA volta ao sistema cartesiano. Porém, considera que a RA facilitou a visualização.	128. Identifica diferença entre sistemas. 129. Considera que a RA facilita a visualização.
Mary Jackson E7Q6	O AR é uma ferramenta muito boa e com certeza foi relevante para o	Mary destaca a característica da RA em projetar os objetos em seu espaço físico,	130. Possibilidade de eleger perspectivas para ver.

IDENTIFICAÇÃO	ESCRITA DO SUJEITO	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	entendimento dos espaços, já que era algo que podíamos ver como se estivesse no nosso mundo e podíamos andar e ver de todos os ângulos, o que o papel seria algo mais difícil.	possibilitando andar e eleger perspectivas para ver o que contribui para o entendimento.	131. Possibilidade de mover-se para ver em diferentes ângulos.
Katherine Johnson E7Q6	Eu sinceramente ainda não consigo achar os pontos no plano mongeano, muito menos diferenciar eles mas com a realidade aumentada consegui entender a disposição de cada um deles num plano bidimensional ou tridimensional	Apesar das dificuldades, Katherine diz que, com a RA, pôde compreender a disposição dos sistemas nos planos bi e tridimensional.	132. Compreende a disposição dos sistemas nos planos bidimensional e tridimensional.
Ada Lovelace E7Q6	Como já estávamos habituados com o plano cartesiano, a utilização da Realidade Aumentada para o entendimento do Sistema Mongeano foi essencial. Com o uso do software foi possível entender, a partir da planificação e das épuras, como é construída determinada figura.	Ada vê como essencial para o entendimento do sistema mongeano as explorações com a RA, pois com ela se compreende as planificações e épuras.	133. A RA é essencial para compreender planificações e épuras.
Nicolau Copérnico E7Q6	[Com a RA] foi relevante, pois com ela eu vi as imagens e suas projeções em cada diedro do	Copérnico destaca a relevância da RA para compreender a diferença entre os sistemas de projeção mongeano e	134. Com a RA identifica a diferença dos sistemas de projeções.

IDENTIFICAÇÃO	ESCRITA DO SUJEITO	EXPLICITAÇÃO DA PESQUISADORA	IDEIAS NUCLEARES
	sistema mongeano, podendo ver claramente a diferença entre Monge e Descartes.	cartesiano.	
Marie Curie E7Q6	Sim, pois como citado anteriormente, [com a RA] podemos de fato ver o que foi feito por completo, então fica bem mais fácil de diferenciar quando se pode ver "na sua frente" como foi feito cada um.	Marie diferencia os dois sistemas de projeção, destacando que com a RA pode ver, pois é como se o objeto estivesse "na sua frente".	135. Com a RA identifica a diferença dos sistemas de projeções. 136. Com a RA pode ver o objeto "na sua frente".
Stephen Hawking E7Q6	Muito relevante, pois no sistema de Descartes temos uma visão mais limitada da construção, já com a realidade aumentada e o sistema mongeano conseguimos ter uma visão ampla e de todos os ângulos da construção.	Stephen compara a visão dos sistemas e considera que no sistema mongeano, com a RA, se tem uma visão mais ampla de "todos os ângulos".	137. Compara os sistemas de projeção. 138. Considera que há uma visão ampla de todos os ângulos.

Dando continuidade ao movimento de análise, buscamos convergências das ideias nucleares para buscar respostas à pergunta norteadora: *Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?* Procuramos expor o que foi feito em um novo quadro – quadro 3 - no qual trazemos todas as ideias nucleares destacando aquelas que, para nós, convergem em termos do que dizem. A convergência será identificada a partir das ferramentas que o Word nos possibilita, isto é, usamos *itálico*, **negrito** e sublinhado para destacar as Ideias Nucleares que, para nós, convergem para um mesmo sentido.

As Ideias Nucleares destacadas por *itálico* estão relacionadas ao *Processo investigativo com-a-Realidade-Aumentada*, assim nomeado por nós para dizer da possibilidade que o software de RA abre à visualização e ao movimento do aluno em relação ao objeto geométrico. A intenção é poder expressar como o sujeito percebe esse movimento e como ele se percebe em movimento ao investigar o objeto com-a-RA.

As Ideias Nucleares destacadas por sublinhado estão relacionadas à Abertura ao estar-com-RA, que se evidencia quando o aluno expressa o desejo da investigação e participação nas atividades ao estar-com-a-RA.

As Ideias Nucleares destacadas por **negrito** estão relacionadas ao **Movimento do Corpo-vivente com RA** que dizem do entendimento do Corpo-próprio ao se encontrar com-o-objeto no ambiente proporcionado pela Realidade Aumentada.

Quadro 3 - Convergências

1. Busca para onde ir.	2. Afasta-se do círculo para buscar respostas.	3. <i>Movimenta-se para investigar.</i>	4. <u>Surpreende-se com a projeção em RA.</u>	5. <i>Movimenta-se para ver.</i>	6. <i>Manifesta impossibilidade de de ver a transformação no “infinito”.</i>
7. <u>Relaciona as projeções em RA com o jogo Pokémon Go.</u>	8. <i>Compara as medidas do objeto em 3D e projetado em RA.</i>	9. <u>Surpreende-se com a projeção em RA.</u>	10. <i>Na projeção em RA identifica a falta de proporcionalidade.</i>	11. <i>Identifica na projeção com a RA um erro na construção.</i>	12. Identifica que o movimento do objeto se dá junto ao movimento da pessoa.

13. Entende que ao se mover, faz mover os objetos.	14. <i>Identifica modos de localizar-se com a RA.</i>	15. Situa-se no espaço com o objeto.	16. <i>Identifica a forma cônica na projeção.</i>	17. <i>Identifica a forma cônica na projeção.</i>	18. <i>Usa o zoom e vê que o objeto não se move.</i>
19. <i>Identifica a forma de fazer mover o objeto.</i>	20. Move-se com-o-objeto.	21. <i>Faz explorações com RA e reconhece algo “estranho”.</i>	22. Busca situar-se em relação ao objeto projetado.	23. <i>Orientam-se para ver as características dos objetos.</i>	24. <i>Movimenta-se para explorar com RA.</i>
25. <i>Identifica a relação entre o ponto A e o tamanho do raio do círculo.</i>	26. <i>Identifica que pode mover-se para aproximar o tamanho dos raios dos círculos.</i>	27. Localiza-se especialmente em relação ao objeto.	28. <i>Faz investigação com RA.</i>	29. <i>Investiga o objeto na projeção em RA.</i>	30. <i>Identifica que as figuras não são semelhantes.</i>
31. <i>Identifica a semelhança entre os polígonos.</i>	32. <i>Investiga o objeto na projeção em RA.</i>	33. <i>Identifica invariantes.</i>	34. <i>Investiga o objeto na projeção em RA.</i>	35. <i>Identifica a congruência de polígonos.</i>	36. <i>Reconhece o sistema cilíndrico.</i>
37. <i>Justifica o que é projeção cilíndrica.</i>	38. <i>Usa a projeção em RA como argumento.</i>	39. <i>Realiza investigação com RA para determinar as diferenças.</i>	40. <i>Identifica as mudanças necessárias para igualar os sistemas.</i>	41. <i>Faz investigação com a RA.</i>	42. <i>Faz investigação com a RA.</i>
43. <i>Compara os sistemas.</i>	44. <i>Movimenta-se para ver mover-se o objeto.</i>	45. Estabelece uma relação entre a sua posição e a posição do objeto.	46. <i>Investiga com a RA.</i>	47. <i>Identifica a posição do objeto.</i>	48. <i>Descreve o que fez para adequar os eixos.</i>
49. <i>Identifica divergência na posição do ponto ao explorar com RA.</i>	50. <i>Identifica divergência na posição do ponto ao explorar com RA.</i>	51. <i>Compara a construção 3D e RA.</i>	52. <i>Considera a alteração sem sentido.</i>	53. <i>Faz investigação com a RA.</i>	54. <i>Localiza eixos com a projeção em RA.</i>
55.	56.	57. <i>Sugere</i>	58. <i>Identifica</i>	59. <i>Identifica</i>	60. <i>Identifica</i>

Compara a posição do eixo em relação à sua posição.	<u>Reconhece a diferença dos sistemas.</u>	alterar a direção de um dos eixos.	<u>que o sentido das coordenadas é invertido.</u>	<u>invariante nos eixos.</u>	<u>invariantes na construção.</u>
61. Faz investigação com RA.	62. Movimenta-se para poder ver.	63. Realiza investigação com RA.	64. <u>Estabelece relações a partir da investigação realizada.</u>	65. <u>Estabelece relações entre as construções realizadas.</u>	66. Expressa interesse ao estudar com RA.
67. Interpreta a projeção em RA como uma projeção plana.	68. <u>Vê características a partir da investigação.</u>	69. Movimenta-se para observar características.	70. <u>Identifica a projeção como uma visualização 2D.</u>	71. Reconhece que o local da projeção não está bom.	72. Movimenta-se para buscar um novo local para a projeção.
73. <u>Reconhece as faces do objeto ao posicionar-se frente a ele.</u>	74. Busca alternativas para a visualização.	75. Auxilia o colega para entender o movimento.	76. Movimenta-se para mover o objeto.	77. Recorre aos conhecimentos prévios.	78. <u>Estabelece relação entre o conhecimento prévio e a projeção em RA.</u>
79. Auxilia o colega para entender o movimento.	80. Movimenta-se para mover o objeto.	81. Auxilia o colega para entender o movimento.	82. Movimenta-se para mostrar o visto ao colega.	83. Realiza o movimento para compreender.	84. Auxilia o colega para entender o movimento.
85. Explica a figura ao colega.	86. Analisa a projeção considerando seu conhecimento de desenho técnico.	87. <u>Explica o entendimento da construção.</u>	88. Identifica as projeções das faces do objeto.	89. Movimenta-se para investigar o objeto.	90. Movimenta-se ao redor do objeto para fotografar as diferentes vistas.
91. <u>Utiliza o recurso do colega para compreender</u>	92. Movimenta-se para entender o objeto.	93. Projeção em RA para melhor visualização.	94. <u>Demonstra interesse pela aula.</u>	95. Identifica a construção que considera mais fácil.	96. Auxilia o colega para entender o movimento.

97. <i>Movimenta-se para visualizar o objeto.</i>	<u>98. Identifica as faces a serem desenhadas.</u>	99. <i>Movimenta-se para visualizar o objeto.</i>	<u>100. Auxilia o colega para entender o movimento.</u>	<u>101. Mostra as faces a serem desenhadas.</u>	<u>102. Auxilia o colega para entender o movimento.</u>
<u>103. Considera fácil desenhar após a visualização.</u>	<u>104. Diz que a tarefa é fácil.</u>	<u>105. Mostra interesse pela construção.</u>	<u>106. Pedir ajuda para realizar o movimento desejado.</u>	107. <i>Favorece a visualização.</i>	<u>108. Compreende perspectivas distintas.</u>
109. Investiga com RA.	110. <i>RA auxilia a compreensão.</i>	<u>111. Compreende perspectivas distintas.</u>	112. Sente que os objetos projetados são “quase palpáveis”	113. <i>Com a RA vê de modo distinto.</i>	114. <i>Facilidade para compreender.</i>
115. <i>Com a RA vê de modo distinto.</i>	116. <i>Considera que a RA facilita a compreensão, mas prefere o 2D.</i>	117. Movimenta-se para ver em diferentes ângulos.	118. <i>Elege partes que considera importantes para visualizar.</i>	119. <i>Possibilita eger perspectivas.</i>	120. Compreende as projeções porque pode se posicionar para ver.
121. <i>Facilidade para compreender.</i>	122. Compreende as projeções porque pode se posicionar para ver.	<u>123. Com a RA vê de modo distinto.</u>	124. <i>A RA facilita a compreensão.</i>	<u>125. Compreende perspectivas distintas.</u>	126. <i>Destaca a possibilidade de ver detalhes com a RA.</i>
127. <i>Não percebe com a RA a diferença entre os sistemas.</i>	<u>128. Identifica diferença entre sistemas.</u>	129. <i>Considera que a RA facilita a visualização.</i>	130. Possibilidade de eger perspectivas para ver.	131. Possibilidade e de mover-se para ver em diferentes ângulos.	132. <i>Compreende a disposição dos sistemas nos planos bidimensionais e tridimensional.</i>
133. <i>A RA é essencial para compreender planificações</i>	134. <i>Com a RA identifica a diferença dos sistemas de projeções.</i>	135. <i>Com a RA identifica a diferença dos sistemas de projeções.</i>	136. Com a RA pode ver o objeto “na sua frente”.	137. <i>Compara os sistemas de projeção.</i>	138. <i>Considera que há uma visão ampla de todos os</i>

<i>e épuras.</i>					<i>ângulos.</i>
------------------	--	--	--	--	-----------------

Considerando a convergência interpretada das Ideias Nucleares, construímos o quadro a seguir com o qual apresentamos as Categorias Abertas.

Quadro 4 – Categorias Abertas

IDEIAS NUCLEARES	CATEGORIAS ABERTAS
3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 77, 80, 82, 83, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 97, 99, 106, 107, 108, 110, 111, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 133, 134, 135, 137, 138.	1. Processo investigativo com-a-Realidade-Aumentada
4, 7, 9, 21, 22, 25, 30, 31, 40, 43, 47, 49, 50, 56, 58, 59, 60, 64, 65, 66, 68, 70, 73, 75, 78, 79, 81, 84, 85, 87, 91, 94, 96, 98, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 108, 111, 123, 125, 128.	2. Abertura ao estar-com-RA
1, 2, 7, 12, 13, 15, 20, 22, 27, 45, 55, 71, 76, 80, 82, 89, 93, 109, 112, 117, 120, 122, 130, 131, 136.	3. Movimento do Corpo-vivente com-RA

Das categorias *Processo investigativo com-a-Realidade-Aumentada*, Abertura do aluno ao estar-com-RA e **Movimento do Corpo-vivente com-RA**, procuramos articular expressões significativas dos sujeitos e fazer uma interlocução com os estudos teóricos realizados, abrindo a possibilidade de interpretação e trazendo o que se mostra na pesquisa para elucidar aspectos do fenômeno investigado.

Na próxima seção, discutiremos as categorias abertas.

6. SEÇÃO V – DISCUSSÃO DAS CATEGORIAS ABERTAS

Nessa seção interpretamos e discutimos as categorias abertas para expor o sentido do interrogado. Salientamos que esse sentido é sempre perspectival, o que indica que ele não se esgota e que a cada novo olhar mostram-se aspectos significativos do fenômeno. No entanto, para este trabalho, apresentamos o que a nós se mostra relevante para compreender uma perspectiva do interrogado.

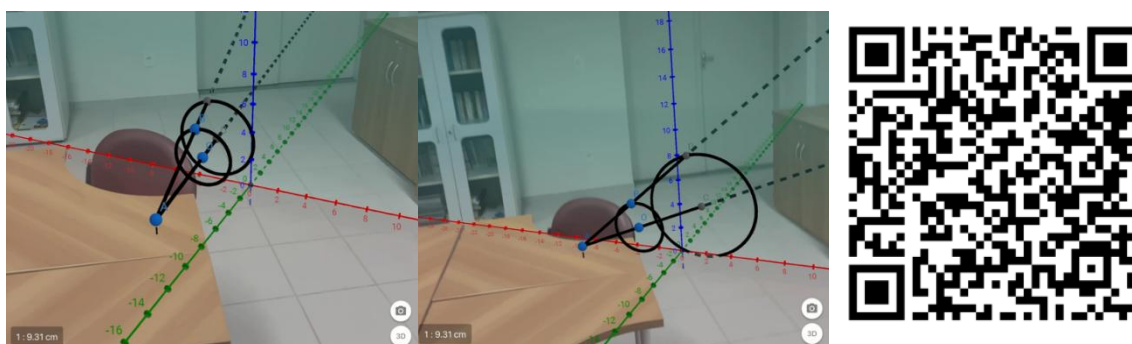
6.1 Processo investigativo com-a-Realidade-Aumentada

As ideias que convergem para esta categoria evidenciam que os alunos se envolvem em um processo investigativo dispondo-se à exploração, formulando hipóteses, examinando suas inferências e submetendo-as aos processos de validação ou refutação. Movendo-se com-o-iPad o aluno busca respostas para suas indagações acerca dos temas de Geometria Descritiva.

Para iniciar a discussão do *processo investigativo com-a-Realidade-Aumentada*, nos voltamos para o sentido de investigação no contexto da educação Matemática: “Investigar é procurar conhecer o que não se sabe” (Ponte, 2003, p. 3). Dessa maneira, iniciamos a abordagem supondo que, no âmbito da investigação, almejamos o conhecimento de determinado objeto ou fenômeno. Além disso, Ponte (2003, p. 2) destaca que “realizamos uma investigação quando formulamos as nossas próprias questões e procuramos responder-lhes, de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso”. Assim, investigar é um processo dinâmico e reflexivo que envolve a formulação de indagações, a busca diligente por respostas embasadas e o constante aprimoramento do entendimento sobre uma determinada questão.

Para entender as variações ao mover-se com o iPad Galileu Galilei, destaca em E2T1: “Quando você se move ‘pra’ esquerda (movendo o iPad e vendo o ponto se distanciar) o ponto se move ‘pra’ direita. Quando ‘cê’ vai ‘pra’ direita, o ponto se move ‘pra’ esquerda, ‘tá ligado’?”.

Figura 18 – Movimento realizado com a RA



Fonte: Elaborado pela autora³⁵

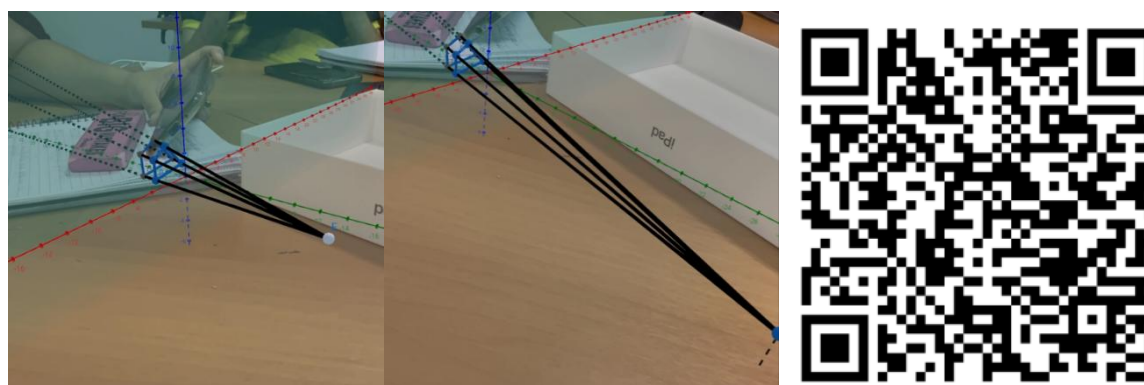
Nota-se a busca por localizações e, também, por um modo de expressar o que está vivenciando. Os alunos procuraram modos de identificar as repercussões decorrentes de seus movimentos durante a investigação com o GeoGebra AR. Ao longo da atividade eles foram desafiados a categorizar os sistemas de projeção como cônicos ou cilíndricos e o desdobramento do processo investigativo os conduz a conclusões significativas.

“*Cônico porque não é cilíndrico. Pois tem angulação...*”. Nota-se um esforço para dizer o que, em sua investigação, se evidencia. Galileu Galilei E2T1 observa algo que vai ao encontro à teoria que ainda não havia sido exposta em aula.

“Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objectos matemáticos conhecidos ou entre estes e novos objectos matemáticos, procurando identificar e comprovar as respectivas propriedades.” (Ponte, 2003, p. 4). Galileu descobre relações em sua investigação e testa suas hipóteses com o software.

Katherine Johnson E2T1 analisa as variações dos círculos ao se distanciar e aproximar com o iPad, buscando encontrar relações entre as variações dos tamanhos dos círculos vistas nesse movimento, e diz: “*Mas então, eu acho que é isso... Não é? Se afaste do círculo inicial. Eu acho que ele vai ficando tipo do tamanho desse círculo maior.*”. Continuando suas explorações, conclui: “*Ele vira um cilindro porque vai fechando as retas? É isso não é? Você se distancia tanto que os lados vão ficando iguais e viram cilindro?*”.

³⁵ Link QR Code: <https://drive.google.com/file/d/1ObWfwDiAUfHFLh-U5xfevlKnXBw9uJYU/view>

Figura 19 – Movimento realizado com a RA

Fonte: Elaborado pela autora³⁶

Compreendemos que um ambiente favorável à investigação requer que o aluno aceite o convite para participar do processo investigativo. Essa aceitação está condicionada à sua disposição, mas também a proposta do professor. No caso de Katherine, vê-se que há disposição para investigar, pois ela se mantém engajada no processo mesmo diante de novos questionamentos e, essa disposição e investigação, lhe permite formular uma conclusão.

Para a realização das tarefas, os alunos foram organizados em duplas (ou trios) visando promover o diálogo, uma vez que as explorações eram feitas por eles em um único iPad. Newton demonstra estar interessado na investigação, envolvido com a tarefa e se surpreende com o resultado do que vê: E3T2 “AAAAAAH! O vermelho tá ao contrário! [exaltação] É isso!”. Newton foi instigado pela pesquisadora a não responder com base no enunciado, mas procurar semelhanças e características investigando com o software. Aceitando a provação, Newton vê as diferenças entre os sistemas. Albert Einstein também se sente envolvido na investigação e argumenta “Quando vira de ponta cabeça, esse ponto ficou pra cá... Daí eu virei de novo e virou pra cá.”. Os gestos complementam a fala que no texto escrito parecem não ter sentido, embora sejam considerados suficientes para justificar o que via no software. Consideramos que no próprio gesto de estar em busca, há investigação.

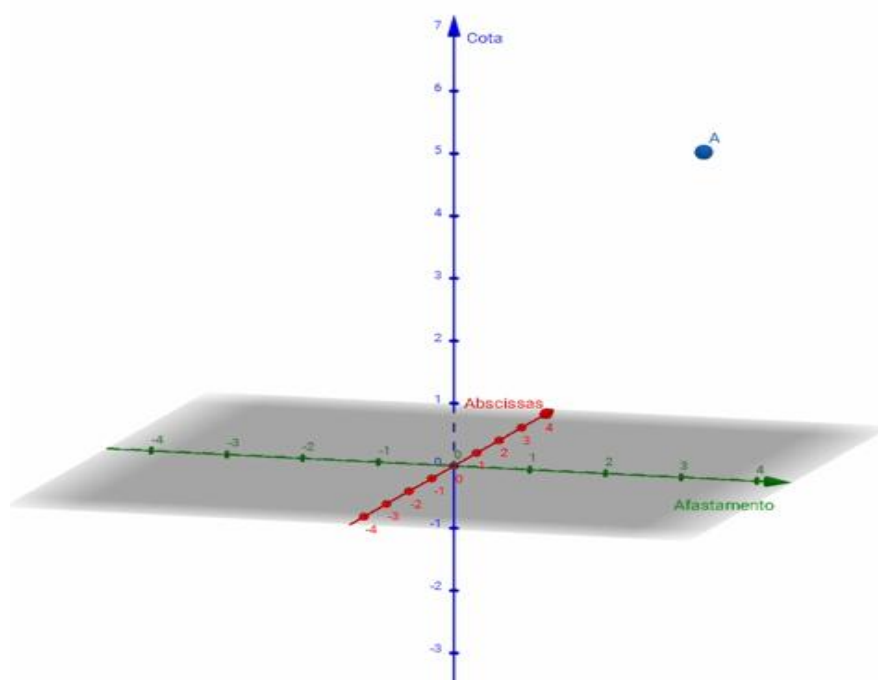
Ponte (2003) traz as etapas de uma investigação Matemática.

O primeiro momento envolve o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último, diz respeito à argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. (Ponte, 2003, p. 7)

³⁶ Link QR Code: <https://drive.google.com/file/d/1T7msmKt73oufffc3cH8XvIU3DRdFvoS3/view>

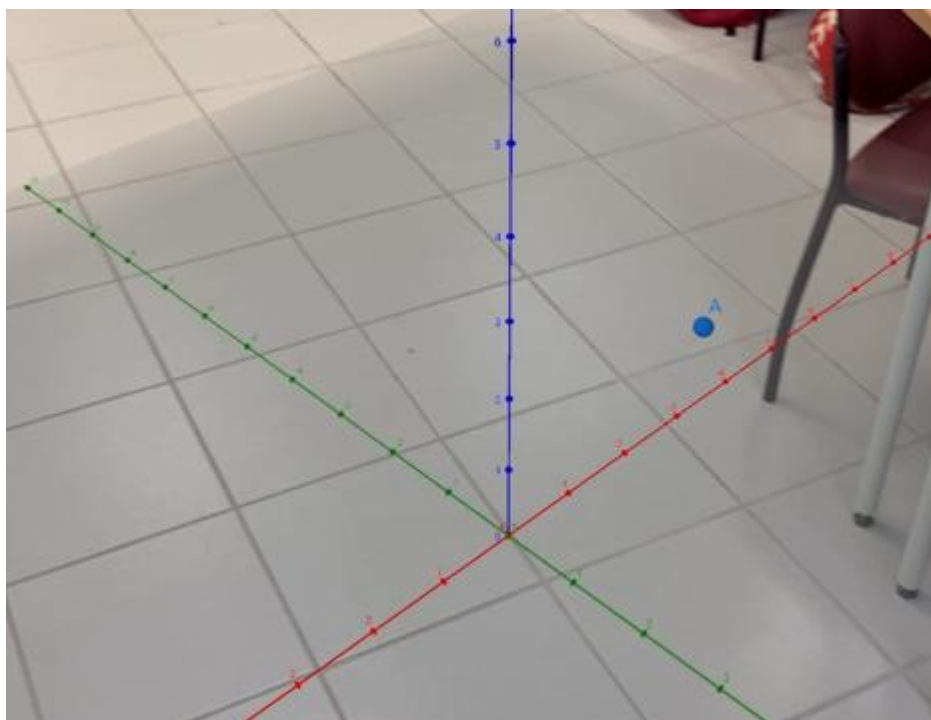
Embora na condução das tarefas com os alunos não tenhamos nos preocupado com essas fases, vimos que os alunos foram capazes de levantar hipóteses e confirmá-las ou refutá-las ao fazerem as explorações com RA, como se destaca na fala de Isaac Newton E3T2 *“Porque que ele muda, velho? Por que em realidade aumentada as posições do eixo foram modificadas? Depende do referencial.”*. Nota-se que, implícitas a essa fala, estão algumas das fases da investigação proposta por Ponte (2003), pois o aluno traz questões que são formuladas em decorrência de suas conjecturas, e conclui entendendo as mudanças do sistema mongeano a partir de sua investigação em RA. As figuras a seguir representam as visualizações do ponto descrito na tarefa nas diferentes perspectivas: visualização 3D que estava organizada no Sistema Mongeano e a visualização em RA que alterava para o Sistema Cartesiano.

Figura 20 – Localização do ponto A em 3D (Sistema Mongeano)



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 21 – Localização do ponto A em RA (Sistema Cartesiano)



Fonte: Elaborado pela autora

Ao adotar uma abordagem investigativa rompemos com a concepção de que a Matemática é algo pronto e, com isso, se possibilita ao aluno ser agente ativo na constituição do seu conhecimento. Trazer tarefas que possam ser exploradas pelos alunos, incentivando-os a levantar hipóteses e buscar sua validação ou refutação, é uma forma de aprender Matemática. “A legitimidade conceptual desta proposta apoia-se sobretudo no testemunho de matemáticos que reflectem sobre a sua experiência de investigação e consideram que ela, com as necessárias adaptações, está ao alcance da generalidade dos alunos.” (Ponte, 2003, p. 67). Por tal razão, optamos por atribuir pseudônimos de matemáticos aos participantes de nossa pesquisa, uma vez que, neste empreendimento investigativo, seriam eles os responsáveis por realizar as "descobertas" relativas ao objeto de investigação.

Conforme discutimos anteriormente com Ponte (2003) e Richit, Ponte e Quaresma (2021), ressaltamos a importância de, na formação docente, explorar diferentes metodologias para que o futuro professor vivencie modos de lidar com o conhecimento matemático e possa construir estratégias de ensino. A investigação com-a-RA possibilitou investigar objetos matemáticos e proporcionou o desenvolvimento de habilidades no uso de tecnologias aplicadas à investigação Matemática.

O processo investigativo com-a-RA ganha destaque em nossa análise a medida em que os participantes da pesquisa investigam as características dos objetos matemáticos com-a-RA e

explicitam suas compreensões. Os alunos se envolvem com esses objetos e como corpo-próprio se dirigem a eles com intencionalidade, movimentando-se para interagir com-a-RA. O processo investigativo não apenas possibilita a visualização dos objetos matemáticos, mas também abre oportunidade para um aprofundamento na exploração e compreensão dos conceitos matemáticos.

Ao investigar com-a-RA, o aluno se envolve no diálogo e interage com os colegas e com a pesquisadora, explicitando o percebido. A percepção ocorre em um mundo aberto, que se manifesta para alguém que se volta intencionalmente buscando compreender. Nesse processo de perceber e compreender, se realiza uma síntese compreensiva das propriedades do que é construído. Não se trata apenas de uma construção na qual se revela uma propriedade geométrica, pois, ao estar em interação com a RA, o aluno constrói e transcende essa experiência. A compreensão se dá no movimento gerado no espaço, permitindo ao aluno ver o que se manifesta e, pela investigação, extrapolar o visto, configurando o ato de transcendência.

Essa síntese efetuada pelo corpo-próprio, nos ajuda a compreender a constituição desta categoria, pois, pela investigação, vimos que os alunos percebem esse movimento de compreensão e se percebem em movimento, corpo-próprio, “condição de possibilidade, não apenas da síntese geométrica, mas ainda de todas as operações expressivas e de todas as aquisições que constituem o mundo cultural”. (Merleau-Ponty, 1999, p, 519).

A constituição dessa categoria emergiu com os aspectos revelados nas gravações que capturam a ação dos alunos. Os movimentos de busca de compreensão revelam que a RA não era apenas um instrumento (ou recurso) para a investigação, ela está integrada ao corpo-próprio tornando-se um elemento fundamental para as compreensões expressas pelos alunos. Ao estar-com-a-RA, os estudantes eram capazes de circundar o objeto, visualizá-lo sob diferentes ângulos e explorar o objeto com-o-software. Por meio da investigação, se explicitavam os modos pelos quais o sentido se constituía para eles, bem como as formas de constituição do conhecimento e de expressão do compreendido.

6.2 Abertura ao estar-com-RA

A abertura do aluno ao estar-com-RA revelou-se, em nossa análise, como uma possibilidade para o diálogo e a exploração. Consideramos essa abertura como um elemento relevante no processo de constituição do conhecimento, uma vez que evidencia a intencionalidade e a disposição do aluno em interagir com o que se apresenta no contexto investigativo.

A constituição do conhecimento, conforme vimos discutindo, se mostra para nós como um processo de múltiplas faces, caracterizado por interações contínuas entre o sujeito, o objeto de estudo e a realidade vivida, envolvendo intencionalidade, experiências vividas e a abertura para novas percepções e interpretações. Entendemos com Rosa e Bicudo (2018, p. 148) que esse processo “abrange muitos atos intencionais da consciência e modos dos sentidos que fazem ao sujeito vivente serem entrelaçados e irem, aos poucos, constituindo uma forma que vai se presentificando à consciência, de maneira que o sujeito *pode ser dar conta* disso que está compreendendo do mundo vida.”

Falas como do Carl Gauss E2T1 “*Ó que legal!*” ou Charles Darwin E2T1 “*Meu Deus, cara! Que abalo!*” mostram entusiasmo ao se deparar com suas planificações em RA. Esse entusiasmo evidencia o foco que é direcionado ao objeto, revelando o corpo vivente que se situa “de modo atento [...] indagando do que se trata ou dirige sua ação a algo que percebe como imperante [...] meu *corpo está onde há algo a fazer.*” (Rosa; Bicudo, 2018, p. 191)

O QR Code a seguir mostra um recorte da aula onde há a fala de Charles Darwin que se impressiona com o projetado em RA.

Figura 22 – QR Code com a fala de Charles Darwin E2T1



Fonte: Elaborado pela autora³⁷

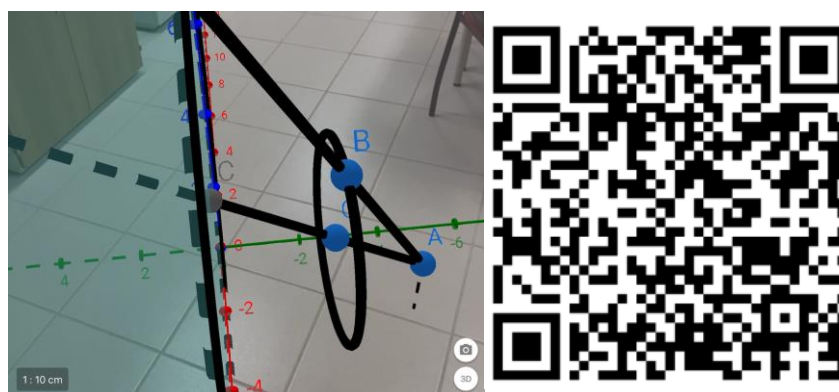
Rosa (2017) contribui para que possamos dizer que há uma "motivação" gerada pelos dispositivos eletrônicos que são “inseridos no cenário educacional em termos de Educação Matemática, mas, acima de tudo, [nos permite] entender de que modo esses recursos possibilitam uma sensação de envolvimento, denominado por muitos como ‘motivação’” (Rosa, 2017, p. 160, inserção nossa).

Mary Jackson E2T1 diz espantada: “*Nossa! Olha que legal a gente aqui de lado... A*

³⁷ Link QR Code: https://drive.google.com/file/d/1x4Bk2f0e-AaEMzGU5aVd2VxkMN_y-5ot/view?usp=sharing

gente consegue ver essa coisa do... do espaço... Não tem como...". Essa fala revela que há predisposição da pessoa para o movimento, há intenção de mover-se. O deslocar-se evidencia a possibilidade de interagir com o objeto projetado em Realidade Aumentada (RA) e se torna um elemento central na disposição que favorece o processo investigativo.

Figura 23 – QR Code com a fala de Mary Jackson E2T1



Fonte: Elaborado pela autora³⁸

O sujeito *pode se dar conta*, pois “o objeto intencional já se mostrava um fenômeno, uma vez que é visto de uma perspectiva” (Rosa; Bicudo, 2018, p. 180). Ou seja, o objeto de estudo possui singularidades e complexidades a ele inerentes, e cabe ao sujeito investigador evidenciá-las, o que requer uma abertura intencional para o que se mostra no processo investigativo.

Katherine Johnson E2T1 anuncia seu estranhamento: “*Eu consigo ver ele todo... Mas ele tá estranho parece... Tá certo?*”. Esse estranhamento emerge da abertura da aluna ao processo investigativo, pois, por meio da projeção em RA, a aluna visualiza o objeto em sua totalidade, mas, ao adotar uma postura investigativa, ela vivencia algo que a inquieta que é resultado da interação intencional com o objeto que visa compreendê-lo em sua complexidade, para além do que vê.

“No movimento perceber-percebido, a consciência se estende ao fenômeno e o traz como percebido para si, articulando mediante seus atos de esferas sensorial, psíquica e espiritual compreensões sobre ele” (Rosa; Bicudo, 2018, p. 201). O objeto se doa à aluna que, então, articula o que está sendo visto com os conhecimentos prévios que possuía sobre os sólidos geométricos. Há uma busca por compreensão que se explicita no estranhamento.

Isaac Newton E3T2 diz: “*Tá vendo o ponto ali? É que na verdade... acho que era melhor*

³⁸ Link QR Code: <https://drive.google.com/file/d/1oxRjxtkD52MT0SGqr9XOWK8-dRHgS38A/view?usp=sharing>

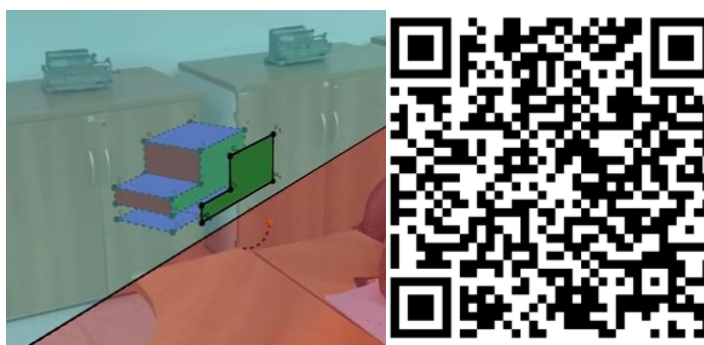
ter colocado ali... O verdinho à direita... Mas o ponto tá errado!". Newton expressa sua disposição para tentar repetidamente. Ao ter a sensação de que havia algo discrepante em relação ao que era esperado, ele demonstra abertura para novas tentativas e abordagens, buscando alternativas para alcançar o resultado que desejava. Essa sensação de que “algo está estranho” se mostra para o sujeito da percepção, no “ato de sentir as próprias sensações o preenche com a dimensão psíquica e, nesse entrelaçamento, torna-se um corpo-vivente [...]. Sentir as sensações e dar-se conta (pela ação da consciência) de que as está sentindo explicita a concepção de vivência” (Bicudo, 2022b, p. 126). O sujeito que explora o objeto para compreendê-lo vivencia a experiência investigativa.

A disposição dos alunos também se manifesta, em nossa análise, na colaboração mútua. Ao ver um colega com dúvidas, seja em relação ao uso do aplicativo ou à análise do objeto projetado em RA, diversas falas indicam uma abertura ao outro, uma preocupação em auxiliar o colega para que ele compreenda o que está sendo feito. Conforme compreendemos com Rosa e Bicudo (2018), na constituição do conhecimento há o movimento do corpo vivo e há, também,

a presença do outro, cossujeito que também sente, percebe, realiza atos psíquicos e espirituais e que se faz sentir em sua corporeidade. O cossujeito, sujeito com quem se está no mundo vida, também compreende e pode compreender o dito em uma linguagem articulada e expressa em sua materialidade (Rosa; Bicudo, 2018, p. 210).

Nota-se, por exemplo, que Isaac Newton E4T4 se preocupa em auxiliar o colega dizendo: *“Porque eu vi no SENAI isso aí. Deixa-me explicar para você, vem para cá; aqui é a parte baixa e aqui é do lado. Não pode fazer isso, pode? É que é como se isso se levantasse, está vendo?”*. Há uma tentativa de expor o seu conhecimento sobre o assunto para que o colega também possa compreender.

Figura 24 – QR Code com a fala de Isaac Newton E4T4



Fonte: Elaborado pela autora³⁹

³⁹ Link QR Code: <https://drive.google.com/file/d/13c1tAx0DjJLBbfIOUMILhRwQIHPn4S3j/view?usp=sharing>

Da mesma forma, ao explicar o movimento realizado no software, Euclides de Alexandria E4T4 afirma: “*Ele pega a projeção debaixo (sic), você tem uma projeção aqui e uma aqui, ela está jogando as duas junto, e está sobrepondo, está vendo? Ele pega a parte debaixo*”. Euclides procura verbalizar o movimento realizado com-a-RA para que o colega perceba o que é mostrado na projeção.

O sujeito que realiza a exploração com RA é sujeito da constituição de conhecimento e se abre para auxiliar o outro. O processo subjetivo de constituição de cada um se abre ao diálogo, ganhando a esfera intersubjetiva com argumentos que visam levar o outro a entender o que se mostra. “Nota-se que esse movimento de constituição do conhecimento enlaçou a subjetividade de sujeitos, a intersubjetividade e a objetividade.” (Rosa; Bicudo, 2018, p. 218).

A abertura ao estar-com-RA mostrou-se para nós em três movimentos distintos do sujeito com-a-RA. Primeiramente, evidenciou-se na disposição do aluno que se engaja no processo investigativo com a RA, manifestada por suas admirações diante do que era apresentado. Em segundo lugar, mostrou-se na receptividade ao que lhe vinha ao encontro em articulação com as concepções que se formavam durante o processo de constituição do conhecimento, quando o sujeito se engaja no movimento investigativo para compreender o objeto. Por fim, a abertura se destacou na interação com o outro, na preocupação de que o outro pudesse compreender o que estavam investigando. Assim, nota-se que, mediante essa abertura ao outro o sujeito não estava isolado, pois constituía seu conhecimento na interação sujeito-objeto e sujeito-sujeito. Todas as ideias associadas a essa categoria remetem à intencionalidade do sujeito que, sendo com-o-outro, busca ativamente a compreensão.

A estrutura da intencionalidade, como exposta nos escritos de Husserl, pode ser analisada mediante dois componentes: o objeto como intencionado, ou seja, como o algo para o qual a consciência se dirige, o *noema*, e o ato consciente que intenciona o objeto, o ato da *noesis*. O *noema* pinça o lado do objeto da relação intencional e o *noesis* destaca o lado do sujeito, intencionando os modos pelos quais ele é dado à consciência. Ou seja, abarca os modos de doação da coisa, doação essa que se dá no ato de perceber, ou seja, na percepção. Esta não é vazia, como se captasse uma ideia imaterial da coisa. É preenchida pelo que vem pelas sensações. (Bicudo, 2022b, p. 128)

Entendemos que a intencionalidade refere-se à uma relação do sujeito com o mundo, onde a consciência é direcionada a algo. O ato de perceber não é vazio ou puramente abstrato, como se fosse apenas uma ideia imaterial do objeto. Pelo contrário, a percepção é preenchida por sensações que trazem o conteúdo da experiência. Assim, o objeto não é dado apenas como uma construção intelectual, mas como algo que é concretamente vivenciado, com suas qualidades sendo trazidas pelas sensações que chegam à consciência. Assim, intencionalidade

é distinta de intenção. São atos de consciência que presentificam o que se mostra, que enlaça e faz aparecer tal qual é.

Os atos duram, têm uma temporalidade, são dinâmicos e fazem acontecer. Entretanto, não são abstratos, mas se dão na materialidade carnal que, por sua vez, não é uma massa sem forma e sem direção. É um organismo vivo que, de modo intencional, sempre se dirige a algo buscando saber do que se trata ou para dar conta de uma solicitação, de algo a fazer. Não se dirige a esmo, porém visa um foco. Os atos do sujeito encarnado também não se exaurem em si, mas, para consumarem-se, necessitam ser articulados e expressos em uma materialidade apropriada à visibilidade do que está sendo constituído como conhecimento. (Rosa; Bicudo, 2018, p. 201)

Portanto, para nós, a **abertura ao estar-com-RA** apresenta-se como uma categoria central para responder à pergunta norteadora da pesquisa: *Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?* A abertura evidencia que a compreensão da Geometria Descritiva pelos alunos é mediada por sua disposição intencional ao interagir com-a-RA e colocar-se ativamente no processo de investigação.

Ao engajar-se com as tarefas em RA, o sujeito não apenas observa, mas se posiciona intencionalmente para explorar o objeto, seja em sua relação direta com ele (estar-com-o-objeto), seja na interação com outros sujeitos (estar entre sujeitos). Essa abertura ao investigado, caracterizada pela intencionalidade e pela postura ativa, permite que o sujeito constitua conhecimento por meio de interações dinâmicas e reflexivas.

A compreensão da Geometria Descritiva emerge, portanto, de um processo que não é apenas técnico, mas relacional, pois envolve tanto a conexão do sujeito com o objeto projetado em RA quanto a interação com outros sujeitos no contexto investigativo. Essa postura de abertura é essencial para que o sujeito, ao se dispor à experiência e refletir sobre ela, atribua significados e amplie sua compreensão sobre os conceitos geométricos. A RA não se evidencia como um mero recurso tecnológico, mas torna-se o meio que dispõe o aluno, criando oportunidades para aprender.

6.3 Movimento do Corpo-vivente com-RA

O movimento do corpo-vivente com-RA revelou-se, em nossa análise, como uma manifestação do corpo-vivente compreendendo-se na realidade vivida. Esse movimento é considerado um elemento fundamental no processo de constituição do conhecimento, pois evidencia o corpo-vivente inserido no mundo-da-vida realizando investigações com-a-RA. O sujeito constitui seus conhecimentos por meio de explorações realizadas na realidade em que

vive, articulando a experiência sensorial e cognitiva de modo intencional, ao interagir com a RA. Esse processo destaca a inseparabilidade entre o corpo, o sujeito e o contexto investigativo, reforçando a centralidade do corpo-vivente como agente ativo na constituição do conhecimento.

Para a análise dessa categoria é importante que ressaltemos o que para nós é esse *movimento*. “O movimento impregna nossa corporeidade de significações” (Detoni, 2023, p. 84), ou seja, ele não é separado de nossa percepção, pois há a intencionalidade do nosso ser no mundo da vida. Merleau-Ponty (1999) nos mostra que o movimento, entendido em uma perspectiva fenomenológica, não é apenas um mover-se /agir sobre um espaço. Para explicitar o que isso significa, nos valemos de um exemplo do próprio autor. Ele nos diz que, quando faço um gesto em resposta a algo, por exemplo, um gesto de adeus para um amigo que se afasta, esse gesto é interpretado por meu amigo em sua totalidade, ou seja, “em meu gesto, não há uma percepção seguida de um movimento, a percepção e o movimento formam um sistema que se modifica como um todo.” (Merleau-Ponty, 1999, 160). Dessa forma, “o ser em movimento é uma manifestação do ser, um desdobramento do ser no mundo” (Detoni, 2023, p. 84).

Quando Ada Lovelace E2T1 questiona Gauss: “*E aí? O que acontece quando você se afasta do círculo inicial?*”, ela o provoca e ele decide afastar-se, levando consigo o ponto A, em uma tentativa de responder à indagação. Gauss recorre ao aplicativo que estão explorando para investigar e encontrar uma resposta para a colega, movimentando-se com o ponto A e explorando o que permanece constante na relação com o círculo inicial, ele busca entender o que acontece.

Figura 25 – QR Code com o GIF do movimento realizado por Ada Lovelace E2T1



Fonte: Elaborado pela autora⁴⁰

Nesse processo, Gauss mostra compreender que sua busca por respostas envolve não apenas um distanciamento físico, mas um afastamento realizado com-a-tecnologia. Ele

⁴⁰ Link QR Code:

<https://drive.google.com/file/d/1x3DQp4SP1n0poxxpQSbQoDivnRBSTMHi/view?usp=sharing>

interpreta o círculo inicial como um ponto de referência próximo a si e reconhece a necessidade de engajar-se com a Realidade Aumentada (RA) para ampliar sua investigação. O movimento realizado por Gauss reflete a sua interação com a tecnologia, pois a RA se torna uma extensão de seu corpo ampliando sua capacidade investigativa.

Paulo, Batista e Pereira (2023, p. 235) afirmam que, ao estar-com-a-tecnologia, o sujeito pode “ocupar-se dela - fazendo explorações - compreender sua estrutura lógica e o que com ela pode perceber, sentir, imaginar, fazer”. Nesse sentido, a interação de Gauss com a RA exemplifica certo modo de ver a tecnologia que não apenas facilita a exploração, mas também transforma a maneira como o sujeito percebe e constitui conhecimento no contexto investigativo.

Nesse movimento que não é apenas deslocamento no espaço físico, mas intencionalidade, podemos assumir “que a tecnologia não é recurso ou instrumento, mas participe da ação do sujeito no mundo, presente em nosso modo de ser cotidiano” (Paulo; Batista; Pereira, 2023, p. 234). Nessa perspectiva, compreendemos que a presença da tecnologia no processo investigativo transforma o movimento de constituição do conhecimento.

Quando Galileu Galilei E2T1 afirma: “*Olha lá! É puro Pokémon Go isso! No Pokémon funciona entre aspas. É que você quer pegar um Blastoise e colocar em cima da mesa*”. Galileu mostra a familiaridade com algo (o jogo) que é evocado pela proximidade com o que vê no software, mas também revela seu entendimento sobre a possibilidade de colocar algo virtual “em cima de algo físico”. Para Galileu, a tecnologia permite essa coexistência, apontando para uma concepção em que as fronteiras entre o real e o virtual se dissipam.

Figura 26 – QR Code com o áudio da fala de Galileu Galilei E2T1



Fonte: Elaborado pela autora⁴¹

Essa perspectiva anunciada por Galileu nos remete aos dizeres de Paulo, Batista e Pereira (2023, p. 236), ao afirmarem que “a ‘realidade’ não se aumenta, pois é o mundo da vida; aumentam-se as possibilidades perceptivas, abrem-se novos modos de fazer exploração”. A

⁴¹ Link QR Code: <https://drive.google.com/file/d/1MR1e7MPDQxYIMTy7NzYaFo2G-TsI13U-/view?usp=sharing>

tecnologia de RA está nas interações do sujeito com o mundo e não cria uma nova realidade, ela amplia as possibilidades de percepção e exploração, permitindo que o sujeito reconfigure sua relação com o ambiente e os objetos de investigação.

Mary Jackson E2T1 afirma: “*Vamo’(sic) projetar ele de uma forma que a gente consiga ver ele assim... ai, dá licença... porque eu sou a professora dos baixinhos... óóóóó... Tá aqui, mas eu tenho que... Não é a gente mover ele... é a gente ir até ele. ‘Vamo’(sic) entrar aqui? Tipo, a gente se afasta... é isso?’*”. O movimento se anuncia para Mary Jackson, ela se move para ver mover-se o objeto para o qual se volta intencionalmente buscando compreender.

Entendemos com Bicudo (2022b, p. 127) que esse movimento é também da consciência.

A consciência não é, portanto, separada do corpo, embora o transcenda, vai além dele, pela intencionalidade, sua característica. Por essa sua característica, ela intenciona mais do que é dado no sentir sensorial, transcendendo os contornos do corpo (Körper) e abarcando, na percepção, o objeto ao qual se dirige. O objeto, por sua vez, oferece-se, doando-se em possibilidades de ser sentido e ser percebido.

Mary Jackson se orienta para perceber aquilo que o objeto lhe oferece em sua doação. Sua fala indica a compreensão de que a investigação requer um movimento que não é apenas físico, mas intencional, pois busca o sentido do que se revela, se doa ao ser acolhido pela consciência. Assim, o sujeito, ao engajar-se no processo investigativo, transcende a percepção sensorial, articulando-a pela intencionalidade para atribuir significados em uma relação entre corpo, consciência e objeto.

A pessoa (aluno ou professor) que faz explorações Matemáticas com um aplicativo de Realidade Aumentada, *toma um lugar para se pôr a ver*. O modo de posicionar-se é intencional, pois visa *revelar* os aspectos de uma curva na qual ele pode “entrar” para “ver melhor”. Ele - o aluno - se movimenta com o smartphone na mão buscando um “lugar” para ver, mas não move o objeto em RA; o movimento é do corpo-próprio e é nele que o objeto *se revela, mostra suas faces* para ele (Paulo; Batista; Pereira, 2023, p. 236).

O movimento de Mary Jackson emerge como um movimento do corpo-próprio que busca o que se revela no objeto. Essa dinâmica também pode ser vista nas respostas de Nicolau Copérnico E7Q5, Isaac Newton E5 e Mary Jackson E7Q6 ao serem questionados: “A Realidade Aumentada te ajudou na compreensão dos sistemas de projeção? Justifique.”

Nicolau Copérnico afirma: “*Sim, pois com elas [com a RA] eu conseguia me posicionar e ver as formas do meu ponto de vista, como se estivessem na minha frente, assim assimilando melhor as projeções.*”; Isaac Newton responde: “*Sim, o que mais me interessou foi poder "andar ao redor da peça no ar", dando a impressão de construir algo real, quase palpável e*

podendo ver de frente de cada plano.”; por sua vez, Mary Jackson comenta: “*O AR é uma ferramenta muito boa e com certeza foi relevante para o entendimento dos espaços, já que era algo que podíamos ver como se estivesse no nosso mundo e podíamos andar e ver de todos os ângulos, o que o papel seria algo mais difícil.*”

Nessas falas destaca-se a percepção de sua localização como elemento crucial para visualizar e analisar o objeto de estudo. Os estudantes descrevem como, durante o momento investigativo, movimentavam-se ao redor do objeto para focar as faces que tinham maior dificuldade de ver e construir.

Os relatos ressaltam a experiência sensorial e cognitiva proporcionada pela interação com a RA que entendemos como uma forma de incorporar novos modos de perceber, oferecendo aos alunos uma modalidade diferente de relação com o real. A RA, nesse contexto, não cria uma nova realidade, mas integra-se ao mundo da vida, oferecendo aos sujeitos que investigam possibilidades ampliadas de exploração e entendimento.

O corpo-próprio se mostra em evidência nessa categoria, uma vez que com-a-RA ampliam-se as possibilidades de “sentir o mundo, percebê-lo e constituir-se nele” (Paulo; Batista; Pereira, 2023, p. 236). É por meio dessa vivência com-a-RA que as compreensões vão se moldando e organizando, pois “o movimento da pessoa que segura um smartphone na mão [...] é intencionalidade originária do corpo-próprio, veículo do ser-no-mundo.” (Paulo; Batista; Pereira, 2023, p. 236).

Carl Gauss E2T1, questiona: “*Aonde que é pra ir? No A?*”. Gauss, como corpo-próprio, entende o ponto A como um local em sua realidade para o qual ele “pode ir”. O ponto A deixa de ser apenas um elemento virtual, transformando-se em um local acessível, com o qual Gauss interage ativamente, direcionando-se para ir até ele.

Conforme Paulo, Batista e Pereira (2023, p. 246), na realidade em que objetos físicos e virtuais coexistem, “‘o espaço investigativo’ [...] é o lugar onde eu me situo para ver os objetos [...] um cenário no qual posso, movendo meu corpo, sentir as sensações vividas nos atos que o corpo realiza”. Gauss, ao se movimentar, interage nesse espaço investigativo que a RA proporciona, deslocando-se fisicamente e abrindo-se às possibilidades que o objeto virtual lhe apresenta. Esse engajamento evidencia a relação entre corpo, tecnologia e percepção, na qual o corpo-próprio atua como elemento principal do processo investigativo, conectando sujeito-mundo e ampliando suas possibilidades de constituição do conhecimento.

Portanto, para nós, o **movimento do corpo-vivente com-RA** apresenta-se como uma categoria central para responder à pergunta norteadora: *Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?*, pois o corpo-vivente

não atua de maneira isolada, mas em constante inter-relação. Como destacado por Bicudo (2023, p. 115), “o movimento de tornar-se corpo-vivente não é linear; enlaça aspectos psíquicos e de percepção de si”. Nesse sentido, o movimento realizado pelo sujeito com-RA não é aleatório, mas intencionado, guiado por uma busca de compreensão e dirigido ao propósito investigativo.

Ao analisar essa categoria, revisitamos e ampliamos nossa concepção de "realidade." A intenção não é distinguir diferentes “realidades”, pois entendemos que o corpo-vivente explora, movimenta-se e compreende porque está imerso no mundo-da-vida, em que o objeto virtual passa a ser integrado como parte de sua experiência investigativa. Rosa (2023, p. 214) reforça essa perspectiva ao afirmar que “Nossa conexão com esses ambientes desperta sentimentos de pertencimento [...] materializam nossos apontamentos sobre o corpo-próprio como veículo de ser no mundo cibernético e desses recursos sendo incorporados nesse corpo, com o mundo.”

O corpo-vivente ao estar-com-RA possibilita ao sujeito coexistir com os objetos virtuais, reconhecendo-se como corpo em sua totalidade. Sensações e percepções integram-se nesse movimento investigativo, permitindo a constituição do conhecimento pelo sujeito que se volta intencionalmente ao objeto. Essa interação dos objetos virtuais com a realidade vivida não apenas amplia as possibilidades de percepção, mas também integra o corpo, a tecnologia e o mundo-da-vida em uma experiência única, em que o sujeito se envolve no processo de compreender a Geometria Descritiva.

7. CONSIDERAÇÕES SOBRE O INVESTIGADO

Neste capítulo, mais do que revisitar autores e articular as experiências vividas com os alunos às compreensões proporcionadas pelas leituras, buscamos expor o significado que a investigação assumiu em nossa trajetória, com destaque para minha perspectiva enquanto pesquisadora em formação.

A pesquisa proporcionou uma nova perspectiva sobre as tecnologias. Durante meu Trabalho de Conclusão de Curso e minha dissertação de mestrado, dediquei-me ao estudo das tecnologias, mas cada etapa revelou um olhar distinto. Inicialmente, as tecnologias foram analisadas como ferramentas que possibilitavam estratégias de ensino voltadas para o processo de aprendizagem do aluno. No entanto, nesta tese, a visão foi ampliada: as explorações realizadas, os movimentos vivenciados e os dados analisados permitiram compreender o sujeito-com-RA de maneira mais profunda. A tecnologia de Realidade Aumentada não se revelou apenas como um recurso relevante, mas como um modo de exploração em que o sujeito se constitui em relação com as TD, sendo-com-as-TD em sua experiência investigativa.

Em nossa pesquisa, as atividades desenvolvidas em sala de aula foram planejadas e realizadas em uma postura fenomenológica, o que significa dizer que o objetivo foi o de compreender como os alunos constituem conhecimentos acerca dos conceitos de Geometria Descritiva quando realizam explorações com Realidade Aumentada. Nesse contexto, os alunos foram incentivados a assumir uma postura ativa, envolvendo-se em processos investigativos e compartilhando suas compreensões. Ao interagir com os objetos em um movimento intencional de investigação, os alunos puderam analisar suas ações, o que lhes possibilitou compreender os conceitos da Geometria Descritiva. Para isso, tanto a tecnologia eleita quanto às tarefas elaboradas foram importantes.

Conforme discutido por Ponte, Quaresma e Branco (2011, p. 2),

as tarefas de exploração e investigação têm a característica distintiva de requererem sempre um trabalho atento de interpretação da situação, a precisar ou reformular as questões a investigar e a construir representações apropriadas. Mais do que um contexto para aplicar conceitos já aprendidos, estas tarefas servem principalmente para promover o desenvolvimento de novos conceitos e para aprender novas representações e procedimentos matemáticos.

Assumindo a postura fenomenológica elaboramos as tarefas com o propósito de promover a exploração e investigação de conceitos de Geometria Descritiva. Esperava-se que tais tarefas desencadeassem as atividades exploratórias dos alunos para que fosse possível a

eles construirão conhecimentos. Com essa abordagem privilegiamos o caráter investigativo das tarefas, proporcionando aos alunos a oportunidade de explorar e compreender os conceitos por meio de uma interação ativa e intencional.

O sentido de corpo-próprio foi importante para entendermos essa constituição de conhecimento e para a elaboração das tarefas. Conforme Bicudo (2023, p. 122),

Na espacialidade em que se localiza [...] o corpo-vivente se relaciona com outros corpos, dentre os quais está o outro que, como ele, também se move de modo autônomo e livre e cujos modos de se doar se revelam diferentes daqueles dos corpos físicos que não se movem por si.

Os alunos, ao se envolverem com as tarefas, movimentaram-se para investigar sólidos geométricos e visualizar diferentes tipos de projeções sempre em diálogo com o outro, colega e professores. Por meio de seus deslocamentos como corpos-viventes, identificaram diferenças entre sistemas de projeção, construíram vistas ortogonais de objetos geométricos e elaboraram representações bidimensionais considerando as visualizações tridimensionais. O movimento "ao redor" dos objetos desempenhou um papel central na identificação e compreensão do objeto.

O software utilizado também foi importante e mereceu atenção ao ser escolhido. Entre os critérios prioritários estavam a disponibilidade de um software livre, a integração com Realidade Aumentada (RA) e a flexibilidade para permitir a construção e movimentação do objeto para investigação.

Dentre as opções analisadas, o GeoGebra AR atendeu essas características, configurando-se na escolha mais adequada. Pereira (2022), em sua pesquisa, também elegeu este software e enfatiza as características distintivas do GeoGebra AR que foram decisivas para sua seleção e que também se mostraram importantes para nós:

Destaca-se a possibilidade de posicionar o objeto digital sobre uma superfície plana e, com a movimentação do dispositivo, o usuário pode vê-lo (o objeto) em perspectivas variadas. Nesse aplicativo não é necessário o uso de marcadores, já que o dispositivo reconhece superfícies planas, e possibilita, ao usuário, posicionar o objeto e explorá-lo. Nesse caso, o dispositivo deve possuir uma configuração de hardware mínima (hardware de sensores de movimento: acelerômetro e giroscópio) para que o aplicativo, por meio das imagens captadas pela câmera, identifique superfícies no ambiente e posicione o objeto. (Pereira, 2022, p. 57)

Ao longo da realização das tarefas propostas durante a disciplina de Geometria Descritiva, foi possível ver o engajamento dos alunos, os movimentos realizados com-a-RA e as interações entre eles, que eram compartilhadas entre si e com a pesquisadora. As atividades,

sempre realizadas em duplas ou trios, favoreceram a colaboração e oportunizaram a comunicação e a exploração conjunta dos conceitos, enriquecendo o processo investigativo e a constituição de conhecimento.

A constituição do conhecimento, como a entendemos com Rosa (2023), revela esse movimento com as TD que é do corpo-próprio que se lança para ver o objeto. Na vivência perceptiva “o corpo-próprio fala, se move, questiona, manifesta pausas, ri, realiza repetições, concorda, discorda, troca de temática reflexiva, retorna à temática, busca ideias consonantes com as demais, inventa formas de aprender, entre tantas outras ações” (Rosa, 2023, p. 205). Ao realizar as explorações com a RA, o corpo-próprio se expressa em sua totalidade modificando o modo pelo qual se dá “a constituição do conhecimento, pois essas diferentes visualizações permitidas pelo ato de mover-se em torno do gráfico se dão de maneira diferente do que manipular um gráfico planejado” (Rosa, 2023, p. 213).

Na pesquisa vimos que, permitindo ao aluno ser um investigador, incentivando-o a questionar, refletir e construir justificativas para aquilo que observa, criam-se novas possibilidades para a constituição do conhecimento. Durante toda a pesquisa fomos revisitando a questão norteadora: *Como os alunos compreendem a Geometria Descritiva ao fazer explorações com Realidade Aumentada?* e vimos alguns modos pelos quais os alunos expressaram suas compreensões, evidenciando as dinâmicas e os processos que emergiram no contexto investigativo e que apontam para a constituição de conhecimento.

Nossa análise revelou que o *Processo investigativo com-a-Realidade-Aumentada* emergiu como um meio no qual os alunos percebem o movimento de sua própria compreensão, reconhecendo-se como corpo-próprio em ação. Por meio da investigação, os alunos evidenciam os modos pelos quais o sentido se constitui para eles, articulando processos de investigação e expressando o que compreendem.

A abertura do aluno ao estar-com-RA manifestou-se por meio da intencionalidade do sujeito, orientando suas ações investigativas para consolidar o aprendizado. Os alunos, enquanto agentes de sua própria formação, mostram-se motivados para realizar explorações direcionadas à compreensão do objeto de estudo. Essa postura ativa também se expressou no contexto da partilha, em que os alunos comunicaram seus entendimentos para auxiliar colegas em suas próprias compreensões.

Além disso, o **Movimento do Corpo-vivente com-RA** destacou o sujeito em sua totalidade, integrando-se à RA. A sensação de pertencimento gerada pela experiência com a RA possibilitou aos alunos constituírem conhecimento como se estivessem interagindo com objetos físicos. Nesse contexto, compreendemos a realidade como uma conexão contínua entre

os objetos virtuais e o sujeito intencionado, ampliando as possibilidades de percepção e de exploração investigativa.

Esses três modos de os alunos vivenciarem tarefas investigativas com RA apontam para a constituição do conhecimento pelo sujeito que realiza tais investigações com a RA. A RA proporcionou uma abordagem diferenciada para a exploração de objetos e para a investigação dos conceitos de Geometria Descritiva. Compreendemos a RA como potencializadora para a aprendizagem, pois com ela o aluno pode assumir a posição de investigador, interagir com o objeto investigado e com o outro, colega com quem dialoga.

A acessibilidade às tecnologias ainda é um desafio em nossa realidade escolar. Embora o GeoGebra seja um aplicativo gratuito, é necessário que os dispositivos, como smartphones e tablets, estejam atualizados para garantir seu funcionamento adequado. No caso da pesquisa que realizamos, o acesso dos alunos a essa tecnologia deu-se por meio dos iPads da Universidade que foram adquiridos com recursos de um projeto financiado pela FAPESP⁴². Com esses dispositivos, o aplicativo funcionou de maneira eficaz, sem travamentos. Além disso, é crucial que os professores estejam preparados para as atividades realizadas com o uso de tecnologias.

Embora as pesquisas evidenciem a relevância e o potencial das tecnologias no contexto da aprendizagem, elas ainda não são plenamente integradas às salas de aula. Com base no que se evidencia em nossa pesquisa, entendemos que este é um tema que requer uma análise mais aprofundada e um investimento na formação dos professores, para que se proporcione aos alunos a oportunidade de estar-com-as-tecnologias investigando situações Matemáticas.

É igualmente importante, na formação de professores, destacar-se a concepção de tecnologias, pois como ferramenta ou recurso elas podem ser de uso esporádico, o que não caracteriza um movimento de constituição de conhecimento com tecnologias como vimos defendendo em nossa pesquisa.

Por fim, destacamos que, ao assumir uma concepção fenomenológica em nossa pesquisa o movimento revelou-se de grande importância: trata-se de um modo de o sujeito, entendido como corpo-vivente, posicionar-se diante do que percebe para se perceber, entendendo-se capaz de avançar no seu movimento de vir a ser, sempre contínuo, sempre aberto às novas possibilidades, sempre intencionado. Nesse movimento é que se dá a constituição de conhecimento na realidade vivida.

⁴² Processo nº 2019/16779-4 A constituição do conhecimento matemático com realidade aumentada.

REFERÊNCIAS

ALES BELLO, Angela. Husserl e as Ciências. São Paulo: **Livraria da Física**, 2022.

BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira; MORAN, Mariana. **Geometria: práticas e aprendizagens**. São Paulo: Livraria da Física, 2022.

BARBIN, Évelyne. Monge's Descriptive Geometry: His Lessons and the Teachings Given by Lacroix and Hachette. In.: BARBIN, Évelyne; MENGHINI, Marta; VOLKERT, Klaus. (Ed.). **Descriptive Geometry, The Spread of a Polytechnic Art: The Legacy of Gaspard Monge**. Springer., 2019.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Fenomenologia: confrontos e avanços**. São Paulo: Cortez, 2000.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, comncepções, possibilidades didático-pedagógicas**. 1ªed. São Paulo: Editora UNESP, 2010, v. 1, p. 23-47.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. V. (Org.). **Pesquisa Qualitativa Segundo a Visão Fenomenológica**. 1 ed. São Paulo: Cortês, 2011. p. 11-28.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. V. (Orgs.). **Pesquisa qualitativa em educação Matemática**. 6 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020a. p. 107-119.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Concepção de forma/ação de professores e possibilidades investigativas. **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**. v. 15, n. 36, p. 95-107, 2020b.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A lógica da pesquisa qualitativa e os modos de procedimentos nela fundados. **Revista Pesquisa Qualitativa**. v. 9, n. 22, p. 540-552, 2021.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Epistemologia na pesquisa em educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. v. 24, n. 2, p. 63-82, 2022a.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. O corpo-vivente: centro de orientação eu-mundo-outro. **MEDICA Review - Revista Internacional de Humanidades Médicas**. v. 10, n. 2, p. 119-135, 2022b.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A constituição do conhecimento matemático no corpo-vivente. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; PINHEIRO, José Milton Lopes. (Orgs.). **Corpo-vivente e a constituição de conhecimento matemático**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2023. p. 109-128.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; KLUTH, Verilda Speridião. Geometria e Fenomenologia. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. V. (Org.). **Filosofia da educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. 1 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2010. p. 131-147.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani, MOCROSKY, Luciane Ferreira; ORLOWSKI, Nelem. Aprender-Ensinar Matemática numa Perspectiva Formativa. **REMATEC**. v. 17, n. 41, p. 92-105, 2022.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

CHIZZOTTI, Antonio. A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evoluções e desafios. **Revista Portuguesa de Educação**, Braga ,v.16, n.2, p. 221-236, 2003. Disponível em:< <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=37416210>>. Acesso em: 30 jan. 2024.

COELHO, Alexandre Hering. Desenvolvimento de um sistema para demonstração da projeção de Monge utilizando realidade aumentada. **Revista Brasileira de Computação Aplicada**, Passo Fundo, v. 4, n. 2, p. 2-15, 2012. Disponível em: < <https://seer.upf.br/index.php/rbca/article/view/2079> >. Acesso em: 08 jan. 2024.

DETONI, Adlai Ralph. Um perpasso pela filosofia do movimento. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; PINHEIRO, José Milton Lopes. (Orgs). **Corpo-vivente e a constituição de conhecimento matemático**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2023. p. 83-105.

DEWES, Gustavo Luiz dos Santos; TEIXEIRA, Fábio Gonçalves; BRAGA, Rodrigo Antônio Marques. A Realidade Aumentada no auxílio ao processo de aprendizagem de Geometria Descritiva. **Educação Gráfica**, Bauru, v. 23, n. 2, p. 44-56, ago. 2019.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Educação Matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 18, n. 1, p. 237-252, 2016. Disponível em: < <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/21078>>. Acesso em: 08 jan. 2024.

FINI, Maria Inês. Sobre a Pesquisa Qualitativa em Educação, que Tem a Fenomenologia como Suporte. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (Orgs) **A pesquisa qualitativa em educação: um enfoque fenomenológico**. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1994. p. 23-33.

FREUDENTHAL, Hans. **Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. Educational Studies in Mathematics**. v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

FREUDENTHAL, Hans. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrecht/Boston/Lancaster. D. Riedel Publishing. Co. 1983.

JESUS, Andressa Rezende; OLIVEIRA, Beatriz de Jesus; OLIVEIRA, Livia Fernanda Sandes de. Uso de software GeoGebra como alternativa ao ensino da Geometria descritiva

na Engenharia. **Caderno de Graduação-Ciências Exatas e Tecnológicas**, Aracaju, v. 5, n. 2, p. 143-152, 2019. Disponível em: <
<https://periodicos.set.edu.br/index.php/cadernoexatas/article/view/6993>> Acesso em: 21 dez. 2023.

KAUFMANN, Hannes. **Geometry education with augmented reality**. 2004. 168 f. Tese (Doutorado em Ciências Técnicas) – Universidade Técnica de Viena, Viena, 2004.

KIRNER, Claudio; TORI, Romero. Fundamentos de Realidade Aumentada. In: TORI, Romero; KIRNER, Claudio; SISCOOTTO, Robson (EE). **Fundamentos e Tecnologia de Realidade Virtual e Aumentada**. Porto Alegre: Editora SBC – Sociedade Brasileira de Computação, 2006. p. 22-38.

KIRNER, Claudio; KIRNER, Tereza Gonçalves. Realidade Virtual e Realidade Aumentada potencializando as ações do usuário no mundo real. **Diálogo**, Canoas, n. 14, p. 99-122, jan-jun. 2009.

LIMA, Álvaro José Rodrigues de; CUNHA, Gerson Gomes; HAGUENAUER, Cristina Jasbinschek. Realidade Aumentada Aplicada ao Ensino de Geometria Descritiva. **Realidade Virtual**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 1-16, 2008.

MERLEAU-PONTY, Maurice. **Fenomenologia da Percepção**. Trad. Carlos Alberto Ribeiro de Moura. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2 ed, 1999.

MOCROSKY, Luciane Ferreira; PAULO, Rosa Monteiro; MONDINI, Fabiane; ORLOVSKI, Nelem. Sobre precisão e necessidade: um pensar acerca da tecnologia e educação Matemática. In: KALINKE, Marco Aurélio; MOCROSKY, Luciane Ferreira (Orgs). **A Lousa Digital & Outras Tecnologias na Educação Matemática**. Curitiba: Editora CRV, 2016. p. 171-187.

MONDINI, Fabiane; MOCROSKY, Luciane Ferreira; SANTOS, Marli Regina. Compreensões de Geometria expressas por crianças: prelúdio fenomenológico. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. V. (Org.). **Filosofia da educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. 1 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2010. p. 149-167.

MOUSA, Ahmad Hassan; YMAI, Leandro Hayato; CAMARGO, Sandro da Silva. GráficosRA: Um Aplicativo baseado em Realidade Aumentada para Ensino de Cálculo. **Revista CCEI - URCAMP**, Bagé, v. 22, n. 37, 2017.

ORTEGA, Francisco. Corpo e Tecnologias de Visualização Médica: entre a Fragmentação na Cultura do Espetáculo e a Fenomenologia do Corpo Vivido. **Rev. Saúde Coletiva**. Rio de Janeiro: PHYSIS, 2005, p. 237-257.

PAULO, Rosa Monteiro. O significado dos diagramas na produção do conhecimento geométrico. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. V. (Org.). **Filosofia da educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. 1 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2010. p. 169-191.

PAULO, Rosa Monteiro; BATISTA, Carolina Cordeiro; PEREIRA, Anderson Luís. O movimento na/para a constituição do conhecimento com Realidade Aumentada. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; PINHEIRO, José Milton Lopes (Orgs). **Corpo-vivente e a constituição de conhecimento matemático**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2023. p. 229-253.

PEREIRA, Anderson Luís. **Realidade aumentada e o ensino de cálculo**: possibilidades para a constituição do conhecimento. 2022. 225 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2022.

PINHEIRO, José Milton Lopes. **O MOVIMENTO E A PERCEPÇÃO DO MOVIMENTO EM AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA**. 2018. 285 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018.

PINHEIRO, José Milton Lopes. SER-COM-GEOMETRIA DINÂMICA: CONTRIBUIÇÕES À COMPREENSÃO DO SER-COM-TECNOLOGIAS DIGITAIS. **ENCITEC**, Santo Ângelo, v. 12, n. 1, p. 70-86, 2022.

PINHEIRO, José Milton Lopes; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; DETONI, Adlai Ralph. Um olhar fenomenológico à Geometria Dinâmica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 2, p. 264-287, 2019.

PINHEIRO, José Milton Lopes; FLORES, César Osvaldo Vásquez; ALVES, Giovana; CAMPELO, Caleb da Silva Araujo. O *movimento* e suas implicações na aprendizagem de Matemática: um olhar fenomenológico. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 23, n. 1, p. 324-354, 2021.

PINHO, Eliana Manuel; SANTOS, José Carlos; XAVIER, João Pedro. Portuguese Textbooks on Descriptive Geometry. In.: BARBIN, Évelyne; MENGHINI, Marta; VOLKERT, Klaus. (Ed.). **Descriptive Geometry, The Spread of a Polytechnic Art: The Legacy of Gaspard Monge**. Springer, 2019.

PONTE, João Pedro da. Investigação sobre investigações Matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, Lisboa, v. 2, p. 93-169, 2003. Disponível em: < <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4071> >. Acesso em: 15 jan. 2024.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; BRANCO, Neusa. Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. **Educação Matemática em Foco**, Lisboa, v. 1, p. 9-29, 2011. Disponível em: < <https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10451/28726/1/Ponte,%20Quaresma,%20Branco%20EMEF%202012.pdf> >. Acesso em: 09 dez. 2024.

RICHT, Adriana; PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa. Aprendizagens Profissionais de Professores Evidenciadas em Pesquisas sobre Estudos de Aula. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 35, n. 70, p. 1107-1137, 2021. Disponível em: < <https://www.scielo.br/j/bolema/a/PJpZppzdZcdBJMvmpqxDK6z/?lang=pt> >. Acesso em: 23 mar. 2025.

ROSA, Maurício. **A Construção de Identidades Online por meio do Role Playing Game: relações com o ensino e aprendizagem de Matemática em um curso à distância.** 2008. 263 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

ROSA, Maurício. **INSUBORDINAÇÃO CRIATIVA E A CYBERFORMAÇÃO COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA: DESVELANDO EXPERIÊNCIAS ESTÉTICAS POR MEIO DE TECNOLOGIAS DE REALIDADE AUMENTADA.** **REnCiMa - Revista de Ensino de Ciências e Matemática.** v. 8, n. 4, p. 157-173, 2017.

ROSA, Maurício. **Corpo-próprio, Tecnologias Digitais e Educação Matemática: percebendo-se cyborg.** In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; PINHEIRO, José Milton Lopes (Orgs). **Corpo-vivente e a constituição de conhecimento matemático.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2023. p. 187-227.

ROSA, Maurício. BICUDO, Maria. Aparecida. Viggiani. **Focando a constituição do conhecimento matemático que se dá no trabalho pedagógico que desenvolve atividades com tecnologias digitais.** In.: PAULO, R. M.; FIRME, I. C.; BATISTA, C. C. **Ser professor com tecnologias: sentidos e significados.** São Paulo, Editora da UNESP, 2018. Livro eletrônico. 2677 posições.

SAMPAIO, Raissa Samara. **Geometria e visualização: ensinando volume com o software GeoGebra.** 2018. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018.

SANTOS, Lisa Vieira. **SOFTWARES LIVRES COMO FERRAMENTA NA ESCOLA: ESTUDO DE CASO DO USO DO GEOGEBRA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM.** 2020. 67 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Técnico em Informática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia Campus Seabra, Instituto Federal da Bahia, Seabra, 2020.

SANTOS, Marli Regina dos; BATISTELA, Rosemeire de Fatima. **Discutindo a Geometria segundo uma visão fenomenológica e indicando contribuições possíveis para o trabalho pedagógico.** In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; PINHEIRO, José Milton Lopes (Orgs). **Corpo-vivente e a constituição de conhecimento matemático.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2023. p. 145-164.

SCALCO, Roberto. **Vistas Ortográficas – Módulo 3,** 2016. Disponível em: <<https://drb-m.org/cad/3vistasortogonais.htm>>. Acesso em: 18 fev. 2024.

SCHUSTER, Paula Etiele Sarmento. **Uma professora em Cyberformação com Tecnologias Digitais de Realidade Aumentada: como se dá a constituição do conhecimento matemático?** 2020. 116 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Porto Alegre, 2020.

SCHUSTER, Paula Etiele Sarmento; ROSA, Maurício. **Realidade Aumentada e a Cyberformação de uma Professora de Matemática: Pontos Críticos de Função de Duas**

Variáveis. **JIEEM - Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. v. 14, n. 2, p. 130-141, 2021.

SOUZA, José Victorino dos Santos. **Elementos de Geometria Descritiva; com aplicações às artes**. Rio de Janeiro: Imprensa Regia, 1812.

SOUZA, Wendson de Oliveira; ESPINDOLA, Giovana Mira de; PEREIRA, Alessandro Rhadamek Alves; SÁ, Lucilene Antunes Correia Marques de. A Realidade Aumentada na apresentação de produtos cartográficos. **BCG – Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, v. 22, n. 4, p. 790-806, out-dez. 2016. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/bcg/a/9k6CHcBLT9fjNnKZz9cQ5HC/?lang=pt>> . Acesso em: 29 jun. 2023.

TEIXEIRA, Fábio Gonçalves; SILVA, Tânia Luísa Koltermann da; SILVA, Régio Pierre da; BRUNO, Fernando Batista. Experiências inovadoras em ensino e pesquisa da Geometria descritiva. **Revista Brasileira de Expressão Gráfica**, Santa Catarina, v.3, n.3, p. 80-92, 2015. Disponível

em:<https://www.researchgate.net/profile/Fabio_Teixeira15/publication/303310032_EXPERIENCIAS_INOVADORAS_EM_ENSINO_E_PESQUISA_DA_GEOMETRIA_DESCRITIVA/links/573c4a8608aea45ee8416f05.pdf> Acesso em: 21 dez. 2023.

VALES, Juliana Ferreira de. **A REALIDADE AUMENTADA COMO RECURSO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA LOGÍSTICA E TRANSPORTE: CRIAÇÃO DE UM E-BOOK**. 2020. 176 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2020.

APÊNDICE A

Tarefa 1 – Sistema de Projeção Cônico e Cilíndrico

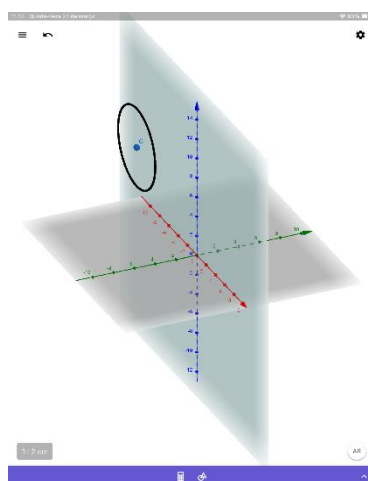
Professora Raissa

Para identificar os diferentes tipos de projeções, vamos fazer algumas explorações com o software GeoGebra.

OBS: Destacamos que, considerando o que está disponível no GeoGebra, denotaremos a circunferência criada como círculo, pois a ferramenta do software se chama “círculo”.

- 1) Abra o GeoGebra 3D e construa o plano $y = 0$.
- 2) Selecionando a ferramenta “Círculo”, construa um círculo de centro O, no espaço.

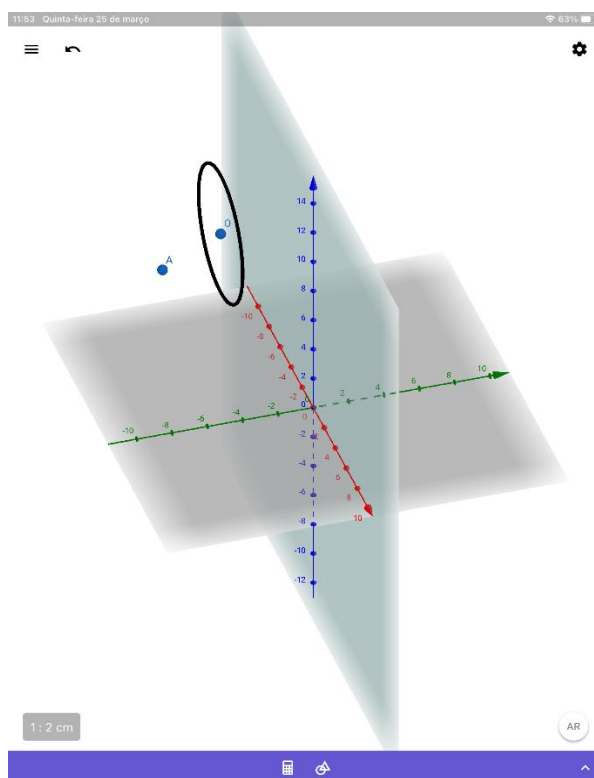
Figura 27 – Construção do círculo no GeoGebra 3D



Fonte: Elaborado pela autora

- 3) Construa um ponto A, externo ao círculo.

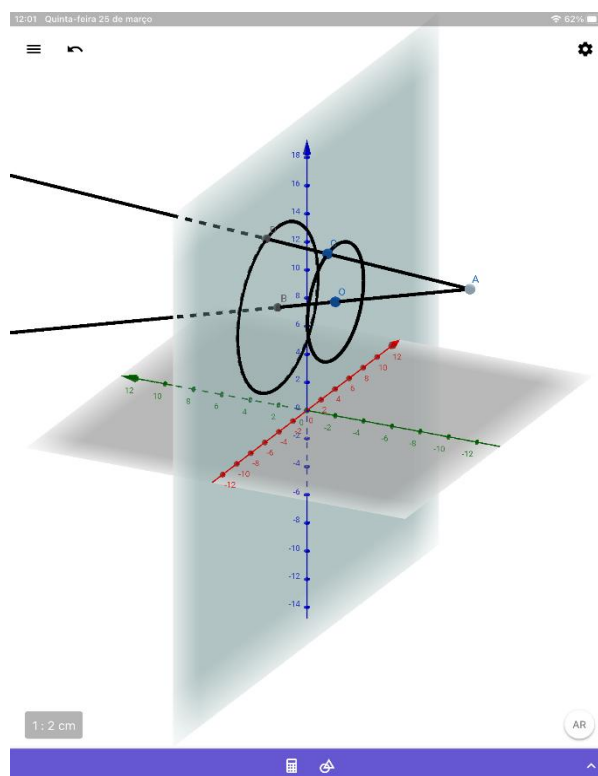
Figura 28 - Construção do ponto externo ao círculo no GeoGebra 3D



Fonte: Elaborado pela autora

- 4) Construa duas semirretas de origem em A de modo que: uma delas passe pelo centro do círculo construído e a outra passe por um ponto qualquer desse círculo.
- 5) Marque os pontos B e C na intersecção das semirretas com o plano.
- 6) Em seguida, construa uma circunferência com a ferramenta “Círculo – Raio + Direção”. Para construí-lo, selecione primeiramente o centro, em seguida o plano e, por último, em raio, digite BC.

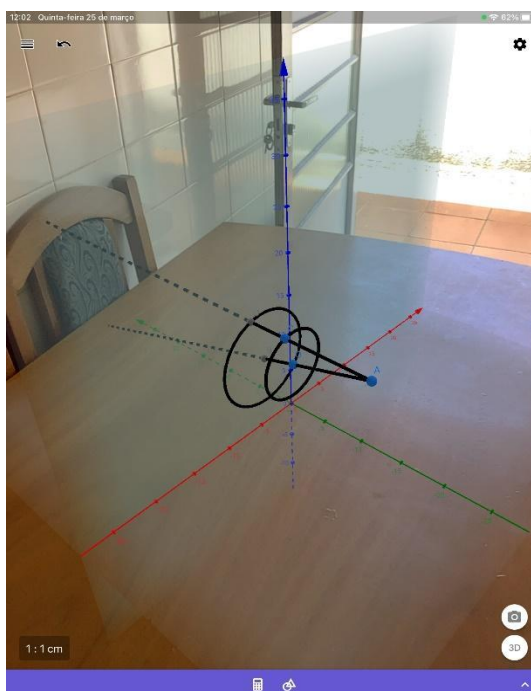
Figura 29 - Construção do círculo gerado pela interseção dos pontos no plano no GeoGebra 3D



Fonte: Elaborado pela autora

7) No canto inferior direito da tela do aplicativo clique em AR e projete o construído sobre uma superfície plana (no espaço físico).

Figura 30 – Projeção dos círculos em RA no GeoGebra AR



Fonte: Elaborado pela autora

8) Fixe o seu olhar no ponto A e se movimente. Observe que, conforme você se movimenta, o ponto A se move com você. (DICA: Clique sobre o ponto A e aparecerão setas indicando a direção do movimento).

9) Considerando o movimento realizado, responda:

I. O que acontece quando você se afasta do círculo inicial?

II. O que acontece quando você se aproxima do círculo inicial?

III. O que acontece quando você se movimenta para a sua direita? E para a sua esquerda?

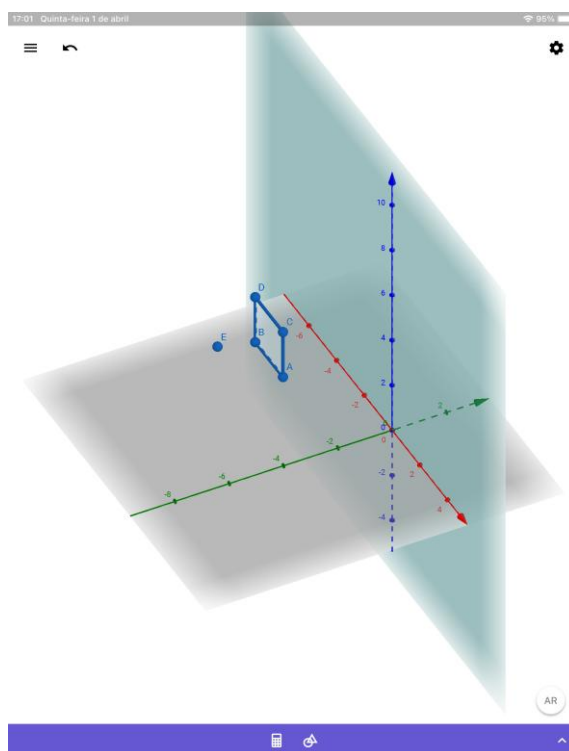
IV. Em algum momento, o círculo projetado na superfície perde sua forma?

V. Você considera que esse sistema de projeção seja o cônico ou cilíndrico? Por quê?

10) Volte à visualização 3D. Construiremos agora um polígono qualquer, por exemplo, um quadrilátero.

11) Construa um polígono qualquer no espaço (Polígono 1) e um ponto E fora dele.

Figura 31 – Construção de um polígono no GeoGebra 3D



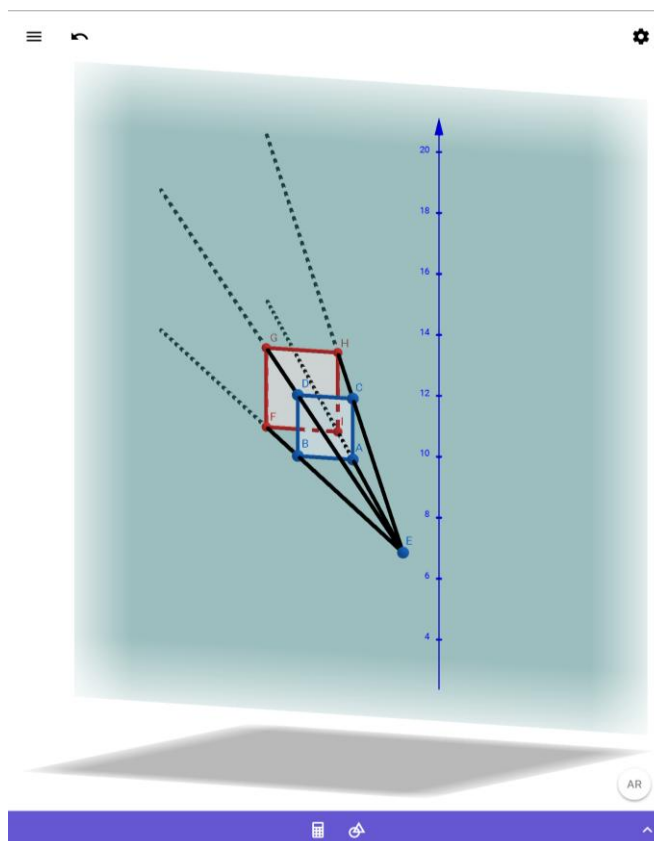
Fonte: Elaborado pela autora

12) Construa semirretas que tenham origem em E e que, cada uma, passe por um vértice do polígono.

13) Marque os pontos de intersecção das semirretas com o plano. No caso do nosso quadrilátero, criamos os pontos F, G, H e I.

14) Utilizando a ferramenta Polígono, construa o Polígono 2 unindo os pontos de intersecção das semirretas com o plano (construído anteriormente).

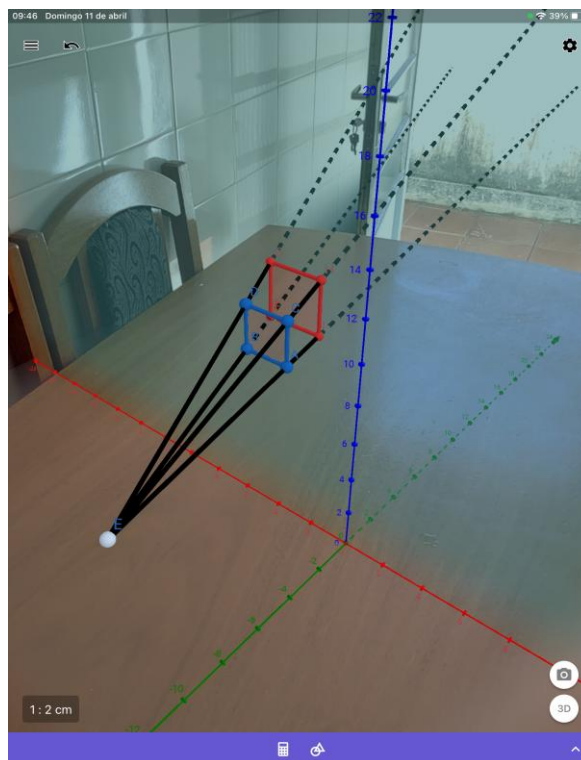
Figura 32 - Construção do polígono gerado pela intersecção dos pontos no plano no GeoGebra 3D



Fonte: Elaborado pela autora

15) No canto inferior direito da tela do aplicativo clique em AR e projete o construído sobre uma superfície plana (no espaço físico).

Figura 33 – Projeção dos polígonos em RA no GeoGebra AR



Fonte: Elaborado pela autora

15) Considerando o que você vê projetado na superfície, responda:

I. Esses polígonos projetados são semelhantes? O que permite justificar sua afirmativa?

16) Se distancie o máximo possível do polígono inicialmente construído. O que acontece com o Polígono 1 e o Polígono 2?

17) Se pudéssemos nos afastar infinitamente, o que aconteceria com as semirretas que interceptam os vértices do polígono? O que aconteceria com os Polígonos 1 e 2?

18) Você identifica esse sistema de projeção (pensando no afastamento “infinito” do polígono) como cônico ou cilíndrico? Por quê?

19) Insira suas conclusões acerca das diferenças dos sistemas de projeção cônico e cilíndrico.

Acesse o link para retornar à seção correspondente do texto.

[Voltar à descrição do encontro.](#)

[Voltar ao quadro de análise.](#)

APÊNDICE B

Tarefa 2 – Reconhecendo a diferença do espaço de Monge

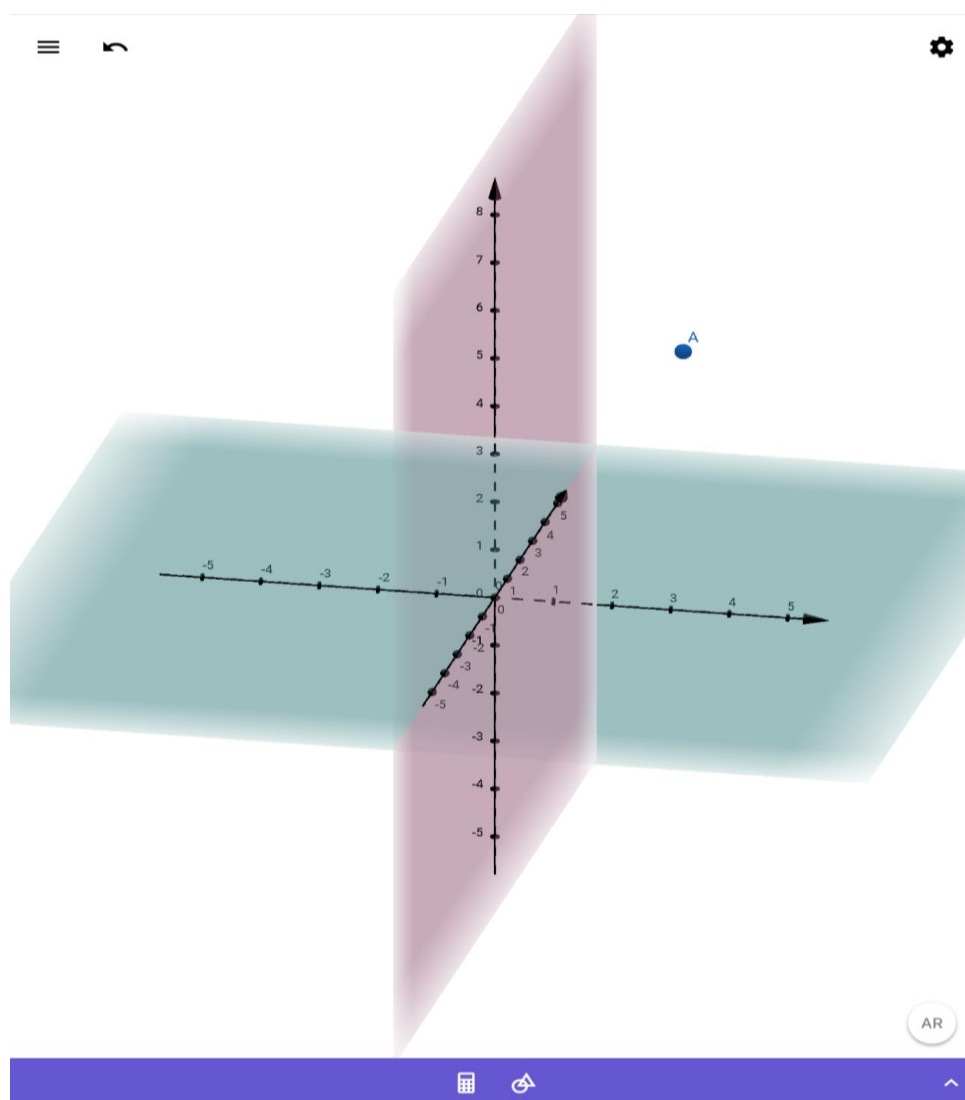
Professora Raissa

O sistema de projeção utilizado na Geometria Descritiva é a projeção cilíndrica ortogonal. Gaspar Monge criou um método de representação gráfica através da projeção em planos perpendiculares hoje denominado Sistema Mongeano. As coordenadas do Método de Monge são nomeadas como (Abscissa, Afastamento, Cota) e estão localizadas em Diedros. A Abscissa é determinada sobre a Linha de Terra, o Afastamento é determinado pela distância do objeto até o plano vertical e a Cota é a distância do objeto até o plano horizontal.

Vamos realizar algumas explorações para compreender o sistema mongeano.

A imagem a seguir representa o ponto (1,3,5) representado no 1º Diedro.

Figura 34 – Diedros



Fonte: Elaborado pela autora

- 1) Abra o GeoGebra 3D e insira o ponto A (1,3,5).
- 2) O ponto A que você inseriu tem a mesma localização que o ponto A da figura 34? Se não, o que há de diferente?
- 3) Vá em Configurações (símbolo de engrenagem) ▾ Legendas ☑ Clique em “exibir” e mude a legenda do Eixo x para “Abscissas”, do Eixo y para “Afastamento” e do Eixo z para “Cota”.
- 4) Rotacione o espaço até que cada eixo esteja correspondente aos eixos do sistema mongeano conforme mostrado na Figura 1.
- 5) Quais foram as principais rotações realizadas por você para que o sistema mongeano se posicionasse de maneira correta?
- 6) Agora o ponto A se localiza corretamente, segundo o Método de Monge?
- 7) Clique em AR para ativar a Realidade Aumentada e encontre uma superfície para projetar o ponto A.

Figura 35 – Superfície em Realidade Aumentada



Fonte: Elaborado pela autora

- 8) Clique na tela para sobrepor seu ponto A à superfície encontrada.
- 9) O sistema mongeano permaneceu?
- 11) Por que, em Realidade Aumentada, as posições dos eixos foram modificadas?
- 12) Insira suas conclusões acerca das diferenças do sistema mongeano e do sistema cartesiano.

Acesse o link para retornar à seção correspondente do texto.

[Voltar à descrição do encontro.](#)

[Voltar ao quadro de análise.](#)

APÊNDICE C

Tarefa 3 – Projeções Mongeanas

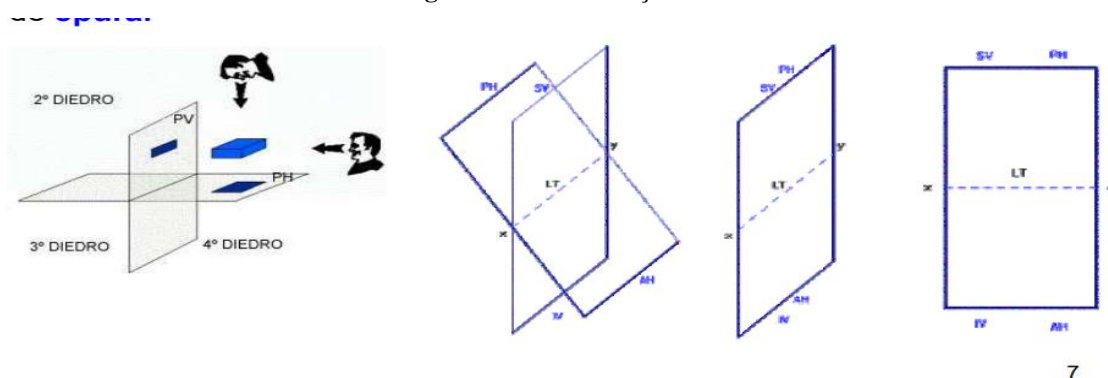
Professora Raissa

Na tarefa 2 falamos em Método de Monge, mas o que ele é? Podemos dizer que a representação de objetos em 2 semiplanos perpendiculares foi criada por Monge e é conhecida pelo *Método Mongeano*.

Ainda, *Épura* é a representação de uma figura espacial pelas suas projeções no plano. Para obter a *épura*, gira-se o Plano Vertical de Projeção (PV) em torno da Linha de Terra no sentido horário, de tal forma que este coincida com o Plano Horizontal de Projeção (PH). Essa nova representação recebe o nome de *épura*.

Exemplo:

Figura 36 – Visualização nos diedros



Fonte: Slide - Projeções Mongeanas ⁴³

Para compreender as projeções

I. Abra o 1º link do Classroom chamado: “Projeções Mongeanas – Tarefa 3 – I”.

O plano rosa é o Plano Horizontal de Projeção (PH) e o plano azul é o Plano Vertical de Projeção (PV).

II. Selecione a opção AR para colocar o objeto em Realidade Aumentada.

III. Movimente-se para visualizar as faces projetadas nos Planos de Projeção.

IV. Mova o ponto Laranja e visualize a *épura* do objeto.

Agora vamos construir as vistas e a *épura* de um objeto.

V. Volte à visualização 3D.

⁴³ <https://www.scribd.com/document/391440720/Projecoes-mongeanas>

VI. Abra o 2º link do Classroom chamado: “Tarefa 3 – Projeções Mongeanas – II”.

VII. Construa suas projeções nos planos horizontal e vertical e obtenha a épura desse objeto.

VIII. Selecione a opção AR para colocar o objeto em Realidade Aumentada e, observando por cima e na lateral, confira se as vistas estão correta.

Acesse o link para retornar à seção correspondente do texto.

[Voltar à descrição do encontro.](#)

[Voltar ao quadro de análise.](#)

APÊNDICE D

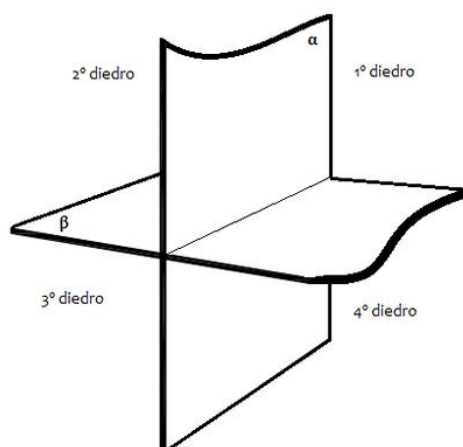
Tarefa 4 – Épura nos diferentes diedros

Professora Raissa

A rotação do plano para a obtenção da épura não se altera relativamente à posição do objeto em diedros diferentes.

Vamos analisar as épuras conforme os objetos vão alterando sua posição nos diedros.

Figura 37 – 1º, 2º, 3º e 4º diedros



Fonte: Desenho Básico - UFF⁴⁴

I. Abra o 1º link do Classroom chamado: “Épura nos diferentes diedros – Tarefa 4 – I”.

O plano rosa é o Plano Horizontal de Projeção (PH) e o plano azul é o Plano Vertical de Projeção (PV).

II. Selecione a opção AR para ver o objeto em Realidade Aumentada.

III. Movimente-se para que seja possível ver as faces a serem projetadas nos Planos de Projeção (Horizontal e Vertical).

IV. Mova o ponto Laranja e visualize a épura do objeto.

a) O que aconteceu com as vistas quando o objeto se encontrou no 2º diedro?

V. Abra o 2º link do Classroom chamado: “Épura nos diferentes diedros – Tarefa 4 – II”.

⁴⁴ <https://desenhobasicouff.weebly.com/representaccedilotildees.html>

VI. Construa as projeções do poliedro da Tarefa 4 - II nos planos vertical e horizontal e a é pura.

Tire um print de sua construção.

VII. Abra o 3º link do Classroom chamado: “É pura nos diferentes diedros – Tarefa 4 – III”.

VIII. Construa as projeções do poliedro da Tarefa 4 - III nos planos vertical e horizontal e a é pura. **Tire um print de sua construção.**

IX. Responda:

a) Qual(is) seria(m) os diedros mais apropriados para a representação dos objetos em é pura?

Por quê?

b) Pesquise quais diedros são utilizados para representação mongeana nos seguintes países:

Brasil: _____

Estados Unidos: _____

Canadá: _____

Acesse o link para retornar à seção correspondente do texto.

[Voltar à descrição do encontro.](#)

[Voltar ao quadro de análise.](#)

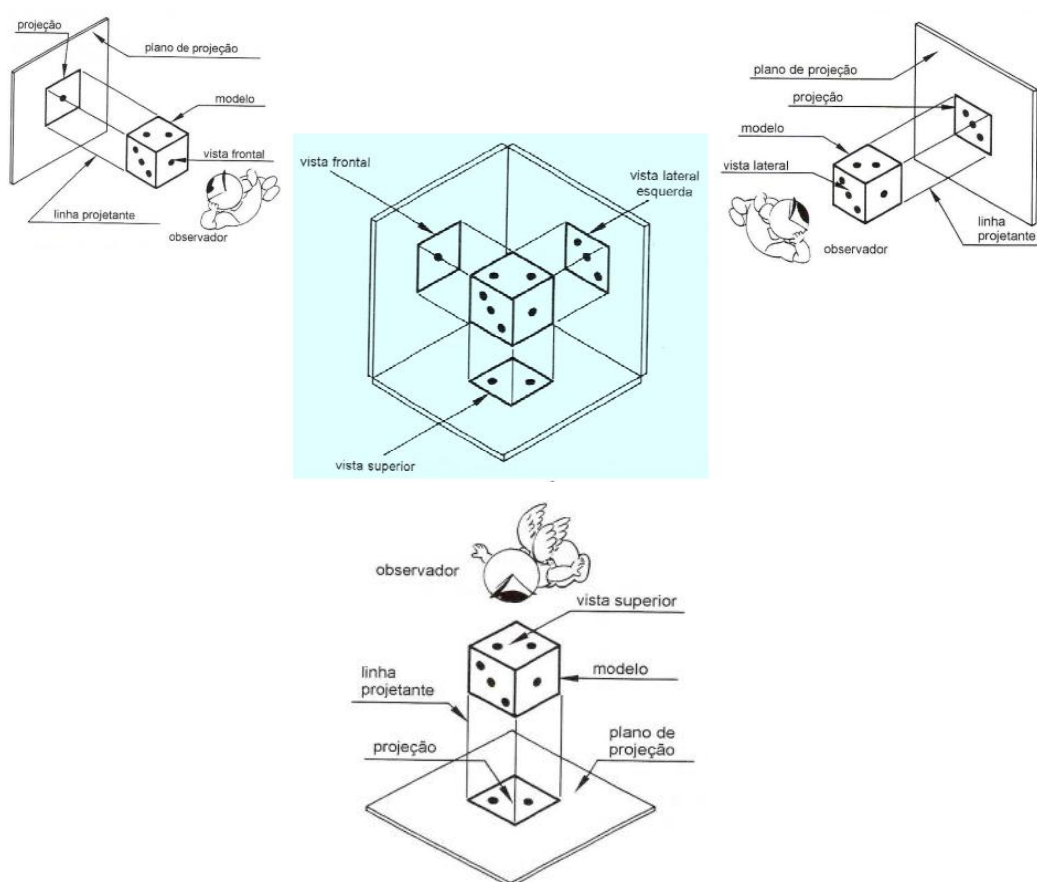
APÊNDICE E

Tarefa 5 – Projeção Ortogonal

Professora Raissa

O Método de Projeção Ortogonal acrescenta um novo plano de projeção – O Plano de projeção lateral. A imagem a seguir mostra a posição que um observador se coloca para visualização a projeção de determinado objeto em cada um dos planos. As projeções ortogonais nos planos horizontal, vertical e lateral são denominadas **vistas ortográficas**.

Figura 38 – Vistas ortográficas



Fonte: Slide - Projeções Mongeanas ⁴⁵

Vamos explorar as projeções ortogonais.

I. Abra o 1º link do Classroom chamado: “Projeção Ortogonal – Tarefa 5 – I”.

O plano azul é o Plano de projeção vertical, o plano amarelo é o Plano de projeção lateral e o plano rosa é o Plano de projeção horizontal.

⁴⁵ <https://www.scribd.com/document/391440720/Projecoes-mongeanas>

- II.** Selecione AR para colocar o objeto em Realidade Aumentada.
- III.** Movimente-se para visualizar as faces projetadas nos Planos de Projeção.
- IV.** Mova o ponto Laranja e visualize a é pura do objeto.
- V.** Agora você construirá as vistas dos poliedros a seguir.
- VI.** Volte à visualização 3D.
- VII.** Abra o 2º link do Classroom chamado: “Projeção Ortogonal – Tarefa 5 – II”.
- VIII.** Construa suas vistas ortográficas. Selecione AR para colocar o objeto em Realidade Aumentada. Tire um print das vistas.
- VIII.** Abra o 3º link do Classroom chamado: “Projeção Ortogonal – Tarefa 5 – III”.
- IX.** Construa suas vistas ortográficas. Tire um print das vistas. Selecione AR para colocar o objeto em Realidade Aumentada. Tire um print das vistas.

Acesse o link para retornar à seção correspondente do texto.

[Voltar à descrição do encontro.](#)

[Voltar ao quadro de análise.](#)

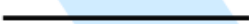






APÊNDICE F

Tarefa 6 – Vistas

Professora Raissa

O tipo e espessura de linha indicam sua função no desenho. Observe alguns exemplos apresentados na tabela a seguir:

Figura 39 – Aplicação de linhas em desenhos

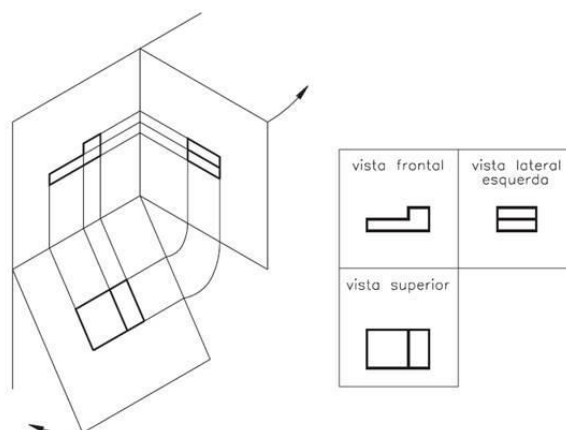
Linha	Denominação	Aplicação Geral (ver Figuras 1a, 1b e outras)
A 	Contínua larga	A1 contornos visíveis A2 arestas visíveis
B 	Contínua estreita	B1 linhas de interseção imaginárias B2 linhas de cotas B3 linhas auxiliares B4 linhas de chamadas B5 hachuras B6 contornos de seções rebatidas na própria vista B7 linhas de centros curtas
C 	Contínua estreita a mão livre ^(A)	C1 limites de vistas ou cortes parciais ou interrompidas se o limite não coincidir com linhas traço e ponto (ver Figura 1c))
D 	Contínua estreita em ziguezague ^(A)	D1 esta linha destina-se a desenhos confeccionados por máquinas (ver Figura 1d))
E 	Tracejada larga ^(A)	E1 contornos não visíveis E2 arestas não visíveis
F 	Tracejada estreita ^(A)	F1 contornos não visíveis F2 arestas não visíveis
G 	Traço e ponto estreita	G1 linhas de centro G2 linhas de simetrias G3 trajetórias

Fonte: ABNT

Em GD, utilizaremos principalmente as linhas A, B, E e F.

Volte à **Tarefa 5 – III** e faça o que se pede a seguir:

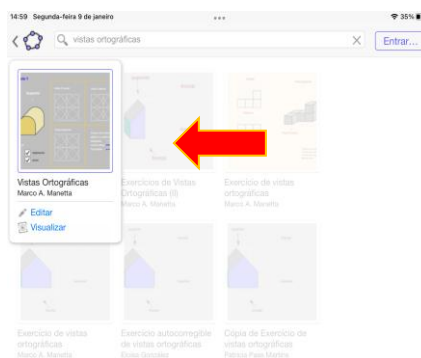
- Faça as construções das vistas do poliedro apresentado no GeoGebra 3D;
- Verifique as arestas não visíveis através da Realidade Aumentada;
- Construa, em uma folha de sulfite, as projeções ortogonais do poliedro separando-as como o exemplo a seguir.

Figura 40 – Vistas ortográficas

Fonte: Projeção ortográfica de modelos com elementos paralelos e oblíquos⁴⁶

Qual das linhas da atividade III da tarefa 5 deveria ficar tracejada?

Busque no **GeoGebra Classic** a atividade “Vistas Ortográficas” de Marco A. Manetta. Clique em visualizar e preencha as vistas dos objetos até o exercício 20.

Figura 41 – Atividade GeoGebra

Fonte: Materiais GeoGebra⁴⁷

Acesse o link para retornar à seção correspondente do texto.

[Voltar à descrição do encontro.](#)

⁴⁶ <https://www.sulforp.com.br/08%20DESENHO%20TECNICO/VISTAS/VISTAS.htm>

⁴⁷ <https://www.geogebra.org/m/j4dbtccv>

Curso: Licenciatura em Matemática

Disciplina: Desenho Geométrico e Geometria Descritiva – DGGD

Lista I – GD

Coordenadas do ponto

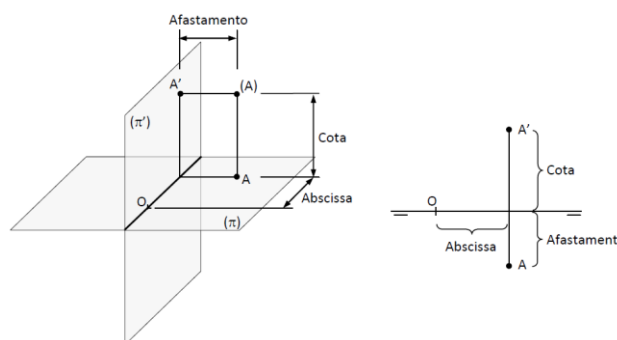
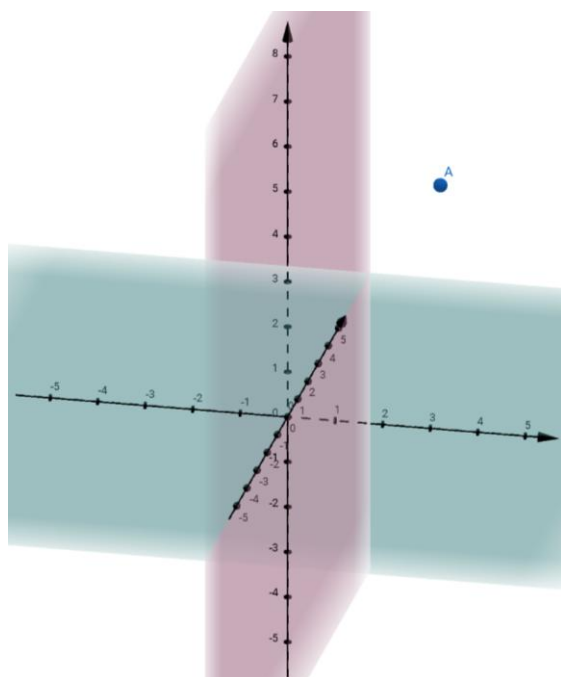
A distância de um determinado ponto a cada um dos planos de projeção recebe um nome característico:

Afastamento: a distância de um ponto ao plano vertical de projeção;

Cota: a distância deste ponto ao plano horizontal de projeção;

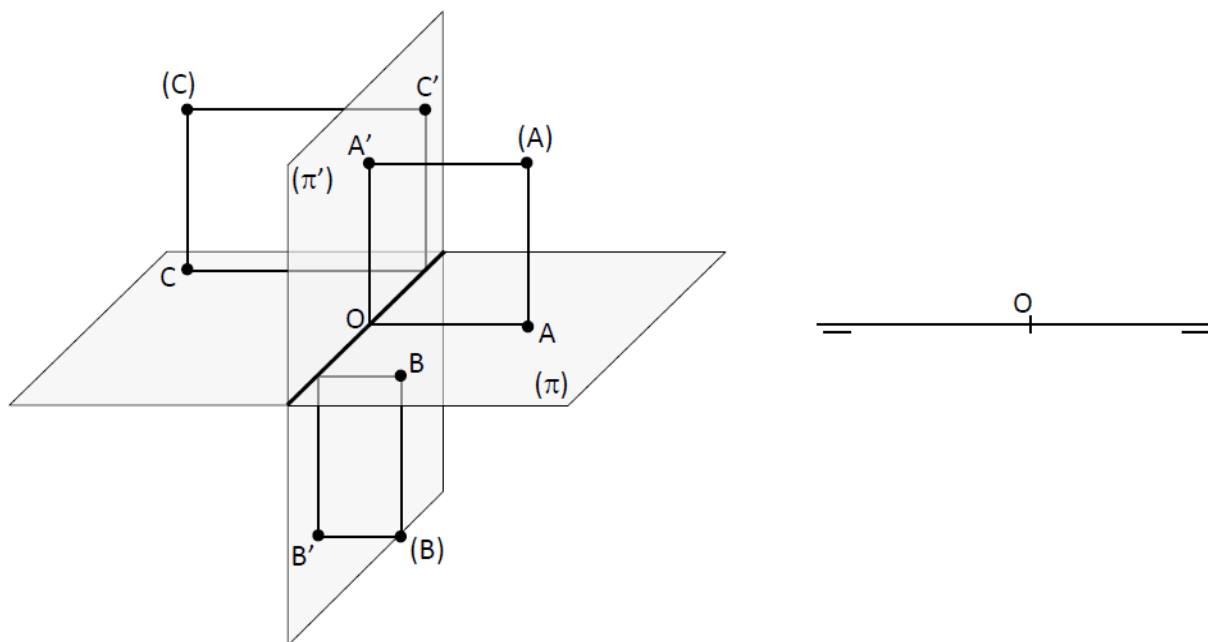
Abscissa: tomada sobre a linha de terra a partir de um ponto “O”, considerado como origem, e marcado arbitrariamente sobre esta linha.

Lembrando do reconhecimento que fizemos na Tarefa 2, o espaço Monge se determina da seguinte maneira:



O ponto A tem como coordenada (1,3,5).

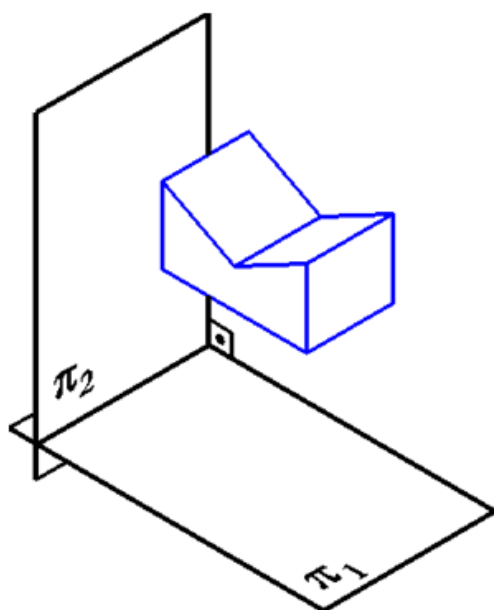
1. Representar os pontos (A), (B) e (C) na época abaixo, conhecendo-se as suas coordenadas (em mm) e a sua posição no espaço. Dados: (A)[0 ; 20 ; 20], (B)[-10 ; 10 ; -20] e (C)[10 ; -30 ; 20].



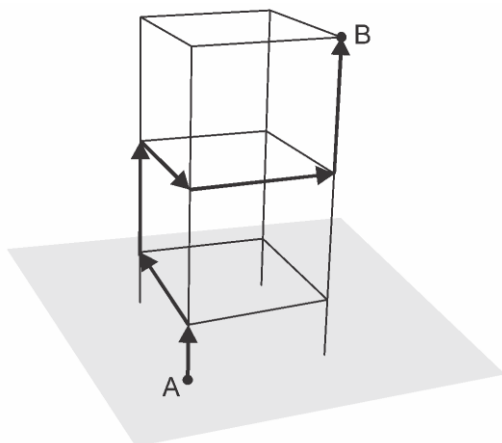
2. Representar os pontos (D), (E) e (F) na épora abaixo e informar a sua posição no espaço.
 Dados: (D)[10 ; 20 ; 10], (E)[20 ; -10 ; 20], (F)[-10 ; 30 ; -20] e (G) [10 ; 0 ; 20]. (em mm)



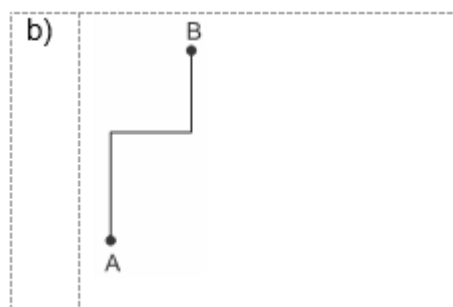
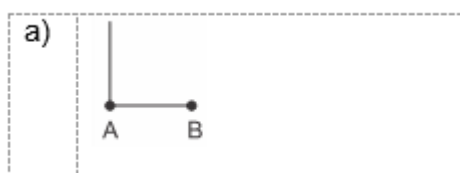
3. Represente a épora do objeto a seguir, sabendo que o objeto possui 20 mm de altura, 40 mm de comprimento e 30mm de profundidade. O corte do objeto tem como altura 10 mm. Sua distância da Linha de Terra é de 5mm em π_1 e 10mm em π_2 .

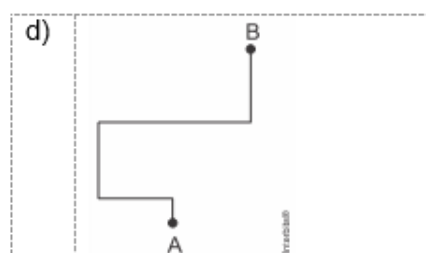
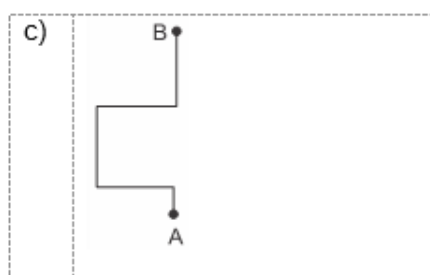


4. (Encceja 2020) Uma pessoa que se encontrava em um parque observou a movimentação de um esquilo sobre um dos brinquedos desse parque. A figura indica o percurso feito pelo esquilo, iniciado no ponto A e finalizado no ponto B.



A projeção sobre o plano do chão, feita de forma perpendicular ao solo, do percurso feito pelo esquilo sobre o brinquedo é





5. (Enem 2019) Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrada na figura.

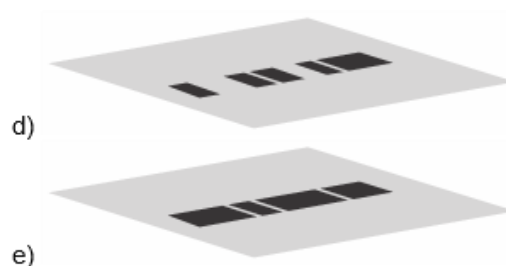
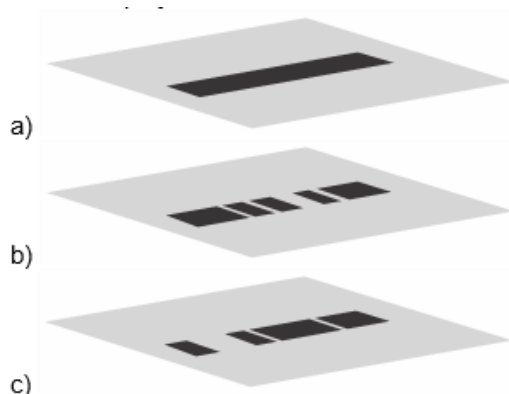
PINE

Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes é o mesmo, todas têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir.



Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo.

A sombra projetada no solo é



Acesse o link para retornar à seção correspondente do texto.

[Voltar à descrição do encontro.](#)

APÊNDICE H



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

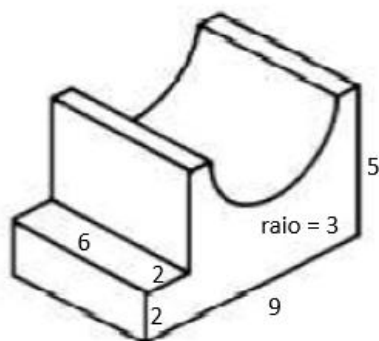
Curso: Licenciatura em Matemática

Disciplina: Desenho Geométrico e Geometria Descritiva – DGGD

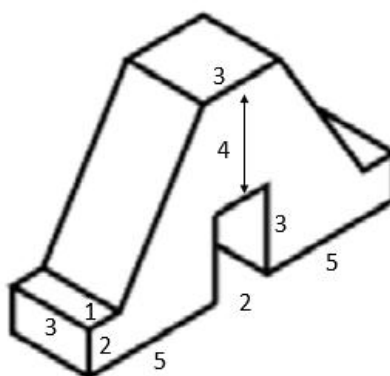
Lista II – GD

1. Dados os sólidos a seguir, construa suas projeções ortogonais com as vistas superior, lateral e frontal. Todas as dimensões estão em cm e os sólidos b) e c) são simétricos.

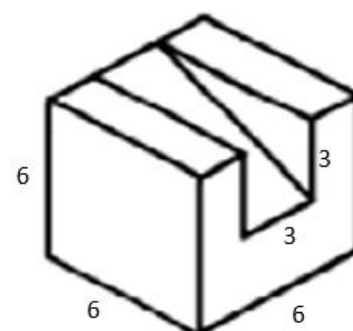
a)



b)



c)



2. Analise a perspectiva isométrica abaixo e assinale com um X a alternativa que contém as vistas ortográficas correspondentes.



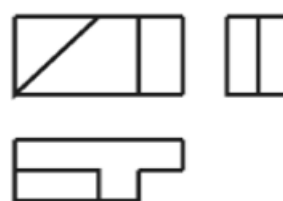
(a)



(b)



(c)



3. Analise as vistas ortográficas abaixo e assinale com um X a alternativa que corresponde ao mesmo modelo em perspectiva.



a) ()

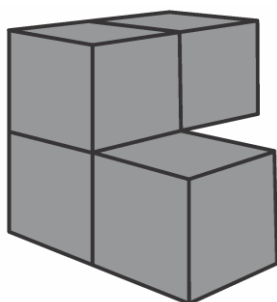


b) ()



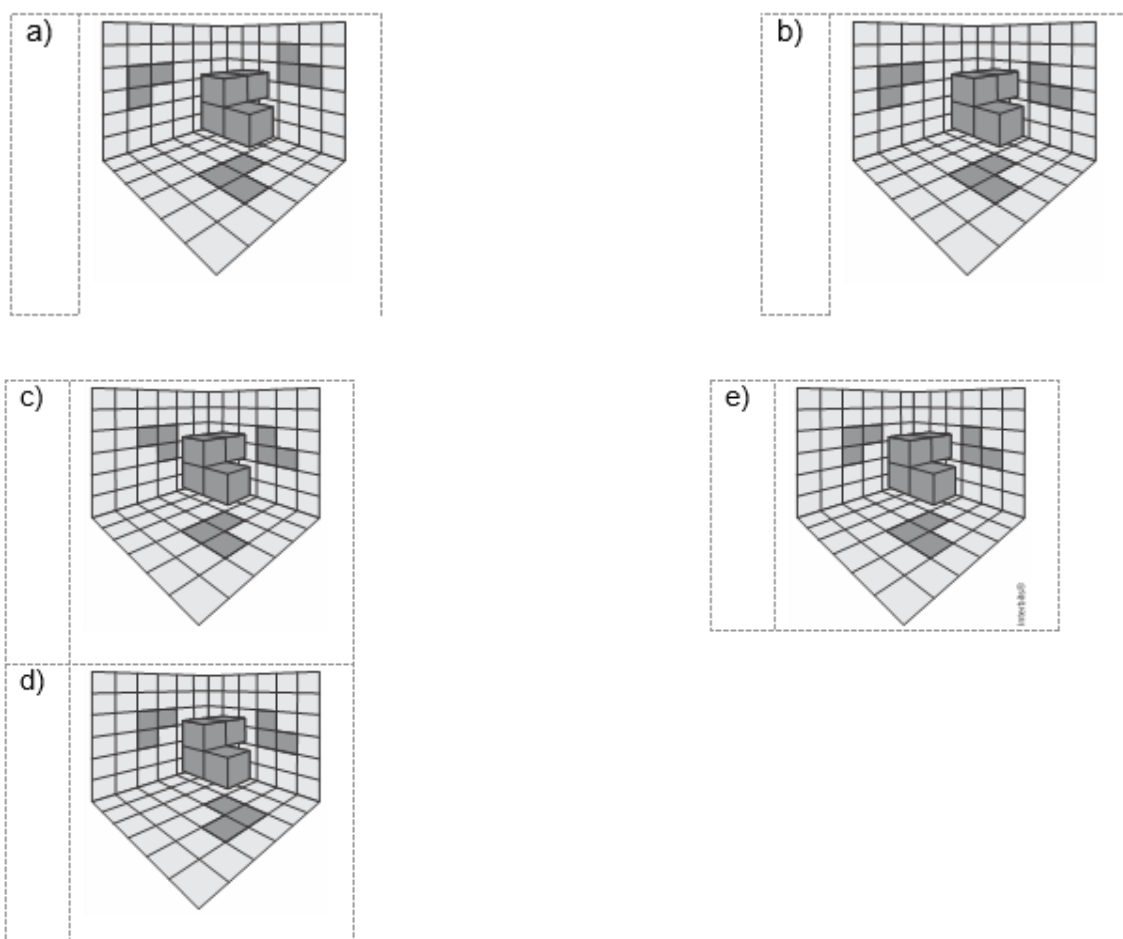
c) ()

4. (Enem 2020) Em um jogo desenvolvido para uso no computador, objetos tridimensionais vão descendo do alto da tela até alcançarem o plano da base. O usuário pode mover ou girar cada objeto durante sua descida para posicioná-lo convenientemente no plano horizontal. Um desses objetos é formado pela justaposição de quatro cubos idênticos, formando assim um sólido rígido, como ilustrado na figura.

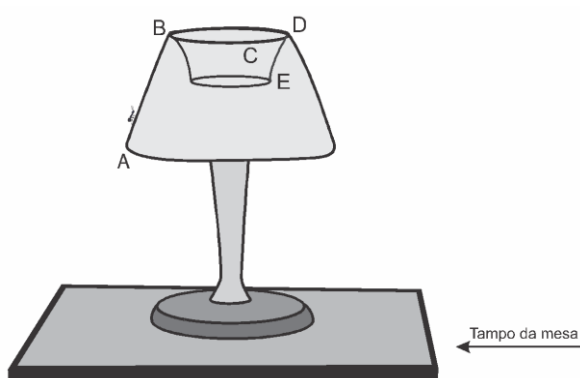


Para facilitar a movimentação do objeto pelo usuário, o programa projeta ortogonalmente esse sólido em três planos quadriculados perpendiculares entre si, durante sua descida.

A figura que apresenta uma possível posição desse sólido, com suas respectivas projeções ortogonais sobre os três planos citados, durante sua descida é

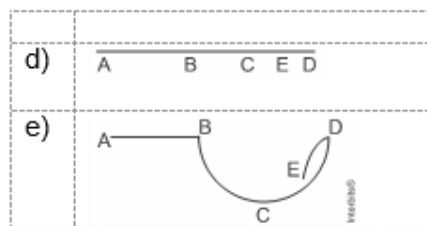
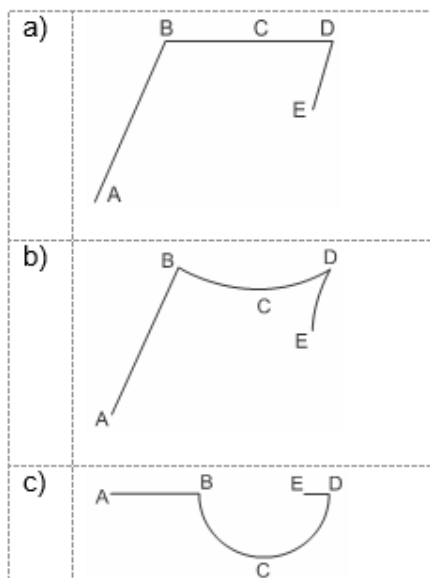


5. (Enem PPL 2020) Uma formiga move-se sobre um castiçal de vidro transparente, do ponto A para B em linha reta, percorre o arco circular BCD, sendo C localizado na parte da frente do castiçal, e desce o arco DE, como representado na figura.

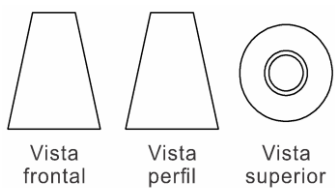


Os pontos A, B, D e E estão sobre um mesmo plano perpendicular à mesa sobre a qual se encontra o castiçal.

A projeção ortogonal, sobre o plano da mesa, do trajeto percorrido pela formiga, do ponto A até o ponto E, é melhor representada por

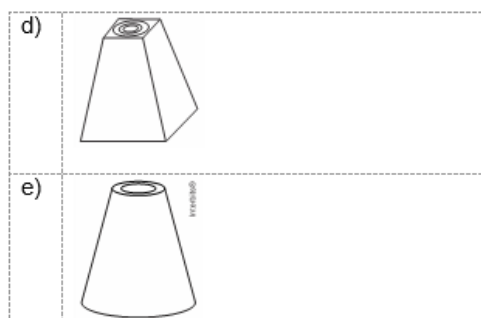
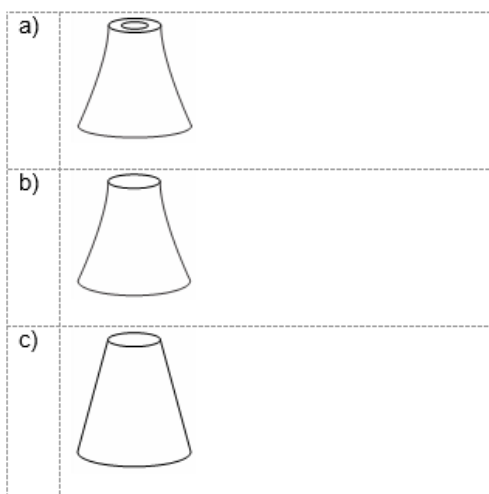


6. (Enem PPL 2020) No desenho técnico, é comum representar um sólido por meio de três vistas (frontal, perfil e superior), resultado da projeção do sólido em três planos, perpendiculares dois a dois. A figura representa as vistas de uma torre.



Disponível em: www.uems.br. Acesso em: 11 dez. 2012 (adaptado).

Com base nas vistas fornecidas, qual figura melhor representa essa torre?



Acesse o link para retornar à seção correspondente do texto.

[Voltar à descrição do encontro.](#)

APÊNDICE I

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - (TCLE) (De acordo com as resoluções 466/12 e 510/16 CNS)

Eu, Raissa Samara Sampaio, estudante do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, Unesp, Rio Claro, convido-o(a) para participar da pesquisa de doutorado intitulada “Geometria Descritiva e Visualização: um olhar para a Realidade Aumentada”, que está sendo realizada sob a orientação da Prof^a Dr^a Rosa Monteiro Paulo.

A busca por práticas que possibilitem a aprendizagem em sala de aula faz parte do cotidiano do professor e, nesse sentido, encontramos nos documentos oficiais apontamentos de que as tecnologias digitais são um ponto importante para a formação dos estudantes e, principalmente, dos futuros professores. Nossa proposta na pesquisa é compreender os modos pelos quais a visualização, favorecida pela manipulação do software de Realidade Aumentada, GeoGebra AR, possibilita a aprendizagem geométrica.

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa por ser estudante da graduação em Licenciatura em Matemática, cursando a disciplina Desenho Geométrico e Geometria Descritiva. As atividades serão desenvolvidas nas aulas dessa disciplina, semanalmente aos sábados e realizadas em pequenos grupos, para que o diálogo possa ocorrer na aula. Todos os encontros que envolverem atividades de exploração com o software serão gravados (imagem e áudio) e essa gravação será, posteriormente, transcrita pela pesquisadora para se constituir em dados de análise da pesquisa. Também será solicitado ao(s) estudante(s) participante que grave as explorações feitas no smartphone e compartilhe com a pesquisadora.

As perguntas não serão invasivas à intimidade dos participantes, limitando-se aos diálogos sobre o conteúdo matemático da atividade que o grupo de alunos está resolvendo. O foco é a discussão empreendida no grupo para chegarem ao(s) processo(s) de resolução dos exercícios propostos. Aos participantes será dada à liberdade de não se pronunciarem sempre que não se sentirem à vontade ou considerarem que a situação poderá lhe acarretar algum constrangimento. Àqueles que não desejarem participar da pesquisa, terão suas falas desconsideradas nas transcrições da gravação.

Sua participação na pesquisa irá contribuir para a constituição dos dados que serão analisados e poderão ser utilizados para fins científicos, proporcionando maiores informações e discussões que contribuam para a área da Educação Matemática, particularmente em termos

das discussões relativas à aprendizagem da Geometria Descritiva com software de Geometria Dinâmica. A pesquisadora realizará o acompanhamento de todos os procedimentos e atividades desenvolvidas durante o trabalho.

A participação na pesquisa é voluntária e não haverá compensação em dinheiro. A qualquer momento lhe será dado o direito de desistir de participar, retirando o seu consentimento. A não participação na pesquisa não afetará seu desenvolvimento e sua avaliação na disciplina uma vez que as ações serão realizadas habitualmente por todos os estudantes, apenas sua manifestação, seja oral ou escrita, não será considerada como dado de análise para a pesquisa. A avaliação de seu aproveitamento na disciplina também não será afetada pela pesquisa, uma vez que ela acontecerá conforme o previsto no plano de ensino e não é foco da pesquisa. Portanto, não haverá prejuízo para estudante(s) que não aceitem participar da pesquisa.

A pesquisa será desenvolvida no laboratório de ensino de Matemática, que possui infraestrutura para o trabalho em grupo. A gravação das atividades dos estudantes será feita por meio de um software de captura da tela dos aparelhos (smartphones) usados no grupo para a solução das tarefas e compartilhados com a pesquisadora. Quem não desejar participar da pesquisa não precisará enviar à pesquisadora os arquivos. Também se pretende colocar uma câmera fixa na sala filmando os momentos de discussão coletiva. Nesses momentos o grupo irá expor suas soluções. Àqueles que não desejarem participar da pesquisa terão suas falas desconsideradas no momento da transcrição da gravação. Se algum estudante não desejar ser filmado, a câmera será desligada no momento da apresentação de seu grupo, sem que isso venha a comprometer o conjunto dos dados que ser constituirão pelos registros das ações no smartphone e as exposições.

Todas as informações obtidas para a pesquisa serão confidenciais, sendo assegurado o sigilo sobre sua participação em todas as ações. Para designar os sujeitos participantes da pesquisa no texto escrito, será atribuído a cada um, um pseudônimo, de forma a garantir o anonimato, tanto na tese quanto em publicações. A transcrição das gravações será feita pela pesquisadora para descrever a vivência da forma mais fiel possível, conforme requer o rigor da pesquisa qualitativo-fenomenológica. A transcrição será apresentada a todo participante para verificação e validação das informações.

Caso você aceite participar da pesquisa irá receber uma via deste termo, rubricada em todas as páginas por você e pela pesquisadora, onde constará o telefone e o endereço da pesquisadora responsável, através do qual será possível tirar dúvidas sobre o projeto e sua participação, a qualquer momento.

Se tiver problema(s) ou dúvida(s) sobre a pesquisa ou sua participação poderá entrar em contato pelo telefone (12) 3123-2845 ou pelo e-mail raissa.samara@unesp.br.

Local e data: _____

Assinatura do Pesquisador

Assinatura do Participante

Dados sobre a Pesquisa:

Título do Projeto: GEOMETRIA DESCRITIVA E VISUALIZAÇÃO: EXPLORAÇÕES
COM REALIDADE AUMENTADA

Pesquisador Responsável: Raissa Samara Sampaio

Cargo/função: Professora

Dados para Contato: fone: (12) 3123-2845 e-mail: raissa.samara@unesp.br

Dados sobre o participante da Pesquisa:

Nome: _____

Documento de Identidade: _____

Sexo: _____ Data de Nascimento: ____/____/____

Endereço: _____

Telefone para contato: _____

CEP-IB/UNESP-CRC

Av. 24A, nº 1515 – Bela Vista – 13506-900 – Rio Claro/SP

Telefone: (19) 35269678

Número do parecer: 5.026.401

Acesse o link para retornar à seção correspondente do texto.

[Voltar à descrição do encontro.](#)