

Telma Regina do Nascimento Cortes

Propriedades Assintóticas de Polinômios
que Satisfazem a uma Relação de
Recorrência de Três Termos



1910000929





**Propriedades Assintóticas De
Polinômios Que Satisfazem A Uma
Relação de Recorrência de Três Termos**

Telma Regina Do Nascimento Cortes

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP-052



Telma Regina do Nascimento Cortes

**PROPRIEDADES
ASSINTÓTICAS DE POLINÔMIOS
QUE SATISFAZEM A UMA
RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA
DE TRÊS TERMOS**

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José
do Rio Preto, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Profa. Dra. *Eliana X. L. de Andrade*



929/00

São José do Rio Preto

2000

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado a vida e a oportunidade de viver sempre ao lado de pessoas maravilhosas.

Aos meus pais, que sempre me apóiam em todas as decisões que tenho que tomar, que enchem minha vida de muito amor e bons exemplos.

Ao Roberto, a quem pude confiar todas as minhas preocupações, pela atenção, paciência, carinho e compreensão que me dispensou durante este e todos os outros períodos da minha vida.

A todos os meus familiares e amigos de infância por compreenderem minha ausência e pelo incentivo constante. Em especial à minha irmã Flávia, aos meus amigos Danglei, Gercina, Janeci, Jerry e Fabiana que sempre me acompanharam e desejaram o melhor para mim.

A professora Eliana, que tornou possível a realização deste e de outros trabalhos e que sempre esteve disposta a me atender com muita paciência e dedicação, durante todo o período da iniciação científica e do mestrado, pela amizade, pela consideração e por tudo que as palavras não foram capazes de expressar.

Ao professor Ranga que me recebeu com todo carinho e apoio desde o meu começo na iniciação científica. Em especial à professora Cecília, pelo apoio constante.

Aos meus pais, Célia e Vildo,
à minha irmã, Flávia
e ao meu noivo, Roberto.

A todos os meus amigos da Pós-Graduação: Carina, Claudineia, Clinton, Elisa, Graziela, Liberto, Lisandra, Marcelo, Patrícia, Paulo, Romildo, Rose, pelo apoio, companheirismo e alegria constante que não deixaram de me proporcionar.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado a vida e a oportunidade de viver sempre ao lado de pessoas maravilhosas.

Aos meus pais, que sempre me apóiam em todas as decisões que tenho que tomar, que enchem minha vida de muito amor e bons exemplos.

Ao Roberto, a quem pude confiar todas as minhas preocupações, pela atenção, paciência, carinho e compreensão que me dispensou durante este e todos os outros períodos da minha vida.

A todos os meus familiares e amigos de infância por compreenderem minha ausência e pelo incentivo constante. Em especial à minha irmã Flávia, aos meus amigos Danglei, Gercina, Janeci, Jerry e Fabiana que sempre me acompanharam e desejaram o melhor para mim.

À professora Eliana, que tornou possível a realização deste e de outros trabalhos e que sempre esteve disposta a me atender com muita paciência e dedicação, durante todo o período da iniciação científica e do mestrado, pela amizade, pela consideração e por tudo que as palavras não foram capazes de expressar.

Ao professor Ranga que me recebeu com todo carinho e apoio desde o meu começo na iniciação científica. Em especial à professora Cleonice, pelo apoio constante.

A todos os meus amigos da Pós-Graduação: Carina, Claudinéia, Clinton, Elisa, Graziela, Liberto, Lisandra, Marcelo, Patrícia, Paulo, Romildo, Rose, pelo apoio, companheirismo e alegria constante que não deixaram de me proporcionar.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.



Resumo

O principal objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre as propriedades de polinômios que satisfazem a relação de recorrência de três termos, cujos coeficientes possuem propriedades assintóticas de periodicidade dois. Os polinômios ortogonais $Q_n(x)$ e similares aos ortogonais $\tilde{B}_n(t)$ são exemplos disso. Buscamos informações sobre as propriedades dos polinômios $Q_n(x)$ e sua medida $\phi(x)$, para os casos em que os coeficientes da relação de recorrência são limitados e ilimitados. Baseando-nos nesses resultados, apresentamos como eles podem ser transferidos para os polinômios similares $\tilde{B}_n(t)$ com relação à sua respectiva medida $\psi(t)$, para o caso onde os coeficientes da relação de recorrência são limitados. Finalmente, discutimos alguns resultados que encontramos para o caso ilimitado associado aos polinômios $\tilde{B}_n(t)$.

“ Não se ensina aquilo que se quer;
ensina-se e só se pode ensinar
aquilo que se é.”

Jean Jaurès

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre as propriedades de polinômios que satisfazem a relações de recorrência de três termos, cujos coeficientes possuem propriedades assintóticas de periodicidade dois. Os polinômios ortogonais $Q_n(x)$ e similares aos ortogonais $\tilde{B}_n(t)$ são exemplos disso. Buscamos informações sobre as propriedades dos polinômios $Q_n(x)$ e sua medida $\phi(x)$, para os casos em que os coeficientes da relação de recorrência são limitados e ilimitados. Baseando-nos nesses resultados, apresentamos como eles podem ser transferidos para os polinômios similares $\tilde{B}_n(t)$ com relação à sua respectiva medida $\psi(t)$, para o caso onde os coeficientes da relação de recorrência são limitados. Finalmente, discutimos alguns resultados que encontramos para o caso ilimitado associado aos polinômios $\tilde{B}_n(t)$.

1 Introdução

1

The main purpose of this work is to study the properties of polynomials that satisfy three term recurrence relations whose coefficients satisfy asymptotic properties with periodicity two. The orthogonal polynomials $Q_n(x)$ and orthogonal L-polynomials $\tilde{B}_n(t)$ are considered examples as these. We looked for information about the properties of the polynomials $Q_n(x)$ and its measure $\phi(x)$ when the coefficients of the recurrence relation are bounded or unbounded. We present how those results, obtained for the bounded case, can be transferred to study the polynomials $\tilde{B}_n(t)$ and the associated measure. Finally, we discuss some results that we have obtained for the unbounded case associated with the polynomials $\tilde{B}_n(t)$.

2.1 Transformada de Stieltjes

5

2.1.6 Teorema de Stieltjes-Vitali

8

2.1.7 Lema de Cesàro

8

2.1.8 Teorema Fundamental de Grommer-Hamburger

9

2.1.9 Frações Contínuas

9

2.1.10 Sequências Encadeadas

11

2.2 Polinômios Ortogonais

13

2.2.1 Sequências Encadeadas e Polinômios Ortogonais

17

Índice

1	Introdução	1
2	Resultados Preliminares	5
2.1	Resultados Gerais	5
2.1.1	Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue	6
2.1.2	Convergência Uniforme	6
2.1.3	Segundo Teorema de Helly	7
2.1.4	Integral de Stieltjes	7
2.1.5	Transformada de Stieltjes	8
2.1.6	Teorema de Stieltjes-Vitali	8
2.1.7	Lema de Cesàro	8
2.1.8	Teorema Fundamental de Grommer-Hamburger	9
2.1.9	Frações Contínuas	9
2.1.10	Seqüências Encadeadas	11
2.2	Polinômios Ortogonais	13
2.2.1	Seqüências Encadeadas e Polinômios Ortogonais	17



2.2.2	Frações Contínuas e Polinômios Ortogonais	18
2.2.3	SPO cujos zeros são densos em intervalos	20
2.2.4	Comportamento Regular dos Polinômios Ortogonais	22
2.2.5	Polinômios ortogonais clássicos	26
2.3	Polinômios Similares aos Ortogonais	28
2.3.1	Algumas Propriedades dos Polinômios Similares	29
3	Propriedades Assintóticas dos Polinômios Ortogonais	33
3.1	Coeficientes da Relação de Recorrência Limitados	33
3.1.1	Propriedades Assintóticas	34
3.1.2	Fórmulas de Quadratura Invariantes	38
3.1.3	Casos Especiais	45
3.1.4	Exemplos	48
3.2	Coeficientes da Relação de Recorrência Ilimitados	53
3.2.1	Introdução	53
3.2.2	Resultados Preliminares	54
3.2.3	Propriedades Assintóticas	56
3.2.4	Casos Especiais	63
3.2.5	Exemplos	65
4	Propriedades Assintóticas dos Polinômios Similares	68
4.1	Coeficientes da Relação de Recorrência Limitados	68



4.1.1	Introdução	68
4.1.2	Seqüências Encadeadas e Resultados de Convergência	69
4.1.3	Representação Integral	74
4.1.4	Casos Especiais	80
4.1.5	Exemplos	82
4.2	Coefficientes da Relação de Recorrência Ilimitados	85
4.2.1	Introdução	85
4.2.2	Propriedades Assintóticas	85
4.2.3	Representação Integral	89
4.2.4	Casos Especiais	91
4.2.5	Exemplo	94
5	Considerações Finais	96
	Referências Bibliográficas	99

$\text{supp}(d\phi) = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x + \epsilon) - \phi(x - \epsilon) > 0, \text{ para todo } \epsilon > 0\}.$ (1.2)

$d\phi(t)$ é que uma distribuição forte em (a, b) se os momentos existem para todos os valores de n inteiros (positivos e negativos) e, se o intervalo (a, b) é tal que $0 \leq a < b \leq \infty$, dizemos que $d\phi(t)$ é uma distribuição forte de Stieltjes em (a, b) .

Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço de todos os polinômios algébricos de grau menor ou igual a n .

Os polinômios $P_n(x) \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 0$, pertencem a um sistema de polinômios ortogonais (SPO), $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, com relação a uma distribuição (medida positiva) $d\phi(x)$ sobre um

¹Geralmente, ϕ é chamada de função peso se é absolutamente contínua. Caso contrário, ϕ é uma função distribuição, medida ou função peso integral. Usaremos a mesma terminologia para ambos os casos. Quando o peso for denotado por uma letra grega e mesma refere-se a uma distribuição, no uso de letras latinas trata-se de pesos absolutamente contínuos.



intervalo real (c, d) , $-\infty \leq c < d \leq \infty$, se são definidos por:

$$(i) \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k \text{ é de grau exatamente } n, \text{ isto é, } a_{n,n} \neq 0, \\ (ii) \quad (P_n(x), P_m(x)) = \int_c^d P_n(x) P_m(x) d\phi(x) = 0, \quad m \neq n. \quad (1.3)$$

Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-decrescente, isto é, $a_{n,n} = 1$, satisfazem à uma relação de recorrência de três termos da seguinte forma:

$$P_n(x) = (x - \beta_{n-1})P_{n-1}(x) - \alpha_{n-1}P_{n-2}(x), \quad n \geq 1, \\ P_{-1}(x) \equiv 0, \quad P_0(x) \equiv 1, \quad (1.4)$$

$$\beta_{n-1} \in \mathbb{R}, \quad \alpha_{n-1} > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Definição 1.1. Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-decrescente, com infinitos pontos de aumento em (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e tal que os momentos

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\phi(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.1)$$

existem, são finitos e $\mu_0 = 1$.¹

Então, $d\phi(x)$ é chamada distribuição em (a, b) e, se $d\phi(x) = w(x)dx$, $w(x)$ é uma função peso.

O suporte de $d\phi$ ($\text{supp}(d\phi)$) é o conjunto dos pontos de aumento de ϕ , ou seja,

$$\text{supp}(d\phi) = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x + \epsilon) - \phi(x - \epsilon) > 0, \text{ para todo } \epsilon > 0\}. \quad (1.2)$$

$d\phi(t)$ é que uma distribuição forte em (a, b) se os momentos existem para todos os valores de n inteiros (positivos e negativos) e, se o intervalo (a, b) é tal que $0 \leq a < b \leq \infty$, dizemos que $d\phi(t)$ é uma distribuição forte de Stieltjes em (a, b) .

Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço de todos os polinômios algébricos de grau menor ou igual a n .

Os polinômios $P_n(x) \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 0$, pertencem a um sistema de polinômios ortogonais (SPO), $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, com relação a uma distribuição (medida positiva) $d\phi(x)$ sobre um

¹Geralmente, ϕ é chamada de função peso se é absolutamente contínua. Caso contrário, ϕ é uma função distribuição, medida ou função peso integral. Usaremos a mesma terminologia para ambos os casos. Quando o peso for denotado por uma letra grega a mesma refere-se a uma distribuição, no uso de letras latinas trata-se de pesos absolutamente contínuos.

intervalo real (c, d) , $-\infty \leq c < d \leq \infty$, se são definidos por:

$$\begin{aligned} (i) \quad P_n(x) &= \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k \text{ é de grau exatamente } n, \text{ isto é, } a_{n,n} \neq 0, \\ (ii) \quad \langle P_n(x), P_m(x) \rangle &= \int_c^d P_n(x) P_m(x) d\phi(x) = 0, \quad m \neq n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Na forma mônica, isto é, $a_{n,n} = 1$, satisfazem à uma relação de recorrência de três termos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - \beta_{n-1})P_{n-1}(x) - \alpha_{n-1}P_{n-2}(x), \quad n \geq 1, \\ P_{-1}(x) &\equiv 0, \quad P_0(x) \equiv 1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\beta_{n-1} \in \mathbb{R}, \quad \alpha_{n-1} > 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Definição 1.1 Uma seqüência de polinômios mônicos $\{\tilde{B}_n(z)\}_{n=0}^\infty$ de grau igual a n , são chamados de polinômios similares aos ortogonais com relação a uma distribuição forte de Stieltjes $d\psi(t)$ no intervalo (a, b) , $0 \leq a < b \leq \infty$, se são definidos por:

$$\int_a^b t^{-n+s} \tilde{B}_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n > 0, & \text{se } s = n. \end{cases} \quad (1.5)$$

Uma das propriedades envolvendo os polinômios similares é que eles também satisfazem a uma relação de recorrência de três termos do tipo

$$\tilde{B}_{n+1}(z) = (z - \tilde{\beta}_{n+1})\tilde{B}_n(z) - \tilde{\alpha}_{n+1}z\tilde{B}_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

onde $\tilde{B}_0(z) = 1$, $\tilde{B}_1(z) = z - \tilde{\beta}_1$.

Para os polinômios ortogonais mônicos $P_n(x)$ e similares $\tilde{B}_n(t)$, sabe-se que os coeficientes $\{\beta_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{\tilde{\beta}_n, \tilde{\alpha}_n\}_{n=1}^\infty$ que aparecem nas relações de recorrência de três termos, armazenam informações sobre as propriedades desses polinômios e as medidas $\phi(x)$ e $\psi(t)$ associadas. Além disso, os estudos relacionados à obtenção dessas informações revelaram-se bastante gratificantes, contribuindo para uma série de trabalhos (veja, por exemplo, [25, 51]) que tornaram-se clássicos. Um aspecto importante desses artigos está relacionado aos problemas em que os coeficientes da relação de recorrência possuem propriedades assintóticas. Formalmente, podemos descrever esses problemas da seguinte forma.

Dadas as relações de recorrência (1.4) e (1.6), consideremos os coeficientes $\{\beta_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\tilde{\beta}_n, \tilde{\alpha}_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfazendo dois casos. Primeiramente, suponhamos que sejam limitados, ou seja, satisfaçam às condições

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{2n} = b_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n} = a_1^2, \quad (1.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{2n+1} = b_2 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n+1} = a_2^2,$$

para os polinômios ortogonais mônicos e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{2n} = \beta^{(0)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_{2n} = \alpha^{(0)} \quad (1.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{2n+1} = \beta^{(1)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_{2n+1} = \alpha^{(1)},$$

para os similares.

O outro caso que abordaremos é quando os coeficientes da relação de recorrência de ambos os polinômios, $P_n(x)$ e $\tilde{B}_n(t)$, são ilimitados, mas satisfazem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{2n}/\lambda_{2n} = \tilde{b}_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n}^{1/2}/\lambda_{2n} = \tilde{a}_1, \quad (1.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{2n+1}/\lambda_{2n} = \tilde{b}_2 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n+1}^{1/2}/\lambda_{2n} = \tilde{a}_2$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{2n}/\lambda_{2n} = \tilde{\beta}^{(0)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_{2n}/\lambda_{2n} = \tilde{\alpha}^{(0)}, \quad (1.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{2n+1}/\lambda_{2n} = \tilde{\beta}^{(1)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_{2n+1}/\lambda_{2n} = \tilde{\alpha}^{(1)},$$

respectivamente, onde $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência que varia regularmente (definição 3.2.2).

Nosso objetivo, neste trabalho, é estudar as propriedades dos polinômios ortogonais e similares quando os coeficientes das relações de recorrência satisfazem às condições acima. As razões entre dois polinômios cujos índices diferem de uma ou duas unidades e as funções distribuições limites serão discutidas. Daremos, também, algumas aplicações em fórmulas de quadratura.

Assim, procurando elaborar um trabalho contendo informações claras sobre o assunto de forma a servir de referência aos que possam vir a se interessar pelo mesmo, organizamos esta dissertação da seguinte forma.

No Capítulo 2, fizemos um breve levantamento do estudo de polinômios ortogonais e similares aos ortogonais que serão de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho. Além disso, abordamos alguns resultados de teorias gerais nas quais nos baseamos para darmos continuidade a este estudo.

De forma detalhada estudamos, no Capítulo 3, tanto o caso em que os coeficientes da relação de recorrência (1.4) são limitados, ou seja, satisfazem (1.7), quanto ilimitados, mas que variam regularmente, satisfazendo (1.9). Este último caso foi considerado por Van Assche em [6].

Baseando-nos nesses resultados, apresentamos, no Capítulo 4, como eles (ou parte deles) podem ser transferidos para a relação de recorrência (1.6) através da transformação obtida em Sri Ranga [48] e aqueles que não podem ser obtidos através desta transformação. O caso em que os coeficientes da relação de recorrência (1.6) satisfazem (1.8) foi tratado em [3], artigo, este, que tomamos como referência para o estudo deste caso. Para nosso conhecimento, sobre o problema (1.6) com condições (1.10), não há nenhum trabalho similar publicado até hoje. Mas, tomando como referência o que foi feito para os polinômios ortogonais, na Seção 4.2, apresentamos, alguns resultados que conseguimos encontrar para esse caso.

No Capítulo 5, apresentamos as observações finais sobre o trabalho.

Finalmente, relacionamos, nas *Referências Bibliográficas*, os livros e artigos por nós consultados e/ou citados.

$$\psi_A := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Diremos que a medida de um conjunto aberto A é dada por

$$m(A) := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x) dx; f \in C_0(\mathbb{R}), f \leq \psi_A \right\}$$

e que um conjunto N tem medida nula se, para cada $\epsilon > 0$, existe um aberto $A_\epsilon \supset N$ tal que

$$m(A_\epsilon) \leq \epsilon.$$

São exemplos de conjuntos de medida nula: quaisquer conjuntos enumeráveis, a união enumerável de conjuntos de medida nula.

Quando uma certa propriedade P é válida no complementar de um conjunto de medida nula, dizemos que P é válida em quase toda parte, e abreviaremos por q.t.p..

Capítulo 2

2.1.1 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

Teorema 2.1.1 (Zygmund [57]) Seja $(f_k)_{k=0}^\infty$ uma sequência de funções mensuráveis em

Resultados Preliminares

para todo k , $|f_k| < \psi$ para quase todo ponto de E , então $\int_E f_k \rightarrow \int_E f$.

2.1.2 Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos e propriedades básicos ao estudo que abordaremos nos capítulos posteriores. Muitos resultados serão considerados sem demonstração, mas podem ser encontrados nos textos clássicos sobre o assunto.

2.1 Resultados Gerais

Sejam $\mathcal{C}$ o espaço linear dos números complexos, $C_0(\mathbb{R})$ o conjunto das funções reais contínuas definidas na reta e que se anulam fora de um intervalo finito (que varia com cada função) e ψ_A a função característica do conjunto aberto A , isto é,

$$\psi_A := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Diremos que a medida de um conjunto aberto A é dada por

$$m(A) := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x) dx; f \in C_0(\mathbb{R}), f \leq \psi_A \right\}$$

e que um conjunto N tem medida nula se, para cada $\epsilon > 0$, existe um aberto $A_\epsilon \supset N$ tal que

$$m(A_\epsilon) \leq \epsilon.$$

2.1.3 São exemplos de conjuntos de medida nula: quaisquer conjuntos enumeráveis, a união enumerável de conjuntos de medida nula.

Quando uma certa propriedade P é válida no complementar de um conjunto de medida nula, dizemos que P é válida em **quase toda parte**, e abreviaremos por **q.t.p.**.

2.1.1 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

Teorema 2.1.1 (Zygmund [57]) *Seja $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ uma seqüência de funções mensuráveis em E tal que $f_k \rightarrow f$ q.t.p. de E . Se existe $\psi \in L(E)$ tal que, para todo k , $|f_k| < \psi$ para quase todo ponto de E , então $\int_E f_k \rightarrow \int_E f$.*

2.1.2 Convergência Uniforme

Definição 2.1.1 (Rudin [42]) *Dizemos que uma seqüência de funções $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ em Ω converge uniformemente para f num subconjunto compacto de Ω se, para um dado compacto $K \subset \Omega$ e todo $\epsilon > 0$, existe $N = N(K, \epsilon)$ tal que, para $j > N$,*

$$|f_j(z) - f(z)| < \epsilon, \forall z \in K.$$

Definição 2.1.2 (Funções Analíticas, Churchill [14], p.40) *Uma função f de variável complexa z é analítica em um ponto z_0 se sua derivada $f'(z)$ existe não somente em z_0 , mas em todo ponto z em alguma vizinhança de z_0 . f é analítica em um domínio do plano z se é analítica em todo ponto desse domínio.*

Teorema 2.1.2 (Teorema 10.28, Rudin [42]) *Seja $H(\Omega)$ a classe de todas as funções analíticas em Ω . Suponha que $f_j \in H(\Omega)$, para $j = 1, 2, \dots$, e $f_j \rightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω . Então, $f \in H(\Omega)$ e $f'_j \rightarrow f'$ uniformemente em todo subconjunto compacto de Ω .*

2.1.3 Segundo Teorema de Helly

Teorema 2.1.3 (Teorema 2.3, p.54, Chihara [12]) *Seja $\{\phi_n\}$ uma seqüência uniformemente limitada de funções não-decrescentes definidas em um intervalo compacto $[a, b]$ e que converge em $[a, b]$ para uma função limite ϕ . Então, para toda função real f , contínua em $[a, b]$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f d\phi_n = \int_a^b f d\phi.$$

2.1.4 Integral de Stieltjes

Definição 2.1.3 (Rudin [41], p.120) *Seja ϕ uma função monótona crescente em $[a, b]$ (como os números $\phi(a)$ e $\phi(b)$ são finitos, segue-se que ϕ é limitada em $[a, b]$). Para cada subdivisão P de $[a, b]$, escrevemos*

$$\Delta\phi_i = \phi(x_i) - \phi(x_{i-1}).$$

É claro que $\Delta\phi_i \geq 0$. Qualquer que seja a função real f , limitada em $[a, b]$, consideremos

$$U(P, f, \phi) = \Delta\phi_i \sup\{f(x)\} \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$L(P, f, \phi) = \Delta\phi_i \inf\{f(x)\} \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Por definição

$$\overline{\int}_a^b f d\phi = \inf\{U(P, f, \phi)\}, \quad (2.1.1)$$

$$\underline{\int}_a^b f d\phi = \sup\{L(P, f, \phi)\}, \quad (2.1.2)$$

sendo, novamente, o ínfimo e o supremo relativos a todas as subdivisões.

Se os primeiros membros de (2.1.1) e de (2.1.2) são iguais, designamos o seu valor comum por

$$\int_a^b f d\phi \quad (2.1.3)$$

ou, às vezes, por

$$\int_a^b f(x) d\phi(x). \quad (2.1.4)$$

Esta é a integral de Riemann-Stieltjes (ou simplesmente a integral de Stieltjes) de f relativamente a ϕ em $[a, b]$.

2.1.5 Transformada de Stieltjes

Uma transformada muito usada na teoria de polinômios ortogonais é a transformada de Stieltjes.

Definição 2.1.4 *Seja $F(x)$ uma função distribuição, isto é, uma função real, não-decrescente com $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$. A transformada de Stieltjes de $F(x)$ é definida por*

$$S(F(x); z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(x)}{z - x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (2.1.5)$$

Essa função é analítica tanto no conjunto $\{z : \text{Im}(z) > 0\}$ quanto no conjunto $\{z : \text{Im}(z) < 0\}$ e determina a função $F(x)$ unicamente se $F(x)$ for normalizada de modo a ser contínua à direita.

Para termos ao alcance todos os pré-requisitos necessários, precisaremos, também, do seguinte teorema clássico da teoria de funções complexas.

2.1.6 Teorema de Stieltjes-Vitali

Teorema 2.1.4 *Seja $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de funções analíticas numa região aberta G do plano complexo. Se $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uniformemente limitada em G e converge num subconjunto E de G , onde E tem um ponto limite em G , então $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente em G .*

Vamos considerar o teorema de Stieltjes-Vitali sem demonstração. Para a demonstração, bem como para observações históricas interessantes, ver Hille [26]. É importante observar que a forma inicial deste teorema foi provada por Stieltjes na mesma biografia clássica [51] onde ele resolveu o problema de momento e introduziu a integral de Stieltjes.

2.1.7 Lema de Cesàro

Este lema tem papel fundamental na demonstração de uma das propriedades aqui estudadas, que é a que envolve a razão entre o polinômio e sua derivada no caso em que os coeficientes da relação de recorrência são limitados.



Lema 2.1.5 (Média de Cesàro) Se $x_n \rightarrow x$, então $n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow x$, onde $n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k$ é conhecida como soma de Cesàro.

Demonstração: Seja M limite de $|x_k|$ e, dado ϵ , seja k_0 tal que $|x - x_k| < \epsilon/2$ para $k \geq k_0$. Se $n > k_0$ e $n > 4k_0M/\epsilon$, então

$$\left| x - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k_0-1} 2M + \frac{1}{n} \sum_{k=k_0}^n \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \blacksquare$$

2.1.8 Teorema Fundamental de Grommer-Hamburger

Teorema 2.1.6 (Arnold [4], Apêndice) Seja $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de distribuições que converge fracamente para F , isto é, $\int f dF_n \Rightarrow \int f dF$ para toda função contínua f com suporte compacto e seja $\text{supp}_n(F_n(\mathbb{R})) < \infty$. Então, a transformada de Stieltjes de F_n , $S(F_n(z))$, para $z \in \mathbb{C}$, converge para a transformada de Stieltjes de F , $S(F(z))$, uniformemente em conjuntos compactos do semi-plano superior. Reciprocamente, para uma seqüência de medidas $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ com $\text{supp}_n(F_n(\mathbb{R})) < \infty$ tal que $\{S(F_n(z))\}_{n=0}^\infty$ converge em um conjunto $\mathfrak{z}$ com ponto limite no semi-plano superior, então, a convergência vale uniformemente em conjuntos compactos $\mathfrak{z}$, o limite é a transformada de Stieltjes $S(F)$ de uma medida finita F e $F_n \Rightarrow F$ (fracamente).

2.1.9 Frações Contínuas

Frações contínuas têm um papel fundamental no estudo de problemas clássicos de momento. Polinômios ortogonais aparecem de maneira natural na análise de certos tipos de frações contínuas associadas a problemas de momento e este fato pode ser usado como base no desenvolvimento da teoria de polinômios ortogonais.

Consideraremos apenas o suficiente de frações contínuas para indicar sua relação com os polinômios ortogonais e obter certos resultados que utilizaremos no estudo das propriedades dos polinômios ortogonais e similares aos ortogonais. Um bom estudo sobre o assunto pode ser encontrado em [56, 29].

Sejam $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ seqüências arbitrárias de números complexos e

$$\begin{aligned}
 C_0 &= b_0 \\
 C_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\
 C_2 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}}
 \end{aligned}
 \tag{2.1.6}$$

$$\begin{aligned}
 &\vdots \\
 C_n &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\ddots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}}}}
 \end{aligned}
 \tag{2.1.8}$$

onde C_n é chamado de n -ésimo convergente (ou aproximante) da fração contínua (infinita)

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\ddots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n + \ddots}}}}}
 \tag{2.1.7}$$

Definição 2.1.5 A fração contínua (2.1.7) converge para um valor K (finito) desde que apenas um número finito de C_n não é definido e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = K.$$

Caso contrário, dizemos que a fração contínua diverge.

Referindo-nos a (2.1.6), podemos escrever

$$C_n = \frac{A_n}{B_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde

$$\begin{aligned}
 A_0 &= b_0, & B_0 &= 1, \\
 A_1 &= b_0 b_1 + a_1, & B_1 &= b_1, \\
 A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2
 \end{aligned}$$

e, em geral, A_n e B_n são polinômios em a_i, b_j .

Agora, podemos escrever

$$A_1 = b_1 A_0 + a_1 A_{-1} \quad \text{onde} \quad A_{-1} = 1,$$

$$B_1 = b_1 B_0 + a_1 B_{-1} \quad \text{onde} \quad B_{-1} = 0.$$

Logo, para algum $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, & A_{-1} &= 1, \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, & B_{-1} &= 0, \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

conhecidas como Fórmulas de Wallis.

A_n e B_n são chamados de n -ésimo numerador parcial e n -ésimo denominador parcial da fração contínua, respectivamente.

2.1.10 Seqüências Encadeadas

Abordaremos, agora, algumas definições e teoremas envolvendo seqüências encadeadas, fazendo isso de forma breve, apenas com conceitos que são básicos para o estudo dos polinômios ortogonais. Para maiores detalhes veja [12, p.91].

Definição 2.1.6 Uma seqüência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada uma seqüência encadeada se existe uma seqüência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que

$$(i) \quad 0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \quad n \geq 1;$$

$$(ii) \quad a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ é chamada de seqüência de parâmetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e g_0 é o parâmetro inicial.

Definição 2.1.7 Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência encadeada. Uma seqüência de parâmetros $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ é uma seqüência minimal de parâmetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se $m_0 = 0$.

Se a seqüência minimal de parâmetros é a única seqüência de parâmetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ então dizemos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ determina seus parâmetros unicamente.

Definição 2.1.8 Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência encadeada. Uma seqüência de parâmetros $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ é uma seqüência maximal de parâmetros se $M_k > g_k$ ($k \geq 0$) para qualquer seqüência de parâmetros $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Se $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de parâmetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $g_n \rightarrow g$, então, $a_n \rightarrow (1-g)g \leq 1/4$ ($n \rightarrow \infty$). O teorema abaixo mostra que a recíproca é válida.

Teorema 2.1.7 Seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Então, $0 \leq a \leq 1/4$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - 4a}].$$

Além disso, se $M_0 > 0$ (isto é, se $m_n \neq M_n$), então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - 4a}].$$

Demonstração: Veja Chihara [12, p.102]. ■

Teorema 2.2.1 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_n x - \epsilon_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$ e

$$\gamma_n = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \epsilon_n = \gamma_n \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \lambda_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0. \quad (2.2.11)$$

Demonstração: Temos que $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i$. Logo, $xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x)$.

Igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima e isolando o coeficiente b_{n+1} , encontramos $b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}$.

Porém, de (2.2.10),

$$\langle xP_n(x), P_j(x) \rangle = \int_a^b P_n(x)xP_j(x)\omega(x)dx = 0, \quad \text{para } j+1 < n, \quad \text{ou seja, } j \leq n-2.$$

2.2 Polinômios Ortogonais

Daremos, agora, algumas propriedades dos polinômios ortogonais $P_n(x)$ definidos em (1.3), isto é,

$$\begin{aligned} (i) \quad P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \tilde{a}_{n,k} x^k = \tilde{a}_{n,n} \prod_{k=1}^n (x - x_{n,k}) \text{ é de grau exatamente } n, \text{ isto é, } \tilde{a}_{n,n} \neq 0, \\ (ii) \quad \langle P_n(x), P_m(x) \rangle &= \int_c^d P_n(x) P_m(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n, \\ \delta_n > 0, & \text{para } m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Se $\tilde{a}_{n,n} = 1$, denotaremos os polinômios ortogonais mônicos por $Q_n(x)$ e, se $\delta_n = 1$, dizemos que eles são ortonormais e os denotaremos por $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k = a_{n,n} \prod_{k=1}^n (x - x_{n,k})$.

Se os polinômios ortogonais $P_n(x)$ são definidos em um intervalo simétrico com relação à origem, ou seja, $(-d, d)$ e a distribuição $d\phi(x)$ satisfaz $d\phi(x) = -d\phi(-x)$, não é difícil demonstrar que $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$, $n \geq 0$.

Também podemos demonstrar que (2.2.9) (ii) é equivalente a

$$\int_c^d x^s P_n(x) d\phi(x) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1. \quad (2.2.10)$$

Daremos, agora, algumas propriedades dos polinômios ortogonais $P_n(x)$ definidos em (1.3). Um estudo detalhado sobre eles pode ser encontrado em [12] e [52]. Sabemos que satisfazem a uma relação de recorrência de três termos.

Teorema 2.2.1 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_n x - \epsilon_n) P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.2.12)$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$ e

$$\gamma_n = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \epsilon_n = \gamma_n \frac{\langle x P_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \lambda_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0. \quad (2.2.11)$$

Demonstração: Temos que $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i$. Logo, $x P_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x)$.

Igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima e isolando o coeficiente b_{n+1} , encontramos $b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}$.

Porém, de (2.2.10),

$$\langle x P_n(x), P_j(x) \rangle = \int_a^b P_n(x) x P_j(x) \omega(x) dx = 0, \quad \text{para } j+1 < n, \quad \text{ou seja, } j \leq n-2.$$

Mas, para $j \leq n-2$, de (2.2.9), obtemos

$$\langle xP_n(x), P_j(x) \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i(x), P_j(x) \rangle = b_j \langle P_j(x), P_j(x) \rangle = 0.$$

Logo, $b_j = 0$, $j \leq n-2$.

Assim,

$$xP_n(x) = b_{n+1}P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x),$$

de onde concluímos que $\gamma_n = \frac{1}{b_{n+1}}$, $\epsilon_n = \frac{b_n}{b_{n+1}}$ e $\lambda_n = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}$.

Como $b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}$, temos que $\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}$.

Calculando os produtos internos $\langle P_{n+1}(x), P_n(x) \rangle$ e $\langle P_{n+1}(x), P_{n-1}(x) \rangle$ chegamos, respectivamente que $\epsilon_n = \gamma_n \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}$ e $\lambda_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}$. ■

Como consequência imediata desse teorema, temos os seguintes resultados.

Corolário 2.2.2 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$xp_n(x) = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}}p_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com $p_0(x) = a_{0,0}$, $p_{-1}(x) = 0$ e $\beta_n = \int_c^d tp_n^2(t)d\phi(t)$.

Corolário 2.2.3 $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$Q_{n+1}(x) = (x - \beta_n)Q_n(x) - \alpha_n Q_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.2.12)$$

com $Q_0(x) = 1$, $Q_{-1}(x) = 0$ e $\alpha_n = \frac{a_{n-1,n-1}^2}{a_{n,n}^2} = \frac{\langle Q_n, Q_n \rangle}{\langle Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle} > 0$.

Um resultado muito conhecido sobre seus zeros é dado por

Teorema 2.2.4 Para $n \geq 1$, os zeros de $P_n(x)$, $x_{n,k}$, $k = 1, \dots, n$, são reais, distintos e pertencem ao intervalo (c, d) .

Outro importante teorema da teoria de polinômios ortogonais é o seguinte.

Teorema 2.2.5 (Teorema da Separação dos Zeros) Os zeros de $P_n(x)$ e de $P_{n+1}(x)$ se entrelaçam, isto é,

$$x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema 2.2.6 (Identidade de Christoffel-Darboux) Seja $\{Q_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos satisfazendo (2.2.12) com $\alpha_{n-1} \neq 0$ ($n \geq 1$). Então,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q_k(x)Q_k(y)}{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k} = (\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1})^{-1} \frac{Q_n(x)Q_{n-1}(y) - Q_{n-1}(x)Q_n(y)}{x-y}. \quad (2.2.13)$$

Para os polinômios ortonormais, $p_n(x)$, temos

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)p_k(y) = \frac{a_{n-1,n-1} p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{a_{n,n}}. \quad (2.2.14)$$

Das duas últimas propriedades, podemos obter a seguinte decomposição em frações parciais:

$$\frac{Q_n(x)}{Q_{n+1}(x)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\gamma_{n+1,k}}{x - x_{n+1,k}}, \quad (2.2.15)$$

onde $\gamma_{n+1,k} = \frac{Q_n(x_{n+1,k})}{Q'_{n+1}(x_{n+1,k})} > 0$.

Como $Q'_n(x)$ é um polinômio de grau $n-1$, pelo polinômio de interpolação de Lagrange (2.2.19),

$$Q'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{Q_n(x)}{(x - x_{n,k})Q'_n(x_{n,k})} Q'_n(x_{n,k}),$$

de onde concluímos que

$$\frac{Q'_n(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_{n,k}}. \quad (2.2.16)$$

Do corolário 2.2.2, mostra-se facilmente que os zeros de $P_n(x)$ são os auto-valores da matriz de Jacobi

$$\begin{pmatrix} \beta_0 & \sqrt{\alpha_1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{\alpha_1} & \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{\alpha_2} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{n-2} & \sqrt{\alpha_{n-2}} \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\alpha_{n-2}} & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.2.17)$$

Um famoso resultado de J. Favard é o seguinte:

Teorema 2.2.7 (J. Favard, Chihara [12]) *Se um sistema de polinômios $\{\pi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ satisfaz a uma relação de recorrência do tipo*

$$x\pi_n(x) = \frac{\hat{a}_{n,n}}{\hat{a}_{n+1,n+1}}\pi_{n+1}(x) + \hat{\beta}_n\pi_n(x) + \frac{\hat{a}_{n-1,n-1}}{\hat{a}_{n,n}}\pi_{n-1}(x),$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, com $\pi_{-1}(x) = 0$, $\hat{a}_{-1,-1} = 0$, $\pi_0(x) = \hat{a}_{0,0}$, $\hat{a}_{n,n} > 0$ e $\hat{\beta}_n \in \mathbb{R}$, então $\{\pi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal com relação a alguma função distribuição ϕ (que pode não ser unicamente determinada) e

$$\hat{\beta}_n = \int_c^d t\pi_n^2(t)d\phi(t).$$

Em muitos exemplos, ϕ é unicamente determinada pela relação de recorrência. Este é o caso quando ambos $\{\frac{\hat{a}_{n-1,n-1}}{\hat{a}_{n,n}}\}$ e $\{|\hat{\beta}_n|\}$ são seqüências limitadas ou, em outras palavras, quando o suporte de $d\phi$ é compacto. Lembremos que $\text{supp}(d\phi)$ é sempre fechado, portanto compacto é equivalente a limitado.

Definição 2.2.1 *A função de Christoffel λ_n correspondente a uma função distribuição ϕ é definida por*

$$\lambda_n(z) = \min_{\pi(z) \in \mathbb{P}_{n-1}} \int_c^d |\pi_{n-1}(t)|^2 d\phi(t),$$

com $\pi_{n-1}(z) = 1$ para $z \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$.

Os números $\lambda_n(x_{n,k})$ são chamados números de Christoffel e são geralmente denotados por $\lambda_{n,k}$.

Existem importantes resultados envolvendo os números de Christoffel, dentre eles, a fórmula de quadratura mecânica de Gauss-Jacobi e os conhecidos núcleos de Dirichlet.

2.2.1 Seqüências Encadeadas e Polinômios Ortogonais

Teorema 2.2.8 (Fórmula de Quadratura de Gauss-Jacobi) *Para todo polinômio $\pi(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$,*

$$\int_c^d \pi(t)d\phi(t) = \sum_{k=1}^n \pi(x_{n,k})\lambda_{n,k}. \quad (2.2.18)$$

Demonstração: Seja $\pi(x)$ um polinômio arbitrário cujo grau não excede $2n - 1$. Construindo o polinômio de interpolação de Lagrange de $\pi(x)$ sobre os nós $x_{n,k}$, obtemos

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^n \pi(x_{n,k})l_{n,k}(x), \quad (2.2.19)$$

onde

$$l_{n,k}(x) = \frac{p_n(x)}{(x - x_{n,k})p'_n(x_{n,k})}.$$

Agora, $Q(x) = \pi(x) - L_n(x)$ é um polinômio de grau no máximo $2n - 1$ que se anula em $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Logo,

$$Q(x) = R(x)p_n(x)$$

onde $R(x)$ é um polinômio de grau no máximo $n - 1$. Assim, como $R(x)$ é ortogonal a $p_n(x)$,

$$\begin{aligned} \int_c^d \pi(t) d\phi(t) &= \int_c^d Q(t) d\phi(t) + \int_c^d L_n(t) d\phi(t) \\ &= \int_c^d R(t)p_n(t) d\phi(t) + \int_c^d L_n(t) d\phi(t) \\ &= \int_c^d \sum_{k=1}^n \pi(x_{n,k}) l_{n,k}(t) d\phi(t) \\ &= \sum_{k=1}^n \pi(x_{n,k}) \int_c^d l_{n,k}(t) d\phi(t) \\ &= \sum_{k=1}^n \pi(x_{n,k}) \lambda_{n,k} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 2.2.2 (Núcleo de Dirichlet) O núcleo de Dirichlet é definido por

$$K_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)p_k(t),$$

ou, pela soma de Christoffel-Darboux (2.2.14), isto é,

$$K_n(x, t) = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \frac{p_n(x)p_{n-1}(t) - p_{n-1}(x)p_n(t)}{x - t}. \quad (2.2.20)$$

2.2.1 Seqüências Encadeadas e Polinômios Ortogonais

Sejam

$$\xi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,i}, \quad \eta_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n-j+1} \quad (2.2.21)$$

$$\sigma = \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i \quad \text{e} \quad \tau = \lim_{j \rightarrow \infty} \eta_j.$$

Definição 2.2.3 O intervalo $[\xi_1, \eta_1]$ é chamado verdadeiro intervalo de ortogonalidade.

Usando a teoria de seqüências encadeadas, obtemos a relação entre o verdadeiro intervalo de ortogonalidade $[\xi_1, \eta_1]$ e as seqüências de coeficientes $\{\beta_n\}$ e $\{\alpha_n\}$ da relação de recorrência, como veremos a seguir.

Teorema 2.2.9 (Chihara [12], p.108) *Seja $\Delta = [\xi_1, \eta_1]$ o verdadeiro intervalo de ortogonalidade dos polinômios mônicos $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ definidos por (2.2.12). Então,*

(i) ξ_1 é o maior valor de c para o qual $\beta_n > c$ e $\left\{ \frac{\alpha_{n+1}}{(\beta_n - c)(\beta_{n+1} - c)} \right\}$ é uma seqüência encadeada e

(ii) η_1 é o menor valor de d para o qual $d > \beta_n$ e $\left\{ \frac{\alpha_{n+1}}{(d - \beta_n)(d - \beta_{n+1})} \right\}$ é uma seqüência encadeada.

Se tal ξ_1 (ou η_1) não existe, então ξ_1 (η_1) é escolhido como $-\infty$ (∞).

2.2.2 Frações Contínuas e Polinômios Ortogonais

As fórmulas de Wallis (2.1.8) levam a uma conexão direta entre polinômios ortogonais e frações contínuas pois, se em (2.1.7) tomarmos

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \alpha_0 \neq 0, \quad a_{n+1} = -\alpha_n \quad \text{e} \quad b_n = x - \beta_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

obteremos a fração contínua

$$\frac{\alpha_0}{x - \beta_0 + \frac{-\alpha_1}{x - \beta_1 + \frac{-\alpha_2}{x - \beta_2 + \ddots}}} \quad (2.2.22)$$

cujo n -ésimo denominador parcial, $B_n = Q_n(x)$, satisfaz à relação de recorrência (2.2.12).

Assim, pelo Teorema de Favard 2.2.7, segue que os denominadores parciais de (2.2.22) formam um SPO com relação a alguma ϕ se β_n , $n = 0, 1, \dots$, são reais e α_n , $n = 0, 1, \dots$, são positivos. A fração contínua (2.2.22) é chamada de fração contínua de *Jacobi* ou, simplesmente, de *J-fração* devido à sua relação com as conhecidas *matrizes de Jacobi* (2.2.17).

Retornando às fórmulas de Wallis, note que os numeradores parciais, $A_n = A_n(x)$, satisfazem à relação de recorrência

$$A_n(x) = (x - \beta_{n-1})A_{n-1}(x) - \alpha_{n-1}A_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

$$A_{-1}(x) = 1, \quad A_0(x) = 0, \quad A_1(x) = \alpha_0.$$

Verifica-se facilmente por indução que $\alpha_0^{-1}A_n(x)$ é um polinômio mônico de grau $n - 1$ que é independente de α_0 . Assim,

$$Q_n^{(0)}(x) = \alpha_0^{-1}A_{n+1}(x), \quad n \geq -1,$$

é um polinômio mônico de grau n independente de α_0 que satisfaz à fórmula de recorrência

$$Q_n^{(0)}(x) = (x - \beta_n)Q_{n-1}^{(0)}(x) - \alpha_n Q_{n-2}^{(0)}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$Q_{-1}^{(0)}(x) = 0, \quad Q_0^{(0)}(x) = 1.$$

Logo, $\{Q_n^{(0)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é um SPO se $\beta_n, n = 1, 2, \dots$, são reais e α_n são positivos para $n \geq 1$.

Definição 2.2.4 Os polinômios mônicos $Q_n^{(0)}(x)$ são chamados de polinômios numeradores correspondentes a $Q_n(x)$, $n \geq 0$.

O nome polinômios associados é freqüentemente usado na literatura ao invés de polinômios numeradores.

Um outro resultado importante sobre a decomposição dos convergentes da J-fração (2.2.22) é o seguinte.

Teorema 2.2.10 (Teorema 4.3, p.88, Chihara [12]) Se β_n são reais e $\alpha_n > 0, n \geq 1$, temos

$$\frac{\alpha_0 Q_{n-1}^{(0)}(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_{n,k}}{x - x_{n,k}} = \int_c^d \frac{d\phi_n(t)}{x - t}$$

onde $\lambda_{n,k}$ são os coeficientes da fórmula de quadratura de Gauss correspondentes aos zeros $x_{n,k}$ e ϕ_n é a correspondente função distribuição com salto $\lambda_{n,k}$ no ponto $x_{n,k}$.

Se o verdadeiro intervalo de ortogonalidade $[\xi_1, \eta_1]$ é limitado, usando [12, II-Teorema 3.1], do segundo Teorema de Helly 2.1.3, podemos concluir, então, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_0 Q_{n_k-1}^{(0)}(x)}{Q_{n_k}(x)} = \int_{\xi_1}^{\eta_1} \frac{d\phi(x)}{z - x}, \quad \text{para } z \notin [\xi_1, \eta_1]. \quad (2.2.23)$$

Assim, segue que se $[\xi_1, \eta_1]$ é limitado, existe uma subsequência de convergentes da J-fração (2.2.22) que converge para

$$FC(z) = \int_{\xi_1}^{\eta_1} \frac{d\phi(x)}{z-x}, \quad \text{para } z \notin [\xi_1, \eta_1]. \quad (2.2.24)$$

A. Markov, em 1896, foi o primeiro a demonstrar que de fato a J-fração converge uniformemente para $FC(z)$ em todo subconjunto compacto do plano complexo que não intercepta o intervalo $[\xi_1, \eta_1]$.

2.2.3 SPO cujos zeros são densos em intervalos

Em 1898, O. Blumenthal provou que o conjunto X de todos os zeros de todos os polinômios $Q_n(x)$ é denso no intervalo $[\sigma, \tau]$. Algumas extensões foram obtidas a partir do Teorema de Blumenthal, dentre elas, o seguinte teorema.

Teorema 2.2.11 (Blumenthal generalizado, Chihara [12]) *Sejam os polinômios $Q_n(x)$ dados por (2.2.12) e suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha > 0$, onde β e α são finitos. Seja, ainda, $X = \{x_{n,k} : 1 \leq k \leq n, n = 1, 2, \dots\}$. Então, X é denso no intervalo $[\sigma, \tau]$,*

$$\sigma = \beta - 2\sqrt{\alpha} \quad \text{e} \quad \tau = \beta + 2\sqrt{\alpha}.$$

Como consequência desse teorema e de (2.2.15), temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.12 *Sejam $Q_n(x)$ polinômios satisfazendo (2.2.12). Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente grande,*

$$\left| \frac{Q_{n-2}(z)}{Q_n(z)} \right| \leq \frac{1}{\epsilon^2},$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [-A, A]$, onde $[-A, A]$ é o verdadeiro intervalo de ortogonalidade dos polinômios $Q_n(x)$.

Demonstração: Sabemos, do Teorema 2.2.11, que os zeros dos polinômios $Q_n(x)$ são densos em um intervalo compacto, suponhamos $[-A, A]$. Temos, de (2.2.15), que

$$\left| \frac{Q_{n-2}(z)}{Q_n(z)} \right| = \left| \frac{Q_{n-2}(z)}{Q_{n-1}(z)} \right| \left| \frac{Q_{n-1}(z)}{Q_n(z)} \right| \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma_{n-1,j}}{|z - x_{n-1,j}|} \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_{n,k}}{|z - x_{n,k}|} \quad (2.2.25)$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_{n-1,j} \sum_{k=1}^n \gamma_{n,k}, \quad (2.2.26)$$

para ϵ suficientemente grande tal que $z \in \mathcal{C} \setminus [-A, A]$, com

$$\gamma_{n-1,j} = \frac{Q_{n-2}(x_{n-1,j})}{Q'_{n-1}(x_{n-1,j})} \quad \text{e} \quad \gamma_{n,k} = \frac{Q_{n-1}(x_{n,k})}{Q'_n(x_{n,k})}.$$

Em Szegő [52, p.48] encontramos que $\lambda_{n,k}$, $k = 1, \dots, n$, podem ser dados por

$$\lambda_{n,k} = \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n-1}} \frac{1}{p'_n(x_{n,k}) p_{n-1}(x_{n,k})}.$$

Esse resultado segue facilmente da quadratura gaussiana e da Identidade de Christoffel-Darboux. Mas, $Q_n(x) = p_n(x)/a_{n,n}$.

Dai,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \gamma_{n,k} &= \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} p_{n-1}^2(x_{n,k}) \\ &= \int_c^d p_{n-1}^2(x) d\phi(x) = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Uma outra propriedade que freqüentemente faremos uso é a do limitante para os zeros dos polinômios $Q_n(x)$.

Do núcleo de Dirichlet (2.2.20), podemos notar que

$$x K_n^2(x, x_{n,k}) = x \frac{a_{n-1,n-1}^2}{a_{n,n}^2} \frac{p_n^2(x) p_{n-1}^2(x_{n,k})}{(x - x_{n,k})^2}.$$

Assim, pela fórmula de quadratura de Gauss-Jacobi,

$$\begin{aligned} \int_c^d x K_n^2(x, x_{n,k}) d\phi(x) &= \frac{a_{n-1,n-1}^2}{a_{n,n}^2} p_{n-1}^2(x_{n,k}) \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j} \frac{p_n^2(x_{n,j})}{(x_{n,j} - x_{n,k})^2} x_{n,j} \\ &= \lambda_{n,k} \frac{a_{n-1,n-1}^2}{a_{n,n}^2} p_{n-1}^2(x_{n,k}) [p'_n(x_{n,k})]^2 x_{n,k} \\ &= \frac{x_{n,k}}{\lambda_{n,k}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x_{n,k} = \lambda_{n,k} \int_c^d x K_n^2(x, x_{n,k}) d\phi(x).$$

Por outro lado,

$$\beta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(t)}{n}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.2.28)$$

$$\begin{aligned}
x_{n,k} &= \lambda_{n,k} \int_c^d x K_n^2(x, x_{n,k}) d\phi(x) = \lambda_{n,k} \int_c^d x \left[\sum_{j=0}^{n-1} p_j(x) p_j(x_{n,k}) \right]^2 d\phi(x) \\
&= \lambda_{n,k} \int_c^d x \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} p_j^2(x) p_j^2(x_{n,k}) \right\} d\phi(x) \\
&\quad + 2\lambda_{n,k} \int_c^d x \left\{ \sum_{\substack{i=0 \\ j=i+1}}^{n-2} (p_i(x) p_i(x_{n,k})) p_j(x) p_j(x_{n,k}) \right\} d\phi(x) \\
&= \lambda_{n,k} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j p_j^2(x_{n,k}) + \lambda_{n,k} \sum_{j=1}^{n-1} 2 \frac{a_{j-1,j-1}}{a_{j,j}} p_{j-1}(x_{n,k}) p_j(x_{n,k}).
\end{aligned}
\tag{2.2.29}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|x_{n,k}| &\leq \lambda_{n,k} \max_{0 \leq j \leq n-1} |\beta_j| \sum_{j=0}^{n-1} p_j^2(x_{n,k}) \\
&\quad + 2\lambda_{n,k} \max_{1 \leq j \leq n-1} \frac{a_{j-1,j-1}}{a_{j,j}} \sum_{j=1}^{n-1} |p_{j-1}(x_{n,k}) p_j(x_{n,k})| \\
&\leq \max_{0 \leq j \leq n-1} |\beta_j| \\
&\quad + 2\lambda_{n,k} \max_{1 \leq j \leq n-1} \frac{a_{j-1,j-1}}{a_{j,j}} \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} p_i^2(x_{n,k})} \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} p_j^2(x_{n,k})} \\
&= \max_{0 \leq j \leq n-1} |\beta_j| + 2 \max_{1 \leq j \leq n-1} \frac{a_{j-1,j-1}}{a_{j,j}},
\end{aligned}
\tag{2.2.30}$$

Portanto,

$$|x_{n,k}| \leq \max_{0 \leq j \leq n-1} |\beta_j| + 2 \max_{1 \leq j \leq n-1} \alpha_j^{1/2}. \tag{2.2.27}$$

2.2.4 Comportamento Regular dos Polinômios Ortogonais

Denotemos por $N_n(t)$ o número de inteiros k para os quais

$$x_{n,n} - x_{n,k} \geq t |x_{n,1} - x_{n,n}|, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Definição 2.2.5 A função distribuição dos zeros, quando existe, é definida por

$$\beta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(t)}{n}, \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{2.2.28}$$

Em [53] e [20] mostrou-se que para uma grande classe de medidas $d\phi(t)$, $\beta(t)$ existe e, além disso, é dado por

$$\beta_0(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsen(2t - 1). \quad (2.2.29)$$

Neste caso, a medida $d\phi(t)$ é chamada **medida arco-seno** e os polinômios $p_n(x)$ têm **comportamento zero regular**.

Em [21], Erdős e Turán consideraram polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ e mostraram que se $d\phi(x) = w(x)dx$, onde $w(x)$ é uma função integrável não-negativa em $[-1, 1]$, ou seja, $w(x) > 0$ exceto para um conjunto de medida de Lebesgue nula, então $d\phi(x)$ é uma medida arco-seno. Em [53], Ullman faz uma discussão bastante completa da medida arco-seno absolutamente contínua e, em [20], Erdős e Freud estabeleceram resultados nos casos em que $d\phi(x)$ não é absolutamente contínua. Peso arco-seno com suporte não compacto foi introduzido por Erdős em [19].

O caso em que o suporte da medida $d\phi(x)$ está contido em $[-1, 1]$ e os dois pontos -1 e 1 pertencem a este suporte é de particular interesse. Assim, $x_{n,n} \rightarrow 1$ e $x_{n,1} \rightarrow -1$ e (2.2.28) pode ser reescrito como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k: x_{n,k} \geq T} 1 = \frac{1}{\pi} \arccos T, \quad -1 \leq T \leq 1. \quad (2.2.30)$$

Para medidas $d\phi(x)$, ou pesos $w(x)$, cujo suporte está contido em $[-1, 1]$, usa-se o termo arco-seno sobre $[-1, 1]$ se $\{x_{n,k}\}_{k=1}^n$ satisfaz (2.2.30). Como estamos interessados neste caso, daremos, abaixo, algumas condições para as quais a medida $d\phi(x)$ é arco-seno em $[-1, 1]$ e que serão discutidas posteriormente.

Teorema 2.2.13 (Erdős e Freud, [20]) (a) *A condição*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sqrt[n]{a_{n-1,n-1}} [x_{n,n} - x_{n,1}] \leq 4 \quad (2.2.31)$$

implica que $d\phi(x)$ é arco-seno;

(b) *segue de (2.2.31) que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sqrt[n]{a_{n-1,n-1}} [x_{n,n} - x_{n,1}] = 4. \quad (2.2.32)$$

O interesse desta seção está em relacionar o comportamento zero regular à fórmula de recorrência (2.2.12). Colocaremos, então, a seguinte questão: “se um conjunto polinomial

Para mostrar (2.2.33), dividiremos o problema em duas etapas. Primeiro, mostraremos que $A = 2\sqrt{\alpha}$ e, então, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n-1, n-1})^{1/(n-1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Para mostrar que $A = 2\sqrt{\alpha}$ usaremos o Teorema 2.2.9. Assim, se $[-A, A]$ é o verdadeiro intervalo de ortogonalidade para $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, então $-A$ é o maior valor de s tal que $s < 0$ (lembre-se que $\beta_n \equiv 0$) e $\left\{\frac{\alpha_{n+1}}{s^2}\right\}$ é uma seqüência encadeada. Equivalentemente, A é o menor valor de t tal que $t > 0$ e $\left\{\frac{\alpha_{n+1}}{t^2}\right\}$ é uma seqüência encadeada.

Agora, como $0 < \alpha_n \leq \alpha$, $n \geq 1$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$, da teoria geral de seqüências encadeadas, sabemos que $\left\{\frac{\alpha_{n+1}}{4\alpha}\right\}$ é uma seqüência encadeada. Isto segue de $0 < \alpha_{n+1}/4\alpha \leq 1/4$ e $\alpha_{n+1}/4\alpha \rightarrow 1/4$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, se A é um número menor que $2\sqrt{\alpha}$, $\alpha_{n+1}/A^2 \rightarrow \alpha/A^2 > 1/4$, e, assim, α_{n+1}/A^2 não seria uma seqüência encadeada. Então, $A = 2\sqrt{\alpha}$ é o menor número positivo tal que α_{n+1}/A^2 é uma seqüência encadeada e, portanto, o verdadeiro intervalo de ortogonalidade é $(-2\sqrt{\alpha}, 2\sqrt{\alpha})$.

Note, do item (i) de (2.2.9), (2.2.12) e do fato dos polinômios $p_n(x)$ serem ortonormais, que

$$a_{n,n} = \left[\frac{1}{\alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{n+1}} \right]^{1/2}.$$

Portanto,

$$[a_{n,n}]^{1/(n-1)} = \left[\frac{1}{(\alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{n+1})^{1/2}} \right]^{1/(n-1)}.$$

A prova estará completa ao se mostrar que $[a_{n,n}]^{1/(n-1)} \rightarrow 4/2A = 1/\sqrt{\alpha}$ quando $n \rightarrow \infty$, ou, equivalentemente, deve-se mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{i=1}^n \alpha_{i+1} \right]^{1/(n-1)} = \alpha. \quad (2.2.34)$$

Mas, $\alpha_i > 0$ para qualquer i e $\alpha_i \rightarrow \alpha > 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Assim, (2.2.34) segue diretamente de resultados básicos de limite de produtos. Logo, a demonstração está completa pois, como a hipótese do Teorema 2.2.13 foi satisfeita, conclui-se que os polinômios $Q_n(x)$ têm comportamento zero regular. ■

Observações :

1— A hipótese $\alpha > 0$ é necessária para o comportamento zero regular. De fato, se em (2.2.12) $\beta_n = 0$ para $n \geq 0$ e $\alpha_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, pelo Teorema 2.2.11, $\sigma = \tau = 0$

é dado por (2.2.12), é possível decidir se os polinômios têm comportamento regular usando somente a fórmula de recorrência (isto é, sem o conhecimento de $d\phi(x)$ ou de qualquer um dos zeros de $p_n(x)$)?"

Daremos uma resposta parcial para esta questão, exibindo uma classe de polinômios que têm comportamento regular e, também, notando uma classe que não tem.

Com base no que foi visto até aqui, já é possível demonstrar o resultado desta seção, que é determinar o comportamento regular de $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ a partir dos coeficientes da fórmula de recorrência (2.2.12). Primeiro, destaquemos que a condição $\beta_n = 0$, $n \geq 0$, é equivalente a se ter uma medida $d\phi(x)$ que é simétrica em $x = 0$. Neste caso, os zeros de $p_n(x)$ são também simétricos em $x = 0$.

Teorema 2.2.14 *Seja a seqüência de polinômios $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ definida por (2.2.12) e suponhamos que $\beta_n = 0$, $n \geq 0$. Suponhamos, também, que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ (no nosso caso $\alpha_n = \frac{a_{n-1,n-1}^2}{a_{n,n}^2}$) satisfaz $0 < \alpha_n \leq \alpha$, $n \geq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$. Então, os polinômios $Q_n(x)$ têm comportamento zero regular.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.11, que na realidade é a generalização do Teorema de Blumenthal, sabe-se que os zeros dos polinômios $Q_n(x)$ são densos no intervalo fechado $[-2\sqrt{\alpha}, 2\sqrt{\alpha}]$. Pelo Teorema 2.2.13, temos, também, que se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n-1,n-1})^{1/(n-1)} [x_{n,n} - x_{n,1}] = 4,$$

os polinômios $Q_n(x)$ têm comportamento zero regular.

Seja $d\phi(x)$ a provável medida para a qual os polinômios $Q_n(x)$ são ortogonais. Sabe-se que tal medida existe, pois este resultado foi estabelecido por J. Favard.

Também, da teoria geral de momentos e polinômios ortogonais, sabe-se que $d\phi(x)$ é essencialmente única e tem suporte limitado simétrico em $x = 0$ (ver [44]). Seja $[-A, A]$ o verdadeiro intervalo de ortogonalidade dos polinômios $Q_n(x)$.

Então, pela definição de verdadeiro intervalo de ortogonalidade, $x_{n,1} \rightarrow -A$ e $x_{n,n} \rightarrow A$ quando $n \rightarrow \infty$.

Assim, usando o Teorema 2.2.13, concluímos a demonstração se mostrarmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n-1,n-1})^{1/(n-1)} = \frac{4}{2A}. \quad (2.2.33)$$



e o intervalo $[\sigma, \tau]$ onde os zeros são densos reduz-se a um simples ponto, a origem. Como o comportamento zero regular exige que os zeros sejam densos no verdadeiro intervalo de ortogonalidade, o comportamento zero regular não pode ocorrer quando $\beta_n = 0$ e $\alpha_n \rightarrow 0$.

2- Se a hipótese $\beta_n = 0$ for substituída por $\beta_n = \beta$, o resultado ainda vale. A única mudança que ocorre é que o verdadeiro intervalo de ortogonalidade é trasladado de $[-2\sqrt{\alpha}, 2\sqrt{\alpha}]$ para $[\beta - 2\sqrt{\alpha}, \beta + 2\sqrt{\alpha}]$.

3- Do resultado de Ullman [53] sobre função peso, segue que muitos conjuntos de polinômios clássicos, tais como os polinômios de Jacobi, têm comportamento zero regular. O Teorema 2.2.14 também mostra que os polinômios de Jacobi (e muitos outros conjuntos conhecidos) têm comportamento zero regular porque satisfazem (2.2.12) com $\beta_n = 0$, $0 < \alpha_n \leq 1/4$ e $\alpha_n \rightarrow 1/4$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, do Teorema 2.2.14, também sabe-se que o mais “simples” (mas não muito conhecido) dos conjuntos têm comportamento zero regular, mas ainda não se sabe se correspondem a medida que é absolutamente contínua e, assim, tem uma função peso. Seria interessante conhecer (em termos de (2.2.12)) quando o comportamento zero regular está associado com uma função peso e quando não está.

4- Em [35], usando diferentes métodos, Nevai obteve uma grande quantidade de informações relacionando o suporte da medida $d\phi(x)$ a propriedades dos coeficientes na fórmula de recorrência de três termos (2.2.12).

2.2.5 Polinômios ortogonais clássicos

a) Os polinômios de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$, com relação à função peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, α e β reais.

- Para $\alpha = \beta = 0$, temos os polinômios $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$, conhecidos como polinômios de Legendre que são ortogonais em $[-1, 1]$ relativamente à função peso $w(x) = 1$.
- Para $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ ($\lambda \neq 1/2$), temos os polinômios ultrasféricos $P_n^{(\lambda)}(x) = cte P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(x)$, que são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$, com relação à função peso $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$.

- Para $\alpha = \beta = -1/2$, temos os polinômios de Tchebyshev de 1ª espécie $T_n(x) = cte P_n^{(-1/2, -1/2)}(x)$, que são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$, com relação à função peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Para $\alpha = \beta = 1/2$, temos os polinômios de Tchebyshev de 2ª espécie $U_n(x) = cte P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$, que são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$, com relação à função peso $w(x) = \sqrt{1-x^2}$.

b) Os polinômios de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}(x)$, são ortogonais no intervalo $[0, \infty)$, com relação à função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$.

c) Os polinômios de Hermite, $H_n(x)$, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$, com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$.

Com o objetivo de estudar o problema forte de momento para o caso em que $a = -\infty$ e $b = \infty$, conhecido como problema forte de momento de Hamburger, Sri Ranga, em [46], introduziu uma sequência de polinômios mônicos $\tilde{B}_n^{(k)}(z)$, similares aos polinômios ortogonais, definidos por:

$$\int_a^b t^{k-s} \tilde{B}_n^{(k)}(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n^{(k)} > 0, & \text{se } s = n \end{cases}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ e para k inteiros positivos ou negativos, onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $d\psi(t)$ é uma distribuição para a qual os momentos

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3.35)$$

existem e são finitos.

Vamos considerar, aqui, somente os polinômios $\tilde{B}_n^{(k)}(z)$ para $k = 0$ e intervalos $[a, b]$ que estejam totalmente contidos do lado positivo do eixo real, isto é, $0 \leq a < b \leq \infty$. Assim, $d\psi(t)$ é uma distribuição forte de Stieltjes. Denotaremos tais polinômios por $\tilde{B}_n(z)$ e os chamaremos, simplesmente, de polinômios similares.

Portanto, os polinômios $\tilde{B}_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, são dados por (1.5), isto é, por

$$\int_a^b t^{-n+s} \tilde{B}_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n > 0, & \text{se } s = n. \end{cases} \quad (2.3.36)$$

2.3 Polinômios Similares aos Ortogonais

A introdução do problema forte de momento pelos pesquisadores Jones, Thron e Waadeland [27] abriu caminho para o estudo de polinômios que apresentam propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais. O problema forte de momento pode ser expresso da seguinte forma:

“Dado uma seqüência $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ de números reais, em que condições existe uma medida não negativa $d\psi(t)$ tal que

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots?”$$

Jones, Thron e Waadeland resolveram o problema acima, quando $d\psi(t)$ é uma medida forte de Stieltjes, isto é, $(a, b) \subseteq (0, \infty)$.

Com o objetivo de estudar o problema forte de momento para o caso em que $a = -\infty$ e $b = \infty$, conhecido como problema forte de momento de Hamburger, Sri Ranga, em [46], introduziu uma seqüência de polinômios mônicos $\tilde{B}_n^{(k)}(z)$, similares aos polinômios ortogonais, definidos por:

$$\int_a^b t^{k-n+s} \tilde{B}_n^{(k)}(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n^{(k)} > 0, & \text{se } s = n \end{cases}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ e para k inteiros positivos ou negativos, onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $d\psi(t)$ é uma distribuição para a qual os momentos

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3.35)$$

existem e são finitos.

Vamos considerar, aqui, somente os polinômios $\tilde{B}_n^{(k)}(z)$ para $k = 0$ e intervalos $[a, b]$ que estejam totalmente contidos do lado positivo do eixo real, isto é, $0 \leq a < b \leq \infty$. Assim, $d\psi(t)$ é uma distribuição forte de Stieltjes. Denotaremos tais polinômios por $\tilde{B}_n(z)$ e os chamaremos, simplesmente, de polinômios similares.

Portanto, os polinômios $\tilde{B}_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, são dados por (1.5), isto é, por

$$\int_a^b t^{-n+s} \tilde{B}_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n > 0, & \text{se } s = n. \end{cases} \quad (2.3.36)$$

Esses polinômios estão estreitamente ligados aos polinômios ortogonais de Laurent (ou polinômios L-ortogonais) $L_n(t)$, [48], da seguinte forma:

$$L_{2m}(t) = t^{-m} \tilde{B}_{2m}(t), \quad L_{2m+1}(t) = t^{-m-1} \tilde{B}_{2m+1}(t), \quad m \geq 0. \quad (2.3.43)$$

O resultado abaixo é de primordial importância para a demonstração da existência dos polinômios $B_n(z)$.

Teorema 2.3.1 *Para as distribuições fortes de Stieltjes, $d\psi(t)$, os determinantes de Hankel, $H_n^{(m)}$, satisfazem:*

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix} > 0, \quad (2.3.37)$$

para m, n inteiros, $n \geq 1$.

2.3.1 Algumas Propriedades dos Polinômios Similares

Teorema 2.3.2 *Seja $\tilde{B}_n(z) = \sum_{r=0}^n b_{n,r} z^r$, com $b_{n,n} = 1$, o polinômio similar. Então, para $n \geq 1$:*

$$\tilde{B}_{n+1}(z) = (z - \tilde{\beta}_{n+1}) \tilde{B}_n(z) - \tilde{\alpha}_{n+1} z \tilde{B}_{n-1}(z), \quad (2.3.38)$$

onde $\tilde{B}_0(z) = 1$, $\tilde{B}_1(z) = z - \tilde{\beta}_1$ e os coeficientes $\tilde{\alpha}_{n+1}$ e $\tilde{\beta}_{n+1}$ satisfazem:

$$\tilde{\alpha}_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.3.39)$$

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\mu_0}{\mu_{-1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.3.44)$$

$$\tilde{\beta}_{n+1} = -\tilde{\alpha}_{n+1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}, \quad n \geq 1, \quad (2.3.40)$$

com ρ_n e η_n , $n \geq 0$, definidos por:

$$\rho_n = \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{H_n^{(-n)}} > 0 \quad (2.3.41)$$

e

$$\eta_n = (-1)^{n+1} \frac{H_{n+1}^{(-n-1)}}{H_n^{(-n)}} \neq 0, \quad (2.3.42)$$

onde $H_n^{(-n)}$, $H_{n+1}^{(-n-1)}$ e $H_{n+1}^{(-n)}$ são os determinantes de Hankel definidos em (2.3.37).

Como consequência da relação de recorrência de três termos, muitos resultados envolvendo $\tilde{B}_n(z)$ podem ser encontrados como, por exemplo, a relação abaixo:

$$\tilde{K}_{n+1}(z) = \{\tilde{B}_n(z)\}^2 + \alpha_{n+1}\beta_n\{\tilde{B}_{n-1}(z)\}^2 + \alpha_{n+1}\alpha_n z^2 \tilde{K}_{n-1}(z), \quad n \geq 1. \quad (2.3.43)$$

onde

$$\tilde{K}_n(z) = \tilde{B}'_n(z)\tilde{B}_{n-1}(z) - \tilde{B}'_{n-1}(z)\tilde{B}_n(z),$$

e $\tilde{B}'_n(z)$ é a derivada de $\tilde{B}_n(z)$.

Sejam $z_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, os zeros de $\tilde{B}_n(z)$. Da relação acima, podemos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.3.3 *Se $z_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, é um zero do polinômio similar $\tilde{B}_n(z)$ para $n \geq 1$, então ele é diferente dos zeros de $\tilde{B}_{n-1}(z)$.*

Sobre os polinômios similares $\tilde{B}_n(z)$ valem, ainda, os seguintes resultados:

Teorema 2.3.4 *Os zeros do polinômio similar $\tilde{B}_n(z)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Teorema 2.3.5 *Entre dois zeros consecutivos do polinômio $\tilde{B}_{n-1}(z)$ existe um zero de $\tilde{B}_n(z)$.*

As demonstrações dos resultados acima são dadas em Sri Ranga, Andrade e Phillips [50] e seguem facilmente da definição de polinômios similares e de (2.3.43).

Da mesma forma que em (2.2.15), podemos considerar

$$\frac{\tilde{B}_{n-1}(z)}{\tilde{B}_n(z)} = \sum_{r=1}^n \frac{\tau_{n,r}}{z - z_{n,r}}, \quad n \geq 1, \quad (2.3.44)$$

onde

$$\tau_{n,r} = \frac{\tilde{B}_{n-1}(z_{n,r})}{\tilde{B}'_n(z_{n,r})} = \frac{\tilde{B}_{n-1}^2(z_{n,r})}{K_{n-1}(z_{n,r})} > 0, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Logo,

$$\sum_{r=1}^n \tau_{n,r} = 1.$$

Como podemos ver do Teorema 2.3.5, os zeros de $\tilde{B}_n(z)$ são todos positivos, distintos e se entrelaçam com os de $\tilde{B}_{n-1}(z)$.

Em [46] Sri Ranga demonstrou que se $\tilde{\beta}_n = \beta$, $n \geq 1$, então $z_{n,r} = \beta^2/z_{n,n+1-r}$, $r = 1, 2, \dots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Além disso, se também tivermos $\tilde{\alpha}_2 = 2\alpha$ e $\tilde{\alpha}_{n+1} = \alpha$, $n \geq 1$, os zeros são dados explicitamente por

$$z_{n,r} = \beta^2/z_{n,n+1-r} \quad \text{e} \quad z_{n,n+1-r} = \beta + \alpha\nu_{n,r} + \sqrt{(\beta + \alpha\nu_{n,r})^2 - \beta^2},$$

para $r = 1, 2, \dots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, onde $\nu_{n,r} = 1 + \cos(\pi(2r-1)/n)$.

Consideremos a relação (2.3.38), isto é,

$$\tilde{B}_{n+1}(z) = (z - \tilde{\beta}_{n+1})\tilde{B}_n(z) - \tilde{\alpha}_{n+1}z\tilde{B}_{n-1}(z). \quad (2.3.46)$$

Dividindo-se ambos os membros por $(z - \tilde{\beta}_{n+1})\tilde{B}_n(z)$, obtemos

$$\frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{(z - \tilde{\beta}_{n+1})\tilde{B}_n(z)} = 1 - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}z\tilde{B}_{n-1}(z)}{(z - \tilde{\beta}_{n+1})\tilde{B}_n(z)}. \quad (2.3.47)$$

Logo,

$$\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}z\tilde{B}_{n-1}(z)}{(z - \tilde{\beta}_{n+1})\tilde{B}_n(z)} = 1 - \frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{(z - \tilde{\beta}_{n+1})\tilde{B}_n(z)} = m_n(z).$$

$$\text{Assim, } 1 - m_{n-1}(z) = 1 - \frac{\tilde{\alpha}_nz\tilde{B}_{n-2}(z)}{(z - \tilde{\beta}_n)\tilde{B}_{n-1}(z)}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} f_n(z) &= (1 - m_{n-1}(z))m_n(z) \\ &= \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_nz\tilde{B}_{n-2}(z)}{(z - \tilde{\beta}_n)\tilde{B}_{n-1}(z)}\right) \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}z\tilde{B}_{n-1}(z)}{(z - \tilde{\beta}_{n+1})\tilde{B}_n(z)} \\ &= \frac{(z - \tilde{\beta}_n)\tilde{B}_{n-1}(z) - \tilde{\alpha}_nz\tilde{B}_{n-2}(z)}{(z - \tilde{\beta}_n)(z - \tilde{\beta}_{n-1})\tilde{B}_n(z)} \tilde{\alpha}_{n+1}z \end{aligned}$$

Por (2.3.38), o numerador dessa última fração é exatamente $\tilde{B}_n(z)$.

Chegamos, então, à seqüência

$$f_n(z) = \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}z}{(z - \tilde{\beta}_n)(z - \tilde{\beta}_{n+1})} = [1 - m_{n-1}(z)]m_n(z), \quad n \geq 1.$$

Usando esta seqüência encadeada, em [49] Sri Ranga e Matioli mostraram que se

$$\hat{\beta}_N = \sup_{1 \leq n \leq N+1} \tilde{\beta}_n, \quad \check{\beta}_N = \inf_{1 \leq n \leq N+1} \tilde{\beta}_n \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}_N = \sup_{2 \leq n \leq N+1} \tilde{\alpha}_n,$$

para qualquer $N \geq 1$, então todos os zeros dos polinômios $\tilde{B}_n(z)$, $1 \leq n \leq N+1$, pertencem ao intervalo $[\check{d}_{N,1}, \check{d}_{N,1}]$, onde

$$\begin{aligned} \check{d}_{N,1} &= \hat{\beta}_N + 2\hat{\alpha}_N + \sqrt{(\hat{\beta}_N + 2\hat{\alpha}_N)^2 - \check{\beta}_N^2}, \\ \hat{d}_{N,1} &= \frac{1}{\check{\beta}_N} + \frac{2\hat{\alpha}_N}{\check{\beta}_N^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\check{\beta}_N} + \frac{2\hat{\alpha}_N}{\check{\beta}_N^2}\right)^2 - \frac{1}{\check{\beta}_N^2}}. \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

As seqüências $\{\hat{\beta}_N\}$ e $\{\hat{\alpha}_N\}$ são não-decrescentes e a seqüência $\{\check{\beta}_N\}$ é não-crescente. Sejam $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ e $\check{\beta}$ os respectivos limites dessas seqüências e sejam

$$\hat{d} = \hat{\beta} + 2\hat{\alpha} + \sqrt{(\hat{\beta} + 2\hat{\alpha})^2 - \check{\beta}^2} \quad \text{e} \quad \check{d} = \frac{1}{\check{\beta}} + \frac{2\hat{\alpha}}{\check{\beta}^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\check{\beta}} + \frac{2\hat{\alpha}}{\check{\beta}^2}\right)^2 - \frac{1}{\hat{\beta}^2}}.$$

Então, todos os zeros de $\tilde{B}_n(z)$, $n \geq 1$, pertencem ao intervalo $[\check{d}, \hat{d}]$.

Retornando à relação de recorrência (2.3.38), a ocorrência das situações

$$\hat{\beta} < \infty \quad \text{e} \quad \hat{\alpha} < \infty \tag{2.3.46}$$

e/ou

$$0 < \check{\beta} \quad \text{e} \quad \hat{\alpha} < \infty, \tag{2.3.47}$$

é interessante. Quando (2.3.46) vale, $\hat{\beta} < \hat{d} < \infty$ e, quando (2.3.47) vale, $0 < \check{d} < \check{\beta}$.

3.1 Coeficientes da Relação de Recorrência Limitados

Nesta seção, baseados no artigo de Van Assche [5], vamos estudar, o comportamento assintótico de polinômios ortogonais quando os coeficientes da relação de recorrência de três termos, tanto os de índice par quanto os de índice ímpar, tendem a limites finitos. A razão entre dois polinômios cujos índices diferem de uma ou duas unidades e a função distribuição limite serão discutidas. Daremos, também, algumas aplicações dos resultados obtidos em fórmulas de quadratura.

Sejam, então, as seqüências $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ da relação de recorrência (2.2.12) satisfazendo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{2n} = b_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n} = a_1^2, \tag{3.1.1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{2n+1} = b_2 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n+1} = a_2^2.$$

Usando a estimativa (2.2.27) podemos concluir que os zeros dos polinômios ortogonais mônicos $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ estão sempre no interior de um intervalo compacto, suponhamos $[-A, A]$.

3.1.1 Propriedades Assintóticas

Da fórmula de recorrência (2.2.12) facilmente obtemos que

$$Q_{2n+1}(x) = (x - \beta_{2n})Q_{2n}(x) - \alpha_{2n}Q_{2n-1}(x) \quad (3.1.2)$$

Capítulo 3

$$Q_{2n+2}(x) = (x - \beta_{2n+1})Q_{2n+1}(x) - \alpha_{2n+1}Q_{2n}(x) \quad (3.1.3)$$

Resolvendo a segunda equação para $Q_{2n+1}(x)$, obtemos

Propriedades Assintóticas dos Polinômios Ortogonais

Resolvendo a primeira equação para $Q_{2n}(x)$, obtemos a seguinte fórmula de recorrência envolvendo somente os polinômios de grau par

$$Q_{2n+2}(x) = \left[(x - \beta_{2n})(x - \beta_{2n+1}) - \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} \frac{x - \beta_{2n+1}}{x - \beta_{2n}} \right] Q_{2n}(x)$$

3.1 Coeficientes da Relação de Recorrência Limitados

Nesta seção, baseados no artigo de Van Assche [5], vamos estudar, o comportamento assintótico de polinômios ortogonais quando os coeficientes da relação de recorrência de três termos, tanto os de índice par quanto os de índice ímpar, tendem a limites finitos. A razão entre dois polinômios cujos índices diferem de uma ou duas unidades e a função distribuição limite serão discutidas. Daremos, também, algumas aplicações dos resultados obtidos em fórmulas de quadratura.

Sejam, então, as seqüências $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ da relação de recorrência (2.2.12) satisfazendo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{2n} = b_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n} = a_1^2, \quad (3.1.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{2n+1} = b_2 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n+1} = a_2^2.$$

Usando a estimativa (2.2.27) podemos concluir que os zeros dos polinômios ortogonais mônicos $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ estão sempre no interior de um intervalo compacto, suponhamos $[-A, A]$.

3.1.1 Propriedades Assintóticas

Da fórmula de recorrência (2.2.12) facilmente obtemos que

$$Q_{2n+1}(x) = (x - \beta_{2n})Q_{2n}(x) - \alpha_{2n}Q_{2n-1}(x) \quad (3.1.2)$$

e

$$Q_{2n+2}(x) = (x - \beta_{2n+1})Q_{2n+1}(x) - \alpha_{2n+1}Q_{2n}(x). \quad (3.1.3)$$

Resolvendo a segunda equação para $Q_{2n+1}(x)$, obtemos

$$Q_{2n+1}(x) = \frac{Q_{2n+2}(x) + \alpha_{2n+1}Q_{2n}(x)}{x - \beta_{2n+1}}.$$

Substituindo esta expressão em (3.1.2), temos a seguinte fórmula de recorrência envolvendo somente os polinômios de grau par

$$\begin{aligned} Q_{2n+2}(x) &= \left[(x - \beta_{2n})(x - \beta_{2n+1}) - \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n} \frac{x - \beta_{2n+1}}{x - \beta_{2n-1}} \right] Q_{2n}(x) \\ &\quad - \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \frac{x - \beta_{2n+1}}{x - \beta_{2n-1}} Q_{2n-2}(x) \\ &= b_{2n}(x)Q_{2n}(x) - a_{2n}(x)Q_{2n-2}(x). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

De modo análogo, obtemos a fórmula de recorrência que envolve apenas os polinômios de grau ímpar

$$\begin{aligned} Q_{2n+3}(x) &= \left[(x - \beta_{2n+1})(x - \beta_{2n+2}) - \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1} \frac{x - \beta_{2n+2}}{x - \beta_{2n}} \right] Q_{2n+1}(x) \\ &\quad - \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} \frac{x - \beta_{2n+2}}{x - \beta_{2n}} Q_{2n-1}(x) \\ &= b_{2n+1}(x)Q_{2n+1}(x) - a_{2n+1}(x)Q_{2n-1}(x). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Essas fórmulas de recorrência modificadas serão muito úteis no estudo do comportamento assintótico dos polinômios $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ quando n tende para infinito.

Sejam X_1 o conjunto dos pontos de acumulação de

$$\{x_{n,i} : i = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots\}$$

e

$$X_2 := \{x \in \mathbb{R} : Q_n(x) = 0 \text{ para infinitos valores de } n\}.$$

Um elemento de X_2 não é necessariamente um ponto de acumulação do conjunto $\{x_{n,i}\}$. Se tomarmos uma função peso em $[-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$ ($0 < \alpha < \beta$) que é simétrica com relação à origem, este ponto pertencerá a X_2 , pois todo polinômio ortogonal de grau ímpar com relação a uma distribuição simétrica se anula na origem. Mas, não se pode encontrar uma seqüência de zeros (exceto para a seqüência constante zero) que converge para zero. Já os polinômios de grau par não se anulam em $(-\alpha, \alpha)$ pois, se existir um zero neste intervalo, pela simetria, existirá também um segundo zero, o que é impossível (polinômios ortogonais podem ter no máximo um zero num intervalo onde a função distribuição é constante). Pela mesma razão, a origem será o único zero em $(-\alpha, \alpha)$ para os polinômios de grau ímpar. Assim, se a distribuição $d\phi(x)$ for simétrica, zero é raiz de infinitos polinômios de grau ímpar, ou seja, $0 \in X_2$.

Deste fato, podemos concluir que $\text{supp}(d\phi) \subset X_1 \cup X_2$, onde o suporte de $d\phi$, como definido em (1.2), é o espectro da função distribuição $\phi(x)$ e o espectro não é necessariamente $X_1 \cup X_2$, como se pode ver da observação anterior, pois se $0 \in X_2$, $0 \notin \text{supp}(d\phi)$ nas condições citadas anteriormente.

Denotaremos por $f_n(x) \sim g(x)$, quando a razão $f_n(x)/g(x)$ tende para um. A esfera de Riemann, $\mathcal{C} \cup \{\infty\}$, será denotada por $\overline{\mathcal{C}}$ e consideremos

$$Z_N := \{x_{n,i} : i = 1, 2, \dots, n; n \geq N\}.$$

Teorema 3.1.1 *Se os coeficientes da fórmula de recorrência (2.2.12) satisfazem (3.1.1), então, quando $n \rightarrow \infty$,*

$$\frac{Q_n(z)}{Q_{n-2}(z)} \sim Q(z) = \frac{1}{2} \left\{ (z - b_1)(z - b_2) - (a_1^2 + a_2^2) + \sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_1^2 + a_2^2)]^2 - 4a_1^2 a_2^2} \right\} \quad (3.1.6)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\overline{\mathcal{C}} \setminus X_1 \cup X_2$.

Demonstração: Sabemos que os zeros de $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ estão todos no interior do intervalo compacto $[-A, A]$. Assim, a razão $Q_n(z)/Q_{n-2}(z)$ é analítica em $\mathcal{C} \setminus [-A, A]$ para todo $n \geq 2$. Se K é um conjunto compacto em $\overline{\mathcal{C}} \setminus X_1 \cup X_2$, então K pode ter no máximo um número finito de zeros de $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e cada um deles é zero de um número finito de polinômios.

Isto significa que existe um inteiro N tal que, para $n \geq N$, as razões $Q_n(z)/Q_{n-2}(z)$ são analíticas em K .

Seja

$$\epsilon = \inf \{ |z - x| : z \in K, x \in (X_1 \cup X_2) \cap Z_N \}$$

que é uma quantidade estritamente positiva, pois K (que é um conjunto compacto) e o conjunto $(X_1 \cup X_2) \cap Z_N$ são disjuntos.

Pelo Teorema 2.2.12, para $z \in K$ e $n \geq N$

$$\left| \frac{Q_{n-2}(z)}{Q_n(z)} \right| \leq \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Assim, a razão $Q_{n-2}(z)/Q_n(z)$ é uniformemente limitada em todo subconjunto compacto de $\bar{\mathcal{T}} \setminus (X_1 \cup X_2)$.

O próximo passo é mostrar que esta razão converge quando $z \in [A, \infty)$ e, como este conjunto tem um ponto limite, podemos usar o Teorema de Stieltjes-Vitaly 2.1.4 para concluir a convergência uniforme em todo subconjunto compacto de $\bar{\mathcal{T}} \setminus (X_1 \cup X_2)$.

Tomemos, então, $z \in [A, \infty)$ (ou seja, z real). Por hipótese, os coeficientes das fórmulas de recorrência (3.1.4) e (3.1.5) convergem quando $n \rightarrow \infty$. A convergência das razões $Q_{2n+2}(z)/Q_{2n}(z)$ e $Q_{2n+1}(z)/Q_{2n-1}(z)$ segue do fato de que a seqüência

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \alpha_{2n}\alpha_{2n-1} \frac{z - \beta_{2n+1}}{z - \beta_{2n-1}} \\ &\times \left\{ (z - \beta_{2n})(z - \beta_{2n+1}) - \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n} \frac{z - \beta_{2n}}{z - \beta_{2n+1}} \right\}^{-1} \\ &\times \left\{ (z - \beta_{2n-2})(z - \beta_{2n-1}) - \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n-2} \frac{z - \beta_{2n-1}}{z - \beta_{2n-3}} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

é uma seqüência encadeada com seqüência de parâmetros (minimal) dada por

$$g_n(z) = 1 - \frac{Q_{2n+2}(z)}{Q_{2n}(z)} \left\{ (z - \beta_{2n})(z - \beta_{2n+1}) - \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n} \frac{z - \beta_{2n+1}}{z - \alpha_{2n-1}} \right\}^{-1}. \quad (3.1.8)$$

Isto significa que $f_n(z) = g_n(z)[1 - g_{n-1}(z)]$ e como, para $z \in [A, \infty)$, $f_n(z)$ converge, pelo Teorema 2.1.7, $g_n(z)$ também convergirá.

Para determinar este limite dividimos a equação (3.1.4) por $Q_{2n}(z)$ e a equação (3.1.5) por $Q_{2n+1}(z)$. Daí,

$$\frac{Q_{2n+2}(z)}{Q_{2n}(z)} = \left[(z - \beta_{2n})(z - \beta_{2n+1}) - \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n} \frac{z - \beta_{2n+1}}{z - \beta_{2n-1}} \right] - \alpha_{2n}\alpha_{2n-1} \frac{z - \beta_{2n+1}}{z - \beta_{2n-1}} \frac{Q_{2n-2}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

e **Teorema 3.1.3** *Sub as condições (3.1.1) temos que, para $n \rightarrow \infty$,*

$$\frac{Q_{2n+3}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \left[(z - \beta_{2n+1})(z - \beta_{2n+2}) - \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1} \frac{z - \beta_{2n+2}}{z - \beta_{2n}} \right] - \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} \frac{z - \beta_{2n+2}}{z - \beta_{2n}} \frac{Q_{2n-1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}. \quad (3.1.9)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$Q(z) = \{(z - b_1)(z - b_2) - (a_1^2 + a_2^2)\} - \frac{a_1^2 a_2^2}{Q(z)}.$$

Resolvendo esta equação, chegamos que

$$Q(z) = \frac{1}{2} \left\{ (z - b_1)(z - b_2) - (a_1^2 + a_2^2) \pm \sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_1^2 + a_2^2)]^2 - 4a_1^2 a_2^2} \right\}.$$

Como, para todo n , $Q_n(z)/Q_{n-2}(z) \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow \infty$, devemos escolher o sinal positivo. Assim, $Q(z) \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow \infty$. ■

A relação assintótica (3.1.6) não vale em $X_1 \cup X_2$ pois, neste conjunto, a razão $\frac{Q_n(z)}{Q_{n-2}(z)}$ não é limitada. Em particular, a relação assintótica não vale sobre o espectro $\text{supp}(d\phi)$. Portanto, em X_2 podemos encontrar uma subsequência para a qual o resultado assintótico vale.

Corolário 3.1.2 *Suponhamos que as condições (3.1.1) sejam satisfeitas. Então, quando $n \rightarrow \infty$,*

$$(i) \quad \frac{Q_{2n}(z)}{Q_{2n-1}(z)} \sim \frac{Q(z) + a_1^2}{z - b_1}, \quad (3.1.7)$$

e

$$(ii) \quad \frac{Q_{2n+1}(z)}{Q_{2n}(z)} \sim \frac{Q(z) + a_2^2}{z - b_2} \quad (3.1.8)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\bar{\mathcal{T}} \setminus (X_1 \cup X_2)$.

Demonstração: Da fórmula de recorrência (2.2.12) obtemos facilmente que

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = (z - \beta_{2n}) \frac{Q_{2n}(z)}{Q_{2n-1}(z)} - \alpha_{2n}.$$

Como, do teorema anterior, o lado esquerdo converge uniformemente em todo subconjunto compacto de $\bar{\mathcal{T}} \setminus (X_1 \cup X_2)$, (3.1.7) segue imediatamente fazendo $n \rightarrow \infty$. Analogamente, demonstramos (3.1.8). ■

Teorema 3.1.3 Sob as condições (3.1.1) temos que, para $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{n} \frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)} \sim \frac{z - (b_1 + b_2)/2}{\sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_1^2 + a_2^2)]^2 - 4a_1^2 a_2^2}} \quad (3.1.9)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\bar{\mathcal{C}} \setminus (X_1 \cup X_2)$.

Demonstração: Como a sequência $Q_n(z)/Q_{n-2}(z)$ converge para $Q(z)$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $\bar{\mathcal{C}} \setminus (X_1 \cup X_2)$, pelo Teorema 2.1.2, a sequência de derivadas $(Q_n(z)/Q_{n-2}(z))'$ convergirá para $Q'(z)$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\bar{\mathcal{C}} \setminus (X_1 \cup X_2)$. Tomando-se, então, a derivada de (3.1.6), temos que

$$\frac{(Q_n(z)/Q_{n-2}(z))'}{(Q_n(z)/Q_{n-2}(z))} = \frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)} - \frac{Q'_{n-2}(z)}{Q_{n-2}(z)} \sim \frac{Q'(z)}{Q(z)}$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\bar{\mathcal{C}} \setminus (X_1 \cup X_2)$.

Agora, seja K um conjunto compacto em $\bar{\mathcal{C}} \setminus (X_1 \cup X_2)$ e N tal que $Q_n(z)$ não tem zeros em K para $n \geq 2N - 2$. Podemos, então, escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \frac{Q'_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{Q'_{2j}(z)}{Q_{2j}(z)} - \frac{Q'_{2j-2}(z)}{Q_{2j-2}(z)} \right) + \frac{1}{2n} \sum_{j=N}^n \left(\frac{Q'_{2j}(z)}{Q_{2j}(z)} - \frac{Q'_{2j-2}(z)}{Q_{2j-2}(z)} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=N}^n \left(\frac{Q'_{2j}(z)}{Q_{2j}(z)} - \frac{Q'_{2j-2}(z)}{Q_{2j-2}(z)} \right) + \frac{1}{2n} \left(\frac{Q'_{2N-2}(z)}{Q_{2N-2}(z)} \right). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Pelo Lema de Cesàro 2.1.5, concluímos que

$$\frac{1}{2n} \frac{Q'_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} \sim \frac{1}{2} \frac{Q'(z)}{Q(z)}$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\bar{\mathcal{C}} \setminus (X_1 \cup X_2)$.

Um raciocínio análogo garante o resultado para os índices ímpares. Calculando, então, explicitamente $\frac{Q'(z)}{Q(z)}$, chegamos ao resultado desejado. ■

Observe que ambos os comportamentos assintóticos das razões $Q_n(z)/Q_{n-1}(z)$ e $Q'_n(z)/Q_n(z)$ dependem somente dos limites das seqüências $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ e não delas mesmas. Assim, diz-se que essas funções têm **comportamentos assintóticos invariantes**.

3.1.2 Fórmulas de Quadratura Invariantes

Daremos, agora, algumas aplicações de resultados da seção anterior. Usaremos o conceito de convergência fraca para este objetivo.

Definição 3.1.1 Uma seqüência de funções distribuições $F_n(x)$ converge fracamente para uma função distribuição $F(x)$ ($F_n(x) \Rightarrow F(x)$) se, para toda função $f(x)$ contínua e limitada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x). \quad (3.1.11)$$

O Teorema de Grommer-Hamburger 2.1.6 nos garante que para (3.1.11) ser válido, basta mostrarmos que $S(F_n(x); z)$ converge para $S(F(x); z)$, uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}$.

Para o objetivo aqui proposto, que é o de se obter a fórmula de quadratura, necessitaremos do uso das transformadas de Stieltjes das seguintes funções distribuições:

$$F(x; \delta, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{|t|}{\sqrt{\beta^2 - t^2} \sqrt{t^2 - \delta^2}} I_B(t) dt. \quad (3.1.12)$$

$$G(x; \delta, \beta, \gamma) = \frac{2}{\pi} \frac{[(\delta^2 - \gamma^2)^{1/2} + (\beta^2 - \gamma^2)^{1/2}]^2}{(\beta^2 - \delta^2)^2} \times \\ \times \int_{-\infty}^x \frac{\sqrt{\beta^2 - t^2} \sqrt{t^2 - \delta^2}}{|t - \gamma|} I_B(t) dt, \quad (3.1.13)$$

onde $|\gamma| \leq \delta < \beta$ e $I_B(t)$ é a função indicadora do conjunto $B = [-\beta, -\delta] \cup [\delta, \beta]$, isto é,

$$I_B(t) = \begin{cases} 0, & t \notin B \\ 1, & t \in B. \end{cases}$$

Então,

$$dF(x; \delta, \beta) = \frac{1}{\pi} \frac{|x|}{\sqrt{\beta^2 - x^2} \sqrt{x^2 - \delta^2}} dx$$

e

$$dG(x; \delta, \beta, \gamma) = \frac{2}{\pi} \frac{[(\delta^2 - \gamma^2)^{1/2} + (\beta^2 - \gamma^2)^{1/2}]^2 \sqrt{\beta^2 - x^2} \sqrt{x^2 - \delta^2}}{(\beta^2 - \delta^2)^2 |x - \gamma|} dx,$$

para $x \in B$.

Lema 3.1.4 Seja $z \in \mathcal{C} \setminus [-\beta, -\delta] \cup [\delta, \beta]$. Então,

$$(i) \quad S(F(x; \delta, \beta); z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - \delta^2} \sqrt{z^2 - \beta^2}} \quad e \quad (3.1.14)$$

$$(ii) \quad S(G(x; \delta, \beta, \gamma); z) = \frac{2(z + \gamma)}{z^2 - \gamma^2 - [(\delta^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \gamma^2)]^{1/2} + \sqrt{z^2 - \delta^2} \sqrt{z^2 - \beta^2}}. \quad (3.1.15)$$

As raízes quadradas $\sqrt{z^2 - \delta^2}$ e $\sqrt{z^2 - \beta^2}$ são escolhidas de modo que $z^2/(\sqrt{z^2 - \delta^2} \sqrt{z^2 - \beta^2})$ é analítica em $\mathcal{C} \setminus [-\beta, -\delta] \cup [\delta, \beta]$ e tende para um quando z tende para infinito.

Demonstração: A partir da definição de transformada de Stieltjes, temos que

$$S(F(x; \delta, \beta); z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{-\delta} \frac{1}{z-x} \frac{|x|}{\sqrt{\beta^2 - x^2} \sqrt{x^2 - \delta^2}} dx + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\beta} \frac{1}{z-x} \frac{|x|}{\sqrt{\beta^2 - x^2} \sqrt{x^2 - \delta^2}} dx.$$

Fazendo $x = -t$ na primeira integral e, em seguida, $t = x$, obtemos

$$S(F(x; \delta, \beta); z) = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\beta} \frac{1}{z+x} \frac{|x|}{\sqrt{\beta^2 - x^2} \sqrt{x^2 - \delta^2}} dx + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\beta} \frac{1}{z-x} \frac{|x|}{\sqrt{\beta^2 - x^2} \sqrt{x^2 - \delta^2}} dx.$$

Usando a mudança de variáveis $y = x^2$ e, em seguida, $y = \frac{(\beta^2 - \delta^2)}{2}t + \frac{(\beta^2 + \delta^2)}{2}$, chegamos que

$$S(F(x; \delta, \beta); z) = \frac{2z}{(\beta^2 - \delta^2)\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\frac{2z^2 - \beta^2 - \delta^2}{\beta^2 - \delta^2} - t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

De (2.2.23) e (2.2.24) sabemos que

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{u-t} d\phi(t) = FC(u),$$

onde $FC(u)$ é o limite da fração contínua

$$\frac{\alpha_1}{u - \beta_1 - \frac{\alpha_2}{u - \beta_2 - \frac{\alpha_3}{u - \beta_3 - \frac{\alpha_4}{u - \beta_4 - \ddots}}}},$$

e $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, \dots$, são os coeficientes da relação de recorrência de três termos dos polinômios ortogonais com relação a $d\phi(x)$.

Mas, da fórmula de recorrência para os polinômios de Tchebyshev de primeira espécie mônicos, sabemos que $\alpha_1 = \pi, \alpha_2 = 1/2, \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = 1/4$ e $\beta_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots$.

Assim, para $d\phi(t) = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $FC(u) = \frac{\pi}{u - \frac{1/2}{L(u)}}$, onde $L(u) = u - \frac{1/4}{L(u)}$.

Logo, $[L(u)]^2 - uL(u) + 1/4 = 0$. Daí,

$$L(u) = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 1}}{2} \quad \text{e} \quad FC(u) = \frac{\pi}{\sqrt{u^2 - 1}},$$

pois $FC(u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0$.

Portanto, para $u = \frac{2z^2 - \beta^2 - \delta^2}{\beta^2 - \delta^2}$,

$$FC(u) = \frac{\pi(\beta^2 - \delta^2)/2}{\sqrt{(u^2 - \beta^2)(u^2 - \delta^2)}}.$$

Daí,

$$S(F(x; \delta, \beta); z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - \beta^2} \sqrt{z^2 - \delta^2}}.$$

Para a distribuição $G(x; \delta, \beta, \gamma)$, consideremos dois casos:

- Seja $\gamma = 0$.

De maneira análoga à feita para a distribuição $F(x; \delta, \beta)$,

$$S(G(x; \delta, \beta, 0); z) = \frac{2}{\pi} \frac{(\delta + \beta)^2}{(\beta^2 - \delta^2)^2} \frac{(\beta^2 - \delta^2)}{2z} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{1}{\frac{2z^2 - \beta^2 - \delta^2}{\beta^2 - \delta^2} - t} \sqrt{1 - t^2} dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{\frac{\beta^2 + \delta^2}{\delta^2 - \beta^2} - t} \sqrt{1 - t^2} dt \right\}.$$

Como, neste caso, a função peso é a de Tchebyshev de segunda espécie, a fração contínua $FC(u)$ é dada por $FC(u) = \pi(u - \sqrt{u^2 - 1})$.

Assim, a primeira integral entre as chaves é igual a

$$\pi \left[\frac{2z^2 - (\beta^2 + \delta^2) - 2\sqrt{z^2 - \beta^2} \sqrt{z^2 - \delta^2}}{\beta^2 - \delta^2} \right]$$

e, a segunda, igual a

$$-\pi \left[\frac{\beta^2 + \delta^2 - 2\delta\beta}{\beta^2 - \delta^2} \right].$$

Logo, substituindo os resultados acima na transformada de Stieltjes da distribuição $G(x; \delta, \beta, 0)$ obtida anteriormente e multiplicando-a e dividindo-a por $z^2 - \delta\beta + \sqrt{z^2 - \beta^2} \sqrt{z^2 - \delta^2}$, chegamos ao resultado desejado para $\gamma = 0$.

- Para $\gamma \neq 0$, de maneira análoga à feita anteriormente, chegamos que

$$S(G(x; \delta, \beta, \gamma); z) = \frac{2 [(\delta^2 - \gamma^2)^{1/2} + (\beta^2 - \gamma^{1/2})]^2 (z + \gamma)(\beta^2 - \delta^2)}{\pi (\beta^2 - \delta^2)^2 2(z^2 - \gamma^2)} \\ \times \left\{ \int_{-1}^1 \frac{1}{\frac{2z^2 - \beta^2 - \delta^2}{\beta^2 - \delta^2} - t} \sqrt{1 - t^2} dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{\frac{\beta^2 + \delta^2 - 2\gamma^2}{\delta^2 - \beta^2} - t} \sqrt{1 - t^2} dt \right\}.$$

Logo, por (2.2.23) e (2.2.24), o valor da primeira integral é

$$\pi(u - \sqrt{u^2 - 1}), \quad \text{com } u = \frac{2z^2 - \beta^2 - \delta^2}{\beta^2 - \delta^2}$$

e, o da segunda, é

$$\pi(v - \sqrt{v^2 - 1}), \quad \text{onde } v = \frac{\beta^2 + \delta^2 - 2\gamma^2}{\delta^2 - \beta^2}.$$

Daí,

$$S(G(x; \delta, \beta, \gamma); z) = \frac{2 [(\delta^2 - \gamma^2)^{1/2} + (\beta^2 - \gamma^{1/2})]^2 (z + \gamma)(\beta^2 - \delta^2)}{\pi (\beta^2 - \delta^2)^2 2(z^2 - \gamma^2)} \\ \times \pi \left[z^2 - \gamma^2 - \sqrt{\delta^2 - \gamma^2} \sqrt{\beta^2 - \gamma^2} - \sqrt{z^2 - \beta^2} \sqrt{z^2 - \delta^2} \right]$$

Multiplicando-se e dividindo-se esta expressão por $z^2 - \gamma^2 - \sqrt{\delta^2 - \gamma^2} \sqrt{\beta^2 - \gamma^2} + \sqrt{z^2 - \beta^2} \sqrt{z^2 - \delta^2}$, obtemos o resultado desejado. ■

Tomemos, agora,

$$b_{(1)} = \min\{b_1, b_2\}, \quad b_{(2)} = \max\{b_1, b_2\} \\ a_{(1)} = \min\{a_1, a_2\} \quad \text{e} \quad a_{(2)} = \max\{a_1, a_2\}.$$

Teorema 3.1.5 *Sejam $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$ um sistema de polinômios ortonormais que satisfazem (3.1.1) e $\{\lambda_{n,j}\}_{j=1}^n$ seus números de Christoffel. Então, para toda função contínua $f(x)$,*

$$(i) \quad \sum_{j=1}^{2n} \lambda_{2n,j} p_{2n-1}^2(x_{2n,j}) f(x_{2n,j}) \rightarrow \frac{a_{(1)}^2}{a_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG \left(x - \frac{b_1 + b_2}{2}; \delta, \beta, -\gamma \right) \\ + \frac{a_1^2 - a_{(1)}^2}{a_1^2} f(b_2),$$

$$(ii) \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_{2n,j} p_{2n}^2(x_{2n+1,j}) f(x_{2n+1,j}) \rightarrow \frac{a_{(1)}^2}{a_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG \left(x - \frac{b_1 + b_2}{2}; \delta, \beta, \gamma \right) + \frac{a_2^2 - a_{(1)}^2}{a_2^2} f(b_1)$$

e

$$(iii) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF \left(x - \frac{b_1 + b_2}{2}; \delta, \beta \right),$$

onde

$$\delta^2 = \left(\frac{b_1 - b_2}{2} \right)^2 + (a_1 - a_2)^2, \quad \beta^2 = \left(\frac{b_1 - b_2}{2} \right)^2 + (a_1 + a_2)^2, \quad \gamma = \frac{b_1 - b_2}{2} \quad (3.1.16)$$

e as funções $F(x; \delta, \beta)$ e $G(x; \delta, \beta, \gamma)$ são as definidas em (3.1.12) e (3.1.13), respectivamente.

Demonstração: (i) Sabemos, de (2.2.15) e de

$$\lambda_{n,k} = \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n-1}} \frac{1}{p'_n(x_{n,k}) p_{n-1}(x_{n,k})},$$

que

$$\frac{Q_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j} p_{n-1}^2(x_{n,j})}{z - x_{n,j}}. \quad (3.1.17)$$

Seja $G_n(x)$ uma distribuição discreta que dá saltos nos zeros $x_{n,j}$, $j = 1, \dots, n$, de $p_n(x)$ definida por

$$G_n(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j} p_{n-1}^2(x_{n,j}) U(x - x_{n,j}), \quad (3.1.18)$$

onde

$$U(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.1.19)$$

Assim, de (3.1.17), a transformada de Stieltjes de $G_n(x)$ é dada por

$$S(G_n(x); z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} dG_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j} p_{n-1}^2(x_{n,j})}{z - x_{n,j}} = \frac{Q_{n-1}(z)}{Q_n(z)}. \quad (3.1.20)$$

Pelo corolário 3.1.2,

$$S(G_{2n}(x); z) = \frac{Q_{2n-1}(z)}{Q_{2n}(z)} \rightarrow \frac{z - b_1}{a_1^2 + Q(z)}, \quad (3.1.21)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}$ quando $n \rightarrow \infty$. Mas, de (3.1.6),

$$A = \frac{z - b_1}{a_1^2 + Q(z)} = \frac{2(z - b_1)}{(z - b_1)(z - b_2) - (a_2^2 - a_1^2) + \sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_2^2 + a_1^2)]^2 - 4a_1^2a_2^2}}.$$

Multiplicando-se e dividindo-se essa última razão por $2a_1^2(z - b_2)$, obtemos

$$A = \frac{(z - b_1)(z - b_2) + (-a_2^2 + a_1^2) - \sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_2^2 + a_1^2)]^2 - 4a_1^2a_2^2}}{2a_1^2(z - b_2)}.$$

Assim,

- se $a_1 \geq a_2$

$$A = \frac{(z - b_1)(z - b_2) - |a_1^2 - a_2^2| - \sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_2^2 + a_1^2)]^2 - 4a_1^2a_2^2}}{2a_1^2(z - b_2)} + \frac{|a_1^2 - a_2^2| - (a_2^2 - a_1^2)}{2a_1^2(z - b_2)}.$$

Multiplicando-se e dividindo-se a primeira expressão do segundo membro pelo conjugado do numerador, isto é, por

$$(z - b_1)(z - b_2) - |a_1^2 - a_2^2| + \sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_2^2 + a_1^2)]^2 - 4a_1^2a_2^2},$$

obtemos

$$A = \frac{a_2^2}{a_1^2} \frac{2(z - b_1)}{(z - b_1)(z - b_2) - |a_1^2 - a_2^2| + \sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_2^2 + a_1^2)]^2 - 4a_1^2a_2^2}} + \frac{|a_1^2 - a_2^2| - (a_2^2 - a_1^2)}{2a_1^2(z - b_2)}.$$

- se $a_1 < a_2$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(z - b_1)(z - b_2) + (-a_2^2 + a_1^2) - \sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_2^2 + a_1^2)]^2 - 4a_1^2a_2^2}}{2a_1^2(z - b_2)} \\ &= \frac{(z - b_1)(z - b_2) - |a_1^2 - a_2^2| - \sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_2^2 + a_1^2)]^2 - 4a_1^2a_2^2}}{2a_1^2(z - b_2)} \\ &= \frac{a_1^2}{a_1^2} \frac{2(z - b_1)}{(z - b_1)(z - b_2) - |a_1^2 - a_2^2| + \sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_2^2 + a_1^2)]^2 - 4a_1^2a_2^2}}, \end{aligned}$$

após multiplicar e dividir a segunda razão pelo conjugado do numerador. Como $a_1 < a_2$

$$\frac{|a_1^2 - a_2^2| - (a_2^2 - a_1^2)}{2a_1^2(z - b_2)} = 0.$$

Logo, podemos somar este termo nulo à igualdade acima.

Portanto,

$$S(G_{2n}(x); z) \rightarrow \frac{a_{(1)}^2}{a_1^2} S\left(G\left(x - \frac{b_1 + b_2}{2}; \delta, \beta, -\gamma\right); z\right) + \frac{a_1^2 - a_{(1)}^2}{a_1^2} S(U(x - b_2); z),$$

o que conclui parte do teorema.

*Como convergência fraca é equivalente a (3.1.11) temos o resultado dado em (i).

O resultado em (ii) segue ao substituirmos (b_1, a_1) por (b_2, a_2) .

(iii) Sabemos, de (2.2.16), que

$$\frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - x_{n,j}}.$$

Agora, consideremos a função distribuição discreta

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U(x - x_{n,j}). \quad (3.1.22)$$

Logo, $nF_n(x)$ é igual ao número de zeros de $Q_n(x)$ que são menores ou iguais a x .

A transformada de Stieltjes é, então, dada por

$$S(F_n(x); z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - x_{n,j}} = \frac{1}{n} \frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)}.$$

Assim, de (3.1.9) e (3.1.14), podemos concluir que

$$\begin{aligned} S(F_n(x); z) &\rightarrow \frac{z - (b_1 + b_2)/2}{\sqrt{[(z - b_1)(z - b_2) - (a_1^2 + a_2^2)]^2 - 4a_1^2 a_2^2}} \\ &= S\left(F\left(x - \frac{(b_1 + b_2)}{2}; \delta, \beta\right); z\right), \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Portanto, $F_n(x) \Rightarrow F(x - (b_1 + b_2)/2; \delta, \beta)$ e, de (3.1.11), obtemos o item (iii). ■

3.1.3 Casos Especiais

Consideremos, agora, alguns casos especiais dos teoremas precedentes. O caso mais importante é quando $b_1 = b_2 = b$ e $a_1 = a_2 = a > 0$. Neste caso, as funções F e G do Teorema 3.1.5 têm a forma

$$F(x - b; 0, 2a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{4a^2 - (t - b)^2}} I_{[b-2a, b+2a]}(t) dt,$$

$$G(x-b; 0, 2a, 0) = \frac{1}{2a^2\pi} \int_{-\infty}^x \sqrt{4a^2 - (t-b)^2} I_{[b-2a, b+2a]}(t) dt,$$

que podem ser obtidas simplesmente substituindo-se os valores dados acima e usando-se a transformação $t = z - b$ e, em seguida, fazendo-se $z = t$.

Os resultados anteriores podem, então, ser dados da seguinte forma: do Teorema 3.1.5, concluímos que

Teorema 3.1.6 *Suponha que as condições (3.1.1) sejam válidas com $b_1 = b_2 = b$ e $a_1 = a_2 = a > 0$. Então, para toda função contínua $f(x)$,*

$$(i) \equiv (ii) \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j} p_{n-1}^2(x_{n,j}) f(x_{n,j}) \rightarrow \frac{1}{2\pi a^2} \int_{b-2a}^{b+2a} f(x) \sqrt{4a^2 - (x-b)^2} dx$$

e

$$(iii) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{b-2a}^{b+2a} f(x) \frac{1}{\sqrt{4a^2 - (t-b)^2}} dx.$$

Uma consequência imediata do Corolário 3.1.2 é o seguinte

Teorema 3.1.7 *Supondo que as restrições (3.1.1) sejam válidas com $b_1 = b_2 = b$ e $a_1 = a_2 = a > 0$, seja $z \in \overline{\mathcal{C}} \setminus X_1 \cup X_2$. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)} = \frac{2}{(z-b) + \sqrt{(z-b)^2 - 4a^2}}.$$

Já, do Teorema 3.1.3, obtemos o seguinte resultado

Teorema 3.1.8 *Sob as mesmas condições iniciais do teorema anterior, temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n(z)}{n Q_n(z)} = \frac{1}{\sqrt{(z-b)^2 - 4a^2}}.$$

Outro caso importante é quando apenas $a_1 = a_2 = a > 0$. Para este caso, Chihara [9, 12] demonstrou que os zeros são densos no conjunto

$$\left[\frac{b_1 + b_2}{2} - \left\{ \left(\frac{b_1 - b_2}{2} \right)^2 + 4a^2 \right\}^{1/2}, b_{(1)} \right] \cup \left[b_{(2)}, \frac{b_1 + b_2}{2} + \left\{ \left(\frac{b_1 - b_2}{2} \right)^2 + 4a^2 \right\}^{1/2} \right]$$

que é justamente o conjunto sobre o qual a função distribuição limite $F(x - (b_1 + b_2)/2; \frac{1}{2}|b_1 - b_2|, \{(b_1 - b_2)/2 + 4b^2\}^{1/2})$ está concentrada. O resultado do Teorema 3.1.5 – (iii), portanto, é mais forte do que o resultado de Chihara, pois indica como a densidade dos zeros está distribuída no conjunto mencionado acima.

Daremos especial atenção ao caso em que a_1 ou a_2 é igual a zero, formulado no teorema abaixo.

Teorema 3.1.9 *Suponhamos que as condições (3.1.1) sejam satisfeitas e que $a_{(1)} = 0$. Então, para toda função contínua $f(x)$,*

$$(i) \sum_{j=1}^{2n} \lambda_{2n,j} p_{2n-1}^2(x_{2n,j}) f(x_{2n,j}) \rightarrow \begin{cases} f(b_2), & \text{se } a_2 = 0, \\ \frac{1}{2\beta} \left\{ \left(\frac{b_2 - b_1}{2} + \beta \right) f\left(\frac{b_1 + b_2}{2} + \beta\right) + \left(\frac{b_1 - b_2}{2} + \beta \right) f\left(\frac{b_1 + b_2}{2} - \beta\right) \right\}, & \text{se } a_1 = 0, \end{cases} \quad (3.1.24)$$

$$(ii) \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_{2n+1,j} p_{2n}^2(x_{2n+1,j}) f(x_{2n+1,j}) \rightarrow \begin{cases} f(b_1), & \text{se } a_1 = 0, \\ \frac{1}{2\beta} \left\{ \left(\frac{b_1 - b_2}{2} + \beta \right) f\left(\frac{b_1 + b_2}{2} + \beta\right) + \left(\frac{b_2 - b_1}{2} + \beta \right) f\left(\frac{b_1 + b_2}{2} - \beta\right) \right\}, & \text{se } a_2 = 0, \end{cases} \quad (3.1.25)$$

$$(iii) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}) \rightarrow \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{b_1 + b_2}{2} + \beta\right) + f\left(\frac{b_1 + b_2}{2} - \beta\right) \right\}, \quad (3.1.26)$$

onde $\beta^2 = ((b_1 - b_2)/2)^2 + a_2^2$.

Demonstração: Como $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$, as relações (3.1.7) e (3.1.8), neste caso, são dadas por

$$\frac{Q_{2n}(z)}{Q_{2n-1}(z)} \rightarrow \begin{cases} z - b_2 - \frac{a_2^2}{z - b_1}, & \text{se } a_1 = 0, \\ z - b_2, & \text{se } a_2 = 0, \end{cases} \quad (3.1.27)$$

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{Q_{2n}(z)} \rightarrow \begin{cases} z - b_1 - \frac{a_1^2}{z - b_2}, & \text{se } a_2 = 0, \\ z - b_1, & \text{se } a_1 = 0, \end{cases}$$

respectivamente, enquanto que (3.1.9) torna-se

$$\frac{1}{n} \frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)} \rightarrow \left(z - \frac{b_1 + b_2}{2} \right) / \left[(z - b_1)(z - b_2) - a_2^2 \right]. \quad (3.1.28)$$

De (3.1.20), temos que a transformada de Stieltjes da função $G_n(x)$ em (3.1.18) satisfaz, uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$S(G_n(x); z) = \frac{Q_{n-1}(z)}{Q_n(z)}.$$

Logo, de (3.1.27), obtemos

$$S(G_{2n}(x); z) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z - b_2}, & \text{se } a_2 = 0, \\ \frac{1}{2\beta} \left\{ \frac{(b_2 - b_1)/2 + \beta}{z - (b_1 + b_2)/2 - \beta} + \frac{(b_1 - b_2)/2 + \beta}{z - (b_1 + b_2)/2 + \beta} \right\}, & \text{se } a_1 = 0. \end{cases}$$

Substituindo (b_1, a_1) por (b_2, a_2) obtemos um resultado análogo para $S(G_{2n+1}(x); z)$, isto é,

$$S(G_{2n+1}(x); z) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z - b_1}, & \text{se } a_1 = 0, \\ \frac{1}{2\beta} \left\{ \frac{(b_1 - b_2)/2 + \beta}{z - (b_1 + b_2)/2 - \beta} + \frac{(b_2 - b_1)/2 + \beta}{z - (b_1 + b_2)/2 + \beta} \right\}, & \text{se } a_2 = 0. \end{cases}$$

Desses assintóticos, (i) e (ii) são imediatos. As transformadas de Stieltjes das funções $F_n(x)$ em (3.1.22) têm o seguinte comportamento

$$S(F_n(x); z) \rightarrow \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z - (b_1 + b_2)/2 - \beta} + \frac{1}{z - (b_1 + b_2)/2 + \beta} \right\},$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}$. Portanto, (iii) segue. ■

Assim, quando a_1 ou a_2 é zero, as funções $G_n(x)$ e $F_n(x)$ convergem fracamente para funções distribuições que dão no máximo dois saltos. Isto significa que para n grande a maioria dos zeros está concentrada em torno daqueles pontos onde a função distribuição limite dá um salto.

3.1.4 Exemplos

Daremos, agora, alguns exemplos de polinômios ortogonais para os quais os resultados anteriores se aplicam. Com eles, será possível um melhor entendimento dos resultados

das seções precedentes.

Exemplo 1— Os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios de Jacobi mônicos, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, satisfazem (2.2.12) com

$$\beta_n = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}$$

e

$$\alpha_n = \frac{4n(n + \alpha)(n + \alpha)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)},$$

$\alpha > -1$ e $\beta > -1$.

É fácil ver que $\beta_n \rightarrow 0$ e $\alpha_n \rightarrow 1/4$. Assim, pelos Teoremas 3.1.7 e 3.1.8, vemos que

$$\frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(z)}{P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(z)} \sim \frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2}, \quad (3.1.29)$$

$$\frac{1}{n} \frac{[P_n^{(\alpha, \beta)}(z)]'}{P_n^{(\alpha, \beta)}(z)} \sim \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad (3.1.32)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\bar{\mathcal{C}} \setminus [-1, 1]$, pois $b = 0$ e $a = 1/2$. Pelo Teorema 3.1.6, para toda função contínua $f(x)$,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{n,j} [p_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x_{n,j})]^2 f(x_{n,j}) \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{1 - x^2} dx$$

e

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad (3.1.30)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\bar{\mathcal{C}} \setminus [-1, 1]$.

Esses resultados são bem conhecidos.

Exemplo 2— Os polinômios mônicos de Pollaczek (para mais detalhes, veja Chihara [12]) satisfazem (2.2.12) com

$$\beta_n = \frac{-b}{n + \lambda + a + c} \quad \text{e} \quad \alpha_n = \frac{(n + c)(n + 2\lambda + c - 1)}{4(n + \lambda + a + c - 1)(n + \lambda + a + c)},$$

onde $a \geq |b|$ juntamente com $2\lambda + c > 0$ e $c \geq 0$ ou $2\lambda + c \geq 1$ e $c > -1$. Como $\beta_n \rightarrow 0$ e $\alpha_n \rightarrow 1/4$ quando n tende para infinito, obtemos os mesmos assintóticos que em (3.1.29) e (3.1.30).

Exemplo 3— Os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios mônicos de Lommel modificados, $L_n^{(\alpha)}(z)$, são dados por

$$\beta_n = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_n = \frac{1}{4(n + \alpha)(n + \alpha - 1)},$$

com $\alpha > 0$. Assim, $\alpha_n \rightarrow 0$. Logo, temos um limite degenerado, uniformemente em todo subconjunto compacto de $\overline{\mathcal{D}} \setminus (\{0\} \cup \{\text{pontos de massa de } \phi\})$. De (3.1.27) e (3.1.28), temos que

$$\frac{L_n^{(\alpha)}(z)}{L_{n-1}^{(\alpha)}(z)} \sim z, \quad \frac{1}{n} \frac{[L_n^{(\alpha)}(z)]'}{L_n^{(\alpha)}(z)} \sim \frac{1}{z}, \quad (3.1.31)$$

e, para toda função contínua $f(x)$, o Teorema 3.1.9 nos fornece

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{n,j} [l_{n-1}^{(\alpha)}(x_{n,j})]^2 f(x_{n,j}) \rightarrow f(0), \quad (3.1.32)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}) \rightarrow f(0). \quad (3.1.33)$$

Esses limites degenerados no zero talvez possam ser entendidos pelo fato de os polinômios de Lommel modificados serem ortogonais com relação à função distribuição discreta $\phi(x)$ que dá saltos nos pontos

$$\{j_{v-1,k}^{-1}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

onde $\dots < j_{v,-1} < j_{v,0} < 0 < j_{v,1} < \dots$ denotam os zeros da função de Bessel $J_v(x)$, e este conjunto tem o zero como seu ponto limite (veja Szegő [52]).

Exemplo 4— Consideremos os polinômios mônicos de Tricomi-Carlitz. Então,

$$\beta_n = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_n = \frac{n}{(n + \alpha)(n + \alpha - 1)},$$

com $\alpha > 0$. Novamente $\alpha_n \rightarrow 0$ e temos os mesmos assintóticos que em (3.1.31) e (3.1.32).

Note que, também neste caso, os polinômios são ortogonais com relação à uma função distribuição discreta e os saltos agora são em $\{\pm 1/\sqrt{k + \alpha}; k = 0, 1, 2, \dots\}$. Este conjunto também tem o zero como ponto limite.

Exemplo 5— Os q -polinômios de Al-Salam e Carlitz satisfazem (2.2.12) com

$$\beta_n = (1 + \alpha)q^n \quad \text{e} \quad \alpha_n = -\alpha q^{n-1}(1 - q^n),$$

onde $\alpha < 0$ e $0 < q < 1$. Portanto, ambos, α_n e β_n , convergem para zero quando n tende para o infinito. Logo, as relações (3.1.31) e (3.1.32) são válidas. Novamente, esses polinômios são ortogonais com relação a uma função distribuição discreta e os saltos ocorrem nos pontos $\{q^k, \alpha q^k; k = 0, 1, 2, \dots\}$ que novamente têm o zero como ponto limite.

Agora, daremos um exemplo onde as seqüências $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ têm dois pontos limites.

Exemplo 6— Considere a seqüência de polinômios $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ que satisfazem (2.2.12) com

$$\beta_{2n} = b_1, \quad \alpha_{2n} = a_1^2, \quad \text{e} \quad \beta_{2n+1} = b_2, \quad \alpha_{2n+1} = a_2^2. \quad (3.1.33)$$

Obviamente esses polinômios satisfazem às condições (3.1.1), de modo que os Teoremas 3.1.1 – 3.1.5 são válidos. Portanto, podemos obter explicitamente a função distribuição $\phi(x)$ com relação à qual esses polinômios são ortogonais.

Teorema 3.1.10 *Os polinômios $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ com coeficientes dados por (3.1.33) são ortogonais com relação a*

$$\phi(x) = \frac{a_{(1)}^2}{a_1^2} G\left(x - \frac{b_1 + b_2}{2}; \delta, \beta, -\gamma\right) + \frac{a_1^2 - a_{(1)}^2}{a_1^2} U(x - b_1),$$

onde δ, β e γ são dados por (3.1.16) e $G(x; \delta, \beta, \gamma)$ por (3.1.13).

Demonstração: Considere os polinômios $\{Q_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$ com coeficientes dados por (3.1.33), mas com a_1 e a_2 trocados, isto é, $\alpha_{2n} = a_2^2$ e $\alpha_{2n+1} = a_1^2$.

De (2.2.12), facilmente obtemos

$$\frac{Q_{2n+1}^*(z)}{Q_{2n}^*(z)} = (z - b_1) - a_2^2 \frac{Q_{2n-1}^*(z)}{Q_{2n}^*(z)} \quad \text{e} \quad \frac{Q_{2n+2}^*(z)}{Q_{2n+1}^*(z)} = (z - b_2) - a_1^2 \frac{Q_{2n}^*(z)}{Q_{2n+1}^*(z)}.$$

Do corolário 3.1.2, sabemos que os limites das funções nessas duas equações existem. Suponhamos, então, que

$$\frac{Q_{2n+1}^*(z)}{Q_{2n}^*(z)} \rightarrow Q'(z) \quad \text{e} \quad \frac{Q_{2n+2}^*(z)}{Q_{2n+1}^*(z)} \rightarrow Q''(z).$$

Fazendo n tender para o infinito, obtemos:

$$Q'(z) = (z - b_1) - a_2^2 \frac{1}{Q''(z)} \quad \text{e} \quad Q''(z) = (z - b_2) - a_1^2 \frac{1}{Q'(z)}.$$

Assim, combinando continuamente essas equações, encontramos a fração contínua de Jacobi,

$$\frac{1}{Q'(z)} = \frac{1}{z - b_1 - \frac{a_2^2}{z - b_2 - \frac{a_1^2}{z - b_1 - \frac{a_2^2}{z - b_2 - \frac{a_1^2}{\ddots}}}}} = S(\phi(x); z),$$

que segue de (2.2.23) e (2.2.24) (veja [56, 12]), onde $\phi(x)$ é a função distribuição com relação à qual os polinômios $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$, com coeficientes dados por (3.1.33), são ortogonais.

Como na demonstração do Teorema 3.1.5, temos que

$$\frac{1}{Q'(z)} = \frac{a_{(1)}^2}{a_1^2} S\left(G\left(x - \frac{b_1 + b_2}{2}; \delta, \beta, \gamma\right); z\right) + \frac{a_1^2 - a_{(1)}^2}{a_1^2} S(U(x - b_1); z).$$

Daqui, o resultado do teorema segue. ■

Casos especiais desses polinômios já foram estudados por Chihara. Quando $b_1 = b_2 = b$ e $a_1 = a_2 = a$, os polinômios $Q_n(x)$ são iguais a $U_n((x - b)/2a)$, onde $U_n(x)$ é o polinômio de Tchebyshev de segunda espécie de grau n . Para $b_1 = -c$, $b_2 = c$ e $\alpha_n = 1/4$, Chihara [10] obteve a função peso

$$w(x) = \begin{cases} \left(\frac{|x+c|}{|x-c|}\right)^{1/2} (1+c^2-x^2)^{1/2}, & c^2 \leq x^2 \leq 1+c^2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e, para $b_1 = b_2 = 0$, $a_1 = a$ e $a_2 = b$, a função peso encontrada é dada por

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \left[\left(1 - \left(\frac{x^2 - b^2 - a^2}{2ab} \right) \right)^2 \right]^{1/2}, & x \in [-(a+b), -|b-a|] \cup [|b-a|, a+b], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que existe um salto no ponto zero (veja [12, p.91]).

3.2 Coeficientes da Relação de Recorrência Ilimitados

Nesta seção, vamos supor que os coeficientes da relação de recorrência para os polinômios ortogonais são ilimitados, mas variam regularmente e, têm comportamento diferente para índices pares e ímpares. O comportamento assintótico para a razão entre dois polinômios cujos índices diferem de uma ou duas unidades será discutido e usado para a obtenção da distribuição limitante desses polinômios. Os resultados serão, então, aplicados a polinômios ortogonais relacionados a funções elípticas. O artigo de Van Assche [6] foi a principal fonte de pesquisa para este estudo.

3.2.1 Introdução

Vamos supor, então, que os coeficientes da relação de recorrência convergem de uma maneira particular. Esta convergência será descrita por meio da definição de variação regular (veja [7, 45] para mais detalhes).

Definição 3.2.1 *Uma função mensurável, não-decrescente, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, varia regularmente (para o infinito) se, para algum α e todo $t > 0$,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(xt)/f(x) = t^\alpha,$$

e α é o coeficiente de variação regular.

É fácil ver que uma função que varia regularmente com expoente α pode ser escrita como $x^\alpha L(x)$, onde $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função de variação lenta, isto é, para todo $t > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(xt)/L(x) = 1.$$

Exemplos simples de funções de variação lenta são $|\log x|^a$, $|\log \log x|^b$, etc.

Definição 3.2.2 *Se $f(x)$ é uma função que varia regularmente (com expoente α), então $\lambda_n = f(n)$ é uma seqüência que varia regularmente com expoente α .*

Suponhamos, então, que exista uma seqüência que varia regularmente, $\{\lambda_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, com expoente $\alpha > 0$ tal que os coeficientes da relação de recorrência satisfazem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{2n}/\lambda_{2n} = \tilde{b}_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n}^{1/2}/\lambda_{2n} = \tilde{a}_1, \quad (3.2.34)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{2n+1}/\lambda_{2n} = \tilde{b}_2 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n+1}^{1/2}/\lambda_{2n} = \tilde{a}_2.$$

Daremos, aqui, algumas propriedades assintóticas dos polinômios ortogonais relacionados e também discutiremos os casos em que $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2$ e $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ e o caso especial onde $\tilde{a}_1$ ou $\tilde{a}_2$ é igual a zero. Esses resultados serão aplicados a algumas famílias de polinômios ortogonais relacionados a funções elípticas.

3.2.2 Resultados Preliminares

O lema seguinte é uma importante e útil observação feita por Dombrowski [16, 17, 18]:

Lema 3.2.1 Se $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz à relação de recorrência

$$u_{n+1} + b_n u_n + a_n u_{n-1} = 0, \quad n \geq 0, \quad (3.2.35)$$

com $u_{-1} = 0$, então

$$\frac{u_k^2 - u_{k+1}u_{k-1}}{a_1 a_2 \cdots a_k} = u_0^2 + \sum_{j=1}^k \left(\frac{b_j - b_{j-1}}{a_1 a_2 \cdots a_j} u_j u_{j-1} + \frac{a_j - a_{j-1}}{a_1 a_2 \cdots a_j} u_j u_{j-2} \right). \quad (3.2.36)$$

Demonstração: Seja $D_k = u_k^2 - u_{k+1}u_{k-1}$. Da fórmula de recorrência (3.2.35) para u_{k+1} , temos que $u_{k+1} = -b_k u_k - a_k u_{k-1}$.

Multiplicando-se ambos os membros por $-u_{k-1}$ e somando-se u_k^2 , obtemos

$$\begin{aligned} D_k &= u_k^2 - u_{k-1}(-b_k u_k - a_k u_{k-1}) \\ &= a_k D_{k-1} + u_k(u_k + b_k u_{k-1} + a_k u_{k-2}). \end{aligned}$$

Usando novamente a relação (3.2.35) para u_k , chegamos a

$$D_k = a_k D_{k-1} + u_k[(b_k - b_{k-1})u_{k-1} + (a_k - a_{k-1})u_{k-2}].$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_k &= a_k \{ a_{k-1} D_{k-2} + u_{k-1} [(b_{k-1} - b_{k-2}) u_{k-2} + (a_{k-1} - a_{k-2}) u_{k-3}] \\ &\quad + u_k [(b_k - b_{k-1}) u_{k-1} + (a_k - a_{k-1}) u_{k-2}] \} \\ &= a_{k-1} a_k D_{k-2} + [(b_{k-1} - b_{k-2}) u_{k-2} u_{k-1} + (b_k - b_{k-1}) u_{k-1} u_k] \\ &\quad + [(a_{k-1} - a_{k-2}) u_{k-3} u_{k-1} + (a_k - a_{k-1}) u_{k-2} u_k] \end{aligned}$$

O resultado (3.2.36) segue imediatamente da última expressão. ■

Lema 3.2.2 *Seja $\{R_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios. Então,*

$$\frac{R'_{2k}(x)}{R_{2k}(x)} = - \sum_{j=1}^k \left(\frac{R'_{2j-2}(x)}{R_{2j}(x)} \right)' / \left(\frac{R_{2j-2}(x)}{R_{2j}(x)} \right) \quad (3.2.37)$$

e

$$\frac{R'_{2k+1}(x)}{R_{2k+1}(x)} = - \sum_{j=0}^k \left(\frac{R'_{2j-1}(x)}{R_{2j+1}(x)} \right)' / \left(\frac{R_{2j-1}(x)}{R_{2j+1}(x)} \right). \quad (3.2.38)$$

Demonstração: A equação (3.2.37) segue imediatamente de

$$\frac{R'_{2k}(x)}{R_{2k}(x)} = \sum_{j=1}^k \left(\frac{R'_{2j}(x)}{R_{2j}(x)} - \frac{R'_{2j-2}(x)}{R_{2j-2}(x)} \right)$$

e da fórmula

$$\frac{R'_{2j}(x)}{R_{2j}(x)} - \frac{R'_{2j-2}(x)}{R_{2j-2}(x)} = - \left(\frac{R_{2j-2}(x)}{R_{2j}(x)} \right)' / \left(\frac{R_{2j-2}(x)}{R_{2j}(x)} \right)$$

De modo análogo, demonstramos (3.2.38). ■

Também utilizaremos o seguinte teorema abeliano:

Teorema 3.2.3 *Suponhamos que o conjunto $\{\epsilon_{n,j} : j \leq n, n = 1, 2, \dots\}$ forma uma matriz triangular limitada de números complexos tal que $\epsilon_{n,j} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e $j/n \rightarrow t \in [0, 1]$.*

Então, para qualquer $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1$,

$$z^k \sum_{j=0}^k \epsilon_{n,j} z^{-j} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$ e $k/n \rightarrow t \in [0, 1]$.

Demonstração: Consideremos uma seqüência $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que k_n/n tende para um número fixo $t \in [0, 1]$ quando n tende para o infinito. Observe que

$$z^{k_n} \sum_{j=0}^{k_n} \epsilon_{n,j} z^{-j} = \sum_{i=0}^{k_n} \epsilon_{n,k_n-i} z^i.$$

Para i fixo, temos, por hipótese, que $\epsilon_{n,k_n-i} \rightarrow 0$ quando n tende para o infinito e, como

$$|\epsilon_{n,k_n-i} z^i| \leq M |z|^i,$$

onde M é uma constante positiva,

$$\left| z^{k_n} \sum_{j=0}^{k_n} \epsilon_{n,j} z^{-j} \right| = \left| \sum_{i=0}^{k_n} \epsilon_{n,k_n-i} z^i \right| \leq \sum_{i=0}^{k_n} |\epsilon_{n,k_n-i} z^i| \leq M \sum_{i=0}^{k_n} |z|^i.$$

Podemos, agora, usar o Teorema da convergência dominada de Lebesgue 2.1.1 para obter o resultado desejado. ■

3.2.3 Propriedades Assintóticas

Teorema 3.2.4 *Suponhamos que os coeficientes da relação de recorrência (2.2.12) satisfaçam (3.2.34), onde $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência que varia regularmente com expoente $\alpha > 0$. Seja A uma constante positiva tal que $|x_{n,j}|/\lambda_{2n} < A$ para todo n (o que é possível por (2.2.27)). Então, para $n \rightarrow \infty$ e $k/n \rightarrow t \in [0, 1]$,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_{2n}^2} \frac{Q_k(\lambda_{2n} z)}{Q_{k-2}(\lambda_{2n} z)} \sim \tilde{Q}(z, t) &= \frac{1}{2} \left\{ (z - \tilde{b}_1 t^\alpha)(z - \tilde{b}_2 t^\alpha) - (\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2) t^{2\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{[(z - \tilde{b}_1 t^\alpha)(z - \tilde{b}_2 t^\alpha) - (\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2) t^{2\alpha}]^2 - 4 \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 t^{4\alpha}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus [-A, A]$.

Demonstração: Para d suficientemente grande, se $z \in [A + d, \infty)$, então, de (2.2.15) e do Teorema 2.2.12,

$$\lambda_{2n} \left| \frac{Q_{k-1}(\lambda_{2n} z)}{Q_k(\lambda_{2n} z)} \right| \leq \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j})}{z - x_{k,j}/\lambda_{2n}} < \frac{1}{d}.$$

Conseqüentemente, como $z - x_{k,j}/\lambda_{2n} > z - x_{n,n}/\lambda_{2n} > d$ (se $k \leq n$),

$$\lambda_{2n}^2 \left| \frac{Q_{k-2}(\lambda_{2n} z)}{Q_k(\lambda_{2n} z)} \right| < \frac{1}{d^2}. \quad (3.2.40)$$

Seja $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de inteiros tal que $k_n/n \rightarrow t$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\tilde{Q}_{k_n, n}(z) = \lambda_{2n}^2 \frac{Q_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}.$$

Primeiramente, provaremos que esta razão converge para $1/\tilde{Q}(z, t)$. Mas, de (3.2.40),

$$|\tilde{Q}_{k_n, n}(z)| < \frac{1}{d^2}. \quad (3.2.41)$$

Logo, existe uma subsequência, $\{\tilde{Q}_{k_{\tilde{n}}, \tilde{n}}(z)\}_{\tilde{n}=1}^{\infty}$, que converge. Mostraremos que $\{\tilde{Q}_{k_{\tilde{n}}, \tilde{n}}(z)\}_{\tilde{n}=1}^{\infty}$ e $\{\tilde{Q}_{k_{\tilde{n}+1}, \tilde{n}}(z)\}_{\tilde{n}=1}^{\infty}$ têm o mesmo limite, que é o limite de $\tilde{Q}_{k_n, n}(z)$.

Fazendo $u_k = Q_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)$, pelo Lema 3.2.1 e por (3.1.4) e (3.1.5),

$$\begin{aligned} \lambda_{2\tilde{n}}^2 \left| \frac{Q_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)}{Q_{2k_{\tilde{n}+2}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)} - \frac{Q_{2k_{\tilde{n}}-2}(\lambda_{2\tilde{n}}z)}{Q_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)} \right| &\leq \lambda_{2\tilde{n}}^2 \left| \frac{a_2(\lambda_{2\tilde{n}}z) \cdots a_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)}{Q_{2k_{\tilde{n}+2}}(\lambda_{2\tilde{n}}z) Q_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)} \right| \\ &+ \lambda_{2\tilde{n}}^2 \sum_{j=0}^{k_{\tilde{n}}} |a_{2j+2}(\lambda_{2\tilde{n}}z) \cdots a_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)| \\ &\times \left\{ |b_{2j}(\lambda_{2\tilde{n}}z) - b_{2j-2}(\lambda_{2\tilde{n}}z)| \left| \frac{Q_{2j}(\lambda_{2\tilde{n}}z) Q_{2j-2}(\lambda_{2\tilde{n}}z)}{Q_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z) Q_{2k_{\tilde{n}+2}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)} \right| \right. \\ &+ \left. |a_{2j}(\lambda_{2\tilde{n}}z) - a_{2j-2}(\lambda_{2\tilde{n}}z)| \left| \frac{Q_{2j}(\lambda_{2\tilde{n}}z) Q_{2j-4}(\lambda_{2\tilde{n}}z)}{Q_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z) Q_{2k_{\tilde{n}+2}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Agora, de (3.2.41), obtemos facilmente que, para $j \leq k_{\tilde{n}}$,

$$\left| \frac{Q_{2j}(\lambda_{2\tilde{n}}z)}{Q_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)} \right| = \prod_{i=j+1}^{k_{\tilde{n}}} \left| \frac{Q_{2i-2}(\lambda_{2\tilde{n}}z)}{Q_{2i}(\lambda_{2\tilde{n}}z)} \right| < \left(\frac{1}{\lambda_{2\tilde{n}}d} \right)^{2k_{\tilde{n}}-2j}.$$

Observe que $\lambda_{2k_{\tilde{n}}}/\lambda_{2\tilde{n}} = f(2k_{\tilde{n}})/f(2\tilde{n})$. Assim,

$$\lim_{\tilde{n} \rightarrow \infty} \frac{f(2\tilde{n}k_{\tilde{n}}/\tilde{n})}{f(2\tilde{n})} = \left(\frac{k_{\tilde{n}}}{\tilde{n}} \right)^{\alpha} \xrightarrow{\tilde{n} \rightarrow \infty} t^{\alpha}.$$

Logo, das condições (3.2.34), se $\tilde{n} \rightarrow \infty$ e $k_{\tilde{n}}/\tilde{n} \rightarrow t$,

$$\frac{\alpha_{2k_{\tilde{n}}}^{1/2}}{\lambda_{2\tilde{n}}} = \frac{\alpha_{2k_{\tilde{n}}}^{1/2}}{\lambda_{2k_{\tilde{n}}}} \frac{\lambda_{2k_{\tilde{n}}}}{\lambda_{2\tilde{n}}} \longrightarrow \tilde{a}_1 t^{\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha_{2k_{\tilde{n}+1}}^{1/2}}{\lambda_{2\tilde{n}}} = \frac{\alpha_{2k_{\tilde{n}+1}}^{1/2}}{\lambda_{2k_{\tilde{n}}}} \frac{\lambda_{2k_{\tilde{n}}}}{\lambda_{2\tilde{n}}} \longrightarrow \tilde{a}_2 t^{\alpha}.$$

De maneira análoga,

$$\frac{\beta_{2k_{\tilde{n}}}}{\lambda_{2\tilde{n}}} = \frac{\beta_{2k_{\tilde{n}}}}{\lambda_{2k_{\tilde{n}}}} \frac{\lambda_{2k_{\tilde{n}}}}{\lambda_{2\tilde{n}}} \longrightarrow \tilde{b}_1 t^{\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{\beta_{2k_{\tilde{n}+1}}}{\lambda_{2\tilde{n}}} = \frac{\beta_{2k_{\tilde{n}+1}}}{\lambda_{2k_{\tilde{n}}}} \frac{\lambda_{2k_{\tilde{n}}}}{\lambda_{2\tilde{n}}} \longrightarrow \tilde{b}_2 t^{\alpha},$$

o que significa que, para nossa sequência $\{k_{\tilde{n}}\}$, a matriz $\{a_{2j}(\lambda_{2\tilde{n}}z)/\lambda_{2\tilde{n}}^4; j \leq k_{\tilde{n}}, \tilde{n} = 1, 2, \dots\}$

é limitada por uma constante C . Com isto, (3.2.42) torna-se

$$\begin{aligned} \lambda_{2\tilde{n}}^2 \left| \frac{Q_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)}{Q_{2k_{\tilde{n}+2}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)} - \frac{Q_{2k_{\tilde{n}}-2}(\lambda_{2\tilde{n}}z)}{Q_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)} \right| &\leq \left(\frac{C}{d^4} \right)^{k_{\tilde{n}}} + \left(\frac{C}{d^4} \right)^{k_{\tilde{n}}} \sum_{j=1}^{k_{\tilde{n}}} \left\{ \frac{|b_{2j}(\lambda_{2\tilde{n}}z) - b_{2j-2}(\lambda_{2\tilde{n}}z)|}{\lambda_{2\tilde{n}}^2 d^4} \right. \\ &+ \left. \frac{|a_{2j}(\lambda_{2\tilde{n}}z) - a_{2j-2}(\lambda_{2\tilde{n}}z)|}{\lambda_{2\tilde{n}}^4 d^6} \right\} \left(\frac{C}{d^4} \right)^{-j}. \end{aligned}$$

Podemos, agora, escolher d suficientemente grande tal que $C < d^4$ e, pelo Teorema 3.2.3, segue que

$$\tilde{Q}_{k_{\tilde{n}}+1, \tilde{n}}(z) - \tilde{Q}_{k_{\tilde{n}}, \tilde{n}}(z) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \tilde{n} \rightarrow \infty \text{ e } k_{\tilde{n}}/\tilde{n} \rightarrow t.$$

Assim, como $\{\tilde{Q}_{k_{\tilde{n}}, \tilde{n}}(z)\}$ é uma subsequência convergente, então $\{\tilde{Q}_{k_{\tilde{n}}+1, \tilde{n}}(z)\}_{\tilde{n}=1}^{\infty}$ também converge e tem o mesmo limite. Seja $1/\tilde{Q}(z, t)$ este limite. De (3.1.4) e (3.1.5), temos que

$$\frac{1}{\tilde{Q}_{k_{\tilde{n}}+1, \tilde{n}}(z)} = \frac{a_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)}{\lambda_{2\tilde{n}}^2} - \frac{b_{2k_{\tilde{n}}}(\lambda_{2\tilde{n}}z)}{\lambda_{2\tilde{n}}^4} \tilde{Q}_{k_{\tilde{n}}, \tilde{n}}(z).$$

Fazendo $\tilde{n} \rightarrow \infty$, obtemos

$$\tilde{Q}(z, t) = a(z, t) - b(z, t)/\tilde{Q}(z, t),$$

onde

$$a(z, t) = (z - \tilde{b}_1 t^\alpha)(z - \tilde{b}_2 t^\alpha) - (\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2)t^{2\alpha} \quad \text{e} \quad b(z, t) = \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 t^{4\alpha}.$$

Daí, segue que

$$\tilde{Q}(z, t) = \frac{1}{2} \{a(z, t) \pm \sqrt{a^2(z, t) - 4b(z, t)}\}.$$

Devemos escolher o sinal positivo uma vez que $\tilde{Q}(z, t)$ tende para o infinito quando z vai para infinito. Toda subsequência de $\{\tilde{Q}_{k_n, n}(z)\}_{n=1}^{\infty}$, portanto, tem o mesmo limite, de onde o resultado segue para $z \in [A + d, \infty)$.

Como $\{\tilde{Q}_{k_n, n}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções analíticas em $\mathcal{C} \setminus [-A, A]$, se tomarmos um conjunto compacto K em $\mathcal{C} \setminus [-A, A]$, a distância ϵ deste conjunto ao intervalo $[-A, A]$ é estritamente positiva e, para $z \in K$, obtemos o limite superior

$$|\tilde{Q}_{k_n, n}(z)| \leq \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Além disso, sabemos que $\tilde{Q}_{k_n, n}(z)$ converge em todo subconjunto de $\mathcal{C} \setminus [-A, A]$ com um ponto de acumulação. Então, pelo Teorema de Stieltjes-Vitali 2.1.4, $\tilde{Q}_{k_n, n}(z)$ converge uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathcal{C} \setminus [-A, A]$.

Repetindo o mesmo argumento para a subsequência

$$Q_{k_n, n}^*(z) = \lambda_{2n}^2 \frac{Q_{2k_n-1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k_n+1}(\lambda_{2n}z)},$$

encontramos que esta sequência também converge para $1/\tilde{Q}(z, t)$, o que demonstra o teorema. ■

Teorema 3.2.5 *Sob as mesmas condições do teorema anterior, temos*

$$(i) \quad \frac{1}{\lambda_{2n}} \frac{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k-1}(\lambda_{2n}z)} \sim \frac{\tilde{Q}(z, t) + \tilde{a}_1^2 t^{2\alpha}}{z - \tilde{b}_1 t^\alpha}, \quad (3.2.43)$$

$$(ii) \quad \frac{1}{\lambda_{2n}} \frac{Q_{2k+1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)} \sim \frac{\tilde{Q}(z, t) + \tilde{a}_2^2 t^{2\alpha}}{z - \tilde{b}_2 t^\alpha}, \quad (3.2.44)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathcal{C} \setminus [-A, A]$.

Demonstração: Da fórmula de recorrência (2.2.12), obtemos facilmente que

$$\frac{1}{\lambda_{2n}^2} \frac{Q_{2k+1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k-1}(\lambda_{2n}z)} = \left(z - \frac{\beta_{2k}}{\lambda_{2n}} \right) \left(\frac{1}{\lambda_{2n}} \frac{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k-1}(\lambda_{2n}z)} \right) - \frac{\alpha_{2k}}{\lambda_{2n}^2}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow t$ e usando o Teorema 3.2.4, (3.2.43) segue imediatamente.

Analogamente, demonstramos (3.2.44). ■

Teorema 3.2.6 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 3.2.4, quando $n \rightarrow \infty$ temos que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{(d/dz)Q_n(\lambda_{2n}z)}{Q_n(\lambda_{2n}z)} &\longrightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\partial/\partial z)\tilde{Q}(z, t)}{\tilde{Q}(z, t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{z - (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2)t^\alpha/2}{\sqrt{[(z - \tilde{b}_1 t^\alpha)(z - \tilde{b}_2 t^\alpha) - (\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2)t^{2\alpha}]^2 - 4\tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 t^{4\alpha}}} dt, \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathcal{C} \setminus [-A, A]$.

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar o resultado para $z \in [A + d, \infty)$. Consideremos, então, a função

$$g_n(t) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{Q_{2[nt]}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2[nt]+2}(\lambda_{2n}z)} \right) \bigg/ \left(\frac{Q_{2[nt]}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2[nt]+2}(\lambda_{2n}z)} \right), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.2.46)$$

onde $[a]$ é a parte inteira do número real a . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 g_n(t) dt &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{1/n} g_n(t) dt + \int_{1/n}^{2/n} g_n(t) dt + \cdots + \int_{(n-1)/n}^1 g_n(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{1/n} - \left(\frac{Q_0(\lambda_{2n}z)}{Q_2(\lambda_{2n}z)} \right)' / \left(\frac{Q_0(\lambda_{2n}z)}{Q_2(\lambda_{2n}z)} \right) dt \right. \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{1/n}^{2/n} - \left(\frac{Q_2(\lambda_{2n}z)}{Q_4(\lambda_{2n}z)} \right)' / \left(\frac{Q_2(\lambda_{2n}z)}{Q_4(\lambda_{2n}z)} \right) dt + \cdots \\ &+ \left. \int_{(n-1)/n}^1 - \left(\frac{Q_{2n-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2n}(\lambda_{2n}z)} \right)' / \left(\frac{Q_{2n-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2n}(\lambda_{2n}z)} \right) dt \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n - \left(\frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)} \right)' / \left(\frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \frac{(d/dz) Q_{2n}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2n}(\lambda_{2n}z)} \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

pelo Lema 3.2.2.

Se fixarmos t , pelo Teorema 3.2.4,

$$g_n(t) \rightarrow - \frac{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\tilde{Q}(z, t)} \right)}{\frac{1}{\tilde{Q}(z, t)}} = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{Q}(z, t),$$

que segue da convergência uniforme de funções analíticas (e de suas derivadas) em conjuntos compactos. Também, para $t \in [(j-1)/n, j/n]$,

$$\begin{aligned} g_n(t) &= - \frac{d}{dz} \left(\frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)} \right) / \left(\frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)} \right) \\ &= - \frac{d}{dz} \left(\frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j-1}(\lambda_{2n}z)} \right) / \frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j-1}(\lambda_{2n}z)} \\ &\quad - \frac{d}{dz} \left(\frac{Q_{2j-1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)} \right) / \frac{Q_{2j-1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)}, \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

onde a segunda igualdade é obtida ao multiplicarmos o numerador e o denominador por $Q_{2j-1}(\lambda_{2n}z)$.

Então,

$$G_{n,d}(z) = \sum_{j=1}^n \lambda_{2nj} g_n(t) < \frac{1}{d}. \quad (3.2.50)$$

O Teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dá (3.2.45) para $z \in [A + d, \infty)$. O resultado geral segue do Teorema de Stieltjes-Vitali 2.1.4. Usando o

mesmo argumento, demonstramos o resultado para os índices ímpares. ■

Os Teoremas 3.2.5 e 3.2.6 podem ser usados para construir fórmulas de quadratura que usam os zeros dos polinômios ortogonais. Como na seção anterior, usaremos aqui o conceito de convergência fraca. Para $|\tilde{\gamma}| \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{\beta}$, consideremos as funções distribuições (3.1.12) e (3.1.13) já definidas e

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{(1)} &= \min\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\}, & \tilde{b}_{(2)} &= \max\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\}, \\ \tilde{a}_{(1)} &= \min\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\} & \text{e} & \tilde{a}_{(2)} = \max\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\}.\end{aligned}$$

Teorema 3.2.7 *Sob as condições do Teorema 3.2.4, para toda função contínua f , quando $n \rightarrow \infty$ e $k/n \rightarrow t \in [0, 1]$, temos que*

$$(i) \sum_{j=1}^{2k} \lambda_{2k,j} p_{2k-1}^2(x_{2k,j}) f(x_{2k,j}/\lambda_{2n}) \longrightarrow \frac{\tilde{a}_{(1)}^2}{\tilde{a}_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG \left(x - \frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} t^\alpha; \tilde{\delta} t^\alpha, \tilde{\beta} t^\alpha, -\tilde{\gamma} t^\alpha \right) + \frac{\tilde{a}_1^2 - \tilde{a}_{(1)}^2}{\tilde{a}_1^2} f(\tilde{b}_2 t^\alpha),$$

$$(ii) \sum_{j=1}^{2k+1} \lambda_{2k,j} p_{2k}^2(x_{2k+1,j}) f(x_{2k+1,j}/\lambda_{2n}) \longrightarrow \frac{\tilde{a}_{(1)}^2}{\tilde{a}_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG \left(x - \frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} t^\alpha; \tilde{\delta} t^\alpha, \tilde{\beta} t^\alpha, \tilde{\gamma} t^\alpha \right) + \frac{\tilde{a}_2^2 - \tilde{a}_{(1)}^2}{\tilde{a}_2^2} f(\tilde{b}_1 t^\alpha),$$

$$(iii) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}/\lambda_{2n}) \longrightarrow \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF \left(x - \frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} t^\alpha; \tilde{\delta} t^\alpha, \tilde{\beta} t^\alpha \right) dt,$$

onde

$$\tilde{\delta}^2 = \left(\frac{\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2}{2} \right)^2 + (\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2)^2, \quad \tilde{\beta}^2 = \left(\frac{\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2}{2} \right)^2 + (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)^2 \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma} = \frac{\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2}{2}. \quad (3.2.49)$$

Demonstração: Sejam as funções distribuições discretas

$$G_{n,k}(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j}) U(x - x_{k,j}/\lambda_{2n}) \quad (3.2.50)$$

e

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U(x - x_{n,j}/\lambda_{2n}), \quad (3.2.51)$$

onde $U(x)$ é a função indicadora dada por (3.1.19).

A transformada de Stieltjes dessas funções são dadas por:

$$S(G_{n,k}(x); z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dG_{n,k}(x)}{z - x} = \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j})}{z - x_{k,j}/\lambda_{2n}} = \lambda_{2n} \frac{Q_{k-1}(\lambda_{2n}z)}{Q_k(\lambda_{2n}z)}, \quad (3.2.52)$$

que podemos obter de (2.2.15), e

$$S(F_n(x); z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_n(x)}{z - x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - x_{n,j}/\lambda_{2n}} = \frac{1}{n} \frac{(d/dz)Q_n(\lambda_{2n}z)}{Q_n(\lambda_{2n}z)}, \quad (3.2.53)$$

que segue diretamente de (2.2.16).

O comportamento assintótico dessas transformadas é dado pelos Teoremas 3.2.5 e 3.2.6. Pelo Teorema de Grommer-Hamburger 2.1.6, seus limites devem ser as transformadas de Stieltjes dos limites fracos das funções distribuições $G_{n,k}(x)$ e $F_n(x)$ (seção 3.1). A identificação dos limites de (3.2.52) pode ser feita usando-se o Teorema 3.2.5, ou seja, para n e k pares,

$$S(G_{2n,2k}(x); z) \longrightarrow \frac{z - \tilde{b}_1 t^\alpha}{\tilde{Q}(z, t) + \tilde{a}_1^2 t^{2\alpha}},$$

enquanto que para n par e k ímpar,

$$S(G_{2n,2k+1}(x); z) \longrightarrow \frac{z - \tilde{b}_2 t^\alpha}{\tilde{Q}(z, t) + \tilde{a}_2^2 t^{2\alpha}}.$$

Seguindo o mesmo procedimento da demonstração do Teorema 3.1.5 da seção anterior, temos que

$$\begin{aligned} S(G_{2n,2k}(x); z) &= \sum_{j=1}^{2k} \frac{\lambda_{2k,j} p_{2k-1}^2(x_{2k,j})}{(z - x_{2k,j}/\lambda_{2n})} \\ &\longrightarrow \frac{\tilde{a}_{(1)}^2}{\tilde{a}_1^2} S\left(G\left(x - \frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} t^\alpha; \tilde{\delta} t^\alpha, \tilde{\beta} t^\alpha, -\tilde{\gamma} t^\alpha\right); z\right) \\ &\quad + \frac{\tilde{a}_1^2 - \tilde{a}_{(1)}^2}{\tilde{a}_1^2} S(U(x - \tilde{b}_2 t^\alpha); z). \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

Assim, podemos concluir o item (i).

De maneira análoga, demonstramos o item (ii) simplesmente substituindo-se o par $(\tilde{b}_1, \tilde{a}_1)$ por $(\tilde{a}_2, \tilde{b}_2)$.

Para identificar o limite de (3.2.53), observe que o integrando de (3.2.45) é a transformada de Stieltjes da função distribuição $F(x - (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2)t^\alpha/2; \tilde{\delta} t^\alpha, \tilde{\beta} t^\alpha)$ de onde o resultado segue. ■

A distribuição assintótica dos zeros dos polinômios ortogonais cujos coeficientes da relação de recorrência variam regularmente é, portanto, igual à versão integral da distribuição assintótica dos zeros dos polinômios ortogonais com coeficientes de recorrência limitados (como vimos na seção anterior).

3.2.4 Casos Especiais

Consideraremos, agora, alguns casos especiais dos teoremas anteriores desta seção.

O caso mais importante é quando $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = \tilde{b}$ e $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = \tilde{a} > 0$. Neste caso,

$$\sum_{j=1}^k \lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j}) f(x_{k,j}/\lambda_{2n}) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG(x - \tilde{b}t^\alpha; 0, 2\tilde{a}t^\alpha, 0) dt.$$

Fazendo $z = xt^\alpha$ e, em seguida, $x = z$, obtemos

$$\sum_{j=1}^k \lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j}) f(x_{k,j}/\lambda_{2n}) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(xt^\alpha) dG((x - \tilde{b})t^\alpha; 0, 2\tilde{a}t^\alpha, 0) dt.$$

Mas,

$$G((x - \tilde{b})t^\alpha; 0, 2\tilde{a}t^\alpha, 0) = \frac{1}{2\tilde{b}^2\pi t^\alpha} \int_{-\infty}^{(x-\tilde{b})t^\alpha} \sqrt{4\tilde{a}^2 t^{2\alpha} - u^2} I_{[-2\tilde{a}t^\alpha, 2\tilde{a}t^\alpha]}(u) du.$$

Utilizando a mudança de variáveis $u = (z - \tilde{b})t^\alpha$ e, em seguida, $u = z$, obtemos

$$G((x - \tilde{b})t^\alpha; 0, 2\tilde{a}t^\alpha, 0) = \frac{1}{2\tilde{b}^2\pi} \int_{-\infty}^x \sqrt{4\tilde{a}^2 - (u - \tilde{b})^2} I_{[\tilde{b}-2\tilde{a}, \tilde{b}+2\tilde{a}]}(u) du.$$

Portanto, o resultado do Teorema 3.2.7 torna-se

$$\sum_{j=1}^k \lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j}) f(x_{k,j}/\lambda_{2n}) \longrightarrow \frac{1}{2\tilde{a}^2\pi} \int_{\tilde{b}-2\tilde{a}}^{\tilde{b}+2\tilde{a}} \sqrt{4\tilde{a}^2 - (x - \tilde{b})^2} f(xt^\alpha) dx,$$

enquanto que, usando as mesmas mudanças de variáveis anteriores,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}/\lambda_{2n}) \longrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{\tilde{b}-2\tilde{a}}^{\tilde{b}+2\tilde{a}} f(xt^\alpha) \frac{dx}{\sqrt{4\tilde{a}^2 - (x - \tilde{b})^2}} dt.$$

Se fizermos $f(x) = x^M$ nesta última expressão, então,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_{n,j}}{\lambda_{2n}} \right)^M \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{1}{M\alpha + 1} \int_{\tilde{b}-2\tilde{a}}^{\tilde{b}+2\tilde{a}} \frac{y^M dy}{\sqrt{4\tilde{a}^2 - (y - \tilde{b})^2}} dt.$$

Um importante caso a ser considerado é quando $\tilde{a}_1$ ou $\tilde{a}_2$ é igual a zero. Neste caso, vemos que $\tilde{\delta} = \tilde{\beta}$ no Teorema 3.2.7 e as funções distribuições F e G tornam-se degeneradas em dois pontos.

De fato, do Teorema 3.2.7, temos que

$$S(F_n(x); z) \longrightarrow S(F(x - (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_1)t^\alpha/2; \tilde{\beta}t^\alpha, \tilde{\beta}t^\alpha); z).$$

Logo, de (3.2.55), obtemos que

$$F(x - (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_1)t^\alpha/2; \tilde{\beta}t^\alpha, \tilde{\beta}t^\alpha) = \frac{1}{2}U(x - (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_1)t^\alpha/2 - \tilde{\beta}t^\alpha) + \frac{1}{2}U(x - (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_1)t^\alpha/2 + \tilde{\beta}t^\alpha).$$

Portanto,

$$F(x; \tilde{\beta}, \tilde{\beta}) = \frac{1}{2}U(x - \tilde{\beta}) + \frac{1}{2}U(x + \tilde{\beta}).$$

De (3.1.15), temos que

$$\begin{aligned} S(G(x; \tilde{\beta}t^\alpha, \tilde{\beta}t^\alpha, \tilde{\gamma}t^\alpha); z) &= \frac{1}{2\tilde{\beta}} \left\{ \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}}{z - \tilde{\beta}t^\alpha} + \frac{\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}}{z + \tilde{\beta}t^\alpha} \right\} \\ &= \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}}{2\tilde{\beta}} S(U(x - \tilde{\beta}t^\alpha); z) + \frac{\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}}{2\tilde{\beta}} S(U(x + \tilde{\beta}t^\alpha); z). \end{aligned}$$

Daí,

$$G(x; \tilde{\beta}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}}{2\tilde{\beta}} U(x - \tilde{\beta}) + \frac{\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}}{2\tilde{\beta}} U(x + \tilde{\beta}). \quad (3.2.55)$$

O resultado do Teorema 3.2.7 pode, então, ser dado como

$$\sum_{j=1}^{2k} \lambda_{2k,j} p_{2k-1}^2(x_{2k,j}) f(x_{2k,j}/\lambda_{2n}) \longrightarrow \begin{cases} f(\tilde{b}_2 t^\alpha), & \text{se } \tilde{a}_2 = 0, \\ \frac{1}{2\tilde{\beta}} \left\{ \left(\frac{\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1}{2} + \tilde{\beta} \right) f\left(\left(\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} + \tilde{\beta} \right) t^\alpha \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1}{2} + \tilde{\beta} \right) f\left(\left(\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} - \tilde{\beta} \right) t^\alpha \right) \right\}, & \text{se } \tilde{a}_1 = 0. \end{cases}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} S(G_{2n,2k}(x); z) &\longrightarrow \frac{z - \tilde{b}_1 t^\alpha}{\tilde{Q}(z, t) + \tilde{a}_1^2 t^{2\alpha}} = \frac{1}{z - \tilde{b}_2 t^\alpha} \\ &= S(U(x - \tilde{b}_2 t^\alpha); z), \end{aligned}$$

3.2.5 Exemplos

se $\tilde{a}_2 = 0$, de onde concluímos a primeira parte do resultado acima.

Se $\tilde{a}_1 = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{z - \tilde{b}_1 t^\alpha}{\tilde{Q}(z, t) + \tilde{a}_1^2 t^{2\alpha}} &= \frac{z - \tilde{b}_1 t^\alpha}{[z - \frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} t^\alpha - \tilde{\beta} t^\alpha][z - \frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} t^\alpha + \tilde{\beta} t^\alpha]} \\ &= \frac{1}{2\tilde{\beta}} \left\{ (\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}) S \left(U \left(x - \left(\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} + \tilde{\beta} \right) t^\alpha; z \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}) S \left(U \left(x - \left(\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} - \tilde{\beta} \right) t^\alpha; z \right) \right) \right\}, \end{aligned}$$

o que conclui o resultado. De maneira análoga,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2k+1} \lambda_{2k+1,j} p_{2k}^2(x_{2k+1,j}) f(x_{2k+1,j}/\lambda_{2n}) \\ \rightarrow \begin{cases} f(\tilde{b}_1 t^\alpha), & \text{se } \tilde{a}_1 = 0, \\ \frac{1}{2\tilde{\beta}} \left\{ \left(\frac{\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2}{2} + \tilde{\beta} \right) f \left(\left(\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} + \tilde{\beta} \right) t^\alpha \right) \right. \\ \quad \left. + \left(\frac{\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1}{2} + \tilde{\beta} \right) f \left(\left(\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} - \tilde{\beta} \right) t^\alpha \right) \right\}, & \text{se } \tilde{a}_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Já, de (3.2.45), temos que

$$\begin{aligned} S(F_n(x); z) &\rightarrow \int_0^1 \frac{z - (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2)t^\alpha/2}{\sqrt{[(z - \tilde{b}_1 t^\alpha)(z - \tilde{b}_2 t^\alpha) - a_{(2)}^2 t^{2\alpha}]^2}} dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{z - (\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} - \tilde{\beta})t^\alpha} + \frac{1}{z - (\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} + \tilde{\beta})t^\alpha} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ S \left(U \left(x - \left(\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} - \tilde{\beta} \right) t^\alpha; z \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + S \left(U \left(x - \left(\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} + \tilde{\beta} \right) t^\alpha; z \right) \right) \right\} dt. \end{aligned} \quad (3.2.55)$$

Daí,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}/\lambda_{2n}) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ f \left(\left(\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} + \tilde{\beta} \right) t^\alpha \right) + f \left(\left(\frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} - \tilde{\beta} \right) t^\alpha \right) \right\} dt,$$

onde f é uma função contínua, $n \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow t$ e

$$\tilde{\beta}^2 = ((\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2)/2)^2 + a_{(2)}^2.$$

3.2.5 Exemplos

Importantes famílias de polinômios ortogonais satisfazem a uma relação de recorrência com coeficientes que variam regularmente, tais como os polinômios de Laguerre, Hermite,

Meixner (de primeira de segunda espécies), Poisson-Charlier e Carlitz. Para todas essas famílias pode-se aplicar os resultados obtidos nesta seção. Esses polinômios já foram tratados por Nevai e Dehesa [38]. Veremos rapidamente polinômios com limites diferentes para índices pares e ímpares.

Stieltjes [51], Carlitz [8] e Al-Salam [2] estudaram dois sistemas de polinômios ortogonais $\{C_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{D_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ cujas fórmulas de recorrência satisfazem

$$C_{n+1}(x) = xC_n(x) - \alpha_n C_{n-1}(x) \quad (3.2.56)$$

e

$$D_{n+1}(x) = xD_n(x) - \beta_n D_{n-1}(x), \quad (3.2.57)$$

com

$$\begin{aligned} \alpha_{2n} &= (2n)^2 \kappa^2, & \alpha_{2n+1} &= (2n+1)^2, \\ \beta_{2n} &= (2n)^2, & \beta_{2n+1} &= (2n+1)^2 \kappa^2 \end{aligned}$$

e κ é um número real (ver [12, p.193]). Esses polinômios ortogonais estão relacionados a funções elípticas da seguinte maneira. Sejam

$$K(\kappa^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{e} \quad q = e^{-\pi \frac{K(1 - \kappa^2)}{K(\kappa^2)}}.$$

Se $0 < \kappa < 1$, então $0 < q < 1$ e as funções distribuições $W(x)$ para os polinômios $\{C_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{D_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são, respectivamente,

$$W^{(C)}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{q^{(2j+1)/2}}{1 + q^{2j+1}} U\left(x - \frac{2j+1}{2K(\kappa^2)}\pi\right)$$

e

$$W^{(D)}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{q^j}{1 + q^{2j}} U\left(x - \frac{j}{K(\kappa^2)}\pi\right),$$

onde $U(x)$ é a função definida em (3.1.19) (veja [12, p.194]). Isto significa que os polinômios $\{C_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{D_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são ortogonais no espaço gerado por $\pi/K(\kappa^2)$.

É óbvio que as condições (3.2.34) são válidas com $\lambda_{2n} = n$ ($\alpha = 1$). Para os polinômios definidos em (3.2.56), encontramos $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = 0$, $\tilde{a}_1 = \kappa$ e $\tilde{a}_2 = 1$. Para os polinômios dados por (3.2.57) temos que $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = 0$, $\tilde{a}_1 = 1$ e $\tilde{a}_2 = \kappa$. Se usarmos o Teorema 3.2.4, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{C_k(nz)}{C_{k-2}(nz)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{D_k(nz)}{D_{k-2}(nz)} \\ &= \frac{1}{2} \{z^2 - (\kappa^2 + 1)^2 + \sqrt{[z^2 - (\kappa - 1)^2 t^2][z^2 - (\kappa + 1)^2 t^2]}\},\end{aligned}$$

uniformemente para z em conjuntos compactos de $\mathcal{C} \setminus [-A, A]$. Do limite superior (2.2.27), segue que podemos tomar $A = 2$ se $0 < \kappa < 1$, $n \rightarrow \infty$ e $k/n \rightarrow t \in [0, 1]$. O valor 2 para A certamente não é o melhor possível e, provavelmente, o comportamento assintótico vale uniformemente para z num subconjunto compacto de $\mathcal{C} \setminus ([-(1 + \kappa)t, -(1 - \kappa)t] \cup [(1 - \kappa)t, (1 + \kappa)t])$. Entretanto, não é fácil provar esta última afirmação.

Sejam $\{x_{n,j}^{(C)}\}_{j=1}^n$ e $\{x_{n,j}^{(D)}\}_{j=1}^n$ os zeros de $C_n(x)$ e $D_n(x)$, respectivamente. Então, pelo Teorema 3.2.7, temos que, para toda função contínua f e $0 < \kappa < 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2k} \lambda_{2k,j}^{(C)} c_{2k-1}^2(x_{2k,j}^{(C)}) f(x_{2k,j}^{(C)}/2n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2k+1} \lambda_{2k+1,j}^{(D)} d_{2k}^2(x_{2k+1,j}^{(D)}) f(x_{2k+1,j}^{(D)}/2n) \\ &= \frac{1}{\kappa^2 \pi} \int_{1-\kappa}^{1+\kappa} \frac{f(tx) + f(-tx)}{2} \frac{\sqrt{(1+\kappa)^2 - x^2} \sqrt{x^2 - (1-\kappa)^2}}{x} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2k+1} \lambda_{2k+1,j}^{(C)} c_{2k}^2(x_{2k+1,j}^{(C)}) f(x_{2k+1,j}^{(C)}/2n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2k} \lambda_{2k,j}^{(D)} d_{2k-1}^2(x_{2k,j}^{(D)}) f(x_{2k,j}^{(D)}/2n) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{1-\kappa}^{1+\kappa} \frac{f(tx) + f(-tx)}{2} \frac{\sqrt{(1+\kappa)^2 + x^2} \sqrt{x^2 - (1-\kappa)^2}}{x} dx,\end{aligned}$$

onde o significado de $\lambda_{n,j}^{(C)}$ e $\lambda_{n,j}^{(D)}$ é óbvio e $\{c_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{d_n(x)\}_{n=0}^\infty$ são os polinômios ortonormais.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}^{(C)}/n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}^{(D)}/n) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{1-\kappa}^{1+\kappa} (f(tx) + f(-tx)) \frac{x}{\sqrt{(1+\kappa)^2 - x^2} \sqrt{(1-\kappa)^2 - x^2}} dx dt.\end{aligned}$$

tamento dos polinômios $\tilde{B}_n(z)$ e de seus zeros sob as seguintes condições assintóticas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{2n} = \beta^{(0)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_{2n} = \alpha^{(0)} \quad (4.1.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{2n+1} = \beta^{(1)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_{2n+1} = \alpha^{(1)}$$

Capítulo 4

Propriedades Assintóticas dos Polinômios Similares

Neste capítulo, faremos um estudo semelhante ao que foi feito no capítulo anterior para os polinômios ortogonais mas, agora, para os polinômios similares aos ortogonais, $\tilde{B}_n(z)$.

Na seção 4.1, usamos principalmente o trabalho de Andrade, Sri Ranga e Van Assche [3] e na seção 4.2, apresentamos os resultados obtidos por nós para o caso em que os coeficientes da relação de recorrência são ilimitados.

4.1 Coeficientes da Relação de Recorrência Limitados

4.1.1 Introdução

Sejam $\tilde{X} = (0, \infty) \setminus [\check{d}, \hat{d}]$ e $\tilde{Z} = \mathcal{T} \setminus [\check{d}, \hat{d}]$. Quando (2.3.46) e/ou (2.3.47) valem, então $\tilde{X}$ é não vazio.

Vamos supor, a partir de agora, que (2.3.46) sempre vale e consideremos o compor-



tamento dos polinômios $\tilde{B}_n(z)$ e de seus zeros sob as seguintes condições assintóticas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{2n} = \beta^{(0)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_{2n} = \alpha^{(0)} \quad (4.1.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{2n+1} = \beta^{(1)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_{2n+1} = \alpha^{(1)}.$$

Nesta seção, daremos informações sobre o comportamento limite das seqüências $\left\{ \frac{\tilde{B}_{2n-1}(z)}{\tilde{B}_{2n}(z)} \right\}$, $\left\{ \frac{\tilde{B}_{2n}(z)}{\tilde{B}_{2n+1}(z)} \right\}$ e $\left\{ \frac{\tilde{B}'_n(z)}{(n\tilde{B}_n(z))} \right\}$, $n \geq 1$.

4.1.2 Seqüências Encadeadas e Resultados de Convergência

De (2.3.38), temos que

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{n+1}(z) &= (z - \tilde{\beta}_{n+1})\tilde{B}_n(z) - \tilde{\alpha}_{n+1}z\tilde{B}_{n-1}(z) \\ &= [(z - \tilde{\beta}_{n+1})(z - \tilde{\beta}_n) - \tilde{\alpha}_{n+1}z]\tilde{B}_{n-1}(z) - \tilde{\alpha}_n(z - \tilde{\beta}_{n+1})z\tilde{B}_{n-2}(z). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Mas, como

$$\tilde{B}_{n-1}(z) = (z - \tilde{\beta}_{n-1})\tilde{B}_{n-2}(z) - \tilde{\alpha}_{n-1}z\tilde{B}_{n-3}(z),$$

então,

$$\tilde{B}_{n-2}(z) = \frac{\tilde{B}_{n-1}(z) + \tilde{\alpha}_{n-1}z\tilde{B}_{n-3}(z)}{z - \tilde{\beta}_{n-1}}.$$

Substituindo-se em (4.1.2), obtemos a seguinte relação de recorrência

$$\tilde{B}_{n+1}(z) = a_{n+1}(z)\tilde{B}_{n-1}(z) - b_{n+1}(z)\tilde{B}_{n-3}(z), \quad n \geq 3, \quad (4.1.3)$$

onde

$$a_{n+1}(z) = (z - \tilde{\beta}_n)(z - \tilde{\beta}_{n+1}) - \tilde{\alpha}_n \frac{z - \tilde{\beta}_{n+1}}{z - \tilde{\beta}_{n-1}} - \tilde{\alpha}_{n+1}z \quad (4.1.4)$$

e

$$b_{n+1}(z) = \tilde{\alpha}_{n-1}\tilde{\alpha}_n \frac{z - \tilde{\beta}_{n+1}}{z - \tilde{\beta}_{n-1}} z^2. \quad (4.1.5)$$

Podemos verificar facilmente que, para $z \in (\hat{d}, \infty)$, $\tilde{B}_{n-1}(z)$ e $\tilde{B}_{n+1}(z)$ são estritamente positivos, pois não se anulam, uma vez que seus zeros estão no intervalo $[\hat{d}, \hat{d}]$ e vão para infinito quando z vai para o infinito.

Para $z \in (0, \tilde{d})$, $\tilde{B}_{n-1}(z)$ e $\tilde{B}_{n+1}(z)$ também não se anulam (pelo mesmo motivo anterior). Se $\tilde{B}_n(z) > 0$ nesse intervalo, então, pelo Teorema 2.3.5, $\tilde{B}_{n-1}(z) < 0$ e $\tilde{B}_{n+1}(z) < 0$. Se $\tilde{B}_n(z) < 0$ nesse intervalo, então $\tilde{B}_{n-1}(z) > 0$ e $\tilde{B}_{n+1}(z) > 0$.

Logo, para $z \in \tilde{X}$, $\frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} > 0$, $n \geq 1$ e $b_{n-1}(z) > 0$, $n \geq 3$.

Dividindo-se ambos os membros de (4.1.3) por $\tilde{B}_{n-1}(z)$, obtemos

$$a_{n+1}(z) = \frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} + b_{n-1}(z) \frac{\tilde{B}_{n-3}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)}, \quad n \geq 3. \quad (4.1.6)$$

Logo, segue que $a_{n+1}(z) > 0$ para $n \geq 3$ e $z \in \tilde{X}$. Como

$$a_2(z) = (z - \tilde{\beta}_1)(z - \tilde{\beta}_2) - \tilde{\alpha}_2 z = \tilde{B}_2(z)$$

e

$$a_3(z) = (z - \tilde{\beta}_2)(z - \tilde{\beta}_3) - \tilde{\alpha}_2 \frac{z - \tilde{\beta}_3}{z - \tilde{\beta}_1} z - \tilde{\alpha}_3 z = \tilde{B}_3(z)/\tilde{B}_1(z),$$

então $a_2(z)$ e $a_3(z)$ também são positivos para $z \in \tilde{X}$. Da relação de recorrência (4.1.3), obtemos que

$$\frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{a_{n-1}(z)\tilde{B}_{n-1}(z)} = 1 - \frac{b_{n-1}(z)\tilde{B}_{n-3}(z)}{a_{n-1}(z)\tilde{B}_{n-1}(z)}.$$

Daí,

$$\left\{ 1 - \frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{a_{n-1}(z)\tilde{B}_{n-1}(z)} \right\} = \frac{b_{n-1}(z)\tilde{B}_{n-3}(z)}{a_{n-1}(z)\tilde{B}_{n-1}(z)}.$$

Logo,

$$\frac{\tilde{B}_{n-1}(z)}{a_{n-1}(z)\tilde{B}_{n-3}(z)} \left\{ 1 - \frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{a_{n+1}(z)\tilde{B}_{n-1}(z)} \right\} = \frac{b_{n+1}(z)}{a_{n-1}(z)a_{n+1}(z)}, \quad n \geq 3 \quad (4.1.7)$$

que, para qualquer $z \in \tilde{X}$, nos fornece duas seqüências encadeadas $\{g_n^{(0)}(z)\}$ e $\{g_n^{(1)}(z)\}$, onde

$$g_n^{(\nu)}(z) = \{1 - \tilde{m}_{n-1}^{(\nu)}(z)\}\tilde{m}_n^{(\nu)}(z), \quad n \geq 1, \quad \text{para } \nu = 0, 1,$$

com

$$g_n^{(\nu)}(z) = \frac{b_{2n+2+\nu}(z)}{a_{2n+2+\nu}(z)a_{2n+\nu}(z)}, \quad n \geq 1 \quad (4.1.8)$$

e

$$\tilde{m}_n^{(\nu)}(z) = 1 - \frac{\tilde{B}_{2n+2+\nu}(z)}{a_{2n+2+\nu}(z)\tilde{B}_{2n+\nu}(z)}, \quad n \geq 0.$$

Como $\tilde{m}_0^{(\nu)}(z) = 0$ para $\nu = 0$ e $\nu = 1$, a seqüência $\{\tilde{m}_n^{(\nu)}(z)\}$ é uma seqüência minimal de parâmetros para $\{g_n^{(\nu)}(z)\}$.

Agora, sob as condições assintóticas (4.1.1), de (4.1.4), (4.1.5) e (4.1.8), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z) = (z - \beta^{(0)})(z - \beta^{(1)}) - (\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(z) = \alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(\nu)}(z) = \frac{\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2}{[(z - \beta^{(0)})(z - \beta^{(1)}) - (\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z]^2} = g(z),$$

para qualquer $z \in \tilde{X}$. Assim, do Teorema 2.1.7, segue que $0 \leq g(z) \leq 1/4$ e que as correspondentes seqüências de parâmetros $\{\tilde{m}_n^{(\nu)}(z)\}$ convergem para limites que dependem somente de $g(z)$. Isto significa que ambas as seqüências convergem para o mesmo limite e, conseqüentemente, $\tilde{B}_{n+1}(z)/\tilde{B}_{n-1}(z)$ converge para um limite $R_2(z)$ para qualquer $z \in \tilde{X}$. Fazendo n tender para o infinito em (4.1.7), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{R_2(z)}{(z - \beta^{(0)})(z - \beta^{(1)}) - (\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z} \left\{ 1 - \frac{R_2(z)}{(z - \beta^{(0)})(z - \beta^{(1)}) - (\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z} \right\} \\ = \frac{\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2}{[(z - \beta^{(0)})(z - \beta^{(1)}) - (\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z]^2}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} R_2(z) = \frac{1}{2} \left\{ (z - \beta^{(0)})(z - \beta^{(1)}) - (\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z \right. \\ \left. + \sqrt{[(z - \beta^{(0)})(z - \beta^{(1)}) - (\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z]^2 - 4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2} \right\}. \end{aligned}$$

Agora, do Teorema 2.2.12, para $z \in \tilde{Z}$,

$$\left| \frac{\tilde{B}_{n-1}(z)}{\tilde{B}_{n+1}(z)} \right| = \left| \frac{\tilde{B}_{n-1}(z)}{\tilde{B}_n(z)} \right| \left| \frac{\tilde{B}_n(z)}{\tilde{B}_{n+1}(z)} \right| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \left| \sum_{r=1}^n \tau_{n,r} \right| \left| \sum_{r=1}^{n+1} \tau_{n+1,r} \right| = \frac{1}{\epsilon^2}, \quad (4.1.9)$$

onde $\epsilon = \text{dist}(z, [\tilde{d}, \hat{d}])$. Isto significa que a seqüência $\tilde{B}_{n-1}(z)/\tilde{B}_{n+1}(z)$, $n \geq 1$, é uniformemente limitada em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z}$. Portanto, do Teorema de Stieltjes-Vitali 2.1.4, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.1.1 *Suponhamos que as condições (2.3.46) e (4.1.1) sejam satisfeitas. Então,*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} = R_2(z) = \frac{1}{2} \left\{ z^2 - (\beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z + \beta^{(0)}\beta^{(1)} \right. \\ \left. + \sqrt{[z^2 - (\beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z + \beta^{(0)}\beta^{(1)}]^2 - 4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2} \right\}, \end{aligned}$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z}$.

De (2.3.38), temos

$$\frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} = (z - \tilde{\beta}_{n+1}) \frac{\tilde{B}_n(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} - \tilde{\alpha}_{n+1}z,$$

o que nos permite concluir que

Corolário 4.1.2 *Suponha que as condições (2.3.46) e (4.1.1) sejam satisfeitas. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{B}_{2n}(z)}{\tilde{B}_{2n+1}(z)} = R_3^{(0)}(z) = \frac{z - \beta^{(0)}}{R_2(z) + \alpha^{(0)}z},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{B}_{2n-1}(z)}{\tilde{B}_{2n}(z)} = R_3^{(1)}(z) = \frac{z - \beta^{(1)}}{R_2(z) + \alpha^{(1)}z},$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z}$.

Como $\tilde{B}_{n+1}(z)/\tilde{B}_{n-1}(z)$ é analítica em $\tilde{Z}$, podemos tomar as derivadas na correspondente fórmula assintótica. Então, pelo Teorema 4.1.1,

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} \right) = \frac{\tilde{B}'_{n+1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} - \frac{\tilde{B}'_{n-1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} \frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} \rightarrow R'_2(z)$$

para qualquer $z \in \tilde{Z}$. Assim, de

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} \right) / \left(\frac{\tilde{B}_{n+1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} \right) = \frac{\tilde{B}'_{n+1}(z)}{\tilde{B}_{n+1}(z)} - \frac{\tilde{B}'_{n-1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)},$$

obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\tilde{B}'_{n+1}(z)}{\tilde{B}_{n+1}(z)} - \frac{\tilde{B}'_{n-1}(z)}{\tilde{B}_{n-1}(z)} \right) = \frac{R'_2(z)}{R_2(z)}, \quad (4.1.9)$$

para qualquer $z \in \tilde{Z}$.

Estamos, agora, em condições de demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.1.3 *Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior, temos que*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{B}'_n(z)}{n \tilde{B}_n(z)} = \frac{R'_2(z)}{2R_2(z)} &= \frac{1}{2z} \frac{z^2 - \beta^{(0)}\beta^{(1)}}{\sqrt{[z^2 - (\beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z + \beta^{(0)}\beta^{(1)}]^2 - 4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2}} + \frac{1}{2z} \\ &= R_4(z), \end{aligned}$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z}$.

Demonstração: Como a sequência $\tilde{B}_{n+1}(z)/\tilde{B}_{n-1}(z)$ converge para $R_2(z)$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z}$, pelo Teorema 2.1.2, a sequência de suas derivadas, $(\tilde{B}_{n+1}(z)/\tilde{B}_{n-1}(z))'$, também convergirá para $R_2'(z)$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\tilde{Z}$. Logo, (4.1.9) é válido uniformemente em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z}$.

Agora, seja K um conjunto compacto em $\tilde{Z}$ e N tal que $\tilde{B}_n(z)$ não tem zeros em K para $n \geq 2N - 2$. Podemos, então, escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \frac{\tilde{B}'_{2n}(z)}{\tilde{B}_{2n}(z)} &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\tilde{B}'_{2j}(z)}{\tilde{B}_{2j}(z)} - \frac{\tilde{B}'_{2j-2}(z)}{\tilde{B}_{2j-2}(z)} \right) + \frac{1}{2n} \sum_{j=N}^n \left(\frac{\tilde{B}'_{2j}(z)}{\tilde{B}_{2j}(z)} - \frac{\tilde{B}'_{2j-2}(z)}{\tilde{B}_{2j-2}(z)} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=N}^n \left(\frac{\tilde{B}'_{2j}(z)}{\tilde{B}_{2j}(z)} - \frac{\tilde{B}'_{2j-2}(z)}{\tilde{B}_{2j-2}(z)} \right) + \frac{1}{2n} \left(\frac{\tilde{B}'_{2N-2}(z)}{\tilde{B}_{2N-2}(z)} \right). \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Pelo Lema de Cesàro 2.1.5, concluímos que

$$\frac{1}{2n} \frac{\tilde{B}'_{2n}(z)}{\tilde{B}_{2n}(z)} \sim \frac{1}{2} \frac{R_2'(z)}{R_2(z)}$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z}$.

Um raciocínio análogo garante o resultado para os índices ímpares.

Para se obter o valor da função limite $(R_4(z))$, tomemos

$$\begin{aligned} 2R_2(z) &= z^2 - (\beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z + \beta^{(0)}\beta^{(1)} \\ &\quad + \{[z^2 - (\beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z + \beta^{(0)}\beta^{(1)}]^2 - 4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2\}^{1/2} \end{aligned}$$

e calculemos a derivada. Obtemos, então, que

$$2R_2'(z) = \frac{[2z - (\beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})]2R_2(z) - 4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z}{\{(z^2 - (\beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z + \beta^{(0)}\beta^{(1)})^2 - 4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2\}^{1/2}}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2}{R_2(z)} &= z^2 - (\beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z + \beta^{(0)}\beta^{(1)} \\ &\quad - \{[z^2 - (\beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})z + \beta^{(0)}\beta^{(1)}]^2 - 4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

O resultado do teorema segue, agora, imediatamente. ■

Note que

$$\frac{\tilde{B}'_n(z)}{n\tilde{B}_n(z)} = \sum_{r=1}^n \frac{1/n}{z - z_{n,r}} = \int_d^d \frac{1}{z - t} d\tilde{F}_n(t), \quad (4.1.11)$$

onde a função escada $n\tilde{F}_n(t) = \sum_{r=1}^n U(t - z_{n,r})$ representa o número de zeros de $\tilde{B}_n(z)$ menores ou iguais a t . Logo, podemos extrair informações sobre o comportamento assintótico dos zeros de $\tilde{B}_n(z)$ a partir da função limite $R_4(z)$. Primeiramente, podemos escrever $R_4(z)$ como

$$R_4(z) = \frac{1}{2z} \frac{z^2 - \beta^{(0)}\beta^{(1)}}{\sqrt{z-a}\sqrt{z-\tilde{a}}\sqrt{z-b}\sqrt{z-\tilde{b}}} + \frac{1}{2z}, \quad (4.1.12)$$

onde $0 \leq a \leq \tilde{a} \leq b$ satisfazem

$$ab = \tilde{a}\tilde{b} = \beta^{(0)}\beta^{(1)}, \quad a + b = \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} + 2\sqrt{\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}}$$

e

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} - 2\sqrt{\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}}.$$

Além disso, podemos decompô-la da forma

$$\begin{aligned} R_4(z) &= \frac{-c_0}{z} \frac{\sqrt{z-b}\sqrt{z-\tilde{b}}}{\sqrt{z-a}\sqrt{z-\tilde{a}}} + \frac{c_1}{z} \frac{\sqrt{z-a}\sqrt{z-\tilde{a}}}{\sqrt{z-b}\sqrt{z-\tilde{b}}} + \frac{1}{2z} \\ &= \frac{c_0}{z} \left[\sqrt{\frac{b\tilde{b}}{a\tilde{a}}} - \frac{\sqrt{z-b}\sqrt{z-\tilde{b}}}{\sqrt{z-a}\sqrt{z-\tilde{a}}} \right] + \frac{c_1}{z} \left[\frac{\sqrt{z-a}\sqrt{z-\tilde{a}}}{\sqrt{z-b}\sqrt{z-\tilde{b}}} - \sqrt{\frac{a\tilde{a}}{b\tilde{b}}} \right], \end{aligned}$$

onde

$$c_0 = \frac{\beta^{(0)}\beta^{(1)} + a\tilde{a}}{2(b\tilde{b} - a\tilde{a})} \quad \text{e} \quad c_1 = \frac{\beta^{(0)}\beta^{(1)} + b\tilde{b}}{2(b\tilde{b} - a\tilde{a})}.$$

As relações acima indicam que $R_4(z)$ é finita e real se, e somente se, z não pertence à união $[a, \tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b]$.

4.1.3 Representação Integral

Da convergência (4.1.11) já estabelecida e do Teorema de Grommer-Hamburger 2.1.6, segue que existe uma função não-decrescente $\tilde{F}$ em $E \subset [\tilde{d}, \hat{d}]$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tilde{d}}^{\hat{d}} \frac{1}{z-t} d\tilde{F}_n(t) = R_4(z) = \int_E \frac{1}{z-t} d\tilde{F}(t), \quad (4.1.13)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z} = \overline{\mathcal{U}} \setminus [\tilde{d}, \hat{d}]$ e, como consequência, $\tilde{F}_n$ converge (fracamente) para $\tilde{F}$. Este resultado também significa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f(z_{n,r}) = \int_E f(x) d\tilde{F}(x)$$

para toda função f contínua e limitada em $(0, \infty)$.

O teorema a seguir nos dá, explicitamente, a expressão para a função distribuição $\tilde{F}(t)$.

Teorema 4.1.4 *Suponhamos que (2.3.46) e (4.1.1) sejam válidos e que $0 < \beta^{(0)}\beta^{(1)}$ e $0 < \alpha^{(0)}\alpha^{(1)}$. Então,*

$$\tilde{F}(t; \gamma_0, \gamma_1, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \frac{|x - \beta|(x + \beta)/x}{\sqrt{\gamma_1^2 x - (x - \beta)^2} \sqrt{(x - \beta)^2 - \gamma_0^2 x}} I_E(x) dx,$$

onde $I_E(x) = U(x - a) - U(x - \tilde{a}) + U(x - \tilde{b}) - U(x - b)$ é a função indicadora do conjunto

$$E = B = [a, \tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b], \quad \gamma_1^2 = (\sqrt{\beta^{(0)}} - \sqrt{\beta^{(1)}})^2 + (\sqrt{\alpha^{(0)}} + \sqrt{\alpha^{(1)}})^2 = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2, \\ \gamma_0^2 = (\sqrt{\beta^{(0)}} - \sqrt{\beta^{(1)}})^2 + (\sqrt{\alpha^{(0)}} - \sqrt{\alpha^{(1)}})^2 = (\sqrt{\tilde{b}} - \sqrt{\tilde{a}})^2 \quad \text{e} \quad \beta = \sqrt{\beta^{(0)}\beta^{(1)}}.$$

Demonstração: Como $0 < \beta^{(0)}\beta^{(1)} < \infty$ e $0 < \alpha^{(0)}\alpha^{(1)} < \infty$, temos que

$$0 < a < \tilde{a} \leq \tilde{b} < b < \infty.$$

Seja $T(x) = x - (\beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}) + \beta^{(0)}\beta^{(1)}/x$.

Logo,

$$T'(x) = 1 - \frac{\beta^{(0)}\beta^{(1)}}{x^2}.$$

Então, podemos escrever

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \frac{|T'(x)|}{\sqrt{4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)} - \{T(x)\}^2}} I_B(x) dx.$$

Assim, basta mostrarmos que

$$R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{1}{z - t} \frac{|T'(t)|}{\sqrt{4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)} - \{T(t)\}^2}} dt$$

é igual a $R_4(z)$.

Fazendo a substituição $y = T(t)$, obtemos que

$$R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}} \frac{2}{2z - [(u_1 + y) - \sqrt{(u_1 + y)^2 - 4u_2}]} \frac{dy}{\sqrt{4u_3 - y^2}} \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}} \frac{2}{2z - [(u_1 + y) + \sqrt{(u_1 + y)^2 - 4u_2}]} \frac{dy}{\sqrt{4u_3 - y^2}},$$

onde $u_1 = \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}$, $u_2 = \beta^{(0)}\beta^{(1)}$ e $u_3 = \alpha^{(0)}\alpha^{(1)}$.

Portanto,

$$R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}} \frac{2z - (u_1 + y)}{z^2 - (u_1 + y)z + u_2} \frac{dy}{\sqrt{4u_3 - y^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}} \frac{1 - \frac{1}{2z}(u_1 + y)}{T(z) - y} \frac{dy}{\sqrt{4u_3 - y^2}}.$$

Como

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{z - y} \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - \lambda^2}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 - y^2}} = 1$$

para qualquer $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}} \frac{1 - \frac{1}{2z}[u_1 + T(z)] + \frac{1}{2z}[T(z) - y]}{T(z) - y} \frac{dy}{\sqrt{4u_3 - y^2}} \\ &= \left(1 - \frac{u_1}{2z} - \frac{T(z)}{2z}\right) \frac{1}{\sqrt{\{T(z)\}^2 - 4u_3}} + \frac{1}{2z}. \end{aligned}$$

Substituindo, agora, a expressão para $T(z)$, chegamos que $R(z) = R_4(z)$, o que completa a demonstração. ■

Note que podemos também escrever

$$R_4(z) = \frac{1}{2z} \frac{z^2 - \beta^2}{\sqrt{(z - \beta)^2 - \gamma_1^2 z} \sqrt{(z - \beta)^2 - \gamma_0^2 z}} + \frac{1}{2z},$$

e

$$R_2(z) = \frac{1}{2} \left\{ (z - \beta)^2 - \hat{\gamma}^2 z + \sqrt{(z - \beta)^2 - \gamma_0^2 z} \sqrt{(z - \beta)^2 - \gamma_1^2 z} \right\}, \quad (4.1.14)$$

onde $\hat{\gamma}^2 = (\sqrt{\beta^{(0)}} - \sqrt{\beta^{(1)}})^2 + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}$.

Consideraremos, agora, a convergência da razão $\tilde{B}_{n-1}(z)/\tilde{B}_n(z)$. Primeiramente, vejamos o seguinte teorema.

Teorema 4.1.5 *Sejam $a, \tilde{a}, b, \tilde{b}$ tais que $0 < a < \tilde{a} \leq \tilde{b} < b < \infty$ e $ab = \tilde{a}\tilde{b} = \beta^2$. Então, para $d_2 = (\sqrt{b} - \sqrt{a})$, $d_1 = (\sqrt{\tilde{b}} - \sqrt{\tilde{a}})$, $d_0^2 \leq d_1^2$ e $B = [a, \tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b]$,*

$$D \int_B \frac{1}{bz - t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) dt = L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta), \quad (4.1.15)$$

onde

$$D = \frac{2}{\pi} \frac{[(d_2^2 - d_0^2)^{1/2} + (d_1^2 - d_0^2)^{1/2}]^2}{(d_2^2 - d_1^2)^2},$$

$$V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) = \frac{\sqrt{d_2^2 t - (t - \beta)^2} \sqrt{(t - \beta)^2 - d_1^2 t}}{t[(t - \beta)^2 - d_0^2 t]} \frac{(t - \beta)(t - \delta)}{|t - \beta|},$$

e

$$L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) = \frac{2(z - \delta)}{(z - \beta)^2 - d_0^2 z - [(d_2^2 - d_0^2)(d_1^2 - d_0^2)]^{1/2} z + \sqrt{(z - \beta)^2 - d_1^2 z} \sqrt{(z - \beta)^2 - d_2^2 z}}.$$

Demonstração: Para $|d_0| \leq d_1 < d_2$ e $\hat{B} = [-d_2, -d_1] \cup [d_1, d_2]$, da equação (3.1.15), temos que

$$\begin{aligned} S(G(x; d_1, d_2, d_0); w) + S(G(x; d_1, d_2, -d_0); w) &= D \int_{\hat{B}} \frac{1}{w - x} \frac{\sqrt{d_2^2 - x^2} \sqrt{x^2 - d_1^2}}{[x^2 - d_0^2]} |x| dx \\ &= \frac{2w}{w^2 - d_0^2 - [(d_2^2 - d_0^2)(d_1^2 - d_0^2)]^{1/2} + \sqrt{w^2 - d_1^2} \sqrt{w^2 - d_2^2}}. \end{aligned}$$

Em [50], Sri Ranga, Andrade e Phillips mostraram que

$$\int_{\hat{B}} \frac{1}{w - x} d\phi(x) = cte. 2\sqrt{z} \int_B \frac{1}{z - t} d\psi(t),$$

quando

$$d\psi(t) = cte. \frac{t}{t + \beta} d\phi(x(t)), \quad (4.1.16)$$

$d\phi(x)$ é uma distribuição simétrica clássica em $\hat{B}$ e $x(t) = (t - \beta)/\sqrt{t}$. Usando $x(t)$ em (4.1.16), obtemos que

$$d\phi(t) = V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt.$$

Portanto,

$$D \int_{\hat{B}} \frac{1}{w - x} d\phi(x) = D \int_B \frac{1}{z - t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt.$$

Aplicando a mudança de variáveis $w = (z - \beta)/\sqrt{z}$ e $x = (t - \beta)/\sqrt{t}$, obtemos que

$$D \int_B \frac{1}{z - t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt = L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta).$$

Observe que

$$I = \int_B \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t - \beta} dt = \int_a^{\tilde{a}} \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t - \beta} dt + \int_{\tilde{b}}^b \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t - \beta} dt.$$

Fazendo $t = \beta^2/u$ e, em seguida, $u = t$ na primeira integral, teremos que

$$\begin{aligned} I &= -\int_b^{\tilde{b}} \frac{1}{\beta^2/t - \beta} V(\beta^2/t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) \frac{\beta^2}{t^2} dt + \int_{\tilde{b}}^b \frac{1}{t - \beta} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt \\ &= \int_{\tilde{b}}^b \frac{t}{\beta^2 - \beta t} \frac{t}{\beta} V(\beta^2/t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) \frac{\beta^2}{t^2} dt + \int_{\tilde{b}}^b \frac{1}{t - \beta} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt = 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} D \int_B \frac{1}{z - t} \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t - \beta} dt &= \frac{D}{z - \beta} \int_B \frac{z - t + t - \beta}{z - t} \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t - \beta} dt \\ &= \frac{D}{z - \beta} \left\{ \int_B \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t - \beta} dt + \int_B \frac{1}{z - t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt \right\} \\ &= \frac{D}{z - \beta} \int_B \frac{1}{z - t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt \\ &= \frac{1}{z - \beta} L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} D \int_B \frac{1}{z - t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) dt &= D \int_B \frac{1}{z - t} \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t - \beta} (t - \beta + \beta - \delta) dt \\ &= D \int_B \frac{1}{z - t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt \\ &\quad + (\beta - \delta) D \int_B \frac{1}{z - t} \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t - \beta} dt \\ &= \left(1 + \frac{\beta - \delta}{z - \beta} \right) L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) \\ &= \frac{z - \delta}{z - \beta} L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) = L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Note que a função $V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta)$ é uma função peso em B somente se $\tilde{a} \leq \delta \leq \tilde{b}$.

Portanto, obtivemos duas funções distribuições, que são:

$$\tilde{F}(t; \gamma_0, \gamma_1, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \frac{|x - \beta|(x + \beta)/x}{\sqrt{\gamma_1^2 x - (x - \beta)^2} \sqrt{(x - \beta)^2 - \gamma_0^2 x}} I_E(x) dx \quad (4.1.17)$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) &= \frac{2 [(d_2^2 - d_0^2)^{1/2} + (d_1^2 - d_0^2)^{1/2}]^2}{\pi (d_2^2 - d_1^2)^2} \\
&\times \int_{-\infty}^t \frac{\sqrt{d_2^2 u - (u - \beta)^2} \sqrt{(u - \beta)^2 - d_1^2 u} (u - \beta)(u - \delta)}{u[(u - \beta)^2 - d_0^2 u]} I_E(u) du, \\
&= D \int_{-\infty}^t V(u; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) I_E(u) du,
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

onde γ_0 , γ_1 e E foram definidos no Teorema 4.1.4 e d_0 , d_1 , d_2 , β e δ , no Teorema 4.1.5.

Observe, também, que essas duas funções distribuições $\tilde{F}$ e $\tilde{G}$, nada mais são do que as funções distribuições F e G que usamos no capítulo anterior, modificadas pela transformação $x(t) = (t - \beta)/\sqrt{t}$, o que era de se esperar (ver [48]).

Teorema 4.1.6 *Suponhamos que (2.3.46) e (4.1.1) sejam válidos e que $0 < \beta^{(0)}\beta^{(1)}$ e $0 < \alpha^{(0)}\alpha^{(1)}$. Então,*

$$R_3^{(0)}(z) = \int_{E^{(0)}} \frac{1}{z - t} d\phi^{(0)}(t) = \frac{1 - \alpha_{\min}/\alpha^{(0)}}{z - \beta^{(1)}} + \frac{1}{2\pi\alpha^{(0)}} \int_B \frac{1}{z - t} V(t; \gamma_0, \gamma_1, \lambda, \beta, \beta^{(0)}) dt$$

e

$$R_3^{(1)}(z) = \int_{E^{(1)}} \frac{1}{z - t} d\phi^{(1)}(t) = \frac{1 - \alpha_{\min}/\alpha^{(1)}}{z - \beta^{(0)}} + \frac{1}{2\pi\alpha^{(1)}} \int_B \frac{1}{z - t} V(t; \gamma_0, \gamma_1, \lambda, \beta, \beta^{(1)}) dt,$$

onde B , γ_0 e γ_1 são os mesmos do Teorema 4.1.4, $\lambda^2 = (\sqrt{\beta^{(0)}} - \sqrt{\beta^{(1)}})^2$, $\alpha_{\min} = \min\{\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}\}$,

$$\phi^{(0)}(x) = \left(1 - \frac{\alpha_{\min}}{\alpha^{(0)}}\right) U(x - \beta^{(1)}) + \frac{\alpha_{\min}}{\alpha^{(0)}} \tilde{G}(x; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta^{(0)})$$

e

$$\phi^{(1)}(x) = \left(1 - \frac{\alpha_{\min}}{\alpha^{(1)}}\right) U(x - \beta^{(0)}) + \frac{\alpha_{\min}}{\alpha^{(1)}} \tilde{G}(x; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta^{(1)}).$$

Demonstração: De (4.2.29) e do corolário 4.1.2,

$$\begin{aligned}
R_3^{(0)}(z) &= 2(z - \beta^{(0)}) \times \left\{ (z - \beta^{(0)})(z - \beta^{(1)}) - (\alpha^{(1)} - \alpha^{(0)})z \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{[(z - \beta^{(0)})(z - \beta^{(1)}) - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(0)})z]^2 - 4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2} \right\}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

e

$$R_3^{(1)}(z) = \frac{2(z - \beta^{(1)})}{(z - \beta)^2 - \lambda^2 z - (\alpha^{(0)} - \alpha^{(1)})z + \sqrt{(z - \beta)^2 - \gamma_0^2 z} \sqrt{(z - \beta)^2 - \gamma_1^2 z}}. \tag{4.1.20}$$

Usando o mesmo raciocínio feito na demonstração do Teorema 3.1.5, este limite pode ser escrito como

$$R_3^{(0)}(z) = \frac{|\alpha^{(1)} - \alpha^{(0)}| - (\alpha^{(1)} - \alpha^{(0)})}{2\alpha^{(0)}(z - \beta^{(1)})} + \frac{\{(\alpha^{(1)} + \alpha^{(0)}) - |\alpha^{(1)} - \alpha^{(0)}|\}}{2\alpha^{(0)}} L(z; \gamma_0, \gamma_1, \lambda, \beta, \beta^{(0)}).$$

Lembremos que

$$D \int_B \frac{1}{z-t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) dt = L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta).$$

Logo, analisando os casos $\alpha^{(1)} \geq \alpha^{(0)}$ e $\alpha^{(1)} < \alpha^{(0)}$,

$$\frac{\{(\alpha^{(1)} + \alpha^{(0)}) - |\alpha^{(1)} - \alpha^{(0)}|\}}{2\alpha^{(0)}} L(z; \gamma_0, \gamma_1, \lambda, \beta, \beta^{(0)}) = \frac{1}{2\pi\alpha^{(0)}} \int_B \frac{1}{z-t} V(t; \gamma_0, \gamma_1, \lambda, \beta, \beta^{(0)}) dt.$$

Assim, o primeiro resultado deste teorema segue do Teorema 4.1.5. De maneira análoga, o outro resultado do teorema é obtido trocando-se $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$ por $(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$ em (4.1.19). ■

O resultado desse último teorema e as equações (2.3.44) e (4.1.13) nos permitem concluir que

Teorema 4.1.7 Para toda função contínua e limitada f em $(0, \infty)$,

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{2n} \tau_{2n,r} f(z_{2n,r}) = \int_{E^{(1)}} f(t) d\phi^{(1)}(t),$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{2n+1} \tau_{2n+1,r} f(z_{2n+1,r}) = \int_{E^{(0)}} f(t) d\phi^{(0)}(t)$$

e

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f(z_{n,r}) = \int_E f(t) d\tilde{F}(t; \gamma_0, \gamma_1, \beta),$$

onde $\phi^{(0)}(x)$ e $\phi^{(1)}(x)$ são as mesmas funções dadas no Teorema 4.1.6.

4.1.4 Casos Especiais

Vamos considerar, agora, alguns casos especiais. Note que, mesmo que os coeficientes β_n , α_{n+1} , $n \geq 1$, sejam positivos, qualquer um de seus limites, isto é, qualquer um

dos valores $\beta^{(0)}$, $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(1)}$ e $\alpha^{(1)}$, pode assumir o valor zero.

Caso 1 : Vamos considerar o caso em que

$$\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} = \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \beta^{(0)} = \beta^{(1)} = \beta > 0.$$

Então, $\tilde{a} = \tilde{b} = \beta$, $a = \beta + 2\alpha - \sqrt{(\beta + 2\alpha)^2 - \beta^2}$ e $b = \beta + 2\alpha + \sqrt{(\beta + 2\alpha)^2 - \beta^2}$.

Substituindo esses valores em (4.1.12) e no Teorema 4.1.4, obtemos

$$R_4(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \frac{z + \beta}{\sqrt{z - a}\sqrt{z - b}} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{z - t} \frac{1 + \beta/t}{\sqrt{b - t}\sqrt{t - a}} dt. \quad (4.1.21)$$

Do Teorema 4.1.6, segue que $R_3^{(0)}(z) = R_3^{(1)}(z) = R_3(z)$, onde

$$R_3(z) = \frac{2}{z - \beta + \sqrt{(z - \beta)^2 - 4\alpha z}} = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_a^b \frac{1}{z - t} V(t; 0, 2\sqrt{\alpha}, 0, \beta, \beta) dt,$$

pois $(z - a)(z - b) = (z - \beta)^2 - 4\alpha z$.

Caso 2 : Agora, consideremos o caso onde $\alpha^{(0)}$ ou $\alpha^{(1)}$ assume o valor zero. Sejam (para ν igual a 0 ou 1),

$$\alpha^{(\nu)} = 0, \quad \alpha^{(1-\nu)} = \alpha \geq 0, \quad \beta^{(\nu)} > 0 \quad \text{e} \quad \beta^{(1-\nu)} > 0.$$

Então, de (4.1.12), segue que $a = \tilde{a}$ e $b = \tilde{b}$. Com isto, podemos escrever

$$R_4(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \frac{z^2 - \beta^{(0)}\beta^{(1)}}{(z - a)(z - b)} = \frac{1/2}{z - a} + \frac{1/2}{z - b}.$$

Portanto, $\tilde{F}(t) = \frac{1}{2}U(t - a) + \frac{1}{2}U(t - b)$.

Note que se $\alpha = 0$, então $a = \beta_{\min} = \min\{\beta^{(0)}, \beta^{(1)}\}$ e $b = \beta_{\max} = \max\{\beta^{(0)}, \beta^{(1)}\}$.

De (4.1.19) e (4.1.20), podemos concluir que:

- se $\alpha^{(0)} = \alpha$, então

$$R_3^{(0)}(z) = \frac{1}{z - \beta^{(1)}} \quad \text{e} \quad R_3^{(1)}(z) = \frac{z - \beta^{(1)}}{(z - a)(z - b)} = \frac{\beta^{(1)} - a}{b - a} \frac{1}{z - a} + \frac{b - \beta^{(1)}}{b - a} \frac{1}{z - b}.$$

- se $\alpha^{(1)} = \alpha$, então

$$R_3^{(0)}(z) = \frac{z - \beta^{(0)}}{(z - a)(z - b)} = \frac{\beta^{(0)} - a}{b - a} \frac{1}{z - a} + \frac{b - \beta^{(0)}}{b - a} \frac{1}{z - b} \quad \text{e} \quad R_3^{(1)}(z) = \frac{1}{z - \beta^{(0)}}.$$

Caso 3 : Consideraremos, agora, o caso

$$\alpha^{(\nu)} \geq 0, \quad \alpha^{(1-\nu)} \geq 0, \quad \beta^{(\nu)} = 0 \quad \text{e} \quad \beta^{(1-\nu)} = \beta \geq 0.$$

Segue que $u_2 = 0$ e, assim,

$$a = \tilde{a} = 0, \quad \tilde{b} = \beta + (\sqrt{\alpha^{(0)}} - \sqrt{\alpha^{(1)}})^2 \quad \text{e} \quad b = \beta + (\sqrt{\alpha^{(0)}} + \sqrt{\alpha^{(1)}})^2.$$

Substituindo esses valores em (4.1.12), temos que

$$R_4(z) = \frac{1/2}{z} + \frac{1/2}{\sqrt{z - \tilde{b}}\sqrt{z - b}} = \frac{1/2}{z} + \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{b}}^b \frac{1}{z - t} \frac{1}{\sqrt{t - \tilde{b}}\sqrt{b - t}} dt$$

e

$$\tilde{F}(t) = \frac{1}{2}U(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \frac{U(x - \tilde{b}) - U(x - b)}{\sqrt{b - x}\sqrt{x - \tilde{b}}} dx.$$

Se $\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)}$ e $\beta = 0$, então $\tilde{b}$ também é zero.

Caso 4 : Finalmente, suponhamos que

$$\alpha^{(\nu)} = 0, \quad \alpha^{(1-\nu)} = \alpha \geq 0, \quad \beta^{(\nu)} = 0 \quad \text{e} \quad \beta^{(1-\nu)} = \beta \geq 0.$$

Então, $a = \tilde{a} = 0$, $b = \tilde{b} = \beta + \alpha$ e

$$R_4(z) = \frac{1/2}{z} + \frac{1/2}{z - b}.$$

Isto significa que $\tilde{F}(t) = \frac{1}{2}U(t) + \frac{1}{2}U(t - b)$. Se $\alpha = \beta = 0$, então $\tilde{F}(t) = U(t)$.

4.1.5 Exemplos

Daremos, agora, alguns exemplos de polinômios que satisfazem à relação de recorrência (2.3.38) para a qual os coeficientes satisfazem às propriedades (2.3.46) e (4.1.1).

Exemplo 1 : Para $\lambda > 0$ e $0 < a < b < \infty$, os polinômios $\tilde{B}_n(z)$ definidos por

$$\int_a^b t^{-n+s} \tilde{B}_n(t) t^{-\lambda} (b - t)^{\lambda-1/2} (t - a)^{\lambda-1/2} dt = 0, \quad 0 \leq s \leq n - 1,$$

satisfazendo à relação de recorrência (2.3.38) com

$$\beta_n = \beta, \quad \alpha_{n+1} = \frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}\alpha, \quad n \geq 1,$$

onde $\beta = \sqrt{ab}$ e $\alpha = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2/4$. Este resultado também é válido para $\lambda = 0$ se tomarmos $\alpha_2 = 2\alpha$. Este caso foi trabalhado com mais detalhes por Cooper e Gustafson [15] e seus polinômios $R_{2n}(x)$ estão relacionados aos polinômios $\tilde{B}_n(x)$ por $\tilde{B}_n(x^2) = x^n R_{2n}(x)$.

Como $\beta^{(0)} = \beta^{(1)} = \beta$ e $\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} = \alpha$, estamos tratando do **caso 1** da última seção.

Exemplo 2 : Para $0 < a < b < \infty$, consideramos os polinômios $\tilde{B}_n(z)$ definidos por

$$\int_a^b t^{-n+s} \tilde{B}_n(t) \frac{1 + \sqrt{ab}/t}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

A função distribuição neste caso é aquela que aparece no limite em (4.1.21). Em [47], Sri Ranga e Bracciali demonstraram que esses polinômios satisfazem à relação de recorrência (2.3.38) com

$$\beta_n = \beta l_{n-1}/l_n, \quad \alpha_{n+1} = (l_n^2 - 1)\beta_n, \quad n \geq 1,$$

onde $l_n = \frac{(1+l)^n - (1-l)^n}{(1+l)^n + (1-l)^n} l$, $l = \sqrt{1 + \alpha/\beta}$, $\beta = \sqrt{ab}$, e $\alpha = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2/4$.

Como $\beta^{(0)} = \beta^{(1)} = \beta$ e $\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} = \alpha$, estamos tratando novamente do **caso 1** da última seção.

Exemplo 3 : Para $\lambda > 0$, consideremos os polinômios $\tilde{B}_n(z)$ definidos por

$$\int_0^\infty t^{-n+s} \tilde{B}_n(t) d\psi^{(\lambda)}(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1,$$

onde

$$d\psi^{(\lambda)}(t) = \frac{2t}{t+\beta} \frac{(k+\lambda)^{-1} e^{-k}}{k!}$$

é uma função escada com saltos nos pontos

$$t = t_{k+1} = \frac{1 + 2\beta(k+\lambda) + \sqrt{1 + 4\beta(k+\lambda)}}{2(k+\lambda)} \quad \text{e} \quad t = t_{-k-1} = \beta^2/t_{k+1},$$

para $k = 0, 1, \dots$. Esses polinômios estão relacionados aos polinômios de Tricomi-Carlitz através da transformação $t(x) = \{\sqrt{\rho x^2 + \beta} + \sqrt{\rho}x\}^2$, $x \in (-\infty, \infty)$. Os coeficientes da relação de recorrência associada satisfazem

$$\beta_n = \beta \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{n}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}, \quad n \geq 1.$$

Como $\beta^{(0)} = \beta^{(1)} = \beta$ e $\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} = 0$, estamos agora no **caso 2** e

$$R_4(z) = \frac{1}{z - \beta} \quad \text{e} \quad R_3(z) = \frac{1}{z - \beta}.$$

Exemplo 4 : Como exemplo final consideremos os polinômios $\tilde{B}_n(z)$ satisfazendo à relação de recorrência (2.3.38) com

$$\alpha_{2n} = \alpha^{(0)}, \quad \alpha_{2n+1} = \alpha^{(1)}, \quad \beta_{2n} = \beta^{(0)} \quad \text{para } n \geq 1 \quad \text{e} \quad \beta_{2n+1} = \beta^{(1)} \quad \text{para } n \geq 0,$$

onde $0 < \beta^{(0)}\beta^{(1)} < \infty$ e $0 < \alpha^{(0)}\alpha^{(1)} < \infty$. Assim, os resultados dos Teoremas 4.1.1 – 4.1.4 e 4.1.6 são válidos. Como $A_n(z)/\tilde{B}_n(z) \rightarrow R_1(z)$ com

$$R_1(z) = \frac{1}{z - \beta^{(1)} - \frac{\alpha^{(0)}z}{z - \beta^{(0)} - \frac{\alpha^{(1)}z}{z - \beta^{(1)} - \frac{\alpha^{(0)}z}{z - \beta^{(0)} - \ddots}}},$$

obtemos, da teoria de frações contínuas, que

$$R_1(z) = \frac{2(z - \beta^{(0)})}{(z - \beta)^2 - \lambda^2 z - (\alpha^{(0)} - \alpha^{(1)})z + \sqrt{(z - \beta)^2 - \gamma_0^2 z} \sqrt{(z - \beta)^2 - \gamma_1^2 z}}.$$

Assim, da mesma forma que no Teorema 4.1.6, obtemos que

$$R_1(z) = \int_B \frac{1}{z - t} d\psi(t) = \frac{1 - \alpha_{\min}/\alpha^{(1)}}{z - \beta^{(1)}} + \frac{1}{2\pi\alpha^{(1)}} \int_B \frac{1}{z - t} V(t; \gamma_0, \gamma_1, \lambda, \beta, \beta^{(0)}) dt,$$

onde B, γ_1, γ_0 e λ são os mesmos que os do Teorema 4.1.6. Dessa forma, concluímos que, com a função distribuição acima, os polinômios $\tilde{B}_n(z)$ satisfazem

$$\int_B t^{-n+s} \tilde{B}_n(t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

Observe que se $\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} = \alpha$, então $\lambda = \gamma_0$ e

$$d\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}}{t} \sqrt{\frac{t - \beta^{(0)}}{t - \beta^{(1)}}} dt,$$

em $B = [a, \beta_{\min}] \cup [\beta_{\max}, b]$, onde $ab = \beta^{(0)}\beta^{(1)}$ e $a + b = \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + 4\alpha$.

4.2 Coeficientes da Relação de Recorrência Ilimitados

4.2.1 Introdução

Como no capítulo 3, seção 3.2, faremos uso da definição de função que varia regularmente, 3.2.1, e vamos supor que existe uma sequência que varia regularmente, λ_n , com expoente $\alpha > 0$. Sejam os coeficientes da relação de recorrência (2.3.38) satisfazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{2n}/\lambda_{2n} = \tilde{\beta}^{(0)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_{2n}/\lambda_{2n} = \tilde{\alpha}^{(0)}, \quad (4.2.22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{2n+1}/\lambda_{2n} = \tilde{\beta}^{(1)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_{2n+1}/\lambda_{2n} = \tilde{\alpha}^{(1)}.$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na seção e no capítulo anteriores e supondo que (2.3.46) seja válido, faremos, aqui, um estudo sobre o caso ilimitado para os polinômios similares as ortogonais, $\tilde{B}_n(z)$.

4.2.2 Propriedades Assintóticas

De (4.1.3), podemos obter a seguinte relação de recorrência:

$$\tilde{B}_{k+1}(\lambda_{2n}z) = a_{k+1}(\lambda_{2n}z)\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z) - b_{k+1}(\lambda_{2n}z)\tilde{B}_{k-3}(\lambda_{2n}z), \quad k \geq 3, \quad (4.2.23)$$

com

$$a_{k+1}(\lambda_{2n}z) = (\lambda_{2n}z - \tilde{\beta}_k)(\lambda_{2n}z - \tilde{\beta}_{k+1}) - \tilde{\alpha}_k \frac{\lambda_{2n}z - \tilde{\beta}_{k+1}}{\lambda_{2n}z - \tilde{\beta}_{k-1}} \lambda_{2n}z - \tilde{\alpha}_{k+1} \lambda_{2n}z \quad (4.2.24)$$

e

$$b_{k+1}(\lambda_{2n}z) = \tilde{\alpha}_{k-1} \tilde{\alpha}_k \frac{\lambda_{2n}z - \tilde{\beta}_{k+1}}{\lambda_{2n}z - \tilde{\beta}_{k-1}} \lambda_{2n}^2 z^2. \quad (4.2.25)$$

De (4.2.23),

$$a_{k+1}(\lambda_{2n}z) = \frac{\tilde{B}_{k+1}(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)} + b_{k+1}(\lambda_{2n}z) \frac{\tilde{B}_{k-3}(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)}, \quad k \geq 3. \quad (4.2.26)$$

Temos que $a_2(\lambda_{2n}z) = \tilde{B}_2(\lambda_{2n}z)$ e $a_3(\lambda_{2n}z) = \tilde{B}_3(\lambda_{2n}z)/\tilde{B}_1(\lambda_{2n}z)$.

Logo, do mesmo modo que na seção 4.1.2, podemos mostrar que $a_k(\lambda_{2n}z) > 0$, $k \geq 2$,

para $\lambda_{2n}z \in \tilde{X}$.

Vamos estudar, agora, a convergência da razão $\frac{1}{\lambda_{2n}^2} \frac{\tilde{B}_{k+1}(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)}$ para todo $z \in \tilde{Z} = \overline{\mathcal{T}} \setminus [\check{d}, \hat{d}]$, quando as condições (4.2.22) são satisfeitas.

Teorema 4.2.1 *Suponhamos que os coeficientes da fórmula de recorrência (2.3.38) satisfazem (4.2.22), onde λ_n é uma seqüência que varia regularmente com expoente $\alpha > 0$. Sejam $\check{d}$ e $\hat{d}$ constantes positiva tais que $\check{d} < z_{j,n}/\lambda_{2n} < \hat{d}$ para todo n (o que é possível devido a (2.3.45)). Então, para $n \rightarrow \infty$ e $k/n \rightarrow t \in [0, 1]$,*

$$\frac{1}{\lambda_{2n}^2} \frac{\tilde{B}_{k+1}(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)} \rightarrow \tilde{R}_2(z, t) \quad (4.2.27)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z}$, onde

$$\begin{aligned} \tilde{R}_2(z, t) = & \frac{1}{2} \left\{ (z - \tilde{\beta}^{(0)}t^\alpha)(z - \tilde{\beta}^{(1)}t^\alpha) - (\tilde{\alpha}^{(0)} + \tilde{\alpha}^{(1)})t^\alpha z \right. \\ & \left. + \sqrt{[(z - \tilde{\beta}^{(0)}t^\alpha)(z - \tilde{\beta}^{(1)}t^\alpha) - (\tilde{\alpha}^{(0)} + \tilde{\alpha}^{(1)})t^\alpha z]^2 - 4\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(1)}t^{2\alpha}z^2} \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração: De (4.1.7), para $k \geq 3$ temos que

$$\frac{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)}{a_{k-1}(\lambda_{2n}z)\tilde{B}_{k-3}(\lambda_{2n}z)} \left\{ 1 - \frac{\tilde{B}_{k+1}(\lambda_{2n}z)}{a_{k+1}(\lambda_{2n}z)\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)} \right\} = \frac{b_{k+1}(\lambda_{2n}z)}{a_{k-1}(\lambda_{2n}z)a_{k+1}(\lambda_{2n}z)}, \quad k \geq 3, \quad (4.2.28)$$

que, para qualquer $z \in [\hat{d} + d, \infty)$, $d > 0$ suficientemente grande, nos fornece duas seqüências encadeadas $\{g_k^{(0)}(\lambda_{2n}z)\}$ e $\{g_k^{(1)}(\lambda_{2n}z)\}$, onde

$$g_k^{(\nu)}(\lambda_{2n}z) = \{1 - \tilde{m}_{k-1}^{(\nu)}(\lambda_{2n}z)\}\tilde{m}_k^{(\nu)}(\lambda_{2n}z), \quad k \geq 1, \quad \text{para } \nu = 0, 1,$$

com

$$h_k^{(\nu)}(z) = g_k^{(\nu)}(\lambda_{2n}z) = \frac{b_{2k+2+\nu}(\lambda_{2n}z)}{a_{2k+2+\nu}(\lambda_{2n}z)a_{2k+\nu}(\lambda_{2n}z)}, \quad k \geq 1$$

e

$$r_k^{(\nu)}(z) = \tilde{m}_k^{(\nu)}(\lambda_{2n}z) = 1 - \frac{\tilde{B}_{2k+2+\nu}(\lambda_{2n}z)}{a_{2k+2+\nu}(\lambda_{2n}z)\tilde{B}_{2k+\nu}(\lambda_{2n}z)}, \quad k \geq 0.$$

Como $r_0^{(\nu)}(z) = 0$ para $\nu = 0$ e $\nu = 1$, a seqüência $\{r_k^{(\nu)}(z)\}$ é uma seqüência minimal de parâmetros para $\{h_k^{(\nu)}(z)\}$.

Agora, sob as condições assintóticas (4.2.22), de (4.2.24) e (4.2.25), concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k(\lambda_{2n}z)}{\lambda_{2n}^2} = (z - \tilde{\beta}^{(0)}t^\alpha)(z - \tilde{\beta}^{(1)}t^\alpha) - (\tilde{\alpha}^{(0)} + \tilde{\alpha}^{(1)})zt^\alpha,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_k(\lambda_{2n}z)}{\lambda_{2n}^4} = \tilde{\alpha}^{(0)} \tilde{\alpha}^{(1)} z^2 t^{2\alpha},$$

e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_k^{(\nu)}(z) = \frac{\tilde{\alpha}^{(0)} \tilde{\alpha}^{(1)} z^2 t^{2\alpha}}{\left[(z - \tilde{\beta}^{(0)} t^\alpha)(z - \tilde{\beta}^{(1)} t^\alpha) - (\tilde{\alpha}^{(0)} + \tilde{\alpha}^{(1)}) z t^\alpha \right]^2} = h(z, t),$$

para qualquer $z \in [\hat{d} + d, \infty)$. Assim, do Teorema 2.1.7, segue que $0 \leq h(z, t) \leq 1/4$ e as correspondentes seqüências de parâmetros $\{r_k^{(\nu)}(z)\}$ convergem para limites que dependem somente de $h(z, t)$. Logo, $\{r_k^{(0)}(z)\}$ e $\{r_k^{(1)}(z)\}$ convergem para o mesmo limite e, conseqüentemente, $\frac{\tilde{B}_{k+1}(\lambda_{2n}z)}{\lambda_{2n}^2 \tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)}$ converge para um limite $\tilde{R}_2(z, t)$ para qualquer $z \in [\hat{d} + d, \infty)$. Fazendo n tender para infinito em (4.2.28), obtemos o limite

$$\begin{aligned} \tilde{R}_2(z, t) &= \frac{1}{2} \{ (z - \tilde{\beta}^{(0)} t^\alpha)(z - \tilde{\beta}^{(1)} t^\alpha) - (\tilde{\alpha}^{(0)} + \tilde{\alpha}^{(1)}) t^\alpha z \\ &\quad + \sqrt{[(z - \tilde{\beta}^{(0)} t^\alpha)(z - \tilde{\beta}^{(1)} t^\alpha) - (\tilde{\alpha}^{(0)} + \tilde{\alpha}^{(1)}) t^\alpha z]^2 - 4 \tilde{\alpha}^{(0)} \tilde{\alpha}^{(1)} t^{2\alpha} z^2} \}. \end{aligned}$$

Agora, para $z \in \tilde{Z}$, como $z_{k,j}/\lambda_{2n}$ são os zeros de $\tilde{B}_k(\lambda_{2n}z)$,

$$\lambda_{2n}^2 \left| \frac{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_{k+1}(\lambda_{2n}z)} \right| = \lambda_{2n}^2 \left| \frac{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_k(\lambda_{2n}z)} \right| \left| \frac{\tilde{B}_k(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_{k+1}(\lambda_{2n}z)} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^k \frac{\tau_{k,j}}{z - z_{k,j}/\lambda_{2n}} \right| \left| \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\tau_{k+1,j}}{z - z_{k+1,j}/\lambda_{2n}} \right| = \frac{1}{\epsilon^2},$$

onde $\epsilon = \text{dist}(z, [\hat{d}, \hat{d}])$. Isto significa que a seqüência $\frac{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)}{\lambda_{2n}^2 \tilde{B}_{k+1}(\lambda_{2n}z)}$, $n \geq 1$, é uniformemente limitada em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z}$. Portanto, do Teorema de Stieltjes-Vitali 2.1.4, obtemos o resultado do teorema. ■

De (2.3.38), obtemos facilmente que

$$\frac{1}{\lambda_{2n}^2} \frac{\tilde{B}_{k+1}(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)} = \left(z - \frac{\tilde{\beta}_k}{\lambda_{2n}} \right) \frac{1}{\lambda_{2n}} \frac{\tilde{B}_k(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)} - \frac{\tilde{\alpha}_k}{\lambda_{2n}^2} z,$$

de onde concluímos que

Corolário 4.2.2 *Suponha que (2.3.46) e (4.2.22) sejam válidos. Então,*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{2n} \frac{\tilde{B}_{2k}(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_{2k+1}(\lambda_{2n}z)} &= \tilde{R}_3^{(0)}(z, t) = \frac{z - \tilde{\beta}^{(0)} t^\alpha}{\tilde{R}_2(z, t) + \tilde{\alpha}^{(0)} t^\alpha z}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{2n} \frac{\tilde{B}_{2k-1}(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_{2k}(\lambda_{2n}z)} &= \tilde{R}_3^{(1)}(z, t) = \frac{z - \tilde{\beta}^{(1)} t^\alpha}{\tilde{R}_2(z, t) + \tilde{\alpha}^{(1)} t^\alpha z}, \end{aligned}$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z}$.

Teorema 4.2.3 *Sob as mesmas condições do Teorema 4.2.1, temos que, quando $n \rightarrow \infty$,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{(d/dz) \tilde{B}_k(\lambda_{2n} z)}{\tilde{B}_k(\lambda_{2n} z)} &\rightarrow \tilde{R}_4(z, t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\partial/\partial z) \tilde{R}_2(z, t)}{\tilde{R}_2(z, t)} dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2z} \frac{z^2 - \tilde{u}_2 t^{2\alpha}}{\sqrt{[z^2 - \tilde{u}_1 t^\alpha z + \tilde{u}_2 t^{2\alpha}]^2 - 4\tilde{u}_3 t^{2\alpha} z^2}} + \frac{1}{2z} \right] dt \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\tilde{Z}$, onde $\tilde{u}_1 = \tilde{\beta}^{(0)} + \tilde{\beta}^{(1)} + \tilde{\alpha}^{(0)} + \tilde{\alpha}^{(1)}$, $\tilde{u}_2 = \tilde{\beta}^{(0)} \tilde{\beta}^{(1)}$ e $\tilde{u}_3 = \tilde{\alpha}^{(0)} \tilde{\alpha}^{(1)}$.

Demonstração: Como na demonstração do Teorema 3.2.6, mostraremos o resultado para $z \in [\hat{d} + d, \infty)$. Seja a função

$$\tilde{g}_n(t) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{\tilde{B}_{2[nt]}(\lambda_{2n} z)}{\tilde{B}_{2[nt]+2}(\lambda_{2n} z)} \right) / \left(\frac{\tilde{B}_{2[nt]}(\lambda_{2n} z)}{\tilde{B}_{2[nt]+2}(\lambda_{2n} z)} \right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

onde $[a]$ é a parte inteira do número real a .

Desta forma, encontramos que

$$\frac{1}{2n} \frac{(d/dz) \tilde{B}_{2n}(\lambda_{2n} z)}{\tilde{B}_{2n}(\lambda_{2n} z)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{g}_n(t) dt.$$

Se fixarmos t , então, pelo Teorema 4.2.1,

$$\tilde{g}_n(t) \rightarrow -\frac{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\tilde{R}_2(z, t)} \right)}{\frac{1}{\tilde{R}_2(z, t)}} = \frac{\frac{\partial}{\partial z} \tilde{R}_2(z, t)}{\tilde{R}_2(z, t)}$$

que segue da convergência uniforme de funções analíticas, e de suas derivadas, em conjuntos compactos. Também, para $t \in [(j-1)/n, j/n)$,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_n(t) &= -\frac{d}{dz} \left(\frac{\tilde{B}_{2j-2}(\lambda_{2n} z)}{\tilde{B}_{2j-1}(\lambda_{2n} z)} \right) / \frac{\tilde{B}_{2j-2}(\lambda_{2n} z)}{\tilde{B}_{2j-1}(\lambda_{2n} z)} \\ &\quad - \frac{d}{dz} \left(\frac{\tilde{B}_{2j-1}(\lambda_{2n} z)}{\tilde{B}_{2j}(\lambda_{2n} z)} \right) / \frac{\tilde{B}_{2j-1}(\lambda_{2n} z)}{\tilde{B}_{2j}(\lambda_{2n} z)}. \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Então,

$$\frac{1}{2} \tilde{g}_n(t) < 1/d.$$

O Teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dá (4.2.29) para $z \in [\hat{d} + d, \infty)$. O resultado geral segue do teorema de Stieltjes-Vitali 2.1.4. O mesmo argumento é usado para os índices ímpares. Calculando-se explicitamente $\frac{1}{2} \frac{(\partial/\partial z) \tilde{R}_2(z, t)}{\tilde{R}_2(z, t)}$ chega-se ao resultado desejado. ■

4.2.3 Representação Integral

Consideremos as funções distribuições $\tilde{F}$ e $\tilde{G}$ da seção anterior, ou seja,

$$\tilde{F}(u; \gamma_0, \gamma_1, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^u \frac{|x - \beta|(x + \beta)/x}{\sqrt{\gamma_1^2 x - (x - \beta)^2} \sqrt{(x - \beta)^2 - \gamma_0^2 x}} I_E(x) dx \quad (4.2.31)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{G}(u; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) &= \frac{2 [(d_2^2 - d_0^2)^{1/2} + (d_1^2 - d_0^2)^{1/2}]^2}{\pi (d_2^2 - d_1^2)^2} \\ &\times \int_{-\infty}^u \frac{\sqrt{d_2^2 x - (x - \beta)^2} \sqrt{(x - \beta)^2 - d_1^2 x}}{x [(x - \beta)^2 - d_0^2 x]} \frac{(x - \beta)(x - \delta)}{|x - \beta|} I_E(x) dx, \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

onde $I_E(x)$ é a função indicadora do conjunto $E = [a, \tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b]$.

Daremos, agora, outras propriedades para o caso ilimitado. Primeiramente, analisaremos a convergência da razão $\lambda_{2n} \frac{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n} z)}{\tilde{B}_k(\lambda_{2n} z)}$.

Teorema 4.2.4 *Suponhamos que (2.3.46) e (4.2.22) sejam válidos e que $0 < \tilde{\beta}^{(0)} \tilde{\beta}^{(1)}$ e $0 < \tilde{\alpha}^{(0)} \tilde{\alpha}^{(1)}$. Então,*

$$\begin{aligned} \tilde{R}_3^{(0)}(z, t) &= \int_{E^{(0)}} \frac{1}{z - x} d\psi^{(0)}(x) = \frac{1 - \tilde{\alpha}_{min}/\tilde{\alpha}^{(0)}}{z - \tilde{\beta}^{(1)} t^\alpha} \\ &+ \frac{1}{2\pi \tilde{\alpha}^{(0)}} \int_B \frac{1}{z - x} V(x; \tilde{\gamma}_0 t^{\alpha/2}, \tilde{\gamma}_1 t^{\alpha/2}, \tilde{\lambda} t^{\alpha/2}, \tilde{\beta} t^\alpha, \tilde{\beta}^{(0)} t^\alpha) dt, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{R}_3^{(1)}(z, t) &= \int_{E^{(1)}} \frac{1}{z - x} d\psi^{(1)}(x) = \frac{1 - \tilde{\alpha}_{min}/\tilde{\alpha}^{(1)}}{z - \tilde{\beta}^{(0)} t^\alpha} \\ &+ \frac{1}{2\pi \tilde{\alpha}^{(1)}} \int_B \frac{1}{z - x} V(x; \tilde{\gamma}_0 t^{\alpha/2}, \tilde{\gamma}_1 t^{\alpha/2}, \tilde{\lambda} t^{\alpha/2}, \tilde{\beta} t^\alpha, \tilde{\beta}^{(1)} t^\alpha) dt, \end{aligned}$$

onde $B = [a, \tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b]$, $\tilde{\alpha}_{min} = \min\{\tilde{\alpha}^{(0)}, \tilde{\alpha}^{(1)}\}$

$$\tilde{\lambda}^2 = (\sqrt{\tilde{\beta}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\beta}^{(1)}})^2, \quad \tilde{\beta} = \sqrt{\tilde{\beta}^{(0)} \tilde{\beta}^{(1)}},$$

$$\tilde{\gamma}_1^2 = (\sqrt{\tilde{\beta}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\beta}^{(1)}})^2 + (\sqrt{\tilde{\alpha}^{(0)}} + \sqrt{\tilde{\alpha}^{(1)}})^2 = (\sqrt{\tilde{b}} - \sqrt{\tilde{a}})^2,$$

$$\tilde{\gamma}_0^2 = (\sqrt{\tilde{\beta}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\beta}^{(1)}})^2 + (\sqrt{\tilde{\alpha}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\alpha}^{(1)}})^2 = (\sqrt{\tilde{b}} - \sqrt{\tilde{a}})^2.$$

Demonstração: De (4.2.27) e do corolário 4.2.2, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{R}_3^{(0)}(z, t) &= 2(z - \tilde{\beta}^{(0)}t^\alpha) \\ &\times \left[(z - \tilde{\beta}^{(0)}t^\alpha)(z - \tilde{\beta}^{(1)}t^\alpha) - (\tilde{\alpha}^{(1)} - \tilde{\alpha}^{(0)})t^\alpha z \right. \\ &\left. + \sqrt{[(z - \tilde{\beta}^{(0)}t^\alpha)(z - \tilde{\beta}^{(1)}t^\alpha) - (\tilde{\alpha}^{(1)} + \tilde{\alpha}^{(0)})t^\alpha z]^2 - 4\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(1)}t^{2\alpha}z^2} \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (4.2.33)$$

Com o mesmo raciocínio usado na demonstração do Teorema 4.1.6, $\tilde{R}_3^{(0)}(z, t)$ pode ser escrito como

$$\frac{|\tilde{\alpha}^{(1)} - \tilde{\alpha}^{(0)}| - (\tilde{\alpha}^{(1)} - \tilde{\alpha}^{(0)})}{2\tilde{\alpha}^{(0)}(z - \tilde{\beta}^{(1)}t^\alpha)} + \frac{\{(\tilde{\alpha}^{(1)} + \tilde{\alpha}^{(0)}) - |\tilde{\alpha}^{(1)} - \tilde{\alpha}^{(0)}|\}}{2\tilde{\alpha}^{(0)}} L(z; \tilde{\gamma}_0 t^{\alpha/2}, \tilde{\gamma}_1 t^{\alpha/2}, \tilde{\lambda} t^{\alpha/2}, \tilde{\beta} t^\alpha, \tilde{\beta}^{(0)} t^\alpha).$$

Lembremos que

$$D \int_B \frac{1}{z - t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) dt = L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta).$$

Logo, analisando os casos $\tilde{\alpha}^{(1)} \geq \tilde{\alpha}^{(0)}$ e $\tilde{\alpha}^{(1)} < \tilde{\alpha}^{(0)}$, chegamos que

$$\begin{aligned}\frac{\{(\tilde{\alpha}^{(1)} + \tilde{\alpha}^{(0)}) - |\tilde{\alpha}^{(1)} - \tilde{\alpha}^{(0)}|\}}{2\tilde{\alpha}^{(0)}} L(z; \tilde{\gamma} t^{\alpha/2}, \gamma t^{\alpha/2}, \lambda t^{\alpha/2}, \beta t^\alpha, \tilde{\beta}^{(0)} t^\alpha) \\ = \frac{1}{2\pi\tilde{\alpha}^{(0)}} \int_B \frac{1}{z - x} V(x; \tilde{\gamma} t^{\alpha/2}, \gamma t^{\alpha/2}, \lambda t^{\alpha/2}, \beta t^\alpha, \tilde{\beta}^{(0)} t^\alpha) dt.\end{aligned}$$

Assim, o primeiro resultado deste teorema segue de (4.1.15). De maneira análoga, como

$$\begin{aligned}\tilde{R}_3^{(1)}(z, t) &= 2(z - \tilde{\beta}^{(1)}t^\alpha) \\ &\times \left[(z - \tilde{\beta} t^\alpha)^2 - \tilde{\lambda}^2 t^\alpha z - (\tilde{\alpha}^{(0)} - \tilde{\alpha}^{(1)})t^\alpha z \right. \\ &\left. + \sqrt{(z - \tilde{\beta} t^\alpha)^2 - \tilde{\gamma}_0^2 t^\alpha z} \sqrt{(z - \tilde{\beta} t^\alpha)^2 - \tilde{\gamma}_1^2 t^\alpha z} \right]^{-1},\end{aligned}\quad (4.2.34)$$

o outro resultado do teorema é obtido trocando-se $(\tilde{\alpha}^{(0)}, \tilde{\beta}^{(0)})$ por $(\tilde{\alpha}^{(1)}, \tilde{\beta}^{(1)})$. ■

Teorema 4.2.5 *Sob as mesmas condições do Teorema 4.2.1, para toda função contínua f , quando $n \rightarrow \infty$ e $k/n \rightarrow t \in [0, 1]$, temos que*

$$\begin{aligned}(i) \sum_{j=1}^{2k} \tau_{2k,j} f(z_{2k,j}/\lambda_{2n}) &\rightarrow \frac{\tilde{\alpha}_{\min}}{\tilde{\alpha}^{(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\tilde{G}(x; \tilde{\gamma}_0 t^{\alpha/2}, \tilde{\gamma}_1 t^{\alpha/2}, \tilde{\lambda} t^{\alpha/2}, \tilde{\beta} t^\alpha, \tilde{\beta}^{(1)} t^\alpha) \\ &+ \frac{\tilde{\alpha}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{\min}}{\tilde{\alpha}^{(1)}} f(\tilde{\beta}^{(0)} t^\alpha),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii) \sum_{j=1}^{2k+1} \tau_{2k+1,j} f(z_{2k+1,j}/\lambda_{2n}) &\rightarrow \frac{\tilde{\alpha}_{\min}}{\tilde{\alpha}^{(0)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\tilde{G}(x; \tilde{\gamma}_0 t^{\alpha/2}, \tilde{\gamma}_1 t^{\alpha/2}, \tilde{\lambda} t^{\alpha/2}, \tilde{\beta} t^\alpha, \tilde{\beta}^{(0)} t^\alpha) \\ &+ \frac{\tilde{\alpha}^{(0)} - \tilde{\alpha}_{\min}}{\tilde{\alpha}^{(0)}} f(\tilde{\beta}^{(1)} t^\alpha),\end{aligned}$$

$$(iii) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(z_{n,j}/\lambda_{2n}) \rightarrow \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\tilde{F}(x; \tilde{\gamma}_0 t^{\alpha/2}, \tilde{\gamma}_1 t^{\alpha/2}, \tilde{\beta} t^{\alpha}) dt,$$

onde

$$\tilde{\gamma}_0^2 = (\sqrt{\tilde{\beta}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\beta}^{(1)}})^2 + (\sqrt{\tilde{\alpha}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\alpha}^{(1)}})^2, \quad \tilde{\gamma}_1^2 = (\sqrt{\tilde{\beta}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\beta}^{(1)}})^2 + (\sqrt{\tilde{\alpha}^{(0)}} + \sqrt{\tilde{\alpha}^{(1)}})^2,$$

$$\tilde{\lambda}^2 = (\sqrt{\tilde{\beta}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\beta}^{(1)}})^2 \quad e \quad \tilde{\beta} = \sqrt{\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(1)}}.$$

Demonstração: Sejam as funções distribuições discretas

$$\tilde{G}_{n,k}(x) = \sum_{j=1}^k \tau_{k,j} U(x - z_{k,j}/\lambda_{2n}) \quad (4.2.35)$$

e

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U(x - z_{n,j}/\lambda_{2n}), \quad (4.2.36)$$

onde $U(x)$ é a função dada por (3.1.19). As transformadas de Stieltjes dessas funções distribuições são

$$S(\tilde{G}_{n,k}(x); z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{G}_{n,k}(x)}{z - x} = \lambda_{2n} \frac{\tilde{B}_{k-1}(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_k(\lambda_{2n}z)} \quad (4.2.37)$$

e

$$S(\tilde{F}_n(x); z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{F}_n(x)}{z - x} = \frac{1}{n} \frac{(d/dz)\tilde{B}_n(\lambda_{2n}z)}{\tilde{B}_n(\lambda_{2n}z)}. \quad (4.2.38)$$

O comportamento assintótico dessas transformadas é dado pelo Corolário 4.2.2 e pelo Teorema 4.2.3, e, pelo Teorema de Grommer-Hamburger 2.1.6, os limites devem ser as transformadas de Stieltjes dos limites fracos das funções distribuições $\tilde{G}_{n,k}(x)$ e $\tilde{F}_n(x)$. A identificação dos limites em (4.2.37) é feita de maneira análoga à demonstração do teorema 3.2.7 da seção 3.2. Para identificar o limite de (4.2.38), observe que o integrando de (4.2.29) é a transformada de Stieltjes da função distribuição $\tilde{F}(x; \tilde{\gamma}_0 t^{\alpha/2}, \tilde{\gamma}_1 t^{\alpha/2}, \tilde{\beta} t^{\alpha})$ de onde o resultado segue. ■

4.2.4 Casos Especiais

Como fizemos para o caso onde os coeficientes da relação de recorrência são limitados, analisaremos aqui, também os casos que chamam mais a atenção. Entre eles estão aqueles em que os coeficientes da relação de recorrência têm limites nulos.

Caso 1 : Primeiramente, vamos considerar o seguinte caso:

$$\tilde{\alpha}^{(0)} = \tilde{\alpha}^{(1)} = \tilde{\alpha} > 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}^{(0)} = \tilde{\beta}^{(1)} = \tilde{\beta} > 0.$$

Então, $\tilde{a} = \tilde{b} = \tilde{\beta}$, $a = \tilde{\beta} + 2\tilde{\alpha} - \sqrt{(\tilde{\beta} + 2\tilde{\alpha})^2 - \tilde{\beta}^2}$ e $b = \tilde{\beta} + 2\tilde{\alpha} + \sqrt{(\tilde{\beta} + 2\tilde{\alpha})^2 - \tilde{\beta}^2}$.

Observe que podemos escrever $\tilde{R}_4(z, t)$ da seguinte maneira

$$\tilde{R}_4(z, t) = \frac{1}{2z} \int_0^1 \left(\frac{z^2 - \tilde{\beta}^{(0)} \tilde{\beta}^{(1)} t^{2\alpha}}{\sqrt{z - at^\alpha} \sqrt{z - \tilde{a}t^\alpha} \sqrt{z - bt^\alpha} \sqrt{z - \tilde{b}t^\alpha}} + \frac{1}{2z} \right) dt. \quad (4.2.39)$$

Logo, substituindo esses valores em (4.2.39) e em (4.2.31), temos

$$\begin{aligned} \tilde{R}_4(z, t) &= \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \int_0^1 \frac{z + \tilde{\beta}t^\alpha}{\sqrt{z - at^\alpha} \sqrt{z - bt^\alpha}} dt \\ &= \int_a^b \int_0^1 \frac{1}{z - x} d\tilde{F}(x) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \int_0^1 \frac{1}{z - x} \frac{1 + \tilde{\beta}t^\alpha/x}{\sqrt{bt^\alpha - x} \sqrt{x - at^\alpha}} dt dx. \end{aligned}$$

Do Teorema 4.2.4, segue que $\tilde{R}_3^{(0)}(z, t) = \tilde{R}_3^{(1)}(z, t) = \tilde{R}_3(z, t)$, onde

$$\tilde{R}_3(z, t) = \frac{2}{(z - \tilde{\beta}t^\alpha) + \sqrt{(z - \tilde{\beta}t^\alpha)^2 - 4\tilde{\alpha}t^\alpha z}} = \frac{1}{2\pi\tilde{\alpha}} \int_a^b \frac{1}{z - x} V(x; 0, 2\sqrt{\tilde{\alpha}t^\alpha}, 0, \tilde{\beta}t^\alpha, \tilde{\beta}t^\alpha) dt,$$

pois $(z - at^\alpha)(z - bt^\alpha) = (z - \tilde{\beta}t^\alpha)^2 - 4\tilde{\alpha}t^\alpha z$.

Caso 2 : Agora, consideremos o caso em que $\tilde{\alpha}^{(0)}$ ou $\tilde{\alpha}^{(1)}$ assumem o valor zero. Sejam (para ν igual a 0 ou 1),

$$\tilde{\alpha}^{(\nu)} = 0, \quad \tilde{\alpha}^{(1-\nu)} = \tilde{\alpha} \geq 0, \quad \tilde{\beta}^{(\nu)} > 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}^{(1-\nu)} > 0.$$

Então, de (4.2.39), segue que $a = \tilde{a}$ e $b = \tilde{b}$. Com isto, podemos escrever

$$\tilde{R}_4(z, t) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \frac{z^2 - \tilde{\beta}^{(0)} \tilde{\beta}^{(1)} t^{2\alpha}}{(z - at^\alpha)(z - bt^\alpha)} \right] dt = \int_0^1 \left[\frac{1/2}{z - at^\alpha} + \frac{1/2}{z - bt^\alpha} \right] dt.$$

Portanto, $\tilde{F}(x; \tilde{\gamma}_0 t^{\alpha/2}, \tilde{\gamma}_1 t^{\alpha/2}, \tilde{\beta}t^\alpha) = \frac{1}{2}U(t - at^\alpha) + \frac{1}{2}U(t - bt^\alpha)$.

Agora, se $\tilde{\alpha} = 0$, então $a = \tilde{\beta}_{\min} = \min\{\tilde{\beta}^{(0)}, \tilde{\beta}^{(1)}\}$ e $b = \tilde{\beta}_{\max} = \max\{\tilde{\beta}^{(0)}, \tilde{\beta}^{(1)}\}$.

De (4.2.33) e (4.2.34), a seguinte afirmação também vale:

- se $\tilde{\alpha}^{(0)} = \tilde{\alpha}$, então

$$\tilde{R}_3^{(0)}(z, t) = \frac{1}{z - \tilde{\beta}^{(1)}t^\alpha}$$

e 4.2.5 Exemplo

$$\tilde{R}_3^{(1)}(z, t) = \frac{z - \tilde{\beta}^{(1)}t^\alpha}{(z - at^\alpha)(z - bt^\alpha)} = \frac{\tilde{\beta}^{(1)} - a}{b - a} \frac{1}{z - at^\alpha} + \frac{b - \tilde{\beta}^{(1)}}{b - a} \frac{1}{z - bt^\alpha};$$

• se $\tilde{\alpha}^{(1)} = \tilde{\alpha}$, então

$$\tilde{R}_3^{(0)}(z, t) = \frac{z - \tilde{\beta}^{(0)}t^\alpha}{(z - at^\alpha)(z - bt^\alpha)} = \frac{\tilde{\beta}^{(0)} - a}{b - a} \frac{1}{z - at^\alpha} + \frac{b - \tilde{\beta}^{(0)}}{b - a} \frac{1}{z - bt^\alpha}$$

e

$$\tilde{R}_3^{(1)}(z, t) = \frac{1}{z - \tilde{\beta}^{(0)}t^\alpha}.$$

Caso 3 : Sejam, agora,

$$\tilde{\alpha}^{(\nu)} \geq 0, \quad \tilde{\alpha}^{(1-\nu)} \geq 0, \quad \tilde{\beta}^{(\nu)} = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}^{(1-\nu)} = \tilde{\beta} \geq 0.$$

Segue que $\tilde{u}_2 = 0$ e, assim,

$$a = \tilde{a} = 0, \quad \tilde{b} = \tilde{\beta} + (\sqrt{\tilde{\alpha}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\alpha}^{(1)}})^2 \quad \text{e} \quad b = \tilde{\beta} + (\sqrt{\tilde{\alpha}^{(0)}} + \sqrt{\tilde{\alpha}^{(1)}})^2.$$

Substituindo esses valores em (4.2.39), temos que

$$\tilde{R}_4(z, t) = \frac{1/2}{z} + \int_0^1 \frac{1/2}{\sqrt{z - \tilde{b}t^\alpha} \sqrt{z - bt^\alpha}} dt = \frac{1/2}{z} + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{\tilde{b}}^b \frac{1}{z - x} \frac{1}{\sqrt{x - \tilde{b}t^\alpha} \sqrt{bt^\alpha - x}} dx dt,$$

e

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{2}U(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{-\infty}^x \frac{U(u - \tilde{b}) - U(u - b)}{\sqrt{bt^\alpha - u} \sqrt{u - \tilde{b}t^\alpha}} du dt.$$

Caso 4 : Finalmente, vamos supor que

$$\tilde{\alpha}^{(\nu)} = 0, \quad \tilde{\alpha}^{(1-\nu)} = \tilde{\alpha} \geq 0, \quad \tilde{\beta}^{(\nu)} = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}^{(1-\nu)} = \tilde{\beta} \geq 0.$$

Então, $a = \tilde{a} = 0$, $b = \tilde{b} = \tilde{\beta} + \tilde{\alpha}$ e

$$\tilde{R}_4(z, t) = \frac{1/2}{z} + \int_0^1 \frac{1/2}{z - bt^\alpha} dt.$$

Isto significa que $\tilde{F}(x) = \frac{1}{2}U(x) + \frac{1}{2}U(x - bt^\alpha)$. Se $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$, então $\tilde{F}(x) = U(x)$.

4.2.5 Exemplo

No artigo [48], Sri Ranga mostra a relação entre polinômios ortogonais e os polinômios L-ortogonais associados quando as funções peso estão associadas de maneira especial, a partir da transformação

$$t(x) = \{\sqrt{\rho x^2 + \beta} + \sqrt{\rho}x\}^2, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (4.2.40)$$

onde $t(x)$ representa uma aplicação biunívoca entre $(-\infty, \infty)$ e $(0, \infty)$.

A inversa de $t(x)$ é dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left(\sqrt{t} - \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right), \quad t \in (0, \infty). \quad (4.2.41)$$

Dois resultados importantes desse artigo são os seguintes.

Teorema 4.2.6 *Sejam b e d tais que $\sqrt{b} = \sqrt{\rho d^2 + \beta} + \sqrt{\rho}d$ e*

$$v(t) = At^{-1/2}w(x(t)).$$

Então, $w(x)$ é uma função peso em $(-d, d)$ tal que $w(x) = w(-x)$ se, e somente se, $v(t)$ é uma função peso forte em $(\beta^2/b, b)$ tal que $\sqrt{t}v(t) = \sqrt{\beta^2/t}v(\beta^2/t)$, onde A é um número positivo.

Teorema 4.2.7 *Sejam $w(x)$ e $v(x)$ um par de funções peso dadas pelo Teorema 4.2.6 e $Q_n(x)$ e $\tilde{B}_n(t)$ os polinômios ortogonais e similares associados a $w(x)$ e $v(t)$, respectivamente. Então, para $n \geq 0$,*

$$\tilde{B}_n(t) = (2\sqrt{\rho t})^n Q_n(x(t)). \quad (4.2.42)$$

Sabemos que os polinômios mônicos de Hermite, $H_n(x)$, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$, com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$ e satisfazem à relação de recorrência

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \alpha_n H_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.2.43)$$

onde $\alpha_n = n/2$. Logo, de (4.2.41), (4.2.42) e (4.2.43), os polinômios $\tilde{H}_n(t)$, similares aos ortogonais $H_n(x)$, satisfazem à relação de recorrência (2.3.38), onde $\tilde{\beta}_{n+1} = \beta$ e $\tilde{\alpha}_{n+1} = 2\rho n$, $n \geq 1$ e a função peso é, pelo Teorema 4.2.6,

$$v(t) = t^{-1/2} e^{-\frac{t+\beta^2/t}{4\alpha}} \quad \text{em } (0, \infty).$$

Daí,

$$\tilde{\alpha}_{2n} = 2(2n-1)\rho, \quad \tilde{\alpha}_{2n+1} = 2(2n)\rho \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}_{2n} = \tilde{\beta}_{2n+1} = \beta.$$

Podemos observar que os coeficientes $\tilde{\alpha}_{2n}$ e $\tilde{\alpha}_{2n+1}$ são ilimitados, mas variam regularmente. Dessa forma, podemos tomar uma seqüência que varia regularmente, $\{\lambda_n\}$, onde $\lambda_{2n} = 2n$. Assim, das condições (4.2.22) teremos que $\tilde{\beta}^{(0)} = \tilde{\beta}^{(1)} = \beta$ e $\tilde{\alpha}^{(0)} = \tilde{\alpha}^{(1)} = 2\rho$.

Assim, estamos tratando do **caso 1** da última seção, onde $\tilde{\alpha} = 2\rho$ e $\tilde{\beta} = \beta$.

Considerações Finais

Diversos trabalhos sobre propriedades assintóticas dos polinômios ortogonais $Q_n(x)$ e seus zeros quando ocorre o caso (3.1.1) já foram publicados. Para citar alguns, Nevai em [35, 36] fez uma cuidadosa investigação do caso onde $b_1 = b_2 = b$ e $a_1 = a_2 = a$ (em [36] a foi considerado maior que zero). Um de seus resultados é que os zeros dos correspondentes polinômios ortogonais têm comportamento arco-seno. Este comportamento dos zeros já foi verificado para uma grande classe de polinômios ortogonais (ver, por exemplo [21] e [53]). Mas, na maioria dos casos, o resultado segue de um conhecimento a priori da função distribuição ϕ com relação à qual os polinômios são ortogonais. Entretanto, podemos ter acesso à relação de recorrência (2.2.12) sem qualquer conhecimento da função distribuição ϕ . Chihara [9, 12] mostrou que, sob as condições (3.1.1) (com $a_1 = a_2 = a$), pode-se usar seqüências encadeadas para mostrar que os zeros dos polinômios ortogonais são densos na união de dois intervalos disjuntos. Essas seqüências encadeadas foram também usadas por Maki [33] para provar o comportamento regular arco-seno para o caso em que $b_1 = b_2 = b$ e $a_1 = a_2 = a$, mas fez uma hipótese extra: $\alpha_n \leq a^2$.

Akhiezer [1] estudou polinômios ortogonais com função peso concentrada na união de dois intervalos disjuntos e com os coeficientes da relação de recorrência satisfazendo (3.1.1). Os dois intervalos disjuntos desempenharam importante papel para se encontrar o comportamento assintótico dos coeficientes da relação de recorrência que foram estudadas aqui.

O caso em que os coeficientes da relação de recorrência para os polinômios ortogo-



Capítulo 5

Considerações Finais

Diversos trabalhos sobre propriedades assintóticas dos polinômios ortogonais $Q_n(z)$ e seus zeros quando ocorre o caso (3.1.1) já foram publicados. Para citar alguns, Nevai em [35, 36] fez uma cuidadosa investigação do caso onde $b_1 = b_2 = b$ e $a_1 = a_2 = a$ (em [36] a foi considerado maior que zero). Um de seus resultados é que os zeros dos correspondentes polinômios ortogonais têm comportamento arco-seno. Este comportamento dos zeros já foi verificado para uma grande classe de polinômios ortogonais (ver, por exemplo [21] e [53]). Mas, na maioria dos casos, o resultado segue de um conhecimento a priori da função distribuição ϕ com relação à qual os polinômios são ortogonais. Entretanto, podemos ter acesso à relação de recorrência (2.2.12) sem qualquer conhecimento da função distribuição ϕ . Chihara [9, 12] mostrou que, sob as condições (3.1.1) (com $a_1 = a_2 = a$), pode-se usar seqüências encadeadas para mostrar que os zeros dos polinômios ortogonais são densos na união de dois intervalos disjuntos. Essas seqüências encadeadas foram também usadas por Maki [33] para provar o comportamento regular arco-seno para o caso em que $b_1 = b_2 = b$ e $a_1 = a_2 = a$, mas fez uma hipótese extra: $\alpha_n \leq a^2$.

Akhiezer [1] estudou polinômios ortogonais com função peso concentrada na união de dois intervalos disjuntos e com os coeficientes da relação de recorrência satisfazendo (3.1.1). Os dois intervalos disjuntos desempenharam importante papel para se encontrar o comportamento assintótico dos coeficientes da relação de recorrência que foram estudadas aqui.

O caso em que os coeficientes da relação de recorrência para os polinômios ortogo-



nais têm limites finitos também foi tratado em Chihara [11], Nevai [37], Geronimo e Case [23] e outros. Coeficientes de recorrência assintoticamente periódicos com finitos pontos de acumulação foi estudado por Chihara [11], Geronimo e Van Assche [24, 5]. Já o caso em que os coeficientes da relação de recorrência para os polinômios similares satisfazem (4.1.1) foi tratado em [3]. Em geral, pode-se dizer que o suporte da função distribuição ϕ é limitada se, e somente se, os coeficientes da relação de recorrência são limitados.

Se os coeficientes da relação de recorrência são ilimitados, então a propriedade de ortogonalidade é estendida sobre um conjunto ilimitado, possivelmente todo o eixo real. Alguns aspectos interessantes dos polinômios ortogonais com relação a uma função peso $w(x) = \phi'(x)$ em $(-\infty, \infty)$ e em $(0, \infty)$ para a qual

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x|^{-\alpha} \log w(x) = -1 \quad (\alpha > 0)$$

foi dado por Rakhmanov [40], Mhaskar, Saff [34] e Ullman [54, 55] (ver também [43]). Uma conjectura bem conhecida por Freud [22] diz que, para a função peso $|x|^\rho e^{-|x|^\alpha}$, os coeficientes α_n da relação de recorrência satisfazem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/\alpha} \alpha_n^{1/2} = \left[\frac{\Gamma(\alpha/2) \Gamma(\alpha/2 + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \right]^{1/\alpha} \quad (5.1)$$

(observe que $\beta_n = 0$, pois w é uma função par). Freud provou esta conjectura para $\alpha = 2, 4$ e 6 e a prova geral, para α um inteiro par positivo, foi dada por Magnus [32]. A conjectura (5.1) indica que a seqüência α_n cresce como $n^{2/\alpha}$. Assim, dizemos que esta seqüência varia regularmente com expoente $2/\alpha$. A conjectura foi provada por Lubinsky, Mhaskar e Saff [30, 31]. Ver também [38] para maiores informações sobre a conjectura de Freud.

Chihara [13] estudou o caso em que os coeficientes da relação de recorrência são ilimitados e fez um extenso uso de seqüências encadeadas para dar condições a esses coeficientes sob as quais o conjunto dos zeros dos polinômios ortogonais tivesse um limitante superior (ou inferior). Nevai e Dehesa [38] supuseram que os coeficientes da relação de recorrência divergiam, mas de forma que existisse uma função crescente positiva $\Phi(t)$ satisfazendo $\Phi(x+t)/\Phi(t) \rightarrow 1$ para todo $x > 0$ e $t \rightarrow \infty$, tal que $\beta_n/\Phi(n)$ e $\alpha_n^{1/2}/\Phi(n)$ tivessem limites finitos. Sob essas condições, Nevai e Dehesa obtiveram assintóticos para

$$\sum_{j=1}^n x_{n,j}^M / \int_0^n \Phi^M(t) dt,$$

onde $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ são os zeros de $p_n(x)$ (ou $Q_n(x)$) e M é um inteiro fixo positivo.

De forma semelhante, Van Assche em [6] fez um estudo para o caso em que os coeficientes da relação de recorrência satisfazem (3.2.34), onde λ_n é uma seqüência que varia regularmente (definição 3.2.2).

Em [3], Andrade, Sri Ranga e Van Assche estudaram o comportamento assintótico dos polinômios similares quando os coeficientes da relação de recorrência satisfazem (4.1.1).

Com base nos trabalhos aqui apresentados, fizemos um estudo semelhante ao de Van Assche [6] para o caso dos polinômios similares cujos coeficientes da relação de recorrência satisfazem (4.2.22) que, para nosso conhecimento, ainda não há nenhum trabalho publicado.

Math. Kharkov, v.4 (1934), 3 – 8.

[2] AL-SALAM, W.A. Characterization of certain classes of orthogonal polynomials related to elliptic function, *Ann. Mat. Pura Appl.*, v.67 (1965), 75 – 94.

[3] ANDRADE, E.X.L. DE, RANGA, A.SRI, VAN ASSCHE, W. Asymptotics for polynomials satisfying a certain twin asymptotic periodic recurrence relation, *Math. and Appl. of Anal.*, (a ser publicado)

[4] ARNOLD, L. Deterministic version of Wigner's semicircle law for the distribution of matrix eigenvalues, *Linear Algebra Appl.*, v.13 (1976), 185 – 199.

[5] ASSCHE, W.V. Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula I, *J. Approx. Theory*, v.44 (1985), 258 – 276.

[6] ASSCHE, W.V. Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula II, *J. Approx. Theory*, v.52 (1988), 322 – 338.

[7] BINGHAM, N.H., GOLDIE, C.M., TEUGELS, J.L. "Regular Variation", Cambridge Univ. Press, London/New York, 1987.

[8] CARLITZ, L. Some orthogonal polynomials related to elliptic functions I, II, *Duke Math. J.*, v.27 (1960), 443 – 458; v.28 (1961), 107 – 124.

[9] CHIHARA, T. Chain sequences and orthogonal polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.104 1 (1962), 1 – 16.



[10] CHIHARA, T. On kernel polynomials and related systems, *Boll. Un. Mat. Ital.*, v.3 19(1964), 451 – 459.

[11] CHIHARA, T. Orthogonal polynomials whose zeros are dense in intervals, *J. Math. Anal. and Appl.*, v.24 2(1968), 362 – 371.

Referências Bibliográficas

York (1978).

[13] CHIHARA, T. Spectral properties of orthogonal polynomials on unbounded sets,

[1] AKHIEZER, N.I. Über line Eigenschafet der “elliptishen” Polynome, *Comm. Soc. Math. Kharkov*, v.4 (1934), 3 – 8.

[14] CHURCHILL, R.V. “Complex Variables and Applications”, second edition, Kōyakusha

[2] AL-SALAM, W.A. Characterization of certain classes of orthogonal polynomials related to elliptic function, *Ann. Mat. Pura Appl.*, v.67 (1965), 75 – 94.

[15] COOPER, S.C., GUSTAFSON, P.E. The strong Chebyshev distribution and ortho-

⌈ [3] ANDRADE, E.X.L. DE, RANGA, A.SRI, VAN ASSCHE, W. Asymptotics for polynomials satisfying a certain twin asymptotic periodic recurrence relation, *Meth. and Appl. of Anal.*, (a ser publicado)

[16] DIXON, G. The absolute continuity of phase operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.213 (1975), 353 – 372.

[4] ARNOLD, L. Deterministic version of Wigner’s semicircle law for the distribution of matrix eigenvalues, *Linear Algebra Appl.*, v.13 (1976), 185 – 199.

[5] ASSCHE, W.V. Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula I, *J. Aprox. Theory*, v.44 (1985), 258 – 276.

[6] ASSCHE, W.V. Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula II, *J. Aprox. Theory*, v.52 (1988), 322 – 338.

[7] BINGHAM, N.H., GOLDIE, C.M., TEUGELS, J.L. “Regular Variation”, Cambridge Univ. Press, London/New York, 1987.

[20] ERDŐS, P., FREUD, G. On orthogonal polynomials with regularly distributed zeros,

[8] CARLITZ, L. Some orthogonal polynomials related to elliptic functions I, II, *Duke Math. J.*, v.27 (1960), 443 – 458; v.28(1961), 107 – 124.

[21] CHIHARA, T. On orthogonal polynomials, *Ann. of Math.*, v.41 (1940), 510 – 535.

[9] CHIHARA, T. Chain sequences and orthogonal polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.104 1(1962), 1 – 16.

Proc. Royal Soc. (Edin.), v.76 (1976), 1 – 6.



- [10] CHIHARA, T. On kernel polynomials and related systems, *Boll. Un. Mat. Ital.*, v.3 19(1964), 451 – 459.
- [11] CHIHARA, T. Orthogonal polynomials whose zeros are dense in intervals, *J. Math. Anal. and Appl.*, v.24 2(1968), 362 – 371.
- [12] CHIHARA, T. “An Introduction to Orthogonal Polynomials”, Gordon & Breach, New York (1978).
- [13] CHIHARA, T. Spectral properties of orthogonal polynomials on unbounded sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.270 (1982), 623 – 639.
- [14] CHURCHILL, R.V. “Complex Variables and Applications”, second edition, Kōyakusha Company Ltda., Tokyo (1960).
- [15] COOPER, S.C., GUSTAFSON, P.E. The strong Chebyshev distribution and orthogonal Laurent polynomials, *J. Approx. Theory.*, v.92 (1998), 361 – 378.
- [16] DOMBOWSKI, J., FRICKE, G.H. The absolute continuity of phase operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.213 (1975), 363 – 372.
- [17] DOMBOWSKI, J. Spectral properties of real parts of weighted shift operators, *Indiana Univ. Math. J.*, v.29 (1980), 249 – 259.
- [18] DOMBOWSKI, J., NEVAI, P. Orthogonal polynomials, measures and recurrence relations, *SIAM J. Math. Anal.*, v.17 (1986), 752 – 759.
- [19] ERDÖS, P. On distribution of the roots of orthogonal polynomials, Proc. Conf. on Construction Theory of Functions (Budapeste, 1969), ed. G. Alexits and S.B.Steckhin (Akadémiai Kiadó, Budapeste, 1972).
- [20] ERDÖS, P., FREUD, G. On orthogonal polynomials with regularly distributed zeros, *Proc. London Math. Soc.*, v.3, 29(1974), 521 – 537.
- [21] ERDÖS, P., TURAN, P. On interpolation III, *Ann. of Math.*, v.41 (1940), 510 – 555.
- [22] FREUD, G. On the coefficients in the recursion formulae of orthogonal polynomials, *Proc. Royal Irish. Acad.*, v.76 (1976), 1 – 6.



- [23] GERONIMO, J.S., CASE, K.M. Scattering theory and orthogonal polynomials on the real line, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.258 (1980), 467 – 494.
- [24] GERONIMO, J.S., VAN ASSCHE, W. Orthogonal polynomials with asymptotically periodic recurrence coefficients, *J. Approx. Theory*, v.46 (1986), 251 – 283.
- [25] HAMBURGER, H. Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems, Parts I, II, III, *Math. Ann.*, v.81 (1920), 235 – 319; v.82(1921), 120 – 164, 168 – 187.
- [26] HILLE, E. “Analytic Function Theory”, v.2, *Blaisdell Publ. Co.*, waltham, 1962.
- [27] JONES, W.B., THRON, W.J., WAADELAND, H. A strong Stieltjes moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.261(1980), 503 – 528.
- [28] JONES, W.B., NJÅSTAD, O., THRON, W.J. Two-point Padé expansions for a family of analytic functions, *J. Comput. Appl. Math.*, v.9(1983), 105 – 123.
- [29] LORENTZEN, L., WAADELAND, H. “Continued Fractions with Applications”, North-Holland, (1992).
- [30] LUBINSKY, D.S., MHASKAR, H.N., SAFF, E.B. Freud’s conjecture for exponential weights, *Bull. Amer. Math. Soc.*, v.15(1986), 217 – 221.
- [31] LUBINSKY, D.S., MHASKAR, H.N., SAFF, E.B. A proof of Freud’s conjecture for exponential weights, (a ser publicado).
- [32] MAGNUS, A.P. A proof of Freud’s conjecture about the orthogonal polynomials related to $|\alpha|^\rho e^{-x^{2m}}$ for integer m , in “Polynomes orthogonaux et applications” (Barle-Duc, 1984), *Lecture Notes in Mathematics* v.1171, 362 – 372, Springer - Verlag, New York/Berlin, 1985.
- [33] MAKI, D. On determining regular behavior from the recurrence formula for orthogonal polynomials, *Pacific J. Math.*, v.91(1980), 173 – 178.
- [34] MHASKAR, H.N., SAFF, E.B. Extremal problems for polynomials with exponential weights, *Trans Amer. Math. Soc.*, v.285(1984), 203 – 234.

- [35] NEVAI, P.G. "Orthogonal Polynomials", *Memoir of A.M.S.*, v.213 *Amer. Math. Soc.*, 1979.
- [36] NEVAI, P.G. Distribution of zeros of orthogonal polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.249(1979), 341 – 361.
- [37] NEVAI, P.G. Orthogonal polynomials defined by a recurrence relation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.250(1979), 369 – 384.
- [38] NEVAI, P.G., DEHESA, J.S. On asymptotic average properties of zeros of orthogonal polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, v.10(1979), 1184 – 1192.
- [39] NJÅSTAD, O., THRON, W.J. The teory of sequences of L-polynomials, Padé Approximants and Continued Fractions (H. Waadeland and H. Wallin, eds.), *Det Kongelige Norsk Videnskabers Selskab*, v.1, Universitetsforlaget, Trondeihm, 1983, 54 – 91.
- [40] RAKHMANOV, E.A. On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the real line, *Mat. Sb.*, v.119 (161)(1982), 163 – 203 [in Russian]; *Math. USSR-Sb* v.47(1984), 155 – 193.
- + [41] RUDIN, W. "Princípios de Análise Matemática", Tradução: Eliana Rocha Henriques de Brito, Editora Universidade de Brasília, Rio de Janeiro, 1971.
- + [42] RUDIN, W. "Real and Complex Analysis", second edition, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1978.
- [43] SAFF, E.B., ULLMAN, J.L., VARGA, R.S. Incomplete polynomials; An electrostatic approach, in "Approximation Theory III" (E.W. Cheney, Ed.), 769 – 782, *Academic Press*, New York, 1980.
- [44] SCHOHAT, J., TAMARKIN, J. The problem of moments, *Math. Sur*, v.1 *Amer. Math. Soc.*, New York (1943).
- [45] SENETA, E. "Regularly Varying Functions", *Lecture Notes in Mathematics*, v.508, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

- † [46] SRI RANGA, A. Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision, *Numer. Math.*, v.68(1994), 283 – 294.
- [47] SRI RANGA, A., BRACCIALI, C.F. A continued fraction associated with a special Stieltjes function, *Comm. in the Anal. Theory Continued Fractions*, v.3(1994), 60–64.
- † [48] SRI RANGA, A. Symmetric orthogonal polynomials and associated orthogonal L-polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v.123, 10(1995), 3135 – 3141.
- [49] SRI RANGA, A., MATIOLI, L.C. Bounds for the extreme zeros of polynomials generated by a certain recurrence relation, *Rev. Mat. Estat.*, v.14(1996), 113 – 120.
- † [50] SRI RANGA, A., ANDRADE, E.X.L. DE, PHILLIPS, G.M. Associated Symmetric Quadrature Rules, *Applied Numerical Mathematics*, v.21(1996), 175 – 183.
- [51] STIELTJES, T.J. Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* v.8(1894), J1 – J122; v.9(1895), A1 – A47.
- † [52] SZEGÖ, G. “Orthogonal Polynomials”, Coll. Pub., v.23 *Amer. Math. Soc.*, New York, (1939).
- [53] ULLMAN, J.L. On the regular behavior of orthogonal polynomials, *Proc. London Math. Soc.*, v.3, 24(1972), 119 – 148.
- [54] ULLMAN, J.L. On orthogonal polynomials associated with an infinite interval, in “Approximation Theory III” (E.W. Cheney, Ed.), 889 – 895, *Academic Press*, New York, 1980.
- [55] ULLMAN, J.L. On orthogonal polynomials associated with an infinite interval, *J. Michigan Math.*, v.27(1980), 353 – 363.
- [56] WALL, H.S. “Analytic Theory of Continued Fractions”, Chelsea, Bronx, New York (1973).
- [57] ZYGMUND, W. “A Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis”, New York, 1977.

