RESSALVA

Atendendo solicitação do autor,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 19/02/2023

WEBERTY DOMINGOS SILVA

SISTEMAS DINÂMICOS SIMBÓLICOS EM ALFABETOS INFINITOS

São José do Rio Preto
2022

WEBERTY DOMINGOS SILVA

SISTEMAS DINÂMICOS SIMBÓLICOS EM ALFABETOS INFINITOS

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao programa de pós graduação em matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

São José do Rio Preto
2022

S586s

Silva, Weberty Domingos

Sistemas dinâmicos simbólicos em alfabetos infinitos / Weberty Domingos Silva. -- São José do Rio Preto, 2022

81 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Ali Messaoudi

1. Substituições. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Alfabetos infinitos. 4. Medida invariante. 5. Ergodicidade. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

WEBERTY DOMINGOS SILVA

SISTEMAS DINÂMICOS SIMBÓLICOS EM ALFABETOS INFINITOS

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao programa de pós graduação em matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ali Messaoudi
Orientador

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Glauco Valle Silva Coelho
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão filho
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

São José do Rio Preto, 19 de Agosto de 2022.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me ter concedido vida, saúde e ânimo para realizar este trabalho.

Agradeço profundamente à minha família, em especial a minha mãe Sara, que me encorajou durante toda a minha vida acadêmica e me foi muito importante nos momentos em que estive perto de desanimar; as minhas irmãs shauane e Kauane pelo apoio.

Agradeço ao professor Dr. Ali Messaoudi que, ainda que não me conhecesse, aceitou o meu convite para ser meu orientador e tem me guiado durante essa jornada.

Agredeço a todos os professores do departamento de matemática do Ibilce , que foram muito amigáveis desde o primeiro dia que cheguei em Rio Preto.

Aos meus amigos Jéssica, Bruna, Elias, André, Rafael, Wyldson, João e tantos outros que fizeram parte da minha vida, pelas conversas e convivência.

Aos professores pelo aopoio e torcida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

SILVA, Weberty Domingos.**Medidas Invariantes em Sistemas Dinâmicos de Substituições em Alfabetos Infinitos**. 2022. 82 páginas. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade, São José do Rio Preto, 2022.

RESUMO

Uma substituição é uma aplicação de um conjunto A (alfabeto) no conjunto das palavras finitas de A. A cada substituição σ, podemos associar de maneira natural um sistema dinâmico Ω_σ. Quando o alfabeto A é finito, é conhecido que o sistema dinâmico Ω_σ satisfaz diversas propriedades dinâmicas e topológicas. Em particular, se σ é primitiva, o sistema dinâmico associado é minimal, unicamente ergódico e tem entropia topológica nula.

Neste trabalho, consideramos o caso onde o alfabeto A é infinito enumerável. Em particular demos condições para que o sistema dinâmico associado possua uma única medida de probabilidade invariante. Estudamos ergodicidade, unicidade ergódica e minimalidade dos sistemas dinâmicos associados a essas substituições.

O nosso trabalho envolve matrizes enumeráveis e o teorema de Perron associado.

Palavras-chave: Substituições. Alfabetos infinitos. Sistemas dinâmicos. Medida invariante. Ergodicidade.

SILVA, Weberty Domingos. **Invariant measures of dynamical systems associated to substitution on infinite alphabet**. 2022. 82 pages. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade , São José do Rio Preto, 2022.

ABSTRACT

A substitution is an aplication from a set A (called alphabet) to the set of the finite words of A. Each substituition σ can be associated to a dynamical system Ω_σ in a natural way. If A is finite, is well know that Ω_σ has many dynamical and topological properties, particularly, if σ is a primitive substitution, then the associated dynamical system is minimal, uniquely ergodic, and have null topological entropy.

In this work we consider the case when A is infinite and countable. In particular we find sufficient conditions to the dynamical system have a unique invariant probability. We study the ergodicity, unique ergodicity ad minimality of the dynamical system associated with the substituition.

We use infinite matrices and the associated Perron theorem.

Keywords: Substituitions. Infinite alphabet. Dynamic systems. Invariant measures. Ergodicity.

Sumário

1 Introdução **9**

2 Preliminares **13**
2.1 Sistemas Dinâmicos 13
2.2 Sistemas Dinâmicos Simbólicos 14
2.2.1 Palavras, Linguagem e Cilindros 14
2.2.2 Sistema dinâmico associado a uma palavra infinita 15
2.2.3 Substituições 16
2.2.4 Sistemas Dinâmicos associados a Substituições 17
2.2.5 Matriz de uma Substituição 18
2.2.6 Matrizes Infinitas Enumeráveis 21

3 Medidas invariantes, Ergodicidade, Unicidade ergódica e Minimalidade **27**
3.0.1 Sobre a não existência de medida invariante finita 30
3.1 Existência de Medida Invariante 36
3.1.1 A Substituição σ_l 37
3.1.2 Exemplo 1 45
3.1.3 Exemplo 2 46
3.1.4 Substituições de comprimento constante e unicidade ergódica . . 47
3.2 Cálculo da Medida Invariante 51
3.2.1 Exemplo 1 51
3.2.2 Exemplo 2 53
3.3 Substituições fortemente ergódicas de Comprimento não constante . . . 54
3.3.1 Exemplos 61
3.4 Substituição Fortemente Ergódica Estrela 64
3.5 A Medida Natural 67
3.5.1 Exemplo 68
3.6 Substituições Irredutíveis Periódicas 70

4 Conclusão **74**

5 Anexo 1 **75**
5.1 Matrizes Estocásticas 76

REFERÊNCIAS **81**

1 INTRODUÇÃO

Um sistema dinâmico discreto é um par (X, f) onde X é um conjunto não vazio e $f : X \mapsto X$ é uma aplicação. Um dos objetivos dos sistemas dinâmicos é estudar propriedades assintóticas das órbitas dos pontos de X isto é, os conjuntos do tipo $O(u) = \{f^n(u),\ n \in \mathbb{N}\}$ onde $u \in X$ e $f^n(u) = f \circ f \circ \cdots \circ f(u)$, n vezes.

Uma classe dos sistemas dinâmicos discretos são os sistemas dinâmicos simbólicos (X, f) que são sistemas onde X é um subconjunto fechado de $A^{\mathbb{N}}$, onde A (chamado de alfabeto) é um conjunto finito e $A^{\mathbb{N}}$ é o conjunto das sequências (palavras) infinitas sobre o alfabeto finito A munido com a topologia produto da topologia discreta de A.

Um exemplo de sistema dinâmico simbólico é o sistema $(A^{\mathbb{N}}, S)$ onde A é um conjunto finito e S é a aplicação deslocamento (shift) definida por $S(a_0a_1 \dots a_n \dots) = a_1a_2 \dots a_n \dots$. Outro exemplo são os sistemas dinâmicos associados a substituições.

Uma substituição é uma aplicação $\sigma : A \mapsto A^*$ onde A é um alfabeto e A^* é o conjunto das palavras finitas sobre A. Podemos estender σ para A^* e $A^{\mathbb{N}}$ por concatenação isto é $\sigma(a_1a_2 \dots a_n) = \sigma(a_1)\sigma(a_2) \dots \sigma(a_n)$ e $\sigma(a_1a_2 \dots a_n \dots) = \sigma(a_1)\sigma(a_2) \dots \sigma(a_n) \dots$.

Alguns exemplos clássicos de substituições são a substituição de Thue-Morse $A = \{0, 1\}$; $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 10$ e a substituição de Fibonacci, dada por $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 0$. O sistema dinâmico associado a uma substituição σ é (Ω_σ, S), onde S é a aplicação deslocamento e Ω_σ é o conjunto das palavras infinitas $V \in A^{\mathbb{N}}$ tais que toda palavra finita v que aparece em V aparece em $\sigma^n(a)$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $a \in A$. Se $u \in A^{\mathbb{N}}$ for um ponto periódico de σ, isto é $\sigma^k(u) = u$, definimos o sistema dinâmico associado a σ e a u como $(\overline{O(u)}, S)$ onde $\overline{O(u)}$ é o fecho da órbita de u. Considerando como exemplo a substituição de Fibonacci, temos que o ponto $u = \lim_{n\to\infty} \sigma^n(0)$ é um ponto fixo.

Os sistemas dinâmicos de substituições foram inicialmente considerados por A. Hedlund e M. Morse [18] para estudar geodésicas em superfícies de curvatura negativa. Desde então essa teoria se desenvolveu e se conecta com várias áreas da matemática sistemas dinâmicos, frações contínuas, fractais, azulejamento do plano entre outras, com também tem relações com outras áreas entre elas química e física teórica.

Existem vários resultados clássicos sobre sistemas dinâmicos de substituições em alfabetos finitos. Dada uma substituição σ, associamos a ela uma matriz M_σ onde $(M_\sigma)_{ij}$ denota a quantidade de vezes que j aparece em $\sigma(i)$. Se uma substituição σ é primitiva (M_σ é primitiva) então σ possui um ponto periódico u, além disso o sistema dinâmico associado não depende da escolha do ponto periódico u (isto é $\Omega_\sigma = \Omega_u$), possui uma única medida de probabilidade invariante pelo shift S, é minimal e tem entropia topológica nula.

A medida invariante encontrada para esse sistema dinâmico é definida nos cilindros $[w]$, onde $\mu([w])$ é a frequência de ocorrência de w no ponto periódico u e $[w]$

é o conjunto das palavras de Ω_u que se iniciam com w.

Para substituições em alfabetos infinitos a literatura é bastante limitada ([21],[23],[7]). Parte da dificuldade de estudar sistemas dinâmicos associados a substituições em alfabetos infinitos está no fato que a matriz associada M_σ é uma matriz infinita enumerável. Além disso, Ω_σ não é compacto.

Os resultados obtidos dependem do fato da matriz M_σ associada a substituição ser transiente ou recorrente.

Uma matriz não negativa (ver [14]) $M = (M_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ é dita irredutível e aperiódica se, para todo par $i, j \in \mathbb{N}$ existe um inteiro positivo n tal que $M_{ij}^k > 0$, para todo $k \geq n$.

O valor de Perron de M é denotado por λ, onde $\lambda = \lim_{n\to\infty}(M_{ij}^n)^{\frac{1}{n}}$. (esse limite existe). Dizemos que M é transiente se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{ij}^n}{\lambda^n} < \infty$, caso contrário dizemos que M é recorrente.

É conhecido (ver [14]) que se M é recorrente então M possui autovetores a direita e a esquerda r e l associados a λ. Dizemos que M é positivo recorrente se o produto escalar $l \cdot r$ for finito, caso contrário dizemos que M é nulo recorrente.

Em [21], Ferenczi mostrou que para a substituição σ definida em $A = 2\mathbb{N}$ por $\sigma(n) = (n-2)nn(n+2)$ o sistema dinâmico associado (Ω, S) não é minimal e não possui medida invariante finita mas possui uma medida infinita que é S-invariante, além disso a entropia de krengel do sistema (Ω, S, μ) é 0. O autor também provou que se σ é de comprimento constante (o comprimento da palavra $\sigma(n)$ é igual a uma constante para todo $n \in \mathbb{N}$), determinada a esquerda (definição (2.14)) e tem uma matriz associada que seja irredutível, aperiódica e positivo recorrente, então o sistema dinâmico associado possui uma medida de probabilidade ergódica.

Em [23], os autores construíram diagramas de Brattelli-Vershik (estacionários e não estacionários) para substituições determinadas a esquerda tais que M_σ seja irredutível, aperiódica e recorrente em um alfabeto enumerável. Como consequência, eles provaram que uma substituição $\sigma : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ de tamanho limitado, (isto é as letras de $\sigma(n)$ estão no conjunto $\{n-t, n-t+1, \ldots, n+t\}$, onde $t \in \mathbb{Z}$ não depende de n). Então existe uma medida invariante pelo shift.

O objetivo deste trabalho é estudar sistemas dinâmicos associados a substituições em alfabetos infinitos enumeráveis e procurar condições para que estes possuam medidas que sejam invariantes com relação ao operador deslocamento. Também estudamos a ergodicidade e minimalidade desses sistemas.

Entre os resultados provados nessa tese, mostramos que se $\sigma : A \mapsto A^*$, $A = \mathbb{N}$, (Teorema 3.5) é uma substituição tal que $M_\sigma = M$ é irredutível, aperiódica e satisfaz

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n} = 0. \tag{1.1}$$

Então o sistema dinâmico associado a σ não possui medida invariante finita. Em particular, (1.1) é válida para uma classe grande de substituições como as substituições em que σ tem comprimento constante e M_σ é transiente ou quando M_σ é recorrente e o autovetor a esquerda l não está em l^1.

Com isso encontramos vários exemplos de sistemas dinâmicos sem medida invariante finita como por exemplo a classe de substituições $\sigma_{a,b,c}$, $a, b, c \in \mathbb{N}$ dada por

$$\sigma_{a,b,c}(1) = 1^{a+b}2^c, \quad \sigma_{a,b,c}(n) = (n-1)^a(n)^b(n+1)^c.$$

Onde $a \leq c$.

Relacionado a $\sigma_{a,b,c}$ (exemplo 16) mostramos que $M_{\sigma_{abc}}$ é positivo recorrente se $a > c$ e nulo recorrente se $a \leq c$.

Um resultado surpreendente (proposição 3.8) é que o sistema dinâmico associado a $\sigma_{a,b,c}$ é sempre não minimal.

Um dos resultados centrais dessa tese, é o seguinte (Teorema 3.9). Seja σ uma substituição tal que M_σ seja positiva recorrente então o sistema dinâmico associado possui uma medida invariante. Aém disso, essa medida é finita se e somente se o autovetor de Perron à esquerda l está em l^1. Esse teorema estende o resultado de [23], onde os autores mostram a existência de medida invariante supondo condições suplementares como o fato da substituição ter tamanho limitado e ser determinada a esquerda. Além disso, os autores usaram diagramas de Brattelli e aqui utilizamos técnicas diferentes. Uma versão desse teorema para substituições em alfabetos finitos pode ser encontrada em [20].

Outro resutado importante é o Teorema 3.18, onde provamos que se σ é uma substituição de comprimento constante tal que M_σ seja scrambling então o sistema dinâmico associado possui uma única medida de probabilidade invariante.

A prova deste teorema é técnica, usamos ferramentas da teoria das matrizes infinitas e estocásticas, em particular matrizes scrambling e matrizes fortemente ergódicas.

Uma matriz não negativa $M = (M_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ é dita scrambling se existe $a > 0$ tal que para todo i, k:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \min\{M_{ij}, M_{kj}\} > a. \tag{1.2}$$

Matrizes scrambling são muito importantes na teoria das matrizes estocásticas e estão relacionadas aos estudos de cadeias de Markov e ergodicidade forte.

Um resultado importante, que pode ser encontrado em [12] garante que uma matriz estocástica M é fortemente ergódica se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que M^n seja scrambling.

Uma matriz estocástica P é fortemente ergódica se P^n converge uniformemente para uma matriz Q que possui todas as linhas iguais a um vetor de probabilidade não

negativo π.

No caso das substituições de comprimento constante e fortemente ergódicas, mostramos que todas as palavras que ocorrem no ponto periódico possuem uma frequência de aparição e que a medida obtida através do Teorema 3.18 coincide com a medida das frequências.

Estendemos este resultado para substituições de comprimento não constante, definindo as noções de matriz (não estocástica) fortemente ergódica (Definição 3.21) e matriz (não estocástica) fortemente ergódica estrela (Definição 3.28). Mostramos que se σ é uma substituição de comprimento não constante tal que M_σ é scrambling então o sistema dinâmico associado a σ possui uma única medida de probabilidade invariante e ergódica (Teorema 3.22). Mostramos que, sobre certas condições, uma matriz fortemente ergódica é fortemente ergódica estrela e também que se σ é uma substituição tal que M_σ é estrela ergódica então o sistema dinâmico associado possui uma única medida de probabilidade invariante (Teorema 3.32). Mostramos também se σ é tal que M_σ é scrambling então o sistema dinâmico associado é minimal.

Também provamos a existência de medidas invariantes em substituições σ tal que a matriz M_σ é periódica de período $p \geq 2$. Nesse caso não temos unicidade ergódica, mas existem p medidas invariantes.

Essa tese está dividida em 3 capítulos. No capítulo 2, enunciamos alguns resultados preliminares, que são válidos para substituições em alfabetos finitos e também enunciamos alguns resultados clássicos que serão utilizados durante a tese.

No capítulo 3 encontram-se os resultados inéditos obtidos nessa tese.

No Anexo, colocamos as provas de alguns teoremas que foram utilizados na tese.

4 CONCLUSÃO

Esse trabalho nos fornece alguns resultados interessantes em sistemas dinâmicos associados a substituições em alfabetos infinitos. Entre os resultados importantes da tese temos os teoremas a seguir.

Seja A um alfabeto infinito enumerável e σ uma substituição sobre A que possui um ponto periódico $u \in A^{\mathbb{N}}$ e tal que M_σ seja irredutível e aperiódica com valor de Perron finito λ. Então os seguintes resultados valem:

Teorema 4.1. *Se M_σ for positivo recorrentet então o sistema dinâmico (Ω_σ, S) possui uma medida invariante μ. Além disso, μ é finita se, e somente se, o autovetor de Perron à esquerda l está em l^1.*

Para substituições de comprimento constante, temos:

Teorema 4.2. *Se σ for uma substituição de comprimento constante L tal que M_σ seja positivo recorrente e M_σ/L seja scrambling, então o sistema dinâmico (M_σ, S) possui uma única probabilidade μ, além disso (M_σ, S) é minimal.*

E uma generalização desse último resultado para substituições de comprimento não constante

Teorema 4.3. *Seja σ uma substituição sobre A tal que M_σ seja positivo recorrente. Seja r o autovetor a direita de M associado a λ e P a matriz estocástica onde $P_{ij} = M_{ij}r_j/\lambda r_i$. Se P for scrambling, então o sistema dinâmico (Ω_σ, S) possui uma única probabilidade invariante, além disso (Ω_σ, S) é minimal.*

Observação. Esses resultados também podem ser obtidos no caso em que σ não possui um ponto periódico mas é fracamente determinada a esquerda.

Observação. Resultados semelhantes podem ser obtidos para substituições σ tais que M_σ é irredutível e periódica.

Os resultados obtidos nessa tese estendem os resultados encontrados em [21] e [23], além disso, dutante as demonstrações conseguimos expicitar a medida invariante encontrada para o sistema.

REFERÊNCIAS

[1] Bartle, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, Inc., Jan. 1995.

[2] Canterini, V. and Siegel,A. *Geometric representation of substitutions of Pisot type. Transactions of the American Mathematical Society 353* (01 2001).

[3] Cassaigne, J. *Complexity and special factors. (complexité et facteurs spéciaux.). Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin 4*, 1 (1997), 67–88.

[4] Dobrushin, R. L. *Central limit theorem for nonstationary markov chains. i. Theory of Probability & Its Applications 1*, 1 (1956), 65–80.

[5] Dombek, D. *Substitutions over infinite alphabet generating (-ß)-integers. International Journal of Foundations of Computer Science 23* (12 2012), 1627–1639.

[6] Durand, F. *Combinatorics on Bratteli diagrams and dynamical systems. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, p.324-72. Cambridge University Press, 2010.*

[7] Durand, F., Ormes, N. S., and Petite, S. *Self-induced systems. Journal d'Analyse Mathématique 135 (2018), 725-756.*

[8] Durrett, R. *Probability: Theory and Examples. Duxbury, 2009.*

[9] Dutra, A. G. *Sistemas dinâmicos e substituições. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2007.*

[10] Fogg, N. P. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics. Springer Berlin Heidelberg, 2002.*

[11] Huang, C. *The rate of convergence of certain nonhomogeneous markov chains. Z. Wahrscheinlickhkeitstheorie und Verw. 35* (1976).

[12] Isaacson, D. and Luecke, G.R. *Strongly ergodic markov chains and rates of convergence using spectral conditions. Stochastic Processes and their Applications 7*, 1 (1978), 113–121.

[13] Isaacson, D.L., and Madsen, R.W. *Markov chains: Theory and aplications*. Wiley, 1976.

[14] Kitchens, B. P. *Symbolic dynamics. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts*. Springer, 1998.

[15] Lawler, G. F. *Intersections of random walks SIAM Rev. 34*, 4 (1992), 666.

[16] Levin, D.A. and Peres, Y. *Markov Chains and Mixing Times*. 2007.

[17] Manibo, N. Rust, D. and Walton, J. J. *Substitutions on compact alphabets. arXiv preprint arXiv:2204.07516, 2022*

[18] Morse, M. and Hedlund, G. A. *Symbolic dynamics. American Journal of Mathematics 60*, 4 (1938), 815–866.

[19] Paz, A. and Rheinboldt, W. *Introduction to Probabilistic Automata*. Computer Science and Applied Mathematics. Elsevier Inc, Academic Press Inc, 1971.

[20] Queffelec, M. *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis*. Springer, 1987.

[21] Ferenczi, S. *Substituition dynamical systems on infinite alphabets. Annales de L'Institut Fourier 56*, 7 (2006), 2315–2343.

[22] Seneta, E. *Non-negative Matrices and Markov Chains*. 07 2006.

[23] Bezuglyi, S. Jorgensen, P.E.T. and Sanadhya S. *Measures and generalized bratteli diagrams for dynamics of infinite alphabet-substitutions.*

[24] Vere-Jones, D. *Geometric ergodicity in denumerable markov chains. The Quarterly Journal of Mathematics 13*, 1 (01 1962), 7–28.

[25] Vere-Jones, D. *Ergodic properties of nonnegative matrices. I. Pacific Journal of Mathematics 22*, 2 (1967), 361 – 386.

[26] Viana, M. and Oliveira, K. *Fundamentos da teoria ergodica*. SBM., 2015.