



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Análise de Estabilidade Linear de Escoamentos Bidimensionais do Fluido Oldroyd-B

Ellen Silva Gervazoni

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Analice Costacurta Brandi

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Junho de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Análise de Estabilidade Linear de Escoamentos Bidimensionais do Fluido Oldroyd-B

Ellen Silva Gervazoni

Orientadora: Prof^ª. Dr^a. Analice Costacurta Brandi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Junho de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

G33a Gervazoni, Ellen Silva.
Análise de estabilidade linear de escoamentos bidimensionais do fluido Oldroyd-B / Ellen Silva Gervazoni. - Presidente Prudente : [s.n.], 2016
84 f.

Orientadora: Analice Costacurta Brandi
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Transição laminar-turbulenta. 2. Fluidos viscoelásticos. 3. Simulação numérica direta. 4. Teoria de estabilidade linear. I. Brandi, Analice Costacurta. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. ANALICE COSTACURTA BRANDI
ORIENTADORA



Profa. Dra. GILGILENE SANCHEZ DE PAULO
UNESP/FCT



Prof. Dr. LEANDRO FRANCO DE SOUZA
USP/São Carlos



ELLEN SILVA GERVAZONI

Presidente Prudente (SP), 27 de junho de 2016.

Resultado: **APROVADO.**

*A Deus e a minha família,
por sempre acreditarem em mim.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem a Sua permissão o primeiro passo não seria dado.

Especialmente quero agradecer aos meus pais, José Antonio e Marta, minha irmã Emilly e meu noivo Danilo que estiveram comigo, apoiando-me em toda caminhada, trilhando este meu caminho. Fizeram e fazem parte da realização da minha conquista. E a todos os familiares presentes e ausentes que sempre foram lembrados em meus pensamentos.

À Prof^a. Analice Costacurta Brandi pela orientação, que dedicou seu tempo, compartilhou seus conhecimentos para que a minha formação fosse também um aprendizado de vida.

Aos professores Leandro Franco de Souza e Márcio Teixeira de Mendonça pela disposição e colaboração no desenvolvimento desta dissertação.

Ao amigo e professor Aldo Eloizo Job, pelo incentivo para que realizasse este mestrado.

Aos docentes do Departamento de Matemática e Computação da FCT - Unesp, em especial, aos professores Messias Meneguette Jr. e Gilcilene Sanchez de Paulo, que fizeram parte da banca de qualificação, dando sugestões para finalização do trabalho.

Aos meus amigos Naiara e Amauri, por todas as ajudas nos estudos, e principalmente ao Luciano, pelo companheirismo, amizade e pelos momentos bons e ruins, mas sempre ajudando um ao outro e nunca desistindo.

À CAPES, pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

E a todos que contribuíram, diretamente ou indiretamente, para o sucesso deste.

*“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades,
lembrai-vos de que as grandes coisas do homem
foram conquistadas do que parecia impossível.”*
Charles Chaplin

Resumo

Diversos escoamentos de interesse prático são de fluidos viscoelásticos e muitas vezes é desejável saber se estes escoamentos propagam-se no estado laminar ou no turbulento. Embora a hidrodinâmica de fluidos viscoelásticos sejam fortemente afetadas pelo balanço entre forças inerciais e elásticas no escoamento, o efeito da elasticidade sobre a estabilidade de escoamentos inerciais não foi completamente estabelecida. No presente trabalho, estuda-se o que ocorre entre estes dois estados, na transição laminar-turbulenta. Especificamente, é investigada a convecção de ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento incompressível de Poiseuille para um fluido viscoelástico, utilizando a equação constitutiva Oldroyd-B. Para isto, utiliza-se a Simulação Numérica Direta para verificar a estabilidade dos escoamentos de fluidos viscoelásticos a perturbações não estacionárias. Os resultados numéricos obtidos para escoamentos de fluidos viscoelásticos são comparados com os resultados de escoamentos de fluidos Newtonianos, que já estão bem documentados na comunidade científica. Além disso, uma equação de Orr-Sommerfeld modificada é deduzida para um escoamento viscoelástico utilizando a Teoria de Estabilidade Linear.

Palavras-Chave: *Transição Laminar-Turbulenta, Fluidos Viscoelásticos, Simulação Numérica Direta, Teoria de Estabilidade Linear.*

Abstract

Several flows of practical interest are of viscoelastic fluids and it is often desirable to know if these flows are in a laminar or turbulent state. Although the hydrodynamics of viscoelastic fluids are strongly affected by the balance between inertia and elastic forces in the flow, the effect of elasticity on the stability of inertial flows has not been completely established. In this work is studied what happens between these two states, the laminar-turbulent transition. Specifically, it will be investigated the convection of Tollmien-Schlichting waves to incompressible Poiseuille flow of viscoelastic fluid, using the constitutive equation Oldroyd-B. For this, the analysis is carried out by means of Direct Numerical Simulation to verify the stability of the non-stationary disturbances viscoelastic fluids flows. The numerical results obtained for viscoelastic fluids flows are compared with the results of Newtonian fluids flows, which are already well documented in scientific community. In addition, an Orr-Sommerfeld modified equation is deduced for a viscoelastic flow using Linear Stability Theory.

Keywords: *Laminar-Turbulent Transition, Viscoelastic Fluids, Direct Numerical Simulation, Linear Stability Theory.*

Lista de Figuras

4.1	Domínio computacional para o escoamento de Poiseuille 2D.	51
4.2	Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento para um fluido Newtoniano, considerando diferentes números de Reynolds.	53
4.3	Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,2$ e $Re = 5000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0$ e $2,0$	54
4.4	Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,2$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$	54
4.5	Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,2$ e $Re = 7000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0$ e $2,0$	55
4.6	Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,2$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0$ e $2,0$	55
4.7	Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,5$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$	56
4.8	Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,5$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0; 2,0$ e $5,0$	56
4.9	Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,8$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$	58
4.10	Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,8$ e $Re = 7000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0$ e $2,0$	58
4.11	Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,8$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$	59
4.12	Ampliação das curvas do máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,8$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$	59
4.13	Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,9$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$	60
4.14	Ampliação das curvas do máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,9$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$	60

- 4.15 Ampliação das curvas do máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,9$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0; 12,0$ e $15,0$. . . 61
- 4.16 Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 0,4$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$ 63
- 4.17 Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 0,4$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$ 63
- 4.18 Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 1,0$ e $Re = 5000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5$ e $0,8$ 64
- 4.19 Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 1,0$ e $Re = 7000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5$ e $0,8$ 64
- 4.20 Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 1,0$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$ 65
- 4.21 Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 2,0$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$ 65
- 4.22 Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 2,0$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$ 66
- 4.23 Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 5,0$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,5; 0,8$ e $0,9$ 66
- 4.24 Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 10,0$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$ 67
- 4.25 Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 12,0$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$ 67

Lista de Tabelas

A.1	Classificação de instabilidades.	78
-----	--	----

Lista de Siglas

K-BKZ: Kaye and Bernstein.

PTT: Phan-Thien-Tanner.

LST - Teoria de Estabilidade Linear.

FAS - Esquema de Aproximação Total.

DNS - Simulação Numérica Direta.

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	10
Lista de Siglas	13
1 Introdução	17
2 Formulação Matemática	21
2.1 Equações Governantes	21
2.1.1 Modelos Newtoniano e Não-Newtoniano	21
2.2 Adimensionalização	24
2.3 Simulação Numérica Direta	25
2.4 Teoria de Estabilidade Linear	27
2.5 Escoamento Base	39
3 Método Numérico	43
3.1 Simulação Numérica Direta	43
3.1.1 Introdução de Perturbações	44
3.1.2 Amortecimento de Reflexões na Entrada do Escoamento	44
3.1.3 Relaminarização do Escoamento	45
3.1.4 Cálculo da Vorticidade na Parede	46
3.1.5 Algoritmo Computacional	46
3.2 Teoria de Estabilidade Linear	47
4 Resultados	51
4.1 Simulação do Escoamento de Poiseuille	51
4.1.1 Variação do Número de Reynolds	52
4.1.2 Variação do Número de Weissenberg	53
4.1.3 Variação de β	61
5 Conclusão	69
Referências	70
A Análise de Estabilidade para Fluido Newtoniano	75
A.1 Análise Temporal e Espacial de Instabilidades	78

B	Adimensionalização das Equações	79
B.1	Equações de Navier-Stokes	79
B.2	Equação Oldroyd-B	81
B.3	Equação de Vorticidade	84

Introdução

A dinâmica de fluidos computacional é uma área com relevante interesse industrial nas áreas química, alimentícia, aeronáutica e petrolífera, e por isso, há muitos problemas a serem investigados. Entre os diversos problemas surgidos nessa área está o tratamento de escoamentos de fluidos não-Newtonianos. Esse tipo de problema tem se tornado um grande desafio nessa área pois a maioria das aplicações industriais envolvem escoamentos de fluidos viscoelásticos, tais como, injeção de plásticos, processos de extrusão de forma geral e extração de petróleo.

Desse modo, existe um grande interesse em desenvolver métodos numéricos capazes de simular escoamentos de fluidos viscoelásticos para poder prever, a custos baixos e com bons resultados, o comportamento do escoamento de um fluido durante o processo industrial. Porém, essa não é uma tarefa fácil pois nestes problemas as equações constitutivas que modelam um fluido viscoelástico são equações matemáticas complexas e de difícil tratamento em contornos do domínio computacional.

Um fluido viscoelástico pode ser definido simplificadaamente como sendo um fluido que se comporta como viscoso e elástico ao mesmo tempo. Um material elástico ideal, sob uma tensão, responde com deformação reversível. Ao cessar a tensão o corpo retorna à sua forma e volume original. Já um material viscoso, quando sob uma tensão de cisalhamento, responde de forma irreversível as deformações sofridas. O fluido viscoso dissipa energia enquanto que, o fluido viscoelástico dissipa um pouco de energia e armazena o restante. Portanto, a natureza dual deste material implica no seu comportamento complexo e ao mesmo tempo interessante.

Os modelos viscoelásticos podem ser classificados entre lineares ou não lineares. O modelo viscoelástico linear mais popular é o modelo de Maxwell ([3], [23]), que incorpora a ideia de um fluido que apresenta características tanto de um sólido elástico Hookeano, como de um fluido viscoso Newtoniano. Entre os principais modelos viscoelásticos não lineares encontrados na literatura podem ser citados os modelos diferenciais: Oldroyd-B ([6], [23], [25], [26]), White-Metzner [34], Giesekus [10], Leonov [18], modelos do tipo FENE [4], PTT ([24], [26]) e derivados, Pom Pom [14] e derivados; e os modelos integrais: K-BKZ ([19], [20]).

O processo pelo qual um escoamento laminar torna-se turbulento é conhecido como transição laminar-turbulenta. Este é um processo extremamente complexo que na atualidade ainda não é completamente compreendido. No entanto, com o resultado de décadas de intensa investigação, certas características tornaram-se gradualmente claras, mas a maioria para escoamentos de fluidos Newtonianos. Entretanto, há muitas aplicações científicas e industriais em que a estabilidade do escoamento laminar e a transição para a

turbulência são relevantes. Portanto, é importante investigar a física da estabilidade e a transição laminar-turbulenta a fim de controlá-la, adiantá-la ou preveni-la.

Escoamentos laminares estão sempre sujeitos à pequenas perturbações. Essas perturbações são devido a vários fatores, tais como, vibração estrutural, rugosidade superficial, ruído, turbulência externa, entre outros. Se essas perturbações não são amortecidas, o escoamento laminar sofre transição para um outro estado mais complexo, mas não necessariamente um estado de escoamento turbulento. O conceito de ondas de Tollmien-Schlichting surge pela necessidade de se justificar o paradoxo gerado pelo fato de uma camada limite laminar, teoricamente estável por não possuir nenhum ponto de inflexão, transicionar para a turbulência. Normalmente, essa transição é provocada por meio da instabilidade da camada limite laminar frente as perturbações.

A teoria de estabilidade hidrodinâmica investiga como essas perturbações são amplificadas ou amortecidas e como a evolução dessas perturbações estão relacionadas ao fenômeno de transição para o escoamento turbulento. O equilíbrio entre as forças de inércia e o campo de pressões pode levar a instabilidade se não houver efeitos viscosos dissipativos. Porém, a viscosidade também tem um efeito desestabilizador devido à difusão de quantidade de movimento.

Nos últimos anos, várias instabilidades puramente elásticas têm sido relatadas correspondendo a trabalhos experimentais ou teóricos através da análise de estabilidade linear ([15], [16], [29]). A Teoria de Estabilidade Linear é suficientemente simples para ser realizada em uma variedade de geometrias diferentes e ainda eficiente para permitir uma investigação paramétrica sobre o limite de estabilidade em escoamento primário.

Ainda assim, existem questões que não podem ser respondidas unicamente através da análise de estabilidade linear, tais como a estabilidade do escoamento secundário e a evolução não linear das perturbações. Para responder a estas questões, deve-se recorrer a uma análise de estabilidade não linear e/ou simulação numérica direta baseada no conjunto não linear de equações governantes. No entanto, especialmente para os escoamentos viscoelásticos, a complexidade das equações governantes é tal que torna esta tarefa computacionalmente muito exigente, especialmente se deseja resolver escoamentos tridimensionais e dependentes do tempo [2].

A Simulação Numérica Direta consiste em resolver as equações de Navier-Stokes diretamente, resolvendo com precisão todas as escalas espaciais e temporais presentes no escoamento, desde as escalas maiores e mais energéticas, representadas pela dimensão característica do problema, às escalas menores e dissipativas, representadas pela escala de Kolmogorov. A vantagem deste método é a possibilidade de se chegar mais próximo dos últimos estágios da transição, onde as interações não lineares são fortes, permitindo um estudo mais aprofundado dos processos que levam um escoamento à turbulência.

Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo investigar como ocorre o fenômeno de transição à turbulência, para um escoamento incompressível, bidimensional de um fluido viscoelástico, utilizando a equação constitutiva Oldroyd-B. Especificamente, será investigada a convecção de ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento de Poiseuille. Para isso, será utilizada a Simulação Numérica Direta para analisar a estabilidade de escoamentos de fluidos viscoelásticos e comparar com a de fluidos Newtonianos, a fim de contribuir para sanar as dificuldades encontradas neste problema. Além disso, apresenta-se o desenvolvimento das equações de estabilidade linear e o método de solução para um escoamento viscoelástico do tipo Oldroyd-B, utilizando a Teoria de Estabilidade Linear.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: são apresentadas as equações governantes para escoamentos incompressíveis, isotérmicos, e para os modelos de fluidos Newtoniano e não-Newtoniano.

A equação constitutiva considerada para o escoamento viscoelástico é o modelo Oldroyd-B. Essas equações são apresentadas na forma dimensional e adimensional. Apresenta-se também as equações na formulação vorticidade-velocidade utilizadas na Simulação Numérica Direta e a dedução da equação de Orr-Sommerfeld modificada para um fluido viscoelástico utilizando a Teoria de Estabilidade Linear.

- Capítulo 3: são apresentados os métodos numéricos utilizados para a solução das equações governantes adotando a Simulação Numérica Direta e a Teoria de Estabilidade Linear.
- Capítulo 4: são apresentados os resultados numéricos das simulações utilizando Simulação Numérica Direta, em que o problema do escoamento de Poiseuille incompressível para um fluido viscoelástico, utilizando a equação constitutiva Oldroyd-B é investigado.

Por fim, são apresentadas as conclusões da pesquisa desenvolvida e perspectivas para continuidade deste trabalho.

Formulação Matemática

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes para escoamentos incompressíveis, isotérmicos, e para os modelos de fluidos Newtoniano e não-Newtoniano. A equação constitutiva considerada para o escoamento viscoelástico é o modelo Oldroyd-B. Essas equações são apresentadas na forma dimensional e adimensional. Apresenta-se também as equações na formulação vorticidade-velocidade utilizadas na Simulação Numérica Direta e a dedução da equação de Orr-Sommerfeld modificada para um fluido viscoelástico utilizando a Teoria de Estabilidade Linear.

2.1 Equações Governantes

As equações instantâneas que modelam escoamentos incompressíveis e isotérmicos são as equações de conservação de massa (continuidade) e de conservação de quantidade de movimento, dadas respectivamente, por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{u}$ é o vetor velocidade, t é o tempo, ρ é a densidade do fluido e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão total definido por

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad (2.3)$$

em que p é a pressão, $\mathbf{I}$ é o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ o tensor simétrico das tensões, que pode ser determinado a partir da equação constitutiva do fluido. No caso bidimensional, $\mathbf{u} = [u \ v]^\top$ representa as velocidades nas direções x e y , respectivamente, e o tensor simétrico das tensões é definido por $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix}$.

2.1.1 Modelos Newtoniano e Não-Newtoniano

Os fluidos apresentam diversas particularidades relacionadas às suas propriedades físicas, as quais podem influenciar de maneira direta fatores como o fluxo do material e a taxa de deformação, e esta característica está relacionada com a natureza do fluido que pode ser Newtoniano ou não-Newtoniano.

Sendo assim, nos modelos de fluidos Newtonianos, o tensor simétrico das tensões é linearmente proporcional ao tensor taxa de deformação, que é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D}, \quad (2.4)$$

em que η_s é a viscosidade dinâmica do fluido e $\mathbf{D}$ é o tensor taxa de deformação, dado por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top), \quad (2.5)$$

ou ainda no caso bidimensional pode ser reescrito por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Assim, calculando o divergente da equação (2.3) para um fluido Newtoniano, ou seja, o divergente do tensor tensão total $\boldsymbol{\sigma}$, tem-se que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} - p\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) & -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{bmatrix}.$$

Em coordenadas cartesianas bidimensionais, as equações de conservação (2.1) e (2.2), para um fluido Newtoniano, tornam-se respectivamente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.7)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (2.8)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]. \quad (2.9)$$

Os fluidos não-Newtonianos são os fluidos que não apresentam uma linearidade entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento, ou seja, o valor da viscosidade dinâmica não é constante, variando de acordo com a taxa de deformação aplicada [33]. Neste tipo de fluido não existe um comportamento padrão da variação da taxa de deformação. Estas diferenças sugerem várias subclassificações dos fluidos não-Newtonianos, por exemplo: fluidos viscoelásticos, fluidos tixotrópicos, fluidos pseudoplásticos, entre outros, mais detalhes em [7], [11].

Sendo assim, no modelo de fluido não-Newtoniano, em particular, de fluido viscoelástico, o tensor das tensões é definido pela soma da contribuição Newtoniana (viscosa) e da contribuição não-Newtoniana (elástica) da seguinte maneira

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T}, \quad (2.10)$$

em que η_s é a viscosidade do solvente Newtoniano, $\mathbf{D}$ é o tensor taxa de deformação definido em (2.5) e $\mathbf{T}$ é o tensor extra-tensão (simétrico) que representa a contribuição não-Newtoniana (polimérica), que na forma bidimensional é dado por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix}.$$

Logo, o divergente do tensor tensão total (2.3) para um fluido não-Newtoniano é dado por

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T} - p\mathbf{I}) = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \right].$$

Neste caso, as equações de conservação (2.1) e (2.2), para um fluido viscoelástico, tornam-se respectivamente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.11)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (2.13)$$

Neste trabalho é utilizada a equação constitutiva do modelo Oldroyd-B [6], que é uma equação reológica que descreve o comportamento físico de um fluido, sendo caracterizada por

$$\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (2.14)$$

em que η_p é um coeficiente de viscosidade polimérica, λ é o tempo de relaxação do fluido e $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ é a derivada convectada dada por

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}, \quad (2.15)$$

em que $\frac{D\mathbf{T}}{Dt}$ é a derivada material de $\mathbf{T}$, que pode ser descrita por

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}). \quad (2.16)$$

Reescrevendo a equação (2.15) em coordenadas cartesianas bidimensionais, obtém-se a seguinte diferença de matrizes

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = & \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} & \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} \\ \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} & \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} \end{bmatrix} + \\ & - \begin{bmatrix} 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} & T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + T^{xy} \frac{\partial v}{\partial y} \\ T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} & 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Substituindo as equações (2.6) e (2.17) em (2.14), os tensores não-Newtonianos do modelo Oldroyd-B se reduz as equações

$$T^{xx} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2\eta_p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.18)$$

$$T^{xy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \eta_p \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.19)$$

$$T^{yy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2\eta_p \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.20)$$

2.2 Adimensionalização

Em dinâmica dos fluidos computacional é comum empregar formas adimensionais das equações de conservação com o objetivo de mostrar os efeitos físicos, formular o modelo independente do sistema de unidades, limitar os valores de variáveis e parâmetros e, principalmente, fornecer condições para se obter situações geometricamente similares. Para esses fins, em geral, considera-se uma mudança de variáveis, surgindo então alguns grupos adimensionais como por exemplo o número de Reynolds e o de Weissenberg [9].

Para adimensionalização das equações governantes definem-se os parâmetros, tais como o comprimento L , a velocidade U e a densidade ρ_0 que neste caso pode ser o próprio ρ , pois o escoamento é incompressível. Utilizando esses escalares as variáveis adimensionais (acrescidas do sobrescrito $*$) são dadas por

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho U^2}. \quad (2.21)$$

Ao aplicar as mudanças de variáveis (2.21) nas equações governantes surgem os números adimensionais, como mostrados abaixo:

- Número de Reynolds (Re): Representa a razão entre as forças inercias e as forças viscosas do escoamento e é definido por

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta_0}, \quad (2.22)$$

onde η_0 é a viscosidade total do fluido, dada por $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, sendo que η_s é a viscosidade do solvente e η_p a viscosidade do polímero.

- Número de Weissenberg (Wi): Para um fluido viscoelástico, é a razão entre uma escala de tempo característica do fluido e uma escala de tempo do escoamento,

$$Wi = \frac{\lambda U}{L}. \quad (2.23)$$

- Constante β : A constante $\beta \in (0, 1)$ é uma quantidade que controla a contribuição do solvente Newtoniano, definida por

$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}. \quad (2.24)$$

Substituindo as transformações (2.21) nas equações de conservação (2.11)–(2.13) e (2.18)–(2.20) obtém-se as formas bidimensional cartesiana e adimensional (o símbolo * foi omitido por simplicidade) das equações

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}, \quad (2.27)$$

$$T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.28)$$

$$T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.29)$$

$$T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.30)$$

As equações (2.25)–(2.30) modelam um escoamento incompressível, isotérmico e bidimensional, para um fluido viscoelástico utilizando o modelo Oldroyd-B, em qualquer regime do número de Reynolds, e são as equações de trabalho para a simulação de problemas bem comportados. Os detalhes da adimensionalização dessas equações podem ser vistos no Apêndice B.

2.3 Simulação Numérica Direta

A Simulação Numérica Direta (DNS) resolve diretamente as equações de Navier-Stokes, geralmente empregando esquemas de diferenças finitas de alta ordem, em que todas as escalas do escoamento são simuladas, das maiores e mais energéticas até as menores, sem precisar adicionar equações de fechamento. A principal restrição desta técnica está relacionada com o custo computacional.

Com o objetivo de eliminar o tratamento dado à pressão nas equações de Navier-Stokes, opta-se pela formulação vorticidade-velocidade. Para tanto, define-se a vorticidade ω_z bidimensional como

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.31)$$

Derivando a equação (2.31) em relação a x para o componente v da velocidade, tem-se

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Considerando a equação da continuidade dada por (2.7), tem-se

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Considerando a definição de vorticidade e a equação da continuidade, deriva-se uma equação de Poisson para a componente v da velocidade, obtendo-se

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial(\omega_z)}{\partial x}. \quad (2.32)$$

Além disso, convenientes manipulações envolvendo as equações de Navier-Stokes resultam na equação de transporte de vorticidade bidimensional dada por

$$\rho \left[\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_z)}{\partial y} \right] = \eta_s \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y}, \quad (2.33)$$

ou na forma adimensional pode ser escrita como

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_z)}{\partial y} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.34)$$

Tendo como referência a formulação adotada, o seguinte sistema de equações adimensionalizadas devem ser considerado neste trabalho

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_z)}{\partial y} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y}, \quad (2.37)$$

$$T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.38)$$

$$T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.39)$$

$$T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.40)$$

Os detalhes da adimensionalização da equação de transporte de vorticidade pode ser visto no Apêndice B.3. As condições de contorno são especificadas de acordo com o problema a ser considerado.

No problema de interesse desse trabalho, a saber, escoamento plano de Poiseuille não-Newtoniano, como pode ser visto na Figura (4.1), existem basicamente três tipos de condições de contorno empregadas, a saber: condição de entrada de fluido no domínio de solução, condição de saída de fluido do domínio de solução e condição sobre uma superfície rígida.

- Entrada de fluido (*Inflow*): Estabelecida a posição do contorno de entrada a velocidade tangencial (v) ao contorno é considerada nula e a velocidade normal (u) é prescrita, ou seja,

$$u = U(y) \quad \text{e} \quad v = 0. \quad (2.41)$$

A contribuição não-Newtoniana $\mathbf{T}$ é determinada considerando que o fluido não recebe interferência desta propriedade, ou seja,

$$\mathbf{T} = 0. \quad (2.42)$$

- Parede ou fronteira sólida: Nestes contornos considera-se a condição de não-escorregamento e impermeabilidade, ou seja,

$$u = 0 \quad \text{e} \quad v = 0. \quad (2.43)$$

- Saída de fluido (*Outflow*): Considera-se a condição de Neumann homogênea na direção normal a fronteira, tanto para a velocidade quanto para a contribuição não-Newtoniana, dada pelo tensor $\mathbf{T}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x^2} = 0. \quad (2.44)$$

2.4 Teoria de Estabilidade Linear

Nesta seção a análise de estabilidade linear é estendida para escoamentos de fluidos viscoelásticos, utilizando a equação constitutiva Oldroyd-B. O Apêndice A mostra a dedução da equação de Orr-Sommerfeld para um fluido Newtoniano.

Neste trabalho, o objetivo é deduzir uma equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B, e estudar sua solução numérica. Na literatura pouco se conhece sobre a equação de Orr-Sommerfeld para fluidos não-Newtonianos, assim é de suma importância apresentar uma dedução detalhada para tal equação.

As equações que descrevem escoamentos incompressíveis, isotérmicos e bidimensionais, para o caso viscoelástico são dadas por (2.25)–(2.30).

Assumindo que o escoamento base é invariante na direção x , ou seja,

$$\begin{aligned} u &= U(y), \\ v &= 0, \\ p &= P(x, y), \\ T &= \hat{T}(y). \end{aligned}$$

Em seguida, considera-se que o escoamento instantâneo pode ser decomposto em um escoamento base e um escoamento perturbado. As variáveis dependentes são compostas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t), \\ v(x, y, t) &= \tilde{v}(x, y, t), \\ p(x, y, t) &= P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t), \\ T(x, y, t) &= \hat{T}(y) + \tilde{T}(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Como por hipótese o escoamento principal é solução das equações de Navier-Stokes, as resultantes descritas acima também devem satisfazer esse sistema de equações. Schlichting [28] afirma que as perturbações devem ser pequenas no sentido de que os termos não lineares possam ser desprezados quando comparados com os termos lineares.

Substituindo as variáveis (2.45) nas equações de conservação de massa e de quantidade de movimento, e dos tensores não-Newtonianos (2.25)–(2.30), obtém-se as equações de conservação e dos tensores não-Newtonianos para as perturbações.

Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y} = 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0. \quad (2.46)$$

Equação da quantidade de movimento em x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}.$$

Substituindo as variáveis (2.45) na equação da quantidade de movimento em x (2.26), tem-se

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial t} + \frac{\partial((U(y) + \tilde{u}(x, y, t))(U(y) + \tilde{u}(x, y, t)))}{\partial x} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial y} \right] = -\frac{\partial(P + \tilde{p}(x, y, t))}{\partial x} + \\ & \quad + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial y^2} \right] + \\ & \quad + \frac{\partial(\hat{T} + \tilde{T}^{xx}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{T} + \tilde{T}^{xy}(x, y, t))}{\partial y}. \end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(y)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}(x, y, t)}{\partial t} + U \frac{\partial U(y)}{\partial x} + U \frac{\partial \tilde{u}(x, y, t)}{\partial x} + \tilde{u}(x, y, t) \frac{\partial U(y)}{\partial x} + \\ & + \tilde{u}(x, y, t) \frac{\partial \tilde{u}(x, y, t)}{\partial x} + \tilde{v}(x, y, t) \frac{\partial U(y)}{\partial y} + \tilde{v}(x, y, t) \frac{\partial \tilde{u}(x, y, t)}{\partial y} = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{p}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 U(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, t)}{\partial y^2} \right] + \\ & + \frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}(x, y, t)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}.$$

Logo, a equação da quantidade de movimento em x perturbada é dada por

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}. \quad (2.47)$$

Equação da quantidade de movimento em y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}.$$

Substituindo as variáveis (2.45) na equação da quantidade de movimento em y (2.27), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial t} &+ \frac{\partial((U(y) + \tilde{u}(x, y, t))(\tilde{v}(x, y, t)))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y} = \\ &- \frac{\partial(P + \tilde{p}(x, y, t))}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y^2} \right] + \\ &+ \frac{\partial(\hat{T} + \tilde{T}^{xy}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{T} + \tilde{T}^{yy}(x, y, t))}{\partial y}. \end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}(x, y, t)}{\partial t} &+ U \frac{\partial \tilde{v}(x, y, t)}{\partial x} + \tilde{v}(x, y, t) \frac{\partial \tilde{v}(x, y, t)}{\partial x} + \tilde{v}(x, y, t) \frac{\partial \tilde{v}(x, y, t)}{\partial y} = \\ &- \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{p}(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, y, t)}{\partial y^2} \right] + \\ &+ \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}(x, y, t)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}.$$

Logo, a equação da quantidade de movimento em y perturbada é dada por

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}. \quad (2.48)$$

Os termos entre colchetes das equações (2.47) e (2.48) são os termos não lineares. Assumindo-se que as amplitudes das perturbações são pequenas, pode-se desprezar os termos não lineares dessas equações. Sendo assim, o sistema simplificado dá-se por:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}. \quad (2.51)$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{xx} :

$$T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial (uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Substituindo as variáveis (2.45) na equação do tensor não-Newtoniano (2.28), tem-se

$$\begin{aligned} & (\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}(x, y, t)) + Wi \left(\frac{\partial (\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}(x, y, t))}{\partial t} + \right. \\ & + \frac{\partial (U(y) + \tilde{u}(x, y, t))(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial (\tilde{v}(x, y, t))(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}(x, y, t))}{\partial y} + \\ & - 2(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}(x, y, t)) \frac{\partial (U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial x} - 2(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}(x, y, t)) \frac{\partial (U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial y} \Big) = \\ & = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial (U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial x}. \end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned} & \hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx} + Wi \left(\frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial x} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \right. \\ & + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial y} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial U(y)}{\partial x} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xx} \frac{\partial U(y)}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \\ & - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial U(y)}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U(y)}{\partial y} \Big) - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \left[\frac{\partial U(y)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação T^{xx} perturbada é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xx} & + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U(y)}{\partial y} + \right. \\ & + \left. \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}. \quad (2.52) \end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{xy} :

$$T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial (uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Substituindo as variáveis (2.45) na equação do tensor não-Newtoniano (2.29), tem-se

$$\begin{aligned}
& (\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}(x, y, t)) + Wi \left(\frac{\partial(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}(x, y, t))}{\partial t} + \right. \\
& + \frac{\partial(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}(x, y, t))}{\partial y} + \\
& - (\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}(x, y, t)) \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial x} - (\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}(x, y, t)) \frac{\partial(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial y} \Big) = \\
& = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy} + Wi \left(\frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial x} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \right. \\
+ \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial y} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y} - \hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial U(y)}{\partial y} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \\
\left. - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U(y)}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial U(y)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right].
\end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação T^{xy} perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{xy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial y} - \hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U(y)}{\partial y} + \right. \\
\left. + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y} - \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right]. \quad (2.53)
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{yy} :

$$T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Substituindo as variáveis (2.45) na equação do tensor não-Newtoniano (2.30), tem-se

$$\begin{aligned}
& (\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}(x, y, t)) + Wi \left(\frac{\partial(\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}(x, y, t))}{\partial t} + \right. \\
& + \frac{\partial(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))(\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))(\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}(x, y, t))}{\partial y} + \\
& - 2(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}(x, y, t)) \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial x} - 2(\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}(x, y, t)) \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y} \Big) = \\
& = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned} & \hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy} + Wi \left(\frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial x} + U \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial y} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação T^{yy} perturbada é dada por

$$\begin{aligned} & \tilde{T}^{yy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Os termos entre colchetes das equações (2.52), (2.53) e (2.54) são os termos não lineares. Assumindo-se que as amplitudes das perturbações são pequenas, pode-se desprezar os termos não lineares dessas equações. Desta forma, as equações dos tensores não-Newtonianos perturbadas podem ser escritas por

$$\tilde{T}^{xx} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U(y)}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}. \quad (2.55)$$

$$\tilde{T}^{xy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial y} - \hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U(y)}{\partial y} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right]. \quad (2.56)$$

$$\tilde{T}^{yy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \quad (2.57)$$

As condições de contorno adotadas para o problema do escoamento de Poiseuille são dadas por

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{para} \quad y = -1 \quad \text{e} \quad y = 1.$$

Estas condições de contorno correspondem à condição de não escorregamento na parede (no-slip) e ao decaimento das perturbações longe da parede.

Uma vez que as equações resultantes são lineares e que os coeficientes das equações não dependem de t e x , as soluções podem ser buscadas através do método de separação de variáveis, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x, y, t) &= \frac{1}{2}[\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc], \\
\tilde{v}(x, y, t) &= \frac{1}{2}[\bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc], \\
\tilde{p}(x, y, t) &= \frac{1}{2}[\bar{p}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc], \\
\tilde{T}(x, y, t) &= \frac{1}{2}[\bar{T}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc],
\end{aligned} \tag{2.58}$$

sendo $i = \sqrt{-1}$, cc o complexo conjugado da variável em questão, α o número de onda na direção x e ω a frequência com que as perturbações, de comprimento de onda $\lambda = 2\pi/\alpha$, propagam-se. Considera-se ainda que $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{p}$ e $\bar{T}$ são as amplitudes das perturbações.

Utilizando o método de separação de variáveis tem-se um sistema de equações diferenciais ordinárias. E, substitui-se as variáveis (2.58) nas equações de conservação para perturbação (2.49)–(2.51) e nas equações dos tensores não-Newtonianos perturbadas (2.55)–(2.57), obtém-se as seguintes equações.

Da equação da continuidade perturbada (2.49), obtém-se

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right] + \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{2}(\bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right] = 0.$$

Deriva-se seus respectivos termos em relação a x e y ,

$$\frac{1}{2} [\bar{u}(y)i\alpha e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc] + \frac{1}{2} \left[\frac{d\bar{v}(y)}{dy} e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc \right] = 0.$$

Colocando o termo comum em evidência na equação anterior, tem-se

$$\frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[i\alpha \bar{u}(y) + \frac{d\bar{v}(y)}{dy} \right] = 0.$$

Simplificando a equação acima e denotando $'$ para a derivada na direção y , obtém-se

$$i\alpha \bar{u} + \frac{d\bar{v}}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad i\alpha \bar{u} + \bar{v}' = 0. \tag{2.59}$$

Da equação da quantidade de movimento na direção x perturbada (2.50), resulta-se

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}(\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right] + U \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right] + \\
& + \left[\frac{1}{2}(\bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right] \frac{dU}{dy} = - \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(\bar{p}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right] + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{2}(\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{1}{2}(\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right) \right] + \\
& + \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(\bar{T}^{xx}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right] + \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{2}(\bar{T}^{xy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right].
\end{aligned}$$

Deriva-se seus respectivos termos em relação a t , x e y ,

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \bar{u}(y) i \omega e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} U \bar{u}(y) i \alpha e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{dU}{dy} = \\
& - \frac{1}{2} \bar{p}(y) i \alpha e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{\beta}{2Re} \left[(i\alpha)^2 \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{d^2 \bar{u}(y)}{dy^2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \bar{T}^{xx}(y) i \alpha e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} \frac{d\bar{T}^{xy}(y)}{dy} e^{i(\alpha x - \omega t)}.
\end{aligned}$$

Colocando o termo em comum em evidência na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[-i\omega \bar{u}(y) + i\alpha U \bar{u}(y) + \bar{v}(y) \frac{dU}{dy} \right] = \\
& = \frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[-i\alpha \bar{p}(y) + \frac{\beta}{Re} \left((i\alpha)^2 \bar{u}(y) + \frac{d^2 \bar{u}(y)}{dy^2} \right) + i\alpha \bar{T}^{xx}(y) + \frac{d\bar{T}^{xy}(y)}{dy} \right].
\end{aligned}$$

Simplicando a equação acima, obtém-se

$$-i\omega \bar{u} + i\alpha U \bar{u} + \bar{v} \frac{dU}{dy} = -i\alpha \bar{p} + \frac{\beta}{Re} \left((i\alpha)^2 \bar{u} + \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) + i\alpha \bar{T}^{xx} + \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy}.$$

Fazendo todas as manipulações necessárias, tem-se

$$(-i\omega + i\alpha U) \bar{u} + \bar{v} U' = -i\alpha \bar{p} + \frac{\beta}{Re} (-\alpha^2 \bar{u} + \bar{u}'') + i\alpha \bar{T}^{xx} + \bar{T}'^{xy}.$$

Logo, a equação da quantidade de movimento na direção x é dada por

$$Re(i\alpha U - i\omega) \bar{u} - \beta(\bar{u}'' - \alpha^2 \bar{u}) + Re \bar{v} U' = i\alpha(\bar{T}^{xx} - \bar{p}) + \bar{T}'^{xy}. \quad (2.60)$$

E, da equação da quantidade de movimento na direção y perturbada (2.51), segue que

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right] + U \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (\bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right] = \\
& = - \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{2} (\bar{p}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right] + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{2} (\bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{1}{2} (\bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right) \right] + \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (\bar{T}^{xy}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right] + \\
& + \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{2} (\bar{T}^{yy}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc) \right].
\end{aligned}$$

Deriva-se seus respectivos termos em relação a t , x e y ,

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \bar{v}(y) i \omega e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} U i \alpha \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} = - \frac{1}{2} \frac{d\bar{p}(y)}{dy} e^{i(\alpha x - \omega t)} + \\
& + \frac{\beta}{2Re} \left[(i\alpha)^2 \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{d^2 \bar{v}(y)}{dy^2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] + \frac{1}{2} i \alpha \bar{T}^{xy}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} \frac{d\bar{T}^{yy}(y)}{dy} e^{i(\alpha x - \omega t)}.
\end{aligned}$$

Colocando o termo comum em evidência na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}e^{i(\alpha x - \omega t)} [-i\omega \bar{v}(y) + U i \alpha \bar{v}(y)] = \\ & = \frac{1}{2}e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[-\frac{d\bar{p}(y)}{dy} + \frac{\beta}{Re} \left(-\alpha^2 \bar{v}(y) + \frac{d^2 \bar{v}(y)}{dy^2} \right) + i\alpha \bar{T}^{xy}(y) + \frac{d\bar{T}^{yy}(y)}{dy} \right]. \end{aligned}$$

Simplificando a equação acima, obtém-se

$$-i\omega \bar{v} + U i \alpha \bar{v} = -\frac{d\bar{p}}{dy} + \frac{\beta}{Re} \left(-\alpha^2 \bar{v} + \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} \right) + i\alpha \bar{T}^{xy} + \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy}.$$

Logo, a equação da quantidade de movimento na direção y é dada por

$$Re(i\alpha U - i\omega)\bar{v} - \beta(\bar{v}'' - \alpha^2 \bar{v}) = i\alpha \bar{T}^{xy} + \bar{T}'^{yy} - \bar{p}'. \quad (2.61)$$

Da equação do tensor não-Newtoniano T^{xx} perturbada ($\tilde{T}^{xx}$) (2.55), obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\bar{T}^{xx}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc] + Wi \left[\frac{d\frac{1}{2} [\bar{T}^{xx}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dt} + \right. \\ & + U \frac{d\frac{1}{2} [\bar{T}^{xx}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dx} + \left(\frac{1}{2} [\bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc] \right) \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + \\ & - 2\hat{T}^{xx} \frac{d\frac{1}{2} [\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dx} - 2\hat{T}^{xy} \frac{d\frac{1}{2} [\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dy} + \\ & \left. - 2 \left(\frac{1}{2} [\bar{T}^{xy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc] \right) \frac{dU(y)}{dy} \right] = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{d\frac{1}{2} [\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dx}. \end{aligned}$$

Deriva-se seus respectivos termos em relação a t, x e y ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \bar{T}^{xx}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + Wi \left[-\frac{1}{2} i\omega \bar{T}^{xx}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} U i \alpha \bar{T}^{xx}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} - 2\hat{T}^{xx} \frac{1}{2} i\alpha \bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} - 2\hat{T}^{xy} \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}(y)}{dy} e^{i(\alpha x - \omega t)} + \\ & \left. - \bar{T}^{xy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{dU(y)}{dy} \right] = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{1}{2} i\alpha \bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}. \end{aligned}$$

Colocando o termo comum em evidência na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[\bar{T}^{xx}(y) + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{xx}(y) + U i \alpha \bar{T}^{xx}(y) + \bar{v}(y) \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} - 2\hat{T}^{xx} i\alpha \bar{u}(y) + \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\hat{T}^{xy} \frac{d\bar{u}(y)}{dy} - 2\bar{T}^{xy}(y) \frac{dU(y)}{dy} \right) \right] = \frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[2 \frac{(1 - \beta)}{Re} i\alpha \bar{u}(y) \right]. \end{aligned}$$

Simplificando a equação acima, a equação do tensor $\bar{T}^{xx}$ é dada por

$$\begin{aligned} & \bar{T}^{xx} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{xx} + U i \alpha \bar{T}^{xx} + \bar{v} \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} - 2\hat{T}^{xx} i\alpha \bar{u} + \right. \\ & \left. - 2\hat{T}^{xy} \frac{d\bar{u}}{dy} - 2\bar{T}^{xy} \frac{dU}{dy} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} i\alpha \bar{u}. \quad (2.62) \end{aligned}$$

Da equação do tensor não-Newtoniano T^{xy} perturbada ($\tilde{T}^{xy}$) (2.56), obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\bar{T}^{xy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc] + Wi \left[\frac{d\frac{1}{2} [\bar{T}^{xy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dt} + \right. \\ & + U \frac{d\frac{1}{2} [\bar{T}^{xy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dx} + \left(\frac{1}{2} [\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc] \right) \frac{d\hat{T}^{xy}}{dx} + \\ & + \left(\frac{1}{2} [\bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc] \right) \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} - \hat{T}^{xx} \frac{d\frac{1}{2} [\bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dx} + \\ & - \hat{T}^{yy} \frac{d\frac{1}{2} [\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dy} - \frac{1}{2} [\bar{T}^{yy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc] \frac{dU(y)}{dy} \Big] = \\ & = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left[\frac{d\frac{1}{2} (\bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc)}{dx} + \frac{d\frac{1}{2} (\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc)}{dy} \right]. \end{aligned}$$

Deriva-se seus respectivos termos em relação a t, x e y ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \bar{T}^{xy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + Wi \left[-\frac{1}{2} i\omega \bar{T}^{xy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} U i\alpha \bar{T}^{xy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dx} + \frac{1}{2} \bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} - \frac{1}{2} \hat{T}^{xx} i\alpha \bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \\ & - \frac{1}{2} \hat{T}^{yy} \frac{d\bar{u}(y)}{dy} e^{i(\alpha x - \omega t)} - \frac{1}{2} \bar{T}^{yy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{dU(y)}{dy} \Big] = \\ & = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left[\frac{1}{2} i\alpha \bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}}{dy} \right]. \end{aligned}$$

Colocando o termo comum em evidência na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[\bar{T}^{xy}(y) + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{xy}(y) + U i\alpha \bar{T}^{xy}(y) + \bar{u}(y) \frac{d\hat{T}^{xy}}{dx} + \bar{v}(y) \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \hat{T}^{xx} i\alpha \bar{v}(y) - \hat{T}^{yy} \frac{d\bar{u}(y)}{dy} - \bar{T}^{yy}(y) \frac{dU(y)}{dy} \right) \right] = \frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[\frac{(1 - \beta)}{Re} \left(i\alpha \bar{v}(y) + \frac{d\bar{u}(y)}{dy} \right) \right]. \end{aligned}$$

Simplificando a equação acima, a equação do tensor $\bar{T}^{xy}$ é dada por

$$\begin{aligned} & \bar{T}^{xy} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{xy} + U i\alpha \bar{T}^{xy} + \bar{v} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} - \hat{T}^{xx} i\alpha \bar{v} + \right. \\ & \left. - \hat{T}^{yy} \frac{d\bar{u}}{dy} - \bar{T}^{yy} \frac{dU}{dy} \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(i\alpha \bar{v} + \frac{d\bar{u}}{dy} \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Da equação do tensor não-Newtoniano T^{yy} perturbada ($\tilde{T}^{yy}$) (2.57), tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [\overline{T}^{yy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc] + Wi \left[\frac{d\frac{1}{2} [\overline{T}^{yy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dt} + \right. \\
& + U \frac{d\frac{1}{2} [\overline{T}^{yy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dx} + \left(\frac{1}{2} [\overline{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc] \right) \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} + \\
& \left. - 2\hat{T}^{xy} \frac{d\frac{1}{2} [\overline{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dx} - 2\hat{T}^{yy} \frac{d\frac{1}{2} [\overline{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc]}{dy} \right] = \\
& = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left[\frac{d\frac{1}{2} (\overline{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc)}{dy} \right].
\end{aligned}$$

Deriva-se seus respectivos termos em relação a t , x e y ,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \overline{T}^{yy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + Wi \left[-\frac{1}{2} i\omega \overline{T}^{yy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} U i\alpha \overline{T}^{yy}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \overline{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} - 2\hat{T}^{xy} \frac{1}{2} i\alpha \overline{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} - 2\hat{T}^{yy} \frac{1}{2} \frac{d\overline{v}(y)}{dy} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left. \right] = \\
& = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left[\frac{1}{2} \frac{d\overline{v}(y)}{dy} e^{i(\alpha x - \omega t)} \right].
\end{aligned}$$

Colocando o termo comum em evidência na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[\overline{T}^{yy}(y) + Wi \left(-i\omega \overline{T}^{yy}(y) + U i\alpha \overline{T}^{yy}(y) + \overline{v}(y) \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} + \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\hat{T}^{xy} i\alpha \overline{v}(y) - 2\hat{T}^{yy} \frac{d\overline{v}(y)}{dy} \right) \right] = \frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{d\overline{v}(y)}{dy} \right].
\end{aligned}$$

Simplificando a equação acima, a equação do tensor $\overline{T}^{yy}$ é dada por

$$\begin{aligned}
& \overline{T}^{yy} + Wi \left(-i\omega \overline{T}^{yy} + U i\alpha \overline{T}^{yy} + \overline{v} \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} - 2\hat{T}^{xy} i\alpha \overline{v} + \right. \\
& \left. - 2\hat{T}^{yy} \frac{d\overline{v}}{dy} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{d\overline{v}}{dy}.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Reescreve-se as equações (2.59)–(2.61) em função das autofunções $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{p}$ e $\overline{T}$, admitindo que $c = \omega/\alpha$ seja a velocidade de onda, então

$$i\alpha \overline{u} + \overline{v}' = 0, \tag{2.65}$$

$$i\alpha(U - c)\overline{u} + U'\overline{v} + i\alpha\overline{p} - i\alpha\overline{T}^{xx} - \overline{T}'^{xy} = \frac{\beta}{Re} (\overline{u}'' - \alpha^2 \overline{u}), \tag{2.66}$$

$$i\alpha(U - c)\overline{v} + \overline{p}' - i\alpha\overline{T}^{xy} - \overline{T}'^{yy} = \frac{\beta}{Re} (\overline{v}'' - \alpha^2 \overline{v}). \tag{2.67}$$

Derivando a equação (2.66) em relação a y , tem-se

$$i\alpha(U - c)\bar{u}' + i\alpha\bar{u}U' + \bar{v}'U' + \bar{v}U'' + i\alpha\bar{p}' - i\alpha\bar{T}'^{xx} - \bar{T}''^{xy} = \frac{\beta}{Re} (\bar{u}''' - \alpha^2\bar{u}') . \quad (2.68)$$

Multiplicando a equação (2.67) pela constante $i\alpha$, obtém-se

$$-\alpha^2(U - c)\bar{v} + i\alpha\bar{p}' + \alpha^2\bar{T}^{xy} - i\alpha\bar{T}'^{yy} = \frac{\beta}{Re} (i\alpha\bar{v}'' - i\alpha^3\bar{v}) . \quad (2.69)$$

Subtraindo as equações (2.68) e (2.69), resulta em

$$i\alpha(U - c)\bar{u}' + i\alpha\bar{u}U' + \bar{v}'U' + \bar{v}U'' + \alpha^2(U - c)\bar{v} + i\alpha(\bar{T}'^{yy} - \bar{T}'^{xx}) - \bar{T}''^{xy} - \alpha^2\bar{T}^{xy} = \frac{\beta}{Re} (\bar{u}''' - \alpha^2\bar{u}' + i\alpha^3\bar{v} - i\alpha\bar{v}'') . \quad (2.70)$$

Impondo a equação da continuidade (2.65) em (2.70), obtém-se

$$i\alpha(U - c)\left(\frac{i}{\alpha}\bar{v}'\right)' + i\alpha\frac{i}{\alpha}\bar{v}'U' + \bar{v}'U' + \bar{v}U'' + \alpha^2(U - c)\bar{v} + i\alpha(\bar{T}'^{yy} - \bar{T}'^{xx}) - \bar{T}''^{xy} - \alpha^2\bar{T}^{xy} = \frac{\beta}{Re} \left[\left(\frac{i}{\alpha}\bar{v}'\right)''' + -\alpha^2\left(\frac{i}{\alpha}\bar{v}'\right)' + i\alpha^3\bar{v} - i\alpha\bar{v}'' \right] .$$

E, fazendo as manipulações algébricas necessárias, obtém-se

$$-(U - c)\bar{v}'' + \bar{v}U'' + \alpha^2(U - c)\bar{v} + i\alpha(\bar{T}'^{yy} - \bar{T}'^{xx}) - \bar{T}''^{xy} - \alpha^2\bar{T}^{xy} = \frac{\beta}{Re} \left[\frac{i}{\alpha}\bar{v}^{IV} - i\alpha\bar{v}'' + i\alpha^3\bar{v} - i\alpha\bar{v}'' \right] . \quad (2.71)$$

Multiplicando a equação (2.71) por α , a equação obtida é uma equação diferencial ordinária de quarta ordem para a variável dependente $\bar{v}$:

$$-\alpha(U - c)\bar{v}'' + \alpha\bar{v}U'' + \alpha^3(U - c)\bar{v} + i\alpha^2(\bar{T}'^{yy} - \bar{T}'^{xx}) - \alpha\bar{T}''^{xy} - \alpha^3\bar{T}^{xy} = \frac{\beta}{Re} [i\bar{v}^{IV} - i\alpha^2\bar{v}'' + i\alpha^4\bar{v} - i\alpha^2\bar{v}''] . \quad (2.72)$$

Logo, a equação de Orr-Sommerfeld deduzida para um fluido viscoelástico, do tipo Oldroyd-B, é dada por

$$\alpha(U - c)(\bar{v}'' - \alpha^2\bar{v}) - \alpha\bar{v}U'' + i\alpha^2(\bar{T}'^{xx} - \bar{T}'^{yy}) + \alpha(\bar{T}''^{xy} + \alpha^2\bar{T}^{xy}) = \frac{\beta i}{Re} [\bar{v}^{IV} - 2\alpha^2\bar{v}'' + \alpha^4\bar{v}] . \quad (2.73)$$

Como o modelo viscoelástico considerado é o Oldroyd-B, então as equações dos tensores não-Newtonianos que aparecem na equação (2.73) podem ser obtidas por

$$\begin{aligned} \bar{T}'^{xx} + Wi \left(-i\omega \bar{T}'^{xx} + i\alpha U \bar{T}'^{xx} + i\alpha U' \bar{T}^{xx} + \bar{v}' \hat{T}'^{xx} + \bar{v} \hat{T}''^{xx} - 2\hat{T}'^{xx} \bar{v}' + \right. \\ \left. + 2\hat{T}^{xx} \bar{v}'' - 2\frac{i}{\alpha} \hat{T}'^{xy} \bar{v}'' - 2\frac{i}{\alpha} \hat{T}^{xy} \bar{v}''' - 2\bar{T}'^{xy} U' - 2\bar{T}^{xy} U'' \right) = -\frac{2(1-\beta)}{Re} \bar{v}'', \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}'^{yy} + Wi \left(-i\omega \bar{T}'^{yy} + i\alpha U \bar{T}'^{yy} + i\alpha U' \bar{T}^{yy} + \bar{v}' \hat{T}'^{yy} + \bar{v} \hat{T}''^{yy} - 2i\alpha \hat{T}'^{xy} \bar{v}' + \right. \\ \left. - 2i\alpha \hat{T}^{xy} \bar{v}' - 2\hat{T}'^{yy} \bar{v}' - 2\hat{T}^{yy} \bar{v}'' \right) = \frac{2(1-\beta)}{Re} \bar{v}'', \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}''^{xy} + Wi \left(-i\omega \bar{T}''^{xy} + i\alpha U \bar{T}''^{xy} + i\alpha U' \bar{T}'^{xy} + i\alpha U'' \bar{T}^{xy} + i\alpha U' \bar{T}'^{xy} + \right. \\ \left. + \bar{v}'' \hat{T}'^{xy} + \bar{v}' \hat{T}''^{xy} + \bar{v} \hat{T}'''^{xy} + \bar{v}' \hat{T}''^{xy} - i\alpha \hat{T}'^{xx} \bar{v}' - i\alpha \hat{T}''^{xx} \bar{v} - i\alpha \hat{T}^{xx} \bar{v}'' + \right. \\ \left. - i\alpha \hat{T}'^{xx} \bar{v}' - \bar{T}''^{yy} U' - \bar{T}'^{yy} U'' - \bar{T}^{yy} U''' - \frac{i}{\alpha} \hat{T}''^{yy} \bar{v}'' - \frac{i}{\alpha} \hat{T}^{yy} \bar{v}''' + \right. \\ \left. - \frac{i}{\alpha} \hat{T}'^{yy} \bar{v}''' - \frac{i}{\alpha} \hat{T}^{yy} \bar{v}^{IV} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(i\alpha \bar{v}'' + \frac{i}{\alpha} \bar{v}^{IV} \right), \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{xy} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{xy} + i\alpha U \bar{T}^{xy} + \bar{v} \hat{T}'^{xy} - i\alpha \hat{T}^{xx} \bar{v} - \hat{T}^{yy} \bar{u}' + \right. \\ \left. - \bar{T}^{yy} U' \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} (i\alpha \bar{v} + \bar{u}'). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Com este conjunto de equações e condições de contorno apropriadas pode-se obter resultados de análise de estabilidade linear.

2.5 Escoamento Base

Para calcular o escoamento base do canal, assume-se que todas as variáveis são dependentes apenas do eixo y , exceto para a pressão cujo gradiente é constante na direção x . Assume-se que na direção y o domínio compreende de $y = -1$ a $y = 1$.

Tem-se que o componente v do vetor velocidade é nulo, pois da equação da continuidade (2.7) tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v(x, y, t) \equiv \text{constante} \quad (2.78)$$

como $v_{parede} = 0$ então $v(x, y, t) \equiv 0$.

Sintetizando as hipóteses acima, tem-se

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0; \quad \nabla p = \text{constante}; \quad v = 0; \quad u = u(y); \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(y) \right)$$

Dadas as equações adimensionalizadas para o modelo de fluido viscoelástico (2.25)–(2.30), tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y},$$

$$T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Considerando as hipóteses acima e a geometria do canal, obtém-se as equações simplificadas que descrevem o escoamento de fluido viscoelástico, para o modelo Oldroyd-B

$$-p_x + \frac{\beta}{Re} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{dT^{xy}}{dy} = 0, \quad (2.79)$$

$$\frac{-\partial p}{\partial y} + \frac{dT^{yy}}{dy} = 0, \quad (2.80)$$

$$T^{xx} = 2WiT^{xy} \frac{du}{dy}, \quad (2.81)$$

$$T^{xy} = WiT^{yy} \frac{du}{dy} + \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{du}{dy}, \quad (2.82)$$

$$T^{yy} = 0. \quad (2.83)$$

Da equação (2.83), as equações (2.80) e (2.82) são reescritas como

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.84)$$

$$T^{xy} = \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{du}{dy}. \quad (2.85)$$

Substituindo o T^{xy} da equação (2.79) pela equação (2.85) tem-se

$$-p_x + \frac{\beta}{Re} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d \left(\frac{(1-\beta)}{Re} \frac{du}{dy} \right)}{dy} = 0,$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$-p_x + \frac{1}{Re} \frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \quad (2.86)$$

Integrando a equação (2.86) em relação a y , obtém-se

$$\int \frac{d^2 u}{dy^2} dy = \int Rep_x dy \Rightarrow \int \frac{du}{dy} dy = \int (Rep_x y + c_1) dy.$$

Integrando novamente em relação a y , obtém-se

$$u(y) = \frac{Rep_x}{2} y^2 + c_1 y + c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes advindas da integração. Utilizando as condições de contorno na parede $u_{y=\pm 1} = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} u(1) = 0 &= \frac{Rep_x}{2} + c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = -\frac{Rep_x}{2}, \\ u(-1) = 0 &= \frac{Rep_x}{2} - c_1 + c_2 \Rightarrow -c_1 + c_2 = -\frac{Rep_x}{2}. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima obtém-se

$$2c_2 = -Rep_x \Rightarrow c_2 = -\frac{Rep_x}{2}.$$

Portanto,

$$u(y) = \frac{Rep_x}{2} (y^2 - 1) + c_1 y.$$

E, utilizando as condições de contorno no centro do canal $u_{y=0} = 1$, pode-se obter a expressão

$$1 = u(0) = \frac{Rep_x}{2} (-1) + c_1 \cdot 0 \Rightarrow Rep_x = -2.$$

Portanto,

$$u(y) = -(y^2 - 1) \Rightarrow u = 1 - y^2.$$

Logo,

$$\frac{du}{dy} = -2y. \quad (2.87)$$

Substituindo a equação (2.87) nas equações (2.81) e (2.85), tem-se

$$T^{xx} = 8y^2 Wi \frac{(1 - \beta)}{Re},$$

$$T^{xy} = 2y \frac{(\beta - 1)}{Re}.$$

Esta solução analítica foi adotada como escoamento base na solução da simulação numérica do escoamento.

Método Numérico

Neste capítulo são apresentados os métodos numéricos utilizados para a solução das equações governantes adotando a Simulação Numérica Direta e a Teoria de Estabilidade Linear, como pode ser vistas no capítulo 2.

3.1 Simulação Numérica Direta

O sistema de equações (2.35)–(2.40) é resolvido numericamente através da Simulação Numérica Direta que, em decorrência da evolução das ferramentas de cálculo, dos métodos numéricos e de computadores com alto poder de processamento, tem permitido calcular todas as escalas de turbulência de um escoamento pela completa resolução das equações de Navier-Stokes de forma eficiente.

O método numérico adotado para discretização temporal das equações que modelam o escoamento e dos componentes do tensor extra-tensão das equações do fluido viscoelástico é um esquema clássico de quatro etapas na integração de Runge-Kutta de quarta ordem [9]. O sistema linear resultante da solução numérica da equação de Poisson é resolvido usando um esquema completo de Aproximação *multigrid* (FAS) [32]. Esse sistema linear foi resolvido por meio de um ciclo V composto por 4 níveis. Uma vez que objetiva-se a resolução de um problema elíptico optou-se, de acordo com o trabalho de Brandt [5], por uma razão de engrossamento igual a 2.

Deseja-se captar os efeitos transientes, e para simular adequadamente estes efeitos é necessário empregar incrementos de tempo na simulação numérica relativamente pequeno, da mesma ordem de grandeza necessária para que se satisfaçam os critérios de estabilidade numérica. Assim, optou-se pelo método de Runge-Kutta de 4^a ordem.

As derivadas espaciais são calculadas usando diferenças finitas compactas de alta ordem ([13], [17], [30], [31]). O uso das diferenças finitas compactas utilizadas para a estimativa da primeira e segunda derivada espacial, requer a solução de sistemas lineares tridiagonais. As aproximações numéricas das derivadas têm quinta e sexta-ordem de precisão [31].

Adam [1] utilizou o método de Padé clássico e faz comparações utilizando diferentes condições de contorno. Ele mostrou que a vantagem em se calcular a derivada no contorno através de aproximações compactas é a de manter o esquema estável, prevenindo qualquer instabilidade numérica proveniente do contorno.

Neste estudo adotou-se aproximações de 6^a ordem para o ponto próximo ao contorno e aproximações de 5^a ordem para o ponto no contorno. Aproximações de sexta ordem

foram testadas para o ponto no contorno, mas resultaram em instabilidades numéricas [30].

3.1.1 Introdução de Perturbações

Em concordância com estudos de Fasel [8], a introdução de perturbações temporais é realizada através de injeção e sucção de massa na parede, por ser um método muito eficiente para geração de ondas de Tollmien-Schlichting. Justifica-se a escolha devido a questões de estabilidade e maior coerência com resultados experimentais e numéricos [8].

No início, no tempo $t = 0$ assume-se que o escoamento é não perturbado. Portanto, a partir do tempo $t + \delta t$, as perturbações são introduzidas em uma determinada região dos contornos, delimitada pelos extremos x_1 e x_2 , como pode ser observado na Figura 4.1. A perturbação é representada por meio de uma função polinomial $f(x)$ de 9º grau para a velocidade v na qual

$$v = Af(x)\text{sen}(\omega_t t), \quad x_1 < x < x_2, \quad (3.1)$$

e

$$v = 0, \quad x \leq x_1 \quad \text{ou} \quad x \geq x_2, \quad (3.2)$$

onde A é uma constante utilizada para ajustar a amplitude das perturbações e ω_t é a frequência temporal da perturbação. Os coeficientes do polinômio são escolhidos convenientemente objetivando anular o valor da função e das suas primeira e segunda derivadas nos pontos x_1 e x_2 . Isto torna a introdução de perturbações no escoamento mais suave.

3.1.2 Amortecimento de Reflexões na Entrada do Escoamento

De acordo com Meitz [21], em simulações numéricas onde estão presentes vórtices longitudinais, podem existir reflexões destes vórtices na entrada do domínio. Visando evitar possíveis reflexões, uma zona de amortecimento próxima à entrada é adotada e o componente de vorticidade é ponderado por meio de uma função da forma

$$f_1(x) = f_1(\epsilon) = 6\epsilon^5 - 15\epsilon^4 + 10\epsilon^3, \quad (3.3)$$

em que ϵ é definida como uma função dependente dos pontos de discretização na direção longitudinal. A função ϵ é definida como

$$\epsilon = \frac{i - 1}{i_1 - 1}, \quad (3.4)$$

onde $1 \leq i \leq i_1$. Assim, a função $f_1(x)$ é aplicada, no intervalo em questão, como segue

$$\omega_z(x, y, t) = f_1(x)\hat{\omega}_z(x, y, t). \quad (3.5)$$

Ressalta-se que $\hat{\omega}_z(x, y, t)$ representa o componente de vorticidade que sai do integrador temporal e $\omega_z(x, y, t)$ é o valor do componente obtido após a aplicação do amortecimento.

Nos casos em que se deseja estudar um comprimento de onda transversal específico, e havendo necessidade de inserção de perturbação com amplitude relativamente alta, verificou-se que, se o primeiro harmônico do modo excitado possuir uma taxa de amplificação linear maior que a do próprio modo, este se amplifica mais rapidamente e altera o resultado [30].

3.1.3 Relaminarização do Escoamento

Nas simulações numéricas de transição laminar-turbulenta as perturbações do tipo convectivas são carregadas pelo escoamento base para fora do domínio no contorno de saída. Assim como ocorre na região da entrada do escoamento, efeitos não físicos associados à reflexão numérica de perturbações convectivas, na região de saída do escoamento, podem comprometer a qualidade dos resultados numéricos ([13], [21]). Souza [30] adotou uma técnica de relaminarização no sentido de eliminar tais efeitos de reflexão de onda.

A técnica consiste em, considerando um intervalo próximo à saída do escoamento, impor que as perturbações dos componentes de vorticidade decaiam a zero. Neste sentido, considerando um intervalo $x_3 < x < x_4$ (ver Figura 4.1) em correspondência com os pontos de malha i_3 e i_4 , utiliza-se uma função f_2 , a qual varia de $f_2(x_3) = 1$ até $f_2(x_4) = 0$. Assim,

$$\omega_z(x, y, t) = f_2(x)\hat{\omega}_z(x, y, t), \quad (3.6)$$

para todo o intervalo anteriormente definido. De forma análoga a subseção anterior, vale ressaltar que $\hat{\omega}_z(x, y, t)$ representa o componente da vorticidade que sai do integrador temporal e $\omega_z(x, y, t)$ é tomado como valor obtido após a relaminarização.

Kloker [13] utiliza um polinômio de 5ª ordem para a função $f_2(x)$, onde

$$f_2(x) = f_2(\epsilon) = 1 - 6\epsilon^5 + 15\epsilon^4 - 10\epsilon^3, \quad (3.7)$$

tal que $\epsilon = (i - i_3)/(i_4 - i_3)$, para $i_3 \leq i \leq i_4$.

Além disso, Meitz [21] verificou os efeitos de se aplicar a técnica de relaminarização n vezes, a cada passo do integrador temporal. Ou seja,

$$\omega_z(x, y, t) = f_2^n(x)\hat{\omega}_z(x, y, t). \quad (3.8)$$

Testes realizados por Meitz [21], voltados à aplicação da equação (3.8) a uma função $\omega_z(x, y, t)$ constante, com $n = 1, 50, 100$ e 150 , mostraram que a repetida aplicação da função $f_2(x)$ gera um decaimento brusco. Este decaimento pode causar reflexões de onda na região de relaminarização. Como forma de evitar este comportamento brusco, Meitz [21] propôs a utilização de uma função $f_3(x)$ na forma

$$f_3(x) = f_3(\epsilon) = e^{-\frac{\epsilon^4}{10}}(1 - \epsilon^{50})^4. \quad (3.9)$$

No presente trabalho, opta-se pela utilização da função proposta por Meitz [21]. Souza [30] ainda ressalta que, para o bom funcionamento da técnica, as seguintes restrições devem ser respeitadas

$$i_4 - i_3 \geq 2\lambda, \quad (3.10)$$

$$i_{max} - i_4 \geq \lambda \quad (3.11)$$

sendo λ um comprimento de onda de Tollmien-Schlichting. As perturbações temporais em um escoamento se propagam como ondas, se estas ondas se propagam na direção do escoamento principal, elas são conhecidas como ondas de Tollmien-Schlichting planares. Caso elas se propaguem numa direção oblíqua ao escoamento, elas são chamadas de ondas de Tollmien-Schlichting oblíquas. Se estas perturbações forem infinitesimais, elas podem ser estudadas pela teoria da estabilidade linear.

3.1.4 Cálculo da Vorticidade na Parede

Obtidas as soluções numéricas da equação de Poisson e da continuidade, o cálculo da vorticidade em $y = -1$ ou $y = 1$ pode ser realizado, segundo Souza [30], efetuando-se os seguintes passos:

a) Calcula-se

$$J = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (3.12)$$

Observa-se que a segunda derivada na direção x , no intervalo entre x_1 e x_2 , é obtida (analiticamente) considerando a mesma função utilizada para a inserção das ondas de Tollmien-Schlichting. Além disso, toma-se como nula a derivada nos demais pontos. Na direção y , a aproximação explícita e descentrada abaixo apresentada é utilizada.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{y=-1} = & \frac{1}{18\delta y^2} [-134.89v_1 + 216v_2 - 135v_3 + 80v_4 - \\ & -33.75v_5 + 8.64v_6 - v_7] + O(\delta y^6). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Em $y = 1$, uma aproximação similar é empregada. Essas aproximações reforçam o fato de que $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{y=\text{parede}} = 0$.

b) Tendo os valores do laplaciano da velocidade, o componente de vorticidade é então obtido por meio da equação:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = -J. \quad (3.14)$$

As aproximações numéricas empregadas, também propostas por Souza [30], são:

para $i = 2$:

$$\omega_{z_2} = \frac{1}{720} [\delta x (251\omega'_{z_1} + 646\omega'_{z_2} - 264\omega'_{z_3} + 106\omega'_{z_4} - 19\omega'_{z_5}) + 720\omega_{z_1}] + O\left(\frac{3}{160}\delta x^6\right); \quad (3.15)$$

para $3 \leq i \leq imax - 2$:

$$\omega_{z_2} = \frac{1}{57} \left[\delta x (10\omega'_{z_{i-1}} + 57\omega'_{z_i} + 24\omega'_{z_{i+1}} - \omega'_{z_{i-2}}) + 33\omega'_{z_{i-2}} + 24\omega'_{z_{i-1}} \right] + O\left(\frac{11}{3420}\delta x^6\right); \quad (3.16)$$

para $i = imax - 1$: uma aproximação similar a $i = 2$ é utilizada.

3.1.5 Algoritmo Computacional

Souza [30] em sua tese, estuda duas técnicas de filtragem no sentido de eliminar oscilações numéricas. A primeira, proposta por Kloker [13], utiliza alternadamente esquemas descentrados compactos de 6ª ordem a montante e a juzante, em cada passo do método de Runge-Kutta. Ressalta-se que o esquema descentrado aplicado no último passo do integrador é novamente aplicado no primeiro passo do integrador no tempo posterior. A segunda estratégia, a qual foi de fato adotada, decorre de Lele [17]. Dentre os diversos métodos compactos de filtragem proposto pelo autor, opta-se pelo uso de um método compacto de 4ª ordem. A filtragem é aplicada ao final de cada iteração temporal e consiste em recalcular a distribuição dos componentes de vorticidade por meio de um sistema

pentadiagonal, apresentado por Souza [30], onde $\hat{\omega}_z$ representa a vorticidade antes da aplicação do filtro computacional.

Por fim, com o propósito de eliminar oscilações numéricas (espúrias), um filtro é aplicado após o último passo de Runge-Kutta. Este filtro requer a solução de um sistema pentadiagonal, e é aplicado na componente vorticidade na direção do escoamento e nas componentes do tensor extra-tensão não-Newtoniano.

Resolve-se numericamente as equações (2.35)–(2.40) através da aplicação do seguinte algoritmo:

1. Aplicar um passo do integrador de tempo para a vorticidade e para os tensores não-Newtonianos;
2. Aplicar as funções responsáveis pelas zonas de amortecimento e relaminarização do escoamento;
3. Introduzir as perturbações por sucção e injeção nas paredes;
4. Calcular o lado direito da equação de Poisson, dada pela equação (2.36);
5. Calcular a velocidade v , resolvendo a equação de Poisson (2.36);
6. Calcular o valor da velocidade u através da equação (2.35);
7. Atualizar o valor da vorticidade $\hat{\omega}_z$ nas paredes;
8. Aplicar o filtro após o último passo do integrador de tempo.

A simulação numérica termina quando o tempo limite de simulação é atingido. Normalmente este tempo é escolhido de forma a atingir um regime periódico.

3.2 Teoria de Estabilidade Linear

A solução da equação de Orr-Sommerfeld para um fluido Newtoniano está descrita, em detalhes, no Apêndice A. Sendo assim, nessa seção é apresentada o método de solução da equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico, do tipo Oldroyd-B.

A solução da equação de Orr-Sommerfeld modificada corresponde a um problema de autovalor, cuja solução existe para alguns valores dos parâmetros α , ω e Re , e depende do perfil de velocidade do escoamento base em questão. As perturbações correspondentes são denominadas ondas de Tollmien-Schlichting.

O perfil de velocidade média analisado é conhecido e dado pela solução analítica do escoamento entre duas placas paralelas, ou escoamento de Poiseuille, para fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B, que pode ser visto na seção 2.5.

A equação de Orr-Sommerfeld modificada pode ser reescrita por

$$A(y)\bar{v}^{IV} + B(y)\bar{v}''' + C(y)\bar{v}'' + D(y)\bar{v}' + E(y)\bar{v} + F(y) = 0,$$

onde $A(y)$, $B(y)$, $C(y)$, $D(y)$ e $E(y)$ correspondem as variáveis que multiplicam cada um dos termos $\bar{v}^{IV}$, $\bar{v}'''$, $\bar{v}''$, $\bar{v}'$ e $\bar{v}$, respectivamente; e o termo $F(y)$ é o termo independente. Estas variáveis vem da substituição dos tensores não-Newtonianos dados pelas equações (2.74)–(2.77) na equação de Orr-Sommerfeld modificada, para fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B, dada pela equação (2.73).

Reescrevendo essa equação na forma matricial $\bar{V}' = M\bar{V}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \bar{v}' \\ \bar{v}'' \\ \bar{v}''' \\ \bar{v}^{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-E(y)}{A(y)} & \frac{-D(y)}{A(y)} & \frac{-C(y)}{A(y)} & \frac{-B(y)}{A(y)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v} + \frac{F(y)}{E(y)} \\ \bar{v}' \\ \bar{v}'' \\ \bar{v}''' \end{bmatrix}.$$

Inicia-se o cálculo pela parede inferior. Para $y = -1$, uma combinação linear de soluções deve satisfazer as condições $\bar{v} = \bar{v}' = 0$. Assim, o vetor solução $\bar{V} = [\bar{v}, \bar{v}', \bar{v}'', \bar{v}''']$ pode ser escrito por meio da base canônica

$$\bar{V}_{(y=-1)} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde é necessário que $a_1 = a_2 = 0$, para que a condição de não escorregamento e impermeabilidade seja satisfeita. Tem-se então, para o contorno inferior

$$a_3 \bar{V}_I + a_4 \bar{V}_{II} = a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Integra-se a equação de Orr-Sommerfeld a partir das condições de contorno $\bar{V}_I = [0, 0, 1, 0]^T$ e $\bar{V}_{II} = [0, 0, 0, 1]^T$ até o contorno oposto $y = 1$. O resultado da integração fornece em $y = 1$ os valores V_I e V_{II} cuja combinação linear deve ser compatível com a condição de contorno, tal que

$$b_1 \bar{V}_I + b_2 \bar{V}_{II} = b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que na forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_I & \bar{v}'_I & \bar{v}''_I & \bar{v}'''_I \\ \bar{v}_{II} & \bar{v}'_{II} & \bar{v}''_{II} & \bar{v}'''_{II} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para o sistema linear acima admitir uma solução não trivial, faz-se necessário que

$$\begin{vmatrix} \bar{v}_I & \bar{v}'_I & \bar{v}''_I & \bar{v}'''_I \\ \bar{v}_{II} & \bar{v}'_{II} & \bar{v}''_{II} & \bar{v}'''_{II} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.17)$$

Um processo computacional implementado por Mendonça [22], adotando um *Shooting method*, é utilizado para resolver a equação de Orr-Sommerfeld modificada, para um fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B, com os seguintes passos:

- a. Considera-se valores iniciais para os autovalores dados α , ω , Re , Wi e β ;

- b. Integra-se a equação de Orr-Sommerfeld, por meio de um método de Runge-Kutta de quarta ordem, partindo-se do contorno inferior;
- c. Verifica se a condição de contorno no contorno superior é satisfeita, ou seja, se a restrição (3.17) é respeitada;
- d. Altera-se o valor de ω (ou α dependendo da análise – temporal ou espacial), de forma que o mesmo esteja próximo do valor anterior;
- e. Integra-se novamente a equação e verifica se a restrição é satisfeita ¹;
- f. Caso a restrição não seja respeitada, interpola-se ω por meio das últimas duas aproximações. Neste ponto, o algoritmo retorna ao item (e.).

Para a integração da equação de Orr-Sommerfeld adotou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem, e em cada passo dessa integração é necessário verificar se os vetores V_I e V_{II} são ortogonais e chamar uma rotina de ortonormalização de Gramm-Schmidt se necessário.

Neste trabalho é apresentado apenas um estudo teórico sobre a Teoria da Estabilidade Linear, com a dedução detalhada da equação de Orr-Sommerfeld modificada, e as equações dos tensores não-Newtonianos para um fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B. Além disso, também é apresentado e deduzido o método de solução para a equação de Orr-Sommerfeld modificada. A implementação desta técnica será testada futuramente.

¹O uso dos valores de ω^{k-1} e ω^k , no sentido de se estimar ω^{k+1} , é caracterizado pelo método das Secantes.

Resultados

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos das simulações utilizando-se Simulação Numérica Direta, em que a taxa de crescimento das ondas de Tollmien-Schlichting é investigada para o problema do escoamento de Poiseuille incompressível para um fluido viscoelástico, utilizando a equação constitutiva Oldroyd-B. Os resultados obtidos para fluido viscoelástico são comparados com os resultados de fluido Newtoniano.

4.1 Simulação do Escoamento de Poiseuille

Considerando o escoamento entre placas paralelas, conhecido como escoamento de Poiseuille, e adotando as hipóteses de escoamento bidimensional, incompressível e isotérmico, o domínio computacional pode ser visto na Figura 4.1. O objetivo é analisar a estabilidade de uma simulação de transição à turbulência para o escoamento de Poiseuille, através da Simulação Numérica Direta.

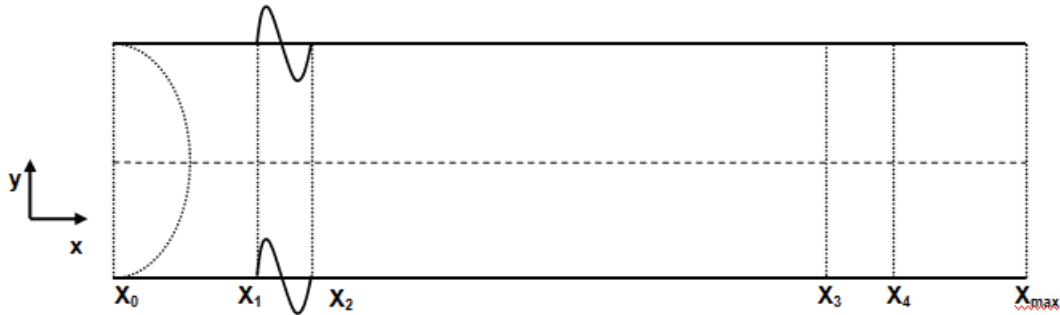


Figura 4.1: Domínio computacional para o escoamento de Poiseuille 2D.

O sistema de equações (2.35)–(2.40) é utilizado para resolver numericamente o problema de Poiseuille. Os cálculos são realizados em uma malha uniforme ortogonal, paralela à parede. O fluido entra no domínio computacional em $x = x_0$ e sai na fronteira em $x = x_{max}$, como mostra a Figura 4.1.

Neste trabalho, o comportamento das perturbações infinitesimais do escoamento é investigado. A introdução de perturbações é realizada através de injeção e sucção de massa na parede e esta faixa está localizada entre x_1 e x_2 . No início, no tempo $t = 0$ o escoamento é não perturbado, portanto, a partir de um tempo $t > 0$, as perturbações são introduzidas em uma região próxima da entrada, conhecida como faixa de perturbação,

através da imposição da velocidade v nas equações (3.1) e (3.2). Na região localizada entre os pontos x_0 e x_1 e x_3 e x_4 uma técnica de relaminarização do domínio é implementada de modo a evitar reflexões de ondas a partir da entrada e saída da fronteira, respectivamente.

Para as simulações numéricas do problema em questão, os seguintes parâmetros foram adotados:

- número de pontos na direção x (i_{max}) = 729;
- número de pontos na direção y (j_{max}) = 129, e para os casos refinados adotou-se $j_{max} = 257$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção x : $dx = \frac{2\pi}{32\alpha_r}$, onde α_r é a parte real do número de onda;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção y : $dy = \frac{2}{(j_{max}-1)}$;
- frequência da perturbação: $\omega_t = 0,27$;
- passo de tempo: $dt = \frac{2\pi}{128\omega_t}$, e para os casos refinados adotou-se $dt = \frac{2\pi}{256\omega_t}$;
- início do domínio $x_0 = 1, 0$.

O parâmetro A utilizado na equação (3.1) para ajustar a amplitude das ondas de Tollmien-Schlichting foi de 1×10^{-4} . As perturbações foram introduzidas entre os pontos 40 e 72, e a relaminarização do domínio inicia no ponto 629 e segue até o ponto 689. Este caso foi escolhido porque é o mais próximo do caso neutro para um fluido Newtoniano, e portanto, permite uma boa comparação quando os termos não-Newtonianos são adicionados às equações. Este caso também foi adotado no trabalho de Rogenski et al. [27].

Com o propósito de avaliar as taxas máximas de amplificação, diferentes simulações numéricas foram realizadas variando-se os parâmetros adimensionais para o escoamento de fluido viscoelástico e comparando com o escoamento de fluido Newtoniano. Neste trabalho, os parâmetros estudados são o número de Reynolds (Re), o número de Weissenberg (Wi) e a constante β . A seguir, serão apresentados os resultados numéricos obtidos para cada parâmetro.

4.1.1 Variação do Número de Reynolds

Nesse estudo considera-se apenas simulações do escoamento de Poiseuille para fluido Newtoniano, assumindo diferentes valores para o número de Reynolds. Os valores de Reynolds simulados são: $Re = 3000, 4000, 5000, 5900, 7000, 10000$ e 12000 .

A Figura 4.2 mostra o máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento (x), obtido pela análise temporal de Fourier. Esta análise foi realizada tomando-se o último período simulado. Nesta figura, as curvas mostram o comportamento das ondas de Tollmien-Schlichting do fluido Newtoniano para diferentes números de Reynolds. Pode-se observar que para os valores de $Re = 3000, 4000, 5000$ e 12000 as curvas estão decrescendo, mostrando o decaimento das perturbações, tornando-as estáveis. Por outro lado, para os valores de $Re = 5900$ e 7000 , pode-se notar o crescimento das perturbações, mostrando que são instáveis. E, por fim, para $Re = 10000$, a propagação das perturbações permanecem quase todas ao mesmo nível no domínio, tal como esperado para um caso quase neutro.

A partir dessas simulações do escoamento de fluido Newtoniano, para diferentes valores de Reynolds, foram escolhidos quatro valores de Reynolds para simular os casos de fluido viscoelástico, variando o número de Weissenberg e a constante β .

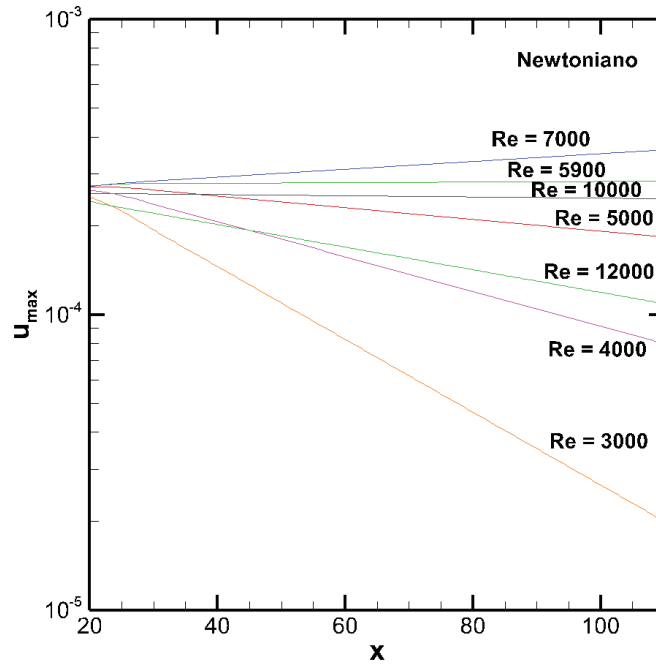


Figura 4.2: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento para um fluido Newtoniano, considerando diferentes números de Reynolds.

4.1.2 Variação do Número de Weissenberg

Considerando o escoamento de Poiseuille viscoelástico, utilizando o modelo Oldroyd-B, o efeito do número de Weissenberg nas simulações numéricas será analisado. Nessas simulações foram considerados quatro valores diferentes de Reynolds: $Re = 5000, 5900, 7000$ e 10000 , quatro valores diferentes de β : $\beta = 0, 2; 0, 5; 0, 8$ e $0, 9$ e todos esses casos serão comparados com o escoamento de Poiseuille Newtoniano.

O efeito do número de Weissenberg (Wi) na estabilidade do escoamento é mostrado nas Figuras 4.3 a 4.15 para diferentes valores de Re e β . Nessas figuras serão apresentadas o máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento (x) e as curvas mostram o comportamento das ondas de Tollmien-Schlichting do fluido Newtoniano e do fluido viscoelástico com seus parâmetros fixados.

Nas Figuras 4.3, 4.5 e 4.6 o valor de $\beta = 0, 2$ é fixo nessas simulações para os valores de $Re = 5000, 7000$ e 10000 , variando o número de Weissenberg para $Wi = 0, 4; 1, 0$ e $2, 0$. Pode-se observar que aumentando o número de Weissenberg, a propagação das perturbações crescem tornando o escoamento mais instável. No entanto, na Figura 4.4 o valor de $\beta = 0, 2$ também é fixo nessas simulações para o valor de $Re = 5900$, simulando altos valores do número de Weissenberg $Wi = 0, 4; 2, 0; 5, 0; 10, 0$ e $12, 0$, observando o mesmo comportamento das Figuras 4.3, 4.5 e 4.6.

Seguindo a mesma ideia, para os valores fixos de $\beta = 0, 5$ e $Re = 5900$, variando o número de Weissenberg para os valores de $Wi = 0, 4; 2, 0; 5, 0; 10, 0$ e $12, 0$ e ainda, $Re = 10000$, variando o número de Weissenberg para os valores de $Wi = 0, 4; 1, 0; 2, 0$ e $5, 0$, as Figuras 4.7 e 4.8 mostram o mesmo comportamento dos casos anteriores nas Figuras 4.3 a 4.6, em que o escoamento é mais instável à medida que o número de Wi aumenta.

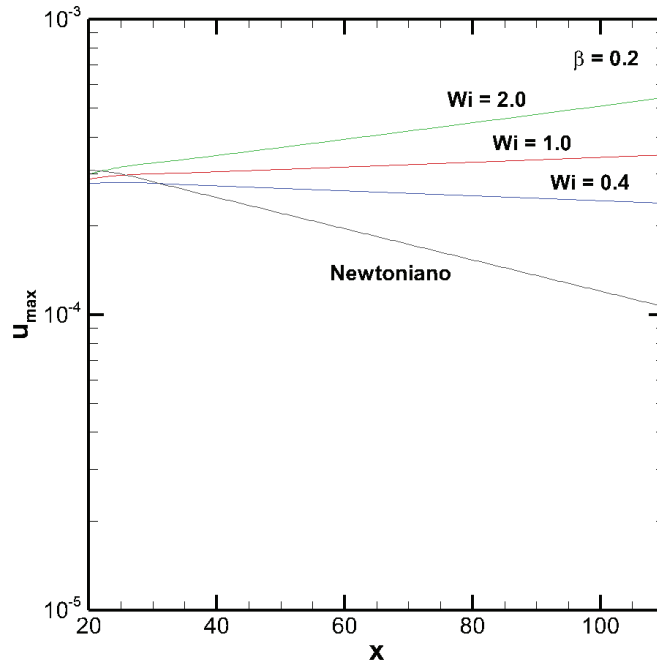


Figura 4.3: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,2$ e $Re = 5000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0$ e $2,0$.

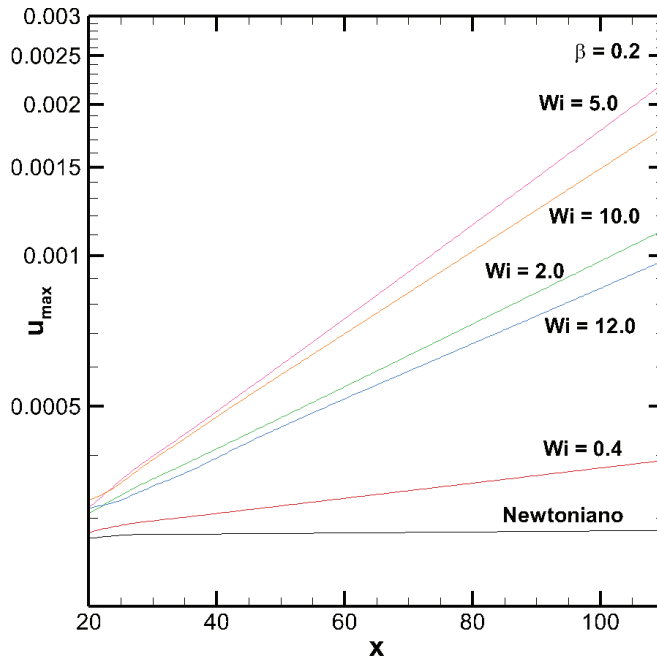


Figura 4.4: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,2$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$.

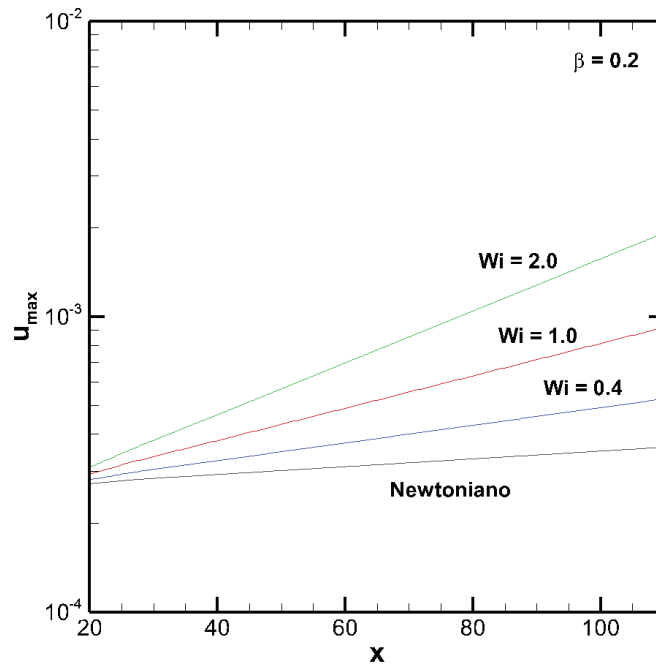


Figura 4.5: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,2$ e $Re = 7000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4$; $1,0$ e $2,0$.

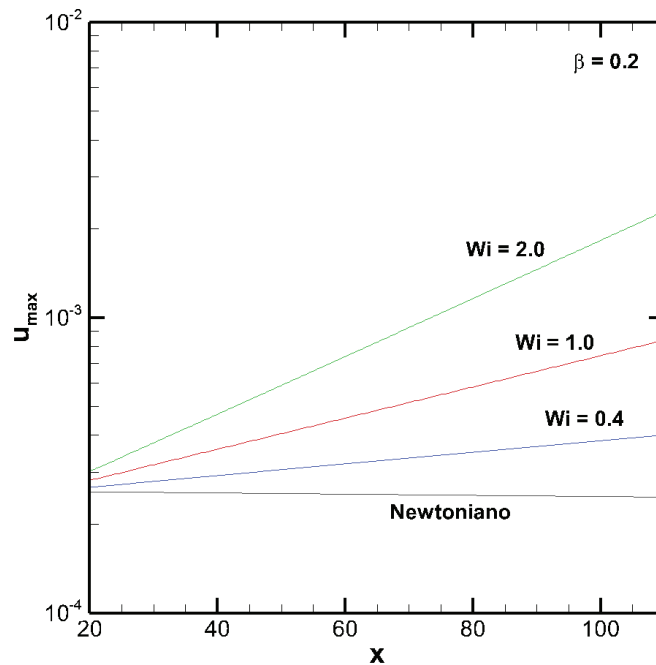


Figura 4.6: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,2$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4$; $1,0$ e $2,0$.

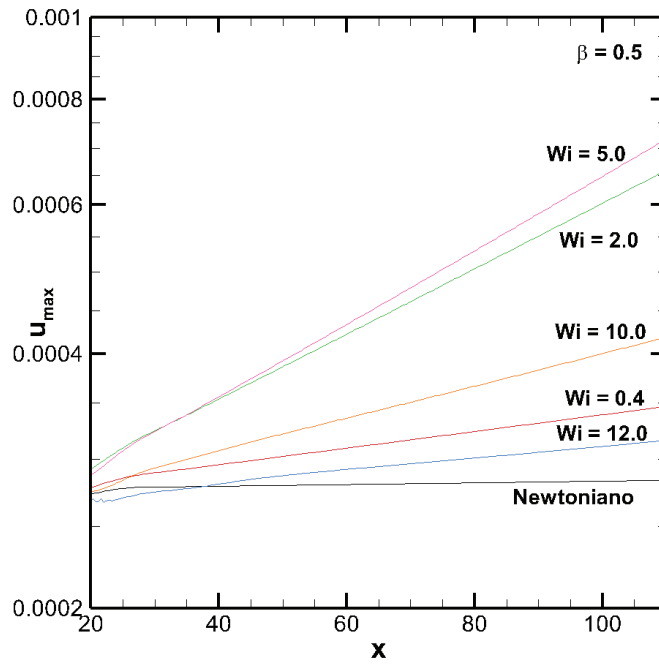


Figura 4.7: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,5$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$.

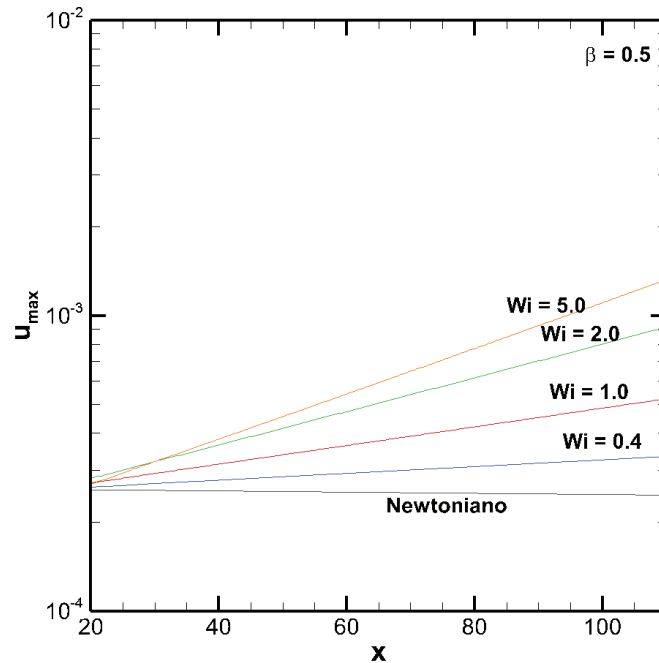


Figura 4.8: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,5$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0; 2,0$ e $5,0$.

Aumentando o valor da constante β , deixando o fluido mais próximo do fluido Newtoniano, considerando agora o valor fixo de $\beta = 0,8$ para os valores de $Re = 5900, 7000$ e 10000 , variando o número de Weissenberg para $Wi = 0,4; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$, esses resultados são mostrados nas Figuras 4.9 a 4.12.

Na Figura 4.9 foram obtidos resultados para $\beta = 0,8$ e $Re = 5900$ fixos e variou-se o número de Weissenberg para $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$. Neste caso, para elevados valores de Weissenberg, $Wi = 10,0$ e $Wi = 12,0$, as curvas decrescem, mostrando o decaimento das perturbações, tornando esses escoamentos mais estáveis que os outros casos analisados.

Os resultados apresentados na Figura 4.10 foram obtidos para $\beta = 0,8$ e $Re = 7000$, com estes valores fixados, apenas três números de Weissenberg foram simulados, a saber $Wi = 0,4; 1,0$ e $2,0$. Os resultados estão de acordo com os resultados obtidos anteriormente para os valores de $\beta = 0,2$ e $\beta = 0,5$, em que a taxa de crescimento (a taxa que as perturbações crescem, isto é, a derivada das curvas na direção do escoamento) das perturbações aumentam com o número de Weissenberg. E neste caso, para $Wi = 2,0$ o escoamento é o mais instável.

As Figuras 4.11 e 4.12 mostram os resultados obtidos para $\beta = 0,8$ e $Re = 10000$, para os valores de $Wi = 0,4; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$. Nessas figuras, números de Weissenberg maiores foram simulados e pode-se observar que para os números de $Wi = 10,0$ e $12,0$ as curvas de propagação das perturbações ainda continuam crescendo, tornando o escoamento instável. Portanto, para os casos de $Wi = 10,0$ e $12,0$ os escoamentos são mais estáveis que os casos de $Wi = 0,4; 1,0; 2,0$ e $5,0$, o que pode ser comprovado pela inclinação das curvas vistas nessas figuras. A Figura 4.12 mostra uma ampliação das curvas do máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento da Figura 4.11, para ser melhor visualizada.

Por fim, tomando um caso mais próximo ao fluido Newtoniano, considerando a constante $\beta = 0,9$ fixa, para os valores de $Re = 5900$ e 10000 , variando o número de Weissenberg para $Wi = 0,4; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0; 12,0$ e $15,0$, esses resultados são mostrados nas Figuras 4.13 a 4.15.

Os resultados apresentados nas Figuras 4.13 e 4.14 foram obtidos para $\beta = 0,9$ e $Re = 5900$, variando o número de Weissenberg para $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$. Os resultados dessas figuras são interessantes porque mostram que para elevados valores de Weissenberg, $Wi = 10,0$ e $12,0$, as curvas decrescem, mostrando o decaimento das perturbações, tornando esses escoamentos mais estáveis que os outros casos de $Wi = 0,4; 2,0$ e $5,0$, e até mesmo do escoamento de fluido Newtoniano, que até então tinha sido mais estável em todos os casos. A Figura 4.14 mostra uma ampliação das curvas do máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento da Figura 4.13, para ser melhor visualizada.

E por último, assumindo os valores de $\beta = 0,9$ e $Re = 10000$ fixos, variando o número de Weissenberg para $Wi = 0,4; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0; 12,0$ e $15,0$, esses resultados podem ser vistos na Figura 4.15. Neste caso, embora tenha simulado elevados valores de Weissenberg, $Wi = 10,0; 12,0$ e $15,0$, as curvas não decrescem como ocorrido para $Re = 5900$. Para esses valores de $Wi = 10,0; 12,0$ e $15,0$ as curvas de propagação crescem com inclinação menor que nos outros casos simulados, mas o escoamento ainda continua instável. Pode-se notar nessa Figura que para $Wi = 2,0$ o escoamento é o mais instável comparado com todos os outros valores de Wi simulados.

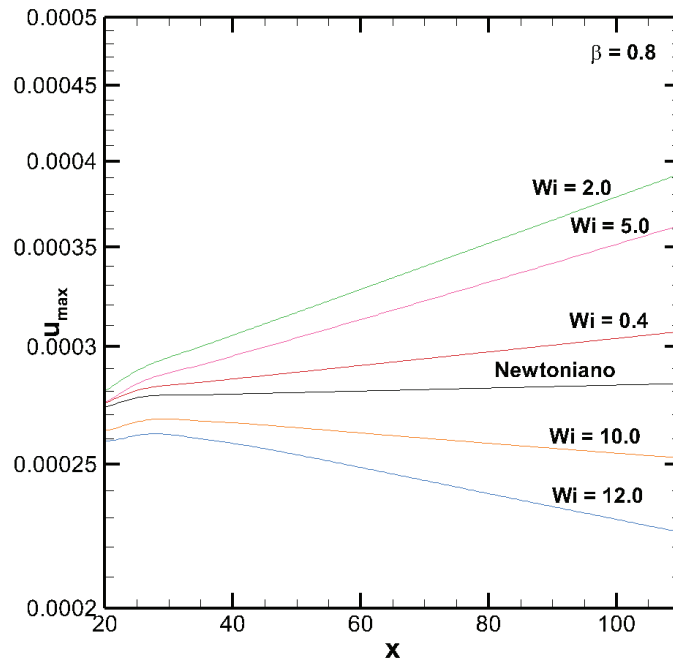


Figura 4.9: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,8$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$.

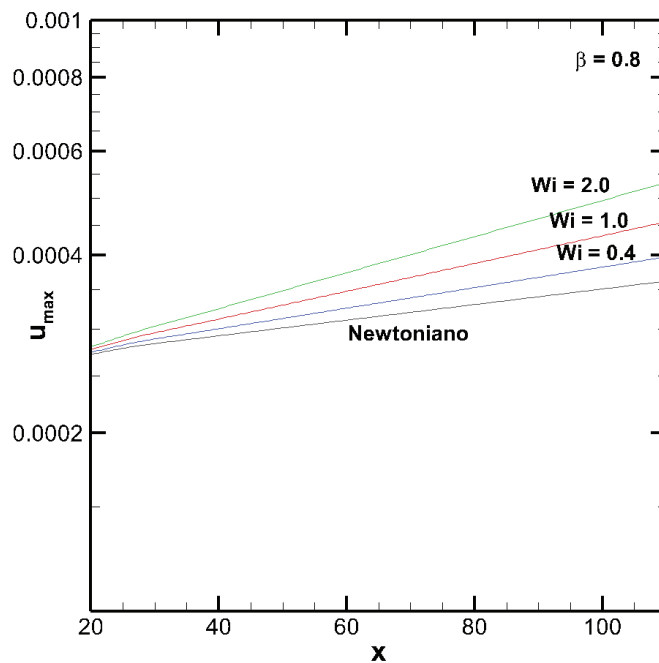


Figura 4.10: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,8$ e $Re = 7000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0$ e $2,0$.

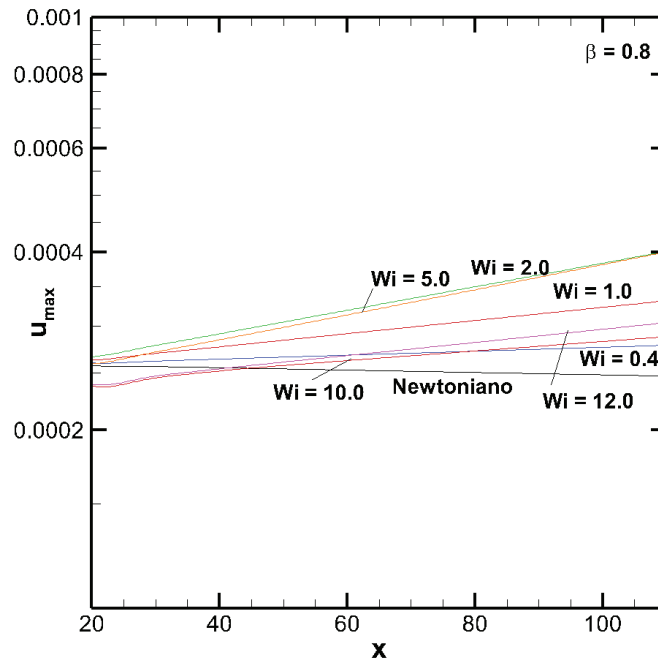


Figura 4.11: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,8$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$.

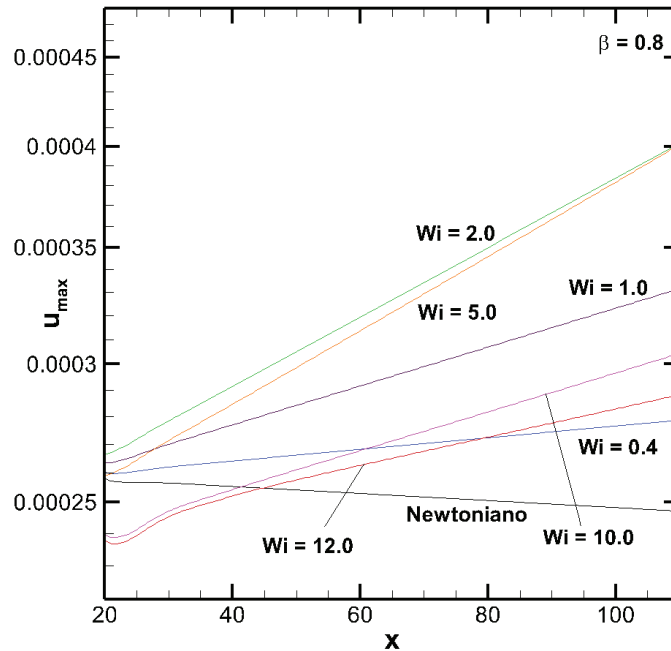


Figura 4.12: Ampliação das curvas do máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,8$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$.

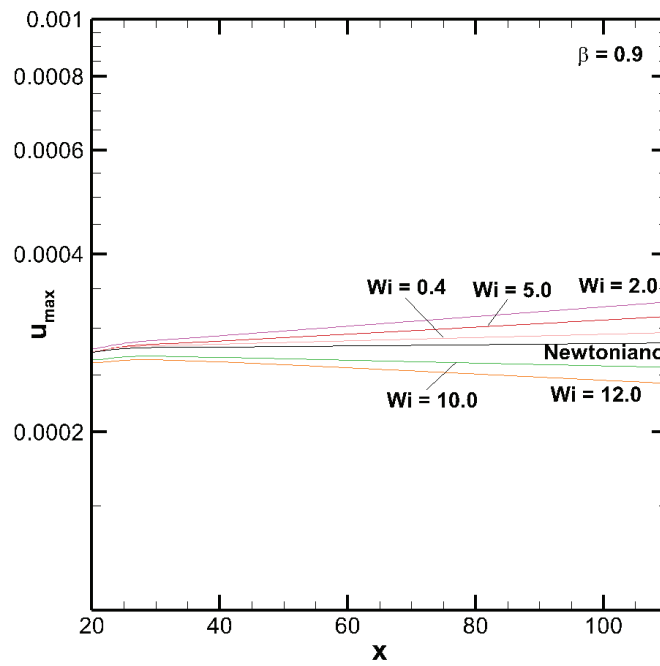


Figura 4.13: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,9$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$.

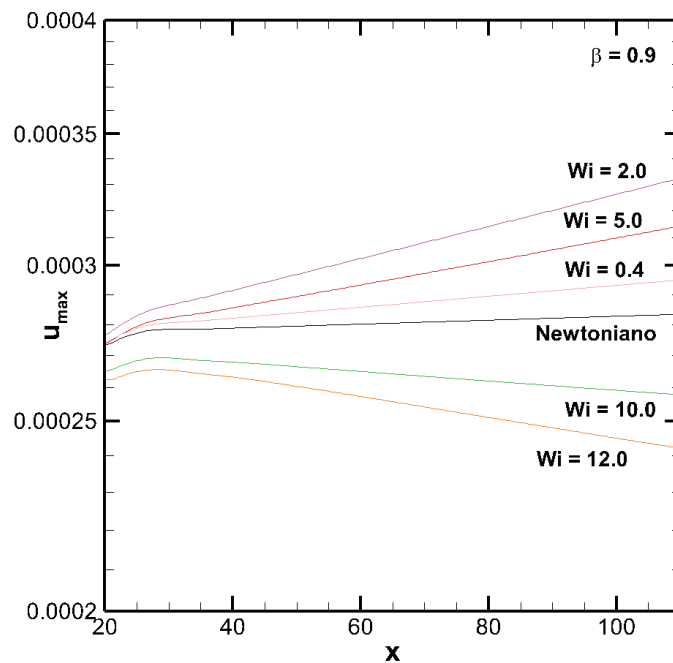


Figura 4.14: Ampliação das curvas do máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,9$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 2,0; 5,0; 10,0$ e $12,0$.

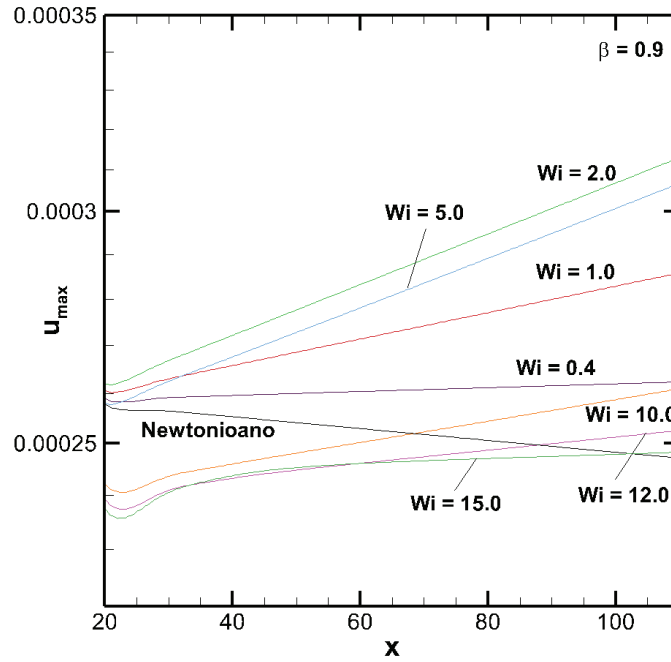


Figura 4.15: Ampliação das curvas do máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $\beta = 0,9$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $Wi = 0,4; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0; 12,0$ e $15,0$.

Outra análise pode ser feita se observar as Figuras 4.6, 4.8, 4.12 e 4.15, em que o número de Reynolds é fixo $Re = 10000$ e a constante β é dada por $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$, respectivamente nas figuras, variando o número de Weissenberg Wi em todos os casos. Se analisar o caso de $Wi = 2,0$ em todas as figuras, pode-se perceber que à medida que a constante β aumenta o escoamento torna-se mais instável para esse mesmo valor, que pode ser visto pela inclinação das curvas e apresenta um valor da perturbação menor, que pode ser visto na Figura 4.6.

4.1.3 Variação de β

Para verificar a influência da constante β na estabilidade do escoamento de Poiseuille viscoelástico foram realizadas simulações numéricas para quatro valores diferentes de Reynolds: $Re = 5000, 5900, 7000$ e 10000 , quatro valores diferentes de Weissenberg: $Wi = 0,4; 1,0; 2,0$ e $5,0$ e todos esses casos serão comparados com o escoamento de Poiseuille Newtoniano.

Essa influência da constante β com a variação dos parâmetros Re e Wi é apresentada nas Figuras 4.16 a 4.25, que também mostram o máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento (x) e, ainda, as curvas descrevem o comportamento das ondas de Tollmien-Schlichting do fluido Newtoniano e do fluido viscoelástico com seus parâmetros fixados.

Nas Figuras 4.16 e 4.17 os valores de $Wi = 0,4$ e os números de Reynolds considerados foram $Re = 5900$ e 10000 fixos, variando a constante β para $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$. Pode-se observar que à medida que a constante β diminui, a propagação das perturbações crescem tornando o escoamento mais instável. Portanto, nessas figuras a curva de $\beta = 0,2$ é a mais instável.

Os resultados apresentados nas Figuras 4.18, 4.19 e 4.20 foram obtidos para $Wi = 1,0$ fixo e os números de Reynolds considerados foram $Re = 5000, 7000$ e 10000 , respectivamente, variando a constante β para $\beta = 0,2; 0,5$ e $0,8$, e somente para a Figura 4.20 também é simulado o caso para $\beta = 0,9$. Os resultados dessas figuras estão em concordância com os resultados obtidos na Figura 4.17 para $Wi = 0,4$ fixo, que também mostram que o escoamento é mais instável para menores valores de β . E ainda, pode-se observar na Figura 4.20 que o caso de $\beta = 0,9$, assumindo β com esse valor tem uma quantidade de solvente Newtoniano maior que os outros casos de β simulados, é o mais estável.

Seguindo a mesma ideia, para os valores fixos de $Wi = 2,0$ e, $Re = 5900$ e 10000 , variando a constante β para $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$ as Figuras 4.21 e 4.22 mostram o mesmo comportamento dos casos anteriores nas Figuras 4.17 a 4.20, em que o escoamento é mais instável à medida que o número de β diminui, ou seja, quando se tem uma menor quantidade de solvente Newtoniano no fluido.

Tomando um caso do número de Weissenberg mais elevado, agora considerando os valores fixos de $Wi = 5,0$ e, $Re = 10000$, variando a constante β para $\beta = 0,5; 0,8$ e $0,9$, esses resultados são mostrados na Figura 4.23. Pode-se notar que o escoamento é mais instável com a diminuição do valor de β , e ainda que para $\beta = 0,5$ a curva é muito mais inclinada quando comparada com os outros casos, o que demonstra uma maior instabilidade no escoamento para esses parâmetros adotados.

E, por fim, tomando dois casos do número de Weissenberg mais elevado que o caso anterior, considerando fixos os valores de $Wi = 10,0$ e $Wi = 12,0$ e, $Re = 5900$, variando a constante β para $\beta = 0,2; 0,5, 0,8$ e $0,9$, esses resultados são mostrados nas Figuras 4.24 e 4.25. Pode-se notar que o escoamento é mais instável com a diminuição do valor de β , e ainda que para $\beta = 0,8$ e $0,9$ a curva é menos inclinada quando comparada com os outros casos, o que demonstra uma maior estabilidade no escoamento para esses parâmetros adotados.

Outra análise pode ser feita se observar as Figuras 4.17, 4.20, 4.22 e 4.23, em que o número de Reynolds é fixo $Re = 10000$ e o número de Weissenberg é dado por $Wi = 0,4; 1,0; 2,0$ e $5,0$, respectivamente nas figuras, variando a constante β em todos os casos. Se analisar o caso de $\beta = 0,5$ em todas as figuras, pode-se perceber que à medida que o número de Weissenberg aumenta o escoamento torna-se mais instável para essa mesma constante, que pode ser vista pela inclinação das curvas, e ainda, conclui-se que na Figura 4.23 atinge-se o valor mais alto da perturbação, um valor maior que 1×10^{-3} .

Vale mencionar que para altos valores do número de Weissenberg simulados nesse capítulo, fez-se necessário o uso de malhas mais refinadas para convergência do método numérico implementado, como está descrito nos parâmetros adotados na seção 4.1.

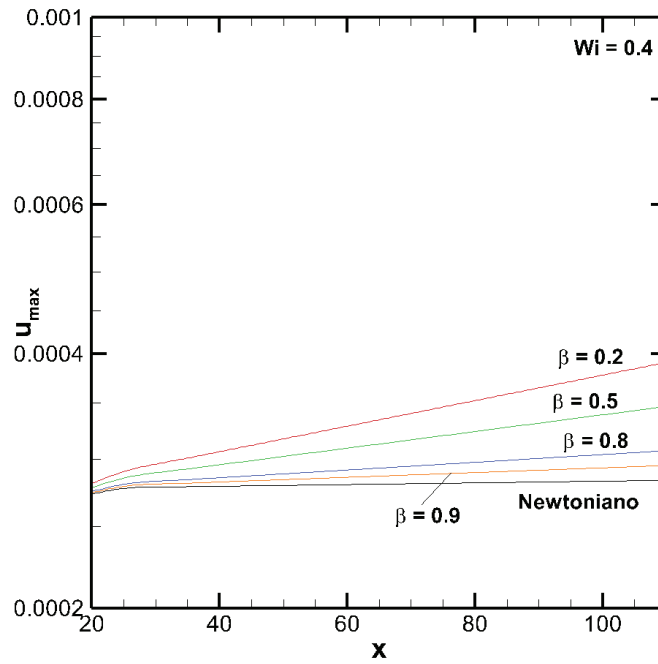


Figura 4.16: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 0,4$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$.

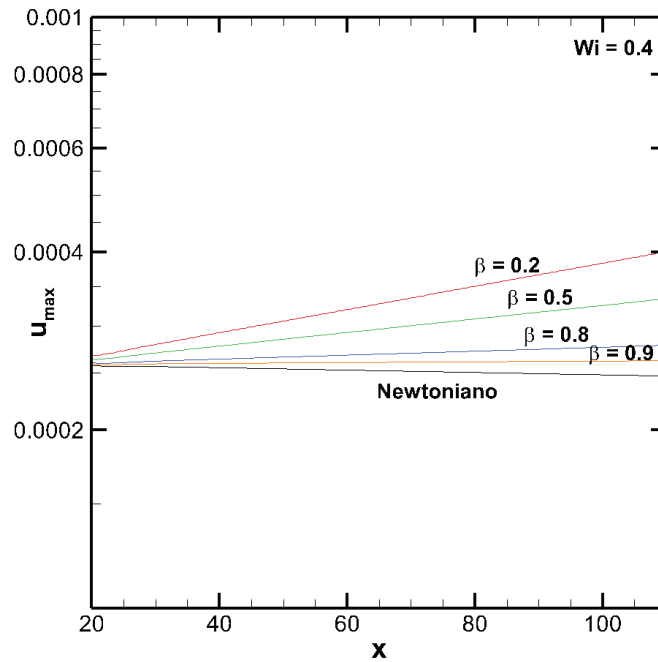


Figura 4.17: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 0,4$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$.

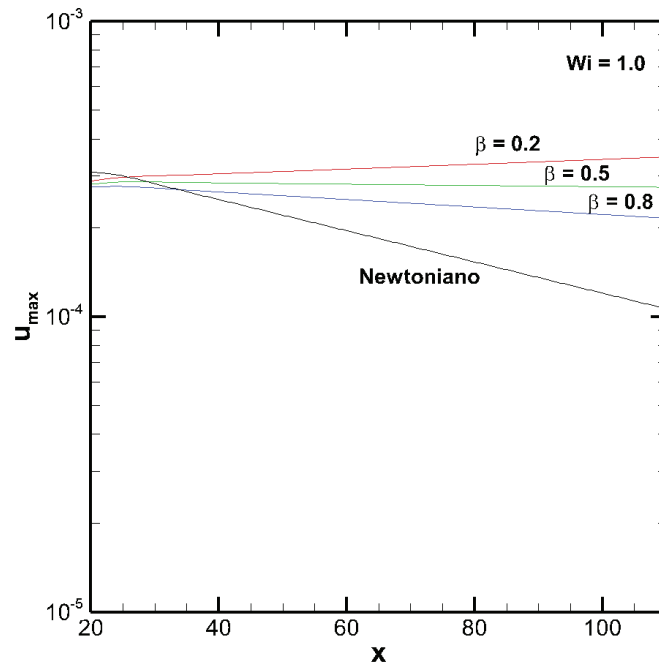


Figura 4.18: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 1,0$ e $Re = 5000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5$ e $0,8$.

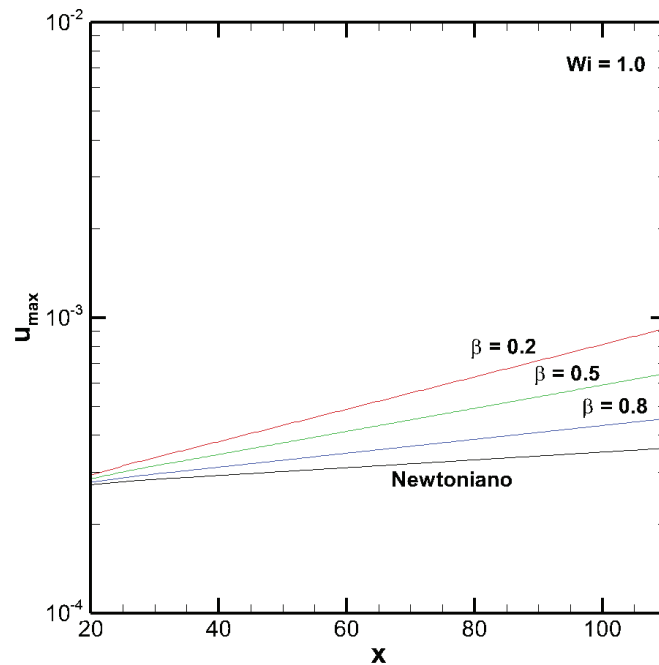


Figura 4.19: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 1,0$ e $Re = 7000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5$ e $0,8$.

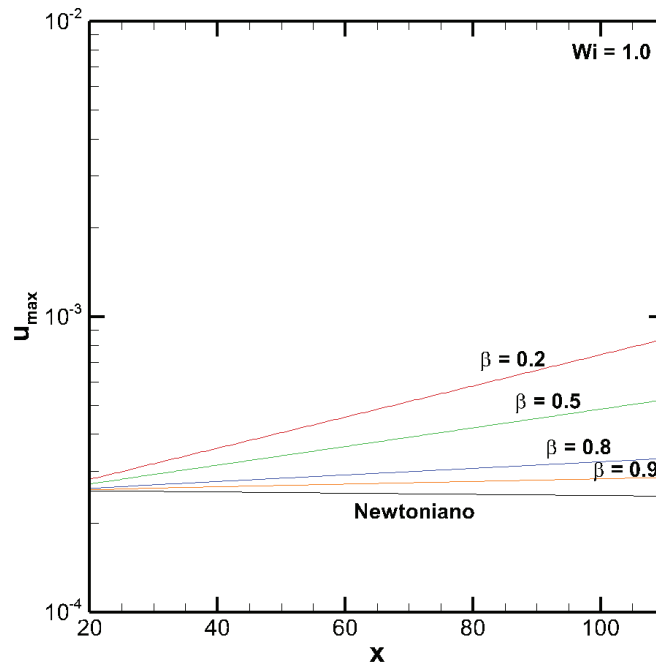


Figura 4.20: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 1,0$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$.

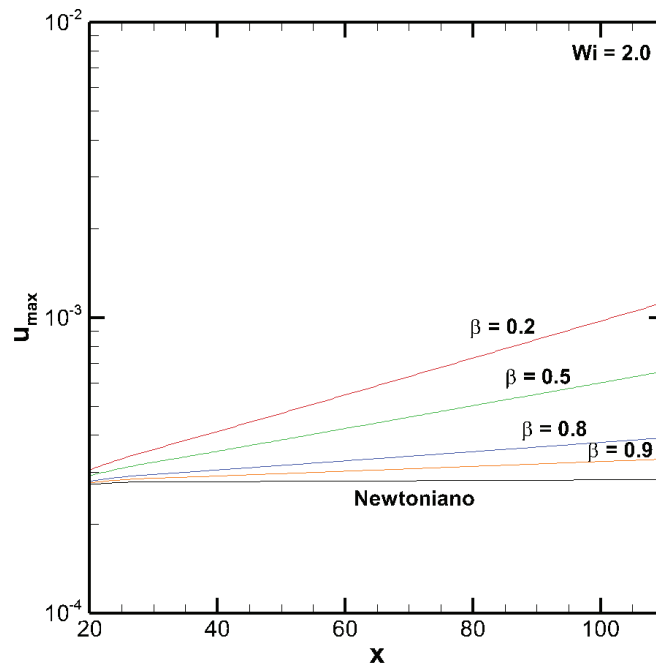


Figura 4.21: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 2,0$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$.

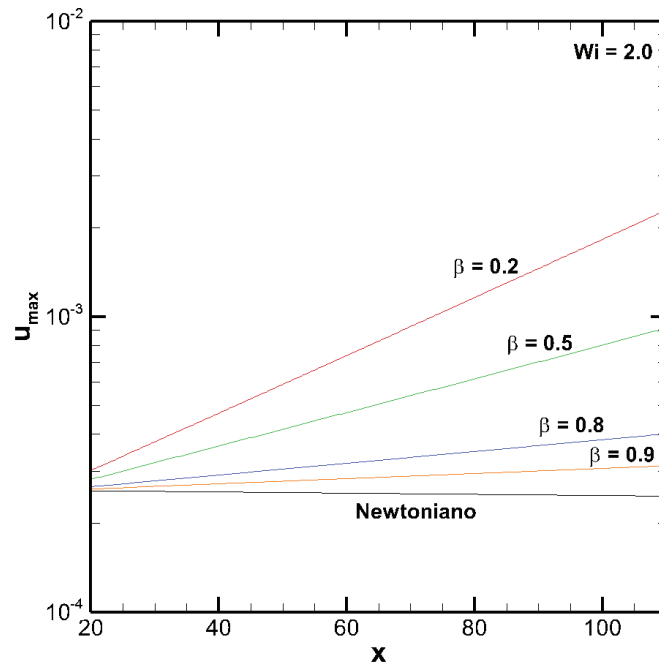


Figura 4.22: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 2,0$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$.

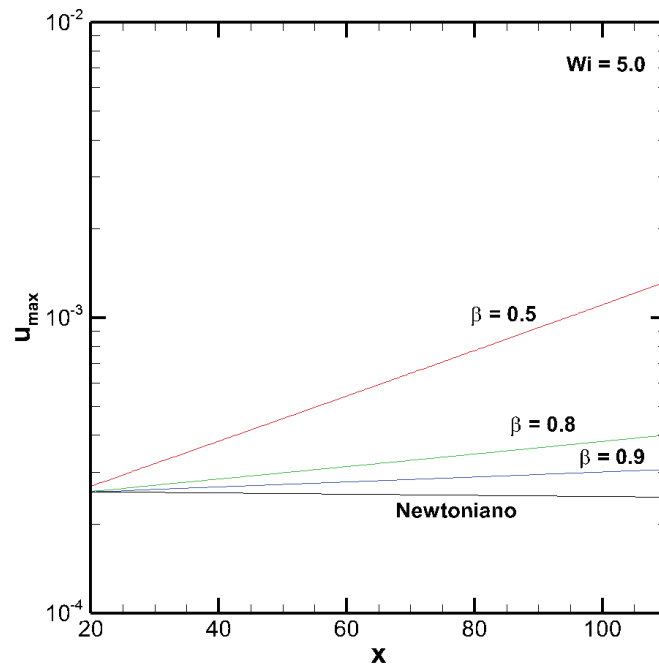


Figura 4.23: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 5,0$ e $Re = 10000$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,5; 0,8$ e $0,9$.

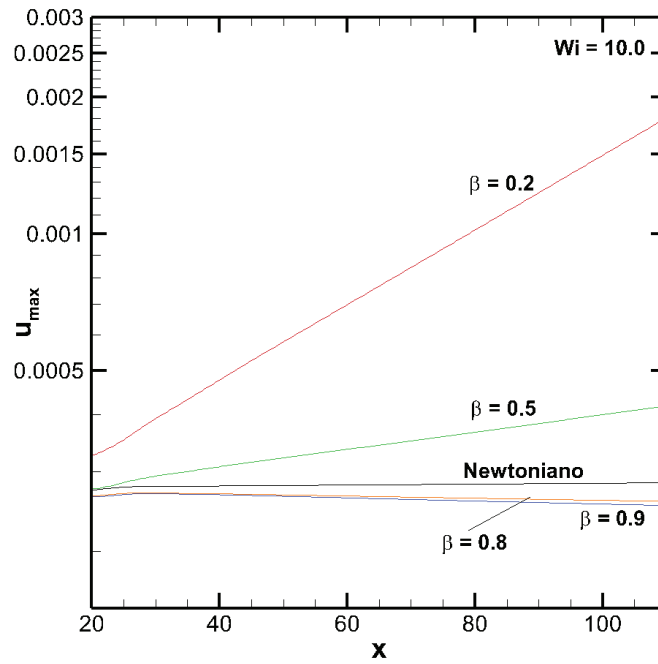


Figura 4.24: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 10,0$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$.

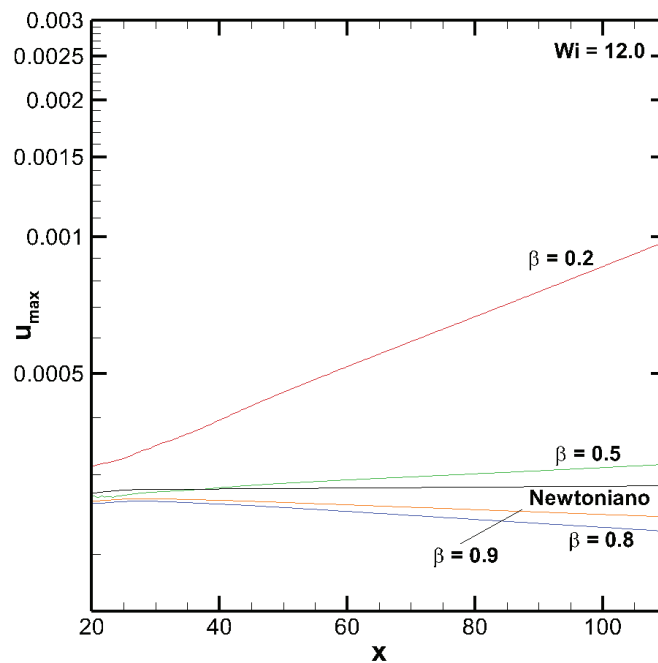


Figura 4.25: Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento com $Wi = 12,0$ e $Re = 5900$. Linha preta: fluido Newtoniano, linhas coloridas: $\beta = 0,2; 0,5; 0,8$ e $0,9$.

Conclusão

Neste trabalho apresentou-se as equações que modelam escoamentos incompressíveis, isotérmicos, e bidimensional para um fluido Newtoniano e viscoelástico, utilizando a equação constitutiva Oldroyd-B, nas formas dimensional e adimensional. Também foram descritas, em detalhe, a adimensionalização das equações governantes para um escoamento viscoelástico.

Apresentou-se a Teoria de Estabilidade Linear para um escoamento Newtoniano, a dedução da equação de Orr-Sommerfeld e a solução numérica empregada para resolver esta equação. A análise de estabilidade linear para escoamento de fluido Newtoniano já é bem documentada na literatura.

Nesse sentido, pouco se conhece sobre a equação de Orr-Sommerfeld para fluidos não-Newtonianos, assim esse trabalho vem contribuir com uma dedução detalhada da equação de Orr-Sommerfeld modificada para um escoamento viscoelástico, utilizando a equação constitutiva Oldroyd-B, para verificar a estabilidade dos escoamentos a perturbações não estacionárias de fluidos viscoelásticos.

A solução da equação de Orr-Sommerfeld modificada corresponde a um problema de autovalor, cuja solução existe para alguns valores dos parâmetros α , ω e Re , e depende do perfil de velocidade do escoamento base em questão. As perturbações correspondentes são denominadas ondas de Tollmien-Schlichting. Um *Shooting method*, é apresentado para resolver a equação de Orr-Sommerfeld modificada. Neste trabalho, apenas um estudo teórico foi realizado utilizando a Teoria de Estabilidade Linear, a implementação desta técnica será testada futuramente.

A Simulação Numérica Direta foi utilizada para analisar a estabilidade de escoamentos de fluidos viscoelásticos e comparar com fluidos Newtonianos, a fim de contribuir para as dificuldades encontradas neste problema. As equações governantes foram descritas na formulação vorticidade-velocidade e o seu método numérico de solução também foi apresentado.

Simulações numéricas foram realizadas para investigar a convecção das ondas de Tollmien-Schlichting em um escoamento de Poiseuille bidimensional, utilizando Simulação Numérica Direta. A fim de avaliar as taxas de amplificação máxima, diferentes simulações numéricas foram realizadas variando-se os parâmetros adimensionais para o escoamento de fluido viscoelástico e comparando com o escoamento de fluido Newtoniano. Neste trabalho, os parâmetros estudados foram o número de Reynolds (Re), o número de Weissenberg (Wi) e a constante β .

Os resultados numéricos obtidos variando-se o número de Reynolds foram realizados apenas para o escoamento de fluido Newtoniano, para sete valores diferentes do número

de Reynolds, que dentre estes, foram escolhidos quatro valores de Re para simular os escoamentos de fluidos viscoelásticos.

O efeito do número de Weissenberg (Wi) na estabilidade do escoamento foi simulado para diferentes valores de Re e β , em que nos resultados foram apresentados o máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento (x), e as curvas dos gráficos mostravam o comportamento das ondas de Tollmien-Schlichting do fluido Newtoniano e do fluido viscoelástico com seus parâmetros fixados. A maioria dos resultados mostraram que o escoamento torna-se mais instável a perturbações não estacionárias, à medida que o número de Wi aumenta.

Apenas os resultados para o caso de $Re = 5900$ mostraram que para elevados valores de Weissenberg, $Wi = 10,0$ e $12,0$, as curvas decresceram, mostrando o decaimento das perturbações, tornando esses escoamentos mais estáveis que os outros casos, e até mesmo do escoamento de fluido Newtoniano, que até então tinha sido mais estável em todos os casos.

Para verificar a influência da constante β na estabilidade do escoamento de Poiseuille viscoelástico foram realizadas simulações numéricas com a variação dos parâmetros Re e Wi . Em todos os casos simulados observou-se que à medida que a constante β diminui, a propagação das perturbações crescem tornando o escoamento mais instável.

Por fim, os estudos de transição laminar-turbulenta de fluidos viscoelásticos podem se tornar ferramentas indispensáveis para aplicações onde se deseja que o escoamento se propague de forma laminar. A Simulação Numérica Direta mostrou-se uma ferramenta eficiente na análise da estabilidade de escoamentos viscoelásticos, capaz de avaliar se o escoamento vai se tornar mais ou menos instável com a adição de solvente, permitindo uma melhor escolha dos parâmetros adimensionais dos escoamentos.

Referências

- [1] Y. Adam. Highly accurate compact methods and boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, **24**:10–22, 1977.
- [2] M. Avgousti; A. N. Beris. Non-axisymmetric modes in viscoelastic taylor-couette flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **50**(2):225–251, 1993.
- [3] A. Beris; R. Armstrong; R. Brown. Spectral finite-element calculations of the flow of a maxwell fluid between excetric rotating cylinders. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **22**:129–167, 1987.
- [4] R. B. Bird; P. J. Dotson; N. L. Johnson. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **7**:213–235, 1980.
- [5] A. Brandt. Multilevel adaptative solutions to boundary values problems. *Mathematics of Computation*, **31**:333–390, 1977.
- [6] E. Brasseur; M. Fyrillas; G. Georgioou; M. Crochet. The time-dependent extrudate-swell problem of an Oldroyd-B fluid with slip along the wall. *Journal of Rheology*, **42**:549–566, 1994.
- [7] M. A. Bretas; R. E. S d´Avila. *Reologia de Polímeros Fundidos*. Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2000.
- [8] H. F. Fasel; U. Rist; U. Konzelmann. Numerical investigation of the three-dimensional development in boundary-layer transition. *AIAA*, **28**:29–37, 1990.
- [9] J. H. Ferziger; M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997.
- [10] H. Giesekus. Elasto-viskose flüssigkeiten, für die in stationären schichtströmungen sämtliche normalspannungskomponenten verschieden gross sind. *Rheologica Acta*, **2**:50–62, 1962.
- [11] N. Hoda; M. R. Jovanovic; S. Kumar. Energy amplification in channel flows of viscoelastic fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, **601**:407–424, 2008.
- [12] A. Kaye. *Non-newtonian flow in incompressible flows*. College of Aeronautics, 1962.
- [13] M. Kloker. A robust high-resolution split-type compact FD scheme for spatial direct numerical simulation of boundary-layer transition. *Applied Scientific Research*, **59**:353–377, 1998.
- [14] R. G. Larson. *Constitutive equations for polymer melts and solutions*. Butterworths, 1988.

- [15] R. G. Larson. Instabilities in viscoelastic flows. *Rheologica Acta*, **31**:213–263, 1992.
- [16] R. G. Larson; E. S. G. Shaqfeh; S. J. Muller. A purely elastic instability in taylor-couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **218**:573–600, 1990.
- [17] S. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, **103**:16–42, 1992.
- [18] A. I. Leonov. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. *Rheologica Acta*, **15**:85–98, 1976.
- [19] X. L. Luo; R. I. Tanner. A streamline element scheme for solving viscoelastic flow problems part II: Integral constitutive models. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **22**:61–89, 1986.
- [20] X. L. Luo; R. I. Tanner. Finite element simulation of long and short circular die extrusion experiments using integral models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **25**:9–22, 1988.
- [21] H. L. Meitz. *Numerical Investigation of Suction in a Transitional Flat-Plate Boundary Layer*. PhD thesis, The University of Arizona, 1996.
- [22] M. T. Mendonça; M. A. F. de Medeiros. *Instabilidade Hidrodinâmica e transição para turbulência com aplicações em engenharia e meteorologia*. ENCIT, 2002.
- [23] G. Mompean; M. Deville. Unsteady finite volume of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **72**:253–279, 1997.
- [24] N. Phan-Thien; R. I. Tanner. A new constitutive equation derived from network theory. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **2**:353–365, 1977.
- [25] T. N. Phillips; A. Williams. Comparison of creeping and inertial flow of an Oldroyd-B fluid through a planar and axisymmetric contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **108**:25–47, 2002.
- [26] F. T. Pinho; M. A. Alves; P. J. Oliveira. Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **10**:45–75, 2003.
- [27] J. K. Rogenski; L.A. Petri; L.F. Souza. Effects of parallel strategies in the transitional flow investigation. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **37**:861–872, 2015.
- [28] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, IncH., 1979.
- [29] E. S. G. Shaqfeh; S. J. Muller; R. G. Larson. The effects of gap width and dilute solution properties on the viscoelastic taylor-couette instability. *Journal of Fluid Mechanics*, **235**:285–317, 1992.
- [30] L. F. Souza. *Instabilidade Centrífuga e transição para turbulência em Escoamentos Laminares Sobre Superfícies Côncavas*. PhD thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2003.

-
- [31] L. F. Souza; M. T. Mendonça; M. A. F. Medeiros . The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar-turbulent transition studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **48**:565–592, 2005.
 - [32] K. Stüben; U. Trottenberg. Nonlinear multigrid methods, the full approximation scheme. *Köln-Porz*, **5**:58–71, 1981.
 - [33] R. I. Tanner. *Engineering Rheology*. Oxford University Press, 2000.
 - [34] J. A. White; A. B. Metzner. Development of constitutive equations for polymeric melts and solutions. *Journal of Applied Polymer Science*, **7**:1867–1889, 1963.

Análise de Estabilidade para Fluido Newtoniano

Nesta seção a análise de estabilidade linear é apresentada para escoamentos de fluidos Newtonianos. Essa análise é representada por um modelo matemático que descreve a evolução de pequenas perturbações em um escoamento que é baseado nas equações da continuidade, de Navier-Stokes e num certo número de hipóteses sobre o escoamento médio e sobre a forma de propagação das perturbações.

No caso bidimensional, o escoamento principal é tomado como permanente, tendo u e v como componentes cartesianos da velocidade nas direções x e y , respectivamente, e p como a pressão. Os componentes da perturbação são pequenos em relação ao escoamento principal e, em um regime transiente, são representados por $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ e $\tilde{p}$.

Para um escoamento bidimensional, incompressível, isotérmico e de fluido Newtoniano, as equações da continuidade e de Navier-Stokes adimensionais são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (\text{A.3})$$

Assume-se que o escoamento principal é invariante na direção x , ou seja,

$$\begin{aligned} u &= U(y), \\ v &= 0, \\ p &= P(y). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Em seguida, considera que o escoamento instantâneo pode ser decomposto em um escoamento base e um escoamento perturbado. As variáveis dependentes são compostas da seguinte forma

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t), \\ v(x, y, t) &= \tilde{v}(x, y, t), \\ p(x, y, t) &= P(y) + \tilde{p}(x, y, t). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Como por hipótese o escoamento principal é solução das equações de Navier-Stokes, as resultantes descritas acima também devem satisfazer esse sistema de equações. Schlichting [28] afirma que as perturbações devem ser pequenas no sentido de que os termos não lineares possam ser desprezados quando comparados com os termos lineares.

Assume-se que o escoamento médio é invariante na direção do escoamento, a componente normal da velocidade é nula, o escoamento médio não varia ao longo do tempo e os gradientes de pressão são desprezíveis.

Substituindo as variáveis (A.5) nas equações de conservação de continuidade e de momento (A.1)–(A.3) e subtraindo das equações resultantes as equações satisfeitas pelo escoamento base, obtém-se as equações de conservação para as perturbações dadas por

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right). \quad (\text{A.8})$$

Os termos entre colchetes das equações (A.7) e (A.8) são os termos não lineares. Assumindo que as amplitudes das perturbações são pequenas, pode-se desprezar esses termos. Sendo assim, o sistema simplificado torna-se

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right). \quad (\text{A.11})$$

Considerando um escoamento de Poiseuille, as condições de contorno são dadas por

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{para} \quad y = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{para} \quad y = 2L, \quad (\text{A.13})$$

as quais correspondem à condição de não escorregamento e impermeabilidade nas paredes.

Uma vez que as equações resultantes são lineares e que os coeficientes das equações não dependem de t e x , as soluções podem ser obtidas através do método de separação de variáveis, da seguinte forma

$$\tilde{u}(x, y, t) = \frac{1}{2} [\bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc], \quad (\text{A.14})$$

$$\tilde{v}(x, y, t) = \frac{1}{2} [\bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc], \quad (\text{A.15})$$

$$\tilde{p}(x, y, t) = \frac{1}{2} [\bar{p}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + cc], \quad (\text{A.16})$$

em que $i = \sqrt{-1}$, cc é o complexo conjugado da variável em questão, α é o número de onda na direção x e ω é a frequência com que as perturbações, de comprimento de onda $\lambda = 2\pi/\alpha$, propagam-se. Considera ainda que $\bar{u}$, $\bar{v}$ e $\bar{p}$ são as amplitudes das perturbações.

Substituindo as expressões (A.14)–(A.16) no sistema linearizado composto pelas equações (A.9)–(A.11), obtém-se a equação da conservação de continuidade

$$i\alpha\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{dy} = 0, \quad (\text{A.17})$$

e, para as equações de Navier-Stokes tem-se

$$-i\omega\bar{u} + i\alpha\bar{u}U + \bar{v}\frac{dU}{dy} = -i\alpha\bar{p} + \frac{1}{Re} \left((i\alpha)^2\bar{u} + \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right), \quad (\text{A.18})$$

$$-i\omega\bar{v} + i\alpha U\bar{v} = -\frac{d\bar{p}}{dy} + \frac{1}{Re} \left((i\alpha)^2\bar{v} + \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \right). \quad (\text{A.19})$$

As equações (A.17)–(A.19), reescritas em função das autofunções $\bar{u}$, $\bar{v}$ e $\bar{p}$, admitindo que $c = \omega/\alpha$ seja a velocidade de onda, são dadas por

$$i\alpha\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{dy} = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$i\alpha(U - c)\bar{u} + \frac{dU}{dy}\bar{v} + i\alpha\bar{p} = \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \alpha^2\bar{u} \right), \quad (\text{A.21})$$

$$i\alpha(U - c)\bar{v} + \frac{d\bar{p}}{dy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \alpha^2\bar{v} \right). \quad (\text{A.22})$$

Esse sistema pode ser simplificado ainda mais derivando a equação (A.21) em relação a y , então torna-se

$$i\alpha(U - c)\frac{d\bar{u}}{dy} + i\alpha\bar{u}\frac{dU}{dy} + \frac{d\bar{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha\frac{d\bar{p}}{dy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{d^3\bar{u}}{dy^3} - \alpha^2\frac{d\bar{u}}{dy} \right), \quad (\text{A.23})$$

multiplicando pela constante $i\alpha$ a equação (A.22), tem-se

$$-\alpha^2(U - c)\bar{v} + i\alpha\frac{d\bar{p}}{dy} = \frac{1}{Re} \left(i\alpha\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - i\alpha^3\bar{v} \right), \quad (\text{A.24})$$

e subtraindo as equações (A.23) e (A.24), resulta em

$$\begin{aligned} i\alpha(U - c)\frac{d\bar{u}}{dy} + i\alpha\bar{u}\frac{dU}{dy} + \frac{d\bar{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + \alpha^2(U - c)\bar{v} &= \\ &= \frac{1}{Re} \left(\frac{d^3\bar{u}}{dy^3} - \alpha^2\frac{d\bar{u}}{dy} + i\alpha^3\bar{v} - i\alpha\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Utilizando a equação da continuidade (A.17), obtém-se

$$\begin{aligned} i(U - c)\frac{d}{dy} \left(i\frac{d\bar{v}}{dy} \right) + \bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + \alpha^2(U - c)\bar{v} &= \\ &= \frac{1}{Re} \left(\frac{d^3}{dy^2} \left(\frac{i}{\alpha}\frac{d\bar{v}}{dy} \right) - \alpha^2\frac{d}{dy} \left(\frac{i}{\alpha}\frac{d\bar{v}}{dy} \right) + i\alpha^3\bar{v} - i\alpha\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Multiplicando a equação (A.26) por α , a equação obtida é uma equação diferencial ordinária de quarta ordem para a variável dependente $\bar{v}$

$$\alpha(U - c)(\bar{v}'' - \alpha^2 \bar{v}) - U'' \alpha \bar{v} = \frac{i}{Re}(\bar{v}^{IV} - 2\alpha^2 \bar{v}'' + \alpha^4 \bar{v}), \quad (\text{A.27})$$

em que o apóstrofe indica o grau da derivada em relação a y . A equação (A.27) é a equação diferencial fundamental para as perturbações (equação da estabilidade) que forma o ponto de partida para a teoria da estabilidade de escoamentos laminares, para um fluido Newtoniano. Esta equação é conhecida como equação de Orr-Sommerfeld, em homenagem aos dois cientistas que a derivaram de forma independente em 1907 e 1908.

A equação de Orr-Sommerfeld resulta em um problema de autovalor, onde a solução existe apenas para valores particulares de α , ω e Re . De modo geral, deseja-se determinar como α e ω dependem do número de Reynolds e do perfil de velocidade média $U(y)$.

A.1 Análise Temporal e Espacial de Instabilidades

A equação de Orr-Sommerfeld foi derivada no campo dos números complexos. A autofunção $u(y)$ é complexa e pode-se ter α ou ω complexo, ou ambos complexos. Assim, solução do sistema pode ser expressa por

$$\tilde{u}(x, y, t) = \bar{u}(y)e^{(-\alpha_i x + \omega_i t)}e^{i(\alpha_r x - \omega_r t)}, \quad (\text{A.28})$$

em que os índices r e i , indicam componentes real e imaginária, respectivamente.

Quando ω é um número real e α um número complexo, a amplitude da perturbação cresce na direção do escoamento médio x e a formulação é denominada formulação espacial. As componentes ω_r , α_r e α_i , representam, respectivamente, a frequência, o número de onda e a taxa de amplificação espacial. Quando α é um número real e ω um número complexo, a amplitude cresce no tempo e a formulação é denominada formulação temporal. Neste caso, ω_i é a taxa de amplificação temporal. Portanto, isto pode ser observado na Tabela A.1.

Tabela A.1: Classificação de instabilidades.

Tipo de análise	Taxa de amplificação	Amplitude	Classificação
análise temporal	$\omega_i < 0$	decrecente	estável
	$\omega_i = 0$	constante	neutro
	$\omega_i > 0$	crescente	instável
análise espacial	$\alpha_i < 0$	crescente	instável
	$\alpha_i = 0$	constante	neutro
	$\alpha_i > 0$	decrecente	estável

Uma vez que ω aparece linearmente na equação de Orr-Sommerfeld, a análise temporal é mais fácil. Apesar disso, em muitos problemas, a física indica que as perturbações crescem ou decrescem espacialmente e não temporalmente.

Adimensionalização das Equações

Neste apêndice é apresentado em detalhes a adimensionalização das equações governantes utilizadas neste trabalho.

Como já apresentada na seção 2.2, para adimensionalização das equações apresentadas a seguir, definem-se as variáveis adimensionais como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* L, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^* U, \quad t = \frac{t^* L}{U}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^* \rho U^2, \quad \omega = \frac{\omega_z^* U}{L}, \quad p = p^* \rho U^2. \quad (\text{B.1})$$

B.1 Equações de Navier-Stokes

As equações que modelam um escoamento incompressível, bidimensional e isotérmico, para um fluido não-Newtoniano são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (\text{B.3})$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (\text{B.4})$$

Equação da continuidade:

Substituindo as transformações (B.1) na equação (B.2), obtém-se

$$\frac{\partial(u^* U)}{\partial(x^* L)} + \frac{\partial(v^* U)}{\partial(y^* L)} = \frac{U}{L} \left[\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right] = 0$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{L}{U}$, a equação de continuidade adimensionalizada torna-se

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0.$$

Omitindo o símbolo (*) por simplicidade, tem-se,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (\text{B.5})$$

De modo análogo, obtém-se as equações de momento adimensionalizadas, para as direções x e y , respectivamente.

Equação do momento em x :

Substituindo as transformações (B.1) na equação (B.3), obtém-se

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial(u^*U)}{\partial(t^*L)} + \frac{\partial(u^*U)(u^*U)}{\partial(x^*L)} + \frac{\partial(v^*U)(u^*U)}{\partial(y^*L)} \right] &= -\frac{\partial(p^*\rho U^2)}{\partial(x^*L)} + \\ &+ \eta_s \left[\frac{\partial^2(u^*U)}{\partial(x^*L)^2} + \frac{\partial^2(u^*U)}{\partial(y^*L)^2} \right] + \frac{\partial(T^*\rho U^2)^{xx}}{\partial(x^*L)} + \frac{\partial(T^*\rho U^2)^{xy}}{\partial(y^*L)}. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(u^*)}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*u^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*u^*)}{\partial(y^*)} \right] &= -\frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(p^*)}{\partial(x^*)} \right] + \\ &+ \frac{\eta_s U}{L^2} \left[\frac{\partial^2(u^*)}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2(u^*)}{\partial(y^*)^2} \right] + \frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(T^*)^{xx}}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(T^*)^{xy}}{\partial(y^*)} \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{L}{\rho U^2}$, obtém-se

$$\frac{\partial(u^*)}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*u^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*u^*)}{\partial(y^*)} = -\frac{\partial(p^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\eta_s}{\rho UL} \left[\frac{\partial^2(u^*)}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2(u^*)}{\partial(y^*)^2} \right] + \frac{\partial(T^*)^{xx}}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(T^*)^{xy}}{\partial(y^*)}.$$

Sabendo que $Re = \frac{\rho UL}{\eta_0}$, $\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}$ e $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, então a equação do momento na direção x adimensionalizada é dada por

$$\frac{\partial(u^*)}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*u^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*u^*)}{\partial(y^*)} = -\frac{\partial(p^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2(u^*)}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2(u^*)}{\partial(y^*)^2} \right] + \frac{\partial(T^*)^{xx}}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(T^*)^{xy}}{\partial(y^*)}.$$

Omitindo o símbolo (*) por simplicidade, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}. \quad (\text{B.6})$$

Equação do momento em y :

Substituindo as transformações (B.1) na equação (B.4), obtém-se

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial(v^*U)}{\partial(t^*L)} + \frac{\partial(u^*U)(v^*U)}{\partial(x^*L)} + \frac{\partial(v^*U)(v^*U)}{\partial(y^*L)} \right] &= -\frac{\partial(p^*\rho U^2)}{\partial(y^*L)} + \\ &+ \eta_s \left[\frac{\partial^2(v^*U)}{\partial(x^*L)^2} + \frac{\partial^2(v^*U)}{\partial(y^*L)^2} \right] + \frac{\partial(T^*\rho U^2)^{xy}}{\partial(x^*L)} + \frac{\partial(T^*\rho U^2)^{yy}}{\partial(y^*L)}. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(v^*)}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*v^*)}{\partial(y^*)} \right] &= -\frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(p^*)}{\partial(y^*)} \right] + \\ &+ \frac{\eta_s U}{L^2} \left[\frac{\partial^2(v^*)}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2(v^*)}{\partial(y^*)^2} \right] + \frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(T^*)^{xy}}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(T^*)^{yy}}{\partial(y^*)} \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{L}{\rho U^2}$, obtém-se

$$\frac{\partial(v^*)}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*v^*)}{\partial(y^*)} = -\frac{\partial(p^*)}{\partial(y^*)} + \frac{\eta_s}{\rho UL} \left[\frac{\partial^2(v^*)}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2(v^*)}{\partial(y^*)^2} \right] + \frac{\partial(T^*)^{xy}}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(T^*)^{yy}}{\partial(y^*)}.$$

Sabendo que $Re = \frac{\rho UL}{\eta_0}$, $\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}$ e $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, então a equação do momento na direção y adimensionalizada é dada por

$$\frac{\partial(v^*)}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*v^*)}{\partial(y^*)} = -\frac{\partial(p^*)}{\partial(y^*)} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2(v^*)}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2(v^*)}{\partial(y^*)^2} \right] + \frac{\partial(T^*)^{xy}}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(T^*)^{yy}}{\partial(y^*)}.$$

Omitindo o símbolo (*) por simplicidade, tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (\text{B.7})$$

B.2 Equação Oldroyd-B

Neste trabalho a equação constitutiva utilizada para o fluido viscoelástico é Oldroyd-B é dada por

$$\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (\text{B.8})$$

onde $\mathbf{T}$ é o tensor extra-tensão (simétrico) que representa a contribuição não-Newtoniana (polimérica) e $\mathbf{D}$ é o tensor taxa de deformação que é definido por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top),$$

e

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix}.$$

A constante η_p é um coeficiente de viscosidade polimérica, λ refere-se ao tempo de relaxação do fluido e $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ é a derivada convectada definida como

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^\top - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}.$$

Substituindo as equações (B.1) no tensor taxa de deformação $\mathbf{D}$, no tensor extra-tensão $\mathbf{T}$ e na derivada convectada $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$, obtém-se

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u^* U}{\partial x^* L} & \left(\frac{\partial v^* U}{\partial x^* L} + \frac{\partial u^* U}{\partial y^* L}\right) \\ \left(\frac{\partial v^* U}{\partial x^* L} + \frac{\partial u^* U}{\partial y^* L}\right) & 2\frac{\partial v^* U}{\partial y^* L} \end{bmatrix} = \frac{1U}{2L} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u^*}{\partial x^*} & \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) \\ \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) & 2\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} = \rho U^2 \begin{bmatrix} T^{*xx} & T^{*xy} \\ T^{*xy} & T^{*yy} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

$$\nabla \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} & \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} \\ \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} & \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} 2T^{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + 2T^{xy}\frac{\partial u}{\partial y} & T^{xx}\frac{\partial v}{\partial x} + T^{yy}\frac{\partial u}{\partial y} \\ T^{yy}\frac{\partial u}{\partial y} + T^{xx}\frac{\partial v}{\partial x} & 2T^{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + 2T^{yy}\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix},$$

utilizando os parâmetros adimensionais e fazendo convenientes manipulações algébricas, obtém-se

$$\nabla \mathbf{T} = \frac{\rho U^3}{L} \begin{bmatrix} \frac{\partial(T^{*xx})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xx})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xx})}{\partial(y^*)} & \frac{\partial(T^{*xy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xy})}{\partial(y^*)} \\ \frac{\partial(T^{*xy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xy})}{\partial(y^*)} & \frac{\partial(T^{*yy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*yy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*yy})}{\partial(y^*)} \end{bmatrix} +$$

$$- \frac{\rho U^3}{L} \begin{bmatrix} 2(T^{*xx})\frac{\partial(u^*)}{\partial(x^*)} + 2(T^{*xy})\frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} & (T^{*xx})\frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} + (T^{*yy})\frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} \\ (T^{*yy})\frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} + (T^{*xx})\frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} & 2(T^{*xy})\frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} + 2(T^{*yy})\frac{\partial(v^*)}{\partial(y^*)} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Substituindo as equações adimensionalizadas (B.10), (B.10) e (B.11) na equação constitutiva Oldroyd-B (B.8), obtém-se

$$\rho U^2 \begin{bmatrix} T^{*xx} & T^{*xy} \\ T^{*xy} & T^{*yy} \end{bmatrix} +$$

$$+ \lambda \frac{\rho U^3}{L} \begin{bmatrix} \frac{\partial(T^{*xx})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xx})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xx})}{\partial(y^*)} & \frac{\partial(T^{*xy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xy})}{\partial(y^*)} \\ \frac{\partial(T^{*xy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xy})}{\partial(y^*)} & \frac{\partial(T^{*yy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*yy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*yy})}{\partial(y^*)} \end{bmatrix} +$$

$$- \lambda \frac{\rho U^3}{L} \begin{bmatrix} 2(T^{*xx})\frac{\partial(u^*)}{\partial(x^*)} + 2(T^{*xy})\frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} & (T^{*xx})\frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} + (T^{*yy})\frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} \\ (T^{*yy})\frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} + (T^{*xx})\frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} & 2(T^{*xy})\frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} + 2(T^{*yy})\frac{\partial(v^*)}{\partial(y^*)} \end{bmatrix} =$$

$$= 2\eta_p \frac{1U}{2L} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u^*}{\partial x^*} & \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) \\ \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) & 2\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Dividindo a equação (B.12) por ρU^2 , tem-se

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} T^{*xx} & T^{*xy} \\ T^{*xy} & T^{*yy} \end{bmatrix} + \\
& + \lambda \frac{U}{L} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial(T^{*xx})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xx})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xx})}{\partial(y^*)} & \frac{\partial(T^{*xy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xy})}{\partial(y^*)} \\ \frac{\partial(T^{*xy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xy})}{\partial(y^*)} & \frac{\partial(T^{*yy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*yy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*yy})}{\partial(y^*)} \end{array} \right] + \\
& - \lambda \frac{U}{L} \left[\begin{array}{cc} 2(T^{*xx}) \frac{\partial(u^*)}{\partial(x^*)} + 2(T^{*xy}) \frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} & (T^{*xx}) \frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} + (T^{*yy}) \frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} \\ (T^{*yy}) \frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} + (T^{*xx}) \frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} & 2(T^{*xy}) \frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} + 2(T^{*yy}) \frac{\partial(v^*)}{\partial(y^*)} \end{array} \right] = \\
& = \frac{\eta_p}{\rho U L} \left[\begin{array}{cc} 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} & \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \\ \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) & 2 \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Sabendo que $Wi = \frac{\lambda U}{L}$, então a equação torna-se

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} T^{*xx} & T^{*xy} \\ T^{*xy} & T^{*yy} \end{bmatrix} + \\
& + Wi \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial(T^{*xx})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xx})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xx})}{\partial(y^*)} & \frac{\partial(T^{*xy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xy})}{\partial(y^*)} \\ \frac{\partial(T^{*xy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*xy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*xy})}{\partial(y^*)} & \frac{\partial(T^{*yy})}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*)(T^{*yy})}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*)(T^{*yy})}{\partial(y^*)} \end{array} \right) + \\
& - \left[\begin{array}{cc} 2(T^{*xx}) \frac{\partial(u^*)}{\partial(x^*)} + 2(T^{*xy}) \frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} & (T^{*xx}) \frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} + (T^{*yy}) \frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} \\ (T^{*yy}) \frac{\partial(u^*)}{\partial(y^*)} + (T^{*xx}) \frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} & 2(T^{*xy}) \frac{\partial(v^*)}{\partial(x^*)} + 2(T^{*yy}) \frac{\partial(v^*)}{\partial(y^*)} \end{array} \right] = \\
& = \frac{1-\beta}{Re} \left[\begin{array}{cc} 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} & \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \\ \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) & 2 \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Pode-se observar que $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, então

$$\frac{1-\beta}{Re} = \frac{1-\frac{\eta_s}{\eta_0}}{\frac{\rho U L}{\eta_0}} = \frac{\eta_0 - \eta_s}{\rho U L} = \frac{\eta_p}{\rho U L}.$$

Assim, as equações adimensionalizadas para os tensores não-Newtonianos do modelo Oldroyd-B, omitindo o símbolo (*) por simplicidade, são dadas por

$$T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

B.3 Equação de Vorticidade

Considerando a equação de transporte de vorticidade, para um escoamento incompressível de um fluido viscoelástico, tem-se

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_z)}{\partial y} = \frac{\eta_s}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y} \right]. \quad (\text{B.13})$$

Substituindo as transformações (B.1) na equação de vorticidade (B.13), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{\omega_z^* U}{L} \right)}{\partial \left(\frac{t^* L}{U} \right)} + \frac{\partial(u^* U) \left(\frac{\omega_z^* U}{L} \right)}{\partial(x^* L)} + \frac{\partial(v^* U) \left(\frac{\omega_z^* U}{L} \right)}{\partial(y^* L)} &= \frac{\eta_s}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{\omega_z^* U}{L} \right)}{\partial(x^* L)^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{\omega_z^* U}{L} \right)}{\partial(y^* L)^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial^2 (T^* \rho U^2)^{xx}}{\partial(x^* L) \partial(y^* L)} + \frac{\partial^2 (T^* \rho U^2)^{xy}}{\partial(y^* L)^2} - \frac{\partial^2 (T^* \rho U^2)^{xy}}{\partial(x^* L)^2} - \frac{\partial^2 (T^* \rho U^2)^{yy}}{\partial(x^* L) \partial(y^* L)} \right]. \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação acima, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{L^2} \left[\frac{\partial \omega_z^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* \omega_z^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* \omega_z^*}{\partial y^*} \right] &= \frac{\eta_s U}{\rho L^3} \left[\frac{\partial^2 \omega_z^*}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2 \omega_z^*}{\partial(y^*)^2} \right] + \\ &+ \frac{\rho U^2}{\rho L^2} \left[\frac{\partial^2 (T^*)^{xx}}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial^2 (T^*)^{xy}}{\partial(y^*)^2} - \frac{\partial^2 (T^*)^{xy}}{\partial(x^*)^2} - \frac{\partial^2 (T^*)^{yy}}{\partial x^* \partial y^*} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Multiplicando a equação (B.14) por $\frac{L^2}{U^2}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* \omega_z^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* \omega_z^*}{\partial y^*} &= \frac{\eta_s}{\rho U L} \left[\frac{\partial^2 \omega_z^*}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2 \omega_z^*}{\partial(y^*)^2} \right] + \\ &+ \frac{\partial^2 (T^*)^{xx}}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial^2 (T^*)^{xy}}{\partial(y^*)^2} - \frac{\partial^2 (T^*)^{xy}}{\partial(x^*)^2} - \frac{\partial^2 (T^*)^{yy}}{\partial x^* \partial y^*}. \end{aligned}$$

Logo, a equação de transporte de vorticidade adimensionalizada (o símbolo * foi omitido por simplicidade) é dada por

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_z)}{\partial y} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y}.$$