

WILLIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES

**CONTROLE CHAVEADO E CHAVEADO SUAVE DE
SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS VIA MODELOS
FUZZY T-S**

Ilha Solteira
2017



WILLIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES

**CONTROLE CHAVEADO E CHAVEADO SUAVE DE
SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS VIA MODELOS
FUZZY T-S**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira
2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

A474c Alves, Uiliam Nelson Lenzion Tomaz.
Controle chaveado e chaveado suave de sistemas não lineares incertos via modelos fuzzy T-S / Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
105 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. Área de conhecimento: Automação, 2017

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Sistemas não lineares incertos contínuos no tempo. 2. Modelos fuzzy takagi-sugeno. 3. Controle chaveado. 4. Chattering. 5. Saturação no atuador.


Sandra Maria Clemente de Souza
STBD/STRAUD
Supervisão de Seção
CRB 8-4740



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Controle chaveado e chaveado suave de sistemas não lineares incertos via modelos fuzzy T-S

AUTOR: UÍLIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. ALEXANDRE TROFINO NETO
Departamento de Automação e Sistemas / Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. EUGÊNIO DE BONA CASTELAN NETO
Departamento de Automação e Sistemas / Universidade Federal de Santa Catarina

Ilha Solteira, 14 de dezembro de 2017

A todos que acreditaram e estiveram comigo durante este trabalho.

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Esta tese é fruto de um período de muitos desafios e também de muito crescimento. Certamente essa jornada foi muito mais alegre e proveitosa graças às várias pessoas que me acompanharam durante essa fase. Neste pequeno texto que segue expresso meus agradecimentos, que são necessários, mas não suficientes, àqueles que de forma direta ou indireta me ajudaram neste caminho.

Em primeiro, agradeço à Deus pelas oportunidades que me proporcionou, pelas pessoas que colocou em minha vida, e por todas as inúmeras graças recebidas. Agradeço também à Nossa Senhora por seu olhar generoso e por sua constante intercessão.

Agradeço à minha família, meu pai Nelson, minha mãe Janice e minha irmã Bruna, por todo apoio e suporte em minhas decisões, por seu incentivo aos estudos, pelos valores transmitidos e pelo amor que nos une. Com muito carinho agradeço a minha tia Elena, por ter feito a diferença em minha formação, por me ajudar de tantas maneiras, por toda consideração e carinho. Obviamente agradeço a seus filhos Eloá e João Gabriel, por serem primos de sangue, mas irmãos de coração.

Este trabalho não seria possível sem a orientação do prof. Marcelo, cuja excelência em pesquisa pode ser facilmente verificada através de seus inúmeros e relevantes trabalhos. Aproveito a oportunidade para enfatizar a pessoa incrível que é, sempre atencioso, paciente e firme em sua busca pela excelência em tudo o que faz; não esquecendo de mencionar sua risada, sempre contagiante. Por tudo isso e muito mais, expresso minha gratidão.

Aos demais professores do grupo de pesquisa em controle: José Paulo, Edvaldo, Rodrigo Cardim, Jean e Érica, pela participação significativa e sempre positiva em minha formação, por toda a ajuda, conversas e conselhos, presto meus agradecimentos.

Agradeço aos membros do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) pelo privilégio de fazer parte deste time. Aos colegas Diogo, Leidy, ‘Carniatos’ (Alexandre e Leonardo), Igor, Bruno, Rafael, Gilberto, Lázaro, Paulo, Ivan, Marco, Hadamez, Adalberto e Ariel, meu muito obrigado pela agradável convivência, pelos momentos de descontração, pelo café compartilhado e por toda a ajuda na resolução dos problemas que surgem a todo momento.

Também presto minha gratidão a todos os professores do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Unesp de Ilha Solteira, técnicos, funcionários, e à sempre gentil equipe

da biblioteca.

Aos colegas professores e técnicos do IFPR, campus Jacarezinho, agradeço pelo companheirismo, solidariedade e toda ajuda prestada na reta final de meu doutorado e no meu início como professor.

Termino agradecendo à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível, ao CNPq, e à FAPESP (processo número 2011/17610-0) pela aquisição dos *softwares* e equipamentos utilizados, e também pelo auxílio para participação de congressos.

“Descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo
e pensar uma coisa diferente.”

Roger Von Oech

“A mente se enriquece com aquilo que recebe,
o coração com aquilo que dá.”

Victor Hugo

RESUMO

O controle chaveado pode ser eficientemente utilizado no controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) incertos, que possuam funções de pertinência incertas e modelos locais conhecidos. Como estes sistemas fuzzy podem representar exatamente uma classe de sistemas não lineares incertos em uma região do espaço de estados, é interessante utilizá-los para descrever sistemas não lineares, usando no projeto do controlador o modelo fuzzy que descreve exatamente o sistema não linear. Porém, como a representação através de combinação convexa obtida é válida apenas em uma região do espaço de estados, garantias de que o estado do sistema permaneça nessa região devem ser obtidas. Neste trabalho são propostas condições que garantem a estabilização local, com a especificação da taxa de decaimento, de uma classe de sistemas não lineares contínuos no tempo, incertos e com saturação no atuador, utilizando o controle chaveado. Os projetos dos controladores são realizados com base no modelo fuzzy T-S que representa exatamente o sistema não linear e os procedimentos de projeto fornecem uma região na qual as condições iniciais devam estar, tal que, o sistema não linear seja exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S incerto durante toda a trajetória de estado do sistema e ainda que esta trajetória permaneça dentro de uma região de operação previamente especificada. Em geral, o controle chaveado não possui restrição na frequência de chaveamento dos ganhos, o que pode levar ao *chattering*, que se manifesta pelo chaveamento em frequência infinitamente rápida dos ganhos de realimentação. Visando a eliminação do *chattering* no controle chaveado, propõe-se uma nova técnica de suavização do controle chaveado, o controle chaveado suave. Esta nova lei de controle pode ser utilizada nas mesmas condições do controle chaveado e é baseada no conceito do mínimo suave, definido neste trabalho. Além disso, são propostos procedimentos de projeto que consideram distúrbios para ambas as leis de controle chaveada e chaveada suave. Ademais, neste trabalho também se apresenta uma implementação da lei de controle chaveada em um sistema *Ball Balancer* fabricado pela Quanser[®].

Palavras-chave: Sistemas não lineares incertos contínuos no tempo. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Controle chaveado. *Chattering*. Saturação no atuador.

ABSTRACT

The switched control can be efficiently used for controlling uncertain Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems, which have uncertain membership functions and known local models. Because these fuzzy systems can exactly represent a class of uncertain nonlinear systems in a given operation region in the state space, it is interesting to use them to describe nonlinear systems, performing the controller design based on a T-S fuzzy model that exactly describes the nonlinear system. However, the perfect representation of the uncertain nonlinear system by the T-S fuzzy model as a convex combination is only valid in the operation region. Therefore, it is necessary to assure conditions such that the state of the system remains in that region. This work proposes conditions to ensure the local stabilization, with decay rate, of a class of uncertain continuous-time nonlinear systems with saturation on the actuator, using a switched control. The designs of the controllers are performed based on the T-S fuzzy model which exactly describes the nonlinear system and the design procedures provide a region in which the initial conditions must be such that the nonlinear system is exactly described by the uncertain T-S fuzzy model along the whole state trajectory of the system and this trajectory remains in a specified operation region. Usually, the switched control has no bound on the frequency of the feedback gains switching, and this can lead to chattering, which is manifested by infinitely fast frequency of the feedback gains switching. In order to avoid the chattering in the switched control, this work proposes a new technique to smooth the switched control, the smooth switched control. This new control law can be used under the same conditions as the switched control and it is based on the concept of smooth minimum, which is defined in this work. In addition, design procedures considering disturbances for both switched and smooth switched control laws are proposed. Furthermore, in this work it is also presented an implementation of the proposed switched control law in a *Ball Balancer* system manufactured by Quanser[®].

Keywords: Uncertain continuous-time nonlinear systems. Takagi-Sugeno fuzzy models. Switched control. Chattering. Actuator saturation.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----------|---|----|
| Figura 1 | Esquema de controle chaveado sujeito à saturação. | 17 |
| Figura 2 | Ilustração do sistema bola-viga. | 34 |
| Figura 3 | Sistema levitador magnético. | 36 |
| Figura 4 | Representação de $\text{sat}_l(u_l(t))$ em função de $u_l(t)$. | 41 |
| Figura 5 | Representação de possíveis trajetórias de estado e das regiões \mathcal{X} em (13), $\mathcal{L}(H_j)$ em (44), $\mathcal{E}(P,1)$ em (45) e \mathfrak{X} no plano $x_1(t) \times x_2(t)$. | 50 |
| Figura 6 | Resposta temporal para uma simulação do sistema bola-viga (28) com malha fechada utilizando a lei de controle chaveada (70): variáveis de estado, sinal de controle e índice de chaveamento φ . | 54 |
| Figura 7 | Conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(H_k)$, $\mathcal{E}(P,1)$, para o levitador magnético (35). | 55 |
| Figura 8 | Posição da bola ($\check{x}_1(t) = y(t)$), velocidade da bola ($\check{x}_2(t)$), sinal de controle ($u(t) = i(t)^2 - i_0(v)^2$), e índices de chaveamento φ e σ , para o levitador magnético (35) em malha fechada com a lei de controle chaveada (84). | 56 |
| Figura 9 | Sistema <i>Ball Balancer</i> Quanser [®] . (a) Equipamento pertencente ao LPC - FEIS - UNESP. (b) Esquema do movimento no eixo x do sistema. | 58 |
| Figura 10 | Máximos valores de escala ϖ para diferentes valores de taxa de decaimento β para o sistema <i>Ball Balancer</i> Quanser [®] . | 60 |
| Figura 11 | Posição da bola no plano xy do sistema <i>Ball Balancer</i> Quanser [®] em malha fechada com a lei de controle (70) e com ganhos projetados para $\beta = 1,25$. | 61 |
| Figura 12 | Ilustração de uma possível trajetória de estado com troca de estágios para $x(t) \in \mathfrak{R}^2$. | 62 |
| Figura 13 | Deslocamento medido no eixo x do sistema <i>Ball Balancer</i> Quanser [®] durante implementação da lei de controle (95). | 64 |

| | | |
|-----------|---|----|
| Figura 14 | Variáveis de estado medidas no eixo x do sistema <i>Ball Balancer Quanser</i> [®] durante implementação da lei de controle (95). | 64 |
| Figura 15 | Sinal de controle definido por (95) utilizado no eixo x do sistema <i>Ball Balancer Quanser</i> [®] durante implementação. | 65 |
| Figura 16 | Escolha dos ganhos de realimentação da lei de controle (95) para o eixo x do sistema <i>Ball Balancer Quanser</i> [®] durante implementação. | 65 |
| Figura 17 | Funções de Lyapunov utilizadas na escolha do controlador (variável ι em (95)) do eixo x do sistema <i>Ball Balancer Quanser</i> [®] durante implementação. | 66 |
| Figura 18 | Posição da bola no plano xy utilizando estágios no controle (95) do sistema <i>Ball Balancer Quanser</i> [®] durante implementação. | 67 |
| Figura 19 | Gráficos das funções $\text{sgn}(z)$ (96) e $\text{sgn}^*(z)$ (97), $\gamma = 0,01$. | 70 |
| Figura 20 | Variáveis de estado e sinal de controle da simulação do bola-viga (28) realimentado com a lei de controle chaveada suave (108) e (109). | 82 |
| Figura 21 | Ativação dos ganhos de realimentação μ_i em (111) (correspondente aos ganhos K_i), $i \in \mathbb{I}_4$, da simulação do sistema bola-viga (28) realimentado usando a lei de controle chaveada suave (108)-(111). | 82 |
| Figura 22 | Conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(H_k)$, $\mathcal{E}(P,1)$ e $\mathcal{E}(Y,\tilde{\kappa})$, $\tilde{\kappa} = (r-1)\gamma + \gamma_\sigma g_0$, para o levitador magnético (35) realimentado com a lei de controle chaveada suave robusta (130). | 83 |
| Figura 23 | Posição da bola ($\check{x}_1(t) = y(t)$), velocidade ($\check{x}_2(t)$), e sinal de controle ($u(t) = i(t)^2 - i_0(v)^2$) do levitador magnético (35) em malha fechada com a lei de controle chaveada suave robusta (130). | 84 |
| Figura 24 | Ativação dos ganhos de realimentação μ_i em (111), correspondentes aos ganhos K_i , $i \in \mathbb{I}_8$, e ε_j , correspondentes aos valores v_j (139), $j \in \mathbb{I}_2$, para o levitador magnético (35) em malha fechada com a lei de controle chaveada suave robusta (130). | 84 |
| Figura 25 | Distúrbio utilizado nas simulações. | 95 |
| Figura 26 | Resposta temporal para a simulação do sistema bola-viga (156) com malha fechada utilizando a lei de controle chaveada (142): variáveis de estado, sinal de controle e índice de chaveamento φ . | 95 |

- Figura 27 Resposta temporal para a simulação do sistema bola-viga (156) realimentado com a lei de controle chaveada suave (143): variáveis de estado e sinal de controle. 96
- Figura 28 Ativação dos ganhos de realimentação μ_i em (111) (correspondente aos ganhos K_i), $i \in \mathbb{I}_8$, da simulação do sistema bola-viga (156) realimentada usando a lei de controle chaveada suave (143). 96
- Figura 29 Evolução temporal da função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ para o sistema bola-viga (156). (a) Realimentado com lei de controle chaveada (142) (P dado em (163)). (b) Realimentado com lei de controle chaveada suave (143) (P dado em (160)). 97

LISTA DE TABELAS

| | | |
|----------|--|----|
| Tabela 1 | Combinações para mudanças de variáveis. | 28 |
| Tabela 2 | Exemplo de combinações para mudanças de variáveis. | 31 |
| Tabela 3 | Combinações para mudanças de variáveis na descrição da saturação por uma combinação convexa. | 43 |
| Tabela 4 | Parâmetros do sistema <i>Ball Balancer</i> Quanser [®] . | 58 |
| Tabela 5 | Algoritmo para o projeto de controle chaveado usando estágios. | 62 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--|--|
| \mathfrak{R} | Conjunto dos números reais. |
| \mathbb{Z}_+ | Conjunto dos números inteiros positivos. |
| \mathfrak{R}^n | Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais. |
| $\mathfrak{R}^{n \times m}$ | Conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais. |
| M^T | Transposta da matriz real M . |
| $M > (\geq) 0$ | M é uma matriz simétrica e definida (semi-definida) positiva. |
| $M < (\leq) 0$ | M é uma matriz simétrica e definida (semi-definida) negativa. |
| \mathbb{I}_r | Conjunto dos primeiros r números naturais $\mathbb{I}_r = \{1, 2, \dots, r\}$. |
| $\text{co} \{a_1, \dots, a_r\}$ | Conjunto das combinações convexas dos vetores $a_i, \forall i \in \mathbb{I}_r$; $\alpha \in \text{co} \{a_1, \dots, a_r\}$ se e somente se $\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i, \alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$. |
| $ z $ | Valor absoluto de um número real z . |
| $\ x\ $ | Norma euclidina do vetor $x \in \mathfrak{R}^n$; $\ x\ = \sqrt{x^T x}$. |
| $M_{(l)}$ | l -ésima linha de uma matriz M . |
| $\text{diag} \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ | Matriz bloco-diagonal cujos elementos diagonais são M_1, M_2, \dots, M_n . |
| $\arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{h_i\}$ | Menor índice $j \in \mathbb{I}_r$ tal que, para o conjunto $\{h_1, \dots, h_r\}$, $h_j = \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{h_i\}$; por exemplo, dado um conjunto $H = \{h_1 = 3, h_2 = 1, h_3 = 6, h_4 = 3, h_5 = 1\}$, então $\arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{h_i\} = \min \{2, 5\} = 2$. |
| I_q | Matriz identidade de ordem $q \times q$. |
| \prod | Produtório entre elementos; por exemplo, seja o conjunto $\mathcal{P} = \{p_1, p_3, p_5\}$, então $\prod_{p_i \in \mathcal{P}} p_i = p_1 p_3 p_5$. |
| $\mathcal{E}(P, \delta)$ | Conjunto elipsoidal formado pelos estados $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ tais que $x(t)^T P x(t) \leq \delta, P = P^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}, P > 0$. |
| $\mathcal{E}(P, 1) \setminus \mathcal{E}(P, \delta_1)$ | Conjunto formado pelos elementos $x(0)$ tais que $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ mas $x(0) \notin \mathcal{E}(P, \delta_1)$. |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 16 |
| 2 | MODELO FUZZY TAKAGI-SUGENO DE UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS | 24 |
| 2.1 | MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO | 24 |
| 2.2 | REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS ATRAVÉS DE MODELOS FUZZY T-S | 25 |
| 2.3 | EXEMPLOS | 33 |
| 2.3.1 | Descrição em modelo fuzzy T-S de um sistema bola-viga | 33 |
| 2.3.2 | Descrição em modelo fuzzy T-S de um levitador magnético | 35 |
| 2.4 | COMENTÁRIOS | 38 |
| 3 | CONTROLE CHAVEADO SUJEITO À SATURAÇÃO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS USANDO MODELOS FUZZY T-S | 39 |
| 3.1 | CONCEITOS INICIAIS | 39 |
| 3.1.1 | Descrição da saturação do sinal de controle por uma combinação convexa | 40 |
| 3.2 | CONTROLE CHAVEADO DE SISTEMAS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S INCERTOS COM SATURAÇÃO NO ATUADOR | 46 |
| 3.2.1 | Tratamento de distúrbios ou incertezas no sinal de controle | 51 |
| 3.3 | EXEMPLOS | 52 |
| 3.3.1 | Controle chaveado de um sistema bola-viga | 52 |
| 3.3.2 | Controle chaveado de um levitador magnético | 54 |
| 3.4 | COMENTÁRIOS | 55 |
| 4 | CONTROLE CHAVEADO LOCAL DO <i>BALL BALANCER</i> QUANSER® | 57 |
| 4.1 | SISTEMA <i>BALL BALANCER</i> QUANSER® | 57 |
| 4.2 | CONTROLE CHAVEADO APLICADO AO SISTEMA <i>BALL BALANCER</i> | 59 |

| | | |
|--------------|---|------------|
| 4.3 | ESTÁGIOS NO CONTROLE CHAVEADO | 61 |
| 4.4 | COMENTÁRIOS | 65 |
| 5 | O MÍNIMO SUAVE E O CONTROLE CHAVEADO SUAVE SUJEITO À SATURAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S | 68 |
| 5.1 | CÁLCULO DO MÍNIMO UTILIZANDO A FUNÇÃO SINAL | 68 |
| 5.2 | O MÍNIMO SUAVE | 70 |
| 5.3 | CONTROLE CHAVEADO SUAVE PARA UMA CLASSE DE SISTEMA NÃO LINEARES INCERTOS | 71 |
| 5.3.1 | Tratamento de distúrbios ou incertezas no sinal de controle | 78 |
| 5.4 | EXEMPLOS | 80 |
| 5.4.1 | Controle chaveado suave de um sistema bola-viga | 80 |
| 5.4.2 | Controle chaveado suave de um levitador magnético | 82 |
| 5.5 | COMENTÁRIOS | 85 |
| 6 | CONTROLE CHAVEADO E CHAVEADO SUAVE PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS SUJEITOS A DISTÚRBIOS | 86 |
| 6.1 | CONSIDERANDO DISTÚRBIOS NO PROJETO DO CONTROLADOR CHAVEADO E CHAVEADO SUAVE | 86 |
| 6.2 | EXEMPLO: SISTEMA BOLA-VIGA SUJEITO A DISTÚRIBIO | 91 |
| 6.3 | COMENTÁRIOS | 96 |
| 7 | CONCLUSÕES | 98 |
| | REFERÊNCIAS | 101 |

1 INTRODUÇÃO

A descrição de sistemas não lineares por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (TAKAGI; SUGENO, 1985) possibilita representá-los como uma combinação de modelos locais, ponderados por funções de pertinência. Esta representação é uma importante ferramenta que facilita o uso de LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) (BOYD et al., 1994) no projeto de controladores para estes sistemas. Uma revisão sobre os principais resultados do controle fuzzy e perspectivas nesta área podem ser encontradas em Guerra, Sala e Tanaka (2015).

Um importante resultado para o uso do controle fuzzy em sistemas não lineares é apresentado em Taniguchi et al. (2001), no qual é proposto um procedimento que permite obter um modelo fuzzy T-S que representa exatamente uma classe de sistemas não lineares em uma região no espaço de estados. Esta representação exata permite então o projeto de controle para o sistema não linear através de sua descrição pelo modelo fuzzy, desde que o sistema permaneça na região do espaço de estados na qual o modelo foi obtido. Neste contexto podem ser aplicadas técnicas de controle que utilizam a Compensação Distribuída Paralela (CDP) (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1995; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TEIXEIRA; ŽAK, 1999; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; FANG et al., 2006; SANTIM et al., 2012; HAMDY; HAMDAN; IBRAHIM, 2014; HO; CHOU; CHANG, 2014; SADEGHI; SAFARINEJADIAN; FARUGHIAN, 2014), fazendo uso das funções de pertinência do modelo fuzzy na composição da lei de controle.

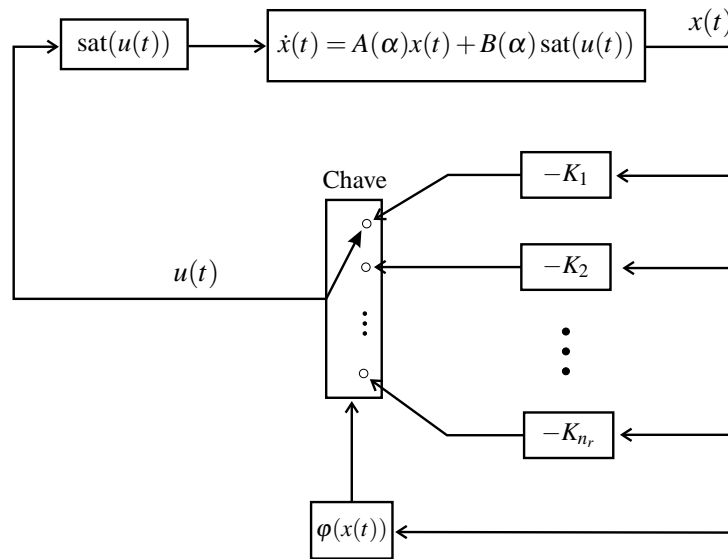
Quando o sistema não linear possui parâmetros incertos ainda assim pode-se obter um modelo fuzzy que represente exatamente este sistema em uma região de operação, com o procedimento mostrado em Santim et al. (2012). Contudo, com este procedimento, embora sejam conhecidos os modelos locais, as funções de pertinência obtidas são incertas, dependentes dos parâmetros incertos. Assim, técnicas que utilizam o conceito de controle CDP não podem ser diretamente utilizadas, pois estas funções de pertinência dependem de parâmetros incertos.

Por outro lado, a lei de controle chaveada proposta em Souza et al. (2014c) e Souza et al. (2014b) não utiliza as funções de pertinência do modelo na estrutura do controlador, e então, não necessita das expressões que definem as funções de pertinência para o cálculo do sinal de controle. As condições de projeto são descritas em termos de LMIs e podem ser eficientemente resolvidas computacionalmente (GAHINET et al., 1994; STURM, 1999; EFBERG; LÖFBERG, 2004).

Nesta abordagem de controle, assim como em Deaecto, Geromel e Daafouz (2011), são projetados vários ganhos de realimentação, sendo apenas um ganho utilizado por vez, escolhido

com base em uma lei de chaveamento que depende do vetor de estado do sistema controlado. Um esquema que representa o uso do controle chaveado é mostrado na Figura 1. Neste esquema uma planta cuja dinâmica é expressa pela equação $\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha) \text{sat}(u(t))$, sujeita à saturação no sinal de controle, encontra-se em malha fechada com uma lei de controle chaveada. Observa-se na Figura 1 que o ganho de realimentação K_φ utilizado é escolhido a cada instante, entre os ganhos K_1 até K_{n_r} , através de uma lei de chaveamento $\varphi(x(t))$, dependente do estado do sistema, que controla uma chave.

Figura 1 - Esquema de controle chaveado sujeito à saturação.



Fonte: adaptado de Deaecto, Geromel e Daafouz (2011).

A lei de chaveamento proposta em Souza et al. (2014c) e em Souza et al. (2014b) é tal que minimiza a derivada da função de Lyapunov e está alicerçada no fato de que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual que qualquer combinação convexa dos elementos deste conjunto. De fato, para $i \in \{1, 2, \dots, r\} = \mathbb{I}_r$, sendo $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, tem-se que

$$\min_{i \in \mathbb{I}_r} \{a_i\} = \alpha_1 \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{a_i\} + \alpha_2 \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{a_i\} + \dots + \alpha_r \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{a_i\} \leq \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r = \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i.$$

A lei de controle chaveada (SOUZA et al., 2014c; SOUZA et al., 2014b) apresenta menor conservadorismo quando comparada ao uso de um único ganho de realimentação, podendo ser aplicada no controle de modelos fuzzy T-S incertos e também de modelos lineares com incertezas politópicas (SOUZA et al., 2013). O exemplo a seguir ilustra o ganho de desempenho que pode ser obtido ao considerar o controle chaveado em vista da realimentação de estado com um único ganho ($u(t) = -Kx(t)$) em um sistema linear incerto e invariante no tempo (ALVES et al., 2016c).

Exemplo: considere um sistema linear incerto e invariante no tempo com dinâmica descrita por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu(t), \quad (1a)$$

sendo

$$A(\alpha) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad (1b)$$

α_1 e α_2 parâmetros incertos e constantes. O objetivo deste exemplo é projetar um controlador que estabilize o sistema (1) e que tenha a menor norma euclidiana possível. Para a estabilização deste sistema consideram-se os seguintes controladores:

(I) Controlador linear e invariante no tempo: $u(t) = -Kx(t) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$.

A dinâmica do sistema (1) em malha fechada com o controlador (I) é dada por

$$\dot{x}(t) = [A(\alpha) - BK]x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - k_1 & -\alpha_1 + \alpha_2 - k_2 \end{bmatrix} x(t) = \bar{A}(\alpha)x(t). \quad (2)$$

Então, para que o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (2) seja globalmente e assintoticamente estável, $\Delta_a = \det(sI - \bar{A}(\alpha))$ deve ser Hurwitz, sendo

$$\Delta_a = s^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 + k_2)s + (-\alpha_1 + \alpha_2 + k_1). \quad (3)$$

A condição suficiente e necessária para que Δ_a dada em (3) seja Hurwitz é que, para todo α_1 e α_2 definido em (1b),

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + k_2 > 0 & \xrightarrow[\alpha_1=0 \ \alpha_2=1]{\text{Pior caso}} -1 + k_2 > 0 \rightarrow k_2 > 1, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + k_1 > 0 & \xrightarrow[\alpha_2=0 \ \alpha_1=1]{\text{Pior caso}} -1 + k_1 > 0 \rightarrow k_1 > 1. \end{cases}$$

Assim, o limitante inferior da norma do ganho do controlador dado em (I) tal que estabilize o sistema (1) é o seguinte:

$$\|K\|_2 = \sqrt{KK^T} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} > \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

(II) Controlador Chaveado: $u(t) = -K_\varphi x(t)$, $\varphi = \arg^* \min_{i \in \{1,2\}} \{-x(t)^T PBK_i x(t)\}$.

Para o projeto deste controlador será utilizado o procedimento proposto em Souza et al. (2014c). Então, considere uma candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T Px(t)$, $P = P^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$. Assim, para o sistema (1) e lei de controle (II) tem-se que $\dot{V}(x(t)) = 2x(t)^T P\dot{x}(t) = 2x(t)^T P[A(\alpha) - BK_\varphi]x(t)$. Observe que de (II), $-x(t)^T PBK_\varphi x(t) \leq -x(t)^T PB[\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2]x(t) = -x(t)^T PBK(\alpha)x(t)$, sendo $K(\alpha) = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2$, $K_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix}$, $K_2 = \begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$, α_1 e $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Consequentemente, $\dot{V}(x(t))$

$\leq x(t)^T \left[P(A(\alpha) - BK(\alpha)) + (A(\alpha) - BK(\alpha))^T P \right] x(t)$. Sabendo disto, inicia-se o projeto do controlador (II) com a análise da seguinte lei de controle:

$$u(t) = -K(\alpha)x(t) = -(\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2)x(t) = -\left(\alpha_1 \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \right) x(t), \quad (4)$$

sendo K_1 e K_2 os ganhos da lei de controle chaveada (II) (SOUZA et al., 2013). Com o controlador (4), a dinâmica do sistema (1) em malha fechada é a seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A(\alpha) - BK(\alpha)]x(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1 - k_{11})\alpha_1 + (-1 - k_{21})\alpha_2 & (-1 - k_{12})\alpha_1 + (1 - k_{22})\alpha_2 \end{bmatrix} x(t) = \hat{A}(\alpha)x(t). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \Delta_b &= \det(sI - \hat{A}(\alpha)) \\ &= s^2 + [(1 + k_{12})\alpha_1 + (-1 + k_{22})\alpha_2]s + [(-1 + k_{11})\alpha_1 + (1 + k_{21})\alpha_2]. \end{aligned} \quad (5)$$

Uma escolha possível para os ganhos de realimentação tais que Δ_b dado em (5) seja Hurwitz é a seguinte

$$\begin{cases} 1 + k_{12} > 0 \rightarrow k_{12} > -1 \rightarrow k_{12} = 0, \\ -1 + k_{22} > 0 \rightarrow k_{22} > 1 \rightarrow k_{22} = 1 + \delta, \delta > 0, \\ -1 + k_{11} > 0 \rightarrow k_{11} > 1 \rightarrow k_{11} = 1 + \delta, \\ 1 + k_{21} > 0 \rightarrow k_{21} > -1 \rightarrow k_{21} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Uma vez utilizando a lei de controle chaveada (II) o sinal de controle será $u(t) = -K_1 x(t)$ ou $u(t) = -K_2 x(t)$, de acordo com a lei de chaveamento φ . Com a escolha de ganhos dada em (6), a norma do controlador será $\max\{\|K_1\|_2, \|K_2\|_2\} = (1 + \delta)$. Para encontrar o menor valor de δ que faz com que o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (1) com lei de controle (II) seja globalmente e assintoticamente estável é suficiente encontrar uma matriz $0 < P = P^T \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ tal que $\dot{V}(x(t)) < 0, x(t) \neq 0$. Isto acontece quando

$$\begin{aligned} P\hat{A}_1 + \hat{A}_1^T P &< 0, \\ P\hat{A}_2 + \hat{A}_2^T P &< 0, \end{aligned} \quad (7)$$

sendo, de (4)-(6),

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= A_1 - BK_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \delta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\delta & -1 \end{bmatrix} \\ \hat{A}_2 &= A_2 - BK_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 + \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\delta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Resolvendo as LMIs (7), de modo a minimizar δ (busca linear) foi encontrado $\delta = 0,26$ e $P = \begin{bmatrix} 0,7517 & 0,1714 \\ 0,1714 & 0,8760 \end{bmatrix}$. Portanto, a norma dos ganhos de realimentação para a lei de controle chaveada é 1,26, menor do que a norma do controlador (I), cujo limitante inferior é $\sqrt{2}$.

A partir deste exemplo é possível observar o menor conservadorismo da lei de controle chaveada frente à realimentação de estado com um único ganho. Ou seja, utilizando a lei de controle chaveada (SOUZA et al., 2014c; SOUZA et al., 2014b) é possível obter melhores índices de desempenho quando comparada à utilização de uma lei de controle com um único ganho de realimentação.

Como o controle chaveado de sistemas não lineares através de modelos fuzzy T-S é dependente do modelo utilizado, uma vez que ele descreve exatamente o sistema não linear através de uma combinação convexa de modelos locais apenas na região de operação considerada, uma condição para que a trajetória de estado do sistema permaneça nesta região de validade deve ser obtida (ALVES et al., 2016c). Além disso, um problema bastante comum em aplicações práticas é a saturação no atuador, que não é considerada no projeto do controlador chaveado proposto em Souza et al. (2014c) e Souza et al. (2014b).

Ademais, com o uso da lei de controle chaveada pode ocorrer o fenômeno do *chattering* (chaveamento em frequência infinitamente rápida entre os ganhos de realimentação (DEAECTO; SOUZA; GEROMEL, 2014)). O *chattering* é um fenômeno geralmente indesejado em sistemas físicos, pois pode causar danos aos equipamentos ou até mesmo excitar dinâmicas de alta frequências que não foram modeladas. Várias estratégias foram desenvolvidas para evitar o problema do *chattering* em diferentes leis de controle, por exemplo, em controle com estrutura variável (UTKIN, 1993; HSU, 1997; YOUNG; UTKIN; OZGUNER, 1999; FRIDMAN, 2003; UTKIN; LEE, 2006; BOIKO et al., 2007; LEE; UTKIN, 2007; WANG; ADELI, 2012), em controle adaptativo (GOLEA; GOLEA; BENMAHAMMED, 2002; HUANG; CHEN, 2006; HO; WONG; RAD, 2009), e em controle chaveado de sistemas lineares (HETEL; FRIDMAN, 2013; DUAN; WU, 2014; DEAECTO; SOUZA; GEROMEL, 2014).

Este trabalho apresenta contribuições ao controle chaveado de sistemas não lineares incertos, propondo condições que garantam a estabilização local com a especificação da taxa de decaimento de uma classe de sistemas não lineares com saturação no atuador. O procedimento de projeto fornece uma região no espaço de estados na qual as condições iniciais devam estar, tal que, o sistema não linear seja exatamente representado pelo modelo fuzzy incerto que o descreve como uma combinação convexa de modelos locais, durante toda a trajetória de estado. Visando a diminuição do *chattering* que pode ser apresentado pelo controle chaveado, é proposto o controle chaveado suave, que utiliza o conceito de mínimo suave, definido neste trabalho. Além disso, são propostas condições de projeto que consideram distúrbios casados e não casados (ALVES et al., 2015; ALVES et al., 2016c; ALVES et al., 2016b) e apresenta-se uma implementação da lei de controle chaveada proposta em um sistema *Ball Balancer*

Quanser[®] (ALVES et al., 2016a). Destaca-se que os projetos e simulações apresentados neste texto foram todos realizados no *software* Matlab/Simulink[®].

Acrescenta-se que embora as técnicas descritas neste trabalho sejam formuladas para sistemas não lineares incertos, elas podem ser diretamente adaptadas para o controle de sistemas lineares incertos representados politopicamente (SOUZA et al., 2013), uma vez que as funções de pertinência não são utilizadas na composição do sinal de controle. Além disso, nem as expressões das funções de pertinência, nem das derivadas destas, são utilizadas para provar os resultados obtidos. Segue uma descrição dos próximos capítulos.

No Capítulo 2, baseado em Taniguchi et al. (2001) e em Santim et al. (2012), é apresentado um procedimento para a descrição exata de uma classe de sistemas não lineares incertos por modelos fuzzy T-S incertos. Os modelos assim obtidos possuem funções de pertinência incertas (dependentes dos parâmetros incertos da planta), porém modelos locais conhecidos. Este procedimento de descrição serve como base para as leis de controle propostas e é adotado nos capítulos seguintes.

Uma extensão do projeto de controle chaveado para sistemas não lineares incertos utilizando modelos fuzzy T-S (SOUZA et al., 2014c; SOUZA et al., 2014b), considerando a região de operação e a possibilidade de saturação no atuador, é descrita no Capítulo 3. O procedimento de projeto proposto fornece uma região positivamente invariante (BLANCHINI, 1999) $\mathcal{E}(P,1)$ na qual, para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P,1)$, o vetor de estado do sistema controlado $x(t)$, $t > 0$, permanece na região de operação considerada para a obtenção do modelo fuzzy T-S que descreve a dinâmica não linear. Em consequência, garante-se que o sistema não linear é exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S, obtido pelo procedimento descrito no Capítulo 2, durante toda a trajetória de estado do sistema iniciada com $x(0) \in \mathcal{E}(P,1)$. Fato que é importante, visto que o projeto do controlador é baseado no modelo fuzzy T-S. Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados em Alves et al. (2016c).

No Capítulo 4 mostram-se resultados de implementação da lei de controle descrita no Capítulo 3 em um sistema *Ball Balancer* Quanser[®], que apresenta não linearidade e saturação no atuador (QUANSER INNOVATE EDUCATE, 2008a). Observou-se que a exigência de taxa de decaimento mais elevadas possibilitavam a garantia de estabilidade para condições iniciais $x(0)$ com menores normas, e vice-versa, comprometendo, em um primeiro momento, a implementação do controle chaveado neste equipamento. De modo a conseguir bom desempenho do sistema, permitindo conciliar condições iniciais $x(0)$ com maiores normas (exigindo para elas menores taxas de decaimento) e maiores taxas de decaimento em regiões próximas à origem (menores normas de $x(0)$), a teoria apresentada no Capítulo 3 foi estendida. Nesta extensão é proposta a utilização de estágios no controle, sendo projetados controladores chaveados diferentes para cada estágio e realizada a escolha do estágio (controlador utilizado) com base no vetor de estado do sistema. Com este procedimento foram obtidos resultados de implementação

satisfatórios, tendo sido esta abordagem publicada em Alves et al. (2016a).

Como uma estratégia para contornar o fenômeno do *chattering* no controle chaveado (SOUZA et al., 2014c; SOUZA et al., 2014b), no Capítulo 5 é descrito o controle chaveado suave proposto em Alves et al. (2016c) que, assim como o controle chaveado, não faz uso das funções de pertinência do modelo fuzzy T-S para sintetizar o sinal de controle. A ideia básica na proposta desta nova lei de controle está em representar a função mínimo, usada no controle chaveado, através da função sinal. Tendo esta representação, adota-se uma aproximação suave da função sinal: $\text{sgn}(z) \approx z/(|z| + \gamma)$, com $\gamma > 0$ e suficientemente pequeno, para introduzir o conceito de mínimo suave. Então, emprega-se este novo conceito de mínimo na lei de controle chaveada, tornando-a suave, de modo a evitar o *chattering* no sinal de controle. A principal desvantagem desta abordagem é a garantia, apenas, da estabilidade *ultimate bounded*, assegurando a convergência do estado do sistema para uma região em torno do ponto de equilíbrio e não necessariamente ao ponto de equilíbrio (CORLESS; LEITMANN, 1981), frente à garantia de estabilidade assintótica do controle chaveado (SOUZA et al., 2014c; SOUZA et al., 2014b). Entretanto, esta região *ultimate bounded* depende dos parâmetros de suavização, escolhidos pelo projetista, e assim, pode ser tão pequena quanto se queira.

Interessante notar que, como a função mínimo é comumente utilizada em controle chaveado (HETEL; FRIDMAN, 2013; SOUZA et al., 2014c; SOUZA et al., 2014b; DUAN; WU, 2014; DEAECTO; SOUZA; GEROMEL, 2014) e a função sinal é geralmente utilizada em controle com estrutura variável (UTKIN, 1993; HSU, 1997; YOUNG; UTKIN; OZGUNER, 1999; UTKIN; LEE, 2006; LEE; UTKIN, 2007; WANG; ADELI, 2012), a relação entre a função mínimo e a função sinal oferece uma conexão entre essas duas teorias.

Uma classe de sistemas não lineares incertos com distúrbios não casados é considerada no Capítulo 6. Nele são introduzidas condições LMIs para o projeto do controle chaveado, e também chaveado suave, para esta classe de sistemas. Assim como nos capítulos anteriores, assume-se a existência de saturação no atuador e o procedimento proposto fornece uma região no espaço de estados para as condições iniciais do sistema não linear, na qual é garantida a descrição exata do sistema não linear pelo modelo fuzzy T-S com combinação convexa de seus modelos locais, utilizado no procedimento de projeto do controlador, durante toda a trajetória de estado do sistema em malha fechada. Os resultados deste capítulo foram publicados em Alves et al. (2016b).

Finalmente, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões relativas ao trabalho realizado, as publicações originadas desta pesquisa e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Notação: Os símbolos ' \mathcal{R} ' e ' \mathcal{Z}_+ ' representam o conjunto de números reais e de inteiros positivos, nesta ordem, assim como \mathcal{R}^n e $\mathcal{R}^{n \times m}$ denotam o conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais e o conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais, respectivamente. M^T indica a transposta da matriz real M , bem como $M > (\geq) 0$ e $M < (\leq) 0$ indicam que M é uma matriz

simétrica e definida (semi-definida) positiva ou definida (semi-definida) negativa, respectivamente. Define-se o conjunto $\mathbb{I}_r = \{1, 2, \dots, r\}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Denota-se o conjunto das combinações convexas dos vetores a_i , $\forall i \in \mathbb{I}_r$, por $\text{co}\{a_1, \dots, a_r\}$, sendo assim, $\mathbf{a} \in \text{co}\{a_1, \dots, a_r\}$ se e somente se $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i$, $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$. $|z|$ representa o valor absoluto de um número real z e $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ denota a norma euclidina do vetor $x \in \mathfrak{R}^n$. $M_{(l)}$ representa a l -ésima linha de uma matriz M . $\text{diag}\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ denota uma matriz bloco-diagonal cujos elementos diagonais são M_1, M_2, \dots, M_n . ‘ $\arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{h_i\}$ ’ é a notação utilizada para representar o menor índice $j \in \mathbb{I}_r$ tal que, para o conjunto $\{h_1, \dots, h_r\}$, $h_j = \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{h_i\}$; por exemplo, dado um conjunto $H = \{h_1 = 3, h_2 = 1, h_3 = 6, h_4 = 3, h_5 = 1\}$, então $\arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{h_i\} = \min\{2, 5\} = 2$. I_q corresponde a uma matriz identidade de ordem $q \times q$. Utiliza-se \prod para representar o produtório entre elementos; por exemplo, seja o conjunto $\mathcal{P} = \{p_1, p_3, p_5\}$, então $\prod_{p_i \in \mathcal{P}} p_i = p_1 p_3 p_5$. O conjunto $\mathcal{E}(P, 1) \setminus \mathcal{E}(P, \delta_1)$ é formado pelos elementos $x(0)$ tais que $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ mas $x(0) \notin \mathcal{E}(P, \delta_1)$. Por simplicidade de notação utiliza-se $\alpha_i(\cdot) = \alpha_i$, $\mu_i(\cdot) = \mu_i$, $\varphi(\cdot) = \varphi$ e $\sigma(\cdot) = \sigma$.

2 MODELO FUZZY TAKAGI-SUGENO DE UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS

Neste capítulo apresenta-se brevemente a descrição exata de uma classe de sistemas não lineares incertos através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) incertos. Os modelos obtidos pelo procedimento descrito neste capítulo apresentam modelos locais conhecidos, embora suas funções de pertinência sejam incertas (dependem dos parâmetros incertos do sistema), e servem como base para as leis de controle propostas neste trabalho. Primeiramente são apresentados os modelo fuzzy T-S propostos por Takagi e Sugeno (1985). Em seguida é exposto o procedimento para a representação exata de uma classe de sistemas não lineares incertos por modelos fuzzy T-S (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM et al., 2012). Por fim, o procedimento descrito é utilizado na obtenção de modelos fuzzy T-S para um sistema bola-viga e para um levitador magnético, ambos com parâmetros incertos, sendo os modelos obtidos utilizados no projeto de controladores para estes sistemas em capítulos posteriores.

2.1 MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Os modelos fuzzy T-S foram introduzidos por Takagi e Sugeno (1985). Eles consistem em regras do tipo SE-ENTÃO, que descrevem localmente a dinâmica de um sistema, e no processo de inferência utilizado para calcular a saída do modelo. Uma regra i de um modelo fuzzy T-S pode ser descrita como

$$\begin{aligned} \text{Regra } i \text{ -- SE: } & \wp_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ e } \wp_2(t) \text{ é } \mathcal{M}_2^i \text{ e } \dots \text{ e } \wp_{n_p}(t) \text{ é } \mathcal{M}_{n_p}^i \\ \text{ENTÃO: } & \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

sendo $\wp_j(t)$, $j \in \mathbb{I}_{n_p}$, as variáveis premissas, \mathcal{M}_j^i o j -ésimo conjunto fuzzy na regra i . A proposição fuzzy ‘ $\wp_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ e } \wp_2(t) \text{ é } \mathcal{M}_2^i \text{ e } \dots \text{ e } \wp_{n_p}(t) \text{ é } \mathcal{M}_{n_p}^i$ ’ é o antecedente da regra e a dinâmica ‘ $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ e $y(t) = C_i x(t)$ ’ é o consequente da regra, sendo $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ o vetor de estado do sistema, $y(t) \in \mathfrak{R}^{n_y}$ a saída do modelo local, $u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}$ a entrada do sistema, $A_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_u}$, $C_i \in \mathfrak{R}^{n_y \times n_x}$. Os modelos locais utilizados como consequente podem variar, por exemplo, a saída do modelo local pode incluir matriz de transmissão direta.

O modelo fuzzy T-S completo é obtido através de um processo de inferência. O primeiro passo desse processo de inferência é calcular o grau de ativação de cada regra i a partir das variáveis de premissa. Sendo $\mathcal{M}_j^i(\wp_j(t)) \in [0, 1]$ o grau de pertinência da variável de premissa

$\wp_j(t)$ ao conjunto \mathcal{M}_j^i , o grau de ativação da i -ésima regra é calculada como

$$\mu_i(\wp(t)) = \mathcal{M}_1^i(\wp_1(t)) \times \mathcal{M}_2^i(\wp_2(t)) \times \cdots \times \mathcal{M}_{n_p}^i(\wp_{n_p}(t)), \quad (9)$$

sendo $\wp(t) = \left[\wp_1(t) \ \wp_2(t) \ \cdots \ \wp_{n_p}(t) \right]^T$ e ‘ \times ’ o operador de multiplicação. Assim $\mu_i(\wp(t)) \in [0, 1]$, pois $\mathcal{M}_j^i(\wp_j(t)) \in [0, 1] \ \forall j \in \mathbb{I}_{n_p}$.

Seja n_r o número de regras que compõe o sistema fuzzy T-S. A saída final do sistema fuzzy, que é uma representação da dinâmica da planta, é inferida como a soma ponderada dos n_r modelos locais, usando como ponderação o grau de ativação de cada regra. Assim, utilizando por conveniência de notação $\alpha(z(t)) = \alpha$, tem-se, para n_r regras do tipo (8), que a descrição completa do sistema fuzzy é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t), \end{aligned} \quad (10)$$

sendo $\alpha = \left[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_{n_r} \right]^T$, $\left[A(\alpha) \ B(\alpha) \ C(\alpha) \right] = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \left[A_i \ B_i \ C_i \right]$, α_i o grau de pertinência normalizado da regra i , calculado por

$$\alpha_i = \frac{\mu_i(\wp(t))}{\sum_{k=1}^{n_r} \mu_k(\wp(t))}. \quad (11)$$

A partir de (11) tem-se que $\alpha_i \geq 0$, pois $\mu_i(\wp(t)) \in [0, 1] \ \forall i \in \mathbb{I}_{n_r}$, e que $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$. Estas propriedades serão relevantes para as demonstrações dos teoremas.

2.2 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS ATRAVÉS DE MODELOS FUZZY T-S

O modelo fuzzy T-S apresentado na Seção 2.1 é uma importante ferramenta na descrição de sistemas não lineares. Esse tipo de modelo pode fornecer uma aproximação da dinâmica não linear (TEIXEIRA; ŽAK, 1999; GAO et al., 2012), ou até mesmo descrever o sistema de maneira exata, através de uma combinação convexa dos modelos locais, em uma região compacta do espaço de estados (TANIGUCHI et al., 2001). A modelagem exata é utilizada como base para os resultados deste trabalho e será descrita a seguir, considerando os métodos apresentados em Taniguchi et al. (2001) e Santim et al. (2012). Como será visto, essa metodologia permite obter a saída do sistema fuzzy (10) e suas funções de pertinência normalizadas (11) sem descrever as regras do modelo fuzzy T-S, e consequentemente, sem definir os conjuntos fuzzy do antecedente de cada regra fuzzy (8).

Considere uma classe de sistemas não lineares descrita por

$$\dot{x}(t) = A(z(t))x(t) + B(z(t))u(t), \quad (12)$$

sendo $z(t)^T = [x(t)^T \ v^T] \in \mathfrak{R}^{n_x+n_v}$, $x(t) = [x_1(t) \ \dots \ x_{n_x}(t)]^T \in \mathfrak{R}^{n_x}$ o vetor de estado e $v^T = [v_1 \ \dots \ v_{n_v}]^T \in \mathfrak{R}^{n_v}$ um vetor cujas componentes v_i são os parâmetros incertos de (12), $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_{n_u}(t)]^T \in \mathfrak{R}^{n_u}$ o vetor de controle, $A(z(t)) \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ e $B(z(t)) \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_u}$. Denota-se por $a_{ij}(z(t))$ e $b_{lk}(z(t))$ os elementos ij e lk de $A(z(t))$ e $B(z(t))$, respectivamente, podendo estes serem constantes ou funções lineares/não lineares contínuas de $z(t)$.

Para a manipulação dos elementos $a_{ij}(z(t))$ ou $b_{lk}(z(t))$ que não são constantes conhecidas (que dependem de $z(t)$), assume-se que o vetor de incertezas $v \in \mathcal{V} \subset \mathfrak{R}^{n_v}$, sendo \mathcal{V} um conjunto compacto, e que o sistema deva permanecer em uma região de operação descrita por um conjunto compacto no espaço de estados $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathfrak{R}^{n_x}$. O conjunto compacto considerado como região de operação será (KLUG et al., 2015; KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015)

$$\mathcal{X} \triangleq \{x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x} : |N_{(h)}x(t)| \leq \phi_h, \ h \in \mathbb{I}_{n_h}\}, \quad (13)$$

sendo $N = [N_{(1)}^T \ N_{(2)}^T \ \dots \ N_{(n_h)}^T]^T \in \mathfrak{R}^{n_h \times n_x}$ e $\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{n_h}]^T \in \mathfrak{R}^{n_h}$ conhecidos.

Defina o conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{X} \times \mathcal{V}$. Então, para os elementos $a_{ij}(z(t))$ e $b_{lk}(z(t))$ que são funções contínuas de $z(t)$ (isto é, não são constantes conhecidas), tem-se (SANTIM et al., 2012)

$$\begin{aligned} a_{ij}^1 &= \min_{z(t) \in \mathcal{S}} a_{ij}(z(t)) \leq a_{ij}(z(t)) \leq \max_{z(t) \in \mathcal{S}} a_{ij}(z(t)) = a_{ij}^2 \\ b_{lk}^1 &= \min_{z(t) \in \mathcal{S}} b_{lk}(z(t)) \leq b_{lk}(z(t)) \leq \max_{z(t) \in \mathcal{S}} b_{lk}(z(t)) = b_{lk}^2 \end{aligned}$$

e pode-se escrever

$$\begin{aligned} a_{ij}(z(t)) &= \sum_{\ell_{ij}^a=1}^2 \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) a_{ij}^{\ell_{ij}^a}, \quad a_{ij}^1 \leq a_{ij}(z(t)) \leq a_{ij}^2, \quad \sum_{\ell_{ij}^a=1}^2 \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) = 1, \quad \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) \geq 0 \quad (15a) \\ b_{lk}(z(t)) &= \sum_{\ell_{lk}^b=1}^2 \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) b_{lk}^{\ell_{lk}^b}, \quad b_{lk}^1 \leq b_{lk}(z(t)) \leq b_{lk}^2, \quad \sum_{\ell_{lk}^b=1}^2 \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) = 1, \quad \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) \geq 0, \end{aligned} \quad (15b)$$

sendo

$$\xi_{ij}^1(z(t)) = \frac{a_{ij}^2 - a_{ij}(z(t))}{a_{ij}^2 - a_{ij}^1}, \quad \xi_{ij}^2(z(t)) = \frac{a_{ij}(z(t)) - a_{ij}^1}{a_{ij}^2 - a_{ij}^1}, \quad (15c)$$

$$\zeta_{lk}^1(z(t)) = \frac{b_{lk}^2 - b_{lk}(z(t))}{b_{lk}^2 - b_{lk}^1}, \quad \zeta_{lk}^2(z(t)) = \frac{b_{lk}(z(t)) - b_{lk}^1}{b_{lk}^2 - b_{lk}^1}. \quad (15d)$$

Sejam os conjuntos de pares ordenados dados por $\mathcal{P}_A = \{(i,j) | a_{ij}(z(t)) \text{ é uma função contínua de } z(t) \text{ (não é uma constante conhecida) em } A(z(t)) \text{ de (12)}\}$ e $\mathcal{P}_B = \{(l,k) | b_{lk}(z(t)) \text{ é uma função contínua de } z(t) \text{ (não é uma constante conhecida) em } B(z(t)) \text{ de (12)}\}$. Defina as matrizes $\mathbb{A}_{ij} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ tais que seus respectivos elementos (i,j) sejam iguais a 1 e os outros sejam 0, e $\mathbb{B}_{lk} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_u}$ tais que seus respectivos elementos (l,k) sejam iguais a 1 e os outros sejam 0. Então o sistema (12) pode ser reescrito como

$$\dot{x}(t) = \left(\tilde{A} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} a_{ij}(z(t)) \mathbb{A}_{ij} \right) x(t) + \left(\tilde{B} + \sum_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} b_{lk}(z(t)) \mathbb{B}_{lk} \right) u(t), \quad (16)$$

sendo $\tilde{A} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ e $\tilde{B} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_u}$, matrizes cujos elementos (i,j) e (l,k) são os elementos constantes e conhecidos (independentes de $z(t)$) em $A(z(t))$ e $B(z(t))$ de (12), ou 0, caso $(i,j) \in \mathcal{P}_A$ ou $(l,k) \in \mathcal{P}_B$, respectivamente.

A partir de (15) e (16) chega-se em

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \left(\tilde{A} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} \left(\sum_{\ell_{ij}^a=1}^2 \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) a_{ij}^{\ell_{ij}^a} \right) \mathbb{A}_{ij} \right) x(t) \\ & + \left(\tilde{B} + \sum_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} \left(\sum_{\ell_{lk}^b=1}^2 \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) b_{lk}^{\ell_{lk}^b} \right) \mathbb{B}_{lk} \right) u(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Defina como fatores de agrupamento

$$\hat{\xi}_{ij} = \prod_{\substack{(p,q) \in \mathcal{P}_A \\ (p,q) \neq (i,j)}} [\xi_{pq}^1(z(t)) + \xi_{pq}^2(z(t))] \prod_{(r,s) \in \mathcal{P}_B} [\zeta_{rs}^1(z(t)) + \zeta_{rs}^2(z(t))] = 1 \quad (18a)$$

$$\hat{\zeta}_{lk} = \prod_{(p,q) \in \mathcal{P}_A} [\xi_{pq}^1(z(t)) + \xi_{pq}^2(z(t))] \prod_{\substack{(r,s) \in \mathcal{P}_B \\ (r,s) \neq (l,k)}} [\zeta_{rs}^1(z(t)) + \zeta_{rs}^2(z(t))] = 1 \quad (18b)$$

$$\psi = \prod_{(p,q) \in \mathcal{P}_A} [\xi_{pq}^1(z(t)) + \xi_{pq}^2(z(t))] \prod_{(r,s) \in \mathcal{P}_B} [\zeta_{rs}^1(z(t)) + \zeta_{rs}^2(z(t))] = 1. \quad (18c)$$

Dados (17) e (18), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \left(\psi \tilde{A} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} \hat{\xi}_{ij} \left(\sum_{\ell_{ij}^a=1}^2 \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) a_{ij}^{\ell_{ij}^a} \right) \mathbb{A}_{ij} \right) x(t) \\ & + \left(\psi \tilde{B} + \sum_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} \hat{\zeta}_{lk} \left(\sum_{\ell_{lk}^b=1}^2 \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) b_{lk}^{\ell_{lk}^b} \right) \mathbb{B}_{lk} \right) u(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Em (19) aparecem todas as combinações de $\prod_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) \prod_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t))$, $\ell_{ij}^a \in \mathbb{I}_2$

e $\ell_{lk}^b \in \mathbb{I}_2$. Com o objetivo de efetuar mudanças de variáveis convenientes, considere bijeções de contagem $c_A : \mathcal{P}_A \rightarrow \mathbb{I}_{n_A}$ e $c_B : \mathcal{P}_B \rightarrow \mathbb{I}_{n_B}$, sendo n_A e n_B os números de elementos $a_{ij}(z(t))$ e $b_{lk}(z(t))$ em (12), respectivamente, que são funções contínuas de $z(t)$ (não são constantes conhecidas). Para realizar uma mudança de variáveis, considere as combinações $\prod_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) \prod_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t))$ e os valores de ℓ_{ij}^a e ℓ_{lk}^b dispostos em uma tabela, como apresentado na Tabela 1. Nesta tabela os pares ordenados são tais que (l,k) e $(p,q) \in \mathcal{P}_B$ e pela contagem realizada foi definido que $c_B(p,q) = 1$ e $c_B(l,k) = n_B$, da mesma forma, (i,j) e $(r,s) \in \mathcal{P}_A$; $c_A(r,s) = 1$ e $c_A(i,j) = n_A$. Em outras palavras, foram inicialmente considerados todos os elementos pertencentes a \mathcal{P}_A e \mathcal{P}_B e, posteriormente, todas as combinações dos valores mínimos 1 e máximos 2 destes elementos, resultando em $2^{n_A+n_B}$ linhas na Tabela 1.

Note que na Tabela 1 as primeiras n_A colunas da direita para a esquerda correspondem a elementos de \mathcal{P}_A , assim como as colunas de ℓ_{lk}^b até ℓ_{pq}^b correspondem aos n_B elementos no conjunto \mathcal{P}_B . Além disso, a variável \varkappa , que funciona como índice dos modelos locais, é uma função dos valores de ℓ_{ij}^a e ℓ_{lk}^b , definida por

$$\varkappa = 1 + \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} 2^{(c_A(i,j)-1)} (\ell_{ij}^a - 1) + 2^{n_A} \sum_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} 2^{(c_B(l,k)-1)} (\ell_{lk}^b - 1). \quad (20)$$

Tabela 1 - Combinações para mudanças de variáveis.

| \varkappa | $\ell_{lk}^b c_B(l,k) = n_B$ | ... | $\ell_{pq}^b c_B(p,q) = 1$ | $\ell_{ij}^a c_A(i,j) = n_A$ | ... | $\ell_{rs}^a c_B(r,s) = 1$ |
|---------------|--------------------------------|-----|------------------------------|--------------------------------|-----|------------------------------|
| 1 | 1 | ... | 1 | 1 | ... | 1 |
| 2 | 1 | ... | 1 | 1 | ... | 2 |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 2^{n_A} | 1 | ... | 1 | 2 | ... | 2 |
| $1 + 2^{n_A}$ | 1 | ... | 2 | 1 | ... | 1 |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $2^{n_B+n_A}$ | 2 | ... | 2 | 2 | ... | 2 |

Fonte: próprio autor.

Por exemplo, seja $\mathcal{P}_A = \{(1,1), (1,2)\}$ e $\mathcal{P}_B = \{(1,1), (2,1)\}$, $c_A(1,1) = 1$, $c_A(1,2) = 2$, $c_B(1,1) = 1$ e $c_B(2,1) = 1$, $n_A = n_B = 2$, então a partir de (20)

$$\begin{aligned} \varkappa &= 1 + \left[2^{(c_A(1,1)-1)} (\ell_{11}^a - 1) + 2^{(c_A(1,2)-1)} (\ell_{12}^a - 1) \right] \\ &\quad + 2^2 \left[2^{(c_B(1,1)-1)} (\ell_{11}^b - 1) + 2^{(c_B(2,1)-1)} (\ell_{21}^b - 1) \right] \\ &= 1 + \left[2^{1-1} (\ell_{11}^a - 1) + 2^{2-1} (\ell_{12}^a - 1) \right] + 2^2 \left[2^{1-1} (\ell_{11}^b - 1) + 2^{2-1} (\ell_{21}^b - 1) \right] \\ &= 1 + [(\ell_{11}^a - 1) + 2(\ell_{12}^a - 1)] + 2^2 \left[(\ell_{11}^b - 1) + 2(\ell_{21}^b - 1) \right] \end{aligned}$$

e para a última linha da Tabela 1 tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= 1 + [(2-1) + 2(2-1)] + 2^2 [(2-1) + 2(2-1)] \\ &= 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16. \end{aligned}$$

Então para descrever (19) como (10), considere o índice \mathcal{N} e os valores de ℓ_{ij}^a e ℓ_{lk}^b correspondente a cada linha da Tabela 1 e utilize a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{N}}(z(t)) &= \prod_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) \prod_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) \\ A_{\mathcal{N}} &= \tilde{A} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} a_{ij}^{\ell_{ij}^a} \Delta_{ij} \\ B_{\mathcal{N}} &= \tilde{B} + \sum_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} b_{lk}^{\ell_{lk}^b} \mathbb{B}_{lk}. \end{aligned} \quad (21)$$

Observe que como $\xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) \geq 0$ e $\zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) \geq 0$ (15), tem-se que $\alpha_{\mathcal{N}}(z(t)) \geq 0$ (21). Além disso, a partir de (18), tem-se que

$$\sum_{\mathcal{N}=1}^{2^{(n_A+n_B)}} \alpha_{\mathcal{N}}(z(t)) = \sum_{\substack{\ell_{ij}^a \in \{1,2\} \\ \ell_{lk}^b \in \{1,2\}}} \left\{ \prod_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) \prod_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) \right\} = \psi = 1.$$

Note também que o índice \mathcal{N} na mudança de variáveis (21) pode ser diferente de acordo com a escolha das funções de contagem $c_A : \mathcal{P}_A \rightarrow \mathbb{I}_{n_A}$ e $c_B : \mathcal{P}_B \rightarrow \mathbb{I}_{n_B}$, mas sempre resulta no mesmo número de modelos locais, tendo as funções de pertinências as mesmas propriedades. No exemplo a seguir ilustra-se o procedimento descrito nesta seção para a representação de um sistema não linear incerto por um modelo fuzzy incerto (suas funções de pertinência são dependentes dos parâmetros incertos da planta).

Exemplo: seja um sistema não linear descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & a_{12}(z(t)) & a_{13}(z(t)) \\ 0 & a_{22}(z(t)) & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}(z(t)) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (22)$$

sendo $z(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ v_1 \ v_2]^T$, v_1 e v_2 os parâmetros incertos do sistema (22). Com os elementos constantes e conhecidos das matrizes de estado e de entrada de controle em (22), e zerando os demais elementos, definem-se

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Admite-se que, durante a operação da planta (22), o vetor de estado do sistema $x(t) \in \mathcal{X}$ e que $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T \in \mathcal{V}$, $\mathcal{X} \in \mathfrak{R}^3$ e $\mathcal{V} \in \mathfrak{R}^2$ conjuntos compactos e conhecidos. Assim, define-se $\mathcal{S} = \mathcal{X} \times \mathcal{V}$ e encontram-se os máximos e mínimos das não linearidades e incertezas de (22) como segue

$$\begin{aligned} a_{12}^1 &= \min_{z(t) \in \mathcal{S}} a_{12}(z(t)) \leq a_{12}(z(t)) \leq \max_{z(t) \in \mathcal{S}} a_{12}(z(t)) = a_{12}^2, \\ a_{13}^1 &= \min_{z(t) \in \mathcal{S}} a_{13}(z(t)) \leq a_{13}(z(t)) \leq \max_{z(t) \in \mathcal{S}} a_{13}(z(t)) = a_{13}^2, \\ a_{22}^1 &= \min_{z(t) \in \mathcal{S}} a_{22}(z(t)) \leq a_{22}(z(t)) \leq \max_{z(t) \in \mathcal{S}} a_{22}(z(t)) = a_{22}^2, \\ b_{11}^1 &= \min_{z(t) \in \mathcal{S}} b_{11}(z(t)) \leq b_{11}(z(t)) \leq \max_{z(t) \in \mathcal{S}} b_{11}(z(t)) = b_{11}^2 \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} a_{12}(z(t)) &= \sum_{\ell_{12}^a=1}^2 \xi_{12}^{\ell_{12}^a}(z(t)) a_{12}^{\ell_{12}^a}, \quad \sum_{\ell_{12}^a=1}^2 \xi_{12}^{\ell_{12}^a}(z(t)) = 1, \quad \xi_{12}^{\ell_{12}^a}(z(t)) \geq 0, \\ a_{13}(z(t)) &= \sum_{\ell_{13}^a=1}^2 \xi_{13}^{\ell_{13}^a}(z(t)) a_{13}^{\ell_{13}^a}, \quad \sum_{\ell_{13}^a=1}^2 \xi_{13}^{\ell_{13}^a}(z(t)) = 1, \quad \xi_{13}^{\ell_{13}^a}(z(t)) \geq 0, \\ a_{22}(z(t)) &= \sum_{\ell_{22}^a=1}^2 \xi_{22}^{\ell_{22}^a}(z(t)) a_{22}^{\ell_{22}^a}, \quad \sum_{\ell_{22}^a=1}^2 \xi_{22}^{\ell_{22}^a}(z(t)) = 1, \quad \xi_{22}^{\ell_{22}^a}(z(t)) \geq 0, \\ b_{11}(z(t)) &= \sum_{\ell_{11}^b=1}^2 \zeta_{11}^{\ell_{11}^b}(z(t)) b_{11}^{\ell_{11}^b}, \quad \sum_{\ell_{11}^b=1}^2 \zeta_{11}^{\ell_{11}^b}(z(t)) = 1, \quad \zeta_{11}^{\ell_{11}^b}(z(t)) \geq 0, \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \xi_{12}^1(z(t)) &= \frac{a_{12}^2 - a_{12}(z(t))}{a_{12}^2 - a_{12}^1}, & \xi_{12}^2(z(t)) &= \frac{a_{12}(z(t)) - a_{12}^1}{a_{12}^2 - a_{12}^1}, \\ \xi_{13}^1(z(t)) &= \frac{a_{13}^2 - a_{13}(z(t))}{a_{13}^2 - a_{13}^1}, & \xi_{13}^2(z(t)) &= \frac{a_{13}(z(t)) - a_{13}^1}{a_{13}^2 - a_{13}^1}, \\ \xi_{22}^1(z(t)) &= \frac{a_{22}^2 - a_{22}(z(t))}{a_{22}^2 - a_{22}^1}, & \xi_{22}^2(z(t)) &= \frac{a_{22}(z(t)) - a_{22}^1}{a_{22}^2 - a_{22}^1}, \\ \zeta_{11}^1(z(t)) &= \frac{b_{11}^2 - b_{11}(z(t))}{b_{11}^2 - b_{11}^1}, & \zeta_{11}^2(z(t)) &= \frac{b_{11}(z(t)) - b_{11}^1}{b_{11}^2 - b_{11}^1}. \end{aligned}$$

Considerando a dinâmica (22), tem-se os conjuntos de pares ordenados correspondentes aos elementos não constantes e conhecidos deste sistema, $a_{12}(z(t))$, $a_{13}(z(t))$, $a_{22}(z(t))$ e $b_{11}(z(t))$, dados por: $\mathcal{P}_A = \{(1,2), (1,3), (2,2)\}$ e $\mathcal{P}_B = \{(1,1)\}$. Então $n_A = 3$ e $n_B = 1$ e pode-se definir as bijeções de contagem $c_A(\cdot)$ e $c_B(\cdot)$ como: $c_A(1,2) = 1$, $c_A(1,3) = 2$ e $c_A(2,2) = 3$; $c_B(1,1) = 1$. Deste modo, a tabela para mudança de variáveis correspondente a este exemplo fica como disposto na Tabela 2.

Tabela 2 - Exemplo de combinações para mudanças de variáveis.

| n | ℓ_{11}^b | ℓ_{22}^a | ℓ_{13}^a | ℓ_{12}^a |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 7 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 8 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 9 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 11 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 12 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 13 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 14 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 15 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 16 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Fonte: próprio autor.

Observe que o índice n em cada linha da Tabela 2 é calculado, utilizando (20), como

$$\begin{aligned}
n &= 1 + \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} 2^{(c_A(i,j)-1)} (\ell_{ij}^a - 1) + 2^{n_A} \sum_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} 2^{(c_B(l,k)-1)} (\ell_{lk}^b - 1) \\
&= 1 + \left[2^{(c_A(1,2)-1)} (\ell_{12}^a - 1) + 2^{(c_A(1,3)-1)} (\ell_{13}^a - 1) + 2^{(c_A(2,2)-1)} (\ell_{22}^a - 1) \right] \\
&\quad + 2^3 \left[2^{(c_B(1,1)-1)} (\ell_{11}^b - 1) \right] \\
&= 1 + \left[2^{(1-1)} (\ell_{12}^a - 1) + 2^{(2-1)} (\ell_{13}^a - 1) + 2^{(3-1)} (\ell_{22}^a - 1) \right] + 2^3 \left[2^{(1-1)} (\ell_{11}^b - 1) \right] \\
&= 1 + [(\ell_{12}^a - 1) + 2(\ell_{13}^a - 1) + 4(\ell_{22}^a - 1)] + 8(\ell_{11}^b - 1) \tag{26}
\end{aligned}$$

e para a primeira linha da tabela, usando (26), tem-se

$$n = 1 + [(1 - 1) + 2(1 - 1) + 4(1 - 1)] + 8(1 - 1) = 1.$$

Analogamente, a partir de (26), para a segunda linha da tabela tem-se

$$n = 1 + [(2 - 1) + 2(1 - 1) + 4(1 - 1)] + 8(1 - 1) = 2$$

e assim por diante.

Os modelos locais do sistema fuzzy T-S incerto, que exatamente descreve a dinâmica (22) em \mathcal{S} através de uma combinação convexa, são obtidos utilizando (21), (23) e as linhas 1 até 16

da Tabela 2. Com isto, utilizando a linha $n = 1$ tem-se

$$\begin{aligned}
A_1 &= \tilde{A} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} a_{ij}^{\ell_{ij}^a} \mathbb{A}_{ij} = \tilde{A} + a_{12}^1 \mathbb{A}_{12} + a_{13}^1 \mathbb{A}_{13} + a_{22}^1 \mathbb{A}_{22} \\
&= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}^1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{13}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10 & a_{12}^1 & a_{13}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \\
B_1 &= \tilde{B} + \sum_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} b_{lk}^{\ell_{lk}^b} \mathbb{B}_{lk} = \tilde{B} + b_{11}^1 \mathbb{B}_{11} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_{11}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11}^1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

sendo os demais modelos locais, de 2 até 16, obtidos pela mesma regra e seguindo as demais linhas da Tabela 2.

Para determinar as funções de pertinência normalizadas incertas, pois dependem dos parâmetros incertos da planta (22), utiliza-se (21), e assim

$$\begin{aligned}
\alpha_n(z(t)) &= \prod_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) \prod_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) \\
&= \xi_{12}^{\ell_{12}^a}(z(t)) \xi_{13}^{\ell_{13}^a}(z(t)) \xi_{22}^{\ell_{22}^a}(z(t)) \zeta_{11}^{\ell_{11}^b}(z(t)), \tag{27}
\end{aligned}$$

resultando, para as duas primeiras linhas da Tabela 2, que

$$\begin{aligned}
\alpha_1(z(t)) &= \xi_{12}^1(z(t)) \xi_{13}^1(z(t)) \xi_{22}^1(z(t)) \zeta_{11}^1(z(t)), \\
\alpha_2(z(t)) &= \xi_{12}^2(z(t)) \xi_{13}^1(z(t)) \xi_{22}^1(z(t)) \zeta_{11}^1(z(t)),
\end{aligned}$$

sendo as demais funções de pertinência normalizadas, de α_3 até α_{16} , calculadas de maneira análoga, seguindo as linhas da Tabela 2 e a regra dada em (27).

Observe que as funções de pertinência normalizadas $\alpha_n(z(t))$ (27), $n \in \mathbb{I}_{16}$, dependem dos parâmetros incertos v_1 e v_2 do sistema (22) e por esta razão não estão disponíveis para compor o sinal de controle.

2.3 EXEMPLOS

Nesta seção exemplifica-se o procedimento para a obtenção de um modelo fuzzy T-S que descreve exatamente o comportamento de um sistema não linear incerto, apresentado na seção anterior. As descrições obtidas a seguir são utilizadas no projeto do controle chaveado e chaveado suave descritos nos Capítulos 3 e 5, respectivamente. O modelo do sistema bola-viga também é utilizado no Capítulo 6, no qual projetam-se controladores considerando uma classe de distúrbios não casados na dinâmica deste sistema.

2.3.1 Descrição em modelo fuzzy T-S de um sistema bola-viga

A dinâmica do sistema bola-viga, representado na Figura 2, tem modelo matemático (MARQUEZ, 2003, p. 26) dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23}(z(t)) & a_{24}(z(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (28a)$$

sendo $z(t)^T = [x(t)^T \quad v^T]$, o vetor de estado $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t)]^T$ no qual $x_1(t) = r(t) - v_2$ é a diferença entre a posição da bola $r(t)$ e a posição desejada v_2 , medida em metros (a posição desejada é incerta e pertencente a um intervalo conhecido). Para lidar com esta situação valeu-se de procedimento análogo ao procedimento apresentado em Santim et al. (2012) para um levitador magnético. $x_2(t) = \dot{r}(t)$ é a velocidade linear da bola, medida em metros por segundo, $x_3(t) = \theta(t)$ é o ângulo da viga, medido radianos, e $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$ é a velocidade angular da viga, medida em radianos por segundo, $v_1 = mr^2/(J_b + mr^2)$ é um parâmetro incerto que depende do raio r , da massa m , e da inércia J_b da bola e $u(t)$ é o torque aplicado na viga. $v = [v_1 \quad v_2]^T$ é o vetor de parâmetros incertos. As funções não lineares em (28a) são

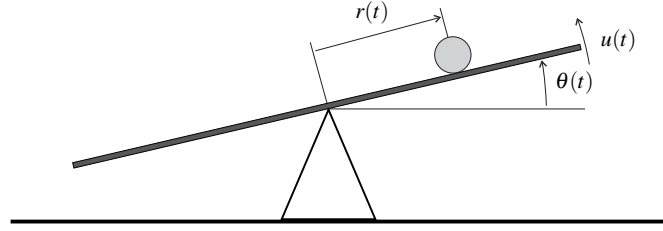
$$a_{23}(z(t)) = \frac{-v_1 g \sin(x_3(t))}{x_3(t)}, \quad a_{24}(z(t)) = v_1 x_1(t) x_4(t), \quad (28b)$$

com $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ sendo a aceleração da gravidade.

Considere que durante a operação do sistema é exigido que $x(t) \in \mathcal{X}$ em (13), sendo estipulados $n_h = 4$, $N = I_4$, a matriz identidade de ordem 4, e $\phi = [1,5 \quad 2 \quad \pi/6 \quad 2]^T$. Seja $v \in \mathcal{V} = \{0,65 \leq v_1 \leq 0,75, -0,4 \leq v_2 \leq 0,4\}$. Então, para o vetor $z(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t) \quad v_1 \quad v_2]^T$, define-se $\mathcal{S} = \mathcal{X} \times \mathcal{V}$ como

$$\mathcal{S} = \left\{ z(t) \in \mathfrak{R}^6 : -1,5 \leq x_1(t) \leq 1,5, -2 \leq x_2(t) \leq 2, -\frac{\pi}{6} \leq x_3(t) \leq \frac{\pi}{6}, \right.$$

Figura 2 - Ilustração do sistema bola-viga.



Fonte: adaptado de Marquez (2003).

$$-2 \leq x_4(t) \leq 2, 0,65 \leq v_1 \leq 0,75, -0,4 \leq v_2 \leq 0,4\}. \quad (29)$$

Para $z(t) \in \mathcal{S}$ dado em (29), a partir de (28b), encontra-se

$$a_{23}^1 = -7,3575 \leq a_{23}(z(t)) \leq -6,0891 = a_{23}^2, \quad a_{24}^1 = -2,85 \leq a_{24}(z(t)) \leq 2,85 = a_{24}^2$$

e a partir de (15) pode-se escrever

$$a_{23}(z(t)) = \xi_{23}^1(z(t))a_{23}^1 + \xi_{23}^2(z(t))a_{23}^2, \quad a_{24}(z(t)) = \xi_{24}^1(z(t))a_{24}^1 + \xi_{24}^2(z(t))a_{24}^2, \quad (30a)$$

sendo

$$\xi_{23}^1(z(t)) = \frac{a_{23}^2 - a_{23}(z(t))}{a_{23}^2 - a_{23}^1}, \quad \xi_{23}^2(z(t)) = \frac{a_{23}(z(t)) - a_{23}^1}{a_{23}^2 - a_{23}^1}, \quad (30b)$$

$$\xi_{24}^1(z(t)) = \frac{a_{24}^2 - a_{24}(z(t))}{a_{24}^2 - a_{24}^1}, \quad \xi_{24}^2(z(t)) = \frac{a_{24}(z(t)) - a_{24}^1}{a_{24}^2 - a_{24}^1}, \quad (30c)$$

e tendo como propriedades $\sum_{\ell_{ij}^a=1}^2 \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) = 1, \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) \geq 0 \forall (i,j) \in \mathcal{P}_A = \{(2,3), (2,4)\}$.

Observe que, neste exemplo, $\mathcal{P}_B = \emptyset$.

A partir de (18) tem-se os seguintes fatores de agrupamento:

$$\hat{\xi}_{23} = [\xi_{24}^1(z(t)) + \xi_{24}^2(z(t))] = 1 \quad (31a)$$

$$\hat{\xi}_{22} = [\xi_{23}^1(z(t)) + \xi_{23}^2(z(t))] = 1 \quad (31b)$$

$$\psi = [\xi_{23}^1(z(t)) + \xi_{23}^2(z(t))][\xi_{24}^1(z(t)) + \xi_{24}^2(z(t))] = 1. \quad (31c)$$

Então, como apresentado em (19), pode-se reescrever (28) da seguinte maneira

$$\dot{x}(t) = \left(\psi \tilde{A} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} \hat{\xi}_{ij} \left(\sum_{\ell_{ij}^a=1}^2 \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) a_{ij}^{\ell_{ij}^a} \right) \mathbb{A}_{ij} \right) x(t) + \psi \tilde{B} u(t), \quad (32)$$

sendo $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Definindo a função de contagem $c_A(\cdot)$ como: $c_A(2,3) = 1$ e $c_A(2,4) = 2$ e fazendo a seguinte mudança de variáveis, como sugerido em (21),

$$\begin{aligned}\alpha_1(z(t)) &= \xi_{24}^1(z(t))\xi_{23}^1(z(t)), & \alpha_2(z(t)) &= \xi_{24}^1(z(t))\xi_{23}^2(z(t)), \\ \alpha_3(z(t)) &= \xi_{24}^2(z(t))\xi_{23}^1(z(t)), & \alpha_4(z(t)) &= \xi_{24}^2(z(t))\xi_{23}^2(z(t)),\end{aligned}\quad (33)$$

chega-se no modelo descrito em (10), sendo $n_r = 4$, $n_x = 4$, $n_u = 1$ e matrizes A_i e B_i , $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, como segue:

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7,3575 & -2,85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,0891 & -2,85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7,3575 & 2,85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,0891 & 2,85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{e } B_1 &= B_2 = B_3 = B_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.\end{aligned}\quad (34)$$

2.3.2 Descrição em modelo fuzzy T-S de um levitador magnético

Seja um levitador magnético cujo esquemático é apresentado na Figura 3. A dinâmica deste sistema é descrita por (MARQUEZ, 2003; ALVES et al., 2016c)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21}(z(t)) & a_{22}(z(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21}(z(t)) \end{bmatrix} u(t), \quad (35a)$$

sendo

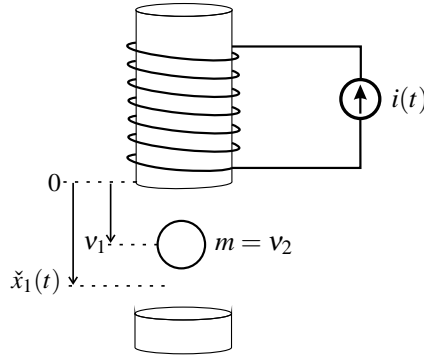
$$a_{21}(z(t)) = \frac{g\zeta(\zeta x_1(t) + 2\zeta v_1 + 2)}{(1 + \zeta(x_1(t) + v_1))^2}, \quad a_{22}(z(t)) = -\frac{\tau}{v_2}, \quad b_{21}(z(t)) = \frac{-\vartheta\zeta}{2v_2(1 + \zeta(x_1(t) + v_1))^2}, \quad (35b)$$

$z(t)^T = [x(t)^T \ v^T]$, $x(t)^T = [x_1(t) \ x_2(t)]$, $x_1(t) = \check{x}_1(t) - v_1$ a diferença entre a posição da bola: $\check{x}_1(t)$, e a posição desejada para a bola: v_1 (incerta), ambas medidas em metros; e $x_2(t)$ a velocidade da bola, medida em metros por segundo. Os parâmetros são $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ a aceleração da gravidade, $\vartheta = 0,460 \text{ H}$, $\zeta = 2 \text{ m}^{-1}$, $\tau = 0,001 \text{ Ns/m}$ e v_2 é a massa da bola (medida em kg), que é incerta. Define-se o vetor de incertezas $v^T = [v_1 \ v_2]$. O sinal de controle é $u(t) = i(t)^2 - i_0(v)^2$, sendo $i(t)$ a corrente elétrica e $i_0(v)$ a corrente necessária para manter a bola em uma posição desejada v_1 , tal que

$$i_0(v)^2 = \frac{2v_2g}{\vartheta\zeta} (1 + \zeta v_1)^2. \quad (36)$$

Suponha que a região de operação, dada como uma restrição de projeto, seja dada em (13),

Figura 3 - Sistema levitador magnético.



Fonte: adaptado de Marquez (2003).

sendo $N = I_2$, a matriz identidade de ordem 2, $\phi = [0,11 \quad 1,5]^T$, e que o vetor de parâmetros incertos $v \in \mathcal{V} = \{v \in \mathfrak{R}^2 : 0,05 \leq v_1 \leq 0,1, 0,05 \leq v_2 \leq 0,1\}$. Então, define-se $z(t)^T = [x(t)^T \quad v^T]$ e o conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{X} \times \mathcal{V}$ como

$$\mathcal{S} = \{z(t) \in \mathfrak{R}^4 : -0,11 \leq x_1(t) \leq 0,11, -1,5 \leq x_2(t) \leq 1,5, 0,05 \leq v_1 \leq 0,1, 0,05 \leq v_2 \leq 0,1\}. \quad (37)$$

Admitindo que $z(t) \in \mathcal{S}$ em (37), a partir de (35b) e (36), encontra-se

$$\begin{aligned} a_{21}^1 &= 25,4672 \leq a_{21}(z) \leq 50,1136 = a_{21}^2, & a_{22}^1 &= -0,02 \leq a_{22}(z) \leq -0,01 = a_{22}^2, \\ b_{21}^1 &= -11,8802 \leq b_{21}(z) \leq -2,2813 = b_{21}^2, & 1,2889 &\leq i_0(z)^2 \leq 3,0678. \end{aligned} \quad (38)$$

e a partir de (15) pode-se escrever

$$a_{21}(z(t)) = \xi_{21}^1(z(t))a_{21}^1 + \xi_{21}^2(z(t))a_{21}^2, \quad a_{22}(z(t)) = \xi_{22}^1(z(t))a_{22}^1 + \xi_{22}^2(z(t))a_{22}^2, \quad (39a)$$

$$b_{21}(z(t)) = \zeta_{21}^1(z(t))b_{21}^1 + \zeta_{21}^2(z(t))b_{21}^2, \quad (39b)$$

sendo

$$\xi_{21}^1(x(t)) = \frac{a_{21}^2 - a_{21}(z(t))}{a_{21}^2 - a_{21}^1}, \quad \xi_{21}^2(z(t)) = \frac{a_{21}(z(t)) - a_{21}^1}{a_{21}^2 - a_{21}^1}, \quad (39c)$$

$$\xi_{22}^1(z(t)) = \frac{a_{22}^2 - a_{22}(z(t))}{a_{22}^2 - a_{22}^1}, \quad \xi_{22}^2(z(t)) = \frac{a_{22}(z(t)) - a_{22}^1}{a_{22}^2 - a_{22}^1}, \quad (39d)$$

$$\zeta_{21}^1(z(t)) = \frac{b_{21}^2 - b_{21}(z(t))}{b_{21}^2 - b_{21}^1}, \quad \zeta_{21}^2(z(t)) = \frac{b_{21}(z(t)) - b_{21}^1}{b_{21}^2 - b_{21}^1}, \quad (39e)$$

e assim $\sum_{\ell_{ij}^a=1}^2 \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) = 1$, $\xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) \geq 0 \forall (i,j) \in \mathcal{P}_A = \{(2,1), (2,2)\}$ e $\sum_{\ell_{lk}^b=1}^2 \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) = 1$, $\zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) \geq 0 \forall (l,k) \in \mathcal{P}_B = \{(2,1)\}$.

Considerando (18) e (39) tem-se os seguintes fatores de agrupamento:

$$\hat{\xi}_{21} = [\xi_{22}^1(z(t)) + \xi_{22}^2(z(t))] \times [\zeta_{21}^1(z(t)) + \zeta_{21}^2(z(t))] = 1 \quad (40a)$$

$$\hat{\xi}_{22} = [\xi_{21}^1(z(t)) + \xi_{21}^2(z(t))] \times [\zeta_{21}^1(z(t)) + \zeta_{21}^2(z(t))] = 1 \quad (40b)$$

$$\hat{\zeta}_{21} = [\xi_{21}^1(z(t)) + \xi_{21}^2(z(t))] \times [\xi_{22}^1(z(t)) + \xi_{22}^2(z(t))] = 1 \quad (40c)$$

$$\psi = [\xi_{21}^1(z(t)) + \xi_{21}^2(z(t))] \times [\xi_{22}^1(z(t)) + \xi_{22}^2(z(t))] \times [\zeta_{21}^1(z(t)) + \zeta_{21}^2(z(t))] = 1. \quad (40d)$$

Então, como apresentado em (19), pode-se reescrever (35) como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \left(\psi \tilde{A} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} \hat{\xi}_{ij} \left(\sum_{\ell_{ij}^a=1}^2 \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) a_{ij}^{\ell_{ij}^a} \right) \mathbb{A}_{ij} \right) x(t) \\ & + \left(\psi \tilde{B} + \sum_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} \hat{\zeta}_{lk} \left(\sum_{\ell_{lk}^b=1}^2 \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) b_{lk}^{\ell_{lk}^b} \right) \mathbb{B}_{lk} \right) u(t). \end{aligned} \quad (41)$$

sendo $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Definindo as funções de contagem $c_A(\cdot)$ e $c_B(\cdot)$ como: $c_A(2,1) = 1$ e $c_A(2,2) = 2$; $c_B(2,1) = 1$, é possível fazer a seguinte mudança de variáveis, como sugerido em (21),

$$\begin{aligned} \alpha_1(z(t)) &= \zeta_{21}^1(z(t)) \xi_{22}^1(z(t)) \xi_{21}^1(z(t)), & \alpha_2(z(t)) &= \zeta_{21}^1(z(t)) \xi_{22}^1(z(t)) \xi_{21}^2(z(t)), \\ \alpha_3(z(t)) &= \zeta_{21}^1(z(t)) \xi_{22}^2(z(t)) \xi_{21}^1(z(t)), & \alpha_4(z(t)) &= \zeta_{21}^1(z(t)) \xi_{22}^2(z(t)) \xi_{21}^2(z(t)), \\ \alpha_5(z(t)) &= \zeta_{21}^2(z(t)) \xi_{22}^1(z(t)) \xi_{21}^1(z(t)), & \alpha_6(z(t)) &= \zeta_{21}^2(z(t)) \xi_{22}^1(z(t)) \xi_{21}^2(z(t)), \\ \alpha_7(z(t)) &= \zeta_{21}^2(z(t)) \xi_{22}^2(z(t)) \xi_{21}^1(z(t)), & \alpha_8(z(t)) &= \zeta_{21}^2(z(t)) \xi_{22}^2(z(t)) \xi_{21}^2(z(t)), \end{aligned} \quad (42)$$

e chega-se no modelo (10), sendo $n_r = 8$, $n_x = 2$, $n_u = 1$ e matrizes A_i e B_i , $i \in \mathbb{I}_{n_r}$,

$$\begin{aligned} A_1 = A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 25,4672 & -0,02 \end{bmatrix}, & A_2 = A_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 25,4672 & -0,01 \end{bmatrix}, \\ A_3 = A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 50,1136 & -0,02 \end{bmatrix}, & A_4 = A_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 50,1136 & -0,01 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_2 = B_3 = B_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -11,8802 \end{bmatrix}, & B_5 = B_6 = B_7 = B_8 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2,2813 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (43)$$

Observação 1. *Importante notar que, neste exemplo, a partir de (35) $B(\alpha) = B_0 g(z(t))$, sendo $B_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ e $g(z(t)) = \frac{\vartheta \varsigma}{2v_2(1 + \varsigma(x_1(t) + v_1))} > 0$ para todo $z(t) \in \mathcal{S}$, $z(t) \neq 0$. Define-se $g_0 = \max_{z(t) \in \mathcal{S}} \{g(z(t))\} = 11,8802$.*

2.4 COMENTÁRIOS

O procedimento descrito neste capítulo permite a representação de sistemas não lineares incertos através de modelos fuzzy T-S incertos, que possuem funções de pertinência dependentes dos parâmetros incertos do sistema, mas com modelos locais conhecidos (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM et al., 2012). Quando o vetor de estado do sistema está na região de operação estabelecida e os parâmetros incertos estão nas faixas de valores estipuladas, a descrição exata é dada pela combinação convexa dos modelos locais. Como as funções de pertinência obtidas podem ser incertas, elas não estão disponíveis ao controlador e não podem ser usadas diretamente na lei de controle. Este cenário, entretanto, é adequado ao uso da lei de controle chaveada (SOUZA et al., 2014c; SOUZA et al., 2014b), que não utiliza as funções de pertinência do modelo fuzzy na composição do sinal de controle.

Os modelos fuzzy T-S incertos obtidos para o sistema bola-viga e também para o levitador magnético serão utilizados nas Seções 3.3 e 5.4 para a demonstração da eficiência das leis de realimentação chaveada e chaveada suave.

3 CONTROLE CHAVEADO SUJEITO À SATURAÇÃO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS USANDO MODELOS FUZZY T-S

Neste capítulo estende-se o projeto de controle chaveado apresentado em Souza et al. (2014c) e Souza et al. (2014b), considerando a região de operação em que o sistema não linear deve operar e a possibilidade de saturação no sinal de controle. Inicialmente são apresentados alguns conceitos preliminares necessários ao desenvolvimento da teoria e em seguida os resultados principais e exemplos de aplicação desta lei de controle nos sistemas bola-viga e levitador magnético, já modelados através de sistemas fuzzy T-S incertos na Subseção 2.3.

3.1 CONCEITOS INICIAIS

Sejam matrizes $H_k = \begin{bmatrix} H_{k(1)}^T & H_{k(2)}^T & \cdots & H_{k(n_u)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$, $k \in \mathbb{I}_{n_r}$, uma matriz definida positiva $P = P^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, um vetor conhecido $\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n_u} \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $\rho_l > 0$, $l \in \mathbb{I}_{n_u}$, e um escalar $\delta > 0$ também conhecido. Definem-se os conjuntos $\mathcal{L}(H_k)$ e $\mathcal{E}(P, \delta)$ como segue (HU; LIN; CHEN, 2002a; CAO; LIN, 2003):

$$\mathcal{L}(H_k) \triangleq \{x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x} : |H_{k(l)}x(t)| \leq \rho_l, l \in \mathbb{I}_{n_u}, k \in \mathbb{I}_{n_r}\}, \quad (44)$$

$$\mathcal{E}(P, \delta) \triangleq \{x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x} : x(t)^T P x(t) \leq \delta\}. \quad (45)$$

Define-se o conjunto de matrizes \mathcal{D} como (HU; LIN; CHEN, 2002a; CAO; LIN, 2003)

$$\mathcal{D} \triangleq \{D \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_u} : d_{ii} = 0 \text{ ou } 1 \text{ e } d_{ij} = 0 \forall i \neq j\}, \quad (46)$$

sendo d_{ij} , $\forall (i, j) \in \mathbb{I}_{n_u} \times \mathbb{I}_{n_u}$, os elementos da matriz D . Assim, o conjunto \mathcal{D} em (46) possui 2^{n_u} matrizes. As matrizes que compõem este conjunto serão denominadas D_s , $s \in \mathbb{I}_{2^{n_u}}$. Por exemplo, para $n_u = 2$, tem-se $\mathcal{D} = \{D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$.

Baseado em Boyd et al. (1994), Hu, Lin e Chen (2002a), em Alves et al. (2016c) é enunciado o lema que se segue, fornecendo uma condição suficiente tal que, se satisfeita, assegura $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k)$.

Lema 1 (ALVES et al., 2016c). *Dados os conjuntos $\mathcal{E}(P, \delta)$ em (45) e $\mathcal{L}(H_k)$ em (44). A condição $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k)$ é assegurada se*

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 \delta^{-1} & G_{k(l)} \\ G_{k(l)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (47)$$

for satisfeita para todo $(k,l) \in \mathbb{I}_{n_r} \times \mathbb{I}_{n_u}$, sendo $X = P^{-1}$ e $G_{k(l)} = H_{k(l)}X$.

Demonstração. Pré- e pós-multiplicando (47) por $\text{diag}\{1, P\}$, sendo $P^T = P = X^{-1}$, e aplicando o complemento de Schur com respeito a primeira linha e coluna, encontra-se

$$\begin{aligned} P - H_{k(l)}^T \rho_l^{-2} \delta H_{k(l)} &\geq 0, \\ P &\geq H_{k(l)}^T \rho_l^{-2} \delta H_{k(l)}, \\ x(t)^T P x(t) &\geq x(t)^T H_{k(l)}^T \rho_l^{-2} \delta H_{k(l)} x(t). \end{aligned} \quad (48)$$

Considerando $x(t) \in \mathcal{E}(P, \delta)$ tem-se $x(t)^T P x(t) \leq \delta$ e assim

$$\begin{aligned} \delta &\geq x(t)^T P x(t) \geq \rho_l^{-2} \delta x(t)^T H_{k(l)}^T H_{k(l)} x(t), \\ \rho_l^2 &\geq x(t)^T H_{k(l)}^T H_{k(l)} x(t). \end{aligned} \quad (49)$$

Portanto $x(t) \in \mathcal{L}(H_k)$ e, conseqüentemente, $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k)$. \square

3.1.1 Descrição da saturação do sinal de controle por uma combinação convexa

Nesta subseção apresenta-se uma interpretação da descrição da saturação do sinal de controle por uma combinação convexa. Esta descrição utiliza os conjuntos \mathcal{D} em (46) e $\mathcal{L}(H_k)$ em (44), tendo sido apresentada em Hu, Lin e Chen (2002a), Hu, Lin e Chen (2002b) e Cao e Lin (2003).

Admita um sinal de controle $u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}$. Então a saturação do sinal de controle é dada por

$$\text{sat}(u(t)) = \left[\text{sat}_1(u_1(t)) \quad \cdots \quad \text{sat}_{n_u}(u_{n_u}(t)) \right]^T, \quad (50a)$$

$$\text{sat}_l(u_l(t)) = \text{sgn}(u_l(t)) \min\{\rho_l, |u_l(t)|\}, \quad (50b)$$

sendo $\rho_l > 0$, $\forall l \in \mathbb{I}_{n_u}$, um valor conhecido. Uma componente $\text{sat}_l(u_l(t))$ da saturação no sinal de controle, descrita por (50b), é ilustrada na Figura 4. De (50b) e da Figura 4 observa-se que

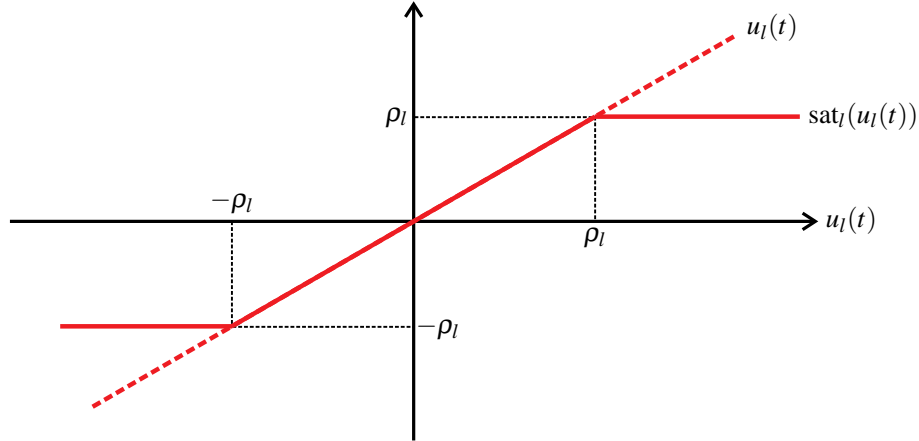
$$\text{sat}_l(u_l(t)) \leq u_l(t), \quad u_l(t) \geq 0 \quad \text{e} \quad \text{sat}_l(u_l(t)) \geq u_l(t), \quad u_l(t) < 0. \quad (51)$$

Observação 2. Para todo $x(t) \in \mathcal{L}(H)$ e para cada componente $\text{sat}_l(u_l(t))$ descrita em (50b) do vetor $\text{sat}(u(t))$ em (50a) tem-se que

$$\text{sat}_l(u_l(t)) = \theta_{l1}(t)u_l(t) + \theta_{l2}(t)H_{(l)}x(t), \quad \sum_{i=1}^2 \theta_{li}(t) = 1, \quad \theta_{li}(t) \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (52)$$

Demonstração. Considere o conjunto $\mathcal{L}(H)$ definido como em (44), sendo $H_k = H \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$, ou seja, uma única matriz H ; e uma componente $\text{sat}_l(u_l(t))$ dada por (50b). O ponto chave

Figura 4 - Representação de $\text{sat}_l(u_l(t))$ em função de $u_l(t)$.



Fonte: próprio autor.

desta demonstração é mostrar que $\text{sat}_l(u_l(t))$ sempre assume valores entre $u_l(t)$ e $H_{(l)}x(t)$ para $x(t) \in \mathcal{L}(H)$ em (44). Assim pode-se representar $\text{sat}_l(u_l(t))$ por uma combinação convexa como apresentado em (52). Seja $x(t) \in \mathcal{L}(H)$ em (44), de (50b) e da Figura 4, seguem as possibilidades:

- (i) Para $-\rho_l \leq u_l(t) \leq \rho_l$ tem-se que $\text{sat}_l(u_l(t)) = u_l(t)$ e assim $\text{sat}_l(u_l(t)) = \theta_{l1}(t)u_l(t) + \theta_{l2}(t)H_{(l)}x(t)$ com

$$\theta_{l1}(t) = 1 \text{ e } \theta_{l2}(t) = 0, \quad (53a)$$

portanto, para $-\rho_l \leq u_l(t) \leq \rho_l$, $\theta_{l1}(t) + \theta_{l2}(t) = 1$, $\theta_{l1}(t), \theta_{l2}(t) \geq 0$.

- (ii) Para $u_l(t) > \rho_l$, $\text{sat}_l(u_l(t)) = \rho_l$ e assim, como $H_{(l)}x(t) \leq \rho_l$, pode-se dizer que $\text{sat}_l(u_l(t)) = \theta_{l1}(t)u_l(t) + \theta_{l2}(t)H_{(l)}x(t)$, sendo

$$\theta_{l1}(t) = \frac{\text{sat}_l(u_l(t)) - H_{(l)}x(t)}{u_l(t) - H_{(l)}x(t)} \text{ e } \theta_{l2}(t) = \frac{u_l(t) - \text{sat}_l(u_l(t))}{u_l(t) - H_{(l)}x(t)}, \quad (53b)$$

logo, para $u_l(t) > \rho_l$, $\theta_{l1}(t) + \theta_{l2}(t) = 1$, $\theta_{l1}(t), \theta_{l2}(t) \geq 0$.

- (iii) Para $u_l(t) < -\rho_l$, $\text{sat}_l(u_l(t)) = -\rho_l$ e, como $H_{(l)}x(t) \geq -\rho_l$, pode-se dizer que $\text{sat}_l(u_l(t)) = \theta_{l1}(t)u_l(t) + \theta_{l2}(t)H_{(l)}x(t)$, sendo

$$\theta_{l1}(t) = \frac{H_{(l)}x(t) - \text{sat}_l(u_l(t))}{H_{(l)}x(t) - u_l(t)} \text{ e } \theta_{l2}(t) = \frac{\text{sat}_l(u_l(t)) - u_l(t)}{H_{(l)}x(t) - u_l(t)}, \quad (53c)$$

e assim, também para $u_l(t) < -\rho_l$, $\theta_{l1}(t) + \theta_{l2}(t) = 1$, $\theta_{l1}(t), \theta_{l2}(t) \geq 0$.

A demonstração da Observação 2 está concluída. \square

A partir da Observação 2, reescreve-se (50a) como

$$\text{sat}(u(t)) = \begin{bmatrix} \text{sat}_1(u_1(t)) \\ \vdots \\ \text{sat}_{n_u}(u_{n_u}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11}(t)u_1(t) + \theta_{12}(t)H_{(1)}x(t) \\ \vdots \\ \theta_{n_u1}(t)u_{n_u}(t) + \theta_{n_u2}(t)H_{(n_u)}x(t) \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Agora defina $\mathbb{D}_l \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_u}$ como sendo a matriz com seu elemento de índice ll igual a 1 e os demais elementos nulos, ou seja,

$$\mathbb{D}_l = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n_u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n_u1} & \cdots & d_{n_un_u} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_u}, \quad d_{ll} = 1, \quad d_{lj} = 0 \text{ se } j \neq l. \quad (55)$$

A partir de (54) e (55), e sabendo que $H = [H_{(1)}^T \cdots H_{(n_u)}^T]^T \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \text{sat}(u(t)) &= \begin{bmatrix} \text{sat}_1(u_1(t)) \\ \vdots \\ \text{sat}_{n_u}(u_{n_u}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11}(t)u_1(t) + \theta_{12}(t)H_{(1)}x(t) \\ \vdots \\ \theta_{n_u1}(t)u_{n_u}(t) + \theta_{n_u2}(t)H_{(n_u)}x(t) \end{bmatrix} \\ &= \theta_{11}(t)\mathbb{D}_1u(t) + \theta_{12}(t)\mathbb{D}_1Hx(t) + \cdots + \theta_{n_u1}(t)\mathbb{D}_{n_u}u(t) + \theta_{n_u2}(t)\mathbb{D}_{n_u}Hx(t), \end{aligned} \quad (56)$$

pois, de acordo com a definição (55), \mathbb{D}_l é uma matriz quadrada de ordem $n_u \times n_u$ cujo elemento (l,l) é igual a 1 e os demais são nulos.

Sejam os fatores de acoplamento dados por

$$\hat{\theta}_l(t) = \prod_{\substack{i \in \mathbb{I}_{n_u} \\ i \neq l}} [\theta_{i1}(t) + \theta_{i2}(t)] = 1, \quad (57)$$

que foram inspirados na descrição de sistemas não lineares por modelos fuzzy exposta na Seção 2.2. Então pode-se dizer, a partir de (56) e (57), que

$$\begin{aligned} \text{sat}(u(t)) &= \hat{\theta}_1 [\theta_{11}(t)\mathbb{D}_1u(t) + \theta_{12}(t)\mathbb{D}_1Hx(t)] + \cdots + \hat{\theta}_{n_u} [\theta_{n_u1}(t)\mathbb{D}_{n_u}u(t) + \theta_{n_u2}(t)\mathbb{D}_{n_u}Hx(t)] \\ &= \left[\sum_{l_i \in \mathbb{I}_2} \left(\prod_{i=2}^{n_u} \theta_{i l_i}(t) \right) \right] [\theta_{11}(t)\mathbb{D}_1u(t) + \theta_{12}(t)\mathbb{D}_1Hx(t)] + \cdots \\ &\quad + \left[\sum_{l_i \in \mathbb{I}_2} \left(\prod_{i=1}^{n_u-1} \theta_{i l_i}(t) \right) \right] [\theta_{n_u1}(t)\mathbb{D}_{n_u}u(t) + \theta_{n_u2}(t)\mathbb{D}_{n_u}Hx(t)], \end{aligned} \quad (58)$$

sendo, por exemplo, para $n_u = 3$, $\sum_{l_i \in \mathbb{I}_2} \left(\prod_{i=2}^{n_u} \theta_{i l_i}(t) \right) = \sum_{l_2 \in \mathbb{I}_2, l_3 \in \mathbb{I}_2} [\theta_{2l_2}(t)\theta_{3l_3}(t)] = \theta_{21}(t)\theta_{31}(t) + \theta_{21}(t)\theta_{32}(t) + \theta_{22}(t)\theta_{31}(t) + \theta_{22}(t)\theta_{32}(t)$.

Nesta etapa, inspirada na Tabela 1, elabora-se a seguinte tabela para mudança de variáveis, sendo a ordem dos fatores $\theta_{i l_i}$ determinada pelo valor de i , e sendo $i = 1$ a coluna mais a direita e $i = n_u$ a coluna mais a esquerda e antes do índice s .

Tabela 3 - Combinações para mudanças de variáveis na descrição da saturação por uma combinação convexa.

| s | $l_{n_u} \theta_{n_u} l_{n_u}$ | $l_{(n_u-1)} \theta_{(n_u-1)} l_{(n_u-1)}$ | \cdots | $l_2 \theta_2 l_2$ | $l_1 \theta_1 l_1$ |
|-----------|----------------------------------|--|----------|----------------------|----------------------|
| 1 | 1 | 1 | \cdots | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | \cdots | 1 | 2 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| 2^{n_u} | 2 | 2 | \cdots | 2 | 2 |

Fonte: próprio autor.

O índice s é calculado utilizando a expressão $s = 1 + \sum_{i=1}^{n_u} 2^{(i-1)} (l_i - 1)$, $l_i \in \mathbb{I}_2$, análoga à (20). Com o auxílio da Tabela 3 utiliza-se a mudança de variáveis

$$\lambda_s(t) = \left(\prod_{i=1}^{n_u} \theta_{i l_i}(t) \right) = \theta_{1 l_1}(t) \theta_{2 l_2}(t) \cdots \theta_{n_u l_{n_u}}(t), \quad (59)$$

tendo como resultado, seguindo as linhas desta tabela, que $\lambda_1(t) = \theta_{11}(t) \theta_{21}(t) \cdots \theta_{n_u 1}(t)$, $\lambda_2(t) = \theta_{11}(t) \cdots \theta_{(n_u-1)1}(t) \theta_{n_u 2}(t)$, etc, até $\lambda_{2^{n_u}}(t) = \theta_{12}(t) \theta_{22}(t) \cdots \theta_{n_u 2}(t)$. Assim, colocando os termos $\lambda_s(t)$ de (58) em evidência, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \text{sat}(u(t)) &= \lambda_1(t) [\mathbb{D}_1 u(t) + \mathbb{D}_2 u(t) + \cdots + \mathbb{D}_{n_u} u(t)] \\ &\quad + \lambda_2(t) [\mathbb{D}_1 u(t) + \mathbb{D}_2 u(t) + \cdots + \mathbb{D}_{n_u-1} u(t) + \mathbb{D}_{n_u} Hx(t)] \\ &\quad + \lambda_3(t) [\mathbb{D}_1 u(t) + \mathbb{D}_2 u(t) + \cdots + \mathbb{D}_{n_u-2} u(t) + \mathbb{D}_{n_u-1} Hx(t) + \mathbb{D}_{n_u} u(t)] \\ &\quad + \lambda_4(t) [\mathbb{D}_1 u(t) + \mathbb{D}_2 u(t) + \cdots + \mathbb{D}_{n_u-2} u(t) + \mathbb{D}_{n_u-1} Hx(t) + \mathbb{D}_{n_u} Hx(t)] \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \lambda_{2^{n_u}}(t) [\mathbb{D}_1 Hx(t) + \mathbb{D}_2 Hx(t) + \cdots + \mathbb{D}_{n_u} Hx(t)]. \\ &= \lambda_1(t) [(\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2 + \cdots + \mathbb{D}_{n_u}) u(t)] \\ &\quad + \lambda_2(t) [(\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2 + \cdots + \mathbb{D}_{n_u-1}) u(t) + \mathbb{D}_{n_u} Hx(t)] \\ &\quad + \lambda_3(t) [(\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2 + \cdots + \mathbb{D}_{n_u-2} + \mathbb{D}_{n_u}) u(t) + \mathbb{D}_{n_u-1} Hx(t)] \\ &\quad + \lambda_4(t) [(\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2 + \cdots + \mathbb{D}_{n_u-2}) u(t) + (\mathbb{D}_{n_u-1} + \mathbb{D}_{n_u}) Hx(t)] \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \lambda_{2^{n_u}}(t) [(\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2 + \cdots + \mathbb{D}_{n_u}) Hx(t)]. \end{aligned} \quad (60)$$

Observe a relação entre o λ_s e os fatores \mathbb{D}_k colocados em evidência em (60). \mathbb{D}_k multiplica $u(t)$ quando $\theta_{k1}(t)$ é fator de λ_s , e multiplica $Hx(t)$ quando $\theta_{k2}(t)$ é fator de λ_s . Além

disso $\sum_{k=1}^{n_u} \mathbb{D}_k = I_{n_u}$, sendo \mathbb{D}_k , $k \in \mathbb{I}_{n_u}$, definido em (55), e qualquer somatória de matrizes \mathbb{D}_k corresponde a um elemento do conjunto \mathcal{D} em (46). Então utilizando as matrizes pertencentes ao conjunto \mathcal{D} , pode-se escrever (60) como

$$\begin{aligned} \text{sat}(u(t)) &= \lambda_1(t) [D_1 u(t) + (I_{n_u} - D_1) Hx(t)] \\ &\quad + \lambda_2(t) [D_2 u(t) + (I_{n_u} - D_2) Hx(t)] \\ &\quad + \lambda_3(t) [D_3 u(t) + (I_{n_u} - D_3) Hx(t)] \\ &\quad + \lambda_4(t) [D_4 u(t) + (I_{n_u} - D_4) Hx(t)] \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \lambda_{2^{n_u}}(t) [D_{2^{n_u}} u(t) + (I_{n_u} - D_{2^{n_u}}) Hx(t)]. \end{aligned} \quad (61)$$

e fazendo $D_s^- = I_{n_u} - D_s$, $u(t) = -Kx(t)$ tem-se finalmente

$$\text{sat}(u(t)) = \text{sat}(-Kx(t)) = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(u(t)) + D_s^-(Hx(t))] = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [-D_s(Kx(t)) + D_s^-(Hx(t))], \quad (62)$$

que é a equação apresentada em Hu, Lin e Chen (2002a), Hu, Lin e Chen (2002b) e Cao e Lin (2003).

Exemplo: seja $n_u = 2$, então a partir da Observação 2 e de (55), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \text{sat}(u(t)) &= \begin{bmatrix} \text{sat}_1(u_1(t)) \\ \text{sat}_2(u_2(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11}(t)u_1(t) + \theta_{12}(t)H_{(1)}x(t) \\ \theta_{21}(t)u_2(t) + \theta_{22}(t)H_{(2)}x(t) \end{bmatrix} \\ &= \theta_{11}(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) + \theta_{12}(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Hx(t) + \theta_{21}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) + \theta_{22}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Hx(t) \\ &= \theta_{11}(t)\mathbb{D}_1 u(t) + \theta_{12}(t)\mathbb{D}_1 Hx(t) + \theta_{21}(t)\mathbb{D}_2 u(t) + \theta_{22}(t)\mathbb{D}_2 Hx(t). \end{aligned} \quad (63)$$

Utilizando (57) definem-se os seguintes fatores de agrupamento

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1(t) &= \prod_{\substack{i \in \mathbb{I}_2 \\ i \neq 1}} [\theta_{i1}(t) + \theta_{i2}(t)] = [\theta_{21}(t) + \theta_{22}(t)] = 1, \\ \hat{\theta}_2(t) &= \prod_{\substack{i \in \mathbb{I}_2 \\ i \neq 2}} [\theta_{i1}(t) + \theta_{i2}(t)] = [\theta_{11}(t) + \theta_{12}(t)] = 1, \end{aligned} \quad (64)$$

e assim, a partir de (63) e (64) segue que

$$\begin{aligned} \text{sat}(u(t)) &= [\theta_{21}(t) + \theta_{22}(t)] [\theta_{11}(t)\mathbb{D}_1 u(t) + \theta_{12}(t)\mathbb{D}_1 Hx(t)] \\ &\quad + [\theta_{11}(t) + \theta_{12}(t)] [\theta_{21}(t)\mathbb{D}_2 u(t) + \theta_{22}(t)\mathbb{D}_2 Hx(t)] \\ &= \theta_{21}(t)\theta_{11}(t)\mathbb{D}_1 u(t) + \theta_{21}(t)\theta_{12}(t)\mathbb{D}_1 Hx(t) \\ &\quad + \theta_{22}(t)\theta_{11}(t)\mathbb{D}_1 u(t) + \theta_{22}(t)\theta_{12}(t)\mathbb{D}_1 Hx(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \theta_{11}(t)\theta_{21}(t)\mathbb{D}_2u(t) + \theta_{11}(t)\theta_{22}(t)\mathbb{D}_2Hx(t) \\
& + \theta_{12}(t)\theta_{21}(t)\mathbb{D}_2u(t) + \theta_{12}(t)\theta_{22}(t)\mathbb{D}_2Hx(t). \tag{65}
\end{aligned}$$

Seguindo a mudança de variáveis descritas em (59), tem-se que

$$\lambda_1(t) = \theta_{21}(t)\theta_{11}(t), \quad \lambda_2(t) = \theta_{21}(t)\theta_{12}(t), \quad \lambda_3(t) = \theta_{22}(t)\theta_{11}(t) \quad \text{e} \quad \lambda_4(t) = \theta_{22}(t)\theta_{12}(t). \tag{66}$$

Substituindo (66) em (65)

$$\begin{aligned}
\text{sat}(u(t)) &= \lambda_1(t)\mathbb{D}_1u(t) + \lambda_2(t)\mathbb{D}_1Hx(t) + \lambda_3(t)\mathbb{D}_1u(t) + \lambda_4(t)\mathbb{D}_1Hx(t) \\
& + \lambda_1(t)\mathbb{D}_2u(t) + \lambda_3(t)\mathbb{D}_2Hx(t) + \lambda_2(t)\mathbb{D}_2u(t) + \lambda_4(t)\mathbb{D}_2Hx(t) \\
&= \lambda_1(t) [\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2] u(t) + \lambda_2(t) [\mathbb{D}_2u(t) + \mathbb{D}_1Hx(t)] \\
& + \lambda_3(t) [\mathbb{D}_1u(t) + \mathbb{D}_2Hx(t)] + \lambda_4(t) [\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2] Hx(t). \tag{67}
\end{aligned}$$

Utilizando as matrizes do conjunto \mathcal{D} em (46) de ordem 2, tem-se que $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$, sendo

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{D}_2, \\
D_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{D}_1, \quad D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
D_1^- &= I_2 - D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = D_4, \quad D_2^- = I_2 - D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = D_3, \\
D_3^- &= I_2 - D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D_2, \quad D_4^- = I_2 - D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D_1.
\end{aligned}$$

Então, a partir de (67) tem-se

$$\begin{aligned}
\text{sat}(u(t)) &= \lambda_1 D_1 u(t) + \lambda_1 D_1^- Hx(t) + \lambda_2 D_2 u(t) + \lambda_2 D_2^- Hx(t) + \lambda_3 D_3 u(t) + \lambda_3 D_3^- Hx(t) \\
& + \lambda_4 D_4 u(t) + \lambda_4 D_4^- Hx(t) \\
&= \sum_{s=1}^{2^{nu}=4} \lambda_s [D_s u(t) + D_s^- Hx(t)].
\end{aligned}$$

3.2 CONTROLE CHAVEADO DE SISTEMAS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S INCERTOS COM SATURAÇÃO NO ATUADOR

Considere um sistema não linear sujeito à saturação nos atuadores cuja equação dinâmica é dada por

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n_x} f_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^{n_u} g_{ik}(x(t)) \text{sat}_k(u_k(t)), \quad i \in \mathbb{I}_{n_x}, \quad (68a)$$

$$\text{sat}_k(u_k(t)) = \text{sgn}(u_k(t)) \min\{\rho_k, |u_k(t)|\}, \quad (68b)$$

sendo $x_i(t)$, $i \in \mathbb{I}_{n_x}$, as variáveis de estado, $u_k(t)$, $k \in \mathbb{I}_{n_u}$, os sinais de controle, $f_{ij}(x(t))$, $g_{ik}(x(t))$, funções não lineares que possuem parâmetros incertos, sendo estes em intervalos conhecidos, e ρ_k valores conhecidos da saturação dos atuadores. Note que esta é uma representação equivalente ao sistema (12), considerando saturação no atuador.

Utilizando o procedimento descrito na Seção 2.2, página 25, o sistema (68) pode ser exatamente descrito, em uma região de operação \mathcal{X} em (13), pelo modelo fuzzy T-S incerto

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha) \text{sat}(u(t)), \quad (69)$$

sendo $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ definidos em (10), e $\text{sat}(u(t))$ definido em (50).

Neste seção estudam-se condições para que a lei de controle chaveada

$$u(t) = u_\varphi(t) = -K_\varphi x(t), \quad \varphi = \arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_{n_r}} \{x(t)^T Q_i x(t)\}, \quad (70)$$

sendo as matrizes de realimentação K_i , e matrizes de decisão Q_i , $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, obtidas no procedimento de projeto, garanta a estabilidade local do sistema (68) e (70) com certa taxa de decaimento.

Teorema 1 (ALVES et al., 2016c). *Dado um sistema não linear incerto e sujeito a saturação no atuador (68) exatamente descrito por um modelo fuzzy T-S incerto (69) em uma região de operação \mathcal{X} em (13), sendo $\rho \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $\phi \in \mathfrak{R}^{n_h}$ e $N \in \mathfrak{R}^{n_h \times n_x}$ conhecidos, assim como as faixas de valores para seus parâmetros incertos. Suponha a existência de matrizes simétricas $0 < X$, \bar{Q}_i e $\bar{Z}_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $G_j = \begin{bmatrix} G_{j(1)}^T & G_{j(2)}^T & \cdots & G_{j(n_u)}^T \end{bmatrix}^T$ e $M_j \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$, e um escalar $\beta > 0$, tais que*

$$A_i X + X A_i^T + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta X < 0, \quad (71a)$$

$$B_i [-D_s M_j + D_s^- G_j] + [-D_s M_j + D_s^- G_j]^T B_i^T - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j \leq 0, \quad (71b)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 & G_{j(l)} \\ G_{j(l)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_{(h)} X \\ X N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (71c)$$

sejam satisfeitas para todo $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, $l \in \mathbb{I}_{n_u}$, $h \in \mathbb{I}_{n_h}$, $s \in \mathbb{I}_{2^{n_u}}$, $D_s \in \mathcal{D}$ e $D_s^- = I_{n_u} - D_s$. Então, a lei de controle chaveada (70) sendo $K_i = M_i X^{-1}$ e $Q_i = X^{-1} \bar{Q}_i X^{-1}$, para todo $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, aplicada ao sistema (68) torna a origem um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P,1)$ em (45), sendo que $P = X^{-1}$. Além disso, $x(t) \in \mathcal{E}(P,1) \subset \mathcal{X}$, $t \geq 0$.

Demonstração. Adote como candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, $P = P^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$. Então, a partir do sistema (69) e lei de controle (70),

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= x(t)^T [A(\alpha)^T P + P A(\alpha)] x(t) \\ &\quad + \text{sat}(-K_\varphi x(t))^T B(\alpha)^T P x(t) + x(t)^T P B(\alpha) \text{sat}(-K_\varphi x(t)). \end{aligned} \quad (72)$$

Assume-se $x(t) \in \mathcal{L}(H_k)$ definido em (44), $k \in \mathbb{I}_{n_u}$, então $x(t) \in \mathcal{L}(H_\varphi)$ e $\text{sat}(-K_\varphi x(t))$ pode ser descrita pela combinação convexa (HU; LIN; CHEN, 2002a; CAO; LIN, 2003)

$$\text{sat}(-K_\varphi x(t)) = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-K_\varphi x(t)) + D_s^-(H_\varphi x(t))], \quad (73)$$

sendo $\varphi \in \mathbb{I}_{n_r}$, $D_s \in \mathcal{D}$ em (46), $D_s^- = I_{n_u} - D_s \in \mathcal{D}$, e $\lambda_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$ (HU; LIN; CHEN, 2002a; CAO; LIN, 2003). Assim, a partir de (72) e (73),

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x(t)^T \{A(\alpha)^T P + P A(\alpha)\} x(t) \\ &\quad + \left\{ \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-K_\varphi x(t)) + D_s^-(H_\varphi x(t))]^T B(\alpha)^T P \right\} x(t) \\ &\quad + x(t)^T \left\{ P B(\alpha) \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-K_\varphi x(t)) + D_s^-(H_\varphi x(t))] \right\}. \end{aligned} \quad (74)$$

Pré- e pós-multiplicando (71b) por $P = X^{-1}$ e fazendo as mudanças de variáveis

$$G_j X^{-1} = H_j, \quad M_j X^{-1} = K_j, \quad Z_i = X^{-1} \bar{Z}_i X^{-1} \quad \text{e} \quad Q_i = X^{-1} \bar{Q}_i X^{-1}, \quad (75)$$

para $j = \varphi$, tem-se

$$[-D_s K_\varphi + D_s^- H_\varphi]^T B_i^T P + P B_i [-D_s K_\varphi + D_s^- H_\varphi] \leq Z_i + Q_\varphi. \quad (76)$$

Multiplicando (76) por α_i , $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$, e fazendo a soma de $i = 1$ até n_r , e multiplicando o resultado por λ_s , $\lambda_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$, e fazendo a soma para $s = 1$ até 2^{n_u} , conside-

rando (69), encontra-se

$$\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s \left\{ [-D_s K_\varphi + D_s^- H_\varphi]^T B(\alpha)^T P + PB(\alpha) [-D_s K_\varphi + D_s^- H_\varphi] \right\} \leq Z(\alpha) + Q_\varphi, \quad (77)$$

sendo $Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i Z_i$. Note que, a partir da lei de controle (70), $x(t)^T Q_\varphi x(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_{n_r}} \{x(t)^T Q_i x(t)\} \leq \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i x(t)^T Q_i x(t) = x(t)^T Q(\alpha) x(t)$. Então, a partir de (77) e (74),

$$\dot{V}(x(t)) \leq x(t)^T \{A(\alpha)^T P + PA(\alpha) + Z(\alpha) + Q(\alpha)\} x(t). \quad (78)$$

Pré- e pós-multiplicando (71a) por $P = X^{-1}$ e fazendo as mudanças de variáveis (75), multiplicando o resultado por $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$, e fazendo a soma de $i = 1$ até $i = n_r$, encontra-se

$$PA(\alpha) + A(\alpha)^T P + Z(\alpha) + Q(\alpha) < -2\beta P. \quad (79)$$

Uma vez que para se obter uma taxa de decaimento maior ou igual a β é suficiente que $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$ (BOYD et al., 1994), a partir de (78) e (79), esta condição é garantida.

Observando o Lema 1, para $\delta = 1$, a primeira desigualdade em (71c) assegura $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{L}(H_k)$. Então, para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ tem-se $x(0) \in \mathcal{L}(H_k)$ e a descrição da função saturação como combinação convexa (73) pode ser utilizada (HU; LIN; CHEN, 2002a; CAO; LIN, 2003); seguindo passos análogos ao da prova do Lema 1, a segunda desigualdade em (71c) garante $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$. Como (71a) e (71b) asseguram que $\mathcal{E}(P, 1)$ é um conjunto positivamente invariante (BLANCHINI, 1999) para o sistema em malha fechada (69) e (70), esta é uma condição suficiente para que toda trajetória iniciada com $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ permaneça em \mathcal{X} para todo $t > 0$ (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015), pois durante a trajetória de estado do sistema $V(x(t)) \leq 1$, para $t \geq 0$, ou seja, não deixa o conjunto $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$. Deste modo o modelo (69) descreve exatamente (68) para $t \geq 0$. Isto encerra a prova. \square

Em situações em que a matriz de entrada de controle é constante, as condições do Teorema 1 podem ser simplificadas como mostrado na próximo corolário. Vale observar que um modelo fuzzy T-S incerto, que tenha uma matriz de entrada de controle incerta $B(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i B_i$, $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ (69), sem saturação no sinal de controle, pode ser reescrito, utilizando variáveis de estado adicionais, de forma que na nova descrição o sistema apresente uma matriz de entrada de controle constante \bar{B} (BARMISH, 1983; SOUZA et al., 2014c).

Corolário 1 (ALVES et al., 2016c). *Considere um sistema descrito por (69), sendo a matriz de entrada de controle $B(\alpha)$ constante, ou seja $B(\alpha) = B$. Neste caso, as LMIs (71a) e (71b) do*

Teorema 1 podem ser substituídas por

$$A_i X + X A_i^T + \hat{Q}_i + 2\beta X < 0, \quad (80a)$$

$$B [-D_s M_j + D_s^- G_j] + [-D_s M_j + D_s^- G_j]^T B^T - \hat{Q}_j \leq 0, \quad (80b)$$

sendo $\hat{Q}_j = \hat{Q}_j^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ para todo $j \in \mathbb{I}_{n_r}$, garantindo-se os mesmos resultados. Fazendo isto, as matrizes da lei de controle (70) devem ser calculadas como $Q_i = X^{-1} \hat{Q}_i X^{-1}$ e $K_i = M_i X^{-1}$.

Demonstração. Como $B(\alpha) = B$, conseqüentemente $\bar{Z}_i = \bar{Z}$ em (71a) e (71b). Fazendo $\hat{Q}_j = \bar{Q}_j + \bar{Z}$ as desigualdades (71a) e (71b) podem ser reescritas como (80a) e (80b), respectivamente. Nestas condições, tem-se que $\arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_{n_r}} \{x(t)^T X^{-1} \hat{Q}_i X^{-1} x(t)\} = \arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_{n_r}} \{x(t)^T X^{-1} [\bar{Q}_i + \bar{Z}] \times X^{-1} x(t)\} = \arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_{n_r}} \{x(t)^T X^{-1} \bar{Q}_i X^{-1} x(t)\}$. \square

Caso as condições do Teorema 1 (ou Corolário 1) sejam satisfeitas, fica garantida a estabilidade local, com taxa de decaimento β , do sistema não linear incerto (68) em malha fechada com a lei de controle (70) para toda condição inicial $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$. Com isto, é interessante exigir que um conjunto de condições iniciais de interesse $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1)$ e, portanto, para qualquer condição inicial $x(0) \in \mathfrak{X}$ tenha-se $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$. Seja $\mathfrak{X} = \bar{\omega} \text{co}\{w_1, \dots, w_{n_L}\}$, $\bar{\omega} > 0$, então a condição $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1)$ é assegurada caso

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}^{-2} & w_\ell^T \\ w_\ell & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (81)$$

seja satisfeita $\forall \ell \in \mathbb{I}_{n_L}$. Observe que qualquer elemento no conjunto \mathfrak{X} pode ser escrito como $\bar{\omega} w(\theta) = \bar{\omega} \sum_{\ell=1}^{n_L} \theta_\ell w_\ell \in \mathfrak{X}$, $\theta_\ell \geq 0$ e $\sum_{\ell=1}^{n_L} \theta_\ell = 1$. Então, supondo (81) satisfeita para todo $\ell \in \mathbb{I}_{n_L}$, multiplicando as desigualdades por θ_ℓ , $\theta_\ell \geq 0$ e $\sum_{\ell=1}^{n_L} \theta_\ell = 1$, e aplicando complemento de Schur com relação à segunda linha e coluna, encontra-se

$$\bar{\omega}^{-2} - w(\theta)^T P w(\theta) \geq 0,$$

sendo $P = X^{-1}$, e segue que $\bar{\omega}^{-2} \geq w(\theta)^T P w(\theta)$, então $1 \geq [\bar{\omega} w(\theta)^T] P [\bar{\omega} w(\theta)]$ e conseqüentemente $\bar{\omega} w(\theta) \in \mathcal{E}(P, 1)$, qualquer que seja $\bar{\omega} w(\theta) \in \mathfrak{X}$. Portanto $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1)$.

Observe que em (81), $\bar{\omega}$ é um fator de escala do conjunto $\text{co}\{w_1, \dots, w_{n_L}\}$ (BOYD et al., 1994; HU; LIN; CHEN, 2002a; CAO; LIN, 2003), portanto, $\bar{\omega}$ pode ser utilizado como uma variável a ser maximizada (minimização de $\bar{\omega}^{-2}$) de forma a obter uma estimativa menos conservadora do conjunto de condições iniciais $\mathcal{E}(P, 1)$.

Ainda utilizando a teoria de conjuntos apresentada, é possível reduzir a norma dos ganhos de realimentação K_i , calculados pelas LMIs do Teorema 1 (ou Corolário 1) através do aumento

da região $\mathcal{L}(K_i)$ em (44) na qual a saturação não ocorre. Isto pode ser feito selecionando um escalar $\xi > 0$ tal que $\mathcal{E}(P, \xi^{-1}) \subset \mathcal{L}(K_i)$. Usando o resultado do Lema 1, isso acontece se

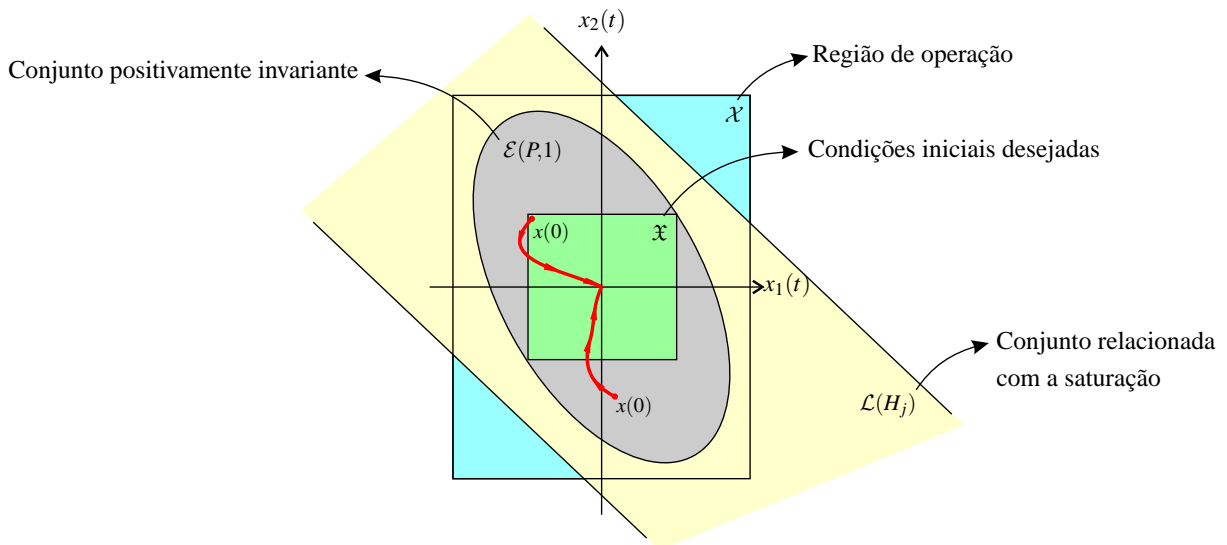
$$\begin{bmatrix} \xi \rho_l^{-2} & M_{i(l)} \\ M_{i(l)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (82)$$

for satisfeita para todo $i \in \mathbb{I}_{n_r}$ e $l \in \mathbb{I}_{n_u}$, cuja prova segue os mesmos passos da prova do Lema 1, observando que $X = P^{-1}$ e $M_{i(l)} = K_{i(l)}X$ (HU; LIN; CHEN, 2002a; CAO; LIN, 2003).

A diminuição na norma dos ganhos K_i ocorre porque, sendo fixa a matriz P , quanto maior o valor de ξ^{-1} maior será a norma de $x(0)$ admissível em $\mathcal{E}(P, \xi^{-1})$ em (45). A partir do Lema 1, sendo satisfeita a desigualdade (82) tem-se $\mathcal{L}(K_i) \supset \mathcal{E}(P, \xi^{-1})$, e portanto os estados $x(0)$ com maiores normas em $\mathcal{E}(P, \xi^{-1})$ também pertencem a $\mathcal{L}(K_i)$. Pela definição (44) maiores normas de $x(0) \in \mathcal{L}(K_i)$ resultam em menores normas dos ganhos K_i , visto que $|K_{i(l)}x(t)|$ é menor ou igual a um valor constante (ALVES et al., 2016c).

Na Figura 5 apresentam-se exemplos de possíveis trajetórias de estado, sendo $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T \in \mathfrak{R}^2$, para um sistema em malha fechada com controle projetado usando a teoria em discussão neste capítulo. Observe que $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$, ou seja, o conjunto de condições iniciais de interesse está contido na região positivamente invariante $\mathcal{E}(P, 1)$, que por sua vez é um subconjunto da região de operação estipulada para o sistema. Então para toda trajetória em \mathfrak{X} , ou mesmo em $\mathcal{E}(P, 1) \setminus \mathfrak{X}$, tem-se que a trajetória de estado é assintoticamente estável.

Figura 5 - Representação de possíveis trajetórias de estado e das regiões \mathcal{X} em (13), $\mathcal{L}(H_j)$ em (44), $\mathcal{E}(P, 1)$ em (45) e \mathfrak{X} no plano $x_1(t) \times x_2(t)$.



Fonte: próprio autor.

3.2.1 Tratamento de distúrbios ou incertezas no sinal de controle

Nesta subseção apresenta-se uma abordagem para suprimir uma classe de distúrbios, ou incertezas, no sinal de controle. Para isto, considere uma classe de sistemas não lineares de tal forma que possa ser descrita exatamente em uma região de operação pelo seguinte modelo fuzzy T-S incerto:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)\text{sat}(u(t)) + B(\alpha)d(t), \quad B(\alpha) = B_0g(z(t)), \quad (83)$$

sendo $d(t) \in \mathfrak{R}$ um distúrbio ou incerteza tal que $v_1 \leq d(t) \leq v_2$, $z(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & v^T \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^{n_x+n_v}$, $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ o vetor de estado e $v \in \mathfrak{R}^{n_v}$ o vetor de parâmetros incertos, $g(z(t)) \geq 0$ para todo $x(t) \neq 0$ e todo v admissível. Considere também a lei de controle chaveada

$$u(t) = \text{sat}_0(u_\varphi(t)) - v_\sigma, \quad \sigma = \arg^* \min_{i \in \{1,2\}} \{-x(t)^T P B_0 v_i\}, \quad (84)$$

sendo $u_\varphi(t)$ a lei de controle definida em (70). A função de saturação $\text{sat}_0(\cdot)$ é definida por (50) e (68b), substituindo ρ_l por $\rho_{0(l)} = \rho_l - \max_{i \in \mathbb{I}_2} \{|v_i|\}$. Note que, a partir de (84) e de (50), para cada elemento $u_l(t)$ do vetor de controle $u(t) = [u_1(t) \ \cdots \ u_{n_u}(t)]^T$ tem-se que $|u_l(t)| = |\text{sat}_0(u_{\varphi(l)}(t)) - v_\sigma| \leq |\text{sat}_0(u_{\varphi(l)}(t))| + |v_\sigma| \leq \rho_{0(l)} + \max_{i \in \mathbb{I}_2} \{|v_i|\} = \rho_l - \max_{i \in \mathbb{I}_2} \{|v_i|\} + \max_{i \in \mathbb{I}_2} \{|v_i|\} = \rho_l$. Portanto, a partir de (50), $\text{sat}(u_l(t)) = \text{sat}_0(u_{\varphi(l)}(t)) - v_\sigma$ e assim, $\text{sat}(u(t)) = \text{sat}_0(u_\varphi(t)) - v_\sigma$.

Corolário 2 (ALVES et al., 2016c). *Considere que as condições do Teorema 1 para o modelo fuzzy T-S incerto (69) com lei de controle (70) sejam satisfeitas, substituindo ρ_l por $\rho_{0(l)}$ nas LMIs (71c), e que sejam obtidos $K_i = M_i X^{-1}$ e $Q_i = X^{-1} \bar{Q}_i X^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{I}_{n_r}$. Então, o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema não linear incerto (83) com lei de controle (84) é localmente assintoticamente estável para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P,1)$ com taxa de decaimento igual ou maior que β . Adicionalmente, $x(t) \in \mathcal{X}$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Considerando como candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, $P = P^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$. Então, com o sistema (83) e (50) usando a lei de controle (84),

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= 2x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= 2x(t)^T P [A(\alpha)x(t) + B(\alpha)d(t) + B(\alpha)(\text{sat}_0(u_\varphi(t)) - v_\sigma)] \\ &= 2x(t)^T P A(\alpha)x(t) + 2x(t)^T P B(\alpha)\text{sat}_0(u_\varphi(t)) + 2x(t)^T P B(\alpha)[d(t) - v_\sigma]. \end{aligned}$$

A partir da prova do Teorema 1, substituindo ρ_l por $\rho_{0(l)}$ nas LMIs (71c), e usando que $B(\alpha) = B_0g(z(t))$, $g(z(t)) \geq 0$ para todo $x(t) \neq 0$,

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta x(t)^T P x(t) + 2x(t)^T P B_0 [d(t) - v_\sigma] g(z(t)). \quad (85)$$

Agora, note que $d(t)$ pode ser reescrito como

$$d(t) = \tau_1(t) v_1 + \tau_2(t) v_2; \sum_{i=1}^2 \tau_i(t) = 1; \tau_1(t), \tau_2(t) \geq 0; \tau_2(t) = \frac{d(t) - v_1}{v_2 - v_1}; \tau_1(t) = 1 - \tau_2(t).$$

Portanto, da definição (84) tem-se

$$\begin{aligned} x(t)^T PB_0 d(t) - x(t)^T PB_0 v_\sigma &= x(t)^T PB_0 \sum_{i=1}^2 \tau_i(t) v_i + \min_{i \in \{1,2\}} \{-x(t)^T PB_0 v_i\} \\ &\leq x(t)^T PB_0 \sum_{i=1}^2 \tau_i(t) v_i - x(t)^T PB_0 \sum_{i=1}^2 \tau_i(t) v_i = 0. \end{aligned} \quad (86)$$

Como $g(z(t)) \geq 0$ para todo $x(t) \neq 0$ e v admissível, a partir de (85), (86), e do Teorema 1, $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta x(t)^T P x(t) = -2\beta V(x(t))$, e assim conclui-se a prova. \square

3.3 EXEMPLOS

Nesta seção são realizados projetos de controladores chaveados para um sistema bola-viga e para um levitador magnético. O projeto utiliza os modelos fuzzy T-S incertos destes sistemas não lineares, já apresentados na Seção 2.3. Note que, embora as funções de pertinência destes modelos sejam incertas, o controle chaveado não utiliza estas funções para compor o sinal de controle. Além disso, embora o modelo fuzzy T-S incerto represente, através de uma combinação convexa dos modelos locais, exatamente estes sistemas apenas se o vetor de estado estiver em uma dada região de operação, o procedimento proposto em Alves et al. (2016c) assegura que, para condições iniciais em um conjunto determinado no procedimento de projeto, este modelo represente exatamente o sistema não linear durante toda a trajetória de estado.

3.3.1 Controle chaveado de um sistema bola-viga

Considere o sistema bola-viga incerto e o modelo fuzzy incerto que exatamente o descreve tendo como modelos locais (34), página 35. Utilizando o Corolário 1, LMIs (80), e as LMIs (71c), apresentadas no Teorema 1, com os parâmetros descritos na Subseção 2.3.1, $\beta = 0,5$ e $\rho = 10$, LMIs (81) com $n_L = 2$, $w_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $w_2 = -w_1$ e $\bar{\omega} = 11,1111$ de modo a garantir $x(0) = [\pm 0,3 \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathcal{E}(P,1)$, e LMIs (82) sendo $\xi = 20$ (EFBERG;

LÖFBERG, 2004; GAHINET et al., 1994), foram obtidos (ALVES et al., 2016c)

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [-52,6713 \quad -116,6699 \quad 478,6279 \quad 49,6337], \\
 K_2 &= [-62,2681 \quad -135,4811 \quad 531,9596 \quad 53,6418], \\
 K_3 &= [-52,8564 \quad -117,0102 \quad 482,0028 \quad 49,6054], \\
 K_4 &= [-62,0874 \quad -135,1089 \quad 533,1827 \quad 53,6102],
 \end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,0515 & -0,1198 & 0,5422 & 0,0551 \\ -0,1198 & -0,2770 & 1,2418 & 0,1264 \\ 0,5422 & 1,2418 & -5,4574 & -0,5630 \\ 0,0551 & 0,1264 & -0,5630 & -0,0559 \end{bmatrix}, & Q_2 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,0592 & -0,1341 & 0,5755 & 0,1311 \\ -0,1341 & -0,3028 & 1,2936 & 0,2857 \\ 0,5755 & 1,2936 & -5,4657 & -1,1262 \\ 0,1311 & 0,2857 & -1,1262 & -0,1198 \end{bmatrix}, \\
 Q_3 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,0522 & -0,1211 & 0,5658 & 0,0551 \\ -0,1211 & -0,2795 & 1,2912 & 0,1262 \\ 0,5658 & 1,2912 & -5,7879 & -0,5712 \\ 0,0551 & 0,1262 & -0,5712 & -0,0553 \end{bmatrix}, & Q_4 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,0589 & -0,1336 & 0,5930 & 0,1309 \\ -0,1336 & -0,3017 & 1,3311 & 0,2852 \\ 0,5930 & 1,3311 & -5,7586 & -1,1347 \\ 0,1309 & 0,2852 & -1,1347 & -0,1196 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{88}$$

$$P = \begin{bmatrix} 9,4842 & 19,0225 & -67,9201 & -3,7665 \\ 19,0225 & 40,3360 & -147,3595 & -8,2128 \\ -67,9201 & -147,3595 & 578,9386 & 32,3451 \\ -3,7665 & -8,2128 & 32,3451 & 3,4375 \end{bmatrix}. \tag{89}$$

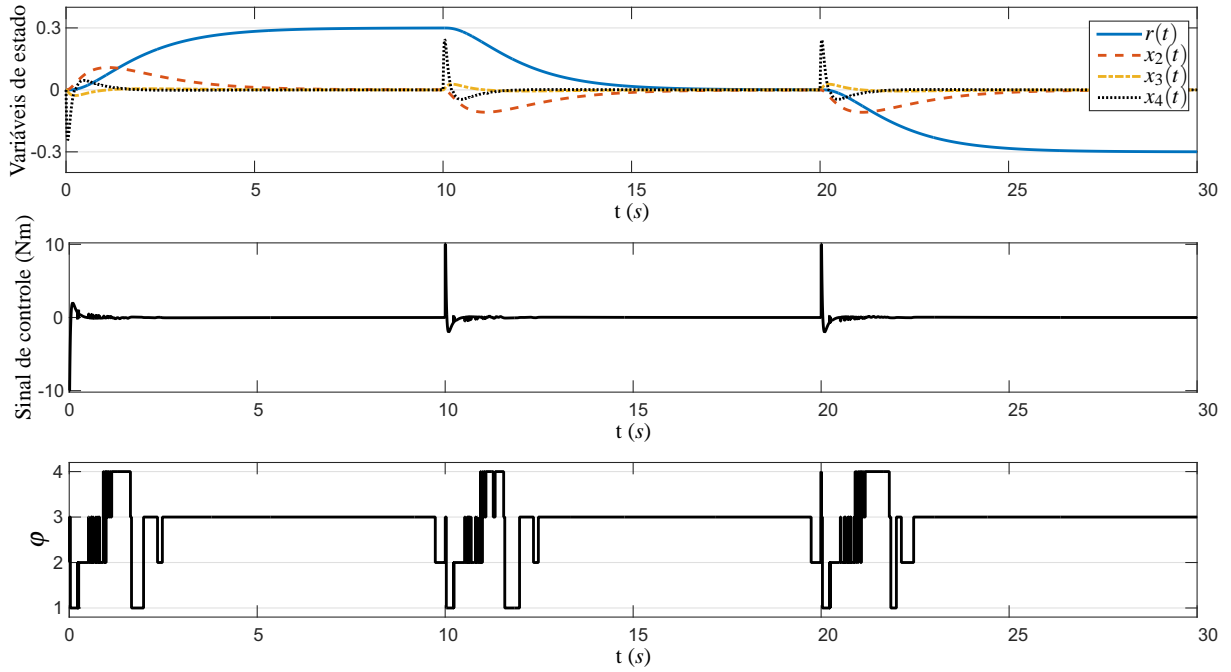
O sistema bola-viga em malha fechada com a lei de controle chaveada (70) foi simulado usando a condição inicial $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $v_1 = 0,72$, os ganhos de realimentação (87) e as matrizes de decisão (88). Na simulação foi utilizado, através de mudança de coordenada, uma referência na posição para a bola de $v_2 = 0,3$ m no período $0 \leq t < 10$ s, $v_2 = 0$ m no período $10 \leq t < 20$ s e $v_2 = -0,3$ m no período $20 \leq t \leq 30$ s. Como a mudança na posição desejada foi realizada após a estabilização do sistema, observe que de (28) $x_1(t) = r(t) - v_2$, sendo $r(t)$ a posição da bola e v_2 a posição desejada para a bola, que muda de maneira instantânea em $t = 10$ s e $t = 20$ s. Deste modo é possível calcular que $x_1(0) = r(0) - v_2(0) = 0 - 0,3$; após a estabilização $x_1(t) = 0$, portanto $r(t) = v_2(t)$. Então, em $t = 10$, $x_1(10) = r(10) - v_2(10) = 0,3 - 0$, pois neste instante a posição da bola já havia estabilizado na posição desejada anterior, que era 0,3 m. Novamente, em $t = 20$, $x_1(20) = r(20) - v_2(10) = 0 + 0,3$. Com isto, $x(0) = [-0,3 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e $x(10) = x(20) = [0,3 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Segue que, usando (89), $x(0)^T P x(0) = x(10)^T P x(10) = x(20)^T P x(20) = 0,8536$, e assim, $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$, $t \geq 0$, para o sistema em malha fechada.

A resposta temporal do sistema bola-viga em malha fechada, com lei de controle chaveada (70), é mostrada na Figura 6. Nela é possível observar o índice de chaveamento φ que corresponde ao ganho de realimentação K_φ que foi utilizado a cada momento.

A partir da resposta temporal na Figura 6 nota-se que a lei de controle (70) foi bem sucedida em manter a bola na posição desejada. Entretanto, o sinal de controle apresenta *chattering*, fato

que pode dificultar sua implementação em alguns equipamentos.

Figura 6 - Resposta temporal para uma simulação do sistema bola-viga (28) com malha fechada utilizando a lei de controle chaveada (70): variáveis de estado, sinal de controle e índice de chaveamento φ .



Fonte: próprio autor.

3.3.2 Controle chaveado de um levitador magnético

Neste exemplo considera-se o levitador magnético descrito na Subseção 2.3.2, e utiliza-se o modelo fuzzy T-S incerto que o descreve exatamente na região de operação estipulada, cujos modelos locais são descritos em (43), página 37. Observe que o sinal de controle neste caso é dado por $u(t) = i(t)^2 - i_0(v)^2$ (36) e que $i_0(v)^2$ é incerto. Nas condições adotadas tem-se que $1,2889 \leq i_0(v)^2 \leq 3,0678$. Assim, para a aplicação da lei de controle (84) utiliza-se $v_1 = 1,2889$ e $v_2 = 3,0678$.

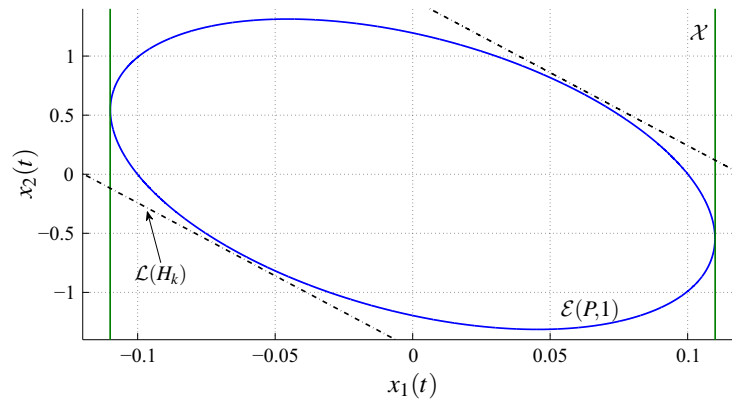
Resolvendo as LMIs (71) do Teorema 1, considerando o Corolário 2, os parâmetros apresentadas na Subseção 2.3.2, $\beta = 2,5$, $\rho_0 = 7,4$, as LMIs (81), sendo $n_L = 2$, $w_1 = [0,1 \ 0]^T$, $w_2 = -w_1$ e $\varpi = 1$ (EFBERG; LÖFBERG, 2004; GAHINET et al., 1994), obteve-se (ALVES et al., 2016c)

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [-62,6618 \ -5,2544], & K_2 &= [-46,0755 \ -4,7746], \\
 K_3 &= [-62,6801 \ -5,2693], & K_4 &= [-45,9295 \ -4,7568], \\
 K_5 &= [-58,2540 \ -5,1285], & K_6 &= [-45,4165 \ -4,7358], \\
 K_7 &= [-58,1982 \ -5,1360], & K_8 &= [-45,6699 \ -4,7580],
 \end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 99,7420 & 3,4252 \\ 3,4252 & 0,6907 \end{bmatrix}, & Q_1 &= \begin{bmatrix} 0,0501 & -4,8035 \\ -4,8035 & -115,2556 \end{bmatrix}, & Q_2 &= \begin{bmatrix} 0,0417 & -3,2503 \\ -3,2503 & -124,2630 \end{bmatrix}, \\
Q_3 &= \begin{bmatrix} 0,0498 & -4,7923 \\ -4,7923 & -115,5678 \end{bmatrix}, & Q_4 &= \begin{bmatrix} 0,0418 & -3,2415 \\ -3,2415 & -123,8489 \end{bmatrix}, & Q_5 &= \begin{bmatrix} 0,0433 & -4,4734 \\ -4,4734 & -119,8390 \end{bmatrix}, \\
Q_6 &= \begin{bmatrix} 0,0396 & -3,1903 \\ -3,1903 & -123,6433 \end{bmatrix}, & Q_7 &= \begin{bmatrix} 0,0429 & -4,4600 \\ -4,4600 & -120,1941 \end{bmatrix}, & Q_8 &= \begin{bmatrix} 0,0393 & -3,2097 \\ -3,2097 & -124,4252 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{91}$$

Na Figura 22 ilustram-se os conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(H_k)$ e $\mathcal{E}(P,1)$ obtidos para essa solução.

Figura 7 - Conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(H_k)$, $\mathcal{E}(P,1)$, para o levitador magnético (35).



Fonte: próprio autor.

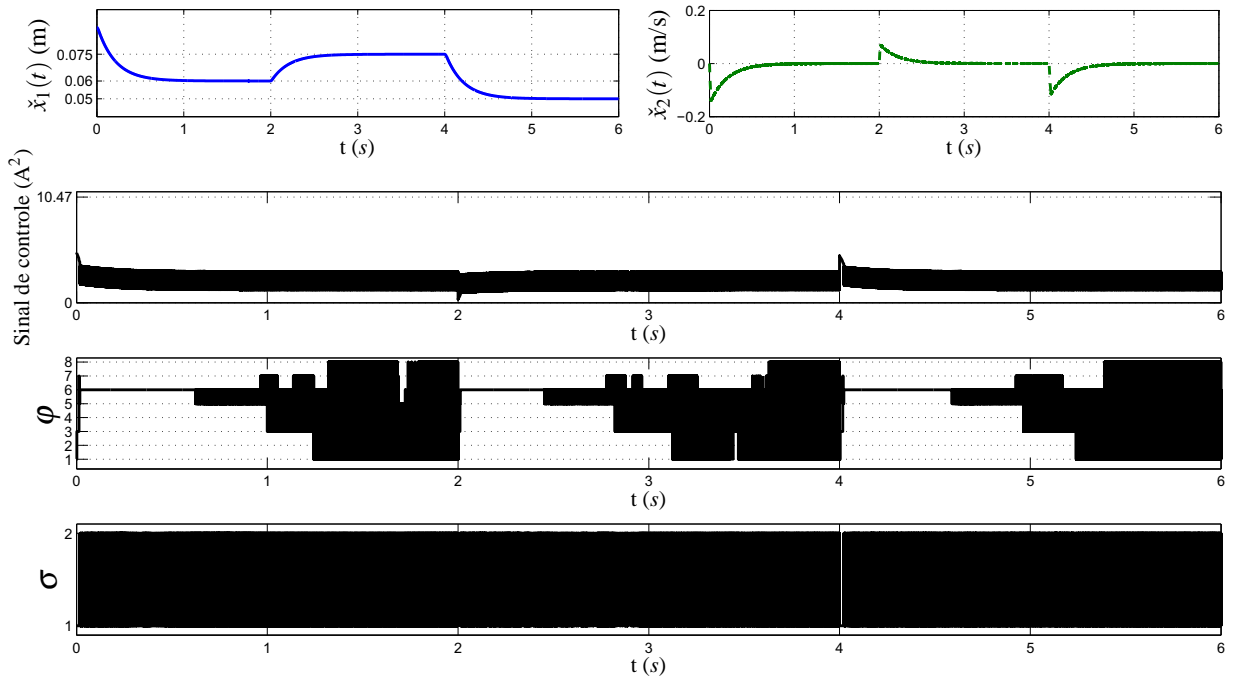
A simulação do levitador magnéticos em malha fechada com a lei de controle chaveada (84) utilizou os ganhos de realimentação (90) e matrizes de decisão (91), a condição inicial $\check{x}(0) = [0,09 \ 0]^T$, $v_1 = 0,06$ m e $v_2 = 0,085$ kg durante $0 \text{ s} \leq t < 2 \text{ s}$; $v_1 = 0,075$ m e $v_2 = 0,05$ kg durante $2 \text{ s} \leq t < 4 \text{ s}$; e $v_1 = 0,05$ m e $v_2 = 0,1$ kg para $t \geq 4 \text{ s}$. Em vista da mudança de coordenadas utilizada para a alteração na posição da bola, que ocorre sempre após a estabilização do sistema, encontra-se, observando (91), $x(0)^T P x(0) = 0,09$, $x(2)^T P x(2) = 0,02$, $x(4)^T P x(4) = 0,06$, e portanto, para o sistema controlado $x(t) \in \mathcal{E}(P,1)$ para todo $t \geq 0$.

A resposta temporal do levitador magnético é apresentada na Figura 8, na qual os índices φ e σ indicam qual dos ganhos K_i e v_j , respectivamente, são utilizados em cada instante. A partir dessa figura observa-se que a lei de controle (84) foi capaz de manter a bola na posição desejada $\check{x}_1(t) = y(t) = v_1$, após uma resposta transitória adequada, mesmo com incerteza no sinal de controle $i_0(v)$, dada em (36) (a massa v_2 e a posição desejada v_1 são incertas). Nota-se também na Figura 8 que a lei de controle chaveada apresenta *chattering*, que pode dificultar sua implementação em sistemas reais.

3.4 COMENTÁRIOS

Neste capítulo foram apresentadas extensões ao controle chaveado apresentado por Souza et al. (2014c), Souza et al. (2014b), considerando uma região de operação para o sistema con-

Figura 8 - Posição da bola ($\check{x}_1(t) = y(t)$), velocidade da bola ($\check{x}_2(t)$), sinal de controle ($u(t) = i(t)^2 - i_0(v)^2$), e índices de chaveamento φ e σ , para o levitador magnético (35) em malha fechada com a lei de controle chaveada (84).



Fonte: próprio autor.

trolado e também saturação no atuador. Observe que a região de operação no projeto do controlador chaveado para sistemas não lineares é importante, visto que fora dessa região o modelo fuzzy T-S incerto não representa exatamente o sistema não linear incerto inicial como combinação convexa de seus modelos locais. Além disso, considerar a possibilidade de saturação no sinal de controle aproxima o projeto do controlador de sua implementação, uma vez que a saturação é uma característica comum de sistemas de controle.

Note que a utilização das leis de controle chaveadas (70) e (84) acarretam em um maior esforço computacional que a utilização de um único ganho de realimentação. Entretanto, leis de controle chaveadas podem ser satisfatoriamente implementadas (SOUZA et al., 2014a; ALVES et al., 2016a). No Capítulo 4 será vista a implementação da lei de controle chaveada, utilizando o procedimento de projeto estabelecido neste capítulo, em um sistema *Ball Balancer* Quanser[®] e uma adaptação que foi necessária para que este sistema apresentasse bom desempenho (ALVES et al., 2016a).

Pelos resultados de simulação apresentados, observa-se que as leis de controle chaveadas (70) e (84) podem apresentar *chattering*. Uma forma de superar esse problema está na utilização do controle chaveado suave, apresentado no Capítulo 5.

4 CONTROLE CHAVEADO LOCAL DO *BALL BALANCER QUANSER*[®]

Este capítulo apresenta uma implementação prática dos resultados descritos no Capítulos 3 em um sistema *Ball Balancer Quanser*[®]. De maneira diferente do apresentado em Souza et al. (2014a), considera-se no procedimento de projeto do controlador uma região de operação para o equipamento e também a saturação no sinal de controle, que é presente na implementação.

Em projetos iniciais de controladores para este equipamento, com a teoria apresentada no Capítulo 3, observou-se que a exigência de taxas de decaimento elevadas possibilitavam a garantia de estabilidade para condições iniciais com menores normas, e vice-versa. No controle do *Ball Balancer Quanser*[®] necessita-se de uma taxa de decaimento relativamente alta para conseguir resultados satisfatórios de implementação, frente a distúrbios não modelados, ao mesmo passo que é interessante garantir estabilidade para condições iniciais com maiores normas.

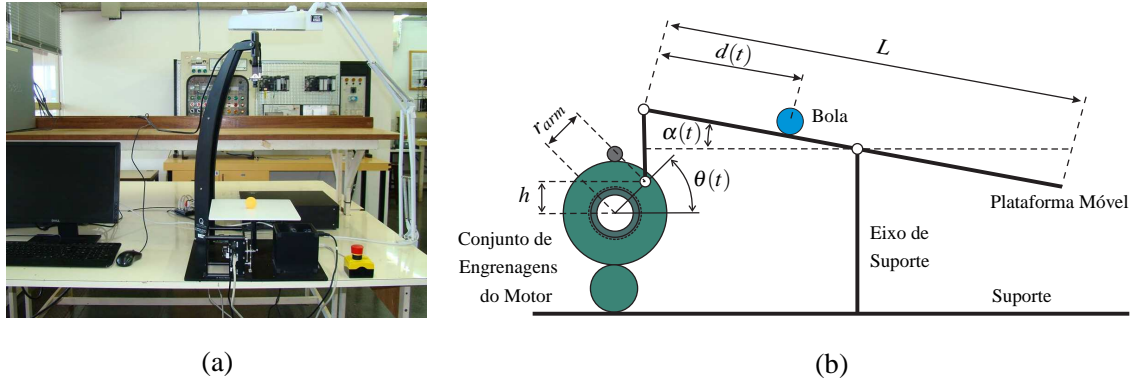
Deste modo, a teoria previamente apresentada no Capítulo 3 foi estendida, possibilitando garantir maior taxa de decaimento em uma região “nas proximidades” do ponto de equilíbrio, que contém estados iniciais com menores normas, e com isto resultados satisfatórios de implementação foram obtidos. A metodologia apresentada neste capítulo foi publicada em Alves et al. (2016a).

4.1 SISTEMA *BALL BALANCER QUANSER*[®]

O sistema *Ball Balancer Quanser*[®] possui uma placa montada sobre dois servomotores. O objetivo é movimentar a placa através do acionamento dos servomotores de modo que uma bola sobre a placa permaneça em uma posição específica ou percorra uma certa trajetória. A posição da bola é medida por uma câmera localizada acima da placa. O sistema é integrado a um computador que realiza o controle e para a implementação de controladores projetados em tempo contínuo neste equipamento é utilizada emulação com período de amostragem suficientemente pequeno. Uma foto do sistema *Ball Balancer Quanser*[®] pertencente ao LPC - FEIS - UNESP é mostrada na Figura 9 (a). Um esquemático do movimento no eixo x é apresentado na Figura 9 (b). O acionamento do eixo y é análogo ao acionamento do eixo x .

O movimento com relação a cada eixo é modelado pelo seguinte sistema dinâmico (QUAN-

Figura 9 - Sistema *Ball Balancer* Quanser[®]. (a) Equipamento pertencente ao LPC - FEIS - UNESP. (b) Esquema do movimento no eixo x do sistema.



Fontes: Arquivo do LPC - FEIS - UNESP - parte (a) e adaptado de Quanser Innovate Educate (2008b) - parte (b).

SER INNOVATE EDUCATE, 2008a).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{23}(x_3(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{A_m}{J_{eq}} \end{bmatrix} \text{sat}(u(t)), \quad (92)$$

sendo $f_{23}(x_3(t)) = k_{bb}(\sin(x_3(t))/x_3(t))$, $x_1(t) = d(t)$, a posição da bola medida em metros, $x_2(t) = \dot{d}(t)$, a velocidade linear da bola em metros por segundo, $x_3(t) = \theta(t)$, a posição angular do eixo do servomotor, medido em radianos, $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$, a velocidade angular do eixo do motor em radianos por segundo, $u(t)$ representa a tensão aplicada no motor em Volts. $k_{bb} = (2m_b r_{arm} r_b^2 g) / (L(m_b r_b^2 + J_b))$, sendo $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ a aceleração da gravidade, e $J_b = (2m_b r_b^2) / 5$. Os parâmetros do equipamento são os dados na Tabela 4.

Tabela 4 - Parâmetros do sistema *Ball Balancer* Quanser[®].

| | Descrição | Valor |
|-----------|---|-----------------------|
| B_{eq} | Amortecimento referente ao motor | 0,0844 Nms/rd |
| J_{eq} | Inércia referente ao motor | 0,0021 kgm^2 |
| A_m | Ganho referente ao motor | 0,129 Nm/V |
| L | Comprimento da placa móvel | 0,275 m |
| r_{arm} | Distância entre eixo da engrenagem de saída do servomotor e o ponto de fixação da barra | 0,0254 m |
| r_b | Raio da bola | 0,0196 m |
| m_b | Massa da bola | 0,003 kg |

Fonte: Quanser Innovate Educate (2008b).

A região especificada para a operação de cada eixo do *Ball Balancer* Quanser[®] é representada por \mathcal{X} em (13), página 26, com $n_h = 4$, $N = I_4$, a matriz identidade de ordem 4, e

$\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4]^T = [0,1375 \ 0,3 \ \pi/6 \ \pi]^T$. A restrição para as variáveis de estado foi especificada com base em restrições físicas do equipamento. Por exemplo, pela forma como foi construído o sistema *Ball Balancer* Quanser[®], o ângulo $\theta(t)$, representado na Figura 9 (b), deve ser tal que $-\pi/6 \text{ rad} \leq \theta(t) = x_3(t) \leq \pi/6 \text{ rad}$ (QUANSER INNOVATE EDUCATE, 2008a). Os sinais de controle enviados aos servomotores (um sinal de controle para cada servomotor) estão sujeitos à saturação com valor $\rho = 5$ volts, utilizada para proteção do equipamento.

Foi admitida a possibilidade de perda de potência nos servomotores de 30%. Esta perda foi modelada como um ganho k_f no sinal de controle de tal forma que $k_f = 1$ para o sistema sem falha e $k_f = 0$ para a falha total do sistema. Assim, na implementação foi utilizado o sinal de controle sujeito à falha

$$u_f(t) = k_f u(t), \quad (93)$$

sendo $u(t)$ o sinal de controle e a constante $k_f \in [0,7, 1]$. Observe que $Bu_f(t) = k_f Bu(t)$ e o parâmetro incerto k_f pode ser incorporado na matriz B , tornando-a incerta para o projeto da lei de controle. Nestas condições encontra-se, para a região de operação especificada, que $1,2361 \leq f_{23}(x_3(t)) \leq 1,2944$ e o sistema não linear de cada eixo do sistema *Ball Balancer* (92) pode ser representado por um modelo fuzzy T-S incerto utilizando o procedimento descrito na Seção 2.2, página 25, sendo $n_x = 4$, $n_u = 1$, $n_r = 4$ e

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i x(t) + \sum_{i=1}^4 \alpha_i B_i u(t), \quad (94)$$

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2944 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35,0877 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2361 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35,0877 \end{bmatrix},$$

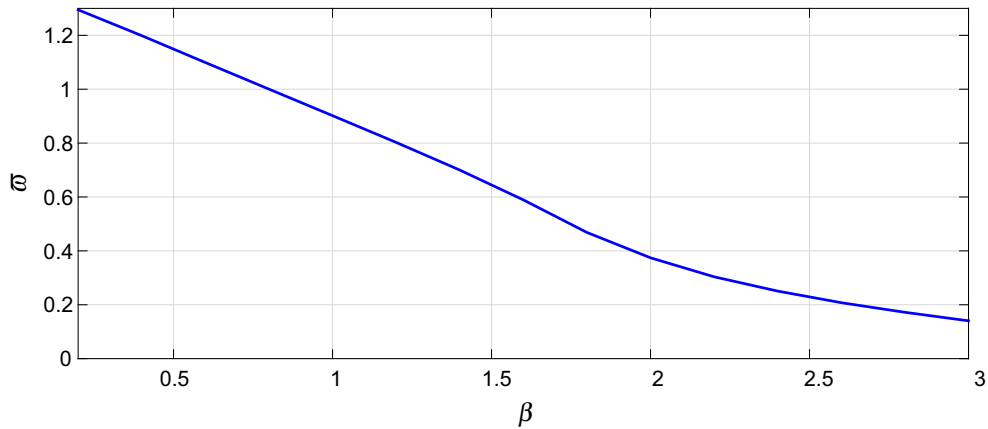
$$B_1 = B_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 61,7544]^T, \quad B_3 = B_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 43,2281]^T.$$

4.2 CONTROLE CHAVEADO APLICADO AO SISTEMA BALL BALANCER

Para as soluções das LMIs (71) propostas no Teorema 1, página 46, usando os parâmetros descritos na Seção 4.1, $\mathcal{D} = \{D_1 = 1, D_2 = 0\}$, juntamente com as LMIs em (81) e (82) sendo $w_1 = [0,1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $w_2 = -w_1$ e $\xi = 20$ (EFBERG; LÖFBERG, 2004; GAHINET et al., 1994), foi observado que, devido às restrições impostas, quanto maior for a taxa de decaimento menor será o valor de $\bar{\omega}$ tal que $\bar{\omega} \text{co}\{w_1, \dots, w_{n_L}\} \in \mathcal{E}(P, 1)$. Na Figura 10 observa-se a evolução da variável $\bar{\omega}$ (escala do conjunto $\text{co}\{w_1, w_2\}$) em relação à β (taxa de decaimento) neste caso.

Intuitivamente, se $x(0)$ tem norma pequena, então necessita-se de um sinal de controle pequeno ($-K_\sigma x(t)$) de modo que a trajetória de estado seja estável e convirja para o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$. Por outro lado, quando a norma de $x(0)$ é grande, então $u = -K_\sigma x(t)$ tem

Figura 10 - Máximos valores de escala ϖ para diferentes valores de taxa de decaimento β para o sistema *Ball Balancer Quanser*[®].



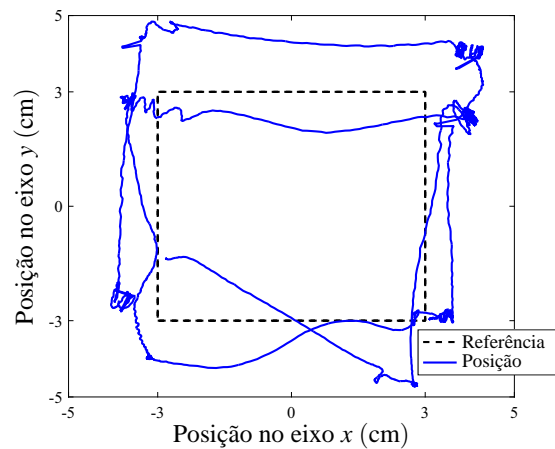
Fonte: próprio autor.

valor elevado, fazendo com que o sinal de controle sature e então a saturação tem influência na convergência da trajetória de estado. Observe que $x(t)^T P x(t) \leq \lambda_{max} \|x(t)\|^2$, sendo λ_{max} o maior autovalor de P . Então, para aumentar $\|x(0)\|$ tal que $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ é suficiente diminuir λ_{max} . Projetando as matrizes do controlador chaveado com as LMIs do Teorema 1 e acrescentando: $X > aI_4$ e $a > 0$, sendo $a \in \mathfrak{R}$ uma variável e I_4 a matriz identidade de ordem 4, λ_{max} pode ser minimizado com a maximização de a , pois os autovalores de X são iguais ao inverso dos autovalores de P . Com esta estratégia e resolvendo essas LMIs utilizando os parâmetros descritos na Seção 4.1, $\mathcal{D} = \{D_1 = 1, D_2 = 0\}$ e taxas de decaimento $\beta = 0,5, 1, 1,5$ e 2 foram obtidos os respectivos valores mínimos de λ_{max} : 0,2093, 2,8940, 28,7593 e 192,2425.

Para uma implementação com bons resultados no *Ball Balancer Quanser*[®] a taxa de decaimento necessita ser maior que $\beta = 1,8$. Deste modo, para este sistema tem-se dois objetivos conflitantes: aumentar a região para as condições iniciais, para movimentar a bola por trajetos maiores, e, ao mesmo tempo, conseguir uma taxa de decaimento relativamente elevada. Apenas para exemplificar, apresenta-se na Figura 11 a posição da bola no plano para o sistema *Ball Balancer Quanser*[®] com lei de controle (70) projetado através das LMIs (71) com os parâmetros já mencionados na Seção 4.1, $\mathcal{D} = \{D_1 = 1, D_2 = 0\}$, $\beta = 1,25$, juntamente com as LMIs em (81) e (82) sendo $w_1 = [0,1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $w_2 = -w_1$, $\varpi^{-2} = 1,56$ e $\xi = 20$ (EFBERG; LÖFBERG, 2004; GAHINET et al., 1994). Neste contexto é assegurado que $x(0) = \pm [0,08 \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathcal{E}(P, 1)$. Foi utilizada uma referência quadrada de 6 cm de lado por meio de mudança de coordenada, resultando em $x(0) = \pm [0,06 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Para conseguir resultados satisfatórios é proposto um sistema de controle utilizando estágios, cada um projetado com base no Teorema 1 e com exigências diferentes de taxa de decaimento e “tamanho” do elipsóide $\mathcal{E}(P, 1)$, medido por ϖ em (81). Sendo assim, cada estágio possui um conjunto de ganhos de realimentação e de matrizes de decisão. Cada conjunto de

Figura 11 - Posição da bola no plano xy do sistema *Ball Balancer Quanser*[®] em malha fechada com a lei de controle (70) e com ganhos projetados para $\beta = 1,25$.



Fonte: próprio autor.

ganhos de realimentação e matrizes de decisão é utilizado quando seu estágio correspondente é ativo e são chaveados de acordo com a lei (70). Esta estratégia é detalhada na Seção 4.3.

4.3 ESTÁGIOS NO CONTROLE CHAVEADO

Considere dois projetos de controlador realizados com base no Teorema 1, com diferentes exigências de condições iniciais e taxas de decaimento. No primeiro projeto, no qual é projetado o conjunto de ganhos \mathcal{K}_1 e de matrizes de decisão \mathcal{Q}_1 , associado à função de Lyapunov $V_1(x(t)) = x(t)^T P_1 x(t)$, garante-se a condição inicial desejada e uma taxa de decaimento β_1 menor que o necessário. No segundo projeto, estabelece-se o conjunto de ganhos \mathcal{K}_2 e de matrizes de decisão \mathcal{Q}_2 , associado à função de Lyapunov $V_2(x(t)) = x(t)^T P_2 x(t)$, que asseguram ao sistema controlado a taxa de decaimento desejada β_2 , porém não garantindo a estabilidade para o estado inicial desejado. Note que é preferível a utilização do conjunto \mathcal{K}_2 , uma vez que utilizando este conjunto de ganhos de realimentação é possível obter uma taxa de decaimento maior.

Seguindo esta ideia, propõe-se o projeto das matrizes do controlador por estágios de acordo com o algoritmo mostrado na Tabela 5.

Uma vez projetadas as matrizes dos controladores, determina-se o uso dos conjuntos de ganho e matrizes de decisão de acordo com as funções de Lyapunov projetadas. A lógica de ativação dos controladores é a seguinte: se $V_2(x(t)) \leq 1$ ative o estágio 2 e utilize a lei de controle (70) com os conjuntos \mathcal{K}_2 e \mathcal{Q}_2 ; caso $V_2(x(t)) > 1$, mas $V_1(x(t)) \leq 1$, ative o estágio 1 e utilize a lei de controle (70) com os conjuntos \mathcal{K}_1 e \mathcal{Q}_1 . Nesta situação, a lógica de ativação

Tabela 5 - Algoritmo para o projeto de controle chaveado usando estágios.

Passo 1: Estabeleça o conjunto \mathfrak{X} de condições iniciais desejado, então resolva as LMIs de projeto do controlador chaveado dadas no Teorema 1 juntamente com (81) utilizando uma taxa de decaimento $\beta_1 \geq 0$, que pode ser menor que a desejada, de modo que as LMIs de projeto sejam factíveis. Com o resultado defina os conjuntos $\mathcal{K}_1 = \{K_1^1, K_2^1, \dots, K_{n_r}^1\}$, $K_i^1 = M_i X^{-1}$, e $\mathcal{Q}_1 = \{Q_1^1, Q_2^1, \dots, Q_{n_r}^1\}$, $Q_i^1 = X^{-1} \bar{Q}_i X^{-1}$, e $P_1 = X^{-1}$. Se β_1 for a taxa de decaimento desejada, o procedimento de projeto termina.

Passo 2: Para o projeto do segundo estágio, estabeleça uma taxa de decaimento β_2 desejada, $\beta_2 > \beta_1$, e ajuste o conjunto \mathfrak{X} de modo que as LMIs de projeto do controlador chaveado dadas no Teorema 1 e por (81) sejam factíveis. Com a solução obtida, defina os conjuntos $\mathcal{K}_2 = \{K_1^2, K_2^2, \dots, K_{n_r}^2\}$, $K_i^2 = M_i X^{-1}$, e $\mathcal{Q}_2 = \{Q_1^2, Q_2^2, \dots, Q_{n_r}^2\}$, $Q_i^2 = X^{-1} \bar{Q}_i X^{-1}$, e $P_2 = X^{-1}$.

Fonte: próprio autor.

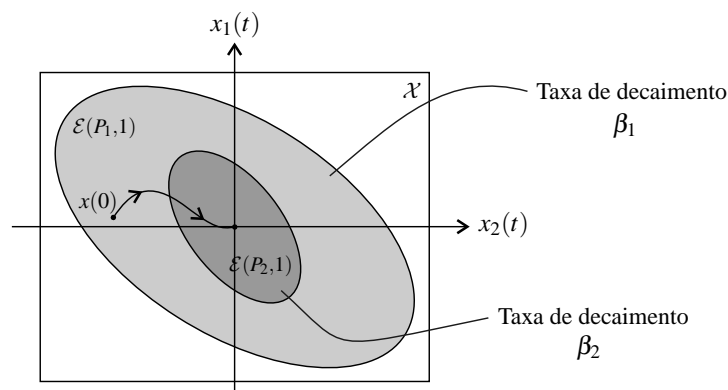
pode ser sintetizada pela seguinte lei de controle

$$u(t) = -K_\varphi^l x(t), \quad \iota = \arg^* \max \{x(t)^T P_k x(t), x(t)^T P_k x(t) \leq 1\} \quad \text{e} \quad \varphi = \arg^* \min \{x(t)^T Q_j^l x(t)\}. \quad (95)$$

Observe que as condições iniciais devem pertencer ao conjunto $\mathcal{E}(P_1, 1)$ ou $\mathcal{E}(P_2, 1)$ e que nestas condições o vetor de estado do sistema não deixar a região de operação \mathcal{X} , pois $\mathcal{E}(P_1, 1) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(P_2, 1) \subset \mathcal{X}$.

Neste contexto acontece, no máximo, uma troca de estágio até o sistema atingir o ponto de equilíbrio (veja ilustração de possível trajetória de estado na Figura 12). Caso $x(0) \in \mathcal{E}(P_2, 1)$ não ocorrerá troca de estágio, porque ambos os conjuntos $\mathcal{E}(P_1, 1)$ e $\mathcal{E}(P_2, 1)$ são positivamente invariantes para o sistema controlado utilizando os respectivos conjuntos de ganhos de realimentação e matrizes de decisão.

Figura 12 - Ilustração de uma possível trajetória de estado com troca de estágios para $x(t) \in \mathfrak{R}^2$.



Fonte: próprio autor.

Detalham-se agora os resultados obtidos no controle do sistema *Ball Balancer Quanser*[®]

utilizando estágios no controle chaveado. Neste projeto os valores de taxa de decaimento utilizados no projeto de cada estágio de controle foram escolhidos empiricamente com base em testes realizados no equipamento, que sugeriram uma taxa de decaimento $\beta > 1,8$ para o bom desempenho do sistema em manter a bola na trajetória desejada. Resolvendo as LMIs (71) com os parâmetros já mencionados na Seao 4.1, $\mathcal{D} = \{D_1 = 1, D_2 = 0\}$, $\beta = \beta_1 = 0,8$ para o primeiro estágio (conjuntos \mathcal{K}_1 e \mathcal{Q}_1) e $\beta = \beta_2 = 2$ para o segundo estágio (conjunto \mathcal{K}_2 e \mathcal{Q}_2), juntamente com as LMIs em (81) sendo $n_L = 2$, $w_1 = [0,1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $w_2 = -w_1$, $\bar{w} = 1$ para o primeiro estágio (assegurando que $x(0) = \pm [0,1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathcal{E}(P,1)$) e $\bar{w} = 11,1111$ para o segundo estágio; junto com as LMIs (82) sendo $\xi = 5$ nos dois casos (EFBERG; LOFBERG, 2004; GAHINET et al., 1994), encontra-se $\mathcal{K}_1 = \{K_1^1, K_2^1, K_3^1, K_4^1\}$, $\mathcal{Q}_1 = \{Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1\}$, e $\mathcal{K}_2 = \{K_1^2, K_2^2, K_3^2, K_4^2\}$, $\mathcal{Q}_2 = \{Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2, Q_4^2\}$, sendo

$$\begin{aligned} K_1^1 &= [37,1335 \ 40,8541 \ 12,7707 \ 2,1861], & K_2^1 &= [36,9318 \ 40,7140 \ 12,8230 \ 2,1818], \\ K_3^1 &= [60,3955 \ 54,9699 \ 17,4896 \ 1,8657], & K_4^1 &= [60,6123 \ 54,9882 \ 17,6589 \ 1,8596], \\ K_1^2 &= [208,4600 \ 138,6943 \ 37,5984 \ 2,3416], & K_2^2 &= [207,5852 \ 138,2461 \ 37,5875 \ 2,3440], \\ K_3^2 &= [249,0018 \ 160,8535 \ 41,6335 \ 1,9881], & K_4^2 &= [247,6551 \ 160,0490 \ 41,5052 \ 2,0010]. \end{aligned}$$

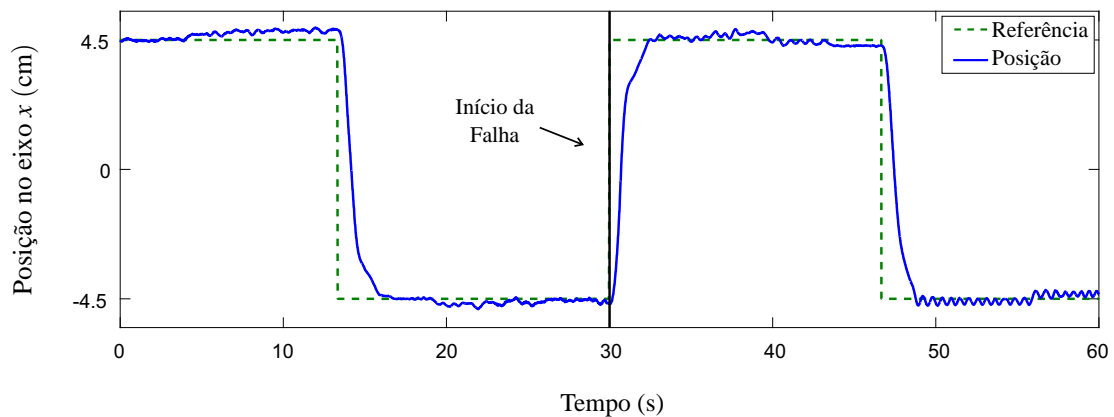
$$\begin{aligned} Q_1^1 &= 10^{10} \times \begin{bmatrix} -1,4405 & -0,6814 & -0,1741 & -0,0089 \\ -0,6814 & -0,3287 & -0,0837 & -0,0043 \\ -0,1741 & -0,0837 & -0,0213 & -0,0011 \\ -0,0089 & -0,0043 & -0,0011 & -0,0001 \end{bmatrix}, & Q_2^1 &= 10^{10} \times \begin{bmatrix} -1,4405 & -0,6814 & -0,1741 & -0,0089 \\ -0,6814 & -0,3287 & -0,0837 & -0,0043 \\ -0,1741 & -0,0837 & -0,0213 & -0,0011 \\ -0,0089 & -0,0043 & -0,0011 & -0,0001 \end{bmatrix}, \\ Q_3^1 &= 10^{10} \times \begin{bmatrix} -1,4405 & -0,6814 & -0,1741 & -0,0089 \\ -0,6814 & -0,3287 & -0,0837 & -0,0043 \\ -0,1741 & -0,0837 & -0,0213 & -0,0011 \\ -0,0089 & -0,0043 & -0,0011 & -0,0001 \end{bmatrix}, & Q_4^1 &= 10^{10} \times \begin{bmatrix} -1,4405 & -0,6814 & -0,1741 & -0,0089 \\ -0,6814 & -0,3287 & -0,0837 & -0,0043 \\ -0,1741 & -0,0837 & -0,0213 & -0,0011 \\ -0,0089 & -0,0043 & -0,0011 & -0,0001 \end{bmatrix}, \\ Q_1^2 &= 10^{12} \times \begin{bmatrix} -1,1283 & -0,6350 & -0,1278 & -0,0047 \\ -0,6350 & -0,3564 & -0,0716 & -0,0026 \\ -0,1278 & -0,0716 & -0,0144 & -0,0005 \\ -0,0047 & -0,0026 & -0,0005 & -0,0000 \end{bmatrix}, & Q_2^2 &= 10^{12} \times \begin{bmatrix} -1,1283 & -0,6350 & -0,1278 & -0,0047 \\ -0,6350 & -0,3564 & -0,0716 & -0,0026 \\ -0,1278 & -0,0716 & -0,0144 & -0,0005 \\ -0,0047 & -0,0026 & -0,0005 & -0,0000 \end{bmatrix}, \\ Q_3^2 &= 10^{12} \times \begin{bmatrix} -1,1283 & -0,6350 & -0,1278 & -0,0047 \\ -0,6350 & -0,3564 & -0,0716 & -0,0026 \\ -0,1278 & -0,0716 & -0,0144 & -0,0005 \\ -0,0047 & -0,0026 & -0,0005 & -0,0000 \end{bmatrix}, & Q_4^2 &= 10^{12} \times \begin{bmatrix} -1,1283 & -0,6350 & -0,1278 & -0,0047 \\ -0,6350 & -0,3564 & -0,0716 & -0,0026 \\ -0,1278 & -0,0716 & -0,0144 & -0,0005 \\ -0,0047 & -0,0026 & -0,0005 & -0,0000 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 99,9899 & 47,7021 & 11,8647 & 0,6213 \\ 47,7021 & 51,0308 & 9,5668 & 0,7395 \\ 11,8647 & 9,5668 & 5,6903 & 0,1976 \\ 0,6213 & 0,7395 & 0,1976 & 0,0571 \end{bmatrix}, \quad P_2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 998,4794 & 535,3159 & 104,6737 & 3,8406 \\ 535,3159 & 331,6368 & 70,9738 & 2,5812 \\ 104,6737 & 70,9738 & 19,9274 & 0,7088 \\ 3,8406 & 2,5812 & 0,7088 & 0,0706 \end{bmatrix}.$$

Os resultados de implementaao do esquema de controle proposto para o eixo x do sistema *Ball Balancer* QUANSER[®] são mostrados nas Figuras 13 - 18 (os resultados para o eixo y são análogos e por isto foram omitidos). A posiao da bola no plano, para o sistema controlado, é mostrada na Figura 18. Observe que nesta implementaao foi utilizado um quadrado com 9 cm

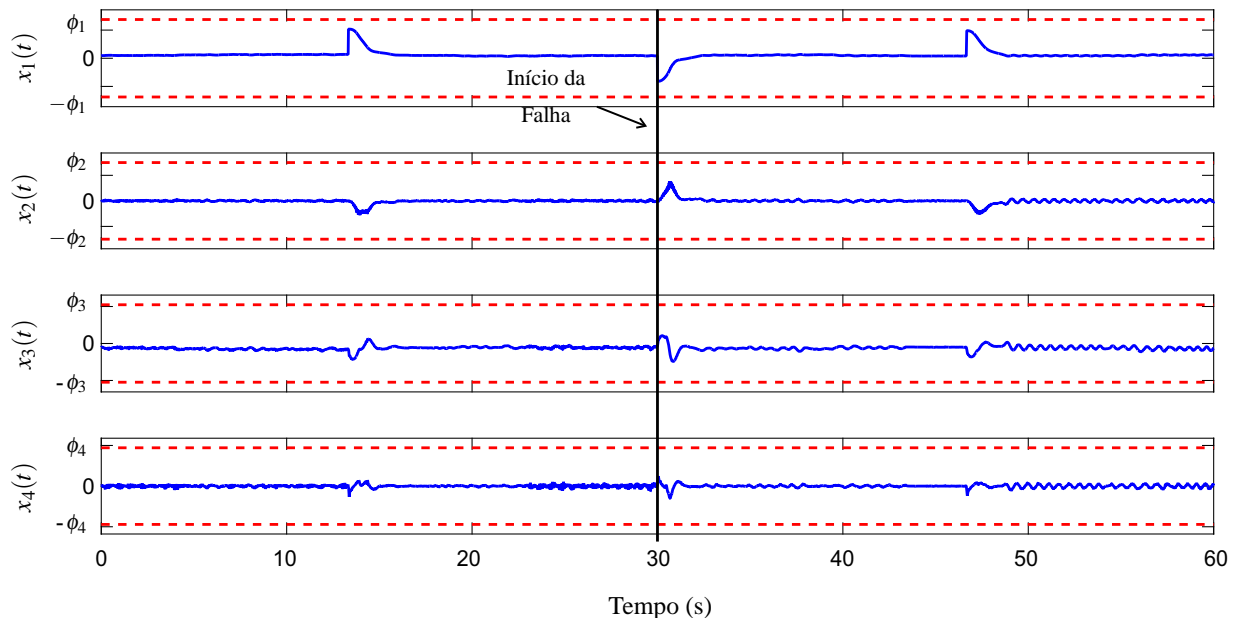
de lado como referência, maior que o utilizado na implementação mostrada na Figura 11 (foi utilizada mudança de coordenada, resultando em $x(0) = \pm [0,09 \ 0 \ 0 \ 0]^T$). A linha vertical marcada como início da falha indica o momento a partir do qual foi emulada uma falha que diminuiu a potência dos servomotores em 30%, ou seja, o instante no qual k_f instantaneamente passa do valor de 1 para 0,7 em (93).

Figura 13 - Deslocamento medido no eixo x do sistema *Ball Balancer Quanser*[®] durante implementação da lei de controle (95).



Fonte: próprio autor.

Figura 14 - Variáveis de estado medidas no eixo x do sistema *Ball Balancer Quanser*[®] durante implementação da lei de controle (95).

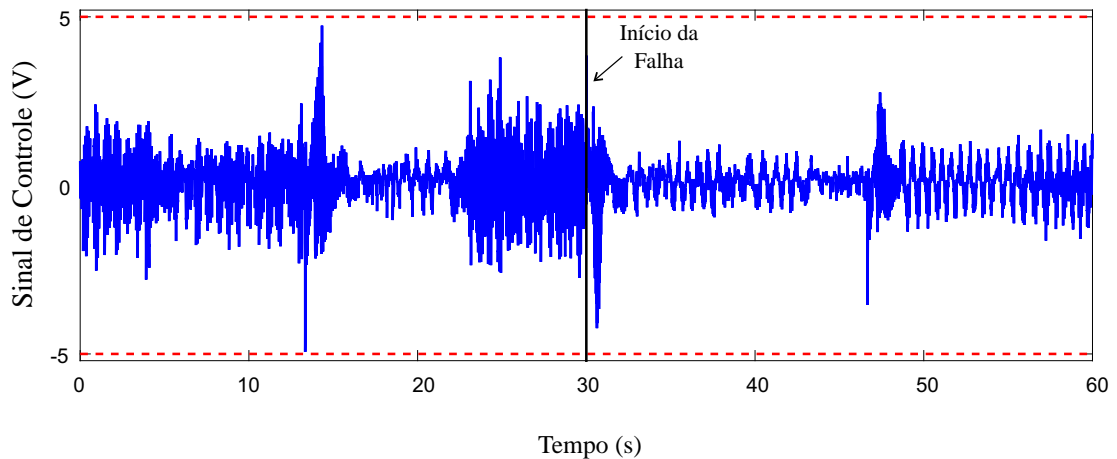


Fonte: próprio autor.

Como é possível observar nos resultados apresentados nas Figuras 13 - 18 conseguiu-se bom desempenho do sistema controlado com o uso de estágios no controle, mesmo com a saturação no atuador e perda de potência nos servomotores. Comparando-se as Figuras 18 e 11

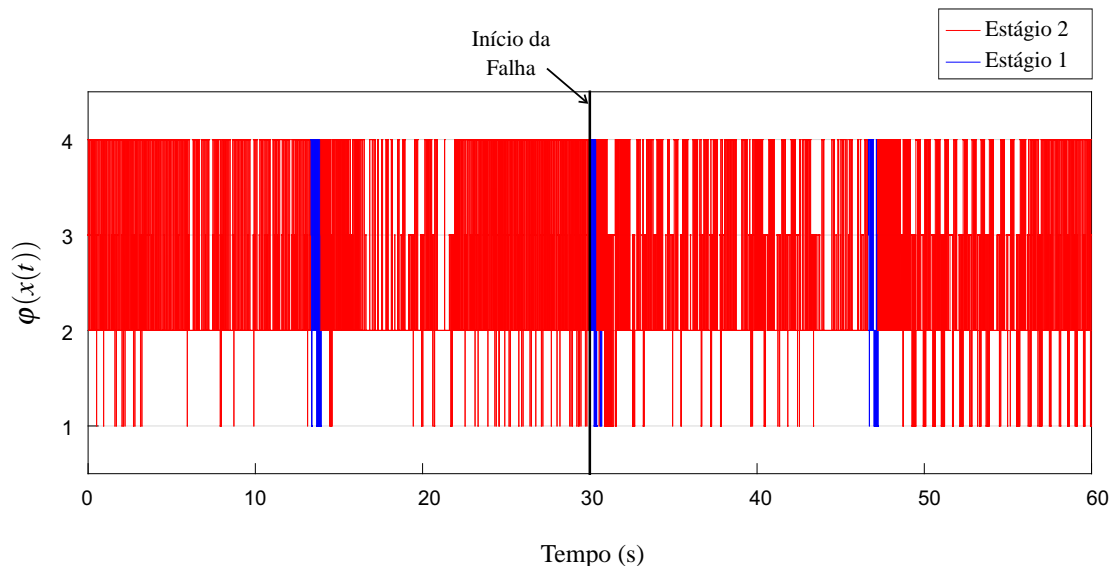
percebe-se que houve um ganho de desempenho significativo quando utilizou-se a estratégia de controle por estágios. Observe, a partir da Figura 14, que as restrições de região de operação foram atendidas durante toda a implementação, embora existam ruídos na implementação, como observado nas funções de Lyapunov apresentadas na Figura 17.

Figura 15 - Sinal de controle definido por (95) utilizado no eixo x do sistema *Ball Balancer Quanser*[®] durante implementação.



Fonte: próprio autor.

Figura 16 - Escolha dos ganhos de realimentação da lei de controle (95) para o eixo x do sistema *Ball Balancer Quanser*[®] durante implementação.

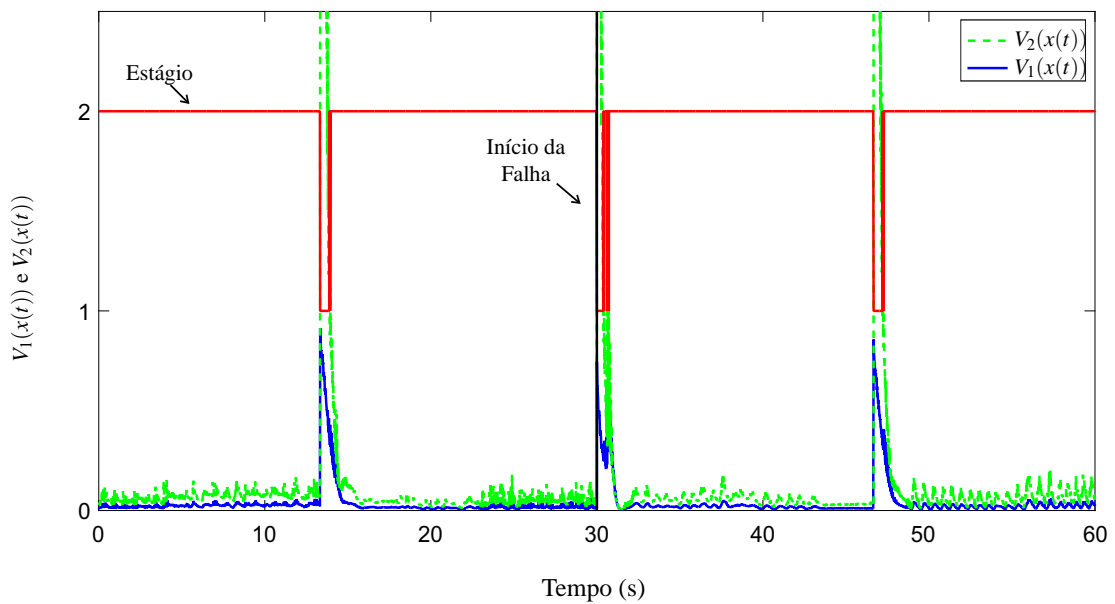


Fonte: próprio autor.

4.4 COMENTÁRIOS

Neste capítulo foram apresentados resultados de implementação do controle chaveado, com projeto proposto no Capítulo 3, no sistema *Ball Balancer Quanser*[®]. De modo a conciliar

Figura 17 - Funções de Lyapunov utilizadas na escolha do controlador (variável ι em (95)) do eixo x do sistema *Ball Balancer Quanser*[®] durante implementação.

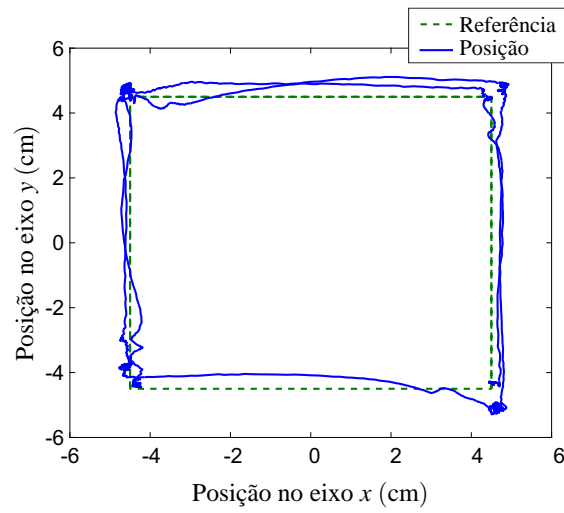


Fonte: próprio autor.

uma região com condições iniciais de maiores normas com uma taxa de decaimento adequada quando o estado do sistema encontra-se “próximo” ao ponto de equilíbrio, foi proposta a utilização de estágios no controle, projetando mais de um controlador e escolhendo qual será utilizado com base nas respectivas funções de Lyapunov associadas. Os resultados no sistema *Ball Balancer Quanser*[®] mostraram o bom desempenho da estratégia proposta.

Como mostrado, o controle chaveado possibilita resultados práticos (SOUZA et al., 2014a; ALVES et al., 2016a). Porém, como pode ser observado nos exemplos do Capítulo 3, como não há restrição no chaveamento dos controladores, o mesmo pode acarretar em *chattering*, que pode prejudicar a implementação desta lei de controle em alguns casos. A seguir, no Capítulo 5 apresenta-se uma estratégia para suprimir o *chattering* em controle chaveado baseada no conceito do mínimo suave, que suaviza a mudança nos ganhos de realimentação.

Figura 18 - Posição da bola no plano xy utilizando estágios no controle (95) do sistema *Ball Balancer* Quanser[®] durante implementação.



Fonte: próprio autor.

5 O MÍNIMO SUAVE E O CONTROLE CHAVEADO SUAVE SUJEITO À SATURAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S

No Capítulo 3 o controle chaveado (SOUZA et al., 2014c; SOUZA et al., 2014b) foi utilizado com sucesso no controle de uma classe de sistemas não lineares incertos com saturação no atuador em uma região de operação. Apesar de bom desempenho, observou-se nos resultados que o sinal de controle pode apresentar *chattering*. Mesmo sendo possível a implementação desta lei de controle, como mostrado no Capítulo 4, um chaveamento excessivamente rápido no sinal de controle pode prejudicar a implementação desta técnica de controle em certas aplicações.

Neste capítulo apresenta-se a lei de controle chaveada suave proposta em Alves et al. (2016c), que baseia-se no conceito de “mínimo suave” e pode ser utilizada para lidar com o *chattering* na lei de controle chaveada. Esta nova lei de controle pode ser aplicada nas mesmas condições da lei de controle chaveada e apresenta como inconveniente a garantia, apenas, da estabilidade *ultimate bounded* frente a estabilidade assintótica garantida pela lei de controle chaveada. Entretanto, como será visto, a região *ultimate bounded* depende de parâmetros de suavização escolhidos pelo projetista e pode ser tão pequena quanto se queira.

No desenvolvimento deste capítulo utilizam-se as relações entre as funções $\text{sgn}(\cdot)$ e $\text{sgn}^*(\cdot)$, definidas a seguir:

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z = 0, \\ \frac{z}{|z|}, & \text{se } z \neq 0, \end{cases} \quad (96)$$

$$\text{sgn}^*(z) = \frac{z}{|z| + \gamma}, \gamma > 0; \quad \text{sgn}^*(z) = \text{sgn}(z) \text{ se } \gamma = 0, \quad (97)$$

sendo γ um parâmetro de suavização.

5.1 CÁLCULO DO MÍNIMO UTILIZANDO A FUNÇÃO SINAL

Nesta seção a função mínimo é descrita utilizando a função sinal. Esta descrição é utilizada para propor o conceito de mínimo suave e então este novo conceito é empregado na proposta da lei de controle chaveada suave.

Lema 2 (ALVES et al., 2016c). *O mínimo entre dois números reais pode ser calculado por*

$$m_i = \min \{a_1, a_2\} = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \text{sgn}(a_2 - a_1). \quad (98)$$

Demonstração. A prova será feita por casos:

- Se $a_1 < a_2 \Rightarrow a_1 - a_2 < 0$: $m_i = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}(+1) = a_1$;
- Se $a_2 < a_1 \Rightarrow a_1 - a_2 > 0$: $m_i = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}(-1) = a_2$;
- Se $a_2 = a_1 \Rightarrow a_1 - a_2 = 0$: $m_i = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{0}{2}(0) = a_1 = a_2$.

□

Lema 3 (ALVES et al., 2016c). *O máximo entre dois números reais pode ser calculado por*

$$m_a = \max \{a_1, a_2\} = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \operatorname{sgn}(a_1 - a_2). \quad (99)$$

Demonstração. A prova é similar à prova do Lema 2. □

Observação 3 (ALVES et al., 2016c). *O mínimo em um conjunto com n elementos pode ser calculado utilizando a equação (98), observando que*

$$\min\{U_1, U_2, \dots, U_n\} = \min\{U_n, \min\{U_1, \dots, U_{n-1}\}\}, \quad (100)$$

ou seja, o mínimo pode ser calculado recursivamente.

Seja a matriz Q_φ^n , tal que $x(t)^T Q_\varphi^n x(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_n} \{x(t)^T Q_i x(t)\}$. Então, utilizando $U_i = x(t)^T Q_i x(t)$, $i \in \mathbb{I}_n$, partindo de (98) e (100), tem-se

$$\begin{aligned} x(t)^T Q_\varphi^n x(t) &= \min \left\{ x(t)^T Q_n x(t), x(t)^T Q_\varphi^{n-1} x(t) \right\} \\ &= x(t)^T \left[\frac{Q_n + Q_\varphi^{n-1}}{2} + \frac{Q_\varphi^{n-1} - Q_n}{2} \operatorname{sgn}(U_n - \min\{U_1, U_2, \dots, U_{n-1}\}) \right] x(t). \end{aligned} \quad (101)$$

Portanto, a matriz Q_φ^n pode ser calculada como

$$Q_\varphi^n = \frac{Q_n + Q_\varphi^{n-1}}{2} + \frac{Q_\varphi^{n-1} - Q_n}{2} \operatorname{sgn}(U_n - \min\{U_1, U_2, \dots, U_{n-1}\}), \quad (102)$$

sendo Q_φ^{n-1} a matriz tal que $x(t)^T Q_\varphi^{n-1} x(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_{n-1}} \{x(t)^T Q_i x(t)\}$. Assim, Q_φ^n pode ser recursivamente calculada, definindo $Q_\varphi^1 = Q_1$.

Aplicando esta metodologia de cálculo do mínimo à lei de controle chaveada (70), a matriz de ganho de realimentação $K_\varphi^{n_r}$ associada a $Q_\varphi^{n_r}$ tal que $x(t)^T Q_\varphi^{n_r} x(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_{n_r}} \{x(t)^T Q_i x(t)\}$ pode

ser recursivamente calculada por

$$K_\varphi^{n_r} = \frac{K_{n_r} + K_\varphi^{n_r-1}}{2} + \frac{K_\varphi^{n_r-1} - K_{n_r}}{2} \operatorname{sgn}(U_{n_r} - \min\{U_1, U_2, \dots, U_{n_r-1}\}), \quad (103)$$

sendo $U_i = x(t)^T Q_i x(t)$, $i \in \mathbb{I}_{n_r}$ e $K_\varphi^{n_r-1}$ a matriz correspondente a $Q_\varphi^{n_r-1}$, sendo o caso base $K_\varphi^1 = K_1$.

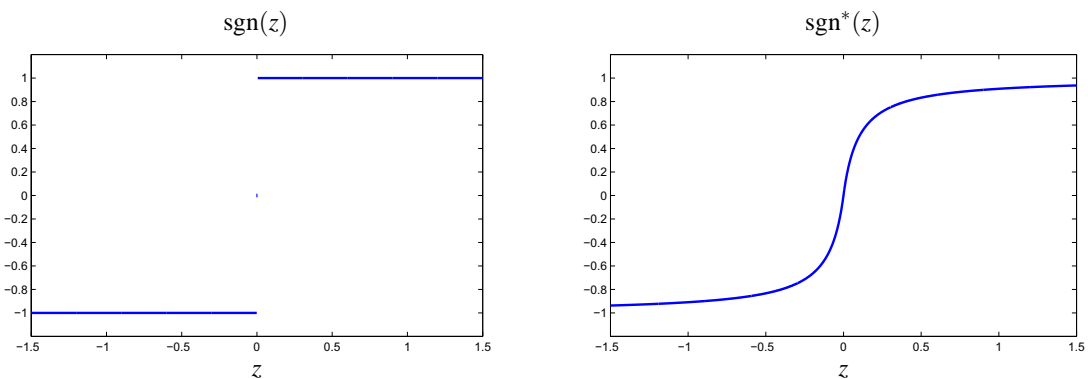
Por exemplo, suponha que foram projetados 4 ganhos de realimentação K_i , $i \in \mathbb{I}_4$, e 4 matrizes de decisão Q_i , $i \in \mathbb{I}_4$. Assim, o ganho K_φ tal que $x(t)^T Q_\varphi x(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_4} \{x(t)^T Q_i x(t)\}$ pode ser calculado recursivamente usando (103), sendo $U_i = -x(t)^T Q_i x(t)$, como segue:

$$\begin{aligned} K_\varphi^2 &= \frac{(K_2 + K_1)}{2} + \frac{(K_1 - K_2)}{2} \operatorname{sgn}(U_2 - U_1); \\ K_\varphi^3 &= \frac{(K_3 + K_\varphi^2)}{2} + \frac{(K_\varphi^2 - K_3)}{2} \operatorname{sgn}(U_3 - \min\{U_1, U_2\}); \\ K_\varphi^4 &= \frac{(K_4 + K_\varphi^3)}{2} + \frac{(K_\varphi^3 - K_4)}{2} \operatorname{sgn}(U_4 - \min\{U_1, U_2, U_3\}); \\ u_\varphi(t) &= -K_\varphi^4 x(t). \end{aligned} \quad (104)$$

5.2 O MÍNIMO SUAWE

Para se obter o mínimo suave aproxima-se a descontinuidade na função mínimo, resultante da função sinal em (98) e (100), por uma função suave. Neste trabalho a função sinal $\operatorname{sgn}(\cdot)$ definida em (96) é substituída pela função sigmóide $\operatorname{sgn}^*(\cdot)$ definida em (97), embora outras aproximações sejam possíveis (ALVES et al., 2015). Na Figura 19 são mostrados os gráficos das funções $\operatorname{sgn}(z)$ e $\operatorname{sgn}^*(z)$, sendo $\gamma = 0,01$, e é possível perceber como atua a suavização proposta.

Figura 19 - Gráficos das funções $\operatorname{sgn}(z)$ (96) e $\operatorname{sgn}^*(z)$ (97), $\gamma = 0,01$.



Fonte: Alves et al. (2016c).

Lema 4 (ALVES et al., 2016c). *As funções $\operatorname{sgn}(z)$ (96) e $\operatorname{sgn}^*(z)$ (97) satisfazem a seguinte*

igualdade:

$$\operatorname{sgn}^*(z) = \operatorname{sgn}(z) - \operatorname{sgn}(z) \frac{\gamma}{|z| + \gamma}. \quad (105)$$

Demonstração. Note que, para $z = 0$, a partir de (96) e (97), (105) é diretamente satisfeita. Para $z \neq 0$ tem-se

$$\operatorname{sgn}^*(z) = \frac{z}{|z| + \gamma} = \frac{z}{|z|} - \frac{z}{|z|} \frac{\gamma}{|z| + \gamma} = \operatorname{sgn}(z) - \operatorname{sgn}(z) \frac{\gamma}{|z| + \gamma}.$$

□

Definição 1 (ALVES et al., 2016c). O “mínimo suave” entre r valores $\min^*\{a_1, \dots, a_r\}$ é definido recursivamente como

$$\min^*\{a_1, \dots, a_r\} = \frac{a_r + a_{r-1}^*}{2} + \frac{a_{r-1}^* - a_r}{2} \operatorname{sgn}^*(a_r - \min\{a_1, \dots, a_{r-1}\}), \quad (106)$$

sendo $a_{r-1}^* = \min^*\{a_1, \dots, a_{r-1}\}$ e o caso base definido como $\min^*\{a_1\} = a_1$.

A partir da Definição 1, quando $r = 2$ encontra-se que $\min^*\{a_1, a_2\} = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \operatorname{sgn}^*(a_2 - a_1)$, que é o resultado da substituição de ‘ $\operatorname{sgn}(a_2 - a_1)$ ’ por ‘ $\operatorname{sgn}^*(a_2 - a_1)$ ’ na equação (98).

De forma similar ao mínimo convencional, calcula-se a matriz $Q_{\varphi^*}^n$ tal que $x(t)^T Q_{\varphi^*}^n x(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_n}^* \{x(t)^T Q_i x(t)\}$ a partir da Definição 1, recursivamente. Seguindo a mesma análise apresentada para (101) e (102), tem-se

$$Q_{\varphi^*}^n = \frac{Q_n + Q_{\varphi^*}^{n-1}}{2} + \frac{Q_{\varphi^*}^{n-1} - Q_n}{2} \operatorname{sgn}^*(U_n - \min\{U_1, U_2, \dots, U_{n-1}\}), \quad (107)$$

sendo $U_i = x(t)^T Q_i x(t)$ e $Q_{\varphi^*}^{n-1}$ a matriz que satisfaz $x(t)^T Q_{\varphi^*}^{n-1} x(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_{n-1}}^* \{x(t)^T Q_i x(t)\}$. O caso base é definido como $Q_{\varphi^*}^1 = Q_1$.

5.3 CONTROLE CHAVEADO SUAVE PARA UMA CLASSE DE SISTEMA NÃO LINEARES INCERTOS

Baseado no controle chaveado (70) e nos resultados que foram descritos nas seções anteriores, em Alves et al. (2016c) é proposta a lei de controle chaveada suave

$$u(t) = u_{\varphi^*}(t) = -K_{\varphi^*}^{n_r} x(t), \quad (108)$$

sendo $K_{\varphi^*}^{n_r}$ o ganho correspondente à matriz $Q_{\varphi^*}^{n_r}$ (107), calculado em um conjunto de ganhos de realimentação $\{K_1, \dots, K_{n_r}\}$, e $Q_{\varphi^*}^{n_r}$ calculada tal que $x(t)^T Q_{\varphi^*}^{n_r} x(t)$ seja o mínimo suave calculado para o conjunto $\{x(t)^T Q_1 x(t), \dots, x(t)^T Q_{n_r} x(t)\}$. Assim, o ganho $K_{\varphi^*}^{n_r}$ é definido como a seguir.

Definição 2 (ALVES et al., 2016c). Seja $U_i = x(t)^T Q_i x(t)$, $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, então, de (107) e (108) a matriz $K_{\varphi^*}^{n_r}$ correspondente a $Q_{\varphi^*}^{n_r}$ é recursivamente calculada usando

$$K_{\varphi^*}^{n_r} = \frac{K_{n_r} + K_{\varphi^*}^{n_r-1}}{2} + \frac{K_{\varphi^*}^{n_r-1} - K_{n_r}}{2} \operatorname{sgn}^*(U_{n_r} - \min\{U_1, U_2, \dots, U_{n_r-1}\}), \quad (109)$$

sendo $K_{\varphi^*}^{n_r-1}$ o ganho correspondente a $Q_{\varphi^*}^{n_r-1}$, e tendo como caso base $K_{\varphi^*}^1 = K_1$.

Para exemplificar, novamente suponha 4 ganhos de realimentação K_i , $i \in \mathbb{I}_4$, e suas respectivas matrizes de decisão Q_i , $i \in \mathbb{I}_4$. Usando a Definição 2, com $U_i = x(t)^T Q_i x(t)$, o ganho $K_{\varphi^*}^{n_r}$ correspondente à matriz $Q_{\varphi^*}^{n_r}$ tal que $x(t)^T Q_{\varphi^*}^{n_r} x(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_4}^* \{x(t)^T Q_i x(t)\}$ é calculada de maneira análoga a (104), substituindo $\operatorname{sgn}(\cdot)$ por $\operatorname{sgn}^*(\cdot)$, como segue:

$$\begin{aligned} K_{\varphi^*}^2 &= \frac{(K_2 + K_1)}{2} + \frac{(K_1 - K_2)}{2} \operatorname{sgn}^*(U_2 - U_1); \\ K_{\varphi^*}^3 &= \frac{(K_3 + K_{\varphi^*}^2)}{2} + \frac{(K_{\varphi^*}^2 - K_3)}{2} \operatorname{sgn}^*(U_3 - \min\{U_1, U_2\}); \\ K_{\varphi^*}^4 &= \frac{(K_4 + K_{\varphi^*}^3)}{2} + \frac{(K_{\varphi^*}^3 - K_4)}{2} \operatorname{sgn}^*(U_4 - \min\{U_1, U_2, U_3\}). \end{aligned} \quad (110)$$

Lema 5 (ALVES et al., 2016c). O ganho $K_{\varphi^*}^{n_r}$, $n_r \geq 2$, definido em (109) pode ser escrito como

$$K_{\varphi^*}^{n_r} = \sum_{i=1}^{n_r} \mu_i K_i, \quad \sum_{i=1}^{n_r} \mu_i = 1, \quad \mu_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{I}_{n_r}, \quad (111)$$

sendo μ_i , $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, funções contínuas de $x(t)$. Além disso, as funções μ_i , $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, $n_r \geq 2$, em (111) podem ser calculadas, usando $U_i = x(t)^T Q_i x(t)$, da seguinte maneira:

$$\mu_i = \begin{cases} \prod_{l=i+1}^{n_r} p(l), & i = 1, \\ q(i) \prod_{l=i+1}^{n_r} p(l), & i \neq 1, n_r, \\ q(i), & i = n_r, \end{cases} \quad (112a)$$

$$p(i) = 0,5 + 0,5 \operatorname{sgn}^* \left(U_i - \min_{j \in \mathbb{I}_{i-1}} \{U_j\} \right), \quad (112b)$$

$$q(i) = 0,5 - 0,5 \operatorname{sgn}^* \left(U_i - \min_{j \in \mathbb{I}_{i-1}} \{U_j\} \right). \quad (112c)$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução.

Passo base: seja $n_r = 2$, $U_i = x(t)^T Q_i x(t)$, de (109) segue que

$$\begin{aligned} K_{\varphi^*}^2 &= 0,5(K_2 + K_1) + 0,5(K_1 - K_2) \operatorname{sgn}^*(U_2 - U_1), \\ K_{\varphi^*}^2 &= [0,5 + 0,5 \operatorname{sgn}^*(U_2 - U_1)] K_1 + [0,5 - 0,5 \operatorname{sgn}^*(U_2 - U_1)] K_2. \end{aligned} \quad (113)$$

Definindo

$$\mu_1 = 0,5 + 0,5 \operatorname{sgn}^*(U_2 - U_1), \quad \mu_2 = 0,5 - 0,5 \operatorname{sgn}^*(U_2 - U_1), \quad (114)$$

segue que $K_{\varphi^*}^2 = \sum_{i=1}^2 \mu_i K_i$. Então, de (97), $\operatorname{sgn}^*(U_2 - U_1) \in [-1, 1]$ é uma função contínua, implicando que, de (113) e (114), $\mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$ e também são funções contínuas de $x(t)$. Portanto, (111) é verdadeira para $n_r = 2$.

Passo indutivo: seja $n_r > 2$, $n_r \in \mathbb{Z}_+$ e assuma que (111) é satisfeita para $n_r = m$:

$$K_{\varphi^*}^m = \sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i K_i, \quad \sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i = 1, \quad \bar{\mu}_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{I}_m, \quad (115)$$

sendo $\bar{\mu}_i$, $i \in \mathbb{I}_m$ funções contínuas de $x(t)$. Então, de (109), segue que

$$K_{\varphi^*}^{m+1} = 0,5 \left(K_{m+1} + K_{\varphi^*}^m \right) + 0,5 \left(K_{\varphi^*}^m - K_{m+1} \right) \operatorname{sgn}^*(U_{m+1} - \min \{U_1, \dots, U_m\}),$$

$$K_{\varphi^*}^{m+1} = [0,5 + 0,5 \operatorname{sgn}^*(U_{m+1} - \min \{U_1, \dots, U_m\})] K_{\varphi^*}^m + [0,5 - 0,5 \operatorname{sgn}^*(U_{m+1} - \min \{U_1, \dots, U_m\})] K_{m+1}. \quad (116)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{m+1} &= 0,5 - 0,5 \operatorname{sgn}^*(U_{m+1} - \min \{U_1, \dots, U_m\}), \\ \bar{\mu}_m^* &= 0,5 + 0,5 \operatorname{sgn}^*(U_{m+1} - \min \{U_1, \dots, U_m\}), \end{aligned} \quad (117)$$

tem-se que, a partir de (115), (116) e (117),

$$K_{\varphi^*}^{m+1} = \bar{\mu}_m^* K_{\varphi^*}^m + \bar{\mu}_{m+1} K_{m+1} = \bar{\mu}_m^* \sum_{j=1}^m \bar{\mu}_j K_j + \bar{\mu}_{m+1} K_{m+1}. \quad (118)$$

Faz-se então a seguinte mudança de variáveis

$$\mu_{m+1} = \bar{\mu}_{m+1}, \quad \mu_i = \bar{\mu}_m^* \bar{\mu}_i, \quad i \in \mathbb{I}_m. \quad (119)$$

Portanto, a partir de (118) segue que $K_{\varphi^*}^{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} \mu_i K_i$ e, de (119), todas as funções μ_i são contínuas. Além disso, de (119), (117) e (115),

$$\sum_{i=1}^{m+1} \mu_i = \bar{\mu}_{m+1} + \sum_{i=1}^m \bar{\mu}_m^* \bar{\mu}_i = \bar{\mu}_{m+1} + \bar{\mu}_m^* \sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i = \bar{\mu}_{m+1} + \bar{\mu}_m^* = 1. \quad (120)$$

Assim, (111) é verdadeira para $n_r = m + 1$ e, pelo princípio da indução matemática, (111) é verdadeira para todo $n_r \geq 2$. Ademais, como $\bar{\mu}_i$, $i \in \mathbb{I}_m$, $\bar{\mu}_{m+1}$ e $\bar{\mu}_m^*$ são funções contínuas, então μ_i , $i \in \mathbb{I}_{m+1}$ também são funções contínuas.

Agora, para o verificar o cálculo das funções μ_i , $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, $n_r \geq 2$, em (111), a partir de (112), observe o passo indutivo de (113)-(120). Para $n_r = 2$, usando (112) encontra-se

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \prod_{l=2}^2 p(l) = p(2) = 0,5 + 0,5 \operatorname{sgn}^* \left(U_2 - \min_{j \in \mathbb{I}_1} \{U_j\} \right) = 0,5 + 0,5 \operatorname{sgn}^* (U_2 - U_1), \\ \mu_2 &= q(2) = 0,5 - 0,5 \operatorname{sgn}^* \left(U_2 - \min_{j \in \mathbb{I}_1} \{U_j\} \right) = 0,5 - 0,5 \operatorname{sgn}^* (U_2 - U_1),\end{aligned}$$

que é igual a (114). Considerando (112) verdadeiro para $n_r = m$, tem-se que

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \prod_{l=2}^m p(l), \\ \mu_i &= q(i) \prod_{l=i+1}^m p(l), \quad i = 2, \dots, m-1, \\ \mu_m &= q(m).\end{aligned}\tag{121}$$

Calculando as funções de ativação de ganhos μ_i , $i \in \mathbb{I}_{m+1}$ a partir de (119), tem-se que

$$\begin{aligned}\mu_1 &= p(m+1) \prod_{l=2}^m p(l), \\ \mu_i &= q(i) p(m+1) \prod_{l=i+1}^m p(l), \quad i = 2, \dots, m-1, \\ \mu_m &= q(m) p(m+1), \\ \mu_{m+1} &= 0,5 - 0,5 \operatorname{sgn}^* (U_{m+1} - \min \{U_1, \dots, U_m\}) = q(m+1),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \prod_{l=2}^{m+1} p(l), \\ \mu_i &= q(i) \prod_{l=i+1}^{m+1} p(l), \quad i = 2, \dots, m \\ \mu_{m+1} &= q(m+1),\end{aligned}$$

que é o mesmo resultado encontrado pela aplicação da equação (112) para $n_r = m+1$. \square

Importante observar que, pelo Lema 5, $u(t)$ dado em (108) é uma lei de controle contínua no tempo. Note também, que a partir do Lema 5, $K_{\varphi^*}^{n_r}$ é uma combinação convexa entre os ganhos K_i , $i \in \mathbb{I}_{n_r}$.

Lema 6 (ALVES et al., 2016c). *As matrizes Q_{φ}^n e $Q_{\varphi^*}^n$ definidas em (102) e (107), respectivamente, são relacionadas por*

$$Q_{\varphi^*}^n = Q_{\varphi}^n + \Upsilon_n \tag{122a}$$

valendo a desigualdade

$$0 \leq x(t)^T \Upsilon_n x(t) \leq (n-1) \frac{\gamma}{2}, \quad n \geq 2. \quad (122b)$$

Demonstração. A prova é realizada por indução.

Passo base: usando (107), $n = 2$, $U_i = x(t)^T Q_i x(t)$ e (105), segue que

$$\begin{aligned} Q_{\varphi^*}^2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{2} + \frac{Q_1 - Q_2}{2} \operatorname{sgn}^*(U_2 - U_1) \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{2} + \frac{Q_1 - Q_2}{2} \left[\operatorname{sgn}(U_2 - U_1) - \operatorname{sgn}(U_2 - U_1) \frac{\gamma}{|U_2 - U_1| + \gamma} \right]. \end{aligned}$$

Assim, de (102),

$$Q_{\varphi^*}^2 = Q_{\varphi}^2 + \Upsilon_2, \quad \Upsilon_2 = \frac{Q_2 - Q_1}{2} \operatorname{sgn}(U_2 - U_1) \frac{\gamma}{|U_2 - U_1| + \gamma}.$$

Então,

$$\begin{aligned} x(t)^T \Upsilon_2 x(t) &= x(t)^T \left[\frac{Q_2 - Q_1}{2} \operatorname{sgn}(U_2 - U_1) \frac{\gamma}{|U_2 - U_1| + \gamma} \right] x(t) \\ &= \frac{U_2 - U_1}{2} \operatorname{sgn}(U_2 - U_1) \frac{\gamma}{|U_2 - U_1| + \gamma} = \frac{\gamma}{2} \frac{|U_2 - U_1|}{|U_2 - U_1| + \gamma}. \end{aligned}$$

Portanto, $0 \leq x(t)^T \Upsilon_2 x(t) \leq \gamma/2$ e (122) é satisfeita para $n = 2$.

Passo indutivo: seja $n > 2$, $n \in \mathbb{Z}_+$ e (122) verdadeira para $n = m$:

$$Q_{\varphi^*}^m = Q_{\varphi}^m + \Upsilon_m, \quad 0 \leq x(t)^T \Upsilon_m x(t) \leq (m-1) \frac{\gamma}{2}. \quad (123)$$

Calculando $Q_{\varphi^*}^{m+1}$, de (107), encontra-se (usando $U_{m+1}^- = U_{m+1} - \min_{i \in \mathbb{I}_m} \{U_i\}$)

$$Q_{\varphi^*}^{m+1} = \frac{Q_{m+1} + Q_{\varphi^*}^m}{2} + \frac{Q_{\varphi^*}^m - Q_{m+1}}{2} \operatorname{sgn}^*(U_{m+1}^-). \quad (124)$$

Então, de (124), (123), (105) e (102),

$$\begin{aligned} Q_{\varphi^*}^{m+1} &= \frac{Q_{m+1} + Q_{\varphi}^m + \Upsilon_m}{2} + \frac{Q_{\varphi}^m + \Upsilon_m - Q_{m+1}}{2} \operatorname{sgn}^*(U_{m+1}^-) \\ &= \frac{Q_{m+1} + Q_{\varphi}^m}{2} + \frac{Q_{\varphi}^m - Q_{m+1}}{2} \left[\operatorname{sgn}(U_{m+1}^-) - \operatorname{sgn}(U_{m+1}^-) \frac{\gamma}{\gamma + |U_{m+1}^-|} \right] \\ &\quad + \frac{\Upsilon_m}{2} [1 + \operatorname{sgn}^*(U_{m+1}^-)] \end{aligned}$$

$$= Q_\phi^{m+1} + \frac{\Upsilon_m}{2} [1 + \operatorname{sgn}^*(U_{m+1}^-)] + \frac{Q_{m+1} - Q_\phi^m}{2} \operatorname{sgn}(U_{m+1}^-) \frac{\gamma}{\gamma + |U_{m+1}^-|}.$$

Assim,

$$\Upsilon_{m+1} = \frac{\Upsilon_m}{2} [1 + \operatorname{sgn}^*(U_{m+1}^-)] + \frac{Q_{m+1} - Q_\phi^m}{2} \operatorname{sgn}(U_{m+1}^-) \frac{\gamma}{\gamma + |U_{m+1}^-|}.$$

Consequentemente, de (123),

$$x(t)^T \Upsilon_{m+1} x(t) \leq (m-1) \frac{\gamma}{2.2} [1 + \operatorname{sgn}^*(U_{m+1}^-)] + \frac{\gamma}{2} \frac{|U_{m+1}^-|}{|U_{m+1}^-| + \gamma}.$$

Note que

$$0 \leq 1 + \operatorname{sgn}^*(U_{m+1}^-) \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{|U_{m+1}^-|}{|U_{m+1}^-| + \gamma} \leq 1.$$

Portanto,

$$x(t)^T \Upsilon_{m+1} x(t) \leq (m-1) \frac{\gamma}{2.2} 2 + \frac{\gamma}{2} = m \frac{\gamma}{2}$$

e (122) é verdadeira para $n = m + 1$, finalizando a prova do passo indutivo. Então, pelo princípio da indução matemática, (122) é verdadeira para todo $n \geq 2$. \square

Com base na discussão realizada, o próximo teorema fornece condições para que a lei de controle chaveada suave, definida em (108), sendo $K_{\phi^*}^{n_r}$ o ganho correspondente à matriz $Q_{\phi^*}^{n_r}$, definida em (109), garanta a estabilidade *ultimate bounded* local do sistema controlado (68) e (108).

Teorema 2 (ALVES et al., 2016c). *Suponha que as condições do Teorema 1 (página 46) para o sistema não linear incerto (68) exatamente descrito por um modelo fuzzy T-S (69) considerando a lei de controle chaveada (70), sejam satisfeitas, e além disso exista matriz simétrica $\bar{Y} > 0$, $\bar{Y} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, tal que*

$$A_i X + X A_i^T + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + \bar{Y} < 0, \quad (125a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa} \bar{Y} & X \\ X & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (125b)$$

sendo $\bar{\kappa} = 2\kappa [(n_r - 1)\gamma]^{-1}$, $0 < \kappa \leq 1$, e γ o parâmetro de suavização usado em (97) e também em (109), sejam satisfeitas para todo $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, e sejam obtidos $P = X^{-1}$, $Y = X^{-1} \bar{Y} X^{-1}$, $K_i = M_i P$ e $Q_i = P \bar{Q}_i P$ para todo $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, $n_r \geq 2$. Então, a lei de controle chaveada suave (108) aplicada ao sistema (68) assegura a estabilidade *ultimate bounded* local do sistema controlado para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$.

Demonstração. Adote como candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, $P = P^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$. Defina $\dot{V}_\varphi(x(t))$ e $\dot{V}_{\varphi^*}(x(t))$ como a derivada temporal de $V(x(t))$ para o sistema (69), com lei de controle (70), página 46, e (108), respectivamente. Note que, pré- e pós-multiplicando a primeira desigualdade em (71c) por $\text{diag}\{1, P\}$, sendo $P = X^{-1}$, fazendo $H_{j(l)} = G_{j(j)}P$, depois multiplicando as desigualdades resultantes por μ_j , $j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n_r} \mu_j = 1$, e somando de $j = 1$ até n_r , definindo $H_{\varphi^*(l)} = \sum_{j=1}^{n_r} \mu_j H_{j(l)}$, e então aplicando o complemento de Schur em relação a primeira linha e coluna da desigualdade obtida, tem-se $P - H_{\varphi^*(l)}^T \rho_l^{-2} H_{\varphi^*(l)} \geq 0$ e seguindo o procedimento em (48)-(49), da página 40, sabe-se que $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{L}(H_{\varphi^*})$. De (111), $u(t) = -K_{\varphi^*} x(t) = -\sum_{j=1}^{n_r} \mu_j K_j x(t)$ e para $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$ tem-se que

$$\text{sat}(-K_{\varphi^*} x(t)) = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-K_{\varphi^*} x(t)) + D_s^-(H_{\varphi^*} x(t))].$$

Se (71b) é satisfeita para i e $j \in \mathbb{I}_{n_r}$, e para todo D_s e $D_s^- \in \mathcal{D}$, então pré- e pós-multiplicando (71b) por $P = X^{-1}$, fazendo as mudanças de variáveis (75) e multiplicando as LMIs resultantes por μ_j (111), e fazendo a soma de $j = 1$ até n_r , de (111) e (122a), segue que

$$PB_i [-D_s K_{\varphi^*} + D_s^- H_{\varphi^*}] + [-D_s K_{\varphi^*} + D_s^- H_{\varphi^*}]^T B_i^T P \leq Z_i + Q_{\varphi^*}^{n_r} = Z_i + Q_{\varphi}^{n_r} + Y_{n_r}, \quad (126)$$

sendo $H_{\varphi^*} = \sum_{j=1}^r \mu_j H_j$ e $Q_{\varphi}^{n_r}$ a matriz tal que $x(t)^T Q_{\varphi}^{n_r} x(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_{n_r}} \{x(t)^T Q_i x(t)\}$. Consequentemente, seguindo o mesmo procedimento utilizado entre as equações (76) e (78), e considerando (122b) do Lema (6), tem-se

$$\dot{V}_{\varphi^*}(x(t)) \leq \dot{V}_\varphi(x(t)) + x(t)^T Y_{n_r} x(t) \leq \dot{V}_\varphi(x(t)) + \frac{(n_r - 1)\gamma}{2}. \quad (127)$$

Portanto, a partir da prova do Teorema 1 e de (78), pré- e pós-multiplicando (125a) por $P = X^{-1}$ e em seguida multiplicando α_i e fazendo a soma de $i = 1$ até n_r , de (127), sendo $Q_i = P\bar{Q}_i P$, $Z_i = P\bar{Z}_i P$ e $Y = P\bar{Y}_i P$, segue que

$$\dot{V}_{\varphi^*}(x(t)) \leq -x(t)^T Y x(t) + \frac{(n_r - 1)\gamma}{2}. \quad (128)$$

Assim, $\dot{V}_{\varphi^*}(x(t)) < 0$ se $-x(t)^T Y x(t) < -(n_r - 1)\gamma/2$, isto é, o conjunto $\mathcal{E}(Y, (n_r - 1)\gamma/2)$ é um limitante para a estabilidade *ultimate bounded*, pois se $x(t) \in \mathcal{E}(Y, (n_r - 1)\gamma/2)$, então $x(t)^T Y x(t) \leq (n_r - 1)\gamma/2$ e não há garantias que $\dot{V}_{\varphi^*}(x(t)) < 0$. Como $Y > 0$ tem-se que $-x(t)^T Y x(t) \leq -\varepsilon \|x(t)\|_2^2$, sendo ε o menor autovalor de Y , que é positivo. Consequentemente,

mente,

$$\dot{V}_{\varphi^*}(x(t)) \leq -\varepsilon \|x(t)\|_2^2 + \frac{(n_r - 1)\gamma}{2}.$$

Finalmente, $\dot{V}(x(t)) < 0$ se $-\varepsilon \|x(t)\|_2^2 + (n_r - 1)\gamma/2 < 0$, ou

$$\|x(t)\|_2 > \sqrt{\frac{(n_r - 1)\gamma}{2\varepsilon}}.$$

Então, de acordo com Corless e Leitmann (1981) o sistema controlado é *ultimate bounded* estável. Pré- e pós-multiplicando (125b) por $\text{diag}\{P, P\}$, sendo $P = X^{-1}$, aplicando o complemento de Schur com respeito a segunda linha e coluna, e substituindo $\bar{\kappa} = 2\kappa[(n_r - 1)\gamma]^{-1}$ tem-se

$$\begin{aligned} 2\kappa[(n_r - 1)\gamma]^{-1}Y - PXP &\geq 0, \\ x(t)^T \left\{ 2\kappa[(n_r - 1)\gamma]^{-1}Y \right\} x(t) &\geq x(t)^T P x(t). \end{aligned} \quad (129)$$

Se $x(t) \in \mathcal{E}(Y, (n_r - 1)\gamma/2)$, então $x(t)^T Y x(t) \leq (n_r - 1)\gamma/2$ e, de (129),

$$\begin{aligned} \kappa &= 2\kappa[(n_r - 1)\gamma]^{-1} (n_r - 1)\gamma/2 \geq 2\kappa[(n_r - 1)\gamma]^{-1} x(t)^T Y x(t) \geq x(t)^T P x(t), \\ \kappa &\geq x(t)^T P x(t), \end{aligned}$$

e assim, de (45), página 39, segue que $x(t) \in \mathcal{E}(P, \kappa)$. Então, como $0 < \kappa \leq 1$, $\mathcal{E}(Y, (n_r - 1)\gamma/2) \subset \mathcal{E}(P, \kappa) \subset \mathcal{E}(P, 1)$, uma condição suficiente para que a *ultimate bound* esteja contida na região de operação \mathcal{X} (13). Além disso, a partir de (128) observe que $\dot{V}_{\varphi^*}(x) < 0$ se $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$ e $x(t) \notin \mathcal{E}(Y, (n_r - 1)\gamma/2)$. Note também que um valor pequeno de κ resulta em um conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(Y, (n_r - 1)\gamma/2)$ “pequeno”. \square

5.3.1 Tratamento de distúrbios ou incertezas no sinal de controle

Considere um sistema não linear incerto sujeito a incertezas e/ou distúrbios casados $B(\alpha)d(t)$ descrito por (83), página 51, e a lei de controle chaveada suave robusta

$$u(t) = \text{sat}_0(u_{\varphi^*}(t)) - v_{\sigma^*}, \quad (130a)$$

sendo $u_{\varphi^*}(t)$ a lei de controle definida em (108), v_{σ^*} definido tal que $-x(t)^T P B_0 v_{\sigma^*} = \min_{i \in \mathbb{I}_2}^* \{-x(t)^T P B_0 v_i\}$ e $\text{sat}_0(\cdot)$ definido em (50) e (68b) substituindo ρ_l por $\rho_{0(l)} = \rho_l - \max_{i \in \mathbb{I}_2} \{|v_i|\}$. Assim, usando a mesma metodologia empregada em (101), (102) e (107), de (105) e (106), tem-se

$$v_{\sigma^*} = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_2 - v_1}{2} \text{sgn}^*(\hat{U}_1 - \hat{U}_2)$$

$$= \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_2 - v_1}{2} \left[\frac{(\hat{U}_1 - \hat{U}_2)}{|\hat{U}_1 - \hat{U}_2| + \gamma_\sigma} \right], \gamma_\sigma > 0, \quad (130b)$$

sendo $\hat{U}_i = -x(t)^T P B v_i$.

Corolário 3 (ALVES et al., 2016c). *Suponha que as condições do Teorema 2 para o sistema não linear incerto (68) exatamente descrito por um modelo fuzzy T-S (69) com lei de controle (108), substituindo $\bar{\kappa}$ por $\hat{\kappa} = \kappa[(n_r - 1)\gamma/2 + \gamma_\sigma g_0]^{-1}$ em (125b), sendo $g_0 = \max\{g(x(t))\}$ e γ_σ o parâmetro de suavização utilizado em (130b). Então, a lei de controle chaveada suave robusta (130) assegura a estabilidade ultimate bounded local do sistema não linear incerto exatamente descrito por (83) em \mathcal{X} em (13) para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$.*

Demonstração. Adote como candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, $P = P^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$. Defina $\dot{V}_\varphi(x(t))$, $\dot{V}_{\varphi^*}(x(t))$ e $\dot{V}_{\varphi r^*}(x(t))$ como a derivada temporal de $V(x(t))$ para o sistema (69), com leis de controle (70), (108), e (130), respectivamente. Uma vez que, da análise apresentada em seguida a equação (84), página 51, $\text{sat}(u(t)) = \text{sat}_0(u_\varphi(t)) - v_{\sigma^*}$, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\varphi r^*}(x(t)) &= 2x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= 2x(t)^T P [A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + B(\alpha)d(t)] \\ &= 2x(t)^T P [A(\alpha)x(t) + B(\alpha)\text{sat}_0(u_{\varphi^*}(t))] + 2x(t)^T P B(\alpha) [d(t) - v_{\sigma^*}]. \end{aligned}$$

A partir da prova do Teorema 2, substituindo ρ_l por $\rho_{0(l)}$ nas LMIs (71c), e $B(\alpha) = B_0 g(z(t))$,

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\varphi r^*}(x(t)) &\leq \dot{V}_{\varphi^*}(x(t)) + 2x(t)^T P B_0 [d(t) - v_{\sigma^*}] g(z(t)) \\ &\leq \dot{V}_\varphi(x(t)) + \frac{(n_r - 1)\gamma}{2} + 2x(t)^T P B_0 [d(t) - v_{\sigma^*}] g(z(t)). \end{aligned} \quad (131)$$

Então, usando $\hat{U}_i = -x(t)^T P B_0 v_i$ e o parâmetro de suavização γ_σ em $\text{sgn}^*(\hat{U}_1 - \hat{U}_2)$ (97) de (130b) (γ_σ é diferente de γ usado no cálculo de $Q_{\varphi^*}^{n_r}$ e $K_{\varphi^*}^{n_r}$ em (107) e (109)), segue que

$$\begin{aligned} \min_{i \in \mathbb{I}_2}^* \{-x(t)^T P B_0 v_i\} &= \frac{\hat{U}_1 + \hat{U}_2}{2} + \frac{\hat{U}_1 - \hat{U}_2}{2} \text{sgn}^*(\hat{U}_2 - \hat{U}_1) \\ &= \frac{\hat{U}_1 + \hat{U}_2}{2} + \frac{\hat{U}_1 - \hat{U}_2}{2} \left[\text{sgn}(\hat{U}_2 - \hat{U}_1) - \text{sgn}(\hat{U}_2 - \hat{U}_1) \left(\frac{\gamma_\sigma}{\gamma_\sigma + |\hat{U}_2 - \hat{U}_1|} \right) \right] \\ &= \min_{i \in \mathbb{I}_2} \{-x(t)^T P B_0 v_i\} + \frac{\gamma_\sigma}{2} \frac{|\hat{U}_2 - \hat{U}_1|}{\gamma_\sigma + |\hat{U}_2 - \hat{U}_1|} \\ &\leq \min_{i \in \mathbb{I}_2} \{-x(t)^T P B_0 v_i\} + \frac{\gamma_\sigma}{2}. \end{aligned} \quad (132)$$

Desta análise, o erro entre $\min_{i \in \mathbb{I}_2}^* \{-x(t)^T PB_0 v_i\}$ e $\min_{i \in \mathbb{I}_2} \{-x(t)^T PB_0 v_i\}$ é limitado. Por outro lado, sejam os limitantes $v_1 \leq d(t) \leq v_2$, assim, da análise entre (85) e (86),

$$x(t)^T PB_0 d(t) + \min_{i \in \mathbb{I}_2} \{-x(t)^T PB_0 v_i\} \leq 0. \quad (133)$$

Então, de (131), (132) e (133), e usando que $g_0 = \max_{z(t) \in \mathcal{S}} \{g(z(t))\}$, $\mathcal{S} = \mathcal{X} \times \mathcal{V}$, chega-se em

$$\dot{V}_{\varphi r^*}(x(t)) \leq \dot{V}_{\varphi}(x(t)) + \frac{(n_r - 1)\gamma}{2} + \gamma_{\sigma} g(z(t)) \leq \dot{V}_{\varphi}(x(t)) + \frac{(n_r - 1)\gamma}{2} + \gamma_{\sigma} g_0.$$

Substituindo $\bar{\kappa}$ em (125b) por $\hat{\kappa} = \kappa [(n_r - 1)\gamma/2 + \gamma_{\sigma} g_0]^{-1}$ e seguindo o mesmo procedimento usado na prova do Teorema 2, conclui-se que o sistema não linear exatamente descrito por (83) realimentado utilizando a lei de controle (130) é localmente *ultimate bounded* estável para todo estado inicial $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$. Observe que o limitante da região *ultimate bounded* depende agora do distúrbio, valor de g_0 , e também do parâmetro de suavização utilizado no termo afim da lei de controle (130), parâmetro γ_{σ} . \square

5.4 EXEMPLOS

Assim como na Seção 3.3, esta seção também apresenta projeto de controladores para os sistemas bola-viga e levitador magnético, mas desta vez utilizando o controle chaveado suave. Novamente são utilizados os modelos fuzzy T-S incertos destes sistemas, sendo o procedimento para a obtenção destes modelos descrito na Seção 2.3. Assim como para a lei de controle chaveada projetada no Capítulo 3, a lei de controle chaveado suave não utiliza as funções de pertinência do modelo, podendo estas serem incertas, além disso, também é estimada uma região positivamente invariante dentro da região de operação, tal que para toda condição inicial neste conjunto o modelo fuzzy representa o sistema não linear durante toda a trajetória de estado como uma combinação convexa dos modelos locais.

5.4.1 Controle chaveado suave de um sistema bola-viga

Para o controle chaveado suave do sistema bola-viga utiliza-se os resultados apresentados na Seção 5.3, que adiciona condições LMIs ao Teorema 1. Assim, resolvendo as LMIs (71c) e (80), seguindo o Corolário 1, as LMIs (125) do Teorema 2, em conjunto com as LMIs (81) e LMIs (82), com os mesmos parâmetros utilizados na Subseção 3.3.1 e acrescentando $\kappa = 0,03$ e $\gamma = 0,01$ encontrou-se os ganhos de realimentação, as matrizes de decisão e a matriz P como

segue:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [-20,2591 \quad -51,9371 \quad 242,5577 \quad 38,0056], \\
 K_2 &= [-21,7239 \quad -55,2260 \quad 252,0122 \quad 41,0675], \\
 K_3 &= [-20,3677 \quad -52,1991 \quad 244,9355 \quad 38,1029], \\
 K_4 &= [-21,7227 \quad -55,2215 \quad 253,2572 \quad 40,9959].
 \end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,0096 & -0,0252 & 0,1233 & 0,0199 \\ -0,0252 & -0,0659 & 0,3219 & 0,0519 \\ 0,1233 & 0,3219 & -1,5629 & -0,2516 \\ 0,0199 & 0,0519 & -0,2516 & -0,0402 \end{bmatrix}, & Q_2 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,0085 & -0,0221 & 0,1061 & 0,0254 \\ -0,0221 & -0,0574 & 0,2753 & 0,0652 \\ 0,1061 & 0,2753 & -1,3158 & -0,3033 \\ 0,0254 & 0,0652 & -0,3033 & -0,0580 \end{bmatrix}, \\
 Q_3 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,0095 & -0,0248 & 0,1240 & 0,0195 \\ -0,0248 & -0,0649 & 0,3233 & 0,0509 \\ 0,1240 & 0,3233 & -1,5946 & -0,2507 \\ 0,0195 & 0,0509 & -0,2507 & -0,0393 \end{bmatrix}, & Q_4 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,0083 & -0,0217 & 0,1069 & 0,0253 \\ -0,0217 & -0,0565 & 0,2775 & 0,0649 \\ 0,1069 & 0,2775 & -1,3519 & -0,3055 \\ 0,0253 & 0,0649 & -0,3055 & -0,0579 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{135}$$

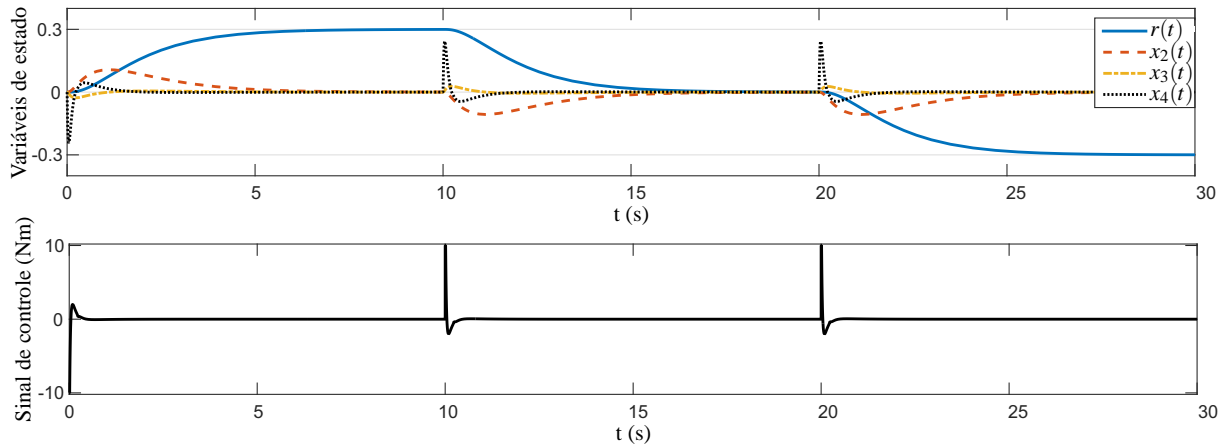
$$P = \begin{bmatrix} 0,9742 & 2,3796 & -10,2473 & -1,2941 \\ 2,3796 & 5,9484 & -25,9287 & -3,2779 \\ -10,2473 & -25,9287 & 117,0832 & 14,8622 \\ -1,2941 & -3,2779 & 14,8622 & 2,3027 \end{bmatrix}. \tag{136}$$

A simulação do sistema bola-viga em malha fechada utilizou a condição inicial $x(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, $v_1 = 0,72$, os ganhos de realimentação (134) e as matrizes de decisão (135). A posição desejada para a bola foi $v_2 = 0,3$ m durante $0 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$, $v_2 = 0$ m durante $10 \text{ s} < t \leq 20 \text{ s}$ e $v_2 = -0,3$ m para $20 \text{ s} < t \leq 30 \text{ s}$. Como foi utilizada mudança de coordenada para atingir a posição desejada, após a estabilização do sistema, foi possível calcular, usando (136), que $x(0)^T P x(0) = x(10)^T P x(10) = x(20)^T P x(20) = 0,0877$, conseqüentemente, $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$ para todo $t \geq 0$.

A resposta temporal fornecida pela simulação do sistema bola-viga realimentado com a lei de controle chaveada suave (108) e (109), com $\gamma = 0,01$, é apresentada nas Figuras 20 e 21. Na Figura 20 apresentam-se as variáveis de estado e o sinal de controle, e na Figura 21 mostram-se as ativações dos ganhos de realimentação μ_i , correspondentes a cada ganho K_i , como definido no Lema 5, Equação (111).

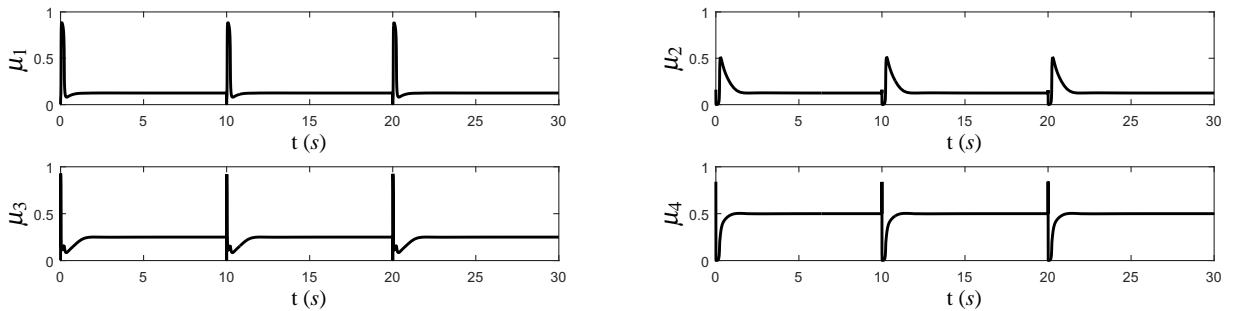
Comparando os resultados apresentados pelos controle chaveado (70) e pelo controle chaveado suave (108) e (109), Figuras 6 e 20, respectivamente, nota-se que ambas as leis de controle foram capazes de manter a bola na posição desejada. Entretanto, o sinal de controle quando é utilizada a lei de controle chaveada apresenta *chattering* (Figura 6), enquanto o sinal de controle calculado pela lei de controle chaveado suave não apresenta este fenômeno (Figura 20).

Figura 20 - Variáveis de estado e sinal de controle da simulação do bola-viga (28) realimentado com a lei de controle chaveada suave (108) e (109).



Fonte: próprio autor.

Figura 21 - Ativação dos ganhos de realimentação μ_i em (111) (correspondente aos ganhos K_i), $i \in \mathbb{I}_4$, da simulação do sistema bola-viga (28) realimentado usando a lei de controle chaveada suave (108)-(111).



Fonte: próprio autor.

5.4.2 Controle chaveado suave de um levitador magnético

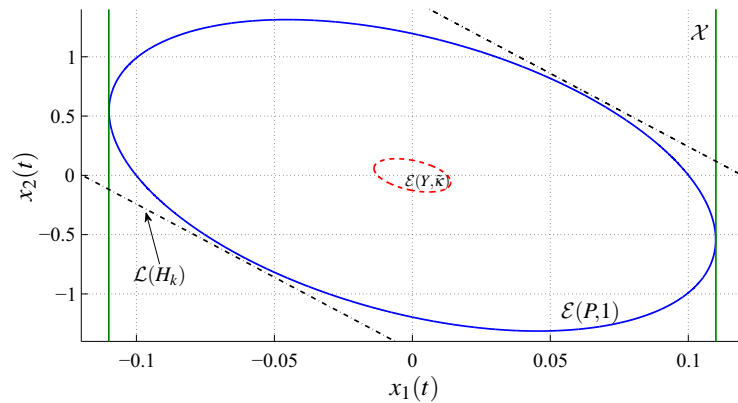
Considerando o levitador magnético apresentado na Subseção 2.3.2 e resolvendo as LMIs (71), do Teorema 1, as LMIs (125), do Teorema 2, com os parâmetros descritos na Subseção 2.3.2, $\beta = 2,5$, $\rho_0 = 7,4$, $\kappa = 0,0134$, $\gamma = 0,01$, $\gamma_\sigma = 0,003$, as LMIs (81), com $n_L = 2$, $w_1 = [0,1 \ 0]^T$, $w_2 = [-0,1 \ 0]^T$ e $\varpi = 1$, encontrou-se

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [-63,0691 \ -5,3173], & K_2 &= [-41,4089 \ -4,2391], \\
 K_3 &= [-63,0636 \ -5,3162], & K_4 &= [-41,4110 \ -4,2393], \\
 K_5 &= [-57,5259 \ -5,0411], & K_6 &= [-40,4684 \ -4,1844], \\
 K_7 &= [-57,5203 \ -5,0399], & K_8 &= [-40,4728 \ -4,1847].
 \end{aligned} \tag{137}$$

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 99,8280 & 3,5006 \\ 3,5006 & 0,7172 \end{bmatrix}, & Q_1 &= \begin{bmatrix} 0,0430 & -4,7032 \\ -4,7032 & -103,6242 \end{bmatrix}, & Q_2 &= \begin{bmatrix} 0,0333 & -3,0154 \\ -3,0154 & -103,1202 \end{bmatrix}, \\
Q_3 &= \begin{bmatrix} 0,0430 & -4,7034 \\ -4,7034 & -103,6074 \end{bmatrix}, & Q_4 &= \begin{bmatrix} 0,0333 & -3,0156 \\ -3,0156 & -103,1196 \end{bmatrix}, & Q_5 &= \begin{bmatrix} 0,0366 & -4,3850 \\ -4,3850 & -107,1773 \end{bmatrix}, \\
Q_6 &= \begin{bmatrix} 0,0314 & -2,9301 \\ -2,9301 & -102,1229 \end{bmatrix}, & Q_7 &= \begin{bmatrix} 0,0366 & -4,3854 \\ -4,3854 & -107,1546 \end{bmatrix}, & Q_8 &= \begin{bmatrix} 0,0314 & -2,9304 \\ -2,9304 & -102,1338 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{138}$$

e $Y = \begin{bmatrix} 546,1958 & 20,9206 \\ 20,9206 & 4,7243 \end{bmatrix}$. Uma ilustração dos conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(H_k)$, $\mathcal{E}(P,1)$ and $\mathcal{E}(Y,\tilde{\kappa})$, $\tilde{\kappa} = (n_r - 1)\gamma + \gamma_\sigma g_0$, para esta solução, é mostrada na Figura 22.

Figura 22 - Conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(H_k)$, $\mathcal{E}(P,1)$ e $\mathcal{E}(Y,\tilde{\kappa})$, $\tilde{\kappa} = (r - 1)\gamma + \gamma_\sigma g_0$, para o levitador magnético (35) realimentado com a lei de controle chaveada suave robusta (130).



Fonte: próprio autor.

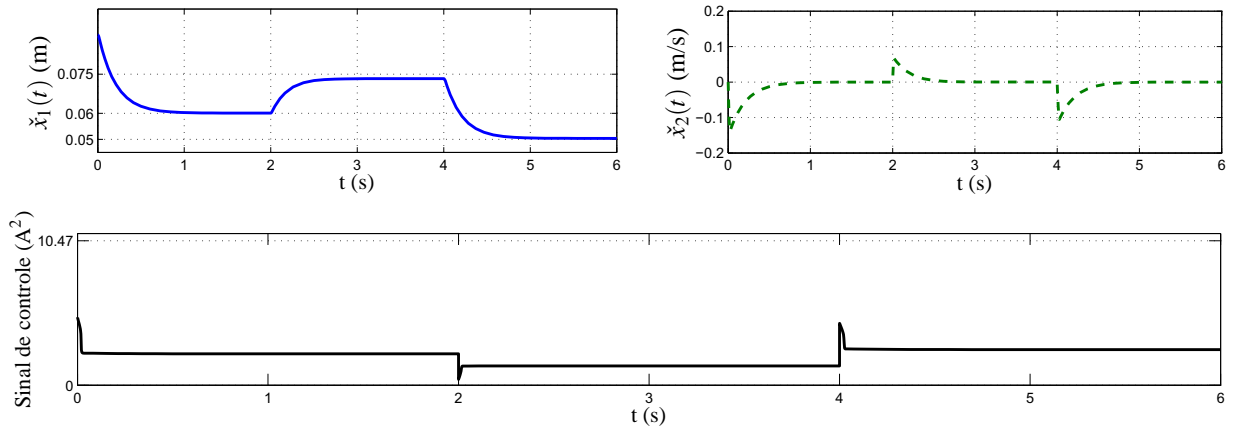
Na simulação do levitador magnético realimentado com lei de controle chaveada suave robusta (130) foram utilizados os ganhos de realimentação (137), as matrizes de decisão (138), os parâmetros de suavização $\gamma = 0,01$ e $\gamma_\sigma = 0,003$ e assim como no controle chaveado (página 54) utilizou-se $v_1 = 1,2889$ e $v_2 = 3,0678$. A condição inicial $\check{x}(0) = [0,09 \ 0]^T$, $v_1 = 0,06$ m e $v_2 = 0,085$ kg durante $0 \text{ s} \leq t < 2 \text{ s}$; $v_1 = 0,075$ m e $v_2 = 0,05$ kg durante $2 \text{ s} \leq t < 4 \text{ s}$; e $v_1 = 0,05$ m e $v_2 = 0,1$ kg para $t \geq 4 \text{ s}$. Em consequência da mudança de coordenada utilizada após a estabilização do sistema, calcula-se $x(0)^T P x(0) = 0,09$, $x(2)^T P x(2) = 0,02$, $x(4)^T P x(4) = 0,06$. Portanto, $x(t) \in \mathcal{E}(P,1)$ para todo $t \geq 0$.

A resposta temporal das variáveis de estado, o sinal de controle e as ativações dos ganhos de realimentação de cada ganho K_i , v_i , obtidas na simulação, são mostradas nas Figuras 23 e 24, respectivamente. Note que, a partir das respostas apresentadas, a lei de controle chaveada suave foi capaz de manter a bola na posição desejada $\check{x}_1(t) = y(t) = v_1$ com erro adequado, após a resposta transiente, mesmo com incertezas no sinal de controle devido ao termo incerto $i_0(v)$ definido em (36) (v_1 e v_2 são incertos). Como pode ser observado na Figura 23, o sinal de controle não apresentou *chattering*. Observe que, a partir de (130b), e fazendo uma análise

análoga ao passo base na prova do Lema 5, página 72,

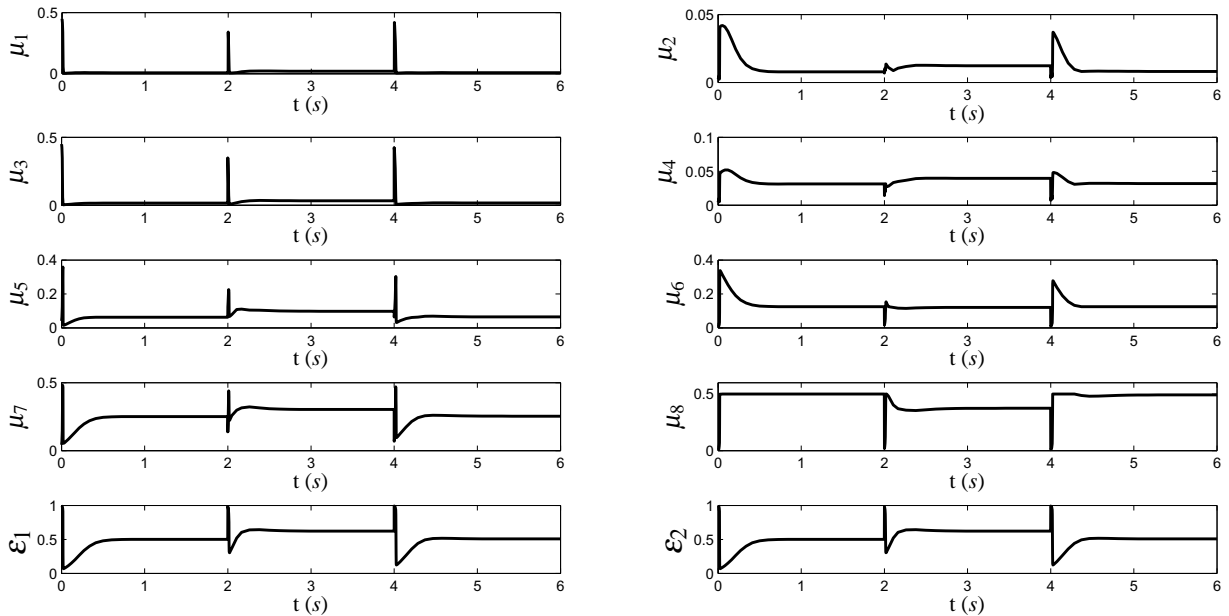
$$v_{\sigma^*} = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1. \quad (139)$$

Figura 23 - Posição da bola ($\check{x}_1(t) = y(t)$), velocidade ($\check{x}_2(t)$), e sinal de controle ($u(t) = i(t)^2 - i_0(v)^2$) do levitador magnético (35) em malha fechada com a lei de controle chaveada suave robusta (130).



Fonte: próprio autor.

Figura 24 - Ativação dos ganhos de realimentação μ_i em (111), correspondentes aos ganhos K_i , $i \in \mathbb{I}_8$, e ε_j , correspondentes aos valores v_j (139), $j \in \mathbb{I}_2$, para o levitador magnético (35) em malha fechada com a lei de controle chaveada suave robusta (130).



Fonte: próprio autor.

5.5 COMENTÁRIOS

Neste capítulo foram apresentados os conceitos de mínimo suave (Seção 5.2) e controle chaveado suave (Seção 5.3). Comparando-se os resultados apresentados nas Figuras 20 e 6 (página 54) e também as Figuras 23 e 8 (página 56), observa-se que as leis de controle chaveadas suaves podem suavizar o sinal de controle sem perda significativa de desempenho do sistema controlado. Note que a região *ultimate bounded* depende dos parâmetros de suavização, que podem ser escolhidos adequadamente pelo projetista.

Novamente, assim como no controle chaveado, as leis de controle chaveadas suaves (108) e (130) necessitam de maior capacidade computacional que a utilização de um único ganho de realimentação.

6 CONTROLE CHAVEADO E CHAVEADO SUAVE PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS SUJEITOS A DISTÚRBIOS

Neste capítulo apresentam-se condições LMIs que possibilitam o projeto de controle chaveado e chaveado suave de modo a garantir a estabilização *ultimate bounded* de uma classe de sistemas não lineares. Assume-se que o sistema esteja sujeito à saturação no atuador e deva permanecer em sua região de operação. Os resultados descritos a seguir foram publicados em Alves et al. (2016b).

6.1 CONSIDERANDO DISTÚRBIOS NO PROJETO DO CONTROLADOR CHAVEADO E CHAVEADO SUAVE

Considere um sistema não linear incerto com saturação no atuador e sujeito a distúrbios persistentes e com amplitude limitada $w(t)$, sendo, sem perda de generalidade, $w(t)^T w(t) \leq 1$, descrito por

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n_x} f_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^{n_u} g_{ik}(x(t)) \text{sat}_k(u_k(t)) + \sum_{l=1}^{n_w} h_{il}(x(t))w_l(t), \quad i \in \mathbb{I}_{n_x}, \quad (140a)$$

$$\text{sat}_k(u_k(t)) = \text{sgn}(u_k(t)) \min\{\rho_k, |u_k(t)|\}, \quad (140b)$$

sendo $\rho = [\rho_1 \ \dots \ \rho_{n_u}] \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $\rho_k > 0$, um vetor conhecido. As funções não lineares $f_{ij}(x(t))$, $g_{ik}(x(t))$ e $h_{il}(x(t))$ podem ter parâmetros incertos, desde que estes pertençam a uma faixa de valores conhecida.

Seguindo um procedimento análogo ao mostrado na Seção 2.2, página 25, em uma região de operação \mathcal{X} em (13) o sistema (140) pode ser representado de maneira exata pelo modelo fuzzy T-S incerto (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM et al., 2012)

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha) \text{sat}(u(t)) + E(\alpha)w(t), \quad (141a)$$

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) & E(\alpha) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & B_i & E_i \end{bmatrix}, \quad (141b)$$

$$\text{sat}(u(t)) = \begin{bmatrix} \text{sat}_1(u_1(t)) & \dots & \text{sat}_{n_u}(u_{n_u}(t)) \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^{n_u}, \quad (141c)$$

sendo $x(t) = [x_1(t) \ \dots \ x_{n_x}(t)]^T \in \mathfrak{R}^{n_x}$ o vetor de estado, $u(t) = [u_1(t) \ \dots \ u_{n_u}(t)]^T \in \mathfrak{R}^{n_u}$ o vetor de controle, $w(t) = [w_1(t) \ \dots \ w_{n_w}(t)]^T \in \mathfrak{R}^{n_w}$ o vetor de distúrbio, $A_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_u}$ e $E_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_w}$, $\alpha = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_{n_r}]^T \in \mathfrak{R}^{n_r}$, $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$, $i \in \mathbb{I}_{n_r}$.

Considere a lei de controle chaveada (SOUZA et al., 2014c; SOUZA et al., 2014b)

$$u(t) = -K_{\varphi}x(t); \quad \varphi = \arg^* \min_{j \in \mathbb{I}_{n_r}} \{x(t)^T Q_j x(t)\}, \quad (142)$$

sendo φ o índice de chaveamento, que indica qual ganho utilizar para a realimentação de estado a cada instante, e a lei de controle chaveada suave (ALVES et al., 2016c)

$$u(t) = -K_{\varphi^*}^{n_r} x(t), \quad (143)$$

$$\begin{aligned} \text{sendo } K_{\varphi^*}^{n_r} &= \sum_{i=1}^{n_r} \mu_i K_i \text{ (111), } \mu_i \text{ calculados para que a matriz } Q_{\varphi^*}^{n_r} = \sum_{i=1}^{n_r} \mu_i Q_i \text{ seja tal que } x(t)^T Q_{\varphi^*}^{n_r} x(t) \\ &= \min_{i \in \mathbb{I}_{n_r}}^* \{x(t)^T Q_i x(t)\}, \quad \sum_{i=1}^{n_r} \mu_i = 1, \mu_i \geq 0. \end{aligned}$$

A seguir são definidas condições LMIs que asseguram a estabilidade *ultimate bounded* local do sistema (140), utilizando as leis de controle (142) e (143). Além disso, as condições descritas também fornecem uma região positivamente invariante $\mathcal{E}(P,1)$, tal que para toda condição inicial $x(0)$ nesta região, o sistema (140) é exatamente descrito pelo modelo (141) durante toda trajetória de estado do sistema controlado.

Teorema 3 (ALVES et al., 2016b). *Considere o sistema não linear incerto, com saturação no atuador e sujeito a distúrbios (140), e também uma região de operação \mathcal{X} em (13) na qual este sistema seja exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S incerto (141), sendo $\rho \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $N \in \mathfrak{R}^{n_h \times n_x}$ e $\phi \in \mathfrak{R}^{n_h}$ conhecidos. Se existirem matrizes simétricas $0 < X \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, \bar{Q}_i e $\bar{Z}_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes G_j e $M_j \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$, constantes positivas γ, β, η e $0 < \delta_1 < 1$, tais que*

$$\begin{bmatrix} A_i X + X A_i^T + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + \kappa X + 2\beta X & -E_i \\ -E_i^T & -\eta I_{n_w} \end{bmatrix} < 0, \quad (144a)$$

$$B_i [-D_s M_j + D_s^- G_j] + [-D_s M_j + D_s^- G_j]^T B_i^T - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j \leq 0, \quad (144b)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 & G_{j(l)} \\ G_{j(l)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (144c)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_{(h)} X \\ X N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (144d)$$

sendo $\kappa = \left((n_r - 1) \frac{\gamma}{2} + \eta \right) \frac{1}{\delta_1}$ e I_{n_w} a matriz identidade de ordem n_w , sejam satisfeitas para todo i e $j \in \mathbb{I}_{n_r}$, $l \in \mathbb{I}_{n_u}$, $h \in \mathbb{I}_{n_h}$, $s \in \mathbb{I}_{2m_u}$, $D_s \in \mathcal{D}$ em (46) e $D_s^- = I_{n_u} - D_s$. Então, a lei de controle chaveada suave (143), sendo $K_i = M_i X^{-1}$ e $Q_i = X^{-1} \bar{Q}_i X^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, torna o sistema não linear incerto (140) localmente *ultimate bounded* estável para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P,1)$, além disso garante-se uma taxa de decaimento maior ou igual a β para toda trajetória inicial em $x(0) \in \mathcal{E}(P,1) \setminus \mathcal{E}(P,\delta_1)$ em (45) até atingir o conjunto $\mathcal{E}(P,\delta_1)$, sendo $P = X^{-1}$. Com isto, observe que $x(t) \in \mathcal{X}$ para todo $t \geq 0$, sendo \mathcal{X} a região de operação definida em (13).

Demonstração. Adote como candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, $0 < P = P^T \in \Re^{n_x \times n_x}$. Assim, para o sistema (141) realimentado com lei de controle (143)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= x(t)^T [A(\alpha)^T P + P A(\alpha)] x(t) + x(t)^T P E(\alpha) w(t) + w(t)^T E(\alpha)^T P x(t) \\ &\quad + \text{sat}(-K_{\varphi^*} x(t))^T B(\alpha)^T P x(t) + x(t)^T P B(\alpha) \text{sat}(-K_{\varphi^*} x(t)). \end{aligned} \quad (145)$$

Então, com o resultado do Lema 1, página 39, se (144d) é satisfeita para todo $h \in \mathbb{I}_{n_h}$ então $\mathcal{E}(P,1) \subset \mathcal{X}$, da mesma forma, se (144c) é satisfeita para todo $j \in \mathbb{I}_{n_r}$ e $l \in \mathbb{I}_{n_u}$, então $\mathcal{E}(P,1) \subset \mathcal{L}(H_j)$. Consequentemente, para $x(t) \in \mathcal{E}(P,1)$, $t \geq 0$, segue que $x(t) \in \mathcal{L}(H_{\varphi^*})$, sendo $H_{\varphi^*} = \sum_{j=1}^{n_r} \mu_j H_j$, $H_{\varphi^*} = [H_{\varphi^*(1)}^T \ \cdots \ H_{\varphi^*(n_u)}^T]^T$ e $\text{sat}(-K_{\varphi^*} x(t)) \in \text{co} \{D_s(-K_{\varphi^*} x(t)) + D_s^-(H_{\varphi^*} x(t))\}$ (HU; LIN; CHEN, 2002a; CAO; LIN, 2003). Este fato segue da definição dada em (44), página 39, pois $|H_{\varphi^*(l)} x(t)| = \left| \sum_{j=1}^{n_r} \mu_j H_{j(l)} x(t) \right| \leq \sum_{j=1}^{n_r} \mu_j |H_{j(l)} x(t)| \leq \max_{j \in \mathbb{I}_{n_r}} \{|H_{j(l)} x(t)|\} \leq \rho_l$, para $l \in \mathbb{I}_{n_u}$. Portanto,

$$\text{sat}(-K_{\varphi^*} x(t)) = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-K_{\varphi^*} x(t)) + D_s^-(H_{\varphi^*} x(t))], \quad (146)$$

sendo $D_s \in \mathcal{D}$ em (46), $D_s^- = I_{n_u} - D_s \in \mathcal{D}$, e $\lambda_s \geq 0 \ \forall s \in \mathbb{I}_{2^{n_u}}$, $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$ (HU; LIN; CHEN, 2002a; CAO; LIN, 2003). Então, de (145) e (146),

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x(t)^T \{A(\alpha)^T P + P A(\alpha)\} x(t) + x(t)^T P E(\alpha) w(t) + w(t)^T E(\alpha)^T P x(t) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{2^m} \lambda_s x(t)^T \left\{ [-D_s K_{\varphi^*} + D_s^- H_{\varphi^*}]^T B(\alpha)^T P + P B(\alpha) [-D_s K_{\varphi^*} + D_s^- H_{\varphi^*}] \right\} x(t). \end{aligned} \quad (147)$$

Pré- e pós-multiplicando (144b) por $P = X^{-1}$, fazendo as mudanças de variáveis $G_j P = H_j$, $M_j P = K_j$, $P \bar{Z}_i P = Z_i$ e $P \bar{Q}_i P = Q_i$, multiplicando as desigualdades obtidas pelos correspondentes $\mu_j \geq 0$, $j \in \mathbb{I}_{n_r}$, $\sum_{j=1}^{n_r} \mu_j = 1$ e fazendo a soma de $j = 1$ até n_r , então, usando (111) presente no Lema 5, (122a) do Lema 6, e (143), encontra-se

$$[-D_s K_{\varphi^*} + D_s^- H_{\varphi^*}]^T B_i^T P + P B_i [-D_s K_{\varphi^*} + D_s^- H_{\varphi^*}] \leq Z_i + Q_{\varphi^*}^{n_r} = Z_i + Q_{\varphi^*}^{n_r} + Y_{n_r}. \quad (148)$$

Multiplicando (148) por $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$ e fazendo a soma de $i = 1$ até n_r , e então multiplicando as desigualdades resultantes por $\lambda_s \geq 0$, $s \in \mathbb{I}_{2^{n_u}}$, $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$, e fazendo a soma de

$s = 1$ até 2^{n_u} ,

$$\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s \left\{ [-D_s K_{\varphi^*} + D_s^- H_{\varphi^*}]^T B(\alpha)^T P + PB(\alpha) [-D_s K_{\varphi^*} + D_s^- H_{\varphi^*}] \right\} \leq Z(\alpha) + Q_{\varphi}^{n_r} + Y_{n_r}, \quad (149)$$

sendo $Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i Z_i$. Observe que, em vista de (101), página 69, $x(t)^T Q_{\varphi}^{n_r} x(t) = x(t)^T Q_{\varphi} x(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_{n_r}} \{x(t)^T Q_i x(t)\} \leq \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i x(t)^T Q_i x(t) = x(t)^T Q(\alpha) x(t)$. Assim, a partir de (149), (147), e (122b),

$$\dot{V}(x(t)) \leq x(t)^T \{A(\alpha)^T P + PA(\alpha) + Z(\alpha) + Q(\alpha)\} x(t) + 2x(t)^T PE(\alpha)w(t) + (n_r - 1) \frac{\gamma}{2}. \quad (150)$$

Dada uma constante $\eta > 0$, e como $w(t)^T w(t) \leq 1$, tem-se a seguinte desigualdade (PETERSEN, 1987),

$$\begin{aligned} 2x(t)^T PE(\alpha)w(t) &\leq \frac{1}{\eta} x(t)^T PE(\alpha)E(\alpha)^T Px(t) + \eta w(t)^T w(t) \\ &\leq \frac{1}{\eta} x(t)^T PE(\alpha)E(\alpha)^T Px(t) + \eta. \end{aligned} \quad (151)$$

De (150) e (151) tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq x(t)^T \{A(\alpha)^T P + PA(\alpha) + Z(\alpha) + Q(\alpha)\} x(t) \\ &\quad + \frac{1}{\eta} x(t)^T PE(\alpha)E(\alpha)^T Px(t) + (n_r - 1) \frac{\gamma}{2} + \eta. \end{aligned} \quad (152)$$

Multiplicando (144a) por $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$, e fazendo a soma de $i = 1$ até n_r , aplicando o complemento de Schur ao resultado obtido, com respeito a segunda linha e coluna, pré- e pós-multiplicando o resultado por $P = X^{-1}$, e então fazendo as mudanças de variáveis $P\bar{Z}_i P = Z_i$ e $P\bar{Q}_i P = Q_i$, encontra-se

$$PA(\alpha) + A(\alpha)^T P + Z(\alpha) + Q(\alpha) + \frac{1}{\eta} PE(\alpha)^T E(\alpha)P < -\kappa P - 2\beta P, \quad (153)$$

sendo $\kappa = \left((n_r - 1) \frac{\gamma}{2} + \eta \right) \frac{1}{\delta_1}$. Utilizando (152) e (153) tem-se que

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\kappa x(t)^T Px(t) + \kappa \delta_1 - 2\beta x(t)^T Px(t). \quad (154)$$

Portanto, para todo $x(t) \notin \mathcal{E}(P, \delta_1)$ e $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$, segue que $x(t)^T Px(t) > \delta_1$. Consequentemente $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta x(t)^T Px(t) = -2\beta V(x(t))$, garantindo uma taxa de decaimento maior ou igual a β (BOYD et al., 1994) para todo $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1) \setminus \mathcal{E}(P, \delta_1)$. Note que $0 < \delta_1 < 1$

e por isto $\mathcal{E}(P, \delta_1) \subset \mathcal{E}(P, 1)$. Como $P > 0$ segue que $x(t)^T P x(t) \leq \varepsilon \|x(t)\|_2^2$, sendo $\varepsilon > 0$ o menor autovalor de P , que é positivo. Assim, para $\dot{V}(x(t)) < 0$, de (154) é suficiente que $-\kappa\varepsilon \|x(t)\|_2^2 + \kappa\delta_1 - 2\beta\varepsilon \|x(t)\|_2^2 < 0$, ou seja, $\sqrt{\frac{\kappa\delta_1}{(\kappa + 2\beta)\varepsilon}} < \|x(t)\|_2$. Então, o sistema não linear incerto (140) realimentado com lei de controle (143), sendo $K_i = M_i P$ e $Q_i = P \bar{Q}_i P$ é *ultimate bounded* estável para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ (CORLESS; LEITMANN, 1981). Finalmente, note que $\mathcal{E}(P, 1) \in \mathcal{X}$, uma condição suficiente para que toda trajetória de estado iniciada em $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ permaneça na região de operação \mathcal{X} em (13) para todo $t \geq 0$ (KLUG et al., 2015; KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015). \square

Corolário 4 (ALVES et al., 2016b). *Seendo satisfeitas as condições do Teorema 3 para o sistema não linear incerto (140) para $\kappa = \frac{\eta}{\delta_1}$, $\eta > 0$ e $0 < \delta_1 < 1$. Então a lei de controle chaveada (142), sendo $K_i = M_i X^{-1}$ e $Q_i = X^{-1} \bar{Q}_i X^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, garante a estabilidade *ultimate bounded local* do sistema não linear incerto (140) para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ tendo taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1) \setminus \mathcal{E}(P, \delta_1)$ até atingir o conjunto $\mathcal{E}(P, \delta_1)$ em (45), sendo $P = X^{-1}$. Adicionalmente, tem-se que $x(t) \in \mathcal{X}$ para todo $t \geq 0$, sendo \mathcal{X} a região de operação (13) do sistema não linear incerto.*

Demonstração. As condições do Corolário 4 seguem das condições do Teorema 3, considerando $\gamma = 0$ (pois no corolário $\kappa = \eta/\delta_1$). Como $\gamma = 0$, de (97), página 68, a função $\text{sgn}^*(z)$ é igual a função $\text{sgn}(z)$. Assim, no caso da função mínimo suave $\min^*\{a_1, \dots, a_r\}$ dada na Definição 1 é igual a $\min\{a_1, \dots, a_r\}$ (ALVES et al., 2016c), a partir de (122) e (142), $x(t)^T Q_{\varphi^*}^{n_r} x(t) = x(t)^T Q_{\varphi}^{n_r} x(t) = x(t)^T Q_{\varphi} x(t)$, sendo $Q_{\varphi}^{n_r}$ a matriz tal que $x(t)^T Q_{\varphi}^{n_r} x(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_{n_r}} \{x(t)^T Q_i x(t)\}$, e então, de (111) e (143), $K_{\varphi^*}^{n_r} = K_{\varphi}^{n_r}$. Portanto, se $\gamma = 0$ então a lei de controle suave (143) é equivalente a lei de controle chaveada (142) e a prova está terminada. \square

Observação 4 (ALVES et al., 2016b). *As desigualdades (144) são LMIs caso sejam dados $\gamma > 0$, $\beta > 0$, $\eta > 0$ e $0 < \delta_1 < 1$, além disso, é interessante encontrar o menor δ_1 tal que (144) sejam satisfeitas, pois o valor de δ_1 é utilizado na definição da região de condições iniciais $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1) \setminus \mathcal{E}(P, \delta_1)$, na qual a taxa de decaimento é maior ou igual a β . Assim, dados γ e β , o melhor valor de η e δ_1 podem ser encontrados por uma busca unidimensional em η , resolvendo o seguinte problema de otimização*

$$\min_{X, Q_i, Z_i, G_j, M_j} \delta_1 \quad \text{s. a.} \quad 0 < \delta_1 < 1, \eta > 0, X > 0 \text{ e (144)}, \quad (155)$$

sendo $\kappa = \left((n_r - 1) \frac{\gamma}{2} + \eta \right) \frac{1}{\delta_1}$ para o controle chaveado suave (143) ou $\kappa = \frac{\eta}{\delta_1}$ se for utilizada a lei de controle chaveada (142).

Assim como no projeto de controle chaveado e chaveado suave descritos nos Capítulos 3 e 5, respectivamente, é interessante assegurar que um certo conjunto de condições iniciais

pertença ao conjunto positivamente invariante do sistema controlado $\mathcal{E}(P,1)$. Isto novamente pode ser feito, para o conjunto de condições iniciais $\mathfrak{X} = \text{wco}\{w_1, \dots, w_L\}$, adicionando as LMIs (81), junto às condições do problema (155).

6.2 EXEMPLO: SISTEMA BOLA-VIGA SUJEITO A DISTÚRIBIO

Considere o sistema bola-viga descrito na Subseção 2.3.1 com acréscimo de distúrbios, de modo que possa ser descrito pela seguinte dinâmica

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23}(x(t)) & a_{24}(x(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t), \quad (156a)$$

$$a_{23}(z(t)) = \frac{-v_1 g \text{sen}(x_3(t))}{x_3(t)}, \quad a_{24}(z(t)) = v_1 x_1(t) x_4(t), \quad (156b)$$

sendo suas variáveis de estado e parâmetros, incluindo região de operação e valor de saturação no sinal de controle, já descritos na Subseção 2.3.1, $u(t) \in \mathfrak{R}$ o sinal de controle e $w(t) \in \mathfrak{R}$ um distúrbio persistente e limitado em amplitude tal que $w(t)^T w(t) \leq 1$ para todo $t \geq 0$, e sendo o parâmetro incerto $0,06 \leq \zeta \leq 0,12$.

O objetivo desta seção é utilizar a teoria apresentada na Seção 6.1 para projetar controladores para o sistema bola-viga com distúrbio (156) de modo a garantir que o sistema em malha fechada seja localmente *ultimate bounded* estável, tendo uma taxa de decaimento adequada e fazendo com que o estado do sistema $x(t)$, $t \geq 0$, permaneça na região de operação pré-estabelecida, mantendo-o “próximo” do ponto de equilíbrio $x(t) = 0$, após o transitório, mesmo sobre a influência do distúrbio. Observe que, mesmo considerando $w(t) = 0$, para $u(t) = 0$, o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (156) é instável.

Utilizando procedimento análogo ao apresentado na Seção 2.2, página 25, o sistema (156) pode ser exatamente descrito pelo modelo

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + E(\alpha)w(t), \quad (157)$$

sendo $n_x = 4$, $n_u = 1$ e $n_r = 8$, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T \in \mathfrak{R}^4$, $[A(\alpha) \ B(\alpha) \ E(\alpha)] = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i [A_i \ B_i \ E_i]$, $A_i \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}$, $B_i \in \mathfrak{R}^{4 \times 1}$ e $E_i \in \mathfrak{R}^{4 \times 1}$, $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$, $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, e

$$\begin{aligned}
A_1 = A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,0891 & 2,85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_2 = A_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,0891 & -2,85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
A_3 = A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7,3575 & 2,85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_4 = A_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7,3575 & -2,85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0,12 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad E_5 = E_6 = E_7 = E_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0,06 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ e } B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = B_7 = B_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Assim, resolvendo o problema de otimização (155) (EFBERG; LÖFBERG, 2004; STURM, 1999) para o controle chaveado suave (143) $\left(\kappa = \left((n_r - 1)\frac{\gamma}{2} + \eta\right)\frac{1}{\delta_1}\right)$, considerando os parâmetros já mencionados, $\beta = 0,2$, $\rho = 10$, $\gamma = 0,005$, junto com as LMIs (81) sendo $n_L = 2$, $w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $w_2 = -w_1$, $\varpi^{-2} = 25$ (para assegurar $x(0) = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathcal{E}(P,1)$) obteve-se, para $\eta = 0,08$, $\delta_1 = 0,294$ e as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
K_1 &= [-47,6123 & -103,8016 & 445,4800 & 35,4099], \\
K_2 &= 10^3 \times [-0,1112 & -0,2397 & 1,0029 & 0,0786], \\
K_3 &= [-46,2825 & -100,9987 & 434,2064 & 34,6344], \\
K_4 &= [-107,3910 & -231,4643 & 970,6463 & 76,3639], \\
K_5 &= [-51,1178 & -111,3896 & 476,9727 & 37,4672], \\
K_6 &= [-110,3925 & -237,9949 & 996,2745 & 78,0005], \\
K_7 &= [-49,5302 & -108,0092 & 463,5915 & 36,5742], \\
K_8 &= [-107,0036 & -230,7033 & 967,9094 & 76,0316].
\end{aligned} \tag{158}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,0292 & 0,0611 & -0,2490 & -0,0164 \\ 0,0611 & 0,1282 & -0,5218 & -0,0343 \\ -0,2490 & -0,5218 & 2,1231 & 0,1389 \\ -0,0164 & -0,0343 & 0,1389 & 0,0090 \end{bmatrix}, & Q_2 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,0287 & 0,0604 & -0,2464 & -0,0146 \\ 0,0604 & 0,1268 & -0,5171 & -0,0305 \\ -0,2464 & -0,5171 & 2,1091 & 0,1237 \\ -0,0146 & -0,0305 & 0,1237 & 0,0067 \end{bmatrix}, \\
Q_3 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,0292 & 0,0613 & -0,2494 & -0,0164 \\ 0,0613 & 0,1286 & -0,5226 & -0,0344 \\ -0,2494 & -0,5226 & 2,1231 & 0,1391 \\ -0,0164 & -0,0344 & 0,1391 & 0,0090 \end{bmatrix}, & Q_4 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,0287 & 0,0603 & -0,2454 & -0,0146 \\ 0,0603 & 0,1265 & -0,5151 & -0,0305 \\ -0,2454 & -0,5151 & 2,0962 & 0,1233 \\ -0,0146 & -0,0305 & 0,1233 & 0,0068 \end{bmatrix}, \\
Q_5 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,0309 & 0,0649 & -0,2643 & -0,0175 \\ 0,0649 & 0,1362 & -0,5548 & -0,0366 \\ -0,2643 & -0,5548 & 2,2590 & 0,1486 \\ -0,0175 & -0,0366 & 0,1486 & 0,0097 \end{bmatrix}, & Q_6 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,0304 & 0,0640 & -0,2614 & -0,0157 \\ 0,0640 & 0,1346 & -0,5493 & -0,0328 \\ -0,2614 & -0,5493 & 2,2415 & 0,1334 \\ -0,0157 & -0,0328 & 0,1334 & 0,0075 \end{bmatrix}, \\
Q_7 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,0310 & 0,0650 & -0,2646 & -0,0175 \\ 0,0650 & 0,1366 & -0,5554 & -0,0367 \\ -0,2646 & -0,5554 & 2,2581 & 0,1488 \\ -0,0175 & -0,0367 & 0,1488 & 0,0097 \end{bmatrix}, & Q_8 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,0304 & 0,0639 & -0,2606 & -0,0157 \\ 0,0639 & 0,1344 & -0,5476 & -0,0328 \\ -0,2606 & -0,5476 & 2,2303 & 0,1331 \\ -0,0157 & -0,0328 & 0,1331 & 0,0075 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{159}$$

$$P = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0241 & 0,0508 & -0,2088 & -0,0147 \\ 0,0508 & 0,1091 & -0,4503 & -0,0320 \\ -0,2088 & -0,4503 & 1,8855 & 0,1337 \\ -0,0147 & -0,0320 & 0,1337 & 0,0114 \end{bmatrix}. \tag{160}$$

Resolvendo o mesmo problema (155) para a lei de controle chaveada (142) (EFBERG; LÖFBERG, 2004; STURM, 1999) $\left(\kappa = \frac{\eta}{\delta_1}\right)$, com os mesmos parâmetros já mencionados, encontrou-se, para $\eta = 0,07$, $\delta_1 = 0,237$ e as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \begin{bmatrix} -49,0530 & -106,0927 & 459,5850 & 37,2612 \end{bmatrix}, \\
K_2 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,1104 & -0,2363 & 1,0007 & 0,0806 \end{bmatrix}, \\
K_3 &= \begin{bmatrix} -47,6285 & -103,1074 & 447,4036 & 36,3913 \end{bmatrix}, \\
K_4 &= \begin{bmatrix} -106,9309 & -228,8320 & 971,3776 & 78,5162 \end{bmatrix}, \\
K_5 &= \begin{bmatrix} -52,7077 & -113,9535 & 492,6345 & 39,5312 \end{bmatrix}, \\
K_6 &= \begin{bmatrix} -109,6781 & -234,7799 & 994,9535 & 80,0858 \end{bmatrix}, \\
K_7 &= \begin{bmatrix} -51,1152 & -110,5848 & 479,1173 & 38,5965 \end{bmatrix}, \\
K_8 &= \begin{bmatrix} -106,3599 & -227,6893 & 967,0014 & 78,0665 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{161}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0761 & 0,1591 & -0,6541 & -0,0360 \\ 0,1591 & 0,3324 & -1,3644 & -0,0744 \\ -0,6541 & -1,3644 & 5,5951 & 0,3000 \\ -0,0360 & -0,0744 & 0,3000 & 0,0136 \end{bmatrix}, & Q_2 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0729 & 0,1533 & -0,6350 & -0,0187 \\ 0,1533 & 0,3220 & -1,3328 & -0,0381 \\ -0,6350 & -1,3328 & 5,5135 & 0,1521 \\ -0,0187 & -0,0381 & 0,1521 & -0,0091 \end{bmatrix}, \\
Q_3 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0770 & 0,1611 & -0,6583 & -0,0366 \\ 0,1611 & 0,3364 & -1,3731 & -0,0756 \\ -0,6583 & -1,3731 & 5,5974 & 0,3025 \\ -0,0366 & -0,0756 & 0,3025 & 0,0140 \end{bmatrix}, & Q_4 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0723 & 0,1520 & -0,6249 & -0,0186 \\ 0,1520 & 0,3194 & -1,3114 & -0,0379 \\ -0,6249 & -1,3114 & 5,3804 & 0,1478 \\ -0,0186 & -0,0379 & 0,1478 & -0,0090 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_5 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0954 & 0,2003 & -0,8258 & -0,0487 \\ 0,2003 & 0,4200 & -1,7304 & -0,1013 \\ -0,8258 & -1,7304 & 7,1232 & 0,4123 \\ -0,0487 & -0,1013 & 0,4123 & 0,0219 \end{bmatrix}, & Q_6 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0918 & 0,1936 & -0,8031 & -0,0314 \\ 0,1936 & 0,4080 & -1,6912 & -0,0651 \\ -0,8031 & -1,6912 & 7,0065 & 0,2645 \\ -0,0314 & -0,0651 & 0,2645 & -0,0006 \end{bmatrix}, \\
Q_7 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0961 & 0,2018 & -0,8284 & -0,0491 \\ 0,2018 & 0,4233 & -1,7358 & -0,1022 \\ -0,8284 & -1,7358 & 7,1117 & 0,4133 \\ -0,0491 & -0,1022 & 0,4133 & 0,0221 \end{bmatrix}, & Q_8 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0913 & 0,1926 & -0,7942 & -0,0314 \\ 0,1926 & 0,4058 & -1,6722 & -0,0650 \\ -0,7942 & -1,6722 & 6,8851 & 0,2608 \\ -0,0314 & -0,0650 & 0,2608 & -0,0005 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{162}$$

$$P = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0238 & 0,0499 & -0,2078 & -0,0151 \\ 0,0499 & 0,1064 & -0,4448 & -0,0326 \\ -0,2078 & -0,4448 & 1,8849 & 0,1378 \\ -0,0151 & -0,0326 & 0,1378 & 0,0120 \end{bmatrix}. \tag{163}$$

Para as simulações do sistema bola-viga foi utilizada a dinâmica (156), sendo os parâmetros incertos fixados em $v_1 = 0,72$, $v_2 = 0$ e $\zeta = 0,1$, a condição inicial $x(0) = [0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, e um distúrbio $w(t)$ descrito por (Figura 25):

$$w(t) = \begin{cases} \text{sen}(0,5t), & \text{se } \text{sen}(0,5t) > 0, \\ 0, & \text{se } \text{sen}(0,5t) \leq 0. \end{cases} \tag{164}$$

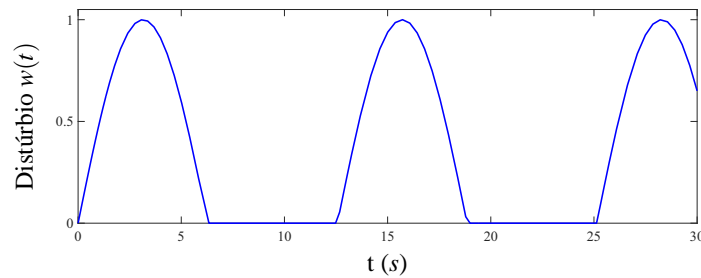
De modo a comparar os desempenhos, foram realizadas simulações utilizando a lei de controle chaveada (142) (com ganhos de realimentação (161) e matrizes de decisão (162)) e a lei de controle chaveada suave (143) (com ganhos de realimentação (158) e matrizes de decisão (159)). Note que, para o sistema realimentado com a lei de controle chaveada, usando a matriz de Lyapunov P dada em (163), $x(0)^T P x(0) = 0,9639$ e assim $x(0) \in \mathcal{E}(P,1)$. Com a matriz de Lyapunov calculada para a lei de controle chaveada suave, (160), $x(0)^T P x(0) = 0,9530$ e novamente $x(0) \in \mathcal{E}(P,1)$. Portanto, a estabilidade local *ultimate bounded* do sistema bola-viga com distúrbio (156) é assegurada tanto com a utilização da lei de controle chaveada suave quanto com a lei de controle chaveada.

Na Figura 26 são apresentadas a resposta temporal, o sinal de controle e o índice de chaveamento φ resultantes de uma simulação do sistema bola-viga (156) em malha fechada com a lei de controle chaveada (142). Nas Figuras 27 e 28 são mostrados a resposta temporal, o sinal de controle e as ativações dos ganhos de realimentação μ_i resultantes de uma simulação do sistema bola-viga (156) em malha fechada com a lei de controle chaveada suave (143).

Nota-se das Figuras 26 e 27 que o controle chaveado, apesar de bom desempenho, apresenta *chattering* no sinal de controle, enquanto o sinal de controle chaveado suave não apresentou este comportamento.

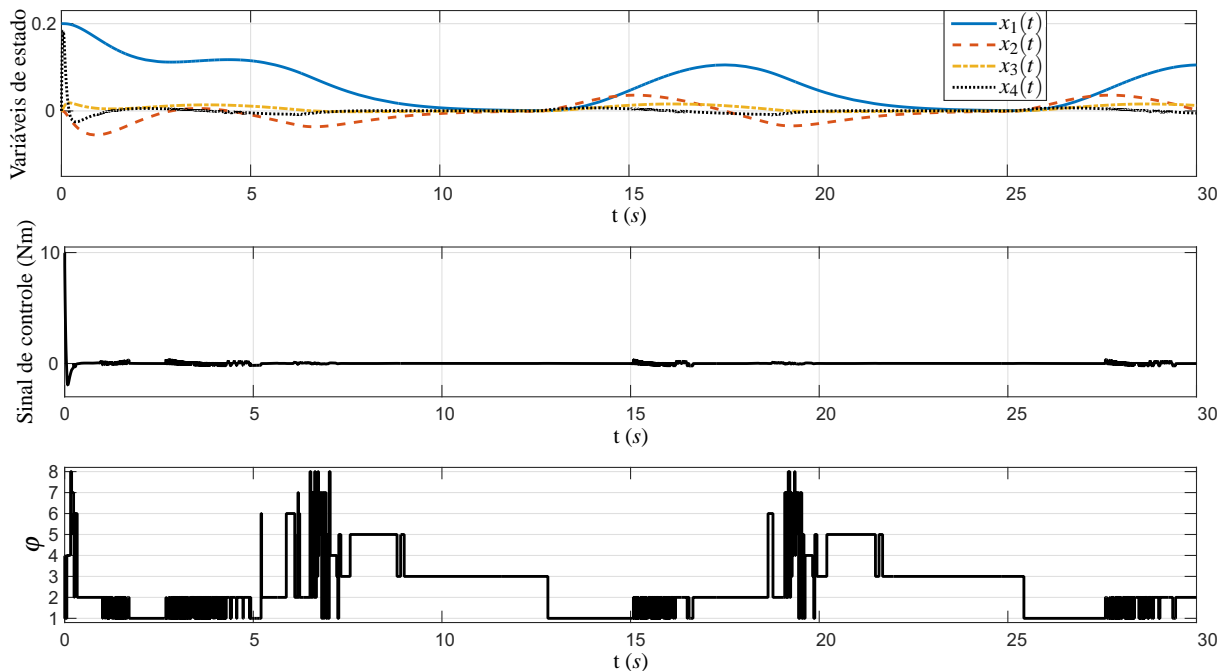
A evolução temporal das funções de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ calculadas para o sistema bola-viga (156) com leis de controle chaveada e chaveada suave são apresentadas na Fi-

Figura 25 - Distúrbio utilizado nas simulações.



Fonte: Alves et al. (2016b).

Figura 26 - Resposta temporal para a simulação do sistema bola-viga (156) com malha fechada utilizando a lei de controle chaveada (142): variáveis de estado, sinal de controle e índice de chaveamento φ .

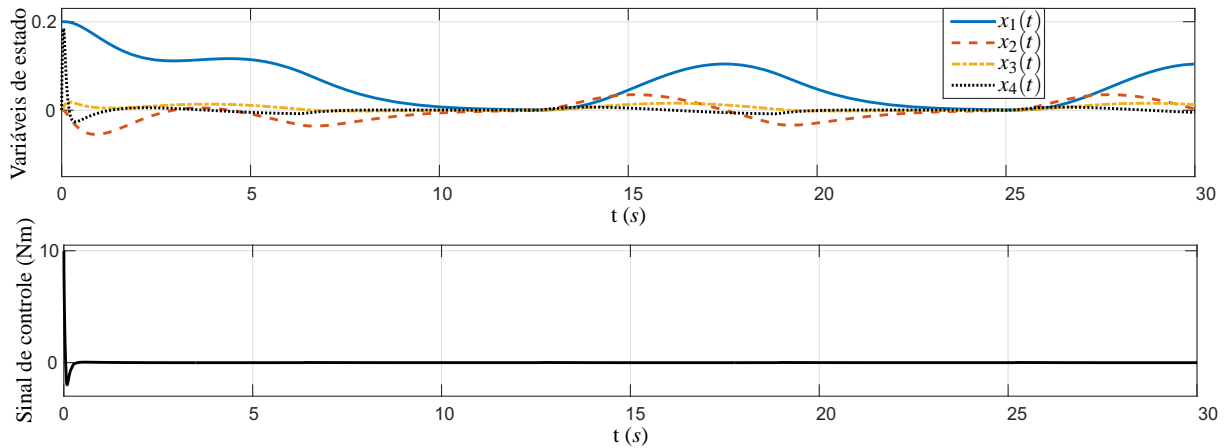


Fonte: próprio autor.

gura 29. O parâmetro δ_1 , que atua como limitante para a região *ultimate bounded*, projetado com os métodos propostos, foi menor para a lei de controle chaveada em comparação com o calculado para a lei de controle chaveada suave. Nota-se que δ_1 foi superestimado para este distúrbio, o que mostra que possíveis relaxações para as condições do Teorema 3 e Corolário 4 são possíveis.

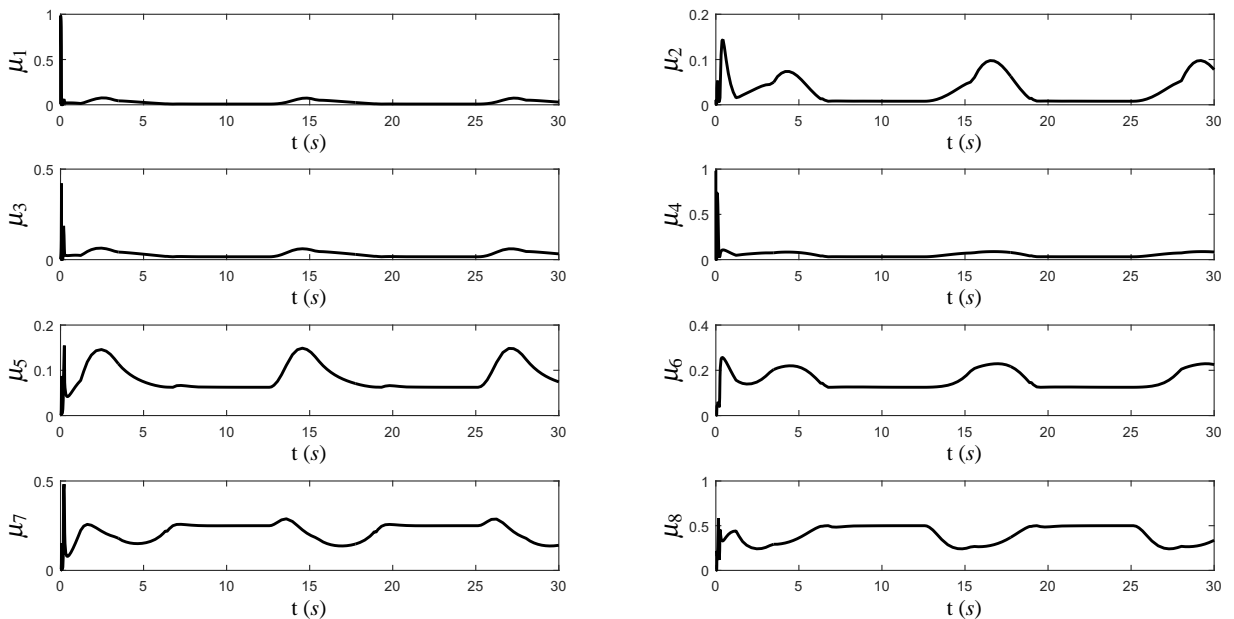
A partir dos resultados alcançados percebe-se que ambos controle chaveado (142) e controle chaveado suave (143) foram capazes de manter a bola próxima do ponto de equilíbrio desejado, no caso a origem do espaço de estados, apesar da presença do distúrbio limitado em amplitude (164). A partir das Figuras 26 e 27 nota-se que quando o distúrbio cessa o estado do sistema tende ao ponto de equilíbrio com ambas as leis de controle.

Figura 27 - Resposta temporal para a simulação do sistema bola-viga (156) realimentado com a lei de controle chaveada suave (143): variáveis de estado e sinal de controle.



Fonte: próprio autor.

Figura 28 - Ativação dos ganhos de realimentação μ_i em (111) (correspondente aos ganhos K_i), $i \in \mathbb{I}_8$, da simulação do sistema bola-viga (156) realimentada usando a lei de controle chaveada suave (143).

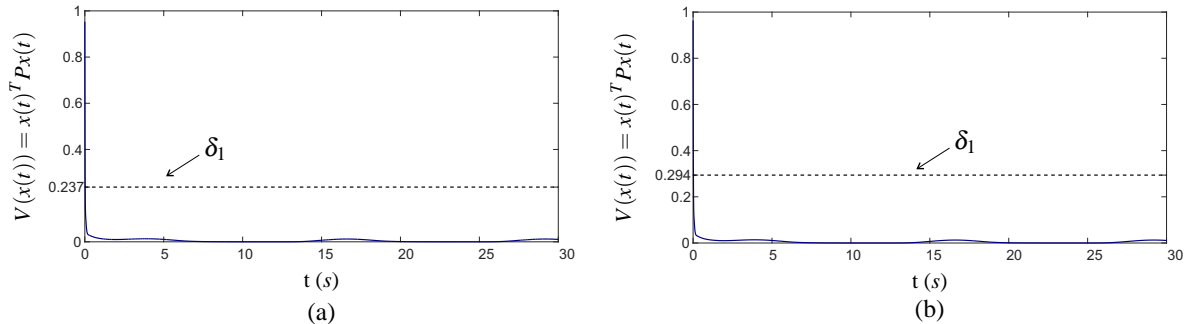


Fonte: próprio autor.

6.3 COMENTÁRIOS

Neste capítulo estendeu-se a teoria apresentada nos Capítulos 3 e 5, provendo condições LMIs para a estabilização local de uma classe de sistemas não lineares incertos com distúrbios não casados, usando as leis de controle chaveada e chaveada suave. No projeto do controlador é utilizado o modelo fuzzy T-S que exatamente descreve o sistema a ser controlado e a região na qual este modelo é válido (é expresso através de uma combinação convexa dos modelos

Figura 29 - Evolução temporal da função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ para o sistema bola-viga (156). (a) Realimentado com lei de controle chaveada (142) (P dado em (163)). (b) Realimentado com lei de controle chaveada suave (143) (P dado em (160)).



Fonte: próprio autor.

locais) é considerada no projeto, fornecendo uma região para as condições iniciais. Manteve-se a característica de não necessitar das funções de pertinência do modelo fuzzy para compor o sinal de controle, possibilitando o controle de sistemas não lineares incertos.

A partir dos resultados apresentados, observou-se novamente, assim como no Capítulo 3, a possibilidade de *chattering* no sinal de controle usando o controle chaveado, dificuldade que foi mitigada com o uso do controle chaveado suave. Nota-se também que o *ultimate bound*, medido por δ_1 , é menor para o controle chaveado do que para o controle chaveado suave. Assim, o projetista deve ponderar essas características na escolha do controlador, de acordo com o sistema a ser controlado.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados resultados sobre o controle chaveado e chaveado suave para uma classe de sistemas não lineares incertos com saturação no atuador. Estes resultados são baseados na representação exata destes sistemas por modelos fuzzy T-S incertos, através de uma combinação convexa de modelos locais lineares, que possuem funções de pertinência incertas e modelos locais conhecidos, podendo estes serem obtidos seguindo a metodologia apresentada no Capítulo 2. Uma vez que esta representação exata acontece em uma região do espaço de estados, as leis de controle propostas encontram-se em um contexto local.

Os resultados apresentados estendem outros anteriormente descritos em Souza et al. (2014c) e em Souza et al. (2014b), principalmente no sentido de considerar uma região de operação para o sistema não linear e a saturação no sinal de controle. Considerar a região de operação é um ponto chave no projeto, visto que as metodologias propostas dependem da convexidade do modelo fuzzy T-S que exatamente descreve o sistema não linear, e isto é assegurado somente na região de operação considerada na etapa de modelagem. Assim, as garantias de desempenho do sistema não linear são sempre asseguradas em um contexto local. Além disso, a saturação no sinal de controle é uma situação encontrada na prática e considerá-la aproxima o projeto teórico de sua implementação.

A teoria apresentada no Capítulo 3 foi adaptada para permitir a implementação no sistema Ball Balancer, que necessita de taxas de decaimento relativamente alta para bons resultados de implementação. Observando que se conseguia uma região de estados iniciais “pequena” para uma taxa de decaimento alta e vice-versa, a ideia para conciliar esses dois critérios foi aproveitar-se dos conjuntos elipsoidais, positivamente invariantes (BLANCHINI, 1999) para o sistema controlado, e projetar mais de um controlador. Apenas um controlador é utilizado por vez, sendo a escolha deste dependendo do estado do sistema. Como apresentado no Capítulo 4, esta estratégia possibilitou a obtenção de bons resultados de implementação.

Foi também proposta uma técnica que permite suavizar a mudança de ganho de realimentação do controle chaveado, com resultados iniciais apresentados em Alves et al. (2015) e teoria completa publicada em Alves et al. (2016c). Para este objetivo foi definido o conceito de “mínimo suave”, baseado na representação da função mínimo através da função sinal. Esta estratégia de suavização possui como desvantagem a garantia de convergência do estado do sistema apenas para uma região entorno do ponto de equilíbrio, e não para o ponto de equilíbrio. Entretanto, esta região depende de parâmetros de projeto e pode ser ajustada de acordo com o sistema a ser controlado. Assim, uma escolha adequada dos parâmetros de projeto possibilita

bom desempenho do sistema controlado, como visto no Capítulo 5.

Como a função sinal é amplamente utilizada em controle com estrutura variável (UTKIN, 1993; HSU, 1997; YOUNG; UTKIN; OZGUNER, 1999; UTKIN; LEE, 2006; LEE; UTKIN, 2007; WANG; ADELI, 2012) e como a função mínimo é largamente usada em controle chaveado (HETEL; FRIDMAN, 2013; SOUZA et al., 2014c; SOUZA et al., 2014b; DUAN; WU, 2014; DEAECTO; SOUZA; GEROMEL, 2014), a representação da função mínimo através da função sinal também estabelece um vínculo entre essas duas teorias, sendo o estudo deste vínculo uma proposta de futuras pesquisas.

Por fim, o controle chaveado e chaveado suave de uma classe de sistemas não lineares incertos com saturação no atuador sobre a influência de distúrbios persistentes e limitados em amplitude foram considerados no Capítulo 6. A teoria mostrada neste capítulo também garante a estabilidade local *ultimate bounded* dessa classe de sistemas em malha fechada com a lei de controle chaveada ou chaveada suave, sendo o limitante da região *ultimate bounded*, neste caso, dependente do distúrbio (e também do parâmetro de suavização no caso do controle chaveado suave). Os resultados de simulações mostraram que o sistema em malha fechada apresenta desempenho satisfatórios, evidenciando que o controle chaveado e chaveado suave podem ser utilizados neste caso, sendo que este último consegue eliminar o fenômeno do *chattering* apresentado pelo primeiro.

De maneira geral, os resultados apresentados neste trabalho podem ser estendidos ao controle chaveado de sistemas lineares com incertezas politópicas, pois as funções de pertinência não são utilizadas para compor o sinal de controle. Note que o controle chaveado desta classe de sistemas mostrou-se menos conservativo que a utilização de um único ganho de realimentação (o primeiro exemplo no Capítulo 1, página 17, ilustrou este fato) (SOUZA et al., 2013).

Da pesquisa realizada originaram-se diretamente os seguintes trabalhos:

ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; SOUZA, W. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Redução do chattering em controle chaveado pela suavização na mudança do ganho de realimentação. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 12., 2015, Natal. **Anais...** Natal: SBA, 2015. p. 497–502.

ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Sobre o controle chaveado de sistemas não lineares incertos com saturação no atuador. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 21., 2016, Vitória. **Anais...** Vitória: SBA, 2016a. p. 1235–1240.

ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Smoothing switched control for uncertain T-S fuzzy systems with unknown membership functions, actuator saturation and disturbance. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS - FUZZ-IEEE, 2016., 2016, Vancouver. **Proceedings...** Vancouver: IEEE, 2016b. p. 2212–2219.

ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO,

E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, West Sussex, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016c.

Pelo apresentado, algumas sugestões de pesquisas futuras seriam projetar controladores chaveado e chaveado suave para sistemas não lineares de modo a atender diferentes índices de desempenho, como o custo garantido quadrático (LAM et al., 2016); considerar a possibilidade de atrasos na malha de controle (CAO; FRANK, 2001; GUAN; CHEN, 2004; DEAECTO et al., 2013); buscar condições menos conservadoras utilizando outras candidatas a funções de Lyapunov (SOUZA et al., 2014b; RHEE; WON, 2006; MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009) e utilizar regras de chaveamento baseadas em outras estruturas como, por exemplo, do tipo máximo (SCHARLAU et al., 2014). A utilização da realimentação de saída e a extensão das considerações realizadas para tempo discreto (CRUSIUS; TROFINO, 1999; DAAFOUZ; RIEDINGER; IUNG, 2002) também são possibilidades interessantes para continuação das pesquisas. Além disso, explorar a relação entre o controle chaveado e controle com estrutura variável, que surgiu na representação da função mínimo pela função sinal, apresentada no Capítulo 5.

REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; SOUZA, W. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Redução do chattering em controle chaveado pela suavização na mudança do ganho de realimentação. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 12., 2015, Natal. **Anais...** Natal: SBA, 2015. p. 497–502.
- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Sobre o controle chaveado de sistemas não lineares incertos com saturação no atuador. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 21., 2016, Vitória. **Anais...** Vitória: SBA, 2016a. p. 1235–1240.
- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Smoothing switched control for uncertain T-S fuzzy systems with unknown membership functions, actuator saturation and disturbance. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS - FUZZ-IEEE, 2016., 2016, Vancouver. **Proceedings...** Vancouver: IEEE, 2016b. p. 2212–2219.
- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, West Sussex, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016c.
- BARMISH, B. R. Stabilization of uncertain systems via linear control. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 28, n. 8, p. 848–850, 1983.
- BLANCHINI, F. Set invariance in control. **Automatica**, Oxford, v. 35, n. 11, p. 1747–1767, Nov 1999.
- BOIKO, I.; FRIDMAN, L.; PISANO, A.; USAI, E. Analysis of chattering in systems with second-order sliding modes. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 52, n. 11, p. 2085–2102, Nov 2007.
- BOYD, S. P.; El Ghaoui, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p.
- CAO, Y.-Y.; FRANK, P. M. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 124, n. 2, p. 213–229, 2001.
- CAO, Y.-Y.; LIN, Z. Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 11, n. 1, p. 57–67, Feb 2003.
- CORLESS, M. J.; LEITMANN, G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate

boundedness for uncertain dynamic systems. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 26, n. 5, p. 1139–1144, 1981.

CRUSIUS, C. A. R.; TROFINO, A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, May 1999.

DAAFOUZ, J.; RIEDINGER, P.; IUNG, C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 47, n. 11, p. 1883–1887, Nov 2002.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, Sep 2011.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; GALBUSERA, L.; BOLZERN, P. Extended small gain theorem for time-delay switched systems control and closed-loop robustness enhancement. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 86, n. May, p. 1018–1025, 2013.

DEAECTO, G. S.; SOUZA, M.; GEROMEL, J. C. Chattering free control of continuous-time switched linear systems. **Control Theory Applications, IET**, Stevenage, v. 8, n. 5, p. 348–354, Mar 2014.

DUAN, C.; WU, F. Analysis and control of switched linear systems via modified Lyapunov–Metzler inequalities. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v. 24, n. 2, p. 276–294, 2014.

EFBERG, J.; LÖFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: CACSD CONFERENCE, 2004., Taipei. **Proceedings...** Taipei: IEEE, 2004. p. 284–289. ISBN 0780386361.

FANG, C. H.; LIU, Y. S.; KAU, S. W.; HONG, L.; LEE, C. H. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 14, n. 3, p. 386–397, 2006.

FRIDMAN, L. M. Chattering analysis in sliding mode systems with inertial sensors. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 76, n. 9-10, p. 906–912, 2003.

GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. The LMI control toolbox. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Lake Buena Vista. **Proceedings...** Lake Buena Vista: IEEE, 1994. v. 3, p. 2038–2041.

GAO, Q.; ZENG, X.-J.; FENG, G.; WANG, Y.; QIU, J. T-S-fuzzy-model-based approximation and controller design for general nonlinear systems. **Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 42, n. 4, p. 1143–1154, Aug 2012.

GOLEA, N.; GOLEA, A.; BENMAHAMMED, K. Fuzzy model reference adaptive control. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 10, n. 4, p. 436–444, 2002.

GUAN, X.-P.; CHEN, C.-L. Delay-dependent guaranteed cost control for T-S fuzzy systems with time delays. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 12, n. 2, p. 236–249,

2004.

GUERRA, T. M.; SALA, A.; TANAKA, K. Fuzzy control turns 50: 10 years later. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 281, p. 168–182, 2015.

HAMDY, M.; HAMDAN, I.; IBRAHIM, M. Fuzzy PDC controller for a class of T-S fuzzy bilinear system via output feedback. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING AND TECHNOLOGY- ICET, 2014., Cairo. **Proceedings...** Cairo: IEEE, 2014. p. 1–5.

HETEL, L.; FRIDMAN, E. Robust sampled-data control of switched affine systems. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 58, n. 11, p. 2922–2928, Nov 2013.

HO, C. C.; CHOU, Y. S.; CHANG, F. R. A new parameter-dependent Lyapunov function approach for robust control. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEM SCIENCE AND ENGINEERING- ICSSE, 2014., Shanghai. **Proceedings...** Shanghai: IEEE, 2014. p. 50–55.

HO, H. F.; WONG, Y. K.; RAD, A. B. Adaptive fuzzy sliding mode control with chattering elimination for nonlinear SISO systems. **Simulation Modelling Practice and Theory**, Amsterdam, v. 17, n. 7, p. 1199–1210, Aug 2009.

HSU, L. Smooth sliding control of uncertain systems based on a prediction error. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 7, p. 353–372, 1997.

HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. **Automatica**, Oxford, v. 38, n. 2, p. 351–359, 2002a.

HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 45, n. 2, p. 97–112, Feb 2002b.

HUANG, J. T.; CHEN, Y. M. A smooth switching adaptive controller for linearizable systems with improved transient performance. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, West Sussex, v. 20, n. 9, p. 431–446, 2006.

KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. A T-S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Heidelberg, v. 26, n. 3, p. 191–200, 2015.

KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; LEITE, V. J.; SILVA, L. F. Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi-Sugeno models. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 1, p. 1–20, 2015.

LAM, H.; XIAO, B.; YU, Y.; YIN, X.; HAN, H.; TSAI, S.-H.; CHEN, C.-S. Membership-function-dependent stability analysis and control synthesis of guaranteed cost fuzzy-model-based control systems. **International Journal of Fuzzy Systems**, Heidelberg, p. 1–13, 2016.

LEE, H.; UTKIN, V. I. Chattering suppression methods in sliding mode control systems. **Annual Reviews in Control**, Doetinchem, v. 31, n. 2, p. 179–188, 2007.

MARQUEZ, H. J. **Nonlinear control systems: analysis and design**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003.

MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; AVELLAR, G. S. C. A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. **Information Sciences**, Philadelphia, v. 179, n. 8, p. 1149–1162, 2009.

PETERSEN, I. R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 8, n. 4, p. 351–357, 1987.

QUANSER INNOVATE EDUCATE. **2D ball balancer control using Quarc**: instructor manual. Ontário: [s.n.], 2008a. 87 p.

QUANSER INNOVATE EDUCATE. **2D ball balancer control using Quarc**: user manual. Ontário: [s.n.], 2008b. 23 p.

RHEE, B. J.; WON, S. A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 157, n. 9, p. 1211–1228, 2006.

SADEGHI, M. S.; SAFARINEJADIAN, B.; FARUGHIAN, A. Parallel distributed compensator design of tank level control based on fuzzy Takagi-Sugeno model. **Applied Soft Computing**, Amsterdam, v. 21, n. 1, p. 280–285, Aug 2014. Supplement C.

SANTIM, M. P. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. **Mathematical Problems in Engineering**, New Iorque, v. 2012, n. 1, p. 1–17, 2012.

SCHARLAU, C. C.; OLIVEIRA, M. C. de; TROFINO, A.; DEZUO, T. J. Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 68, n. 1, p. 1 – 8, 2014. Supplement C.

SOUZA, W. A.; OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, L. S. C.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA- CBA, 20., 2014, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBA, 2014a. p. 2238–2245.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014b.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**, New Iorque, v. 2013, n. 1, p. 1–10, 2013.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. **Mathematical Problems in Engineering**, New Iorque, v. 2014, n. 1, p. 1–11, 2014c.

- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, A MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Oxfordshire, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **Systems Man And Cybernetics, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.
- TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 11, n. 5, p. 613–623, Oct 2003.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999.
- UTKIN, V.; LEE, H. Chattering problem in sliding mode control systems. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS- VSS, 6., 2006, Alghero. **Proceedings...** Alghero: IEEE, 2006. p. 346–350.
- UTKIN, V. I. Sliding mode control design principles and applications to electric drives. **Industrial Electronics, IEEE Transactions on**, New Iorque, v. 40, n. 1, p. 23–36, Feb 1993.
- WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2., 1995, Yokohama. **Proceedings...** Yokohama: IEEE, 1995. v. 2, p. 531–538.
- WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996.
- WANG, N.; ADELI, H. Algorithms for chattering reduction in system control. **Journal of the Franklin Institute**, Amsterdam, v. 349, n. 8, p. 2687–2703, 2012.
- YOUNG, K. D.; UTKIN, V. I.; OZGUNER, U. A control engineer's guide to sliding mode control. **Control Systems Technology, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 7, n. 3, p. 328–342, May 1999.