UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

FELIPE DE LIMA G. DIAS

FUNÇÕES, FUNCIONAIS E OPERADORES NA FÍSICA MATEMÁTICA, COM ÍNDICES MATRICIAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2015

Dedicatória

A Deus e toda minha família

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado o dom da vida e a oportunidade de estudar.

A meus pais, por me ajudar e cuidar de mim em todos os momentos da minha vida e sempre trabalhar duro para que eu me desenvolvesse.

A minha irmã, por partilharmos lindas memórias juntos.

Ao Prof. Roberto E. Lagos Monaco, por sua orientação e preciosos conhecimentos passados a mim.

Aos membros da banca examinadora, os Profs Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos e Luiz Antonio Barreiro por suas essenciais sugestões, e ao Prof. Edson Denis Leonel por sua consideração.

Aos meus amigos Murillo S. Nascimento, Marco S. de Almeida, Caio Ribeiro,Thiago R. Tavares, Caio César do Vale, Gabriel Matos, André Luiz Camargo, Filipe Stefanini, Paulo H. Yamazaki, Vinícius M. Válio e a todas as repúblicas onde fiz amigos pelos ótimos momentos vividos neste período universitário.

Ao Departamento de física, por toda estrutura oferecida ao longo do curso.

Epígrafe

“A persistência é o caminho do êxito”

- Charles Chaplin

Resumo.

Com o avanço dos métodos matemáticos e científicos, através dos séculos, principalmente no que concerne ao cálculo diferencial, surgiu a notação de derivadas com índices fracionários, estudadas por Leibniz e posteriormente por outros destacados cientistas. O chamado cálculo fracionário é utilizado na atualidade para estudar fenômenos de difusão entre outros. Nós estendemos esses índices, para índices matriciais e desenvolvemos um formalismo capaz de operar essas derivadas, assim como outros operadores, funções e funcionais da física matemática, originalmente bem definidos para índices naturais. Neste trabalho apenas consideramos matrizes hermitianas e anti-hermitianas 2x2. Essas matrizes estão associadas, as conhecidas matrizes de Pauli e também aos quaternions de Hamilton. Aplicações as funções de física matematica são desenvolvidas.

Palavras chaves: Índices matriciais, funções, funcionais e operadores

Abstract.

With the advance of mathematical methods throughout the centuries, in particular with respect to the differential calculus, the notion of fractional derivative emerged with Leibniz and later developed by several well known scientists. Today that formalism is well used in the study of diffusion phenomena among other areas. We extend the fractional indices to matricial indices and develop a formalism to handle this generalized derivative, as well as other operators, functions and functionals in mathematical physics, originally defined for natural indices. Here we only consider 2x2 hermitian and anti-hermitian matrices. These matrices are associated to the well known Pauli matrices and Hamilton's quaternions. Applications with mathematical physics functions are presented.

Keywords: matrix indices, functions, functionals and operators

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

As funções especias da física matemática sempre foi tema de grande interesse para os matemáticos e físicos, por exemplo com a formulação da equação da corda vibrante, onde aparecem as funções e polinômios ortogonais tema de interesse deste projeto de TCC. Devido a grande importância dessas funções e polinômios nas mais diversas áreas da física, tais como: mecânica quântica, eletromagnetismo, condução de calor e gravitação é dedicado a elas uma atenção muito especial. Mencionamos entre outros: os polinômios de Legendre, que aparecem nos problemas de mecânica quântica (solução do átomo de hidrogênio), eletromagnetismo (equação de Laplace e Poisson com simetria esférica) e gravitação (potencial para problemas de simetria esférica), os polinômios de Hermite que são soluções da equação para o oscilador harmônico quântico, as funções de Bessel no eletromagnetismo (equação de Laplace e Poisson com simetria cilíndrica, Os polinômios de Laguerre (solução radial da equação de Schroedinger para o átomo de hidrogênio). E nesse projeto de TCC especificamente faremos uma análise com índices matriciais, sendo esses índices matrizes hermitianas ou anti-hermitianas do tipo 2x2, o que até agora não foi encontrado em nenhuma literatura especializada no assunto, fazendo com que o assunto seja algo novo no campo da física matemática, uma vez que até então só é conhecida a forma desses polinômios e funções com índices naturais incluindo o zero. A idéia de se usar índices diferentes do números naturais, surgiu com o cálculo fracionário com Gottfried Von Leibniz e l'Hôpital, os que propuseram a idéia de derivadas fracionárias, generalizando as conhecidas[1,2] derivadas ordinárias. O cálculo fracionário foi inicialmente aplicado a fenômenos de difusão, movimento browniano e outros fenômenos modelados pelas equações de Fokker-Planck e Langevin [2], a idéia do cálculo fracionário é tão antiga quanto o cálculo convencional remontando ao ano de 1695, mas somente depois de 3 séculos percebeu-se a sua aplicação na física como acima mencionado.

História: Trataremos agora do contexto histórico matemático do cálculo fracionário,base para a realização deste projeto de TCC [1, 2], tudo se inicia quando L'Hôpital escreve a Leibniz no ano de 1695 perguntando ao cientista sobre a seguinte notação $\frac{d^n}{dx^n}$, e Leibniz sendo indagado a respeito da possibilidade deste índice n ter um valor fracionário responde: "Aparentemente um paradoxo do qual um dia muitas coisas trarão". Muitas mentes brilhantes trataram do cálculo fracionário, entre elas: Euler, Fourier, Laplace entre outros, cada um criando sua própria metodologia e notação. As mais famosas notações que tem sido empregadas são a de Riemann-Liouville e de Caputo, embora existam outras, que são apenas variações dessas 2 notações.

A maioria das teorias matemáticas para o cálculo fracionário foi desenvolvida no século XX. Para o entendimento do cálculo fracionário deve-se entender o uso das funções beta, gama e transformada de Laplace.

Objetivos: Exibir as equações com o formalismo matemático apropriado, e assim mostrar o formalismo em ação quando tratando aos polinômios, funções e afins com índices matriciais.

O objetivo é mostrar que polinômios, funções e afins com índices n, podem ser definidos, com esses índices matriciais, considerando apenas neste trabalho as matrizes hermitianas e anti-hermitianas de 2x2.

2 FORMALISMO PARA MATRIZES HERMITIANAS 2X2

Muitas funções, funcionais e operadores, bem definidos para argumentos ou índices inteiros e em alguns casos reais ou complexos y: Por exemplo uma função F(y), sendo y uma variável continua,como por exemplo as funções gama e delta de Dirac;

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{y-1} dt \;\; Função\ gama \qquad (1)$$

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(ixy)}\, dx \;\; Função\ Delta\ de\ Dirac \qquad (2)$$

Operadores diferenciais e integrais como definidos nas equações (25,26) do Apêndice; ou y=n um índice discreto por exemplo, a representação integral dos polinômios de Legendre [3], como referência para as diversas funções especiais da física matemática, citadas.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz \qquad Representação\ integral\ de\ Legendre \qquad (3)$$

Também como exemplo, temos a representação de Cauchy para a derivada, de funções analíticas

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{dw f(w)}{(w-z)^{n+1}} \; Representação\ da\ derivada \qquad (4)$$

Queremos estender a variável y e o índice n de real, complexo ou natural para matrizes .Reparamos que nessas expressões,a variável y e o índice n aparecem como potências de expressões dadas, na forma $(G(z))^y$ ou $(G(z))^n$. Uma potência pode ser sempre colocada na forma exponencial $a^y = e^{yln a}$.

Apresentamos um exemplo simples (2x2) : calcular e^{σ_z}, onde σ_z, é uma das matrizes de Pauli, dada por:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Podemos expandir a exponencial em uma série de Taylor:

$$e^{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^2}{2} + \cdots$$

Resultando em

$$e^{\sigma_z} = \begin{pmatrix}e & 0\\ 0 & 1/e\end{pmatrix} \qquad (6)$$

Nosso objetivo é desenvolver um formalismo operacional para encontrar expressões bem definidas e assim generalizar os exemplos apresentados anteriormente para índices ou variáveis matricias.

Ou seja, queremos definir $\Gamma(A), \delta(A), P_A(z)$ e $\frac{d^A f(z)}{dz^A}$, entre outras funções, funcionais e operadores sendo A uma matriz. Do simples exemplo com a matriz de Pauli, inferimos que a generalização para uma função passa por uma expansão de Taylor (ou Laurent), mas seria muito contraprodutivo fazer essa expansões caso a caso, ou seja, um formalismo operacional é necessário.

Para matrizes gerais [4-9] a generalização é bem definida sendo que para uma matriz arbitrária B ; com auto-valores associados {b}, e a matriz associada S (autovetores), a representação de Jordan (quase diagonal) existe, e é dada por [6]:

$$J = S^{-1}BS, \quad (7)$$

ou equivalentemente

$$B = SJS^{-1} \qquad \text{e} \qquad B^n = SJ^nS^{-1}$$

Para uma dada função F(z), z escalar, que seja expansível (Taylor ou Laurent) a função pode ser generalizada para z=B:

$$F(B) = SF(J)S^{-1} = \sum_{\mathrm{i,k}} \mathrm{M(i,k)} \left(\frac{\mathrm{d^k}}{\mathrm{dz^k}}\mathrm{F(z)}\right)_{\mathrm{z=b_i}} \qquad (8)$$

Onde M são coeficientes matriciais, e a função e suas derivadas são avaliadas nos auto-valores (escalares)

Porém o método que garante uma solução bem definida, não é operacional, no senso que achar os coeficientes matriciais, os auto-valores e auto-vetores, é um cálculo que deve ser feito, caso a caso.

Nossa proposta é gerar um método operacional de fácil aplicação e para isso consideramos no momento matrizes de 2x2 hermitianas (expansíveis na base das matrizes de Pauli e a matriz unidade), e similarmente as 2x2 anti-hermitianas, relacionadas com os quaternions de Hamilton. Ambos conjuntos de matrizes formam um corpo não comutativo, ou seja a álgebra associadas a elas, permite manipular multiplicações e inversos com grande facilidade.

Adiantamos-nos ao nossos resultados e apresentamos, por razões ilustrativas como são as funções acima mencionadas, quando aplicadas a índices ou variáveis matriciais.

Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} n & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

Sendo n e m, 2 ambos inteiros ou semi-inteiros positivos, com n>m

Nossos resultados, fornecerão a expressão

$$F(A) = \frac{F(n+m)}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{F(n-m)}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ou

$$F(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} F(n+m) + F(n-m) & F(n+m) - F(n-m) \\ F(n+m) - F(n-m) & F(n+m) + F(n-m) \end{pmatrix}$$

Então para o polinômio de Legendre com índice matricial A, temos

$$P_A(z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P_{n+m}(z) + P_{n-m}(z) & P_{n+m}(z) - P_{n-m}(z) \\ P_{n+m}(z) - P_{n-m}(z) & P_{n+m}(z) + P_{n-m}(z) \end{pmatrix},$$

sendo os polinômios de Legendre com índices n+m e n-m naturais, bem definidos

Para a derivada de Cauchy de ordem matricial A, temos

$$\frac{d^A f(z)}{dz^A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{d^{n+m} f(z)}{dz^{n+m}} + \frac{d^{n-m} f(z)}{dz^{n-m}} & \frac{d^{n+m} f(z)}{dz^{n+m}} - \frac{d^{n-m} f(z)}{dz^{n-m}} \\ \frac{d^{n+m} f(z)}{dz^{n+m}} - \frac{d^{n-m} f(z)}{dz^{n-m}} & \frac{d^{n+m} f(z)}{dz^{n+m}} + \frac{d^{n-m} f(z)}{dz^{n-m}} \end{pmatrix}$$

Novamente as derivadas no lado direito da expressão estão bem definidas para os índices naturais n+m e n-m

Para a função Delta de Dirac, consideramos a matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, sendo x e y reais, temos

$$\delta(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \delta(x+y)+\delta(x-y) & \delta(x+y)-\delta(x-y) \\ \delta(x+y)-\delta(x-y) & \delta(x+y)+\delta(x-y) \end{pmatrix}$$

Similarmente para a função gama

$$\Gamma(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Gamma(x+y)+\Gamma(x-y) & \Gamma(x+y)-\Gamma(x-y) \\ \Gamma(x+y)-\Gamma(x-y) & \Gamma(x+y)+\Gamma(x-y) \end{pmatrix},$$

em ambas as funções delta e gama, as variáveis x e y podem ser estendidas ao plano complexo nas regiões onde as funções sejam bem definidas nas variáveis x+y e x-y

Matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli [4,5], é a representação do operador quântico de spin para uma partícula de spin $\left(\frac{1}{2}\right)$, e compõem um grupo de grande utilidade dentro da física matemática que é o conhecido SU(2) (grupo especial unitário de matrizes 2x2).

Essas matrizes estão definidas no que é conhecido como espaço de Hilbert, e essas matrizes formam a base, do espaço de observáveis. A base é descrita na seguinte forma:

$$(\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \qquad (9)$$

Sendo $\mathbb{I}$ é a matriz identidade e os σ, as matrizes de Pauli abaixo definidas.

Também essas matrizes estão relacionadas aos quatérnions de Hamilton, e através de uma simples rotação da base anteriormente apresentada temos a base quaterniônica

$$(\mathbb{I}, -i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3\ ) \qquad (10)$$

Estudo das matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli são definidas na representação vetorial, por

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \hat{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{z} \qquad (11)$$

sendo

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

a matriz de Pauli na direção x,

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

a matriz de Pauli na direção y,

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

a matriz de Pauli na direção .

Algumas propriedades especiais dessas matrizes:

A) O comutador delas satisfaz

$$\left[\sigma_i, \sigma_j\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \qquad (15)$$

Onde ε_{ijk} representa o símbolo de Levi-Civita e tem as seguintes propriedades [3]:

$$\varepsilon_{ijk} = +1 \quad se\ (i,j,k)\ \text{é}\ (1{,}2{,}3),(2{,}3{,}1)\ ou\ (3{,}1{,}2)$$

$$-1 \ \ se\ (i,j,k)\ \text{é}\ (3{,}2{,}1),(1{,}3{,}2)\ ou\ (2{,}1{,}3) \qquad (16)$$

$$0\ se\ i = j\ ou\ j = k\ ou\ k = i$$

B)

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad (17)$$

$$\det(\sigma_i) = -1 \qquad (18)$$

$$Tr(\sigma_i) = 0 \quad (19)$$

C)

$$(\vec{a}.\vec{\sigma}).\left(\vec{b}.\vec{\sigma}\right) = \vec{a}.\vec{b} + i\vec{\sigma}.\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \quad (20)$$

$$e^{(i\theta\hat{n}.\vec{\sigma})} = cos\theta + i\hat{n}\vec{\sigma}sin\theta \qquad (21)$$

Toda matriz hermitiana [5,6] pode ser expandida em termos das matrizes de Pauli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_0 + a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z \qquad (22)$$

onde os coeficientes da matriz, correspondem ao escalar a_0 e o vetor $\vec{a}$, através da identidade

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 + a_2 i \\ a_1 - a_2 i & a_0 - a_3 \end{pmatrix} = a_0 + \vec{a}.\vec{\sigma} \qquad (23)$$

Definimos também o módulo, é o versor associados a parte vetorial de A, e os auto-valores de A, respectivamente dados por

$$a = |\vec{a}|, \quad \hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}, \quad a_\pm = a_0 \pm a \qquad (24)$$

Consideremos variável escalar z, elevado a potência matricial A.

$$z^A = e^{A\ln z} = e^{(a_0+\hat{a}\vec{\sigma})\ln z} \qquad (25)$$

Colocando $\vec{a}.\vec{\sigma} = i\hat{a}\vec{\sigma}(-ia)$, e definindo $\theta = -ia$, e com $\hat{n} = \hat{a}$, temos, considerando a fórmula de Euler - De Moivre, ver equação (19)

$$e^{i\theta\hat{n}\vec{\sigma}} = \cos(\theta) + i\hat{n}\vec{\sigma}\sin(\theta), \qquad (26)$$

ou na sua forma exponencial

$$e^{i\theta\hat{n}\vec{\sigma}} = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) + i\hat{n}\vec{\sigma}\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right), \qquad (27)$$

obtemos finalmente

$$z^A = \frac{z^{a_+} + z^{a_-}}{2} + \hat{a}\vec{\sigma}\frac{z^{a_+} - z^{a_-}}{2}, \qquad (28)$$

sendo o lado direito, bem definido para índices escalares.

Definimos as funções $\mathbb{C}_A(z)$ e $\mathbb{S}_A(z)$

$$\mathbb{C}_A(z) = \frac{z^{a_+} + z^{a_-}}{2} \qquad\qquad \mathbb{S}_A(z) = \frac{z^{a_+} - z^{a_-}}{2},$$

Estas funções $\mathbb{C}$ e $\mathbb{S}$, satisfazem as seguintes relações:

$$\mathbb{C}_A(z_1 z_2) = \mathbb{C}_A(z_1)\mathbb{C}_A(z_2) + \mathbb{S}_A(z_1)\mathbb{S}_A(z_2) \quad (29)$$

$$\mathbb{S}_A(z_1 z_2) = \mathbb{S}_A(z_1)\mathbb{C}_A(z_2) + \mathbb{C}_A(z_1)\mathbb{S}_A(z_2) \quad (30)$$

lembrando as funções hiperbólicas, que nos permitem uma representação generalizada de De Moivre (hiperbólica)

$$z^A = \mathbb{C}_A(z) + \hat{a}\vec{\sigma}\mathbb{S}_A(z) \qquad (31)$$

Outra forma equivalente é

$$z^A = z^{a_+}P_+(\hat{a}) + z^{a_-}P_-(\hat{a}), \quad (32)$$

sendo os operadores de projeção P_+ e P_-, os coeficientes matriciais na representação de Jordan (eq. 8, sendo os auto-valores de multiplicidade simples, ou seja não aparecem as derivadas da função na expansão de Jordan)

Esses operadores de projeção são dados por

$$P_\pm(\hat{a}) = \frac{1 \pm \hat{a}.\vec{\sigma}}{2},$$

que satisfazem as relações $P_\pm^2(\hat{a}) = P_\pm(\hat{a})$ e $P_+(\hat{a})P_-(\hat{a}) = P_-(\hat{a})P_+(\hat{a}) = 0$, (utilizando as propriedades das matrizes de Pauli).

Alguns exemplos já foram apresentados na introdução, ilustrando este método.

Para uma função F(z) que é expansível em Laurent, temos então a óbvia generalização

$$F(A) = \frac{F(a_+) + F(a_-)}{2} + \hat{a}\vec{\sigma}\frac{F(a_+) - F(a_-)}{2}$$

$$F(A) = \mathbb{C}_A(F) + \hat{a}.\vec{\sigma}\mathbb{S}_A(F)$$

Suponhamos uma função ou funcional composta F(z)=G(z)H(z), então generalizando para z=A matricial, então a operação está bem definida, se cumprir a seguinte identidade.

$$F(A) = \mathbb{C}_A(GH) + \hat{a}.\vec{\sigma}\mathbb{S}_A(GH) = G(A)H(A) \quad (33)$$

$$G(A)H(A) = (\mathbb{C}_A(G) + \hat{a}.\vec{\sigma}\mathbb{S}_A(G))(\mathbb{C}_A(H) + \hat{a}.\vec{\sigma}\mathbb{S}_A(H))$$

Expandindo a última equação e utilizando a identidade (equação (20)), temos, comparando termo a termo com a equação (33)

$$G(A)H(A) = \alpha + \hat{a}.\vec{\sigma}\beta$$

$$\alpha = \mathbb{C}_A(G)\mathbb{C}_A(H) + \mathbb{S}_A(G)\mathbb{S}_A(H) = \mathbb{C}_A(GH)$$

$$\beta = \mathbb{C}_A(G)\mathbb{S}_A(H) + \mathbb{S}_A(G)\mathbb{C}_A(H) = \mathbb{S}_A(GH)$$

que correspondem exatamente as identidades generalizadas de De Moivre (equações (29) e (30))

Para funções ou funcionais com variáveis escalares do tipo $F(z_1, z_2) = G(z_1)H(z_2)$, a generalização para variáveis matriciais $F(A, B) = G(A)H(B)$, é imediata provido que as matrizes A e B sejam "paralelas" $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Este resultado é uma aplicação direta das identidades de De Moivre (equações (20) e (30)), com a restrição $b_{\pm} = b_0 \pm |\lambda|a$,

e da identidade (equação (20)), que para vetores "paralelos", é $(\vec{a}.\vec{\sigma}).(\vec{b}.\vec{\sigma}) = \vec{a}.\vec{b}$, gerando assim uma álgebra comutativa no sub-conjunto de matrizes "paralelas".

Para as matrizes anti-hermitianas são válidas as mesmas relações apresentadas acima, com as seguintes modificações.

$$A = a_0 + i\vec{a}\vec{\sigma}$$

$$a_{\pm} = a_0 \pm ia$$

3 APLICAÇÕES DO FORMALISMO À FÍSICA MATEMÁTICA

Expressões particulares para o caso hermitiano

$$a_2 = 0 \ \rightarrow cos\theta = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}}, sin\theta = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}}$$

$$P_{\pm}(\theta) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \pm cos\theta & \pm sin\theta \\ \pm sin\theta & 1 \mp cos\theta \end{pmatrix}$$

$$P_{+}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma \qquad P_{-}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ (34)$$

$$P_{+}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \Pi \qquad P_{-}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos $F_n(z)$ uma função especial de variável complexa z e com n natural (Laguerre, Hermite, Legendre, Bessel, Tchebychev, etc...).

As seguintes relações são válidas, a partir das definições (equações (34))

$$D_{\Sigma}F_n(z) = \begin{pmatrix} D_z F_n(z) & 0 \\ 0 & F_n(z) \end{pmatrix} \qquad D_z F_n(z) = \frac{dF_n(z)}{dz} \quad (35)$$

Com a nova definição

$$\Omega_n = n + \hat{z}\vec{\sigma}, \quad (36)$$

temos

$$F_{\Omega_n}(z) = \begin{pmatrix} F_{n+1}(z) & 0 \\ 0 & F_{n-1}(z) \end{pmatrix} \quad (37)$$

Agora consideremos as relações triangulares recurssivas (ver Apêndice)

$$\frac{dF_n(z)}{dz} = R_{11}(z,n)F_{n+1}(z) + R_{12}(z,n)F_{n-1}$$

$$F_n(z) = R_{21}(z,n)F_{n+1}(z) + R_{22}(z,n)F_{n-1}$$

e definindo

$$R(z,n) = \begin{pmatrix} R_{11}(z,n) & R_{12}(z,n) \\ R_{21}(z,n) & R_{22}(z,n) \end{pmatrix}$$

As relações de recurssão, então podem ser compactadas na forma

$$D_\Sigma F_n(z) = \mathrm{R(z,n)F_{\Omega_n}(z)}$$

Outra interessante aplicação para o formalismo desenvolvido neste trabalho refere-se à equação de Volterra [3]

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

Que pode ser reescrita usando a notação matricial, da seguinte forma.

$$\varphi(x) = (f(x),1)D_t^\beta \begin{pmatrix} t \\ K(x,t)\varphi(t) \end{pmatrix}$$

Sendo $\beta = \sigma_z$

4 CONCLUSÕES

Com o método desenvolvido foi possível generalizar algumas funções, funcionais e operadores da física matemática. Usualmente esses objetos matemáticos dependem de variáveis complexas e de índices naturais. Nossa generalização através de um método operacional para matrizes de 2x2, permite definir esses objetos matemáticos para variáveis e ou índices. Ilustramos nosso método com exemplos da física matemática. Apresentamos duas aplicações: Na primeira compactamos as relações recursivas da maioria (de um índice), das funções especiais da física matemática, e a segunda é também uma compactação desta vez para a equação integral de Volterra.

Trabalhos futuros considerarão variáveis de integração matriciais, outras dimensões matriciais e mais aplicações na física matemática.

APÊNDICE

Fórmulas para funções especiais

1-Função gama:

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty e^{-r} r^t dr = t! \qquad (1)$$

2-Função delta de Dirac:

$$\delta(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(ixA)} dx \qquad (2)$$

3-Polinômios de Legendre:

Representação de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3)$$

Representação de **Schläfli**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \oint \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz \qquad (4)$$

Relações de recorrência:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \qquad (5)$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) - (2n+1)P_n(x) = 0$$

4-Polinômios de Hermite:

Representação de Rodrigues:

$$H_n(x) = (-1^n) e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \quad (6)$$

Representação de **Schläfli**:

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\oint t^{-n-1}e^{-t^2+2tx}dt \quad (7)$$

Relações de recorrência:

$$H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (8)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

5-Polinômios de Laguerre:

Representação de Rodrigues:

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \quad (9)$$

Representação de Schlafli:

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{\frac{-xz}{(1-z)}}}{(1-z)z^{n+1}}dz \quad (10)$$

Relações de recorrência:

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) = 0 \quad (11)$$

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

6-Polinômios de Chebyshev I:

Representação de Rodrigues:

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2^n\left(n-\frac{1}{2}\right)!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Representação de Schlafli:

$$T_n(x) = \frac{n!\,(-1)^n}{i2\pi^{\frac{1}{2}}\left(n-\frac{1}{2}\right)!}\oint \frac{(1-t^2)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt \qquad (13)$$

Relações de recorrência:

$$T_{n+1}(x) + 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \qquad (14)$$

$$(1-x^2)T_n'(x) = nT_{n+1}(x) + 2nT_{n-1}(x)$$

7-Polinômios de Chebyshev II

Representação de Rodrigues:

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n(n+1)(\pi)^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)!\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} \qquad (15)$$

Representação de Schlafli:

$$U_n(x) = \frac{n!\,(-1)^n(n+1)}{i2\pi^{\frac{1}{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right)!\,2^{n+1}}\oint \frac{(1-t^2)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt \qquad (16)$$

Relações de recorrência:

$$U_{n+1}(x) + 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0 \qquad (17)$$

$$(1-x^2)U_n'(x) = nU_{n+1}(x) + (2n+1)U_{n-1}(x)$$

8-Funções de Bessel:

Representação integral:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{\left(\frac{x}{2}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}}dt \quad (18)$$

Podemos generalizar, colocando a representação de Hankel

$$H_v^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty e^{i\pi}} \frac{e^{\left(\frac{x}{2}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{v+1}}dt \quad (19)$$

$$H_v^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{\infty e^{-i\pi}}^{0} \frac{e^{\left(\frac{x}{2}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{v+1}}dt \quad (20)$$

Tendo isso, podemos escrever as funções de Bessel e Neumann em função das funções de Hankel

$$J_v(x) = \frac{1}{2}\left[H_v^{(1)}(x) + H_v^{(2)}(x)\right] \quad (21)$$

$$N_v(x) = \frac{1}{2i}\left[H_v^{(1)}(x) + H_v^{(2)}(x)\right] \quad (22)$$

Relações de recorrência: Representamos por Y tanto as funções de Bessel, Neumann ou Hankel, sendo que todas elas satisfazem as mesmas relações de recorrência,

$$Y_{v-1}(x) + Y_{v+1}(x) = \frac{2v}{x}Y_v(x) \quad (23)$$

$$Y_{v-1}(x) + Y_{v+1}(x) = 2Y'_v(x) \quad (24)$$

9-Operadores diferenciais e integrais:

$$D_x f = \frac{df(x)}{dx} \quad D_x^{-1} f = K_x f = \int_a^x f(t)dt \quad D_x^{-n} = K_x^n \;\; D_x^{-n} = K_x^n = 1$$

$$K_x^n f = \int_a^x K_t^{n-1} f(t)dt$$

$$K_x^2 f = \int_a^x K_t^1\, f(t)dt = (tK_t^1 f(t))_a^x - \int_a^x tD_t\, K_t^1 f(t) = \int_a^x f(t)(x-t)dt$$

$$K_x^3 f = \int_a^x K_t^2\, f(t)dt = (tK_t^2 f(t))_a^x - \int_a^x tD_t\, K_t^2 f(t) = \int_a^x f(t)\frac{(x-t)^2}{2!}dt$$

$$K_x^n f = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} \quad (25)$$

Então

$$D_x^q f = K_x^{-q} f = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{q+1}} dt \quad q \neq 1,2, \dots . \quad (26)$$

O termo $\frac{1}{(x-t)^{q+1}}$ antecipa possíveis singularidades, então consideramos para q>0 um n natural que satisfaça a relação 0<n-q<1, a assim podemos definir uma derivada ‘q’ como uma derivada natural ‘n’ seguida de uma integral fracionária ‘n-q’ ou o inverso uma integral fracionária ‘n-q’ seguida de uma derivada natural ‘n’ , dando origem as duas definições na literatura [8].

$$D_x^q f = D_x^n K_x^{n-q} \quad Riemann - Liouville$$

$$D_x^q f = K_x^{n-q} D_x^n \quad Caputo$$

REFERÊNCIAS

[1] A. Loverro, Fractional Calculus: History, Definitions And Applications for the Engineer, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, May 2004

[2] I. M. Sokolov, J. Klafter and A. Blumen, Physics Today, November 2002, 48.

[3] Arfken, George B.; Hans-Jurgen Weber.; Mathematical methods for physicists. Academic press 4th edition

[4] G. E. Shilov, Linear Algebra 1977 Dover Publications.

[5] B. Noble, Applied Linear Algebra 1969 Prentice Hall.

[6] K. B. Petersen and M, S. Pedersen; The Matrix Cookbook, version: November 14,2008

[7] B. M. Rodríguez-Lara, H. M. Moya-Cessa and S. M. Viana, Ver. Mex. Fis. E 51 (2005) 87.

[8] K. Cotrill-Sheperd and M. Naber, arXiv:math-ph/0301016

[9] M. Naber, arXiv:math-ph/0312051

.