

TCC - Introdução à Dinâmica de Rotação Clássica

Trabalho de Conclusão de Curso

Aluno: Allan Kardec de Almeida Junior

Orientador: Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

Introdução

A rotação perturbada de um corpo rígido ao longo do tempo tem sido estudada tanto pela engenharia de satélites artificiais e naves espaciais, como pela astronomia planetária.

O assunto de rotação de um corpo rígido, em geral, não é visto nos cursos de graduação em física.

Neste trabalho, será realizado um tratamento introdutório da rotação de corpos rígidos no espaço, começando com conceitos básicos da mecânica Newtoniana.

O objetivo prático deste estudo é deduzir e estudar as *Equações Geométricas de Euler*, bem como as *Equações Dinâmicas de Euler*, como preparatório para então fazer uma introdução às *Variáveis de Andoyer*, que por sua vez, possibilita um estudo mais aprofundado na presença de perturbações gerais.

Durante o início do estudo, foi feita uma revisão dos fundamentos da Mecânica Newtoniana, com foco nas ferramentas necessárias para a dedução e o estudo das *Equações Geométricas de Euler*, das *Equações Dinâmicas de Euler* e, por fim, da introdução às *Variáveis de Andoyer*;

O trabalho é dividido em seções, com assuntos em ordem ascendente das bases para o estudo da dinâmica de rotação. Começa com as leis de Newton, usa as ferramentas da mecânica clássica para descrever um corpo rígido, suas propriedades e as ferramentas matemáticas necessárias para descrever a dinâmica de rotação deste corpo.

Summary

The practical aim of this study is to deduce and study the Euler geometric equations and the Euler dynamic equations, as preparatory to then make an introduction to Andoyer variables, which in turn allows further study in the presence of general disorders.

Conteúdo

Seção 1 – Leis de Newton

Seção 2 – Momento Linear e Angular

Seção 3 – Momento de Inércia

Seção 4 – Centro de Massa

Seção 5 - Estática dos Corpos Rígidos

Seção 5 - Sistemas de Coordenadas em movimento

Seção 6 - Rotação do Sistema de Coordenadas

Seção 7 – Ângulos de Euler e equações geométricas

Seção 8 – Definição de Momento Angular, a Matriz Momento de Inércia e Obtenção da Energia Cinética de um Corpo Rígido.

Seção 9 - Equações Dinâmicas de Euler para o Movimento de um Corpo Rígido

Seção 10 – Aplicação 1 – O Movimento no Topo do Corpo Rígido

Seção 11 - Exemplo 1 – a Rotação da Terra

Seção 12 - Exemplo 2 – O Disco Girante

Seção 13 – Introdução as Variáveis de Andoyer

Referências Bibliográficas

Seção 1 – Leis de Newton

As leis de Newton constituem o fundamento de toda a mecânica clássica. No século XVII estas leis foram enunciadas como segue:

Primeira Lei de Newton

“ Lei I: Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele.”

Esta é a lei da inércia. Ela serve principalmente para imprimir o conceito de referencial inercial, dentro do qual todo o resto é válido.

Segunda Lei de Newton

“ Lei II: A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é imprimida.”

A segunda lei é conhecida como $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$, uma vez que movimento é definido como “ $m \cdot \mathbf{v}$ ”, sendo $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{F}$ entes vetoriais.

Terceira lei de Newton

“ Lei III: A toda ação há sempre uma reação oposta e de igual intensidade: ou as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em direções opostas.”

As leis de Newton enunciadas anteriormente são vetoriais, o que significa que obedecem a lei de adição de vetores, ou seja, $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ implica em $(\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a})_{x,y,z}$ de maneira isolada na direção x , na direção y e na direção z .

Seção 2 – Momento Linear e Angular

Momento linear - momento linear foi definido por Newton antes mesmo das suas leis como sendo “ $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$ ” e chamado de movimento.

Momento angular: é definido pelo produto vetorial: $L = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$.

Segue a tabela comparativa:

Caso geral	Caso angular (relativo a um eixo de giro)
Posição: x	Posição: θ
Velocidade: $v = \dot{x}$	Velocidade angular: $\omega = \dot{\theta}$
Aceleração: $a = \ddot{x}$	Aceleração angular: $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$
Massa: m	Inércia: $I = m \cdot r^2$
Momento linear: $P = m \cdot \dot{x}$	Momento angular: $L = I \cdot \dot{\theta}$
Força: $F = dP/dt$	Torque: $N = dL/dt$
Energia cinética: $\frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$	Energia cinética: $\frac{1}{2} I \cdot \dot{\theta}^2$

A inércia, momento angular e torque serão definidos mais adiante.

Seção 3 – Momento de Inércia

A inércia linear é a dificuldade imposta a uma partícula ao seu movimento. Ela começa a ser entendida na primeira lei de Newton, mas com a segunda lei, ela pode ser exposta matematicamente através da massa da partícula, que funciona como um obstáculo à mudança de movimento (variação da velocidade).

A inércia angular, também conhecida como momento de inércia, foi criada para que as equações de movimento de corpos que giram tenham similaridade com as equações de movimento do caso linear. O momento de inércia de uma partícula de massa m que gira em torno de um eixo a uma distância r é definido como:

$$I = m r^2 \quad (3.1)$$

Para partículas de massas e momentos de inércia constantes, compara-se a similaridade das equações:

$$\begin{aligned} \text{Caso linear:} \\ F = m \ddot{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Caso angular:} \\ \tau = I \ddot{\theta} \end{aligned}$$

Inércia rotacional de corpos sólidos:

O diferencial do momento de inércia (ou a inércia de corpos que giram) é escrito a partir da definição do parágrafo anterior, como um diferencial de massa multiplicado pela sua respectiva distância ao eixo de rotação ao quadrado, como segue:

$$dI = (dm)r^2 \quad (3.2)$$

Com isso, a inércia total pode ser encontrada efetuando a soma contínua sobre todas as massas diferenciais do corpo:

$$I = \int (dm) \cdot r^2 \quad (3.3)$$

Neste caso, (dm) pode ser substituído pela massa específica multiplicada pelo respectivo diferencial de volume ocupado pelo elemento (dm) , como segue:

$$dm = \rho \cdot dv \quad (3.4)$$

Agora a integral pode ser realizada sobre o volume, que é escrito de maneira diferente em cada sistema de coordenadas escolhido (geralmente escolhe-se um sistema que traga maior simetria ao problema).

Teorema dos eixos paralelos:

A inércia rotacional de um corpo qualquer em relação a um eixo arbitrário é igual à inércia rotacional em relação a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa somada da massa total vezes a distância entre os dois eixos ao quadrado.

Seção 4 – Centro de Massa

Centro de massa de um sistema de partículas:

O centro de massa para um sistema de partículas é definido como segue:

$$\mathbf{R}_{cm} = \left(\frac{1}{M}\right) \sum_i m_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (4.1)$$

Sendo que nesta equação:

$\mathbf{R}_{cm}$ localiza o centro de massa do sistema.

m_i representa a massa da i -ésima partícula.

$\mathbf{r}_i$ é o vetor que localiza a i -ésima partícula.

M é a soma das massas de cada partícula, ou seja, a massa total compreendida pelo sistema de partículas.

Centro de massa de um corpo sólido:

No caso de um corpo sólido (corpo rígido), a soma contínua para o centro de massa do corpo:

$$\mathbf{R} = \left(\frac{1}{M}\right) \iiint \rho \cdot \mathbf{r} \cdot dv \quad (4.2)$$

Nesta equação:

ρ é a densidade de massa do corpo em cada ponto.

$\mathbf{r}$ é a localização vetorial do respectivo diferencial de volume.

dv é o elemento de volume do corpo, calculado de acordo com o sistema de coordenadas escolhido.

M é a massa total do corpo.

Teorema: *Se um corpo for simétrico em relação a um plano, seu centro de massa estará nesse plano.*

Prova: para a integral do momento de inércia, pode-se escolher o eixo Z como sendo perpendicular a este plano e o zero deste eixo na intersecção com o plano de simetria. Assim sendo, como as massas são simétricas, a parte negativa de z cancela em cada ponto a parte positiva de z, pois o módulo da densidade de massa naquele ponto é o mesmo.

Alguns corolários seguem como resultado óbvio da extensão do teorema acima:

-Se um corpo for simétrico em relação a dois planos, o seu centro de massa estará na linha de intersecção dos planos.

-Se um corpo for simétrico em relação a um eixo, o seu centro de massa estará neste eixo.

-Se um corpo for simétrico em relação a três planos que tem um ponto comum, este ponto será seu centro de massa.

-Se um corpo tiver simetria esférica em relação a um ponto, isto é, se a densidade depender somente da distância a este ponto, então este ponto será seu centro de massa.

Teorema para o caso de 2 ou mais corpos extensos: se houver 2 ou mais corpos cujos respectivos centros de massa são conhecidos, o centro de massa comum pode ser calculado como se fossem duas partículas cujas respectivas massas totais estivessem concentradas nos seus respectivos centros de massa.

Centro de massa de partícula única:

Obviamente o centro de massa de uma única partícula é simplesmente a sua localização, uma vez que a sua massa é aproximadamente pontual, porém, é interessante notar que isto se torna um caso particular das duas formas apresentadas anteriormente.

Seção 5 - Sistemas de Coordenadas em movimento

Suponha dois eixos de coordenadas com os eixos paralelos entre si, porém distantes um do outro por um vetor **h**. Escreve-se:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \mathbf{h} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \mathbf{h} \quad (5.2)$$

Desta maneira, em coordenadas retangulares, é possível escrever as equações para os elementos do sistema sem asterisco com relação ao sistema com asterisco:

$$x = x^* + h_x \quad y = y^* + h_y \quad z = z^* + h_z \quad (5.3)$$

$$x^* = x - h_x \quad y^* = y - h_y \quad z^* = z - h_z \quad (5.4)$$

Seguindo este raciocínio, a relação entre as velocidades, fica:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}_h \quad (5.5)$$

Supondo que os eixos com asterisco permaneçam paralelos, este movimento é chamado de translação do sistema de coordenadas e a aceleração é escrita:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}^*}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{h}}{dt^2} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^* + \mathbf{h} \quad (5.7)$$

As equações de movimento de Newton são válidas para um sistema de coordenadas fixo. Para uma partícula de massa m sujeita a uma força $\mathbf{F}$, a equação de Newton fica:

$$\mathbf{F} = m \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{F} = \frac{d^2\mathbf{r}^*}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{h}}{dt^2} \quad (5.9)$$

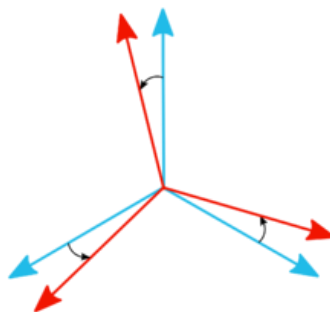
Ou então:

$$\frac{d^2\mathbf{r}^*}{dt^2} = \mathbf{F} - \frac{d^2\mathbf{h}}{dt^2} \quad (5.10)$$

Do ponto de vista da mecânica clássica, $\mathbf{F} - m \cdot \mathbf{a}_h$ não é uma força, mas pode ser chamada de força fictícia, que depende da aceleração do referencial asterisco com relação ao referencial sem asterisco.

Seção 6 - Rotação do Sistema de Coordenadas

Consideremos a seguir o eixo x, y, z e também o x^*, y^*, z^* , cujos eixos giram em torno do sistema sem asterisco, mas a origem continuam coincidentes (não há translação):



Um vetor $\mathbf{R}$ escrito no sistema sem asterisco e no sistema com asterisco fica:

$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{r} = x' \cdot \mathbf{i}' + y' \cdot \mathbf{j}' + z' \cdot \mathbf{k}' \quad (6.2)$$

Por conveniência o asterisco $*$ foi trocado pela linha $'$, que a partir de agora caracterizará o sistema de coordenadas sem linha e com linha.

Fazendo o produto escalar $(\mathbf{i}, \mathbf{r})$, $(\mathbf{j}, \mathbf{r})$ e $(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ e utilizando as expressões acima para $\mathbf{r}$, obtém-se:

$$x = x'(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}) + y'(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}) + z'(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}) \quad (6.3)$$

$$y = x'(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}) + y'(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}) + z'(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{j}) \quad (6.4)$$

$$z = x'(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}) + y'(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}) + z'(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) \quad (6.5)$$

As relações de produto escalar entre parênteses são o cosseno do ângulo entre os dois eixos que estão dentro de cada parênteses.

Suponha um vetor $\mathbf{A}$ escrito em ambos os sistemas de coordenadas:

$$\mathbf{A} = A_x \cdot \mathbf{i} + A_y \cdot \mathbf{j} + A_z \cdot \mathbf{k} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{A} = A_x' \cdot \mathbf{i}' + A_y' \cdot \mathbf{j}' + A_z' \cdot \mathbf{k}' \quad (6.7)$$

Suponha que o sistema com linha gira com relação ao sistema sem linha com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, sendo que o eixo de giro passa pela origem comum a ambos os sistemas. Assim sendo, qualquer vetor que gire em torno deste eixo com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, estará em repouso no sistema de coordenadas com linha.

Definindo $\frac{d'\mathbf{A}}{dt}$ como a derivada de $\mathbf{A}$ com relação a t no sistema com linha, pode-se escrever:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (6.8)$$

Derivando mais uma vez esta equação e aplicando ela própria:

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = \frac{d'^2\mathbf{A}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) + 2 \cdot \boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{A} \quad (6.9)$$

Esta fórmula denomina-se *Teorema de Coriolis*. O primeiro termo do segundo membro é a aceleração em relação ao sistema com asterisco. O segundo termo denomina-se aceleração centrípeta de um ponto em rotação em torno de um eixo (centrípeta significa dirigida para o centro).

Em analogia, podemos comparar o ponto de vista de um referencial não inercial. Muitas vezes, fica mais fácil resolver um problema em outro referencial, ainda que não inercial. Faz-se a transição através de uma transformação de coordenadas. Segue o exemplo para a equação acima, vista do sistema com linha:

Rearranjando a equação para deixá-la parecida com a equação de Newton para $\mathbf{A}$ no sistema com linha:

$$m \frac{d'^2\mathbf{A}}{dt^2} = \mathbf{F} - m \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) - 2 \cdot m \cdot \boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{A}}{dt} - m \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{A} \quad (6.10)$$

O segundo termo do segundo membro chama-se força centrífuga (orientada para fora do centro); e o terceiro, *Força de Coriolis*. O último só aparece em casos de rotações não uniformes.

É possível também fazer a combinação de translação e rotação do sistema de coordenadas. Deste modo, valem as fórmulas, sendo $\mathbf{A}'$ o vetor $\mathbf{A}$ escrito no sistema que gira:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{h} \quad (6.11)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}' + \frac{d\mathbf{h}}{dt} \quad (6.12)$$

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = \frac{d'^2\mathbf{A}'}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}') + 2 \cdot \boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{A}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{A}' + \frac{d^2\mathbf{h}}{dt^2} \quad (6.13)$$

Destas três equações, a segunda será de particular interesse na demonstração das equações dinâmicas de Euler, logo mais adiante.

Seção 7 – Ângulos de Euler e equações geométricas

Suponha um corpo extenso, rígido e livre no espaço. Como este corpo se comporta? Qual o tipo de movimento que este corpo realiza? Ou ainda melhor: quais os meios que eu possuo para localizar a posição do corpo e também descrever seu movimento, seja ele de translação ou rotação?

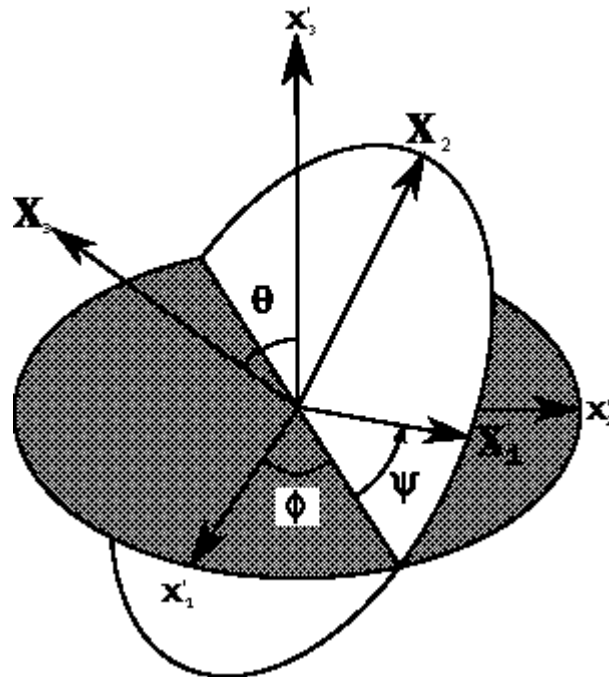
Esta seção e a próxima trarão as ferramentas necessárias para descrever a localização, orientação e o movimento de um corpo rígido, tanto translacional como de rotação e será baseada no livro *Introduction to Classical Mechanics*, 2nd ed. - Atam P. Arya.

Para isso, começamos calculando uma matriz de transformação de coordenadas. Digamos que tenhamos que partir de um sistema de coordenadas fixo ou inercial X' para um sistema de coordenadas do corpo X . A transformação pode ser representada pela equação matricial:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\lambda} \mathbf{X}' \quad (7.1)$$

Na equação acima, a matriz de rotação $\boldsymbol{\lambda}$ especifica completamente a orientação relativa entre ambos os sistemas. Tal matriz de rotação deveria conter três ângulos independentes. De todas as possíveis escolhas para estes três ângulos, a mais comum e conveniente são os ângulos de Euler, representados por ϕ , θ e ψ .

Para ir de um sistema inercial ou fixo no laboratório para um sistema fixo no corpo, é realizada a seguinte sequência de rotações dos três ângulos, como visto no exemplo da figura abaixo:

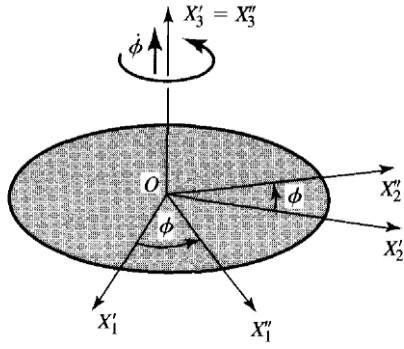


Sequência de três giros partindo do sistema fixo no espaço x'_i e localizando com três ângulos o corpo em seu próprio sistema fixo X_i

Considere o sistema de coordenadas retangulares X , composto pelos eixos $\{X_1, X_2, X_3\}$, o sistema X' , fixo no espaço, composto pelos eixos $\{X'_1, X'_2, X'_3\}$, o sistema X'' , composto pelos eixos $\{X''_1, X''_2, X''_3\}$ e assim por diante. Partindo do sistema X' , após a primeira rotação seguiremos para X'' . Após a segunda rotação no sistema X'' , seguiremos para o sistema X''' . E finalmente após a terceira rotação já no sistema X''' , obteremos o resultado no sistema X , que é o sistema de coordenadas do corpo.

1. A primeira rotação é no sentido anti-horário do ângulo ϕ , sobre o eixo X'_3 e no plano formado por X'_1 e X'_2 , transformando os eixos $X'_i \rightarrow X''_i$, conforme o desenho. A matriz de transformação para esta primeira rotação no plano formado por X'_1 e X'_2 é:

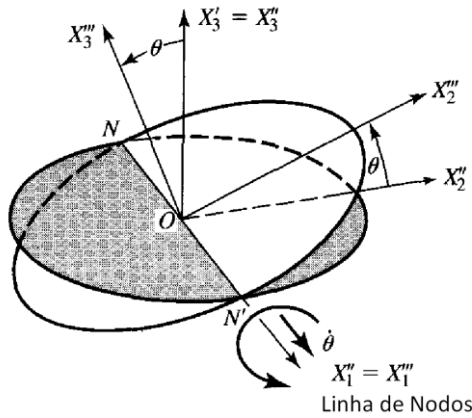
$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$



O ângulo ϕ é chamado de ângulo de precessão.

2. A segunda rotação é no sentido anti-horário do ângulo θ , sobre o eixo X''_1 e no plano formado por X''_2 e X''_3 , transformando os eixos $X''_i \rightarrow X'''_i$, conforme o desenho. A matriz de transformação para esta segunda rotação no plano formado por X''_2 e X''_3 é:

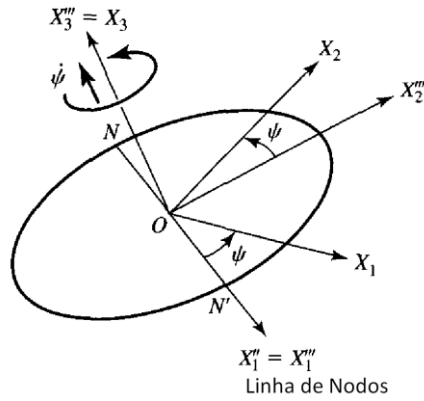
$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7.3)$$



O ângulo θ é chamado de ângulo de nutação.

3. A terceira rotação é no sentido anti-horário do ângulo ψ , sobre o eixo X'''_3 e no plano formado por X'''_1 e X'''_2 , transformando os eixos $X'''_i \rightarrow X_i$, conforme o desenho. A matriz de transformação para esta terceira rotação no plano formado por X''_2 e X''_3 é:

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$



O ângulo θ é chamado de ângulo do corpo.

A linha formada pela intersecção dos planos contendo os eixos X_1 e X_2 do sistema do corpo e os eixos X'_1 e X'_2 do sistema fixo é chamada de linha dos nodos. A transformação do sistema de coordenadas fixo X'_i para o sistema de coordenadas do corpo X_i é caracterizada pela matriz de rotação λ obtida pelo produto das três matrizes individuais, R_ψ , R_θ e R_ϕ resolvidas anteriormente. Segue:

$$\lambda = R_\psi, R_\theta \text{ e } R_\phi \quad (7.5)$$

$$\lambda_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \Phi - \cos \theta \sin \Phi \sin \psi & \cos \psi \cos \Phi + \cos \theta \cos \Phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \Phi - \cos \theta \sin \Phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \Phi + \cos \theta \cos \Phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \Phi & -\sin \theta \cos \Phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

É importante frisar que o deslocamento angular e outras quantidades podem ser representadas por vetores somente se estas quantidades são infinitesimalmente pequenas; então elas obedecem a lei de adição de vetores. A exceção é o caso no qual as rotações estão no mesmo plano. Isto nos permite representar as três derivadas temporais da rotação, que são $\dot{\Phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$, como os componentes o vetor velocidade angular ω (ω_ϕ , ω_θ , ω_ψ). As três componentes de ω não estão necessariamente ao longo dos eixos fixos ou dos eixos do corpo. Então:

$\omega_\phi = \dot{\Phi}$ está ao longo do eixo X'_3 (fixo)

$\omega_\theta = \dot{\theta}$ está ao longo da linha de nodos

$\omega_\psi = \dot{\psi}$ está ao longo do eixo X_3 (corpo)

Não é muito conveniente utilizar estas componentes para descrever o movimento de um corpo rígido. Equações do corpo rígido são descritas em termos do sistema de coordenadas do corpo, de maneira que temos que calcular o vetor velocidade angular ω (ω_ϕ , ω_θ , ω_ψ) no sistema de coordenadas do corpo. Para fazer isto, é necessário primeiro resolver $\dot{\Phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ nos eixos do corpo.

Com o gráfico montado, cria-se o produto vetorial de $\mathbf{r}$ pelo diferencial do ângulo em questão (Φ, θ e ψ) para encontrar o vetor velocidade angular, que fica sempre no eixo de giro do ângulo em questão, no sentido imposto pelo produto vetorial da definição de velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Como $\mathbf{v}$ está momentaneamente na direção e sentido do diferencial angular ($d\Phi, d\theta$ ou $d\psi$), então $\dot{\Phi}, \dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ encontram-se sobre os seus próprios eixos de giro.

Fazendo a projeção de $\dot{\Phi}, \dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ sobre as coordenadas fixas no corpo rígido, encontram-se as três componentes da velocidade angular dos deslocamentos angulares, que são escritas como segue:

$\dot{\Phi}_1 = \dot{\Phi} \sin \theta \sin \psi$	Ao longo do eixo X_1
$\dot{\Phi}_2 = \dot{\Phi} \sin \theta \cos \psi$	Ao longo do eixo X_2
$\dot{\Phi}_3 = \dot{\Phi} \cos \theta$	Ao longo do eixo X_3
$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi$	Ao longo do eixo X_1
$\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi$	Ao longo do eixo X_2
$\dot{\theta}_3 = 0$	Ao longo do eixo X_3
$\dot{\psi}_1 = 0$	Ao longo do eixo X_1
$\dot{\psi}_2 = 0$	Ao longo do eixo X_2
$\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$	Ao longo do eixo X_3

(7.7)

Utilizando estes resultados, obtemos as componentes de $\boldsymbol{\omega}$, que são a soma de cada componente de velocidade angular no respectivo eixo do sistema do corpo.

$\omega_1 = \dot{\Phi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\Phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$	ao longo do eixo X_1
$\omega_2 = \dot{\Phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\Phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$	ao longo do eixo X_2
$\omega_3 = \dot{\Phi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\Phi} \cos \theta + \dot{\psi}$	ao longo do eixo X_3

(7.8)

Estas são as *Equações Geométricas de Euler* e pode-se fazer uso delas para descrever o movimento do corpo rígido utilizando-se os eixos do corpo.

Seção 8 – Definição de Momento Angular, a Matriz Momento de Inércia e Obtenção da Energia Cinética de um Corpo Rígido.

As equações restantes de movimento serão deduzidas nesta seção. Elas são de extrema utilidade para descrever o movimento de um corpo rígido.

A equação do momento angular é definida como:

$$\mathbf{L} = \sum_k m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \quad (8.1)$$

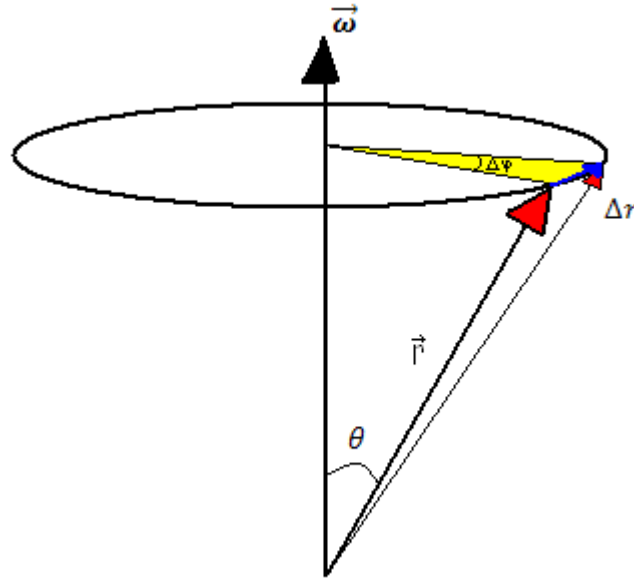


figura 8.1

Analisando o desenho, nota-se que para pequenos deslocamentos:

$$\Delta r = r \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \Delta \varphi \quad (8.2)$$

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = r \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = r \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \omega \quad (8.3)$$

Vetorialmente, $\mathbf{v}$ fica na direção perpendicular a ambos $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{r}$, portanto, pode ser escrito como:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8.4)$$

Reescrevendo o momento angular:

$$\mathbf{L} = \sum_k m_k \mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) \quad (8.5)$$

Onde ω é a velocidade angular comum para toda k -ésima partícula (trata-se de um corpo rígido), portanto, o sub-índice k será ignorado.

Da relação de produto vetorial:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (8.6)$$

Aplicando tal relação em $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = \sum_k m_k \{ \mathbf{r}_k^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_k (\mathbf{r}_k \cdot \boldsymbol{\omega}) \} \quad (8.7)$$

Nota-se na equação acima que L é linearmente proporcional a ω . Abrindo as componentes de ω e r nas coordenadas retangulares do sistema fixo:

$$\mathbf{L} = \sum_k m_k \{ (\mathbf{r}_k^2 (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) - (x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k})(x_k \omega_x \mathbf{i} + y_k \omega_y \mathbf{j} + z_k \omega_z \mathbf{k}) \} \quad (8.8)$$

Separando as componentes de L em cada direção:

$$L_x = \sum_k m_k \{ (\mathbf{r}_k^2 - x_k^2) \omega_x - x_k y_k \omega_y - x_k z_k \omega_z \} \quad (8.9)$$

$$L_y = \sum_k m_k \{ (\mathbf{r}_k^2 - y_k^2) \omega_y - y_k x_k \omega_x - y_k z_k \omega_z \} \quad (8.10)$$

$$L_z = \sum_k m_k \{ (\mathbf{r}_k^2 - z_k^2) \omega_z - z_k x_k \omega_x - z_k y_k \omega_y \} \quad (8.11)$$

As equações acima podem ser simplificadas, ao construir uma matriz I , de maneira que satisfaça:

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega} \quad (8.12)$$

Assim:

$$\mathbf{L} = \sum_k m_k \begin{pmatrix} \mathbf{r}_k^2 - x_k^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -y_k x_k & \mathbf{r}_k^2 - y_k^2 & -y_k z_k \\ -z_k x_k & -z_k y_k & \mathbf{r}_k^2 - z_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}; \text{ sendo: } \mathbf{r}_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \quad (8.13)$$

A matriz I é identificada como:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

Sendo suas componentes da diagonal principal:

$$I_{xx} = \sum_k m_k (\mathbf{r}_k^2 - x_k^2) \quad (8.15)$$

$$I_{yy} = \sum_k m_k (\mathbf{r}_k^2 - y_k^2) \quad (8.16)$$

$$I_{zz} = \sum_k m_k (\mathbf{r}_k^2 - z_k^2) \quad (8.17)$$

E os outros componentes fazendo parte de uma matriz simétrica:

$$I_{jk} = I_{kj} \quad (8.18)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \sum_k m_k x_k y_k \quad (8.19)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \sum_k m_k x_k z_k \quad (8.20)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \sum_k m_k z_k y_k \quad (8.21)$$

Em situações mais comuns, o corpo é extenso e contínuo, então pode ser feita a transformação da soma discreta, como visto até aqui, para a integral, de maneira a identificar as componentes de I:

$$m_k \rightarrow dm \quad (8.22)$$

$$\sum \rightarrow \int \quad (8.23)$$

$$dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (8.24)$$

Fica para o cálculo das componentes:

$$I_{xx} = \int \rho(y^2 + z^2) dx dy dz \quad (8.25)$$

$$I_{yy} = \int \rho(x^2 + z^2) dx dy dz \quad (8.26)$$

$$I_{zz} = \int \rho(x^2 + y^2) dx dy dz \quad (8.27)$$

$$I_{xy} = \int \rho xy dx dy dz \quad (8.28)$$

$$I_{yz} = \int \rho yz dx dy dz \quad (8.29)$$

$$I_{xz} = \int \rho xz dx dy dz \quad (8.30)$$

I é uma matriz hermitiana (auto-adjunta), então sempre existe uma transformação que diagonaliza esta matriz, de maneira que:

$$I \rightarrow \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

A praticidade é orientar os eixos de coordenadas fixos no corpo de maneira que I_{xy} e todos os outros elementos fora da diagonal principal sejam anulados. Dessa forma, sobra somente os eixos principais de inércia (a diagonal de I).

A energia cinética pode ser calculada a partir de sua definição:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \quad (8.32)$$

Porém, tínhamos:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8.33)$$

Reescrevendo:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) \quad (8.34)$$

Da identidade vetorial:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (8.35)$$

E assim, a energia cinética é escrita:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \boldsymbol{\omega} \cdot \{\mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k)\} \quad (8.36)$$

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_k m_k \mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) \quad (8.37)$$

Usando a definição do momento angular L:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \quad (8.38)$$

Ou reescrevendo L de maneira que:

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega} \quad (8.39)$$

A energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I \boldsymbol{\omega} \quad (8.40)$$

Sendo I uma matriz diagonalizada, com os elementos da sua diagonal contendo os elementos dos eixos principais de inércia:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (I_1 \omega_1, I_2 \omega_2, I_3 \omega_3) \quad (8.41)$$

Ou por fim:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad (8.42)$$

Esta é mais uma maneira similar de comparação entre o caso angular e o caso geral.

Seção 9 - Equações Dinâmicas de Euler para o Movimento de um Corpo Rígido

De posse das informações da seção anterior, as equações dinâmicas de Euler podem ser deduzidas, como segue:

Primeiro será considerado o torque externo nulo: $\tau_{ext} = 0$

Sendo $\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$ e com $\mathbf{I}$ diagonalizada, então $\mathbf{L}$ fica mais simples em função dos eixos principais de inércia $\mathbf{e}_i$, que formam uma base ortogonal fixa no corpo.

$$\mathbf{L} = I_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3 \quad (9.1)$$

Derivando com relação ao tempo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_1 \dot{\omega}_1 \mathbf{e}_1 + I_1 \omega_1 \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + I_2 \dot{\omega}_2 \mathbf{e}_2 + I_2 \omega_2 \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + I_3 \dot{\omega}_3 \mathbf{e}_3 + I_3 \omega_3 \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} \quad (9.2)$$

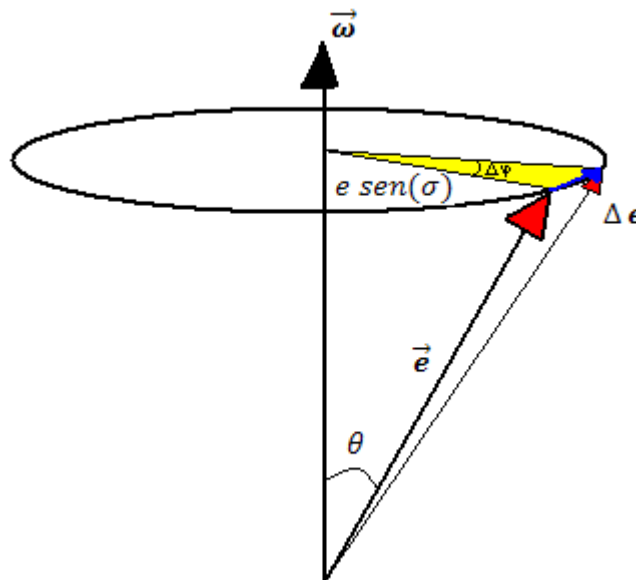


figura 9.1

Do desenho, observa-se que:

$$\Delta e = |e| \sin(\sigma) \Delta \varphi \quad (9.3)$$

$$\frac{\Delta e}{\Delta t} = |e| \sin(\sigma) \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad (9.4)$$

$$\frac{\Delta e}{\Delta t} = |e| \sin(\sigma) \omega \quad (9.5)$$

Nota-se que $\frac{d\mathbf{e}}{dt}$ fica na direção perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ e a $\mathbf{e}$, portanto, pode ser escrito vetorialmente como:

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \quad (9.6)$$

Reorganizando:

$$\frac{dL}{dt} = I_1\dot{\omega}_1\mathbf{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\mathbf{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\mathbf{e}_3 + I_1\omega_1\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + I_2\omega_2\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + I_3\omega_3\frac{d\mathbf{e}_3}{dt} \quad (9.7)$$

Temos a informação:

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \quad (9.8)$$

Fazendo a substituição:

$$\frac{dL}{dt} = I_1\dot{\omega}_1\mathbf{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\mathbf{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\mathbf{e}_3 + I_1\omega_1\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 \quad (9.9)$$

De maneira mais compacta:

$$\frac{dL}{dt} = I_1\dot{\omega}_1\mathbf{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\mathbf{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (9.10)$$

Agora utilizando a definição de produto vetorial:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \text{determinante} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1\omega_1 & I_2\omega_2 & I_3\omega_3 \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

Obtém-se finalmente das componentes em $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \rightarrow \begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) = 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(I_1 - I_3) = 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_2 - I_1) = 0 \end{cases} \quad (9.12)$$

Estas são conhecidas como *Equações Dinâmicas de Euler* ou simplesmente equações de Euler para o movimento de um corpo rígido na ausência de um campo de força.

Seção 10 - Aplicação 1 – O Movimento no Topo de Um Corpo Rígido Livre com Simetria

Aqui será suposto um corpo livre no espaço, na ausência completa de forças que agem fora do centro de massa ($\tau = 0$). O corpo rígido possui momento de inércia $I_1 I_2 I_3$, com relação aos respectivos eixos $X_1 X_2 X_3$, porém com a condição de simetria ao longo do eixo X_3 .

As 3 equações dinâmicas de Euler para o caso particular no qual o torque é nulo, são:

$$I_1 \cdot \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 = 0 \quad (10.1)$$

$$I_2 \cdot \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \quad (10.2)$$

$$I_3 \cdot \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = 0 \quad (10.3)$$

Porém, aplicando a condição de simetria ($I_1 = I_2 = I$), as equações ficam:

$$I \cdot \dot{\omega}_1 + (I_3 - I) \omega_3 \omega_2 = 0 \quad (10.4)$$

$$I \cdot \dot{\omega}_2 + (I - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \quad (10.5)$$

$$I_3 \cdot \dot{\omega}_3 = 0 \quad (10.6)$$

Como $I_3 \neq 0$, então $\dot{\omega}_3 = 0$ e fica fácil integrar para encontrar:

$$\omega_3 = \text{constante de movimento} \quad (10.7)$$

As duas equações anteriores ficam:

$$I \cdot \dot{\omega}_1 + (I_3 - I) \omega_3 \omega_2 = 0 \quad (10.8)$$

$$I \cdot \dot{\omega}_2 + (I - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \quad (10.9)$$

Rearranjando:

$$\dot{\omega}_1 + \frac{(I_3 - I)}{I} \omega_3 \omega_2 = 0 \quad (10.10)$$

$$\dot{\omega}_2 - \frac{(I_3 - I)}{I} \omega_3 \omega_1 = 0 \quad (10.11)$$

Fazendo a substituição $\alpha = \frac{(I_3 - I)}{I} \omega_3$, ficam as equações de movimento acopladas:

$$\dot{\omega}_1 + \alpha \omega_2 = 0 \quad (10.12)$$

$$\dot{\omega}_2 - \alpha \omega_1 = 0 \quad (10.13)$$

São duas equações de primeira ordem, porém estão acopladas, mas é possível trabalhar estas duas equações para desacoplá-las derivando mais uma vez cada uma delas:

$$-\frac{\ddot{\omega}_1}{\alpha} = \dot{\omega}_2 \quad (10.14)$$

$$\frac{\ddot{\omega}_2}{\alpha} = \dot{\omega}_1 \quad (10.15)$$

E substituindo na original. Fica:

$$\ddot{\omega}_2 + \alpha^2 \omega_2 = 0 \quad (10.16)$$

$$\ddot{\omega}_1 + \alpha^2 \omega_1 = 0 \quad (10.17)$$

As soluções dessas equações, são:

$$\omega_1 = A \sin \alpha t + \rho \quad (10.18)$$

$$\omega_2 = B \cos \alpha t + \lambda \quad (10.19)$$

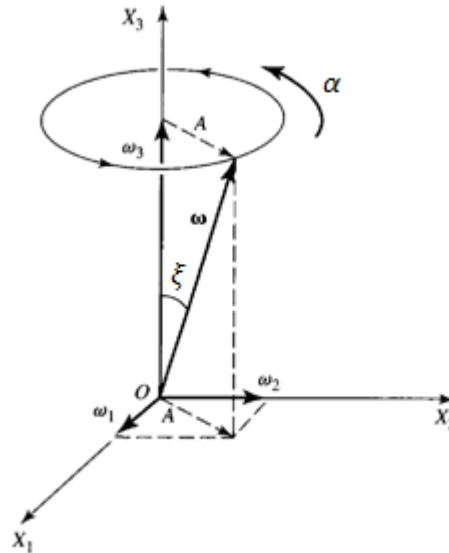
Derivando e substituindo nas equações de movimento acopladas, encontra-se que $A=B$ e $\rho = \lambda$. As soluções são, portanto:

$$\omega_1 = A \sin \alpha t + \rho \quad (10.20)$$

$$\omega_2 = A \cos \alpha t + \rho \quad (20.21)$$

Nestas equações de movimento para ω_1 e ω_2 , A e ρ são constantes. Desde que ω_1 e ω_2 sejam ambos não nulos, as componentes de $\boldsymbol{\omega}$ perpendiculares ao eixo de giro X_3 (que são ω_1 e ω_2), precessam no tempo a uma taxa uniforme $\alpha = \Omega_b$ (pois $\alpha = \text{constante}$) e defasados um com relação ao outro de $\pi/2$ (trata-se da função seno e cosseno com os mesmos argumentos).

Portanto, a precessão do vetor velocidade angular será um círculo de raio A em torno do eixo X_3 , com velocidade angular α e terá o mesmo sentido de ω_3 , se $I_3 > I_1$, e no sentido oposto, caso contrário. A frequência angular de precessão é $\alpha = \frac{(I_3 - I)}{I} \omega_3$. Este círculo de precessão descreve uma superfície que é chamada de cone do corpo.



Se ξ for o ângulo entre X_3 e o eixo de rotação, então:

$$\alpha = \frac{(I_3 - I)}{I} \omega \cos \xi \quad (10.22)$$

Esta é a taxa de precessão do vetor velocidade angular em torno do eixo de simetria (X_3).

Existem 3 constantes arbitrárias, são elas $\{\omega_3, A \text{ e } \rho\}$, provenientes das três equações diferenciais de Euler, que são de primeira ordem. Originalmente seriam 3 equações de segunda ordem, pois da seção 5 deste trabalho:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} = I \frac{d^2\boldsymbol{\omega}}{dt^2} = 0 \quad (10.23)$$

Essas 3 equações para um corpo que gira com 3 graus de liberdade implicam em 6 constantes arbitrárias. As outras 3 constantes arbitrárias para o movimento de um corpo girante são I_1, I_2 , e I_3 .

O objetivo agora é provar que o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ descreve uma circunferência tanto em X_3 (o eixo de giro do corpo) como em torno de $\mathbf{L}$, que é fixo no espaço, criando dois cones, o cone espacial (giro de $\boldsymbol{\omega}$ em $\mathbf{L}$) e o cone do corpo, caudado pelo giro de $\boldsymbol{\omega}$ em X_3 .

Para tanto, vamos abrir mão do nosso sistema de coordenadas X' fixo no espaço ou X fixo no corpo, para utilizar o sistema X''' que é aquele após o segundo giro em θ e antes do terceiro giro em ψ .

Será feita uma transformação como feita na seção 8, porém, para realizar a demonstração do cone do corpo e do espaço de precessão, o sistema de referência agora será o sistema X''' . Será escrito o vetor $\boldsymbol{\omega}$ no sistema X''' e será chamado aqui de $\boldsymbol{\omega}'''$. Dos desenhos, podem-se obter as componentes das velocidades angulares:

$\dot{\phi}_1 = 0$	Ao longo do eixo X'''_1	
$\dot{\phi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta$	Ao longo do eixo X'''_2	
$\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$	Ao longo do eixo X'''_3	
$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}$	Ao longo do eixo X'''_1	
$\dot{\theta}_2 = 0$	Ao longo do eixo X'''_2	
$\dot{\theta}_3 = 0$	Ao longo do eixo X'''_3	
$\dot{\psi}_1 = 0$	Ao longo do eixo X'''_1	
$\dot{\psi}_2 = 0$	Ao longo do eixo X'''_2	
$\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$	Ao longo do eixo X'''_3	

(10.24)

Agora $\boldsymbol{\omega}$ difere de $\boldsymbol{\omega}'$ apenas na taxa de rotação $\dot{\phi}$ em torno do eixo de simetria X_3 . As componentes de $\boldsymbol{\omega}$ no sistema preferencial X'' são as equações de $\boldsymbol{\omega}''$:

$$\omega'''_1 = \dot{\phi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\theta} \quad \text{ao longo do eixo } X''_1 \quad (10.25)$$

$$\omega'''_2 = \dot{\phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \quad \text{ao longo do eixo } X''_2 \quad (10.26)$$

$$\omega'''_3 = \dot{\phi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad \text{ao longo do eixo } X''_3 \quad (10.27)$$

Para determinar como o corpo está se movimentando no espaço, é necessário um referencial (ou pelo menos uma direção) fixo no espaço de modo que seja feita a comparação. Da seção 5, temos que o vetor momento angular é fixo no espaço, pois não há torques envolvidos, então como uma direção fixa no espaço, será escolhido o vetor momento angular $\mathbf{L}$. Obrigando o vetor $\mathbf{L}$ a combinar com o vetor X'_3 , será escrito o vetor $\mathbf{L}$ com respeito ao sistema X''' :

$$L'''_1 = 0 \quad (10.28)$$

$$L'''_2 = L \sin \theta \quad (10.29)$$

$$L'''_3 = L \cos \theta \quad (10.30)$$

Será feita agora a suposição e a prova de que os vetores ω_3 ou ω'''_3 (na direção $\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}'''_3$), ω e $\mathbf{L}$ são coplanares.

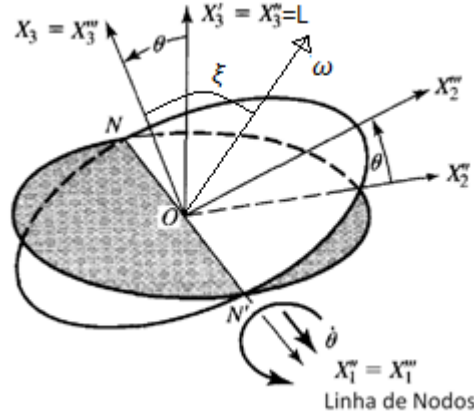


figura 10.1

Para demonstrar que são coplanares, basta que:

$$(\omega_3 \times \omega) \cdot \mathbf{L} = 0 \quad (10.31)$$

Porém:

$$\omega_3 \times \omega = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} = -\omega_2 \omega_3 \mathbf{e}_1 + \omega_1 \omega_3 \mathbf{e}_2 \quad (10.32)$$

$$(\omega_3 \times \omega) \cdot \mathbf{L} = (-\omega_2 \omega_3 \mathbf{e}_1 + \omega_1 \omega_3 \mathbf{e}_2) \cdot (I_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3) \quad (10.33)$$

Utilizando a simetria ($I_1 = I_2$), chega-se a demonstração da eq. (10.31) :

$$(\omega_3 \times \omega) \cdot \mathbf{L} = 0 \quad (10.34)$$

Com isso, mantendo em mente os momentos de inércia de cada eixo $I_1 = I_2 = I$ e I_3 , chamando de ξ o ângulo entre ω e o eixo $\mathbf{X}'''_3$ e usando que $\mathbf{L} = \mathbf{I} \omega$ em cada componente e juntando as equações de ω e $\mathbf{L}$ para cada um destes componentes:

$$\dot{\theta} = 0 \rightarrow \theta = \text{constante} \quad (10.35)$$

$$\omega'''_2 = \omega \sin \xi \quad (10.36)$$

$$\omega'''_3 = \omega \cos \xi \quad (10.37)$$

$$L'''_2 = I \omega \sin \xi \quad (10.38)$$

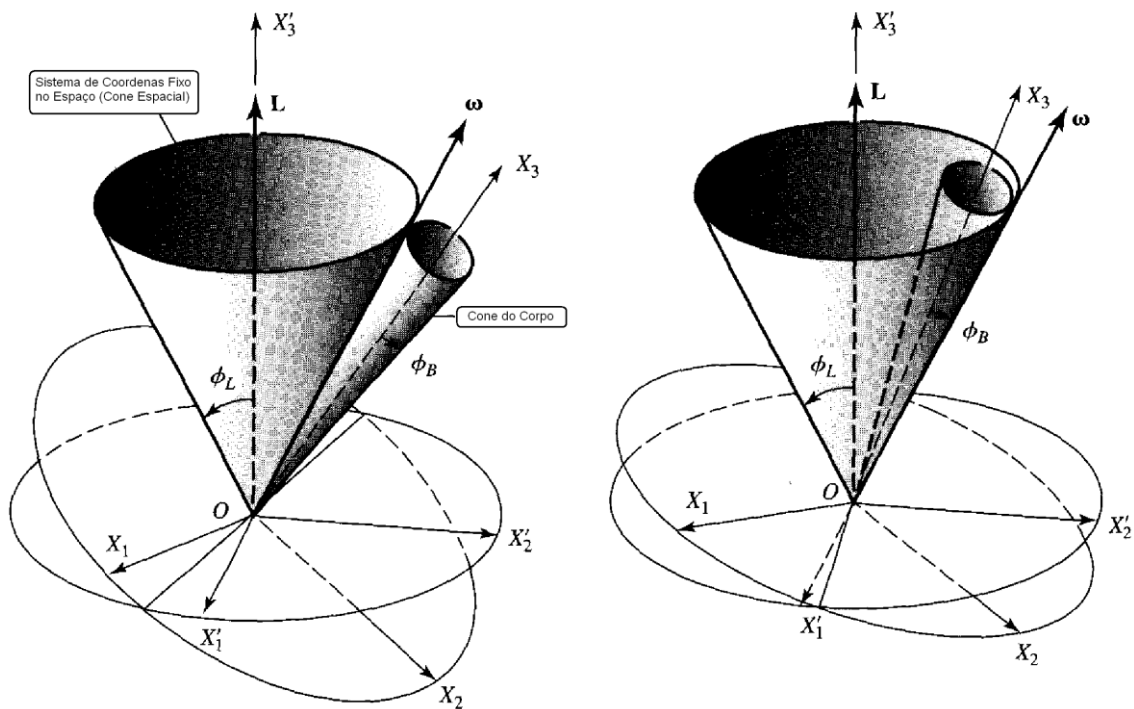
$$L'''_3 = I_3 \omega \cos \xi \quad (10.39)$$

Fazendo a divisão da eq.(10.38) pela eq.(10.39) e comparando com a divisão da eq.(10.29) pela eq.(10.30):

$$\frac{L'''_2}{L'''_3} = \tan \theta = \frac{I}{I_3} \tan \xi \quad (10.40)$$

Esta equação dá a relação entre ξ (o ângulo entre ω e o eixo X'''_3) e o ângulo θ (o ângulo entre L e o eixo X'''_3).

De acordo com este resultado, o ângulo θ pode ser maior ou menor do que o ângulo ξ , dependendo da relação entre I e I_3 . O vetor momento angular situa-se entre o eixo de simetria e o eixo de rotação no caso de corpos achatados $I < I_3$. E no caso de corpos alongados, $I > I_3$, o eixo de rotação situa-se entre o eixo de simetria e o vetor momento angular. Em ambos os casos, conforme o corpo gira, o eixo de simetria X'''_3 precessa sobre L . Ao mesmo tempo, o eixo de rotação ω precessa em torno de L com a mesma frequência.



Cone do Corpo rolando sem deslizar em torno do Cone Espacial, que é fixo. Dependendo dos valores de I e I_3 , o Cone do Corpo pode rolar dentro ou fora do Cone Espacial (fixo em relação ao sistema de coordenadas espacial fixo).

A superfície que ω faz em torno de L , é o cone espacial, e a superfície que ω faz em torno de X'''_3 é o cone do corpo. A velocidade angular de rotação do eixo X'''_3 é igual a taxa de variação do ângulo Φ . Então, $\dot{\Phi}$ é a taxa de precessão angular do eixo de simetria e também do eixo de rotação sobre a direção do vetor invariante L , visto de fora do corpo. Esta precessão aparece como uma oscilação, tal qual aquela vista em chutes ou arremessos imperfeitos.

Da segunda equação (10.26):

$$\omega'''_2 = \dot{\Phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\Phi} \sin \theta \quad \text{ao longo do eixo } X''_2 \quad (10.41)$$

Juntando com a equação (10.36),

$$\omega''_2 = \omega \sin \xi \quad (10.42)$$

Resulta em:

$$\dot{\phi} = \frac{\omega \sin \xi}{\sin \theta} \quad (10.43)$$

Que é a taxa de precessão. Utilizando a relação encontrada entre θ e ξ em (10.40), que é:

$$\tan \theta = \frac{I}{I_3} \tan \xi \quad (10.44)$$

Resolvendo as duas equações anteriores (10.43) e (10.44) para $\dot{\phi}$ e substituindo θ , resulta na taxa de oscilação em função da velocidade angular do corpo sobre seu eixo de giro e da inclinação ξ do eixo de rotação até o eixo de simetria do corpo, que é escrita:

$$\dot{\phi} = \omega \left(1 + \left(\left(\frac{I_3}{I} \right)^2 - 1 \right) (\cos \xi)^2 \right)^{1/2} \quad (10.45)$$

Seção 11 – Exemplo 1 – a Rotação da Terra

Um exemplo de aplicação da teoria da seção anterior (seção 10), é sobre a rotação da Terra. A Terra é conhecida por ser achatada nos pólos, resultando em um esferóide oblato. Isto dá $I_3 \sim I = I_{12}$ e $I_3 > I$, resultando em:

$$\alpha = \frac{(I_3 - I)}{I} \omega_3 \quad (11.1)$$

O ângulo ξ é em torno de 0,2 segundos de arco. Também é conhecida a razão de momentos de inércia I_3/I como sendo aproximadamente 1,00327 devido ao achatamento da Terra. A equação (10.22) pode então ser simplificada para este caso:

$$\alpha = \frac{(I_3 - I)}{I} \omega_3 \cos \xi = \left(\frac{I_3}{I} - 1 \right) \omega_3 \cos \xi \cong \frac{\omega_3}{305} \quad (11.2)$$

O período de rotação da Terra é 1 dia, então $\omega_3 \sim \omega = 2\pi/\text{dia}$, conclui-se:

$$\text{Período} = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\left(\frac{\omega_3}{305} \right)} = \frac{2\pi}{\left(\frac{2\pi}{I} \right)} = 305 \text{ dias} \quad (11.3)$$

O valor medido é de aproximadamente 440 dias. O erro não está na falta de conhecimento dos momentos de inércia, mas sim no fato de que a Terra não é um corpo rígido perfeito.

A taxa de oscilação da Terra, de acordo com a equação (10.45):

$$\dot{\phi} = \omega \left(1 + \left(\left(\frac{I_3}{I} \right)^2 - 1 \right) (\cos \xi)^2 \right)^{1/2} \quad (11.4)$$

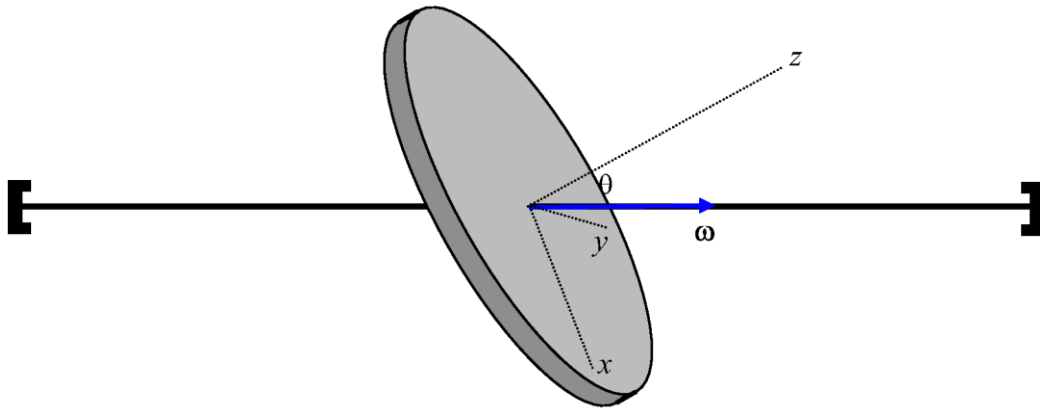
Utilizando as aproximações para o ângulo ξ em torno de 0,2 segundos de arco e a razão de momentos de inércia I_3/I como sendo aproximadamente 1,00327, fica:

$$\dot{\phi} = 1.00327\omega \quad (11.5)$$

E o período de oscilação da Terra é, então:

$$\frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{1.00327} \sim 0.997 \text{ dia} \quad (11.6)$$

Seção 12 – Exemplo 2 – o disco girante



A figura acima mostra um disco de raio a girando com velocidade angular ω ao longo de um eixo que está inclinado de um ângulo θ com a normal do disco. Foram desenhados três eixos principais fixos no corpo. O eixo x e o eixo y são coplanares ao disco. A direção do eixo x é escolhida tal que o eixo de giro (e o vetor ω) esteja no plano formado pelos vetores diretores em z e x . O disco está evidentemente não balanceado, então um torque externo tem que existir para obrigar que o movimento mantenha-se no eixo.

Desde que ω seja constante, todas as componentes de $\dot{\omega}$ anulam-se, então as equações de Euler deduzidas na seção 9 tornam-se:

$$(I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 = 0 \quad (12.1)$$

$$(I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \quad (12.2)$$

$$(I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = 0 \quad (12.3)$$

Do problema:

$$\omega_1 = \omega_x = \omega \sin \theta \quad (12.4)$$

$$\omega_2 = \omega_y = 0 \quad (12.5)$$

$$\omega_3 = \omega_z = \omega \cos \theta \quad (12.6)$$

Para o cálculo dos I_i , procede-se como indicado na seção 3 deste trabalho, sendo $(r \operatorname{sen} \theta)$ a distância de um ponto r até o eixo de giro (no caso o eixo x), em coordenadas polares.

$$I_x = \int_0^{\pi/2} \int_0^a (r \operatorname{sen} \theta)^2 r \, dr \, d\theta \quad (12.7)$$

$$I_x = a^4 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} \theta)^2 \, d\theta \quad (12.8)$$

Fazendo a substituição:

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (12.9)$$

$$(\sin \theta)^2 = -\left(\frac{1}{4}\right)(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}) \quad (12.10)$$

$$\int (\sin \theta)^2 = -\left(\frac{1}{4}\right)(\sin 2\theta - 2\theta) + \text{constante} \quad (12.11)$$

De modo que aplicando os limites da integral definida, fica para I_x :

$$I_x = \frac{ma^2}{4} \quad (12.12)$$

Pela simetria do problema, $I_y = I_x$ e de maneira análoga, calcula-se:

$$I_z = \frac{ma^2}{2} \quad (12.13)$$

Jogando os I_i e também os ω_i encontrados nas equações de Euler, fica então:

$$\tau_1 = \tau_3 = 0 \quad (12.14)$$

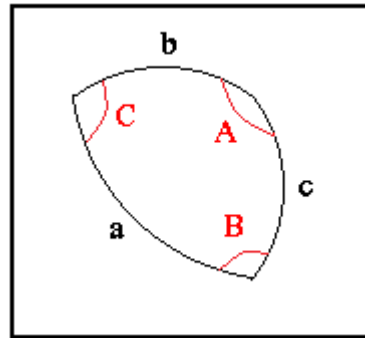
$$\tau_2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) ma^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (12.15)$$

$$\tau_2 = -\left(\frac{1}{8}\right) ma^2 \omega^2 \sin 2\theta \quad (12.16)$$

Então o torque age no disco na direção negativa de y . Este torque obriga o disco a manter sua velocidade angular constante. Já o momento angular não é constante, pois $\dot{\mathbf{L}} = -\tau_2 \mathbf{j}$ onde $\mathbf{j}$ é o vetor unitário na direção do eixo y (do sistema que gira com o corpo).

Seção 13 – Introdução as Variáveis de Andoyer

Seja um triângulo esférico genérico:



Da lei dos cossenos para os lados, temos as fórmulas clássicas I:

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{cases} \quad (13.1)$$

Da lei dos senos, temos também II:

$$\begin{cases} \sin a \sin B = \sin b \sin A \\ \sin a \sin C = \sin c \sin A \\ \sin b \sin C = \sin c \sin B \end{cases} \quad (13.2)$$

Uma conveniente combinação das leis dos cossenos e dos senos acima, permite obter III:

$$\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C \end{aligned} \quad (13.3)$$

Diferenciando a primeira equação da lei dos cossenos (eq. 13.1), temos:

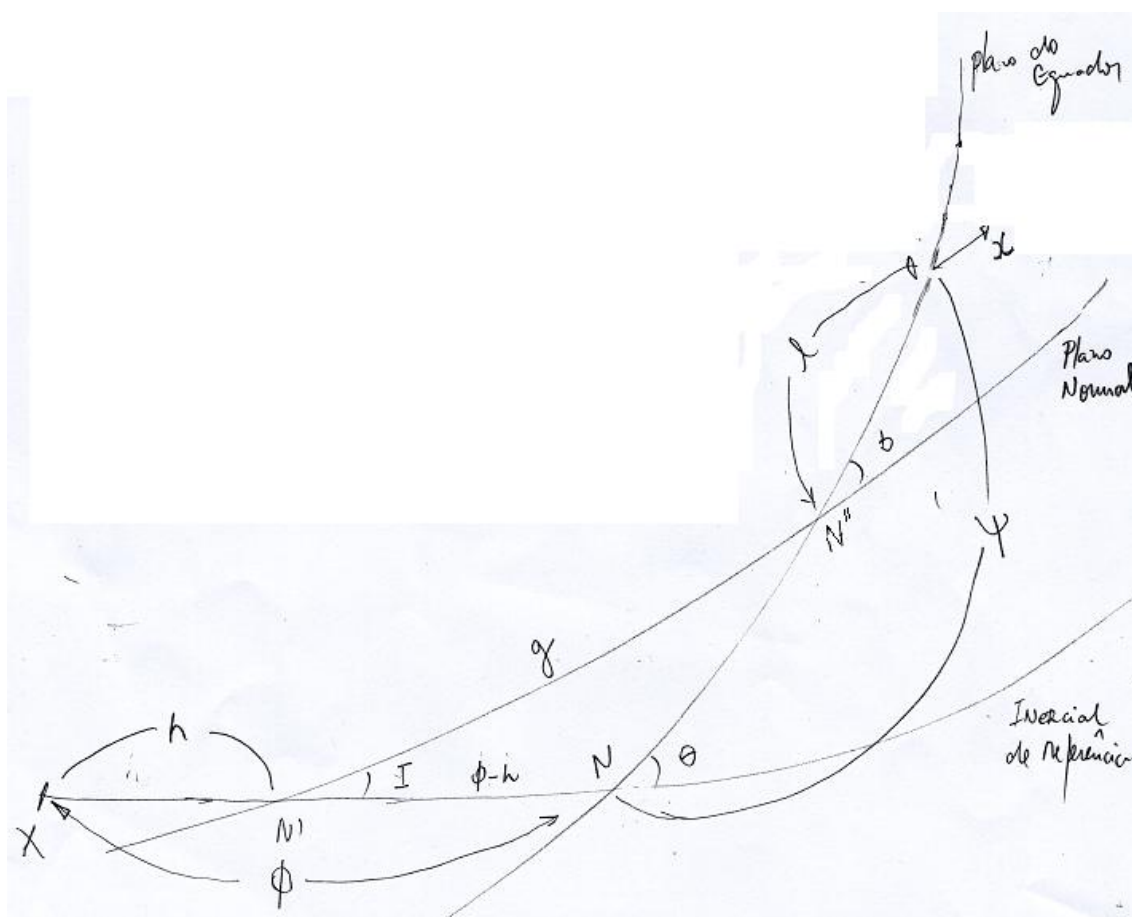
$$\begin{aligned} -\sin a \, da &= (-\cos c \sin b + \cos b \sin c \cos A)db + (-\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos A)dc \\ &\quad - \sin b \sin c \sin A \, dA \end{aligned} \quad (13.4)$$

Comparando com (eq. 13.3), observa-se que o fator de “ db ” é igual a $(-\sin a \cos C)$ e o fator de “ dc ” é igual a $(-\sin a \cos B)$. Da primeira equação de II, retira-se parte do fator de dA : $\sin c (\sin b \sin A) = \sin c (\sin a \sin B)$. Fazendo estas substituições na equação acima e dividindo tudo por $(-\sin A)$:

$$da = \cos C db + \cos B dc + \sin c \sin B dA \quad (13.5)$$

Esta relação diferencial é fundamental para uma transformação canônica a ser realizada em breve:

No problema de rotação livre que estamos tratando, vamos mudar algumas notações com relação ao que é classicamente feito em mecânica celeste.



Sejam:

OXYZ: sistema fundamental de referência inercial

Oxyz: sistema relativo móvel definido pelos ângulos l, b e g referidos a um sistema intermediário, cujo plano $ON'N''$ (do momento angular) é dado pelos ângulos h e l .

Os ângulos ϕ, θ e ψ são os clássicos ângulos de Euler anteriormente tratados.

Como é bem sabido da mecânica analítica clássica, o conjunto de variáveis $(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi)$ no qual p_ϕ, p_θ, p_ψ são os momentos conjugados dos respectivos ângulos ϕ, θ, ψ e são

suficientes para descrever completamente a dinâmica do problema de rotação de um corpo rígido. Este é um conjunto de variáveis canônicas e a Hamiltoniana deste problema é simplesmente a energia cinética de rotação, que como já visto neste estudo, é escrita:

$$H = T = \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (13.6)$$

Vamos agora definir um conjunto especial de variáveis que nos possibilitará tratar o problema muito mais facilmente do que nas clássicas variáveis de Euler.

Vamos definir os novos momentos L, G, H, onde:

H = G cos l	Definição 1
L = G cos b	
G é o módulo do momento angular de rotação do corpo	

(13.7)

Estes momentos conectam-se com p_ϕ , p_θ , p_ψ da seguinte maneira:

$p_\phi = H$	Definição 2
$p_\theta = G \sin b \sin (\ell - \psi)$	
$p_\psi = L$	

(13.8)

É evidente que os ângulos $\phi-h$, θ e $\psi-\ell$ estão relacionados com os ângulos l , θ e b , conforme definido no triângulo esférico da figura. Consideremos então o triângulo N, N', N'' e a relação diferencial que provamos antes:

$$da = \sin c \sin B dA + \cos C db + \cos B dc \quad (13.9)$$

Aplicando no caso do triângulo N, N', N'':

$$dg = -\sin(\psi - l) \sin b d\theta + \cos b d(\psi - l) + \cos l d(\phi - h) \quad (13.10)$$

Seja a transformação $(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi) \rightarrow (\ell, g, h, L, G, H)$:

$$L dl + G dg + H dh = L dl + G\{-\sin(\psi - l) \sin b d\theta + \cos b d(\psi - l) + \cos l d(\phi - h)\} + H dh \quad (13.11)$$

Então, usando as definições 1 e 2 - eq. (13.7) e (13.8), resulta:

$$L dl + G dg + H dh = p_\phi d\phi + p_\theta d\theta + p_\psi d\psi \quad (13.12)$$

Está é a condição de Jacobi-Poincaré que define uma transformação canônica de variáveis, conservativa, onde a função geratriz é uma constante ($dS(p,q)=0$).

Logo, $(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi) \rightarrow (\ell, g, h, L, G, H)$ é uma transformação canônica, onde H é um invariante, ou seja, $\mathbb{H}(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi) = \mathbb{H}(\ell, g, h, L, G, H)$.

Iremos agora obter esta Hamiltoniana nas novas variáveis.

Sejam I_1, I_2, I_3 os momentos de inércia do corpo rígido no sistema $Oxyz$ (girante) e $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ as componentes do vetor velocidade angular de rotação com respeito ao sistema $OXYZ$ (inercial).

Da seção 7, equações (7.8), podem ser trazidas as equações geométricas de Euler:

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (13.13)$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad (13.14)$$

$$\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (13.15)$$

A Lagrangeana que descreve a rotação com respeito ao sistema inercial é dada por:

$$L = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (13.16)$$

Os momentos são classicamente dados por:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = p_\phi = (I_1 \omega_1 \sin \psi + I_2 \omega_2 \cos \psi) \sin \theta + I_3 \omega_3 \cos \theta \quad (13.17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = p_\theta = (I_1 \omega_1 \cos \psi - I_2 \omega_2 \sin \psi) \quad (13.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = p_\psi = I_3 \omega_3 \quad (13.19)$$

Isolando $I_i \omega_i$ (para $i=1,2,3$) e resolvendo estas 3 equações, obtemos:

$$I_1 \omega_1 = \frac{\sin \psi}{\sin \theta} (p_\phi - p_\psi \cos \theta) + p_\theta \cos \psi \quad (13.20)$$

$$I_2 \omega_2 = \frac{\cos \psi}{\sin \theta} (p_\phi - p_\psi \cos \theta) - p_\theta \sin \psi \quad (13.21)$$

$$I_3 \omega_3 = p_\psi \quad (13.22)$$

Fazendo a substituição de p_ϕ, p_θ, p_ψ dados na tabela da definição 2 (13.8) e utilizando H e L dados na definição 1 (13.7), as equações para $I_i \omega_i$ ($i=1,2,3$), ficam:

$$I_1 \omega_1 = G \left\{ \frac{\sin \psi}{\sin \theta} (\cos l - \cos b \cos \theta) + \sin b \sin(l - \psi) \cos \psi \right\} \quad (13.23)$$

$$I_2 \omega_2 = G \left\{ \frac{\cos \psi}{\sin \theta} (\cos I - \cos b \cos \theta) - \sin b \sin(l - \psi) \sin \psi \right\} \quad (13.24)$$

$$I_3 \omega_3 = L \quad (13.25)$$

Notemos no triângulo N, N', N'' que a fórmula dos cossenos permite escrever:

$$\cos I = \cos b \cos \theta + \sin b \sin \theta \cos(\psi - l) \quad (13.26)$$

Ou então:

$$\cos I - \cos b \cos \theta = \sin b \sin \theta \cos(\psi - l) \quad (13.27)$$

Fazendo essa substituição em $I_i \omega_i$ ($i=1,2,3$):

$$I_1 \omega_1 = G \sin b \sin l \quad (13.28)$$

$$I_2 \omega_2 = G \sin b \cos l \quad (13.29)$$

$$I_3 \omega_3 = L \quad (13.30)$$

Lembrando que:

$$(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{(I_1 \omega_1)^2}{I_1} + \frac{(I_2 \omega_2)^2}{I_2} + \frac{(I_3 \omega_3)^2}{I_3} \quad (13.31)$$

Podemos agora fazer a substituição direta para encontrar:

$$\left(\frac{(\sin l)^2}{I_1} + \frac{(\cos l)^2}{I_2} \right) (G^2 - L^2) + \frac{L^2}{I_3} = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = 2 \mathbb{H}(l, L, G) \quad (13.32)$$

Desta maneira, pode-se concluir que o Hamiltoniano quando escrito neste sistema, só apresenta uma coordenada explícita, que é l .

Das equações de Hamilton:

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial q_i} \quad (13.33)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p_i} \quad (13.34)$$

No caso:

$$p_i = (L, G, H) \quad \text{e} \quad q_i = (l, g, h)$$

Notemos então, que na Hamiltoniana, (g, h) não aparecem explicitamente, logo, (G, H) são constantes. Da mesma forma, como H não aparece, então a coordenada h é constante.

De qualquer modo, a Hamiltoniana do problema de rotação livre é de um único grau de liberdade e, portanto, este problema é totalmente integrável. Dizemos isso, pois somente L e l é que são efetivamente as variáveis do problema.

Vamos observar então, o caso particular, quando $I_1 = I_2 = I_0$, tem-se que l desaparece da Hamiltoniana e, portanto, todos os momentos L, G, H são constantes e sendo L e G constantes, então as coordenadas l e g são lineares no tempo.

O corpo rotaciona em torno do eixo de simetria Oz com velocidade uniforme:

$$\dot{l} = \frac{\partial H}{\partial L} = \left(-\frac{1}{I_0} + \frac{1}{I_3} \right) L \quad (13.35)$$

E a variável g também possui uma variação constante no tempo, conforme:

$$\dot{g} = \frac{\partial H}{\partial G} = \left(\frac{1}{I_0} \right) G \quad (13.36)$$

Nota-se também que através dos triângulos esféricos, podemos escrever os ângulos de Euler em função dos ângulos de Andoyer e resolver completamente o problema de rotação livre. Exemplo:

$$\frac{\sin(\phi - h)}{\sin b} = \frac{\sin(\psi - l)}{\sin I} = \frac{\sin(g)}{\sin(\pi - \theta)} \quad (13.37)$$

Conclui-se, então, que as variáveis de Andoyer formam um conjunto adequado para estudar o problema de rotação.

Referências Bibliográficas:

Seção 12: Classical Mechanics – J. B. Tatum

Seções 8, 9 e 10: Introduction to Classical Mechanics, 2nd ed. - Atam P. Arya

Seção 10: Analytical mechanics - Hand, Finch

Seções 10 e 11: Analytical mechanics, 6th ed. – Fowles & Cassiday

Seções 1 a 12: Mecânica, 2ª ed. – Keith R. Symon

Seção 13:

Tisserand P. , Traité de mécanique celeste, tomell, Gauthier-Villars, Paris, 1890, p. 388-393.

Deprit A. Free Rotation of a rigid Body studied in the phase plane- American Journal of Physics 1967, p.424.

Henrard J., Schawanen G., Rotation of synchronous satellites , Celestial Mechanics. And Dynamical. Astronomy. 89, 2004, 181.

Noyelles B, Lemaître A., Vinne A. , Titan's rotation, a 3-dimensional theory, Astronomy and Astrophysics, 478, 2008, 959.

D'Hoedt S. and Lemaître A., The spin orbit resonant rotation of Mercury: a two degree of freedom Hamiltonian model , Celestial Mechanics. and Dynamical. Astronomy. 89, 2004, 267.