

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – PRESIDENTE

PRUDENTE

HÉBER FERREIRA MAFRA

FOTOTRIANGULAÇÃO RADIAL ANALÍTICA

Como uma Ferramenta de Ensino de Fototriangulação e de Ajustamento de Observações

Presidente Prudente
2003



Héber Ferreira Mafra

unesp

HÉBER FERREIRA MAFRA

FOTOTRIANGULAÇÃO RADIAL ANALÍTICA

Como uma Ferramenta de Ensino de Fototriangulação e de Ajustamento de Observações

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Presidente Prudente, para a obtenção do título de Mestre em Ciências Cartográficas (Área de Concentração: Aquisição, Análise e Representação de Informações Espaciais).

Orientador: Prof. Dr. *João Fernando Custódio da Silva*

Presidente Prudente
2003

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vitória.
Ao meu pai, Eurípedes, e a minha mãe, Zelina (in memorian), pela educação e amor.
Às minhas irmãs, Rute e Marta, o apoio nas horas difíceis.
Ao meu orientador, João Fernando Custódio da Silva, a paciência, confiança e amizade nesses anos todos.
Aos meus amigos Ricardo Luis Barbosa, Rodrigo Bezerra de Araújo Gallis e Elivagner Barros de Oliveira, a força nos momentos difíceis.
E a todos que, direta ou indiretamente, ajudaram na realização deste projeto.

RESUMO

O presente trabalho revisita o método analítico de triangulação radial com o propósito de utilizá-lo em projetos de atualização cartográfica e apoio didático. A finalidade deste trabalho é a tentativa de recuperar o método de triangulação radial como uma ferramenta pedagógica no ensino da fototriangulação, associada ao ajustamento de observações. Duas aplicações genéricas podem justificar a reutilização da triangulação radial: atualização cartográfica de áreas que não necessitam de alta precisão dos resultados e suporte didático ao ensino introdutório de fototriangulação em cursos de Fotogrametria. Para verificar a potencialidade do método, foi realizado uma simulação de um vôo fotogramétrico utilizando um bloco gerado artificialmente com duas faixas, sete fotos por faixa, sobreposição lateral de 30%, longitudinal de 60%, escala média das fotos da ordem de 1:10.000 e com 35 de pontos de terreno. A potencialidade do método para fins educativos pode ser demonstrada com base na facilidade do uso do método e no modelo matemático apresentado em comparação com os métodos mais elaborados de modelos independentes e de ajustamento por feixes de raios.

ABSTRACT

The present dissertation goes back to the analytical radial triangulation in order to review it as a tool for cartographic updating and didactic support. The purpose of this work is the attempt to recover the method of radial triangulation as a pedagogical tool in the teaching and learning process of phototriangulation, associated with the adjustment of observations. Two generic applications can justify the reutilization of the radial triangulation: cartographic update of areas that do not need high accurate results and didactic support to the introductory education of phototriangulation in courses of Photogrammetry. In order to verify the potentiality of the method, a simulation of a phototriangulation flight was carried out using a block generated artificially with two strips, seven photos each strip, side-overlapping of 30% and longitudinal of 60%, average photo scale of 1:10.000 and with 35 ground points. The potentiality of the method for educational proposes was demonstrated based on the easy use and its related mathematical model as compared to the more elaborated methods such as independent models and bundle block adjustment.

SUMÁRIO

RESUMO.....	05
ABSTRACT.....	06
SUMÁRIO.....	07
LISTA DE FIGURAS.....	08
LISTA DE TABELAS.....	10
1 INTRODUÇÃO.....	12
2 OBJETIVOS.....	25
3 TRIANGULAÇÃO RADIAL.....	26
3.1 Método Gráfico de Triangulação Radial.....	29
3.2 Métodos Mecânicos de Triangulação Radial.....	30
3.2.1 Método das Placas Ranhuradas ou Moldes Ranhurados.....	30
3.2.2 Método das Hastes Metálicas.....	31
3.3 Método Analítico de Triangulação Radial.....	31
4 MATERIAIS E MÉTODOS.....	35
4.1 Programa Implementado de Triangulação Radial Analítica.....	36
5 MODELO MATEMÁTICO.....	40
6 EXPERIMENTOS E RESULTADOS.....	46
7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	68
8 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	70
9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	71

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Variação da altura do relevo.....	14
Figura 2 - O princípio da interseção.....	16
Figura 3 - Esquema para a triangulação radial.....	17
Figura 4 - Instrumento de medição de ângulos nas fotografias.....	18
Figura 5 - Representação geométrica do segundo modelo matemático.....	20
Figura 6 - Diferença entre foto vertical e aproximadamente vertical.....	23
Figura 7- Localização do ponto principal pela operação de resseção por 3 pontos.....	26
Figura 8- Retas traçadas utilizando-se a operação de resseção.....	26
Figura 9 - Localização do ponto principal utilizando-se a operação de resseção por dois pontos.....	27
Figura 10 - Retas tracejadas utilizando-se dois pontos de controle.....	28
Figura 11- Localização de um ponto pelo processo de interseção.....	29
Figura 12 - Distribuição dos pontos de controle e de passagem nas fotografias e no terreno.....	33
Figura 13- Variação dos vértices para a definição das distâncias.....	34
Figura 14 - Fluxograma da realização da fototriangulação.....	36
Figura 15- Tela do programa de coleta de fotocoordenadas.....	37
Figura 16 - Tela do programa de triangulação radial analítica.....	38
Figura 17 - Dimensão da matriz A.....	45
Figura 18- Dimensão da matriz B.....	45
Figura 19 - Número de iterações em relação ao valor do sigma a posteriori utilizando 4 pontos de apoio e referente aos experimentos 1 e 2.....	49
Figura 20- Variação do erro médio quadrático em relação ao número de iterações.....	50
Figura 21- Número de iterações em relação ao valor do sigma a posteriori utilizando 4 pontos de apoio e referente aos experimentos 3 e 4.....	53

Figura 22 - Número de iterações em relação ao valor do sigma a posteriori	
utilizando 4 pontos de apoio e referente aos experimentos 5 e 6.....	57
Figura 23- Número de iterações em relação ao valor do sigma a posteriori	
utilizando 4 pontos de apoio e referente ao experimento 7.....	59
Figura 24 - Número de iterações em relação ao valor do sigma a posteriori utilizando	
4 pontos de apoio e referente ao experimento 8 e 9	62
Figura 25 - Número de iterações em relação ao valor do sigma a posteriori utilizando 4 pontos	
de apoio e referente ao experimento 10 e 11.....	66
Figura 26– Variação do número de pontos de apoio em relação ao erro	
médio quadrático.....	70

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 - Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valor médio do fator de escala e do erro médio quadrático utilizando as 3 primeiras fotos da faixa 2, realizando apenas uma iteração.....47
- Tabela 2 - Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valor médio do fator de escala e do erro médio quadrático utilizando as 3 primeiras fotos da faixa, realizando dez iterações.....48
- Tabela 3 - Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando as 5 primeiras fotos da faixa 2, e realizando apenas uma iteração.....51
- Tabela 4 - Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando as 5 fotos da faixa 2, e realizando dez iterações.....52
- Tabela 5 - Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando as 7

primeiras fotos da faixa 2 e realizando apenas uma
 iteração.....55

Tabela 6 - Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores
 de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando todas
 as 7 fotos da faixa 2, e realizando sete
 iterações.....56

Tabela 7 - Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores
 de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando as 3
 primeiras fotos das faixas 1 e 2, e realizando apenas uma
 iteração.....59

Tabela 8 - Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores
 de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando
 todas as 5 fotos das faixas 1 e 2, totalizando 10 fotos, utilizando 4 e 6 pontos de
 apoio e realizando apenas uma
 iteração.....60

Tabela 9 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y,
 valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio
 padrão estimado utilizando todas as 5 fotos das faixas 1 e 2, totalizando 10 fotos,
 utilizando 8 e 9 pontos de apoio e realizando apenas uma
 iteração.....61

Tabela 10 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando todas as 7 fotos das faixas 1 e 2, totalizando 14 fotos, utilizando 4, 6 e 8 pontos de apoio e realizando apenas uma iteração.....63

Tabela 11 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando todas as 7 fotos das faixas 1 e 2, totalizando 14 fotos, utilizando 9, 10 e 12 pontos de apoio e realizando apenas uma iteração.....65

FOTOTRIANGULAÇÃO RADIAL ANALÍTICA

Como uma ferramenta de ensino de Fototriangulação e de Ajustamento de
Observações

1 – INTRODUÇÃO

Considerando que a Fotogrametria explora imagens com o propósito de medir e representar um determinado objeto, define-se processo fotogramétrico como sendo o ordenamento lógico das etapas necessárias para cumprir os fins da Fotogrametria, desde a aquisição de dados (informações) até a representação do objeto. Via de regra, as etapas ordenadas são: planejamento, aquisição das imagens, processamento, análise e representação (SILVA, 2001).

Considerando que o mapeamento aerofotogramétrico é a aplicação mais importante da Fotogrametria, no contexto das ciências cartográficas, definimo-lo como o conjunto de operações fotogramétricas que acarretam no mapeamento de uma porção da superfície terrestre, caracterizado por um fluxo básico e ordenado de operações, a saber: vôo (recobrimento aerofotogramétrico), apoio geodésico, (aero)triangulação e restituição ou ortofoto (digital). *Mapeamento* é o resultado do processamento, da análise e da representação de dados e informações obtidos por meio de (algum tipo de) levantamento. *Levantamento* é uma coleção ou conjunto de observações organizadas resultante da aplicação de um método de coleta de dados.

Desde os primórdios (meados do século XIX quando *Aimé Laussedat* realizou o primeiro experimento de levantamento fotogramétrico utilizando balões para obter

fotos aéreas) até os dias atuais, a fototriangulação tem sido um passo importante no processo de mapeamento aerofotogramétrico. Alguns autores vislumbram, para um futuro não muito distante, a possibilidade de eliminar a fototriangulação do processo fotogramétrico, mediante o georreferenciamento direto das fotografias aéreas ou imagens orbitais, posto que a orientação completa do fotograma é determinada já no momento da tomada ou construção das imagens. Ainda assim, poderá persistir a consideração de que toda observação contém erros ou imperfeições inerentes ao sistema de observação e mensuração, de modo que justifica-se a permanência da fototriangulação no processo de mapeamento, com o intuito de melhor distribuir os erros e homogeneizar os resultados.

A triangulação radial foi concebida como um método fotogramétrico de extensão de controle horizontal para a orientação de pares estereoscópicos. Na verdade, foi o primeiro método que se mostrou operacional no processo de pré-mapeamento fotogramétrico expedito, apesar de suas limitações condicionadas pelas hipóteses simplificativas que fundamentam o método, somente para terrenos aproximadamente planos e fotos aproximadamente verticais.

Essas hipóteses condicionam a aplicação do método a fotografias aéreas aproximadamente verticais tomadas sobre terreno aproximadamente plano. Essas duas considerações apenas aproximam o projeto das condições verdadeiras, porque são raras as fotografias verdadeiramente verticais, tanto quanto é rara a ocorrência de terrenos rigorosamente planos. Quanto mais inclinado for o terreno, maior será o deslocamento na foto do ponto a (referente ao ponto A no terreno, considerando a altimetria) ao ponto a' (referente ao mesmo ponto no terreno, sem considerar a altimetria), conforme mostra a figura 1.

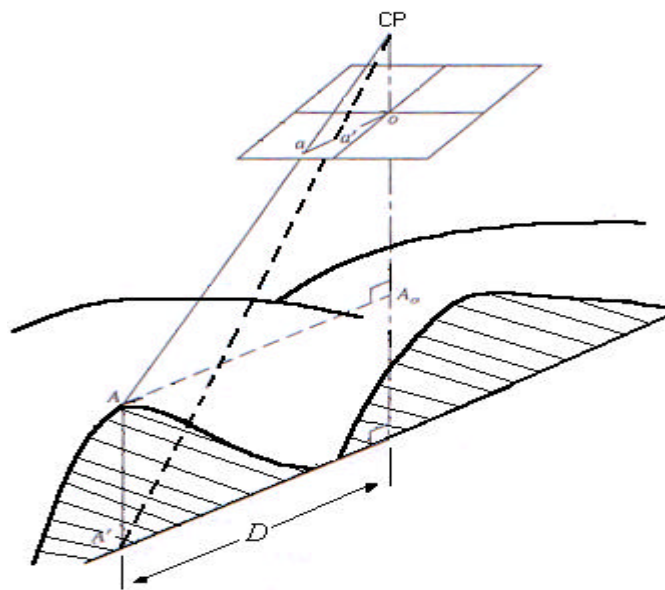


Figura 1 – Variação da altura do relevo

Trata-se, pois, de um método limitado à dimensão planimétrica, não computando, portanto, a terceira dimensão referente às alturas ou altitudes dos pontos-objeto. Face aos métodos em voga atualmente – o dos modelos independentes e o dos feixes de raios –, de modelos matemáticos mais abrangentes e complexos, a triangulação radial é de formulação extremamente simples. Exatamente por isso, muitos conteúdos curriculares de Fotogrametria de alguns cursos de nível técnico e superior das áreas de exatas e ciências da Terra ainda o mantêm como parte introdutória ao estudo da fototriangulação.

Sob a hipótese de que as fotografias aéreas são verticais, os deslocamentos da imagem produzidos por variações de altitudes do relevo, por refração atmosférica, pela distorção radial das lentes da câmera e pelas variações da altitude de vôo são consideradas radiais. Dessa maneira, todos os deslocamentos significativos da imagem são radiais e os ângulos medidos na foto e com vértice no ponto principal são ângulos horizontais verdadeiros (ponto principal coincidindo com o nadir, por hipótese). A possibilidade de tratamento analítico enseja a aplicação do método dos mínimos quadrados para estimar as coordenadas ajustadas dos pontos do terreno. Daí, a triangulação radial, na fase inicial da aprendizagem da

fototriangulação, proporciona duplo benefício ao iniciante: assimilação de conceitos importantes de um bloco de fotografias aéreas a serem (foto)trianguladas e da técnica de ajustamento de observações sob o critério dos mínimos quadrados, sem desprender demasiado esforço para compreender os requintes da modelagem matemática dos métodos mais abrangentes e complexos.

Os principais métodos para a realização da triangulação radial são o gráfico, o mecânico e o método analítico. No método gráfico, transparências são apostas e fixadas sobre as fotografias marcando-se os pontos nadirais e de passagem. Sobre as transparências são traçadas retas radiais desde o ponto principal até um ou dois centímetros além dos pontos de passagem.

A interseção das retas radiais marcadas sobre as transparências determina o ponto de passagem. A montagem das transparências agora é levada sobre um canevá, traçado em escala regular, a mais próxima possível da escala média das fotografias aéreas.

As coordenadas de terreno dos pontos intersectados são lidas ou estimadas diretamente do quadriculado ou reticulado (Figura 7). Nesse método o ajuste dos pontos é realizado gráfica e visualmente, acarretando resultados com uma maior quantidade de erros.

O método mecânico é similar ao método gráfico, porém utiliza-se de dispositivos mecânicos, que se orientam nas direções radiais, de modo a se obter as posições dos pontos principais e dos pontos de passagem. Estes dispositivos podem ser hastes metálicas com ranhuras por onde pinos fixam as posições dos pontos selecionados.

Considerando que o presente trabalho tem por finalidade a implementação do método analítico de triangulação radial, segue uma breve revisão dos principais métodos analíticos implementados no passado.

O primeiro método analítico foi implementado por Hallert (1957), que publicou um trabalho de triangulação radial utilizando as seguintes equações:

$$x = \frac{b}{1 - \frac{y'x''}{x'y''}} \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{\frac{x'}{y'} - \frac{x''}{y''}} \quad (1)$$

onde b é a foto-base, x' , y' , x'' e y'' são fotocoordenadas a serem medidas em duas fotografias verticais de uma faixa de um bloco fotogramétrico.

Cada ponto principal é localizado na origem de um sistema cartesiano de coordenadas e x' , x'' são direcionados ao longo da linha de vôo. As coordenadas x , y de um ponto interceptado podem ser determinadas analiticamente pelas coordenadas de imagem e pela foto-base b usando as equações (1), como mostra a figura 2. O método apresentado por Hallert trabalha com apenas um par de fotos por vez e repete o processo, par por par até completar toda a faixa.

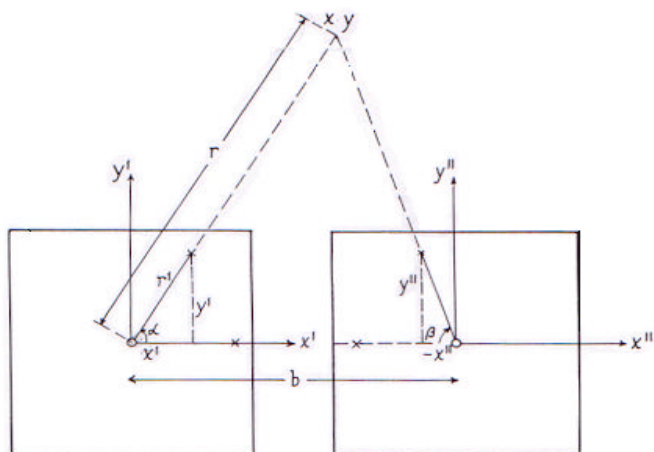


Figura 2 – O princípio da interseção.

Utiliza fotocoordenadas como dados de entrada e realizou um teste utilizando uma câmara com uma distância focal de 114,36 mm, a uma altura de vôo de 5.000 m (escala da foto de aproximadamente 1:44.000), obtendo um erro de 22,6 µm na imagem para cada 1 metro no terreno.

Turpin (1966) publicou um trabalho de triangulação radial utilizando a equação da distância entre dois pontos no plano para obter as distâncias (que juntamente com equações de ângulos, são os dados de entrada) e é utilizado apenas para calcular as coordenadas dos pontos de controle. A partir destes obtêm-se as coordenadas dos pontos principais.

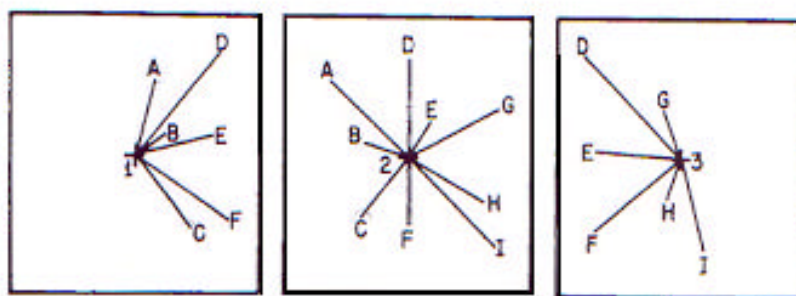


Figura 3 – Esquema para a triangulação radial

Neste método, elimina-se a necessidade de localização da linha de vôo. O desenvolvimento do trabalho se concentra nas equações de ângulos. Se as coordenadas do ponto A na foto são x_a e y_a , o ângulo entre o eixo y e a linha do ponto principal ao ponto A (figura 3) será calculado por

$$\angle A = \tan^{-1} (x_a / y_a) \quad (2)$$

A fim de se melhorar a acurácia, utilizou-se um teodolito para medição das coordenadas na foto (figura 4), possibilitando a realização de medições com um erro máximo na ordem de $\pm 5 \mu\text{m}$. Com os pontos principais distribuídos proporcionalmente, teve-se um erro de $\pm 10 \mu\text{m}$ na medição das fotocoordenadas, com uma propagação de erro de $\pm 0,15 \text{ m}$ a $\pm 0,3 \text{ m}$ na posição horizontal do ponto principal para fotografias aéreas verticais na escala de 1:2.400.

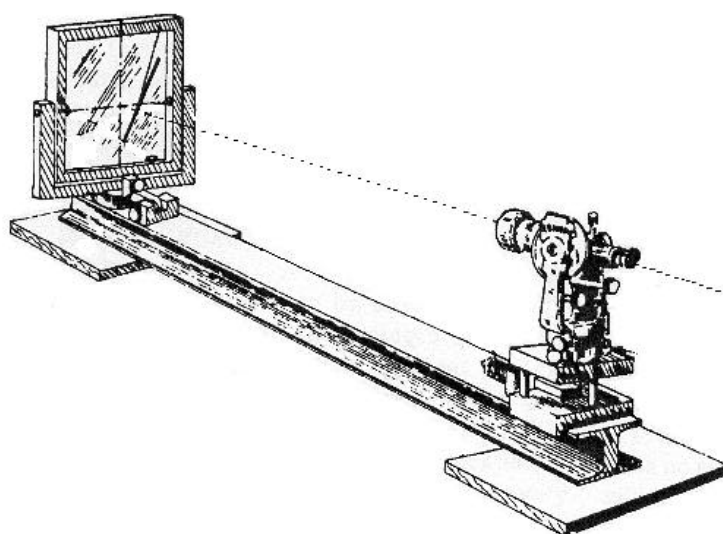


Figura 4 – Instrumento de medição de ângulos nas fotografias

Em 1967, *Wolf* publicou um trabalho de triangulação radial, cujo procedimento consiste em realizar uma resseção, utilizando três pontos de controle horizontais para determinar as coordenadas dos pontos principais de terreno de um par de fotografias sobrepostas a partir da lei do seno e de um procedimento trigonométrico. Pontos de passagem, cujas imagens aparecem na área de sobreposição de um par, são localizados por interseção numérica. Considerando as fotos perfeitamente verticais, o modelo matemático utilizado para distância é dado pela equação da distância entre dois pontos no plano, obtendo-se as coordenadas de terreno horizontais. A equação de ângulo entre dois pontos A e B é dada por

$$\angle AB = \tan^{-1} \left[(x_B - x_A) / (y_B - y_A) \right] \quad (3)$$

Neste método, como no de Turpin, elimina-se a necessidade de localização da linha de vôo e, como no de Hallert, também trabalha com apenas um par de fotos por vez, repetindo o processo, par por par até completar toda a faixa. Nove fotografias foram utilizadas no teste, de escala 1:6.000, e também utilizou-se uma régua que fornecia medidas de até 0,01 mm. Foram consideradas apenas fotografias com uma inclinação máxima de 3° e não foi realizada nenhuma correção de inclinação. Os resultados mostram um erro médio quadrático nas coordenada de terreno em X igual a 7,991 m e em Y igual a 3,439 m.

Em 1968, Mikhail publicou um trabalho de triangulação radial apresentando dois modelos matemáticos. O primeiro trata de uma aplicação da transformação isogonal bidimensional, cujo modelo matemático é dado por:

$$\begin{aligned} X &= px - qy + r \\ Y &= qx + py + s \end{aligned} \quad (4)$$

Onde X e Y são as coordenadas de um ponto no sistema de terreno, x e y as fotocoordenadas e p , q , r e s são os coeficientes de transformação.

O segundo modelo matemático trata da aplicação da equação da reta no plano, dado por

$$Y = m X + c \quad (5)$$

Onde X e Y são as coordenadas de um ponto no sistema de terreno, m é o grau de inclinação da linha radial em relação ao sistema de coordenadas de terreno e c é o valor da translação em relação ao eixo Y , conforme mostra a figura 5.

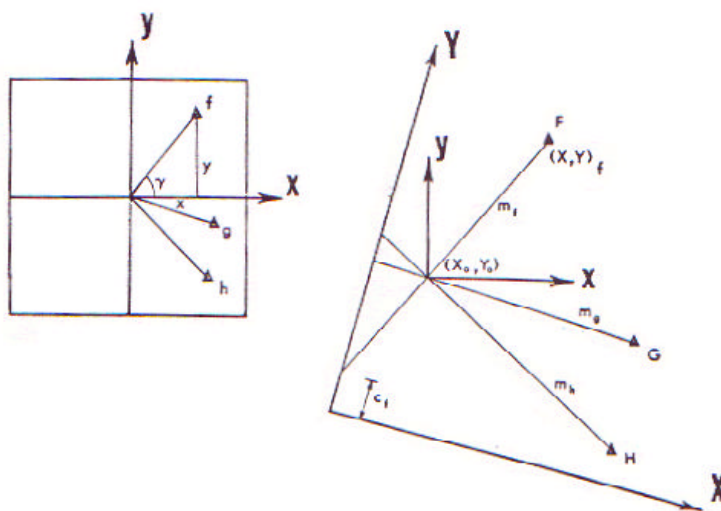


Figura 5 – Representação geométrica do segundo modelo matemático

Foi feito um teste com ambos os modelos matemáticos. No primeiro modelo matemático, utilizou-se sete fotografias, de escala 1:6.000. Um segundo teste foi realizado utilizando dados fictícios com oito fotografias de escala 1:5.000, máxima inclinação, $\omega = 2^\circ 18'$, e $\phi = 1^\circ 38'$.

Para possibilitar uma avaliação da rigidez geométrica foi utilizado um maior número de pontos para resseção. Dois testes foram realizados: um usando três pontos e outro usando cinco pontos. Os resultados indicam que a deformação da faixa aumenta mais rapidamente no caso de três pontos do que no de cinco pontos. Consequentemente, isso pode indicar que a rigidez geométrica da faixa triangulada aumenta conforme o número de pontos usados para resseção é aumentado.

Em 1995, Dalmolin publicou um trabalho utilizando um modelo intitulado topogramétrico para determinar a posição mais provável do centro radial, ou centro de projeção de fotografias aéreas aproximadamente verticais, com o auxílio da fototriangulação analítica no plano. Testou com sucesso o modelo na determinação de pontos planimétricos com especificações cartográficas para complementação da topografia convencional de campo.

O modelo matemático funcional utilizado por Dalmolin, para a fototriangulação analítica no plano (modelo topogramétrico) é representado pelas seguintes equações:

$$x_p = t[\cos K(X_p - X_N) + \sin K(Y_p - Y_N)] + x_n \quad (6)$$

$$y_p = t[-\sin K(X_p - X_N) + \cos K(Y_p - Y_N)] + y_n \quad (7)$$

Onde x_p, y_p são as fotocoordenadas de um ponto p na fotografia, x_n, y_n são as fotocoordenadas do centro de projeção na fotografia, t é o fator de escala em cada ponto, K é o ângulo de rotação que tem a função de trazer o sistema fotográfico paralelo ao sistema do terreno, X_p, Y_p são as coordenadas de um ponto p no terreno, X_N, Y_N são as coordenadas do centro de projeção no terreno. Os parâmetros desconhecidos ($x_n, y_n, X_N, Y_N, X, Y, t, K$) do modelo matemático funcional são recuperados através de um ajustamento simultâneo de retas radiais do centro de projeção, em bloco.

O modelo topogramétrico foi testado com dados reais de um bloco composto de 9 fotos aéreas dispostos em duas faixas. As fotos, na escala aproximada de 1:8400 e com inclinação máxima de 2,7 graus. Os resultados obtidos indicaram que o número de iterações realizadas na triangulação tende a crescer quando a geometria dos pontos é fraca, ou seja, radiais com pequeno ângulo de interseção. Também foi observado que a maioria dos

erros planimétricos ocorreram na área central da foto, devido a indefinição dos pontos de interseção das retas radiais. Onde concluiu-se que ao escolher os pontos a serem determinados eles devem apresentar uma geometria satisfatória, ou seja, a interseção das retas radiais deve ser bem definida.

Nota-se que a maioria dos trabalhos anteriores, tiveram experimentos realizados sem utilizar um fator de escala no modelo matemático para compensar o deslocamento provocado pela variação de relevo e da altura de vôo. Com a utilização de um fator de escala, há uma melhoria considerável na precisão dos resultados.

Com a finalidade de ajustar fotocoordenadas e simultaneamente estimar coordenadas de terreno, será utilizada uma aplicação do método de ajustamento de observações diretas [$F(L_a) = 0$] em uma triangulação radial, tendo por modelo matemático fundamental a equação da distância, conforme será visto adiante.

Via de regra, para cada projeto fotogramétrico, é necessário realizar a calibração da câmara anteriormente para correção dos parâmetros de orientação interior. Isto aumenta o trabalho e o tempo necessários para a conclusão do projeto. A triangulação radial planimétrica se apresenta com uma alternativa à calibração, devido ao fato que não necessita do valor da distância focal para execução do mesmo. Porém, o projeto de fototriangulação a ser processado deve atender as restrições do método proposto.

A utilização de fotos de pequeno formato (câmaras não métricas) facilita a aplicação da triangulação radial, pois não possuem estabilidade geométrica, nem dispositivos que garantam a obtenção de uma imagem geometricamente fidedigna, causando dificuldades na realização da orientação interior. Assim, podem ser usadas em fotogrametria adotando um procedimento analítico cuidadoso, como o método de triangulação radial para fins de determinação expedita de coordenadas de pontos-objetos (terreno) de baixa precisão.

Outra característica do método é a independência em relação à variação de escala, devido ao modelo matemático utilizado na triangulação radial, que possui um fator de escala que “absorve” os problemas provocados pela variação do relevo das superfícies a serem fotografadas durante o vôo fotogramétrico (variação de escala).

Embora o método possua tais vantagens, deve-se atentar ao fato de que para se obter a solução ideal, seria necessário que a fotografia fosse perfeitamente vertical, ou seja, tivesse inclinação $i = 0^\circ$, assim o ponto nadir n coincidiria com o ponto principal p da fotografia.

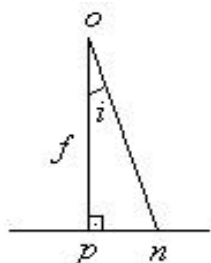


Figura 6 – Diferença entre foto vertical e aproximadamente vertical

No entanto, esse evento é praticamente impossível de ocorrer para todas as fotos do bloco aerofotogramétrico. Assim, se $i \neq 0^\circ$, n não coincide com p , como mostra a figura 6, onde f representa a distância focal. Logo, o método fornecerá uma solução aproximada do resultado ideal. Portanto, quanto mais inclinada a fotografia, mais prejudicado será os resultados da triangulação radial planimétrica.

Também deve se atentar ao fato de que ao selecionar um ponto nas regiões de Grüber, obtém-se apenas uma aproximação do verdadeiro ponto principal, portanto, mesmo que a foto seja perfeitamente vertical, obteremos as coordenadas aproximadas do ponto principal. Apesar disto, o método de triangulação radial se apresenta satisfatoriamente para projetos fotogramétricos que não necessitam de grande precisão.

Entretanto, o interesse pelo método analítico de triangulação radial atualmente só faz sentido se explorar seu potencial de facilitador do ensino e da aprendizagem da fototriangulação, em nível introdutório, de cursos de fotogrametria, possibilitando aos neófitos a compreensão em conjunto dos fundamentos da aerotriangulação e do ajustamento de observações. Tal potencial assenta-se na certeza de tratar-se de um método mais fácil e com um modelo matemático mais simples de ser compreendido, comparado a outros métodos mais sofisticados, cujas modelagens são mais rigorosas, como é o caso do método de triangulação por feixes de raios ou por modelos independentes.

2 – OBJETIVOS

Os objetivos do presente trabalho são:

2.1 – construir uma solução analítica simultânea para o problema da triangulação radial;

2.2 – elaborar e testar um programa computacional de ajustamento de acordo com a solução anterior (2.1);

2.3 – disponibilizar a solução (o programa) para funcionar como uma ferramenta pedagógica adicional ao ensino introdutório dos métodos de fototriangulação.

3 – TRIANGULAÇÃO RADIAL

Segundo Moffitt & Mikhail (1980), a triangulação radial, executada pelo método gráfico, integrou os primeiros procedimentos para mapeamento aerofotogramétrico. Em uma triangulação radial, há duas operações: a resseção e a interseção. Na resseção, em uma foto, são necessários três pontos de apoio planimétricos a, b e c para a determinação do ponto principal da foto no plano do mapa, como mostra a figura 7.

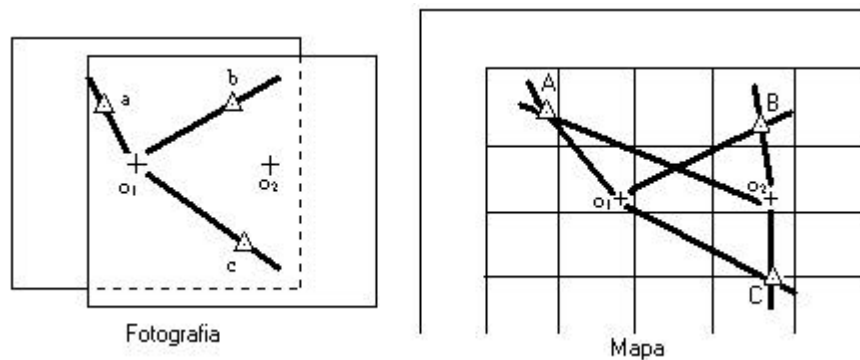


Figura 7 – Localização do ponto principal pela operação de resseção por 3 pontos

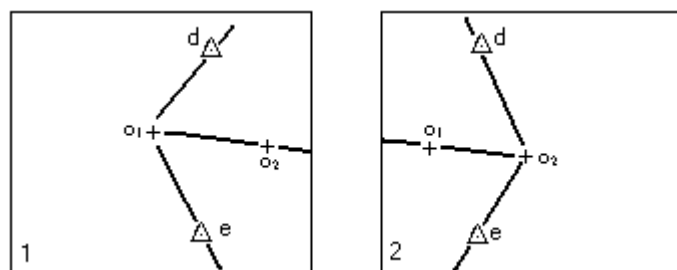


Figura 8 – Retas traçadas utilizando-se a operação de resseção

A partir das coordenadas de terreno do apoio de campo, calculam-se as coordenadas dos mesmos pontos na escala do mapa e plotam-se estes três pontos de apoio A, B e C sobre o mapa.

A partir da foto, onde temos conhecidas as posições do ponto principal e das imagens dos pontos de apoio, com base no “princípio fundamental da triangulação radial” (medição das distâncias em direção ao raio da foto, do ponto principal às bordas da foto) foi medido os dois ângulos $a\hat{O}_1b$ e $b\hat{O}_2c$ com vértice no ponto principal e cujos lados contém as imagens dos pontos de apoio, como mostra a figura 7.

O problema fica reduzido a: dados dois segmentos e dois ângulos, no mapa, onde, a partir do ponto principal se observam os dois segmentos, determinar a posição do ponto principal no mapa.

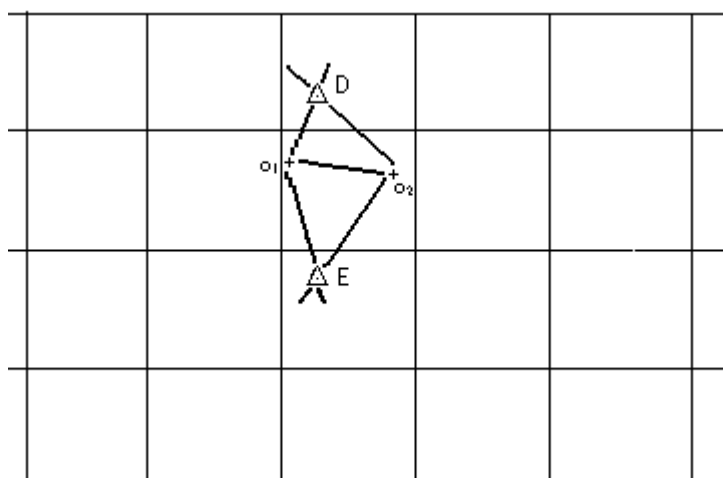


Figura 9 – Localização do ponto principal utilizando-se a operação de resseção por dois pontos

Na primeira foto da figura 8, obtemos pelo princípio da resseção por dois pontos de controle o ângulo $d\hat{O}_1O_2$ que a direção do ponto principal O_1 ao ponto d forma com a reta O_1O_2 e na foto 2 o ângulo $O_1\hat{O}_2d$, que a direção do ponto principal O_2 ao ponto e forma

com O_2O_1 , obtendo-se assim os pontos principais de ambas as fotos. Cada uma destas direções define uma semi-reta e a interseção destas semi-retas definem a posição planimétrica dos pontos principais das fotos 1 e 2, como mostra a figura 9. Assim, obtidos estes dois pontos em coordenadas de terreno e pela interseção, é obtido os demais pontos de passagem.

Na interseção, há um par estereoscópico no qual se deseja determinar a coordenada de um ponto qualquer $P(x_1, y_1)$, cujas imagens aparecem no par estereoscópico de fotos, como mostra a figura 10.

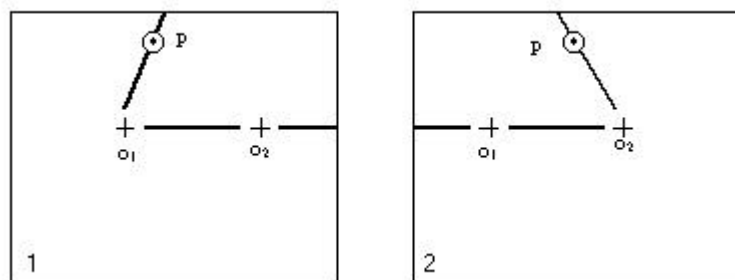


Figura 10 – Retas traçadas utilizando-se dois pontos de controle

Na resseção, necessitamos de três pontos de apoio planimétrico para a determinação da posição do ponto principal no mapa. Entretanto, considerando-se o modelo estereoscópico, as posições dos dois pontos principais podem ser determinadas com apenas dois pontos de apoio comuns ao modelo.

Na interseção, para definir a posição planimétrica de qualquer ponto P sobre o mapa, pode ser definida como problema de determinação do triângulo, dados um lado e os dois ângulos adjacentes a este lado, como mostra a figura 11.

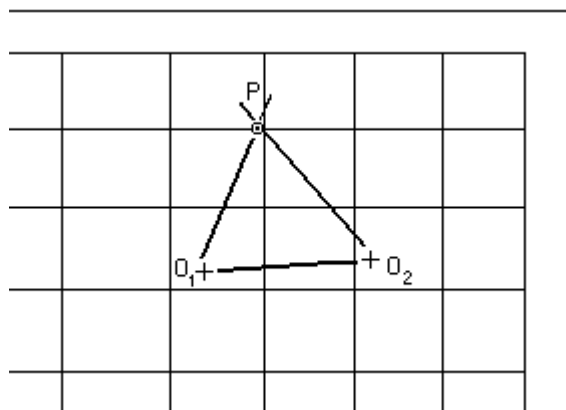


Figura 11 – Localização de um ponto pelo processo de interseção

3.1 - Método gráfico de triangulação radial

Segundo Moffit & Mikhail (1980), o método gráfico é o que menos depende de instrumental. Na prática, são resolvidos simultaneamente os problemas de determinação dos pontos principais (resseção) e de posicionamento de um ponto qualquer da triangulação (interseção).

Neste método, a partir de transparências sobrepostas às fotografias, são marcadas nas transparências as distâncias radiais entre os pontos de controle. Em seguida, as transparências são transferidas para sobre o mapa. Para cada 3 transparências representando as fotografias de uma faixa, a primeira e a terceira são fixadas definitivamente usando os pontos de controle e a segunda é fixada provisoriamente, até que seja feito um ajustamento “manual” dos erros, sendo distribuídos manualmente os erros com a segunda transparência entre as outras duas.

Dessa maneira, são obtidas as fotocoordenadas no sistema do mapa (terreno) a partir do sistema da foto. Como ocorre uma propagação de erros, procura-se estabelecer um número maior de pontos de apoio (teoricamente dois seriam suficientes). Recomenda-se também que se tenha apoio no início e fim da faixa, de modo a permitir o controle da

propagação dos erros e redistribuição dos erros de fechamento constatados ao final da faixa. O método gráfico é muito precário quanto à análise dos erros, devido ao fato que o ajustamento das discrepâncias é feito visual e graficamente.

3.2 - Métodos mecânicos de triangulação radial

Segundo Moffit & Mikhail (1980), os métodos mecânicos possuem determinadas semelhanças com o método gráfico, mas, ao contrário das distâncias traçadas nas transparências, são usadas hastes metálicas ou placas ranhuradas. Nos mecânicos utilizam-se dispositivos mecânicos que se orientam nas direções radiais, de modo a se obter as posições dos pontos principais e dos pontos de enlace e de passagem. Nestes métodos, destacam-se o das placas ranhuradas e o das hastes metálicas ranhuradas.

3.2.1 - Método das placas ranhuradas ou moldes ranhurados

Neste método, sobre as fotografias do bloco, são efetuadas as transferências estereoscópicas dos pontos principais, de passagem, de enlace e de apoio, ao mesmo tempo em que são numerados.

A orientação, que no caso do método gráfico é executada manualmente, agora é feita mecanicamente, inserindo-se pinos que no orifício do ponto principal são rígidos, mas que permitem o deslizamento ao longo das ranhuras.

O conjunto dos moldes montados é sobreposto ao mapa base, onde, após o ajuste da escala que é permitido por certa liberdade de deslocamento dos moldes ao longo das

radiais, são marcadas as posições dos pontos no mapa, através de perfurações por orifícios existentes no centro de cada pino.

3.2.2 - Método das hastes metálicas

Neste método as direções das radiais são materializadas por hastes de metal que possuem uma ranhura e um orifício. O procedimento se assemelha em muito ao anterior. Em ambos os casos, quando se sobrepõe a montagem sobre o mapa base, onde está locado o apoio, efetua-se um ajuste usando-se a possibilidade de deslizamento dos pinos ao longo das radiais.

3.3 - Método analítico de triangulação radial

O procedimento analítico é o mais preciso. Nele eliminam-se os erros gráficos ou mecânicos e a precisão final depende de fatores como inclinação das fotos, movimentação do relevo, qualidade das observações e a quantidade de apoio de campo.

No método gráfico as distâncias são representadas com o uso de transparências, no mecânico são utilizadas placas ranhuradas ou hastes metálicas, já no método analítico as distâncias não são materializadas, ou seja, não são representadas “fisicamente”. A representação é feita analiticamente através de uma equação matemática (equação da distância entre dois pontos).

Para fins de ilustração e exemplificação, consideremos um bloco de fotos utilizando duas faixas e cinco fotos por faixa, com superposição longitudinal entre aerofotos

consecutivas da mesma faixa de 60% e superposição lateral entre faixas adjacentes de 30%. Chega-se à seguinte distribuição dos pontos de controle e de passagem nas fotografias e no terreno como mostra a figura 12.

Para o exemplo da figura 12, temos:

12 pontos de controle planimétricos (1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25, 32, 33 e 35);

14 pontos principais (2, 4, 7, 9, 12, 14, 17, 19, 22, 24, 27, 29, 32 e 34);

3 pontos de verificação (8, 18 e 28);

23 pontos a determinar (2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31 e 34);

Para se calcular as distâncias nas fotografias do bloco aerofotogramétrico será realizado a seguinte forma:

Dado um bloco com recobrimento longitudinal de 60% e lateral de 30%, marca-se os pontos de Grüber nas fotos (ponto principal e pontos de passagem);

Usa-se o ponto próximo ao principal como vértice-origem, a partir dele contam-se as distâncias dele para os outros pontos na foto;

Para o cálculo da distância serão utilizados dois pontos (vértices): um ponto será sempre o ponto próximo ao central (ponto principal ou nadir); o outro irá variar entre todas as distâncias, como apresentado na figura 13.

Inicialmente, calcula-se a distância entre o segmento de reta $\overline{eb}$, em seguida calcula-se $\overline{ec}$ e assim sucessivamente até $\overline{ea}$.

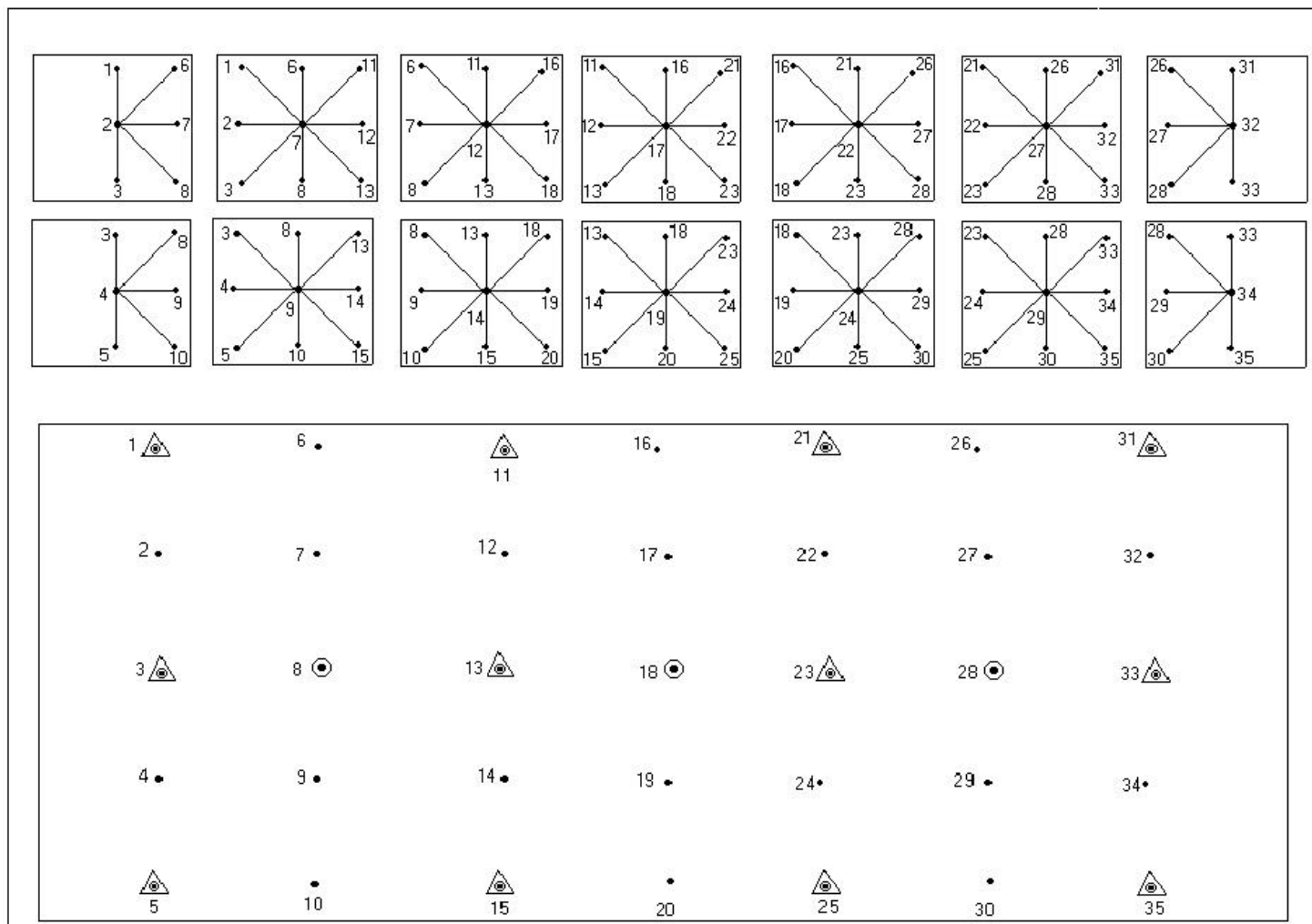


Figura 12- Distribuição dos pontos de controle e de passagem nas fotografias e no terreno

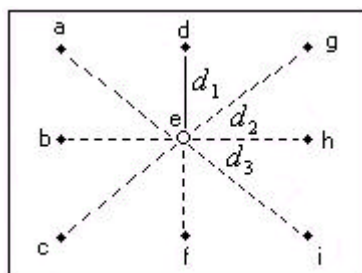


Figura 13 - Variação dos vértices para a definição das distâncias

4 MATERIAIS E MÉTODOS

Os materiais e equipamentos necessários ao projeto estão disponíveis no *LaMMov (Laboratório de Mapeamento Móvel)*. Há um bloco aerofotogramétrico, gerado artificialmente com duas faixas, 7 fotos por faixa e sobreposição longitudinal de 60% e lateral de 30%, como mostra a figura 12, como também os computadores e o software de compilação (Builder C++), onde foi desenvolvido o programa de fototriangulação proposto. De acordo com a fotogrametria tradicional, foi utilizada uma câmara convencional (fictícia) de formato padrão 23x23 cm, distância focal de 153 mm, escala da foto de 1:10.000, altitude média do terreno de aproximadamente 130 m, variação da altura de vôo de ± 50 m e uma variação dos ângulos de rotação ν e j igual a $\pm 3^\circ$.

Da figura 12, percebe-se que a linha dos pontos 2 a 32 representa a linha de vôo de uma faixa e a linha dos pontos 4 a 34 representa a linha de vôo da outra faixa. Todos os pontos-terreno têm coordenadas conhecidas, entretanto apenas os pontos representados por triângulos foram considerados como de apoio (os demais portanto podem funcionar como pontos de verificação).

O método de ajustamento utilizado é uma generalização do método combinado de ajustamento, onde parâmetros são considerados como pseudo-observações. Segundo Gemaél (1994), o modelo matemático pode não estabelecer, com o rigor desejado, as relações entre os parâmetros e os valores observados. Nestes casos, em vez de partir de “valores aproximados” dos parâmetros, pode ser conveniente considerar “valores preliminares estimados” dos mesmos, aos quais possam ser atribuídas variâncias a priori.

Os parâmetros, até então simples incógnitas, passam a ser encarados como “pseudo-observações”.

4.1 Programa implementado de triangulação radial analítica

No presente trabalho foi desenvolvido os seguintes programas: *Coleta Fotocoordenadas* e *Triangulação Radial Analítica* utilizando o compilador C++ Builder.

As coordenadas dos pontos de cada imagem devem seguir uma certa regra, conforme mostra o fluxograma da realização da fototriangulação apresentado na figura 14.



Figura 14 – Realização da fototriangulação

Para serem inseridas na *triangulação radial analítica*, ao ser aberta uma imagem, deve primeiramente ser verificado o número da faixa à qual ela pertence e digitar no editor correspondente no formulário do programa (a noção de formulário e editor vem do C++

Builder que os caracterizam respectivamente como *form* e *edit*). Apenas após esta informação é que será possível iniciar a coleta das fotocoordenadas de cada imagem.

Ao ser realizada a coleta das fotocoordenadas deve ser digitado o número de cada ponto pertencente a imagem correspondente. Também, deve ser mudado o código de número zero para o número um, quando o ponto coletado for o ponto próximo ao centro da imagem.

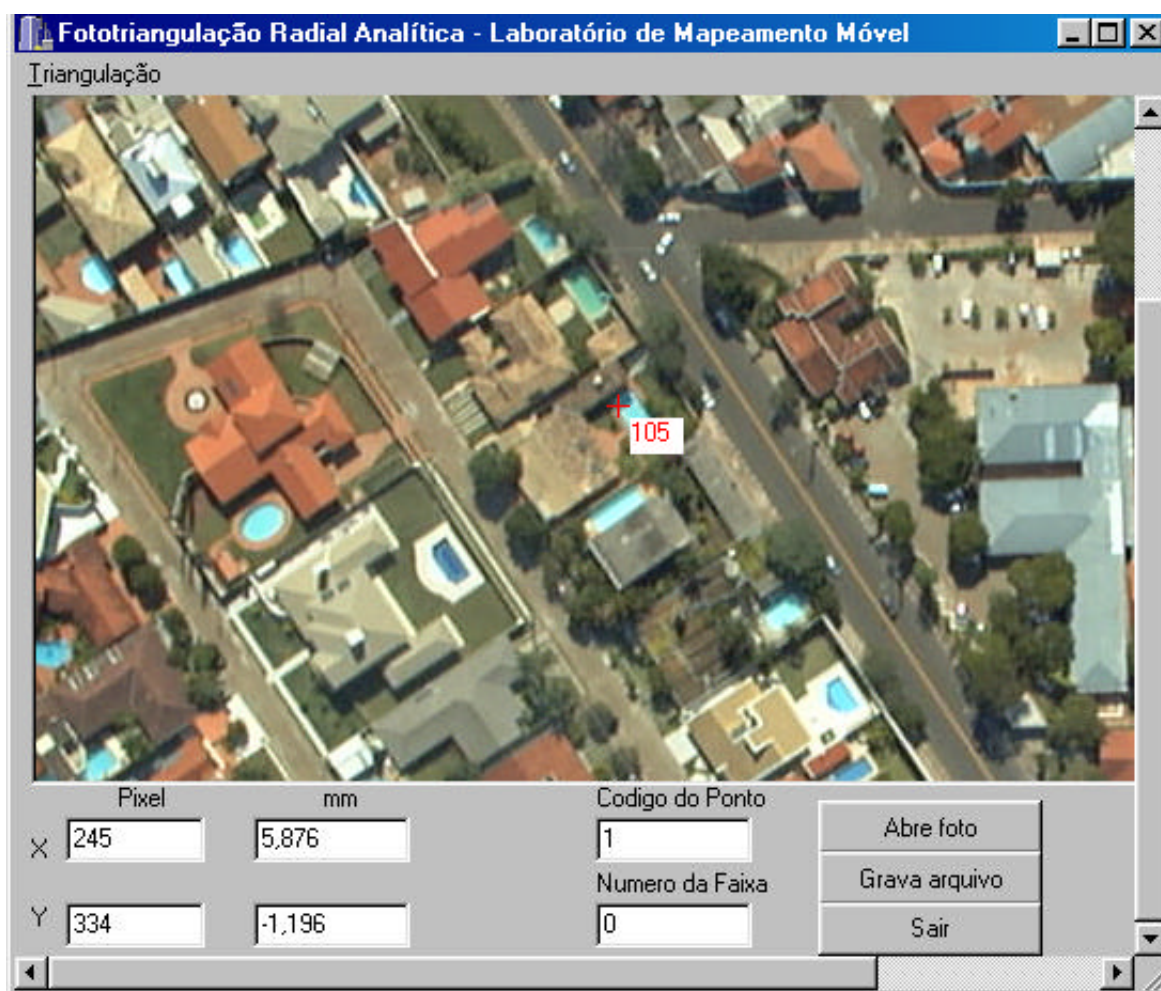


Figura 15 – Tela do programa de coleta de fotocoordenadas

A tela inicial do programa *Coleta Fotocoordenadas* é muito simples (figura 15), na parte inferior do formulário, estão os botões *Abre_Foto*, *Grava_Arquivo* e *Sair*, como

também estão localizados os editores que possibilitam a leitura do valor das coordenadas x e y do ponto em milímetros e o seu valor de pixel correspondente, conforme é movimentado o cursor da tela sobre a imagem aberta para a coleta.

O programa *Triangulação Radial Analítica* (figura 16) é utilizado para realizar ajustamento. Este programa possui os menus: Arquivo, Configurações, Executa e Sair. No módulo Arquivo é onde são abertos os arquivos de fotocoordenadas e de pontos de terreno (valores aproximados) para a realização da triangulação. No módulo Configurações são digitados os valores das variâncias atribuídas às fotocoordenadas, aos pontos de terreno, aos pontos de apoio e aos fatores de escala.

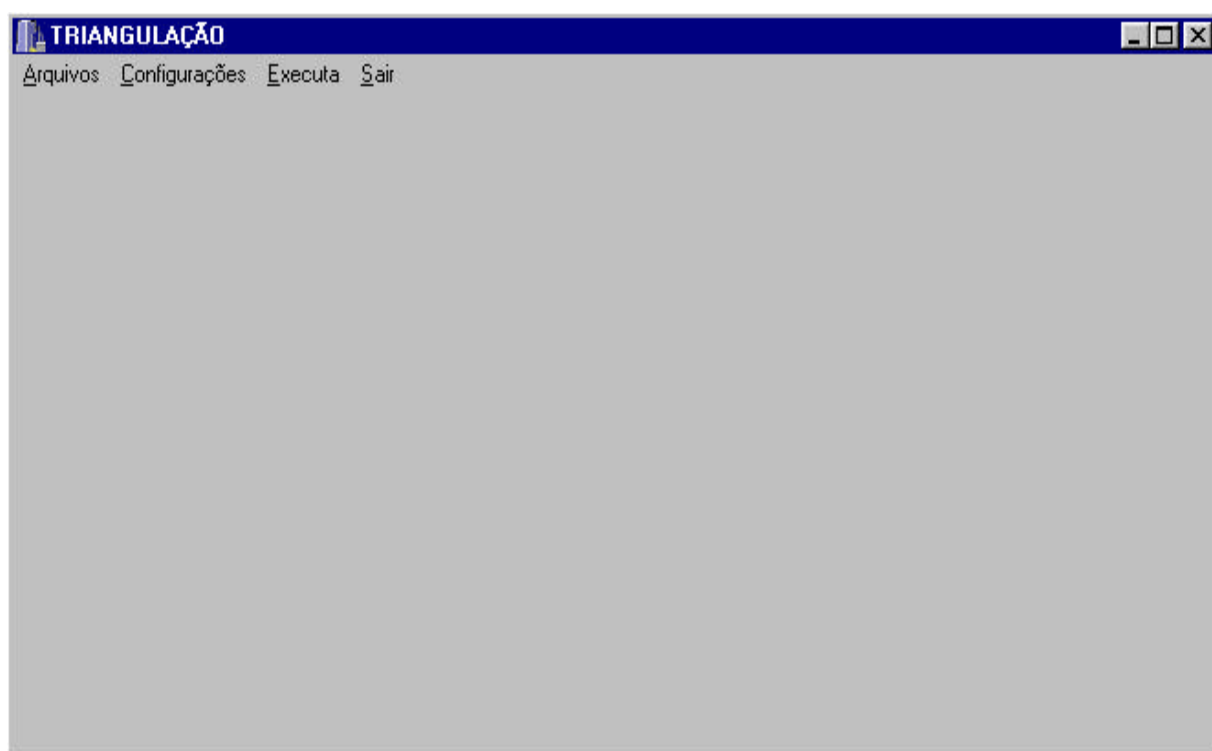


Figura 16 - Tela do programa de triangulação radial analítica

Neste presente trabalho, com a finalidade de contribuir com a utilização pedagógica do programa T.R.A.(Triangulação Radial Analítica), o mesmo foi implementado

de forma que os resultados fossem estimados apenas com um única iteração. É necessário que ao compilar o programa, o usuário utilize os valores de coordenadas de terreno calculados como forma de valores aproximados em uma nova iteração, monitorando o valor do sigma à posteriori até que este seja o mínimo possível, assim será obtido uma solução de variância mínima (de acordo com a definição do método dos mínimos quadrados).

Na realização deste processo, ao perceber que o valor do sigma à posteriori de uma iteração for maior que o da iteração anterior, o usuário deve desprezar os resultados desta ultima iteração e considerar os da anterior como sendo os resultados definitivos.

Portanto, através deste procedimento, o usuário terá uma visão mais ampla das diferenças de resultados gerados de uma iteração para outra ao monitorar o valor do sigma à *posteriori*.

5 – MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático utilizado para o ajustamento das distâncias radiais e estimativa das coordenadas dos pontos fotogramétricos é dado pela equação entre dois pontos no plano:

$$D_{ij} = \left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$d_{ij} = \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$F = d_{ij} - l_k \cdot D_{ij} = \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - l_k \cdot \left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (10)$$

Onde

X_i , X_j , Y_i e Y_j são as coordenadas dos pontos no sistema referencial do terreno (sistema local); x_i , x_j , y_i e y_j são as fotocoordenadas; o índice j representa o ponto próximo ao ponto principal e o índice i representa os demais pontos de passagem em uma dada foto k ;

d_{ij} é a distância calculada na foto entre os pontos de passagem (j) e o ponto próximo ao ponto principal (i);

l_k é o fator de escala médio da fotografia.

Será utilizado um fator de escala (l) para cada imagem. Esta consideração torna a solução mais condizente com a realidade, pois sabe-se que as fotos aéreas têm escala

aproximada, para fins de modelagem da variação de relevo. Dessa maneira, ganha-se maior fidelidade do modelo matemático para descrever a realidade física.

Agora, utilizando a equação (10), as derivadas do modelo matemático em relação as coordenadas serão:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_j)}{\left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right)^{1/2}} \quad (11)$$

$$e \quad \frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{(y_i - y_j)}{\left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right)^{1/2}} \quad (12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = -\frac{(x_i - x_j)}{\left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right)^{1/2}} \quad (13)$$

$$e \quad \frac{\partial F}{\partial y_j} = -\frac{(y_i - y_j)}{\left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right)^{1/2}} \quad (14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} = \frac{-l_k \cdot (X_i - X_j)}{\left((X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2\right)^{1/2}} \quad (15)$$

$$e \quad \frac{\partial F}{\partial Y_i} = \frac{-l_k \cdot (Y_i - Y_j)}{\left((X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2\right)^{1/2}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_j} = \frac{l_k \cdot (X_i - X_j)}{\left((X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2\right)^{1/2}} \quad (17)$$

$$e \quad \frac{\partial F}{\partial Y_j} = \frac{l_k \cdot (Y_i - Y_j)}{\left((X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2\right)^{1/2}} \quad (18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial l_k} = -\left((X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2\right)^{1/2} \quad (19)$$

Segundo Gemaél (1994), no método combinado utilizando todos os parâmetros como pseudo-observações, o vetor dos resíduos é dado pela forma:

$$[V \quad X]^T \quad (20)$$

Onde V representa o vetor dos resíduos (das observações) e X representa os “pseudo-resíduos” das “pseudo-observações”. Este procedimento ou abordagem é conhecido por método generalizado (UOTILA, 1986) ou unificado (MIKHAIL, 1976).

A matriz dos pesos é dada pela seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} P_{L_b} & 0 \\ 0 & P_x \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{Onde } P_{L_b} = s_0^2 \cdot \sum_{L_b}^{-1}; \quad P_x = s_0^2 \cdot \sum_{X_0}^{-1}.$$

O modelo matemático generalizado de ajustamento pelo método combinado utilizando parâmetros como pseudo-observações é dado por:

$$F(X_a, L_a) = 0 \quad (22)$$

Sendo X_a o vetor dos parâmetros ajustados e L_a o vetor das valores observados ajustados.

E o modelo linearizado é dado por:

$${}_r A_{uu} X_1 + {}_r B_{nn} V_1 + {}_r W_1 = {}_r 0_1 \quad (23)$$

isto é, r equações envolvem implicitamente, de maneira não linear, u parâmetros e n observações, apenas com a diferença que os parâmetros são tratados como pseudo-observações,

Onde as matrizes A e B são dadas por:

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0} \quad \text{e} \quad B = \left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b} \quad (24)$$

Enquanto que o erro de fechamento W nada mais é que o modelo matemático calculado em função dos valores observados e quase-observados:

$$W = F(X_0, L_b) \quad (25)$$

O vetor das correções aos parâmetros aproximados, representando os “pseudo-resíduos” das “pseudo-observações” é dado por:

$$X = -[P_X + A^T (BP_{L_b}^{-1} B^T)^{-1} A]^{-1} A^T (BP_{L_b}^{-1} B^T)^{-1} W \quad (26)$$

O vetor dos resíduos é dado por:

$$V = -P_{L_b}^{-1} B^T [BP_{L_b}^{-1} B^T]^{-1} (AX + W) \quad (27)$$

A equação (26) pode ser escrita

$$X = -[N + P_X]^{-1} U \quad (28)$$

com

$$N = A^T (BP_{L_b}^{-1} B^T)^{-1} A = A^T M^{-1} A \quad (29)$$

$$U = A^T (BP_{L_b}^{-1} B^T)^{-1} W = A^T M^{-1} W \quad (30)$$

A matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados é dada por:

$$\sum X_a = \hat{\sigma}_0^2 [N + P_x]^{-1} \quad (31)$$

com

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P_L V + X^T P_X X}{r - \mu + \mu_X} \quad (32)$$

sendo r o número de equações do modelo, m o número total de parâmetros e m_X o número de pseudo-observações.

Dessa maneira, para exemplificar as dimensões das matrizes A e B utilizaremos uma faixa com apenas 3 fotos, onde teremos 6 pontos na primeira foto, 9 na segunda e 6 na terceira foto, totalizando 21 pontos em toda a faixa. Como os pontos nas fotos são bidimensionais, teremos 42 fotocoordenadas observadas ou medidas totalizando o número de observações ($21 \times 2 = 42$).

O número total de equações será de 18 equações de distância, pois teremos 5 distâncias na primeira foto, 8 na segunda e 5 na terceira foto da faixa, totalizando 18 distâncias em ambas as faixas.

O número total de parâmetros será de 21 parâmetros, pois teremos 18 coordenadas (X,Y) referentes aos 9 pontos no plano do terreno e mais um fator de escala λ para cada foto ($18 + 3 = 21$).

Portanto, teremos 18 graus de liberdade correspondendo a 18 equações de distâncias e as matrizes A e B , para o exemplo de uma faixa com 3 fotos, terão as seguintes dimensões: matriz $_{18}A_{21}$ e matriz $_{18}B_{42}$, como mostram as figuras 17 e 18.

6 – EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Inicialmente, um conjunto de experimentos foi feito com um voo fotogramétrico simulado para verificar a viabilização do método, utilizando um bloco aerofotogramétrico, gerado artificialmente com 2 faixas, 7 fotos por faixa e sobreposição longitudinal de 60 % e lateral de 30 %, apresentado na figura 12.

Foram considerados apenas coordenadas bidimensionais e um fator de escala para cada foto e usou-se o programa computacional T.R.A. (Triangulação Radial Analítica), implementado durante o presente trabalho de pesquisa. Em todos os experimentos foram utilizados uma variância de 8 para as fotocoordenadas, 25 para os pontos de terreno, 0,0001 para os pontos de apoio e 0,0001 para os fatores de escala. Dessa maneira, o peso foi de 0,125 para as fotocoordenadas, 10000 para os pontos de apoio, 0,04 para os pontos de terreno e 10000 para os fatores de escala.

Os valores absolutos dos resíduos máximos e mínimos de todas as fotocoordenadas e coordenadas de terreno X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e da média aritmética para todos os pontos estimados estão apresentados nas tabelas a seguir.

Experimento 1:

Foram utilizados os seguintes pontos de apoio, considerando apenas as 3 primeiras fotos da faixa 2 (9 pontos de número: 3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14 e 15):

4 pontos de apoio (pontos de números: 3, 5, 13 e 15);

5 pontos de verificação (ponto de números: 4, 8, 9, 10 e 14).

Tabela 1 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valor médio do fator de escala e do erro médio quadrático utilizando as 3 primeiras fotos da faixa 2, realizando apenas uma iteração.

Número de Observações	Número de Parâmetros	Número de Equações	Graus de Liberdade
42	21	18	18
Resíduos Fotocoordenadas		4 Pontos de Apoio	
		X (mm)	y (mm)
Máximo		4,41	5,16
Mínimo		0,00	0,00
Média Aritmética (mm)		0,00	0,00
Erro Médio Quadrático (mm)		1,84	2,09
Média dos Fatores de Escala (mm/m)		0,090366 = 1/11066,03	
Resíduos das Coordenadas (terreno)		X(m)	Y(m)
Pontos de Controle	Máximo	0,000	0,000
	Mínimo	0,000	0,000
Ponto de Verificação	Máximo	2,069	1,399
	Mínimo	0,211	0,045
Erro Médio Quadrático (m)	Pto. Controle	0,000	0,000
	Pto. Verificação	1,045	0,956
Média Aritmética (m)	Pto. Controle	0,000	0,000
	Pto. Verificação	0,443	-0,530
Sigma à Posteriori		1,3166	
Qui-Quadrado Calculado (c_c^2)		23,698	

No experimento 1, aplicamos um teste de hipótese com base na distribuição de Qui-Quadrado (c_c^2). Como valor de 28,87 referente ao percentil desta distribuição (para um grau de liberdade igual a 18 e um nível de significância igual a 5%) é maior do que o valor do c_c^2 calculado neste experimento, a hipótese básica é aceita ao nível de significância de 5%.

Experimento 2:

Foram utilizados os valores de coordenadas de terreno do experimento anterior como sendo os valores aproximados de terreno de uma nova triangulação usando o programa T.R.A., como também foram utilizadas as mesmas fotocoordenadas e os mesmos pontos de apoio e de verificação do experimento anterior.

Tabela 2 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valor médio do fator de escala e do erro médio quadrático utilizando as 3 primeiras fotos da faixa 2 fotos e realizando nove iterações.

Número de Observações	Número de Parâmetros	Número de Equações	Graus de Liberdade
42	21	18	18
Resíduos Fotocoordenadas		4 Pontos de Apoio	
		X (mm)	y (mm)
Máximo		4,08	6,11
Mínimo		0,00	0,00
Média Aritmética (mm)		0,00	0,00
Erro Médio Quadrático (mm)		1,76	2,14
Média dos Fatores de Escala (mm/m)		0,09054 = 1/11045,66	
Resíduos das Coordenadas (terreno)		X(m)	Y(m)
Pontos de Controle	Máximo	0,000	0,000
	Mínimo	0,000	0,000
Ponto de Verificação	Máximo	1,722	1,427
	Mínimo	0,198	0,319
Erro Médio Quadrático (m)	Pto. Controle	0,000	0,000
	Pto.Verificação	0,914	0,927
Média Aritmética (m)	Pto. Controle	0,000	0,000
	Pto.Verificação	0,455	-0,569
Sigma à Posteriori		1,2954	
Qui-Quadrado Calculado(c_c^2)		23,317	

No experimento 2, foi realizado um número de dez iterações da triangulação até que o valor do sigma à posteriori fosse o mínimo. Este valor foi obtido na nona iteração, pois ao ser realizado a décima, o valor do sigma à posteriori da nona iteração era menor que o das anteriores e também menor que o da décima, como mostra a figura 19.

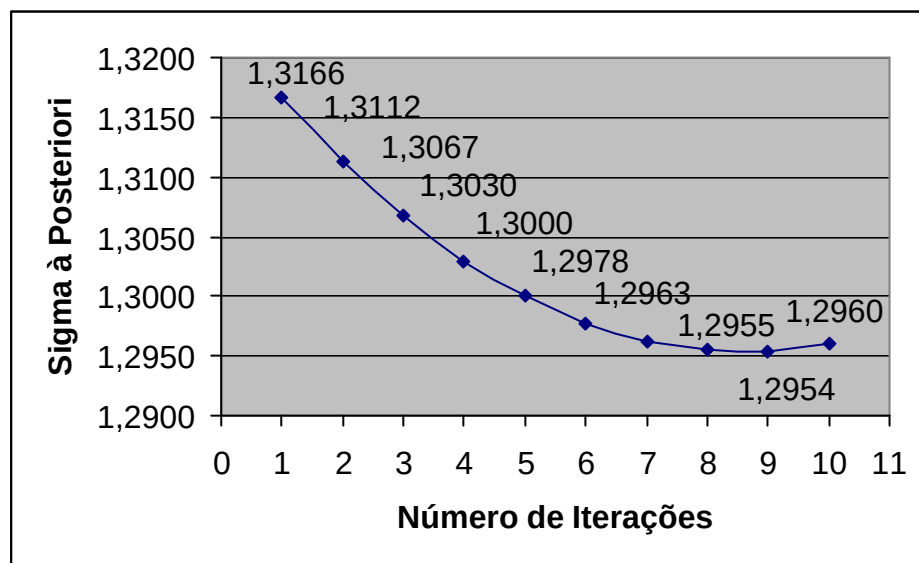


Figura 19 – Número de iterações em relação ao valor do sigma à posteriori utilizando 4 pontos de apoio referente aos experimentos 1 e 2

Neste experimento, notamos uma diminuição do valor do erro médio quadrático dos resíduos das coordenadas de terreno ao realizar as iterações. Isso mostra a melhoria dos resultados do experimento realizado com uma única iteração e os realizados até o número máximo de iterações na triangulação, como mostra a figura 20.

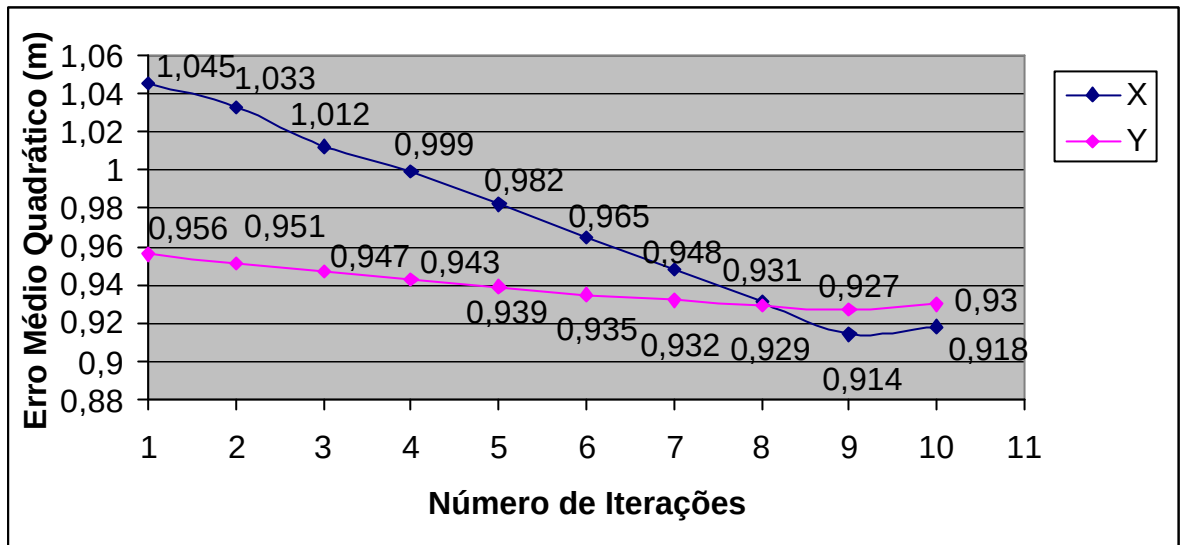


Figura 20 - Variação do erro médio quadrático em relação ao número de iterações

No experimento 2, aplicamos um teste de hipótese com base na distribuição de Qui-Quadrado (χ^2). Como valor de 28,87 referente ao percentil desta distribuição (para um grau de liberdade igual a 18 e um nível de significância igual a 5%) é maior do que o valor do χ^2_c calculado neste experimento, a hipótese básica é aceita ao nível de significância de 5%.

Experimento 3:

Foram utilizados os seguintes pontos de apoio, considerando todas as cinco fotos da faixa 2:

4 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 3, 5, 23 e 25).

6 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 3, 5, 13, 15, 23 e 25).

11 Pontos de Verificação (Pontos de Número: 4, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20 e 23).

Tabela 3 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando as 5 primeiras fotos da faixa 2, e realizando apenas uma iteração.

Número de Observações	Número de Parâmetros	Número de Equações		Graus de Liberdade	
78	35	34		34	
Resíduos Fotocoordenadas		4 Pontos de Apoio		6 Pontos de Apoio	
		x(mm)	y(mm)	X(mm)	Y(mm)
Máximo		8,39	5,05	8,39	5,06
Mínimo		0,00	0,00	0,00	0,00
Média do Fator de Escala (mm/m)		0,0899 = 1/ 11123,47		0,0899 = 1/ 11123,47	
Erro Médio Quadrático (mm)		2, 09	1,74	2,10	1,74
Média Aritmética (mm)		0,00	0,00	0,00	0,00
Resíduos das Coordenadas (terreno)		X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)
Pontos de Controle	Máximo	0,000	0,000	0,000	0,000
	Mínimo	0,000	0,000	0,000	0,000
Pontos de Verificação	Máximo	2,568	1,393	2,570	1,399
	Mínimo	0,153	0,007	0,160	0,000
Erro Médio Quadrático (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto.Verificação	1,235	0,796	1,362	0,849
Média Aritmética (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto.Verificação	0,109	0,006	0,123	-0,085
Sigma à Posteriori		1,247		1,248	
Qui-Quadrado Calculado(c_c^2)		42.404		42,448	

Experimento 4:

Foram utilizados os valores de coordenadas de terreno do experimento anterior como sendo os valores aproximados de terreno de uma nova triangulação usando o programa T.R.A., como também foram utilizadas as mesmas fotos e os mesmos pontos de apoio e de verificação do experimento anterior.

Tabela 4 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando as 5 fotos da faixa 2, e realizando nove iterações.

Número de Observações	Número de Parâmetros	Número de Equações		Graus de Liberdade	
78	35	34		34	
Resíduos Fotocoordenadas		4 Pontos de Apoio		6 Pontos de Apoio	
		x(mm)	y(mm)	x(mm)	Y(mm)
Máximo		6,74	5,33	6,74	5,30
Mínimo		0,00	0,00	0,00	0,01
Média Aritmética (mm)		0,00	0,00	0,00	0,00
Erro Médio Quadrático (mm)		1,77	1,66	1,77	1,67
Média do Fator de Escala (mm/m)		0,09012 = 1/11096,32		0,09012 = 1/11096,32	
Resíduos das Coordenadas (terreno)		X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)
Pontos de Controle	Máximo	0,000	0,000	0,000	0,000
	Mínimo	0,000	0,000	0,000	0,000
Pontos de Verificação	Máximo	1,583	1,360	1,520	1,387
	Mínimo	0,074	0,014	0,178	0,027
Erro Médio Quadrático (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	0,866	0,700	0,936	0,764
Média Aritmética (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	0,124	-0,046	0,164	-0,129
Sigma à Posteriori		1,0083		1,0128	
Qui-Quadrado Calculado (c^2)		34,2836		34,4347	

No experimento 4, foi realizado um número de dez iterações na triangulação até que o valor do sigma à posteriori fosse o mínimo. Este valor foi obtido na nona iteração, pois ao ser realizado as anteriores, o valor do sigma à posteriori da nona era menor que o das anteriores e também menor que o da décima, como mostra a figura 21.

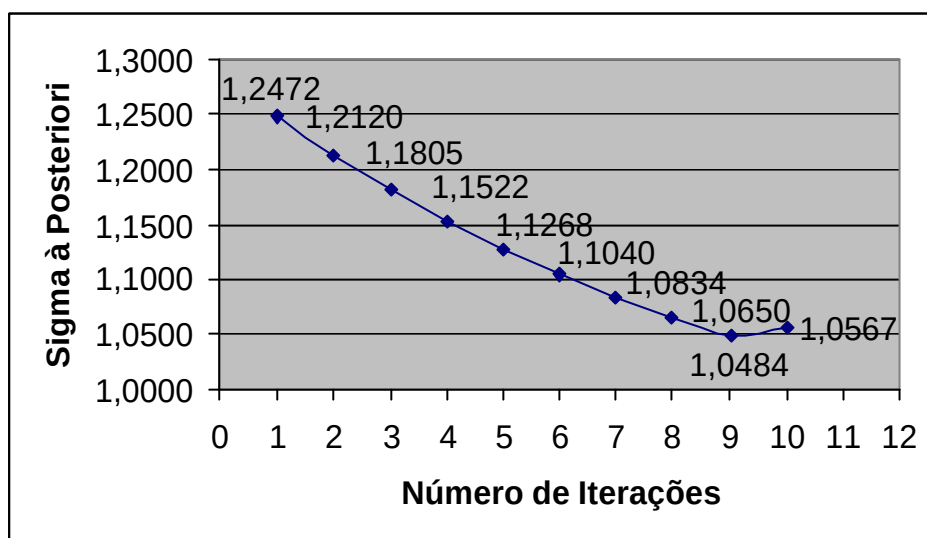


Figura 21 - Número de iterações em relação ao valor do sigma à posteriori utilizando 4 pontos de apoio e referente aos experimentos 3 e 4

Neste experimento, notamos uma diminuição do valor da média aritmética dos resíduos das coordenadas de terreno em relação ao experimento 3, mostrando assim a melhoria dos resultados do experimento realizado com uma única iteração e o realizado com o número máximo de iterações na triangulação. Porém, o aumento de 4 pontos de apoio para 6 no ajustamento provocou um aumento do erro médio quadrático dos resíduos das coordenadas de terreno tanto no experimento de uma única iteração, quanto no de nove iterações.

Nos experimentos 3 e 4, aplicamos um teste de hipótese com base na distribuição de Qui-Quadrado (χ^2). Como valor de 49,80 referente ao percentil desta distribuição (para um grau de liberdade igual a 34 e um nível de significância igual a 5%) é maior do que o valor do χ^2_c calculado neste experimento, a hipótese básica é aceita ao nível de significância de 5%.

Experimento 5:

Foram utilizados os seguintes pontos de apoio, considerando todas as 7 fotos da faixa 2:

4 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 3, 31 e 33).

6 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 3, 16, 18, 31 e 33).

8 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 3, 11, 13, 21, 23, 31 e 33).

17 Pontos de Verificação (Pontos de Número: 4, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 28, 29, 30 e 34).

Tabela 5 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando as 7 primeiras fotos da faixa 2 e realizando apenas uma iteração.

Número de Observações	Número de Parâmetros		Número de Equações		Graus de Liberdade	
114	49		50		50	
Resíduos Foto-coordenadas	4 Pts. de Apoio		6 Pts. de Apoio		8 Pts. De Apoio	
	x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)
Máximo	8,91	5,05	8,93	5,05	8,91	5,05
Mínimo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Erro Médio Quadrático	1,58	1,44	1,58	1,44	1,58	1,44
Média Aritmética	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Média do Fator de Escala (mm/m)	0,090214 = 1/11084,72		0,090214 = 1/11084,72		0,090214 = 1/11084,72	
Resíduos das Coordenadas (terreno)	X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)
Pontos de Controle	Máximo	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Mínimo	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Pontos de Verificação	Máximo	2,794	1,393	2,798	1,397	2,794
	Mínimo	0,159	0,082	0,153	0,080	0,151
Erro Médio Quadrático (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	1,257	0,703	1,306	0,745	1,433
Média Aritmética (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	0,096	-0,039	0,010	-0,070	0,119
Sigma à Posteriori	0,7938		0,7941		0,7945	
Qui-Quadrado Calculado (c_c^2)	39,6914		39,7058		39,7237	

Experimento 6:

Foram utilizados as mesmas fotos e os mesmos pontos de apoio e de verificação do experimento 5.

Tabela 6 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando todas as 7 fotos da faixa 2, e realizando seis iterações.

Número de Observações	Número de Parâmetros		Número de Equações		Graus de Liberdade	
114	49		50		50	
Resíduos Foto-coordenadas	4 Pts. de Apoio		6 Pts. de Apoio		8 Pts. De Apoio	
	x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)
Máximo	5,44	7,45	5,492	7,45	5,45	7,45
Mínimo	0,00	0,02	0,00	0,02	0,00	0,00
Erro Médio Quadrático	1,54	1,46	1,55	1,46	1,55	1,47
Média Aritmética	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Média do Fator de Escala (mm/m)	0,09027 = 1/11077,70		0,09027 = 1/11077,70		0,09027 = 1/11077,70	
Resíduos das Coordenadas (terreno)	X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)
Pontos de Controle	Máximo	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Mínimo	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Pontos de Verificação	Máximo	0,473	1,530	1,277	1,531	1,259
	Mínimo	0,042	0,025	0,046	0,044	0,163
Erro Médio Quadrático (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	0,436	0,514	0,447	0,547	0,471
Média Aritmética (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	0,077	-0,127	0,037	-0,144	0,176
Sigma à Posteriori	0,7869		0,7894		0,7925	
Qui-Quadrado (c_c^2)	39,3468		39,4680		39,6273	

No experimento 6 foi realizado um número de sete iterações na triangulação até que o valor do sigma à *posteriori* fosse o mínimo. Este valor foi obtido na sexta iteração, pois ao ser realizado as anteriores, o valor do sigma à *posteriori* da sexta foi menor que o das iterações anteriores, como também foi menor que o da sétima, como mostra a figura 22. Neste experimento, notamos uma diminuição do valor da média aritmética dos resíduos das coordenadas de terreno em relação ao experimento 5, mostrando assim a

melhoria dos resultados do experimento realizado com uma única iteração e o realizado com o número máximo de iterações na triangulação. Porém, o acréscimo no ajustamento de 4 pontos de apoio para 6 e de 6 pontos de apoio para 8, provocou novamente um aumento do erro médio quadrático dos resíduos das coordenadas de terreno tanto no experimento de uma única iteração, quanto no de seis iterações.

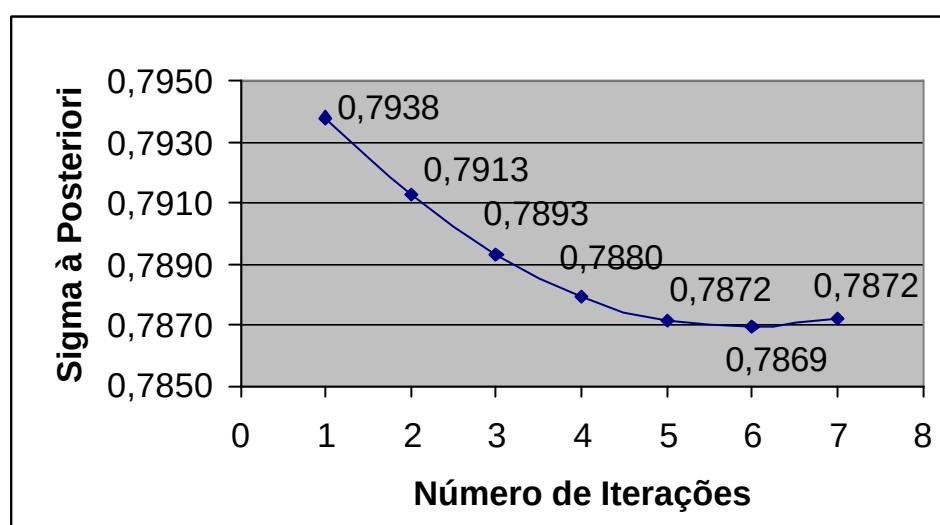


Figura 22 - Número de iterações em relação ao valor do sigma à posteriori utilizando 4 pontos de apoio e referente aos experimentos 5 e 6

Nos experimentos 5 e 6, aplicamos um teste de hipótese com base na distribuição de Qui-Quadrado (χ^2). Como valor de 67,51 referente ao percentil desta distribuição (para um grau de liberdade igual a 50 e um nível de significância igual a 5%) é maior do que o valor do χ^2_c calculado neste experimento, a hipótese básica é aceita ao nível de significância de 5%.

Experimento 7:

Foram utilizados os seguintes pontos de apoio, considerando as 3 primeiras fotos das faixas 1 e 2:

4 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 5, 11 e 15).

6 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 3, 5, 11, 13 e 15).

11 Pontos de Verificação (Pontos de Número: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13 e 14).

Tabela 7 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando as 3 primeiras fotos das faixas 1 e 2, e realizando apenas uma iteração.

Número de Observações	Número de Parâmetros	Número de Equações		Graus de Liberdade	
84	36	36		36	
Resíduos Fotocoordenadas		4 Pontos de Apoio		6 Pontos de Apoio	
		x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)
Máximo		4,95	6,23	4,95	6,24
Mínimo		0,00	0,00	0,00	0,00
Erro Médio Quadrático (mm)		2,10	2,20	2,10	2,20
Média Aritmética (mm)		0,00	0,00	0,00	0,00
Média do Fator de Escala (mm/m)		0,9147 = 1/10932,95		0,09147 = 1/10932,95	
Resíduos das Coordenadas (terreno)		X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)
Pontos de Controle	Máximo	0,000	0,000	0,000	0,000
	Mínimo	0,000	0,000	0,000	0,000
Pontos de Verificação	Máximo	1,620	2,980	1,619	2,980
	Mínimo	0,055	0,087	0,059	0,077
Erro Médio Quadrático (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	0,832	1,268	0,922	1,353
Média Aritmética (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	-0,071	0,151	-0,097	0,004
Sigma à Posteriori		1,5134		1,5143	
Qui-Quadrado Calculado (c_c^2)		54,4829		54,5152	

No experimento 7, o valor de sigma à posteriori obtido na primeira iteração foi menor que o valor obtido na segunda iteração, portanto a solução de variância mínima foi obtida já na primeira iteração, como mostra a figura 23.

Neste experimento, notamos que o acréscimo no ajustamento de 4 pontos de apoio para 6, provocou novamente um aumento do erro médio quadrático dos resíduos das coordenadas de terreno.

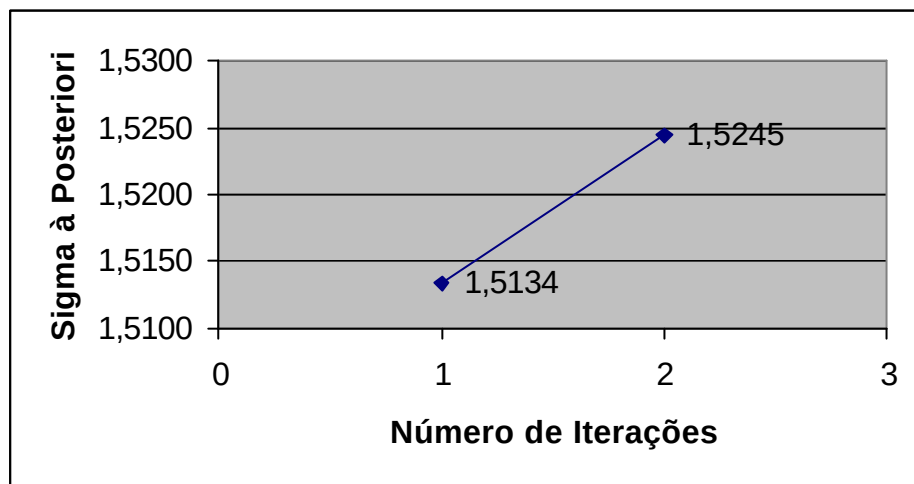


Figura 23 - Número de iterações em relação ao valor do sigma à posteriori utilizando 4 pontos de apoio e referente ao experimento 7

Neste experimento, aplicamos um teste de hipótese com base na distribuição de Qui-Quadrado (c^2). Como valor de 49,80 referente ao percentil desta distribuição (para um grau de liberdade igual a 36 e um nível de significância igual a 5%) é maior do que o valor do c_c^2 calculado neste experimento, a hipótese básica é aceita ao nível de significância de 5%.

Experimento 8:

Foram utilizados os seguintes pontos de apoio, considerando todas as 5 fotos das faixas 1 e 2:

4 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 5, 21 e 25).

6 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 3, 5, 21, 23 e 25).

21 Pontos de Verificação (Pontos de Número: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23 e 24).

Tabela 8 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando todas as 5 fotos das faixas 1 e 2, totalizando 10 fotos, utilizando 4 e 6 pontos de apoio e realizando apenas uma iteração.

Número de Observações	Número de Parâmetros	Número de Equações		Graus de Liberdade	
156	60	68		68	
Resíduos Fotocoordenadas		4 Pts. de Apoio		6 Pts. De Apoio	
		x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)
Máximo		10,07	6,69	10,08	6,70
Mínimo		0,00	0,00	0,00	0,00
Erro Médio Quadrático (mm)		2,16	1,81	2,16	1,81
Média Aritmética (mm)		0,00	0,00	0,00	0,02
Média do Fator de Escala (mm/m)		0,0909 = 1/11001,10		0,0909 = 1/11001,10	
Resíduos das Coordenadas (terreno)		X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)
Pontos de Controle	Máximo	0,000	0,000	0,000	0,000
	Mínimo	0,000	0,000	0,000	0,000
Pontos de Verificação	Máximo	3,040	2,132	3,040	2,132
	Mínimo	0,090	0,092	0,090	0,092
Erro Médio Quadrático (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto.Verificação	1,290	0,877	1,320	0,890
Média Aritmética (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto.Verificação	0,071	0,109	0,084	0,0633
Sigma à Posteriori		1,2968		1,2976	
Qui-Quadrado Calculado(c_c^2)		88,1834		88,2340	

Experimento 9:

Foram utilizados os seguintes pontos de apoio, considerando todas as 5 fotos das faixas 1 e 2:

8 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 3, 5, 11, 15, 21, 23 e 25).

9 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23 e 25).

21 Pontos de Verificação (Pontos de Número: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23 e 24).

Tabela 9 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando todas as 5 fotos das faixas 1 e 2, totalizando 10 fotos, utilizando 8 e 9 pontos de apoio e realizando apenas uma iteração.

Número de Observações	Número de Parâmetros	Número de Equações		Graus de Liberdade	
156	60	68		68	
Resíduos Fotocoordenadas		8 Pontos de Apoio		9 Pontos de Apoio	
		X(mm)	y(mm)	x(mm)	Y(mm)
Máximo		10,13	6,69	10,13	6,69
Mínimo		0,00	0,00	0,00	0,00
Erro Médio Quadrático (mm)		2,17	1,81	2,17	1,81
Média Aritmética (mm)		0,00	0,00	0,00	0,00
Média do Fator de Escala (mm/m)		0,0909 = 1/11001,10		0,0909 = 1/11001,10	
Resíduos das Coordenadas (terreno)		X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)
Pontos de Controle	Máximo	0,000	0,000	0,000	0,000
	Mínimo	0,000	0,000	0,000	0,000
Pontos de Verificação	Máximo	3,066	2,137	3,066	2,137
	Mínimo	0,098	0,089	0,104	0,089
Erro Médio Quadrático (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	1,356	0,929	1,362	0,924
Média Aritmética (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	0,225	0,024	0,233	0,091
Sigma à Posteriori		1,3012		1,3019	
Qui-Quadrado Calculado (c_c^2)		88,4846		88,5270	

Nos experimentos 8 e 9, o valor de sigma à posteriori obtido na primeira iteração foi menor que o valor obtido na segunda iteração, portanto foi obtido a solução de variância mínima já na primeira iteração, como mostra a figura 24.

Nestes experimentos, notamos que o acréscimo no ajustamento de 4 pontos de apoio para 6, de 6 para 8 e de 8 para 9 pontos de apoio provocou também, um aumento do erro médio quadrático dos resíduos das coordenadas de terreno.

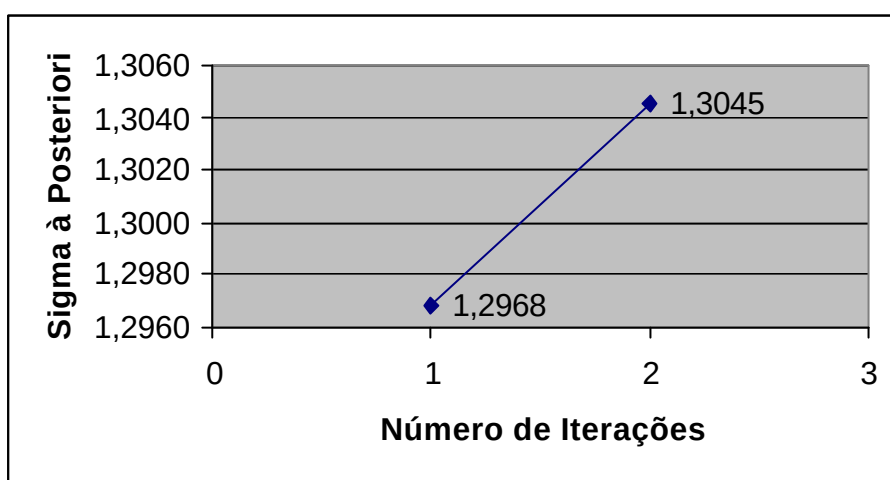


Figura 24 - Número de iterações em relação ao valor do sigma à posteriori utilizando 4 pontos de apoio e referente aos experimentos 8 e 9

Nos experimentos 8 e 9, aplicamos um teste de hipótese com base na distribuição de Qui-Quadrado (χ^2). Como valor de 90,53 referente ao percentil desta distribuição (para um grau de liberdade igual a 68 e um nível de significância igual a 5%) é maior do que o valor do χ^2_c calculado neste experimento, a hipótese básica é aceita ao nível de significância de 5%.

Experimento 10:

Foram utilizados os seguintes pontos de apoio, considerando todas as 7 fotos das faixas 1 e 2, totalizando 14 fotos:

4 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 5, 31 e 35).

6 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 5, 16, 20, 31 e 35).

8 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 3, 5, 16, 20, 31, 33 e 35).

21 Pontos de Verificação (Pontos de Número: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,

13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33 e 34).

Tabela 10 - Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando as 7 primeiras fotos da faixa 2, totalizando 14 fotos, utilizando 4, 6 e 8 pontos de apoio e realizando apenas uma iteração.

Número de Observações	Número de Parâmetros		Número de Equações		Graus de Liberdade	
228	84		100		100	
Resíduos Foto-coordenadas	4 Pts. de Apoio		6 Pts. de Apoio		8 Pts. de Apoio	
	x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)
Máximo	10,08	6,69	10,09	6,70	10,09	6,70
Mínimo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Erro Médio Quadrático	2,17	1,64	2,17	1,65	2,17	1,65
Média Aritmética	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Média do Fator de Escala (mm/m)	0,09054 = 1/11045,37		0,09054 = 1/11045,37		0,09054 = 1/11045,37	
Resíduos das Coordenadas (terreno)	X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)
Pontos de Controle	Máximo	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Mínimo	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Pontos de Verificação	Máximo	3,047	2,129	3,049	2,134	3,049
	Mínimo	0,035	0,017	0,035	0,014	0,048
Erro Médio Quadrático (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	1,318	0,814	1,301	0,813	1,263
Média Aritmética (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	0,055	0,086	0,049	0,072	0,041
Sigma à Posteriori	1,2126		1,2134		1,2156	
Qui-Quadrado (c_c^2)	121,2607		121,3356		121,5504	

No experimento 10, aplicamos um teste de hipótese com base na distribuição de Qui-Quadrado (χ^2). Como valor de 124,3 referente ao percentil desta distribuição (para um grau de liberdade igual a 100 e um nível de significância igual a 5%) é maior do que o valor do χ^2 calculado neste experimento, a hipótese básica é aceita ao nível de significância de 5%.

Experimento 11:

Foram utilizados os seguintes pontos de apoio, considerando todas as 7 fotos das faixas 1 e 2, totalizando 14 fotos:

9 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 3, 5, 16, 18, 20, 31, 33 e 35).

10 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 3, 5, 11, 15, 21, 25, 31, 33 e 35).

12 Pontos de Apoio (Pontos de Número: 1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25, 31, 33 e 35).

2 Pontos de Verificação (Pontos de Número: 17 e 19).

Tabela 11 – Resíduos das fotocoordenadas e das coordenadas X e Y, valores médios dos fatores de escala, do erro médio quadrático e do desvio padrão estimado utilizando as 7 primeiras fotos da faixas 2, totalizando 14 fotos, utilizando 9, 10 e 12 pontos de apoio e realizando apenas uma iteração.

Número de Observações	Número de Parâmetros		Número de Equações		Graus de Liberdade	
228	84		100		100	
Resíduos Foto-coordenadas	9 Pts. de Apoio		10 Pts. de Apoio		12 Pts. de Apoio	
	x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)
Máximo	10,09	6,70	10,13	6,70	10,13	6,70
Mínimo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Erro Médio Quadrático	2,17	1,65	2,17	1,65	2,18	1,65
Média Aritmética	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Média do Fator de Escala (mm/m)	0,09054 = 1/11045,37		0,09054 = 1/11045,37		0,09054 = 1/11045,37	
Resíduos das Coordenadas (terreno)	X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)
Pontos de Controle	Máximo	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Mínimo	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Pontos de Verificação	Máximo	3,049	2,134	3,070	2,137	3,070
	Mínimo	0,049	0,052	0,034	0,012	0,034
Erro Médio Quadrático (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	1,342	0,790	1,376	0,846	1,387
Média Aritmética (m)	Pto. Controle	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Pto. Verificação	0,091	0,054	0,980	0,098	0,129
Sigma à Posteriori	1,2156		1,2156		1,2174	
Qui-Quadrado Calculado (c_c^2)	121,5536		121,5595		121,7435	

Nos experimentos 10 e 11, o valor de sigma à posteriori obtido na primeira iteração foi menor que o valor obtido na segunda iteração, portanto foi obtido a solução de variância mínima já na primeira iteração, como mostra a figura 25.

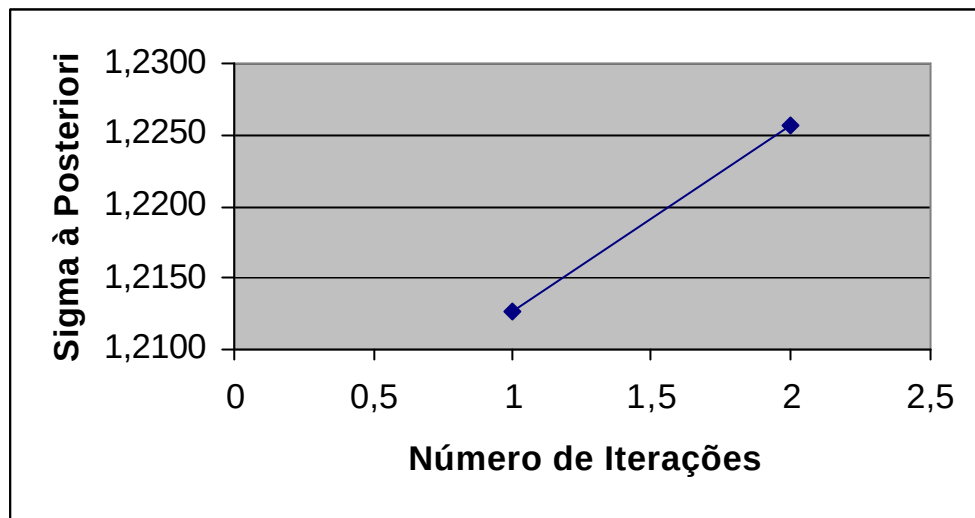


Figura 25 - Número de iterações em relação ao valor do sigma à posteriori utilizando 4 pontos de apoio e referente aos experimentos 10 e 11

Nestes experimentos, notamos que existe um limite de números de pontos de apoio para uma determinada quantidade de pontos de passagem em um bloco aerofotogramétrico, pois aumentarmos indefinidamente o número de pontos de apoio acaba impedindo a distribuição dos resíduos, ou seja, acaba perdendo flexibilidade geométrica, enrijecendo a geometria dos pontos de terreno a tal ponto que ao invés do erro médio quadrático continuar diminuindo, ao aumentar o número de pontos de apoio, começa ocorrer o inverso. Isso ocorre porque as correções do ajustamento são acumuladas em um número cada vez menor de pontos de passagem, ou seja, existem cada vez menos pontos de passagem recebendo estas correções. Nestes experimento, notamos que o acréscimo no ajustamento de 4 pontos de apoio para 6 e de 6 para 8, o erro médio quadrático diminui e o acréscimo de 8 para 9, de 9 para 10 e de 19 para 12 pontos de apoio, o erro médio quadrático dos resíduos das

coordenadas de terreno começou a aumentar, como mostra o gráfico da figura 26.

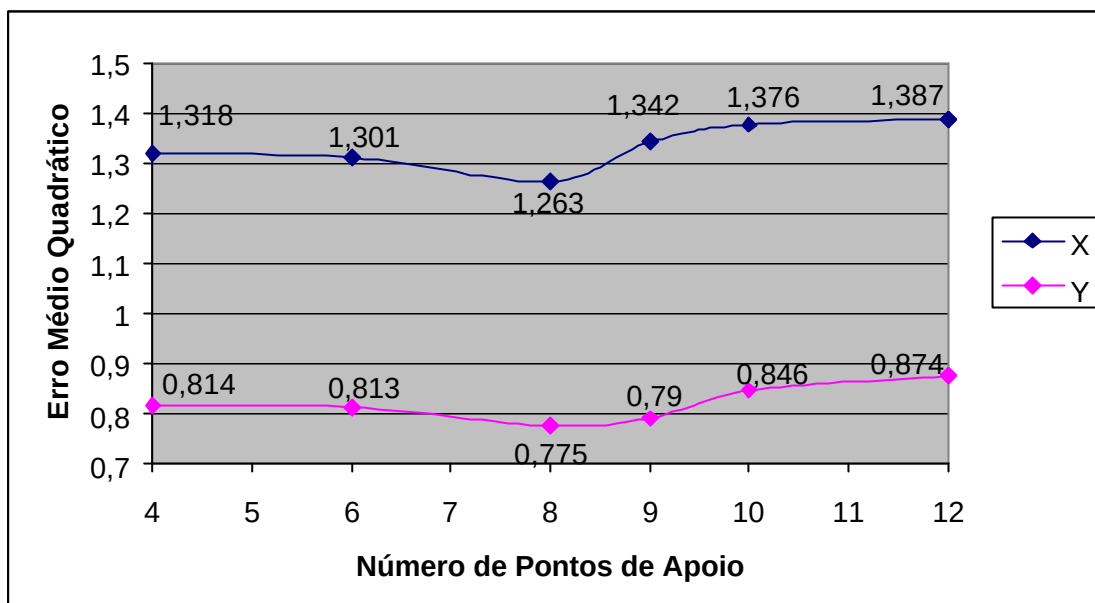


Figura 26 – Variação do número de pontos de apoio em relação ao erro médio Quadrático

No experimento 11, aplicamos um teste de hipótese com base na distribuição de Qui-Quadrado (c^2). Como valor de 124,3 referente ao percentil desta distribuição (para um grau de liberdade igual a 100 e um nível de significância igual a 5%) é maior do que o valor do c_c^2 calculado neste experimento, a hipótese básica é aceita ao nível de significância de 5%.

7 – DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nos experimentos anteriores, notamos que existe um limite de números de pontos de apoio para uma determinada quantidade de pontos de passagem em um bloco aerofotogramétrico, pois ao aumentarmos indefinidamente o número de pontos de apoio acaba-se impedindo a distribuição dos resíduos, ou seja, perde-se flexibilidade geométrica, enrigecendo a geometria dos pontos de terreno a tal ponto que ao invés do erro médio quadrático (EMQ) continuar diminuindo, o mesmo começa a aumentar.

Uma possível explicação para essa ocorrência, é que as correções do ajustamento são acumuladas em um número cada vez menor de pontos de passagem, ou seja, existem cada vez menos pontos de passagem recebendo correções.

O presente trabalho traz também uma contribuição acadêmica importante, porque permitirá aos professores antecipar o contato dos estudantes com o método de aerotriangulação juntamente com o ajustamento. Através de um método e um modelo matemático simples, o aluno poderá conhecer na prática todos os passos da realização da triangulação, como, por exemplo, a numeração dos pontos, a coleta de fotocoordenadas, a montagem de um bloco, como também a diferença conceitual e funcional entre pontos de apoio, de passagem, de enlace e de verificação. O estudante, ao executar o ajustamento, poderá verificar as diferenças entre os resultados obtidos variando-se, por exemplo, o peso dado às fotocoordenadas, aos pontos de apoio, aos valores aproximados e aos fatores de escala.

Dessa maneira, um aluno iniciante no estudo da fototriangulação terá uma visão mais ampla e integrada das disciplinas de fotogrametria e de ajustamento de observações em conjunto.

A teoria e a prática podem ser simplificadas, pelo menos no nível introdutório do assunto, facilitando o aprendizado futuro dos métodos dos modelos independentes e dos feixes de raios.

8 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Com este projeto de pesquisa, podemos perceber a viabilidade do método de triangulação radial como uma ferramenta pedagógica a fim de auxiliar os alunos de cursos de fotogrametria, na aprendizagem da triangulação associada ao ajustamento, através da utilização do programa de *Triangulação Radial Analítica*.

Recomenda-se que futuramente seja implementado um programa de triangulação radial para investigar a possibilidade de considerar um fator de escala para cada distância radial, a fim de buscar uma melhoria no resultado final, diminuindo os problemas causados pela variação do relevo das superfícies e da variação da altura de vôo.

Também recomenda-se o programa T.R.A. seja utilizado pelos alunos do terceiro ano de engenharia cartográfica como um auxílio ao aprendizado da triangulação associada ao ajustamento de observações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, J. B. Fotogrametria. Curitiba: SBEE. 242p.

DALMOLIN, Q.; et al. Determinação das posições planimétricas aplicando o modelo topogramétrico. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA, 17., 1995, Salvador. Anais..., p.329-336.

GEMAEL, C. Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas. Curitiba: Imprensa Universitária. 1994. 319p.

HALLERT, B. A New Method for Analytical Radial Triangulation. Photogrammetric Engineering, v.1, n.23, p.144-148, 1957.

LUGNANI, J. B. Introdução à Fototriangulação. Curitiba: Imprensa Universitária. 1987. 134p.

MIKHAIL, E.M. Observations and least squares. New York: Dun Donnelley 1976.

_____. A Study in Numerical Radial Triangulation. Photogrammetric Engineering, v.34, n.4, p.359-368, 1968.

MOFFITT, F. & MIKHAIL, E. Photogrammetry. 3.ed. New York: Harper&Row. 1980. 648p.

SLAMA, C. C. Aerotriangulation. In: AMERICAN SOCIETY OF PHOTOGRAMMETRY. Manual of Photogrammetry. 4. ed. Falls Church, VA, 1980. p.453-518.

SILVA, J.F.C. Notas de Aula da Disciplina de Fotogrametria Analítica. Presidente Prudente: 2001. 35p.

TURPIN, R.D. Numerical Radial Triangulation. Photogrammetric Engineering, v.32, n.6, p.1041-1045, 1966.

UOTILA, U.A. Notes on Adjustment Computation. Columbus, O.H., 1986: Dep. of Geodetic Science and Surveying. Part I. 165p.

WOLF, P.R. Analytical Radial Triangulation. Photogrammetric Engineering, v.33, n.1, p.109-115, 1967.

_____. Elements of Photogrammetry. 2.ed. Cingapura: McGraw-Hill. 1983. 608p.