



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Marta Luiza Suleiman Pignatari

**Um estudo sobre as equações de agregação em espaços de
Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov-Morrey**

São José do Rio Preto
2018

Marta Luiza Suleiman Pignatari

**Um estudo sobre as equações de agregação em espaços de
Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov-Morrey**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof^a. Dr^a. Juliana Conceição
Precioso Pereira

Coorientador: Prof^a. Dr^a. Andréa Cristina
Prokopczyk Arita

São José do Rio Preto
2018

Suleiman-Pignatari, Marta Luiza.

Um estudo sobre as equações de agregação em espaços de Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov- Morrey / Marta Luiza Suleiman Pignatari. -- São José do Rio Preto, 2018
88 f. : il., tabs.

Orientador: Juliana Conceição Precioso Pereira

Coorientador: Andrea Cristina Pczyk Arita

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Espaços de funções. 4. Equações de agregação. 5. Boa colocação global. 6. Autossimilaridade. 7. Comportamento assintótico de soluções. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.944

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

Marta Luiza Suleiman Pignatari

**Um estudo sobre as equações de agregação em espaços de
Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov-Morrey**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof^a. Dr^a. Juliana Conceição Precioso Pereira
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira
UNICAMP – Campinas

Prof^a. Dr^a. Lidiane dos Santos Monteiro Lima
UFG – Câmpus de Goiânia

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
14 de junho de 2018

“Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino.”

(Leonardo da Vinci)

AGRADECIMENTOS

A benção de viver é uma graça, por isso agradeço a Deus eternamente.

Agradeço imensamente à minha orientadora, Professora Doutora Juliana Conceição Precioso Pereira, pela confiança depositada, pela disponibilidade, pela paciência, pelos ensinamentos transmitidos e por todas as discussões imprescindíveis, que tornaram possíveis a realização deste trabalho.

Agradeço com muito carinho à minha coorientadora, Professora Doutora Andréa Cristina Prokopczyk Arita, sempre disposta a contribuir com inúmeras sugestões valiosas, que só fizeram engrandecer e enriquecer esta produção.

Agradeço a todos que acreditaram em mim, em especial ao Professor Doutor Paulo Ricardo da Silva.

Agradeço à minha família, principalmente a meus pais, Carolina e William, por terem me ensinado todos os valores para viver com dignidade e felicidade.

Agradeço ao meu esposo, Carlos, por estar sempre comigo, encorajando-me, apoiando-me e incentivando-me em todos os momentos.

Agradeço à minha querida tia, Amal, por me ouvir e amparar em muitas horas difíceis.

Agradeço aos meus amigos inesquecíveis, João Pitot, Letícia Sanches Silva e Robson Trevizan, pelo companheirismo e por toda a ajuda durante o doutorado.

Agradeço aos membros da Comissão Examinadora Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira, Prof^a. Dr^a. Lidiane dos Santos Monteiro Lima, Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos e Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves, por aceitarem o convite e pelos apontamentos sugeridos.

Agradeço também à CAPES pelo auxílio financeiro.

*À minha família.
Dedico.*

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos condições para obter boa colocação global no tempo para uma classe de equações de transporte viscoso não-linear descrevendo fenômenos de agregação em biologia com dados iniciais em espaços de Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov-Morrey. Estudamos também auto-similaridade e estabilidade assintótica em grandes tempos.

Palavras-chave: Equações de transporte viscoso não linear, Quimiotaxia, Espaços de Morrey, Espaços de Besov-Morrey, Espaços de Fourier-Besov-Morrey, Comportamento assintótico.

ABSTRACT

In this work we present conditions to obtain global-in-time well-posedness to a class of nonlinear viscous transport equations describing aggregation phenomena in biology with initial data in Morrey, Besov-Morrey and Fourier-Besov-Morrey spaces. We also study the self-similarity and asymptotic stability of solutions at large times.

Keywords: Nonlinear viscous transport equations, Chemotaxis, Morrey spaces, Besov-Morrey spaces, Fourier-Besov-Morrey spaces, Asymptotic behavior.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	14
1.1 O Espaço das Distribuições	14
1.2 O Espaço de Schwartz e a Transformada de Fourier	16
1.3 Decomposição de Littlewood-Paley e Paraproduto de Bony	19
1.4 Variação Total de uma Medida	20
1.5 Propriedades Gerais de Espaços de Interpolação	21
1.6 Um Lema de Ponto Fixo	23
1.7 As Funções Beta e Gama	23
2 Espaços Homogêneos	25
2.1 Espaços de Morrey e de Sobolev-Morrey Homogêneos	25
2.2 Espaços de Besov e de Besov-Morrey Homogêneos	31
2.3 Espaços de Fourier-Besov-Morrey Homogêneos	36
3 Boa Colocação em Espaços de Morrey	38
3.1 Formulação Integral de (1) – (2)	38
3.2 <i>Scaling</i> das Equações de Agregação	39
3.3 Espaços Funcionais	41
3.4 Resultados	41
3.5 Estimativas	42
3.5.1 Estimativas para $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ em Espaços de Morrey	43
3.5.2 Estimativas Bilineares	47
3.6 Demonstração dos Resultados	48
3.6.1 Demonstração do Teorema 3.4.1	49
3.6.2 Demonstração do Teorema 3.4.2	53

3.6.3	Demonstração do Teorema 3.4.3	55
4	Boa Colocação em Espaços de Besov-Morrey	57
4.1	Espaços Funcionais	57
4.2	Resultados	58
4.3	Estimativas	59
4.3.1	Estimativas para $\{G(t)\}_{t \geq 0}$	59
4.3.2	Estimativas Lineares	63
4.3.3	Estimativas Bilineares	63
4.4	Demonstração dos Resultados	64
4.4.1	Demonstração do Teorema 4.2.1	65
4.4.2	Demonstração do Teorema 4.2.2	68
5	Boa colocação em espaços de Fourier-Besov-Morrey	71
5.1	Resultados	72
5.2	Exemplo 5.2.1	72
5.3	Estimativas	74
5.3.1	Estimativas para $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ em Espaços de Fourier-Besov-Morrey	74
5.3.2	Estimativas Lineares	75
5.3.3	Estimativas Bilineares	75
5.4	Demonstração dos Resultados	78
5.4.1	Demonstração do Teorema 5.1.1	78
5.4.2	Demonstração do Teorema 5.1.2	81

Introdução

Neste trabalho estudamos o problema de Cauchy para a equação do calor corrigida pelo termo de transporte não-local e não-linear

$$u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u(\nabla K * u)), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Este modelo tem sido usado para descrever movimentos coletivos e fenômenos de agregação em biologia e mecânica de meios contínuos, em que a função incógnita $u = u(x, t)$ representa a densidade populacional de uma espécie ou a densidade de partículas em um meio granular. Aqui, $n \geq 2$ e o núcleo K é uma função conhecida que depende somente da posição x . O símbolo Δu indica o Laplaciano de u , “ $*$ ” denota o operador convolução na variável x e $\nabla \cdot$ representa o operador divergente.

Na literatura, as equações de agregação têm sido muito estudadas. Para o caso de (1) sem o termo de difusão, Laurent [35] fornece vários resultados de existência locais e globais para uma classe de núcleos com diferentes regularidades. Ao leitor interessado, indicamos [6, 7, 8, 37] e as referências nelas contidas para resultados sobre existência e blowup de soluções para o PVI das equações de agregação invíscidas.

Também indicamos ao leitor os trabalhos [10, 11, 20, 27, 28, 38, 39, 40, 45], para o caso de (1) e suas generalizações, consideradas em todo o espaço ou num domínio limitado. Vale ressaltar que (1) – (2) contém, como um caso particular, o sistema parabólico-elíptico de quimiotaxia, cuja forma simplificada é dada por

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (3)$$

$$0 = \Delta v - \alpha v + u, x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

em que α é uma constante positiva dada. De fato, tomando o núcleo $K = K(x)$ como solução fundamental do operador $-\Delta + \alpha Id$, podemos reescrever a equação (4) como $v = K * u$.

Então, substituindo esta última expressão em (3), obtemos (1). Indicamos ao leitor os trabalhos [13, 14, 31, 36, 44], e suas referências, para resultados matemáticos sobre sistemas que modelam quimiotaxia. Em particular, em [9] foi obtida existência global de soluções para o sistema parabólico-elíptico de quimiotaxia na estrutura de espaços de Morrey. Além disso, outros trabalhos apareceram na literatura considerando equações em diferentes tipos de espaços de funções singulares, por exemplo, [2, 29, 32, 33, 41, 42].

Vale ainda citar o trabalho [27], onde Karch estudou a existência de soluções locais e globais no tempo para (1) – (2), com dados iniciais em espaços de Lebesgue, para uma classe de núcleos $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fortemente singulares, isto é, $\nabla K \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ para algum $q' \in [1, n]$ e $\nabla K \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p > n$. Observa-se que qualquer função ∇K satisfazendo $|\nabla K| \sim |x|^{1-n}$ quando $|x| \rightarrow 0$ e rapidamente decrescente se $|x| \rightarrow \infty$ é fortemente singular quando $n \geq 2$. Portanto, assumindo que $\nabla K \in L^1(\mathbb{R}^n)$, estes tipos de funções são exemplos de núcleos, K , admissíveis para o nosso modelo.

Neste trabalho consideramos, inicialmente, o problema de Cauchy (1) – (2) e mostramos existência de solução global no tempo com dados iniciais em espaços de Morrey (ver Capítulo 3), o que torna nosso estudo mais geral do que aqueles existentes na literatura até o presente momento.

Ainda em conexão com esse tipo de problema, destacamos o trabalho [26], em que Karch desenvolveu a teoria geral para o estudo do problema de Cauchy para a equação parabólica

$$u_t = \Delta u + B(u, u), \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (6)$$

que engloba uma grande quantidade de modelos. Para este caso, ele mostrou a existência de solução global no tempo assumindo algumas propriedades do scaling da equação, como também da norma em espaços de Banach, onde as soluções são construídas. Contudo, a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ de (5) tem ordem de escala menor do que 2 (veja [26], página 535 para mais detalhes). Em nosso trabalho, obtemos um resultado de existência em que a forma bilinear não precisa ser homogênea, já que a única suposição feita para o operador K é que seu gradiente seja uma medida de Radon ou esteja em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, nossas condições iniciais pertencem a espaços maiores do que os considerados por Karch.

No Capítulo 4, melhoramos o resultado obtido no Capítulo 3, obtendo boa colocação global da solução de (1) – (2), tomando o dado inicial em espaços de Besov-Morrey $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}$. Estes espaços contêm funções fortemente singulares e, uma vez que temos as inclusões contínuas $\mathcal{M}_{p,\lambda} \subset \mathcal{N}_{p,\mu,\infty}^\sigma$, para $p > 1$, $\lambda = n - \frac{2p}{\rho-1}$, $\mu = n - \frac{2}{\rho-1}$, $\sigma = \frac{n-\mu}{p} - \frac{2}{\rho-1}$ e $\rho > 1 + \frac{2}{n}$, essa

nova classe de dados iniciais é maior do que a considerada no Capítulo 3. Vale ressaltar que os espaços de Besov-Morrey foram introduzidos inicialmente por Kozono e Yamazaki, em [32], para estudar as equações de Navier-Stokes por meio da abordagem de Kato envolvendo duas normas.

No Capítulo 5, o problema (1) – (2) foi estudado considerando o dado inicial em espaços de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}_{r,\lambda,\infty}^s$ e com $\nabla K \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Um espaço naturalmente relacionado a $\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s$ é o espaço de Fourier-Besov $\mathcal{FB}_{p,\infty}^s$, que foi introduzido por Konieczny-Yoneda [30] com o intuito de estudar o sistema de Carioles-Navier-Stokes em $\mathbb{R}^3$ com $s = 1 - \frac{3}{p}$ e $p > 3$. Inspirado por [30], Ferreira-Lima [1, 19, 41] introduziram o espaço $\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s$ com a finalidade de estudar o problema de valor inicial para uma família de equações dissipativas do tipo escalar ativo com campos de velocidades acoplados através de multiplicadores de Fourier. Para estabelecer existência e unicidade de solução global no tempo para (1) – (2), seguimos as ideias contidas em [41]. No entanto, apresentamos um exemplo (ver (5.2.1)) para justificar que nosso modelo não é um caso particular do modelo estudado em [41].

Nos Capítulos 3, 4 e 5, além dos resultados de boa-colocação, foram obtidos resultados de auto-similaridade e de estabilidade assintótica. Aspectos qualitativos, como simetria de soluções, também foram estudados.

Vale ressaltar que os Capítulos 1 e 2 constituem os alicerces deste trabalho. No Capítulo 1, foram fixadas notações, recordamos definições e resultados utilizados no decorrer dos capítulos subsequentes. No Capítulo 2, definimos as versões homogêneas dos espaços de Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov-Morrey, bem como as suas propriedades fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Além disso, usando (1.7) e (2.16), segue que

$$\begin{aligned}
\| |\cdot| (\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\cdot, r) \mathcal{F}(w) \|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi| \left| (\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\xi, r) (\mathcal{F}(w))(\xi) \right| d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\xi| |\varphi_k(\xi) (\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\xi, r) (\mathcal{F}(w))(\xi)| \right| d\xi \\
&\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k+1} \|\varphi_k(\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\cdot, r)\|_1 \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k 2^{k(s+1)} \|\varphi_k(\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\cdot, r)\|_{p,\lambda} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&= C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(s-1)} \|\varphi_k(\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\cdot, r)\|_{p,\lambda} 2^k 2^{2k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&\leq C \|u(\nabla K * u)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{3k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&\leq C (\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s})^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{3k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&\leq C (\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s})^2,
\end{aligned} \tag{5.28}$$

pois, por (5.20) podemos concluir que $\|u(\nabla K * u)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}} \leq C(\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s})^2$ e, por (5.24) temos $\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{3k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty < \infty$. Desse modo, substituindo (5.28) em (5.27), concluímos que

$$\begin{aligned}
|\langle B(u, u)(t), w \rangle| &\leq C \int_0^t (\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s})^2 dr \\
&\leq Ct \left(\sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \right)^2 \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

■

5.4.2 Demonstração do Teorema 5.1.2

Por hipótese, u e v são soluções *mild* de (1) – (2) com condições iniciais u_0 e v_0 , respectivamente. Então,

$$u(t) = G(t)u_0 + B(u, u)(t) \tag{5.30}$$

e

$$v(t) = G(t)v_0 + B(v, v)(t). \tag{5.31}$$

Subtraindo as equações (5.30) e (5.31), e em seguida tomando a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& + \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& \leq \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& + \left\| \int_0^t \nabla_x G(t-r)((u-v)(\nabla K * u))(\cdot, r) dr \right. \\
& + \left. \int_0^t \nabla_x G(t-r)(v(\nabla K * (u-v))) (\cdot, r) dr \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& \leq \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& + \left\| \int_0^{\delta t} \nabla_x G(t-r) \left((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)) \right) (\cdot, r) dr \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& + \left\| \int_{\delta t}^t \nabla_x G(t-r) \left((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)) \right) (\cdot, r) dr \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& := H_0(t) + H_1(t) + H_2(t), \tag{5.32}
\end{aligned}$$

em que δ é um número positivo a ser escolhido posteriormente. Com o raciocínio análogo à demonstração do Lema 5.3.3, concluímos que

$$\begin{aligned}
& H_1(t) \\
& \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \left\| \varphi_k \int_0^{\delta t} |i\xi| e^{-|\xi|^2(t-r)} \mathcal{F} \left((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)) \right) (\cdot, r) dr \right\|_{p,\lambda} \\
& \leq \frac{2^5}{3} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} 2^{k(s-1)} \left\| \varphi_k \mathcal{F} \left((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)) \right) (\cdot, r) \right\|_{p,\lambda} dr \\
& \leq \frac{2^5}{3} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} \left\| [(u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v))] (\cdot, r) \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}} dr. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Agora, procedendo como na obtenção de (5.20), temos

$$\begin{aligned}
& \left\| [(u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v))] (\cdot, r) \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}} \\
& \leq 3 \max\{M_1, M_2, M_3\} \left[\|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \right. \\
& + \left. \|v(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \right]. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Então, como $\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \|u\|_E \leq 2\varepsilon$ e $\|v(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \|v\|_E \leq 2\varepsilon$, vem que

$$\begin{aligned}
& H_1(t) \\
& \leq M \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} (\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} + \|v(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}) dr \\
& \leq 4\varepsilon M \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} dr. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $\frac{r}{t} = \tilde{r}$, e observado que

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2^{2(k-1)}t(1-\tilde{r})} 2^{2(k-1)} \leq \frac{C}{t(1-\tilde{r})}, \quad (5.36)$$

com C uma constante positiva, obtém-se

$$\begin{aligned} H_1(t) &\leq 4\varepsilon M \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\delta e^{-2^{2(k-1)}t(1-\tilde{r})} 2^{2(k-1)} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} t d\tilde{r} \\ &\leq 4\varepsilon C_1 \int_0^\delta (t(1-\tilde{r}))^{-1} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} t d\tilde{r}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde $C_1 = MC$.

Estimando $H_2(t)$ da mesma forma, temos

$$\begin{aligned} H_2(t) &\leq M \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\delta t}^t e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} (\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} + \|v(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}) dr \\ &\leq 4\varepsilon M \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\delta t}^t e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} dr \right) \left(\sup_{\delta t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \right) \\ &\leq 4\varepsilon M \sup_{\delta t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Desse modo, tomando

$$A = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s},$$

de (5.37) e do Teorema da convergência dominada, tem-se

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} H_1(t) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon C_1 \int_0^\delta (1-\tilde{r})^{-1} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} 4\varepsilon C_1 \int_0^\delta (1-\tilde{r})^{-1} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} 4\varepsilon C_1 \int_0^\delta (1-\tilde{r})^{-1} \sup_{t \geq k} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &\leq 4\varepsilon C_1 \int_0^\delta (1-\tilde{r})^{-1} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &= 4\varepsilon C_1 \ln \left(\frac{1}{1-\delta} \right) A. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Mais ainda, de (5.38), obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} H_2(t) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon M \sup_{\delta t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} 4\varepsilon M \sup_{\delta t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &\leq 4\varepsilon M \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\delta k < r < \infty} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &= 4\varepsilon MA. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Por fim, aplicando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (5.32), usando (5.39), (5.40) e a hipótese que $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_0(t) = 0$, concluímos que

$$\begin{aligned} A &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} H_0(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} H_1(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} H_2(t) \\ &\leq \left(4\varepsilon C_1 \ln \left(\frac{1}{1-\delta} \right) + 4\varepsilon M \right) A. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Visto que, por hipótese, que $4\varepsilon M < 1$, podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que $4\varepsilon C_1 \ln \left(\frac{1}{1-\delta} \right) + 4\varepsilon M < 1$. Assim, como $A \geq 0$, então $A = 0$, isto é, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} = 0$.

Para provar a recíproca deste resultado, subtrai-se as equações (5.30) e (5.31) e utiliza-se um raciocínio similar ao anterior. Desse modo, segue que

$$\begin{aligned} &\|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &+ \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &\leq \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &+ \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} \nabla_x G(t-r)((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)))(\cdot, r) dr \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &+ \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t \nabla_x G(t-r)((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)))(\cdot, r) dr \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &\leq \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} + 4\varepsilon C_1 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-\tilde{r})^{-1} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &+ 4\varepsilon M \sup_{\frac{1}{2}t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Então, tomando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (5.42) e usando (5.4), obtemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &+ \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon C_1 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-\tilde{r})^{-1} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &+ \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon M \sup_{\frac{1}{2}t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &\leq (1 + 4\varepsilon C_1 \ln(2) + 4\varepsilon M) \limsup_{t \rightarrow \infty} \|(u-v)(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

de onde conclui-se a demonstração da estabilidade assintótica. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, M. F.; FERREIRA, L. C. F.; LIMA, L. S. M. *Uniform global well-posedness of the Navier-Stokes-Coriolis system in a new critical space*. Mathematische Zeitschrift, 287 (2017) 735–750.
- [2] ALMEIDA, M. F.; PRECIOSO, J. C. *Existence and symmetries of solutions in Besov Morrey spaces for a semi linear heat-wave type equation*. J. Math. Anal. Appl., 432 (1) (2015) 338–355.
- [3] BAHOURI, H.; CHEMIN, J.; DANCHIN, R. *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*. Springer, 2011.
- [4] BEDROSSIAN, J.; MASMOUDI, N.; NADER, N. *Existence, uniqueness and Lipschitz dependence for Patlak-Keller-Segel and Navier-Stokes in R^2 with measure-valued initial data*. Arch. Ration. Mech. Anal., 214, No. 3, (2014) 717–801.
- [5] BERGH, J.; LÖFSTRÖM, J. *Interpolations spaces: an introduction.*, Springer-Verlag, 1976.
- [6] BERTOZZI, A. L.; BRANDMAN, J. *Finite-time blow-up of L^∞ - weak solutions of an aggregation equation*. Commun. Math. Sci., 8 (2010) 45–65.
- [7] BERTOZZI, A. L.; CARRILLO, J. A.; LAURENT, T. *Blowup in multidimensional aggregation equations with mildly singular interactions kernels*. Nonlinearity, 22 (2009) 683–710.
- [8] BERTOZZI, A. L.; LAURENT, T. *Finite-time blow-up of solutions of an aggregation equation in $\mathbb{R}^n$* . Commun. Math. Phys., 274 (2007) 717–735.
- [9] BILER, P. *The Cauchy problem and self-similar solutions for a nonlinear parabolic equation*. Stud. Math., 114 (1995) 181–205.

- [10] BILER, P.; KARCH, G. *Blowup of solutions to generalized Keller-Segel model*. J. Evol. Equ., (2010) 247–262.
- [11] BILER, P.; KARCH, G.; LAURENÇOT, P. *Blowup of solutions to a diffusive aggregation model*. Nonlinearity, 22 (2009) 1559–1568.
- [12] BILER, P.; KARCH, G.; ZIENKIEWICZ, J. *Optimal criteria for blowup of radial and N -symmetric solutions of chemotaxis systems*. Nonlinearity, 28 (2015) 4369–4387.
- [13] BLANCHET, A.; DOLBEAULT, J.; ESCOBEDO, M.; FERNÁNDEZ, J. *Asymptotic behaviour for small mass in the two-dimensional parabolic-elliptic Keller-Segel model*. J. Math. Anal. Appl., 361 (2010) 533–542.
- [14] BLANCHET, A.; DOLBEAULT, J.; PERTHAME, B. *Two dimensional Keller-Segel model: Optimal critical mass and qualitative properties of the solutions*. Electron. J. Diff. Eqns., 44 (2006) 1–33.
- [15] BONY, J. M. *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*. Ann. de l'Ecole Norm. Sup., 14 (2) (1981), 209–2461.
- [16] CELININSKI, R. *Stability of solutions to aggregation equation in bounded domains*. Appl. Math. Comput., 228 (2014) 49–58.
- [17] ESTRADA, R.; KANWAL, R. P. *A distributional approach to asymptotics: Theory and applications*. Hardcover, 2nd ed. 2002, ISBN 0-1876-4142-4.
- [18] FERREIRA, L. C. F. *A family of dissipative active scalar equations with singular velocity and measure initial data.*, Comput. Math. Appl., 64 No. 10, (2012) 3292–3301.
- [19] FERREIRA, L. C. F.; LIMA, L. S. M. *Self-similar solutions for active scalar equations in Fourier-Besov-Morrey spaces*. Monatsh. Math. 175 (4) (2014), 491–509.
- [20] FERREIRA, L. C. F.; PRECIOSO, J. C. *Existence and asymptotic behaviour for the parabolic-parabolic Keller-Segel system with singular data*. Nonlinearity, 24 (2011) 1433–1449.
- [21] FERREIRA, L. C. F.; VILLAMIZAR-ROA, E. J. *Self-similar solutions, uniqueness and long-time asymptotic behavior for semilinear heat equations*. Differential Integral Equations, 19 (2006) 1349–1370.

- [22] FOLLAND, G. B. *Real analysis: Modern techniques and their applications*. John Wiley Sons, 1999.
- [23] GIGA, Y.; MIYAKAWA, T. *Navier-Stokes flow in R^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces*. Comm. Partial Differential Equations 14 (5) (1989) 577–618.
- [24] HIEBER, M.; SAWADA, O. *The Navier-Stokes equations in R^n with linearly growing initial data.*, Arch. Ration. Mech. Anal., 175 (2) (2005) 269–285.
- [25] IWABUCHI, T. *Global well-posedness for Keller-Segel system in Besov type spaces*. J. Math. Anal. Appl., 379 (2011) 930–948.
- [26] KARCH, G. *Scaling in nonlinear parabolic equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 234 (1999) 534–558.
- [27] KARCH, G.; SUZUKI, K. *Blow-up versus global existence of solutions to aggregation equation*. Applicationes Mathematicae, 38 (3) (2011) 243–258.
- [28] KARCH, G.; SUZUKI, K. *Spikes and diffusion waves in one-dimensional model of chemotaxis*. Nonlinearity, 23 (2010) 3119–3137.
- [29] KATO, T. *Strong solutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces*. Bol. Sol. Mat., 22 (2) (1992) 127–155.
- [30] KONIECZNY, P.; YONEDA, T. *On dispersive effect of the coriolis force for the stationary Navier-Stokes equations*. J. Differential Equations, 250 (10) (2011) 3859–3873.
- [31] KOZONO, H.; SUGIYAMA, Y. *Local existence and finite time blow-up of solutions in the 2-D Keller- Segel system*. J. Evol. Equ., 8 (2008) 353–378.
- [32] KOZONO, H.; YAMAZAKI, M. *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*. Comm. Partial Differential Equations, 19 (5-6) (1994) 959–1014.
- [33] KOZONO, H.; YAMAZAKI, M. *The stability of small stationary solutions in Morrey spaces of the Navier-Stokes equation*. Indiana Univ. Math. J., 44 (4)(1995)1307–1336.
- [34] LAMARIE, P. G. *Recent developments in the Navier-Stokes equations*. Chapman and Hall, Research Notes in Maths, 2002.

- [35] LAURENT, T. *Local and Global existence for an aggregation*. Comm. in PDE, 32 (2007) 1941–1964.
- [36] LEMARIÉ-RIEUSSET, P. G. *Small data in an optimal Banach space for the parabolic-parabolic and parabolic-elliptic Keller-Segel equations in the whole space*. Adv. Diff. Eq. 18 (2013) 1189–1208.
- [37] LI, D.; RODRIGO, J. *Finite-time singularities of an aggregation equation in $\mathbb{R}^n$ with fractional dissipation*. Comm. Math. Phys., 287 (2) (2009) 687–703.
- [38] LI, D.; RODRIGO, J. *Refined blowup criteria and nonsymmetric blowup of an aggregation equation*. Advances in Mathematics, 220 (2009) 1717–1738.
- [39] LI, D.; RODRIGO, J. *Wellposedness and regularity of solutions of an aggregation equation*. Revista Matemática Iberoamericana, 26 (1) (2010) 261–294.
- [40] LI, D.; ZHANG, X. *On a nonlocal aggregation model with nonlinear diffusion*. Discrete Contin. Dyn. Syst., 27 (2010), 301–323.
- [41] LIMA, L. S. M. *Sobre uma família de EDP's do tipo escalar ativo em espaços críticos de Lebesgue e Fourier-Besov-Morrey*. PhD thesis. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2014.
- [42] MAZZUCATO, A. L. *Besov-Morrey spaces: Function space theory and applications to non-linear PDE*. Trans. Amer. Math. Soc., 355 (4) (2003), 1297–1364.
- [43] MIYAKAWA, T. *On Morrey spaces of measures: Basic properties and potential estimates*. Hiroshima Math. J., 20 No. 40 (1990) 213–222.
- [44] NAGAY, T. *Behavior of solutions to a parabolic-elliptic system modelling chemotaxis*. J. Korean Math. Soc., 37 (2000) 721–732.
- [45] TOPAZ, C. M.; BERTOZZI, A. L.; LEWIS M. A. *A nonlocal continuum model for biological aggregation*. Bull. Math. Biol., 68 (2006) 1601–1623.
- [46] TRIEBEL, H. *Theory of function spaces*. Monographs in Mathematics, 78. Birkhäuser, Basel, 1983, 3.2.