IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO IFT–D.007/12

Estudo clássico completo do formalismo de Hamilton-Jacobi

Carlos Enrique Valcárcel Flores

Orientador

Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Agosto de 2012

Agradecimentos

- Primeiro, e mais importante, agradeço a minha família pelo apoio durante todos estes anos. A meu pai, Carlos Valcárcel, e a minha mãe, Verónica Flores, por me dar forças para continuar meu trabalho. A meus irmãos Natalia, Alejandra e Javier porque sempre aprendo algo deles. E a pequena Vania por ser quem é.
- À Elizabeth Pastor pelo inestimável apoio moral para poder terminar esta tese.
- Ao Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar pela orientação, assim como pela confiança brindada durante todos estes anos, e pela sua paciência em corregir esta tese.
- Aos meus amigos, ao Dr. Mário Cezar Bertin e ao Dr. German Ramos Zambrano pela importante colaboração na minha pesquisa.
- Aos meus amigos pelos bons momentos durante todos estes anos, aos bons anos na república do instituto, a Malaquia. Em especial, agradeço aos meus amigos Rodrigo Búfalo e ao Luis Soriano, pelas risadas em vários congressos.
- À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta Tese, apresentamos a formulação clássica completa da teoria de Hamilton-Jacobi para sistemas vinculados. Usando o método de Lagrangianas Equivalentes de Carathéodory obtemos um conjunto de Equações Diferenciais Parciais de Hamilton-Jacobi, também chamado de Hamiltonianos. A Condição de Integrabilidade nos permite dividir os Hamiltonianos entre involutivos e não-involutivos. Construímos os Parênteses Generalizados a fim de eliminar os Hamiltonianos não-involutivos, enquanto que relacionamos os Hamiltonianos involutivos com o Gerador das transformações canônicas. Por outro lado, a Equação de Lie é resultado da realização das variações totais no funcional de ação, e que é relacionada às simetrias da teoria. Usamos a Equação de Lie e a estrutura das Equações Características, que indicam a evolução dinâmica do sistemas, para associar o Gerador de transformações canônicas às simetrias de calibre. Aplicamos o formalismo de Hamilton-Jacobi ao modelo da Mecânica Quântica Topologica, ao modelo BF bi-dimensional equivalente à Teoria de Jackiw-Teitelboim, ao campo de Yang-Mills Topologicamente Massivo e seu equivalente Auto-dual, assim como para o campo da Gravitação linearizada.

Palavras Chaves: Principios variacionais; Formalismo de Hamilton-Jacobi; Teorias Topologicas; Gravitação Linearizada.
Áreas do conhecimento: Teoria de Campos.

Abstract

It is presented the complete classical formulation of the Hamilton-Jacobi theory for constrained systems. From fixed point variations and using the Carathéodory's method of Equivalent Lagrangian we obtain a set of Hamilton-Jacobi Partial Differential Equations, also called Hamiltonians. The Integrability Condition allow us to divide the Hamiltonians between involutive and non-involutive ones. We build the Generalized Brackets in order to eliminate the non-involutive Hamiltonians, whereas we relate the involutive Hamiltonians to the Generator of Canonical Transformations. On the other hand, we build the Lie Equation, result of perform total variations to the action functional and which is related to the symmetries of the theory. We use the Lie equation along with the structure of the Characteristic Equations, related to the dynamical evolution of the systems, to associate the Generator of Canonical Transformation to Gauge symmetries. We apply this formalism to the Topologically Quantum Mechanics, the two-dimensional BF model equivalent to the Jackiw-Teitelboim theory, the Topologically Massive Yang-Mills field as well as its correspondent self-dual and to the Linearized Gravity field.

Key words: Variational Principles; Hamilton-Jacobi Formalism; Topological Theories; Linearized Gravity.

Knowledge Area: Field theory.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Princípios Variacionais e o formalismo de Hamilton-Jacobi **5**

2.1 Introdução 5

2.2 O Princípio Variacional 6

2.2.1 O campo de Proca: Equação de Lie e simetrização do tensor de Energia-Momento 15

2.3 A estrutura do Espaço de Fase 18

2.4 O formalismo de Hamilton-Jacobi 22

2.4.1 Lagrangianas equivalentes e a equação de Hamilton-Jacobi 22

2.4.2 Equações Características 27

2.4.3 Integrabilidade 29

3 Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares **32**

3.1 Introdução 32

3.2 O formalismo de Hamilton-Jacobi 33

3.2.1 Equações Características 34

3.2.2 Integrabilidade 36

3.2.3 Hamiltonianos não-involutivos: Parênteses Generalizados 38

3.2.4 Mecânica Quântica Topológica: Hamiltonianos não-involutivos 41

3.2.5 Quadro Geométrico 45

3.2.6 Hamiltonianos Involutivos: Geradores das Transformações Canônicas 47

3.2.7 Mecânica Quântica Topológica: Hamiltonianos involutivos 50

4 O modelo BF para a Gravitação Bi-dimensional **52**

4.1 Introdução 52

4.2 O Modelo BF 53

4.2.1 O modelo BF bidimensional e a teoria de Jackiw-Teitelboim 55

4.3 Formalismo de Hamilton-Jacobi 56

4.3.1 Equações Características 58

4.3.2 Geradores das Transformações Canônicas e de Calibre 59

5 Campo de Yang-Mills Topologicamente Massivo e Auto-dualidade 62
5.1 Introdução 62
5.2 Teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva 63
5.3 Formalismo de Hamilton-Jacobi 66
5.3.1 Equações Características 67
5.3.2 Gerador das transformações canônicas 68
5.4 Campo de Yang-Mills Topologicamente Massivo no Plano Nulo 70
5.5 Auto-dualidade da teoria Topologicamente Massiva Abeliana 75

6 Gravitação Linearizada 80
6.1 Introdução 80
6.2 A ação equivalente de Einstein-Hilbert e as variáveis de Goldberg 81
6.3 A abordagem de Feynman para a Gravitação Linearizada 83
6.4 Equação de Lie e a ação de Fierz-Pauli 85
6.5 O formalismo de Hamilton-Jacobi 87
6.5.1 Equações Características 90
6.5.2 Gerador das Transformações Canônicas 92

7 Considerações finais 95

Referências bibliográficas 100

A Simetrização do tensor de energia-momento via Equação de Lie 107
A.1 Teoria de Maxwell-Chern-Simons 107
A.2 Modelo Auto-dual 109

B Algumas características da dinâmica no Plano Nulo 113
B.1 Campo Complexo em $3+1$ 113

C Equação de Lie para a Gravitação Linearizada 116
C.0.1 Foliação espaço-tempo da Lagrangiana 116
C.0.2 Equação de Lie para a obtenção do Gerador da transformação de Calibre 118

Capítulo 1

Introdução

O estudo dos sistemas vinculados iniciou-se com os trabalhos de Dirac [1] e Bergmann [2] e tornou-se uma ferramenta poderosa para lidar com teorias de calibre uma vez que, tal como foi provado por Anderson e Bergmann, estas teorias possuem vínculos. Como a maioria das teorias modernas são teorias de calibre, a importância do estudo do formalismo de Dirac é evidente e uma vasta bibliografia foi produzida desde então. O formalismo de Dirac foi aplicado com sucesso em vários tipos de sistemas, desde a mecânica clássica até QED, e da Teoria Geral de Relatividade até a Teoria de Cordas [3].

O formalismo de Dirac para sistemas vinculados é estritamente Hamiltoniano, desde que começou com a definição das variáveis canônicas e baseia-se como uma tentativa para fixar a degenerecência da função Hamiltoniana devido a que o determinante da matriz Hessiana nulo, responsável da transformação de Legendre, que permite uma transição do formalismo Lagrangiano para o Hamiltoniano. A chamada Condição de Consistência afirma que todo vínculo obtido a partir da definição dos momentos canônicos (denominados vínculos primários) deve ser conservado no tempo. Com este procedimento podemos obter um novo conjunto de vínculos, chamados de vínculos secundários. Esses novos vínculos também têm que satisfazer a Condição de Consistência, podendo assim produzir vínculos terciários, quaternários e assim por diante. Com o conjunto completo de vínculos, podemos dividi-lo em dois grupos: os vínculos de primeira e segunda classe. Essa classificação resulta útil, uma vez que está relacionada com as simetrias da teoria em consideração.

O problema de se encontrar as simetrias de uma teoria particular como resultado da sua análise de vínculos é ainda um problema aberto. Teve inicio com a chamada Conjectura de Dirac que afirma que todos os vínculos de primeira classe geram as simetrias de calibre. Mesmo assim, como o nome insinua, é apenas uma conjectura e foram construídos modelos para que a contradigam. Provavelmente, o algorítmo mais utilizado para construir os geradores das transformações de calibre de uma teoria vinculada é aquele dado por Castellani [4]. Estudando as variações no espaço de fase, ele deduziu que o gerador dessas transformações, assim como seu Parênteses de Poisson com o Hamiltoniano devem ser vínculos de primeira classe. Devido ao espaço onde essas variações são feitas, vemos que este procedimento é puramente

Hamiltoniano, mesmo assim, têm havido tentativas para construir todo o conjunto de simetrias Lagrangianas. Nesse contexto, temos a abordagem HTZ, em homenagem ao trabalho de Henneaux, Teitelboim e Zanelli [5] ou, mais recentemente, o trabalho de Gitman e Tyutin [6] que proporciona um novo método para a obtenção das simetrias de um sistema vínculado através da solução da chamada Equação de Simetria.

Sem dúvida, o formalismo de Dirac é a abordagem mais utilizada para lidar com sistemas vinculados. Mesmo assim, novos métodos para o análise de vínculos surgiram na tentativa de esclarecer a estrutura desses sistemas. Assim encontramos, por exemplo, o formalismo de Faddeev-Jackiw [7] utilizado para ações de primeira ordem. Esse formalismo mostra uma vantagens algébrica se comparamos com o formalismo de Dirac, mas possui sérias desvantagem na análise das simetrias de calibre. Por esta razão, existe uma extensão direta na qual se permite a análise da simetria de calibre, chamada de formalismo Simplético [8].

Outro método alternativo para lidar com os sistemas vinculados é o formalismo de Hamilton-Jacobi, que foi desenvolvido por Güler [9] como uma extensão do método de Lagrangianas equivalentes de Carathéodory no cálculo de variações [10]. Para esses sistemas as condições para que a ação seja estacionária são reduzidas a um conjunto de equacões diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi, também denominado Hamiltoniano, o qual deve obedecer uma Condição de Integrabilidade. Houve vários trabalhos que desemvolveram o formalismo de Hamilton-Jacobi [11], assim como também generalizações para Lagrangianas de segunda ordem [12], de ordem superior [13], e de sistemas de Berezin [14] (Neste trabalho também é mostrada a equivalência entre a Condição de Integrabilidade com a Condição de Consistência do formalismo de Dirac). O formalismo também tem sido aplicado ao estudo da partícula não relativística em espaços curvos [15], do modelo sigma $O\left(3\right)$ não linear [16], do modelo de Schwinger [17], do modelo de Proca [18], da Gravitação de Polyakov de duas dimensões [19] e da Gravitação Teleparalela [20]. O estudo de ações de primeira ordem [21] permitiu a construção do chamado Parêntese Generalizado, esse resultado também foi obtido em [22]. Em [23] foi demonstrado que para todo sistema que possua Hamiltonianos que não satisfazem a Condição de Integrabilidade pode-se construir o Parêntese Generalizado. O estudo da dinâmica do Plano Nulo fornece um bom laboratório para o estudo dessa estrutura, assim temos estudado o modelo escalar complexo e o Eletromagnetismo em [24], e o campo de Yang-Mills Topologicamente Massivo [25]. No contexto de Relatividade Geral, estudamos a Gravitação em duas dimensões [26] e a Gravitação Linearizada [27]. Encontramos a estrutura do Parêntese Generalizado no modelo da Gravitação BF [28] assim como o modelo Auto-Dual [29]. Rothe, no seu livro sob sistemas vinculados [30] inclui um capítulo completo para o estudo do formalismo de Hamilton-Jacobi e indica alguns dos problemas enfrentados nessa descrição e que serão tratados nesta tese.

O interesse inicial no formalismo de Hamilton-Jacobi foi a não discriminação entre as Hamiltonianos, ou seja, os vínculos de primeira e segunda classe foram tratados no mesmo nível, mas logo foi mostrado [23] que, para satisfazer a Condição de Integrabilidade, os Hamiltonianos não-involutivos devem ser eliminados, redefinindo assim a dinâmica do sistema através da construção dos Parênteses Generalizados. Portanto, o sistema termina com um conjunto com-

pleto de Hamiltonianos involutivos. Em [31] mostramos que o papel desses Hamiltonianos é gerar as transformações canônicas.

Uma vez que o estudo do formalismo de Hamilton-Jacobi iniciou-se com Lagrangianas equivalentes, devemos esperar que a análise de vínculos forneça todas as simetrias em nível Lagrangiano. Por outro lado, o estudo das variações totais nos leva a obter a chamada Equação de Lie que juntamente com as Equação Característica, fornece um procedimento de como podemos construir o gerador das transformações de calibre. Por conseguinte, este processo de obtenção das simetrias de uma teoria determinada é puramente Lagrangiano. O objetivo desta tese é fornecer o estudo clássico completo do formalismo de Hamilton-Jacobi no qual estudamos o papel de cada um das classes de Hamiltonianos a partir da Condição de Integrabilidade que é a pedra angular deste formalismo. Eliminamos os Hamiltonianos não-involutivos desde que eles não satisfaçam esta condição. Portanto, a evolução do sistema é descrito por um conjunto de Hamiltonianos involutivos, geradores das transformações canônicas. Finalmente, utilizamos a Equação de Lie para obter o gerador da transformação de calibre.

No capítulo II estudamos diferentes tipos de princípios variacionais, resultado da realização das variações totais na função de ação. Esse procedimento é utilizado na teoria de campos, mas podemos explorar mais as suas propriedades no contexto da mecânica analítica. Assim também obtemos a Equação de Lie que está relacionada com às propriedades de invariância do sistema em consideração e, portanto, com o teorema de Noether. Para sistemas regulares é estudada a passagem do formalismo Lagrangeano ao formalismo Hamiltoniano, assim como também o estudo das transformações canônicas a partir do Princípio de ação de Weiss e sua relação com o formalismo de Hamilton-Jacobi. Como passo prévio para o estudo de sistemas vinculados, apresentamos a abordagem de Carathéodory para a teoria de Hamilton-Jacobi, estudamos as chamadas Equações Características, que dizem respeito à dinâmica do sistema, e as Condições de Integrabilidade, que atestam sob a obtenção de uma solução completa do problema considerado. Neste capítulo também apresentamos uma nova abordagem para obter uma versão simetrizada do tensor energia-momentum canônico, mesmo que este procedimento não esteja relacionado com a estrutura de vínculos de uma teoria. Mostramos que para alguns casos, a Equação de Lie fornece naturalmente a simetrização do tensor de energia-momento sem fazer uso do procedimento de Belinfante [32].

O Capítulo III é dedicado ao estudo da estrutura de vínculos através do formalismo de Hamilton-Jacobi. Seguimos o mesmo roteiro para sistema regulares até que a presença da Condição Hessiana seja necessária. Introduzimos as variáveis canônicamente conjugadas e obtemos as Equações Características. O estudo da Condição de Integrabilidade nos levam a dividir os Hamiltonianos em dois grupos: os involutivos e não-involutivos e, em seguida, estudar o papel de cada um desses dentro do formalismo de Hamilton-Jacobi. Uma vez que todo o procedimento tem sido estudado no contexto da Mecânica Analítica e com o fim de clarificar as ideias e a utilidade do formalismo, trabalhamos com um modelo chamado Mecânica Quântica Topológica [33]. Esse modelo contém as duas classes de Hamiltonianos, portanto, a importância para visualizar o formalismo torna-se evidente.

O interesse em Teorias Topológicas nos levou a estudar o model BF bi-dimensional assim como o campo de Yang-Mills Topologicalmente Massivo, juntamente com sua Auto-dualidade. O modelo BF será estudado no capítulo IV e tem sido usado para modelar a gravitação bi-dimensional devido à sua comprovada equivalência com o modelo de Jackiw-Teitelboim [34]. As teorias de calibre Topologicamente Massivas [35] foram introduzidas a fim de evitar divergências infravermelhas, mas foi mostrado que estas teorias também são limites de teorias quadri-dimensionais com temperatura, desta forma, esses modelos obtêm uma vasta gama de aplicações. Nesse sentido, o capítulo V será dedicado ao estudo do campo de Yang-Mills Topologicalmente Massivo, tanto na forma Instantânea como no Plano Nulo, e o modelo Auto-dual [36] e a correspondência entre esse modelos [37].

No Capítulo VI, apresentamos a análise de vínculos do campo da Gravitação Linearizada. Como o nome indica, essa teoria é obtida através da linearização da Lagrangiana de Einstein-Hilbert. A importância desse modelo estabelece a medida em que os campos de spin dois aparecem na tentativa de estudar o regime perturbativo da Gravitação. Para todos esses modelos apresentamos, primeiro, a Equação de Lie a partir da qual obtemos as propriedades Lagrangianas de nosso interesse e, em seguida, prosseguimos com o análise de vínculos utilizando o formalismo de Hamilton-Jacobi.

No último capítulo discutiremos os resultados obtidos, assim como mostraremos algumas perspectivas futuras para nosso trabalho.

Capítulo 2

Princípios Variacionais e o formalismo de Hamilton-Jacobi

2.1 Introdução

Uma afirmação que impõe uma condição extrema ou estacionária ao longo de um funcional é chamado de Princípio Variacional. O cálculo das variações consiste em encontrar uma função que deixe estacionária um dado funcional. Em outras palavras, o cálculo de variações é uma ferramenta que traduz um princípio variacional em uma linguagem matemática. Uma vez que a maioria das equações que governam os sistemas físicos parecem ser obtidos a partir de uma condição estacionária ao longo de um dado funcional, a importância do estudo de métodos variacionais é de suma importância.

Sabe-se que os primeiros princípios variacionais foram formulados pelos gregos, tais como Hero de Alexandria ou Aristóteles e, ao longo da história notáveis cientistas propuseram princípios para diferentes ramos da física como a ótica, elasticidade e, principalmente na mecânica. Para uma pesquisa histórica sobre princípios variacionais recomendamos [38].

Em seu *Mécanique Analytique*, Lagrange provoca uma revolução no estudo da mecânica observando que os princípios variacionais podem ser formulados através de funcionais que dependem de um conjunto de parâmetros, chamado coordenadas generalizadas, em vez das coordenadas cartesianas usuais que caracterizam a posição de um determinado sistema. Desta forma, o tratamento variacional da mecânica torna-se superior à mecânica vectorial e que, por sua vez, permite novas generalizações. Os Princípios variacionais que vamos estudar neste capítulo são estabelecidos no que hoje chamamos de mecânica analítica.

Postula-se que existe uma quantidade para sistemas dinâmicos chamada de ação. O Princípio de Hamilton na dinâmica clássica afirma que este funcional de ação é estacionária para variações em torno da trajetória física do sistema, desde que os estados iniciais e finais das configurações sejam mantidos fixos. Uma conseqüência direta da estacionariedade da ação são as equações de movimento de Euler-Lagrange (Veja [39] por exemplo).

Em 1938, Weiss [40] propôs uma extensão ao Princípio de ação. Esse princípio decorre

em considerar variações gerais e é formulado como que caminho é seguido por um sistema dinâmico no espaço de configuração no qual as variações gerais produzem apenas contribuições de contorno. O tempo nos pontos do contorno é variado e, então, as variações não desaparecem nas fronteiras. Em contraste com o Princípio de Hamilton, a superfície de contorno tem que ser considerada. Schwinger explorou o potencial do Princípio de Weiss em algumas aplicações na mecânica clássica e eletromagnetismo [41].

Não é de surpreender que o Princípio de ação quântica de Schwinger [42], que é a descrição Lagrangiana da Mecânica Quântica, tenha muitas analogias com o Princípio da Weiss. Nesse formalismo, o equivalente à equação de movimento pode ser expresso através de um operador hermitiano chamado gerador de transformações infinitesimais.

Este gerador encontra o seu equivalente clássico no termo de superfície no Princípio da Weiss. Este princípio foi aplicado a modelos simples como partículas livres e osciladores harmônicos [43], efeito Casimir e gases de Fermi.

Quanto a mecânica clássica, existe um método alternativo para se obter o caminho físico seguido por um sistema dinâmico. Este método consiste em resolver a equação de Hamilton-Jacobi. A visão geométrica da presente equação descobriu ser análoga ao Princípio de Fermat do tempo mínimo na óptica, e tem uma semelhança com a equação de Schroedinger na mecânica quântica. Carathéodory [10] desenvolveu um formalismo para obter a equação de Hamilton-Jacobi como uma consequência direta do uso de Lagrangianas equivalentes para minimizar o funcional de ação.

2.2 O Princípio Variacional

Vamos considerar um sistema físico, caracterizado por sua função Lagrangeana $L = L\left(t, q^i, \dot{q}^i\right)$, onde $i = 1, ..., N$, e N representa o número de coodenadas generalizadas. O funcional de ação

$$W[q^i] = \int_{t_0}^{t_f} dt L(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)), \tag{2.1}$$

é avaliada sobre as trajetórias, $q^i = q^i(t)$. O espaço de configuração é constituído pelo conjunto de coordenadas generalizadas q^i, logo a sua dimensão é igual ao número de graus de liberdade do sistema. O parâmetro temporal t pertence ao intervalo $[t_0, t_f]$ e, também consideramos que tanto as trajetórias, quanto as suas derivadas são funções diferenciáveis.

O problema variacional na mecânica consiste em encontrar condições adequadas para extremizar o funcional de ação. Esse problema pode ser resolvido investigando a taxa de variação do funcional (2.1) causada por variações sobre as trajetórias. Para começar com esse estudo, precisamos definir o tipo de variação. Por exemplo, no Princípio de Hamilton lidamos com transformações em torno da trajetória física, q^i_{phys} , que deixam inalterados os pontos de contorno. Generaliz-se este procedimento, considerando uma família $r-$paramêtrica de

transformações.

$$\bar{t} = T(t, q^j, \epsilon^r), \tag{2.2a}$$

$$\bar{q}^i = X^i(t, q^j, \epsilon^r), \tag{2.2b}$$

onde ϵ^r representa os r parâmetros independentes. Assumimos que a transformação (2.2) torna-se a identidade para cada $\epsilon^r = 0$, i.e., $t = T(t, q^j, 0)$ e $q^i = X^i(t, q^j, 0)$. Também temos que sob a transformação (2.2), a velocidade $\dot{q}^i$ é transformada segundo a relação

$$\frac{d}{dt}\bar{q}^i = V^i(t, q^j, \dot{q}^j, \epsilon^r) = \frac{\partial X^i}{\partial t} + \dot{q}^k \frac{\partial X^i}{\partial q^k}. \tag{2.3}$$

Observa-se que, nas condições impostas $\epsilon^r = 0$, temos que $\dot{q}^i = V^i(t, q^j, 0)$. Por conseguinte, iremos retornar a nossa trajetória inicial $q^i(t)$ ajustando $\epsilon^r = 0$ na trajetória variada $\bar{q}^i(\bar{t})$, cuja restrição também nos permite fazer variações ao redor da Lagrangiana original e do funcional de ação.

Como ilustrações simples da transformação (2.2) temos as translações temporais mono-paramétricas $\bar{t} = t + \epsilon, \bar{q}^i = q^i$, ou as translações espaciais $N-$paramétricas $\bar{t} = t, \bar{q}^i = q^i + \epsilon^i$. Para um sistema com um grau de liberdade, podemos também considerar a rotação no plano (t, q), onde o parâmetro dessa transformação é caracterizado pelo ângulo ϵ assim

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t\cos\epsilon - q\sin\epsilon, \\ \bar{q} &= t\sin\epsilon + q\cos\epsilon, \end{aligned}$$

nesse caso temos que o ângulo esta entre 0 e 2π. Em muitos casos, não estamos interessados em tratar com parâmetros arbitrários ϵ^r, ao invés disso, restringimos o estudo para o caso de parâmetros infinitesimais, considerando que eles só produzem pequenas mudanças em torno das trajetorias $q^i(t)$ e de suas derivadas $\dot{q}^i(t)$. Voltando à rotação no plano (t, q), podemos expandir essa transformação em torno de $\epsilon = 0$ e así obtemos

$$\begin{aligned} \bar{t} - t &= -\epsilon q + O(\epsilon^2), \\ \bar{q} - q &= \epsilon t + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Podemos desprezar os termos iguais e superiores a ϵ^2 enquanto mantemos ϵ para zero. Nesse caso, temos que os coeficientes de ϵ: $-q$ e t agem como geradores infinitesimais da rotação. Generalizamos essa afirmação, assumindo que as funções T, X^i e V^i são suaves, de modo que, ao expandir a transformação (2.2) em série de Taylor em torno a $\epsilon^r = 0$, temos

$$\bar{t} = t + \epsilon^r \tau_r + O(\epsilon^2), \tag{2.4a}$$

$$\bar{q}^i = q^i + \epsilon^r \xi^i_r + O(\epsilon^2), \tag{2.4b}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{q}^i = \dot{q}^i + \epsilon^r \left(\frac{\partial \xi^i_r}{\partial t} + \dot{q}^k \frac{\partial \xi^i_r}{\partial q^k} \right) + O(\epsilon^2), \tag{2.4c}$$

onde os geradores infinitesimais da transformação (2.4) são definidos por

$$\tau_r \equiv \frac{\partial T}{\partial \epsilon^r}(t, q^i, 0), \qquad \xi^i_r \equiv \frac{\partial X^i}{\partial \epsilon^r}(t, q^j, 0).$$

Para variações infinitesimais definimos $\delta t \equiv \epsilon^r \tau_r = \bar{t} - t$, nota-se que a trajetória variada $\bar{q}^i$ depende do parâmetro temporal assim como dos r parâmetros da transformação. Podemos avaliar as transformações (2.4b) e (2.4c) em um tempo dado t, tal que obtemos

$$\begin{aligned} \bar{q}^i(t,\epsilon) &= q^i(t) + \epsilon^r \xi_r^i = q^i(t) + \bar{\delta} q^i, & (2.5) \\ \frac{d}{dt}\bar{q}^i(t,\epsilon) &= \dot{q}^i(t) + \epsilon^r \frac{d}{dt}\xi_r^i = \dot{q}^i(t) + \frac{d}{dt}\bar{\delta} q^i, & (2.6) \end{aligned}$$

onde temos definido $\bar{\delta} q^i$ como a variação dada a um tempo fixo. Podemos também avaliar as transformações em um outro tempo $\bar{t}$, e assim obter a transformação total sobre as trajetórias e suas velocidades

$$\begin{aligned} \bar{q}^i(\bar{t},\epsilon) &= q^i(t) + \bar{\delta} q^i + \dot{q}^i \delta t, \\ \frac{d}{dt}\bar{q}^i(\bar{t},\epsilon) &= \dot{q}^i(t) + \frac{d}{dt}\bar{\delta} q^i + \ddot{q}^i \delta t. \end{aligned}$$

Nesse ponto definimos as variações totais $\delta q^i \equiv \bar{q}^i(\bar{t},\epsilon) - q^i(t)$ e $\delta \dot{q}^i \equiv d\bar{q}^i(\bar{t},\epsilon)/dt - \dot{q}^i(t)$, tal que as equações anteriores possam ser reescritas como

$$\begin{aligned} \delta q^i &= \bar{\delta} q^i + \dot{q}^i \delta t, & (2.7a) \\ \delta \dot{q}^i &= \delta \frac{d}{dt}\bar{q}^i + \ddot{q}^i \delta t. & (2.7b) \end{aligned}$$

Uma simples inspeção das equações (2.5) e (2.6) diz que para variações a ponto fixo a trajetória q^i comuta com sua respectiva velocidade, enquanto que para variações totais obtemos uma regra de comutação

$$\left[\frac{d}{dt}, \delta\right] q^i = \dot{q}^i \frac{d}{dt}\delta t, \qquad (2.8)$$

que é consequência direta de (2.7a) e (2.7b).

Agora, analisaremos as mudanças no funcional de ação sob variações totais. Primeiro, observa-se que a dependência dos parâmetros ϵ^r na trajetória $\bar{q}^i$ será também refletida no funcional de ação. Escrevemos

$$W[\bar{q}^i, \epsilon^r] = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_f} d\bar{t} L(t, \bar{q}^i(t,\epsilon^r), \frac{d}{dt}\bar{q}^i(t,\epsilon^r)).$$

Para poder compará-lo com o funcional $W[q^i]$, mudamos o intervalo de integração

$$W[\bar{q}^i, \epsilon^r] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right) \bar{L}(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)),$$

notamos que com essa transformação temos também que alterar a forma da Lagrangiana. Escrevemos o Jacobiano da transformação temporal como $d\bar{t}/dt = 1 + d\delta t/dt$ já que somente estamos tratando com transformações infinitesimais. Assim, temos

$$W[\bar{q}^i, \epsilon^r] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\bar{L}(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)) + \frac{d\delta t}{dt}\bar{L}(t, q^i(t), \dot{q}^i(t))\right].$$

Devido à presença explícita da variação temporal δt no segundo termo do lado direito da equação e a dependência implícita da mesma variação na nova Lagrangiana $\bar{L}$, escrevemos

$$W[\bar{q}^i, \epsilon^r] - W[q^i] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\bar{L}(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)) - L(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)) + \frac{d\delta t}{dt} L(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)) \right],$$

onde ignoramos os termos iguais ou superiores que $(\delta t)^2$. Agora, definimos a variação total da funcional de ação como $\delta W[q^i] \equiv W[\bar{q}^i, \epsilon^r] - W[q^i]$, cuja forma é

$$\delta W[q^i] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\delta L + (\frac{d\delta t}{dt}) L \right]. \tag{2.9}$$

Especificando a variação na forma funcional da Lagrangiana como $\delta L = \bar{L} - L$, temos que

$$\begin{aligned} \delta L &= L(t + \delta t, q^i + \delta q^i, \dot{q}^i + \delta \dot{q}^i) - L(t, q^i, \dot{q}^i), \\ &= \delta t \frac{\partial L}{\partial t} + \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \delta \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

O nosso objectivo é o de separar as variações arbitrárias δt e δq^i na variação total do funcional de ação. Podemos alcançar este objetivo através de derivações por partes no segundo termo dentro da integral em (2.9) e, substituindo a regra de comutação (2.8) na variação da forma da Lagrangiana (2.10) para assim escrever

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta t \frac{\partial L}{\partial t} + \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{dt} \delta q^i - \dot{q}^i \frac{d}{dt} \delta t \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \\ &= \delta t \left[\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] + \delta q^i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i - \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta t \right). \end{aligned}$$

Com esse procedimento obtemos

$$\delta W[q^i] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\delta q^i \mathbb{E}_i + \delta t \left(\frac{dH}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \right) + \frac{dG}{dt} \right],$$

onde temos definido a expressão de Euler-Lagrange

$$\mathbb{E}_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{2.11}$$

assim como o momento conjugado p_i, a "Hamiltoniana"H e o Gerador G como

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad H \equiv \dot{q}^i p_i - L, \quad G \equiv p_i \delta q^i - H \delta t. \tag{2.12}$$

É importante notar que a expressão para a "Hamiltoniana"é uma função no espaço de configuração, $H = H(t, q^i, \dot{q}^i)$, e a função Hamiltoniana será definida posteriormente. Da definição do Gerador G percebemos que os coeficientes das variações δq^i e δt são as respectivas variáveis conjugadas p_i e H. Podemos também escrever a variação total do funcional de ação em termos da variação a tempo fixo $\bar{\delta} q^i$, nesse caso escrevemos

$$\delta W[q^i] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\bar{\delta} q^i \mathbb{E}_i + \frac{dG}{dt} \right]. \tag{2.13}$$

Equação (2.13) é a expressão final para a variação total do funcional de ação.

O Princípio de Hamilton

Na seção anterior consideramos δt e δq^i como variações arbitrárias. Iremos agora especializar nossos resultados em alguma classe especial de configuração e analisar suas propriedades. O primeiro caso é considerar as variações a tempo fixo $\delta t = 0$, tal que os pontos do contorno da trajetória $q^i(t_0)$ e $q^i(t_f)$ sejam inalterados, isto é, $\delta q(t_0) = \delta q(t_f) = 0$. Nesse caso temos que as variações totais δq^i e as variações a tempo fixo $\bar{\delta} q^i$ são iguais e o gerador é dado por $G = p_i \bar{\delta} q^i$. A equação (2.13) se escreve como

$$\delta W[q^i] = \int_{t_0}^{t_f} dt \bar{\delta} q^i \mathbb{E}_i + p_i \bar{\delta} q^i(t_f) - p_i \bar{\delta} q^i(t_0).$$

Nota-se que o termo de contorno, determinado pelo gerador, não contribui com a variação no funcional de ação devido à condição de pontos fixos no contorno. Dizemos que a trajetória física $q^i_{phys}(t)$ extremiza o funcional de ação se $\delta W[q^i_{phys}] = 0$, de modo que sob as considerações impostas sobre as variações, temos que $q^i_{phys}(t)$ deve satisfazer a Equação de Euler-Lagrange

$$\mathbb{E}_i(q^i_{phys}) \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)_{phys} = 0. \tag{2.14}$$

Como resultado de extremizar o funcional de ação, obtemos um conjunto de N equações diferenciais de segunda ordem. Consideraremos que toda solução da equação de Euler-Lagrange mantém estacionária a ação, ou a extremiza, contudo, essa afirmação tem que ser sempre testada. Na linguagem da mecânica clássica, acabamos de estudar o Princípio de Hamilton, que afirma que a evolução temporal de um sistema físico é de tal forma que mantém a ação estacionária, neste caso, chamamos a configuração $q^i_{phys}(t)$ de trajetória física do sistema.

O Princípio de ação de Weiss

A seguir realizaremos mais uma outra interpretação para a equação (2.13). Consideremos que a trajetória física $q^i_{phys}(t)$ de um sistema determinado é conhecida, para tal configuração específica temos que $\mathbb{E}_i(q^i_{phys}) = 0$, logo a variação total no funcional de ação é dada por

$$\delta W[q^i_{phys}] = \int_{t_0}^{t_f} dt \frac{d}{dt} G = \left[p_i \delta q^i - H \delta t \right]_{t_0}^{t_f}. \tag{2.15}$$

percebemos então que existe uma contribuição dos pontos do contorno da trajetória. Essa contribuição depende das variações totais de q^i e t. O Princípio de ação de Weiss é formulado como: A trajetória física seguida pelo sistema é aquela configuração cuja variação total só produz contribuições do termo de contorno no funcional de ação.

Nota-se que o Gerador G assim como as variáveis conjugadas a δq^i e δt, isto é, o momento canônico p_i e $-H$ tem uma maior importancia nesse Princípio de ação. Essa característica é importante já que nos permite expressar o Principio de ação num outro contexto, no qual os momentos conjugados e as coordenadas generalizadas desempenham o papel de variáveis independentes, chamadas de dinâmica Hamiltoniana.

A partir da definição dos momentos conjugados (2.12) pode ser possível expressar as velocidades $\dot{q}^i$ como funções das variáveis t, q^i e p_i

$$p_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i} L(t, q^i, \dot{q}^i) \rightarrow \dot{q}^i = \dot{q}^i(t, q^j, p_j), \tag{2.16}$$

Nesse caso, a Hamiltoniana somente dependerá das variáveis canônicas q^i, p_i e t

$$H(t, q^i, p_i) \equiv p_i \dot{q}^i(t, q^j, p_j) - L(t, q^i, \dot{q}^i(t, q^j, p_j)),$$

essa passagem de variáveis $(t, q^i, \dot{q}^i)$ para (t, q^i, p_i) é chamada de transformação de Legendre. Nota-se que a equação (2.16) só é alcançada se a chamada Condição Hessiana é satisfeita

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right] \neq 0. \tag{2.17}$$

Escrevendo a expressão de Euler-Lagrange como

$$\mathbb{E}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \tag{2.18}$$

percebemos que a Condição Hessiana está relacionada com a possibilidade de resolver as acelera-ções $\ddot{q}^j$ na Equação de Euler-Lagrange (2.14). Sistemas físicos que satisfazem (2.17) são chamados de regulares, enquanto que as teorias que não satisfazem a Condição Hessiana são chamadas de singulares ou vinculadas. Para sistemas regulares, devido à correspondência (2.16) é possível definir um espaço $2N$ dimensional, chamado de Espaço de Fase, onde q^i e p_i são variáveis independentes. No espaço de fase, o funcional de ação pode ser reescrito como

$$W[\mathcal{C}] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[p_i \dot{q}^i(t, q^j, p_j) - H(t, q^i, p_i) \right]. \tag{2.19}$$

Nessa expressão $\mathcal{C}$ é a trajetória no espaço de fase, em que ambas variáveis canônicas são funções do parâmetro temporal. O cálculo da variação total da ação segue um procedimento análogo ao que tinhamos utilizado na descrição Lagrangiana. Como as coordenadas do espaço de fase são independentes, temos que

$$\delta W[\mathcal{C}] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{d\delta t}{dt} \left(p_i \dot{q}^i - H \right) \right],$$

nessa relação estamos também considerando variações na variável temporal. Aplicando a relação para $\delta \dot{q}^i$

$$\delta W[\mathcal{C}] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + p_i \frac{d}{dt} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - H \frac{d\delta t}{dt} \right].$$

Finalmente, derivando por partes o segundo e último termo na integral e reordenando-os, obtemos

$$\delta W[\mathcal{C}] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q^i + \delta t \left(\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \frac{d}{dt} G \right]. \tag{2.20}$$

Nota-se que nessa descrição também obtemos o mesmo gerador obtido no formalismo Lagrangiano como termo de derivada total na variação da ação. O Princípio de ação de Weiss postulado no espaço de fase afirma que a variação total na trajetória física $\mathcal{C}$ fornece simplesmente contribuições dos extremos da trajetória. De (2.20) obtemos as equações de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{2.21}$$

Isto é, no formalismo Hamiltoniano, mudamos de um conjunto de N equações diferenciais parciais de segunda ordem (as equações de Euler-Lagrange) para um conjunto de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem.

Do Princípio de Weiss à Teoria de Hamilton-Jacobi

A passagem da descrição Lagrangiana à Hamiltoniana é realizada a partir da definição das variáveis canônicamente conjugadas, definindo o Espaço de Fase e fazendo uma transformação de Legendre. Usando o Princípio de Weiss com as variáveis conjugadas podemos obter a teoria de Hamilton-Jacobi. Para proceder com esse método, primeiro consideraremos a seguinte transformação inversível

$$Q_i = Q_i(t, q^j, p_j), \quad P_i = P_i(t, q^j, p_j), \tag{2.22}$$

na qual um ponto no Espaço de Fase, previamente denotado por (t, q^j, p_j), será agora rotulado por (t, Q^j, P_j). Contudo, não estamos interessados em estudar transformações (2.22) arbitrárias, mas aquelas que deixam as Equações de Hamilton invariantes. Em outras palavras, vamos considerar que existe uma nova função Hamiltoniana $\bar{H} \equiv \bar{H}(t, Q^j, P_j)$ tal que (2.21) são ainda válidas para estas novas variáveis. Evidentemente que estas equações deven ser resultado do Princípio de ação de Weiss, em que o funcional de ação é dado por

$$\bar{W}[\mathcal{C}] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[P_i \dot{Q}^i(t, Q^j, P_j) - \bar{H}(t, Q^j, P_j) \right]. \tag{2.23}$$

Observa-se que denotamos a mesma trajetória $\mathcal{C}$ já que descrevemos o mesmo sistema dinâmico. Devido às variações de ambas ações, (2.23) e (2.19), que somente produzem contribuição dos extremos da trajetórias, temos que a diferença entre elas deve ser, também, dependente desses pontos. Equivalentemente

$$P_i \dot{Q}^i(t, Q^j, P_j) - \bar{H}(t, Q^j, P_j) = p_i \dot{q}^i(t, q^j, p_j) - H(t, q^i, p_i) + \frac{dF}{dt}. \tag{2.24}$$

A função $F = F(t, q^i, p_i, Q^i, P_i)$ envolve as $4N + 1$ coordenadas, mas como temos $2N$ transformações (2.22) a função F também chamada de Função Geratriz, deve possuir somente $2N + 1$ variáveis independentes. Segue-se que existem quatro possibilidades para as variáveis dessa função $F_1 = F_1(t, q^i, Q^i)$, $F_2 = F_2(t, q^i, P_i)$, $F_3 = F_1(t, p_i, Q^i)$ e $F_4 = F_4(t, p_i, P_i)$.

Consideremos o caso $F = F_2(t, q^i, P_i)$ para o qual temos que

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial F_2}{\partial q^i} + \dot{P}_i \frac{\partial F_2}{\partial P_i}.$$

Seria interessante introduzir essa equação em (2.24) e comparar o lado direito e esquerdo da equação, para assim obter relações entre as variáveis canônicas. Contudo, esse processo não pode ser realizado devido a que o lado direito da equação ter o termo $\dot{P}_i$ o qual não está presente no lado esquerdo. Para superar esse problema, substraimos um termo para F_2, digamos P_iQ^i, de modo que

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial F_2}{\partial q^i} + \dot{P}_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i} - Q^i \right) - \dot{Q}^i P_i, \tag{2.25}$$

nessa expressão estamos considerando que $Q^i = Q^i(t, q^j, p_j = p_j(t, q^k, P_k))$. Agora escrevemos (2.25) em (2.24) e comparamos, assim obtemos

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \tag{2.26a}$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{2.26b}$$

Das primeiras duas relações (2.26a) obtemos uma expressão para q^i e p_i em termos das novas variáveis. Essas expressões podem ser substituídas em (2.26b) para assim obter uma regra para o novo Hamiltoniano.

Um exemplo desse tipo de Função Geratriz pode ser a descrita por $F_2 = P_i g(q^i)$, em que g é uma função arbitrária de q^i. Neste caso, (2.26a) representa a chamada transformação pontual $Q^i = g(q^i)$, $p_i = P_i$ e o novo Hamiltoniano tem a forma

$$\bar{H}(t, Q^i, P_i) = H(t, q^i = g^{-1}(Q^i), p_i = P_i).$$

Um dos principais objetivos da transformação (2.22) é tentar obter um sistema de Equações de Hamilton simples de resolver. Evidentemente que podemos atingir isso se considerarmos que as novas variáveis canônicas são constantes, isto é $Q^i = \alpha^i$ e $P_i = \beta^i$. Nesse caso definimos a função $S\,(t, q^i) \equiv F_2(t, q^i, P_i = \beta^i)$, tal que (2.26a) se torne

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \quad \alpha^i = \frac{\partial S}{\partial \beta^i},$$

e a Função Geratriz tem que satisfazer a chamada Equação de Hamilton-Jacobi

$$H\left(t, q^i, p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Na seção [2.4] obteremos essa mesma equação, mas sob outro ponto de vista.

Equação de Lie e o Teorema de Noether

Nas secções prévias, estudamos o princípio variacional com o objetivo de obter a equação de movimento de um dado sistema físico, mas o verdadeiro alcance do princípio variacional estudado consiste em que ele também pode ser utilizado para deduzir as simetrías do sistema. Consideremos o Princípio de ação de Weiss (2.15), observa-se que se tomarmos as variações infinitesimais total ao longo da trajetória física, temos que

$$\delta W[q^i_{phys}] = \int_{t_0}^{t_f} dt \frac{d}{dt} G = 0 \leftrightarrow G(t_f) = G(t_0). \tag{2.27}$$

Portanto, para uma variação específica ao longo da trajetória física, temos que $G(t)$ torna-se uma constante no tempo, isto é, uma constante do movimento. Generalizamos esta ideia como segue: Consideremos uma transformação (2.3), ou equivalentemente suas variações δt e δq^i. Dizemos que o funcional de ação é $W[q]$ é quasi-invariante sob essa transformação específica se

$$\delta W[q^i] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\bar{\delta} q^i \mathbb{E}_i + \frac{dG}{dt} \right] = \int_{t_0}^{t_f} dt \frac{d}{dt} F, \tag{2.28}$$

onde $F = F(t, q^i, \dot{q}^i)$. Caso $F = 0$ dizemos que a ação é invariante. Nota-se que como esta afirmação é satisfeita ao longo da evolução temporal do sistema, temos que

$$\bar{\delta} q^i \mathbb{E}_i + \frac{dG}{dt} = 0. \tag{2.29}$$

Essa última relação é chamada de Equação diferencial de Lie, ou simplesmente Equação de Lie. As variações δt e δq^i que satisfazem (2.22) são chamadas de simetrias do sistema. Por exemplo, se o funcional de ação é invariante sob translações temporais ($\delta t = \epsilon, \delta q^i = 0$) temos que $G = -H$ é uma constante do sistema, isto é, a energia é conservada. Para translações espaciais ($\delta t = 0, \delta q^i = \epsilon^i$) temos que o momento canônico $G = p_i$ é conservado.

O problema inverso também é de interesse. Considerando que temos um conjunto de variações δt e $\bar{\delta} q^i$ conhecidas, podemos utilizar a Equação de Lie para construir Lagrangianas invariantes sob este grupo de transformações dadas. Para visualizar melhor este procedimento re-escrevemos a Equaçõ de Lie usando (2.7a)

$$\delta W[q^i] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\bar{\delta} q^i \mathbb{E}_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \bar{\delta} q^i + L \delta t \right) \right],$$

logo, se conhecemos qual tipo de transformação deixa o sistema invariante, a equação diferencial para a Lagrangiana é

$$\bar{\delta} q^i \mathbb{E}_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \bar{\delta} q^i + L \delta t \right) = 0. \tag{2.30}$$

Por exemplo, vamos considerar o grupo de transformações de Galileo, que consiste em translações temporais, translações espaciais, rotações espaciais e translações de velocidades. É conhecido que a Lagrageana $L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$ invariante sob translações temporais $L(q^i, \dot{q}^i, t) = L(q^i, \dot{q}^i, t+\epsilon)$ conserva sua energia e não depende, explicitamente, da variável temporal. Analogamente, a invariância sob translações espaciais elimina a dependencia explícita na coordenada q^i. Com essas restrições e considerando que o outro subgrupo de transformações de Galileo consideram as variações a tempo fixo $\delta t = 0$, escrevemos a Equação de Lie como

$$-\ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \bar{\delta} q^i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \bar{\delta} q^i \right) = 0,$$

onde $L = L(\dot{q}^i)$. Percebemos que parte do segundo termo da direita da equação se elimina com o primeiro termo, resultando em

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} \bar{\delta} q^i = 0. \tag{2.31}$$

Substituindo uma rotação infinitesimal $\bar{\delta}q^i = \omega^{ij}\dot{q}^j$ em (2.31) a solução não trivial que obtemos é que o momento canônico deve ter a mesma direção que a velocidade $p_i = \partial L/\partial\dot{q}^i = M\dot{q}^i$. Desse modo, obtemos a Lagrangiana da partícula livre $L = M\dot{q}^i\dot{q}^i/2$. Finalmente, notamos que sob translações a velocidade constante $\delta q^i = \lambda^i t$, com λ^i constante, o sistema é quase-invariante. Em [44] também se constroi a Lagrangiana da partícula livre a partir do grupo de transformações de Galileo, mas nesse caso, se considera que este grupo deixa invariante as equações de Euler-Lagrange.

Existem ainda mais aplicações do Princípio de ação de Weiss, por exemplo, podemos considerar variações nulas nas coordenadas fixas $\delta\bar{q}^i = 0$ mas mantendo variações temporais δt dessa forma, o "Hamiltoniano"é a constante de energía $H = E$. Nesse caso reproduzce-se o Princípio de ação de Maupertuis [45]. O Princípio de ação de Weiss foi generalizado por Schwinger ao considerar a Lagrangiana como função da variável tempo t, a coordenada generalizada q^i, sua respeitiva velocidade $\dot{q}^i$, assim como seu momento conjugado p_i. Esse último procedimento é análogo ao formulado por Routh na Mecânica Clássica (veja [45]), considerado útil em casos em que existam coordenadas cíclicas, isto é, aquelas cujos momentos conjugados são constantes.

As aplicações mais importantes da Equação de Lie podem ser encontradas em Teoria de Campos. Mostraremos a seguir o uso dessa equação para a obtenção da versão simetrizada do tensor de energia-momento canônico.

2.2.1 O campo de Proca: Equação de Lie e simetrização do tensor de Energia-Momento

Por questão de clareza, estudamos as variações totais no contexto da Mecânica Clássica e assim poder explorar alguns tópicos que são geralmente ignorados, como o uso da Equação de Lie para a construção de Lagrangianas e sua íntima relação com o Teorema de Noether. A descrição clássica também irá nos permitir estudar alguma das características do formalismo de Hamilton-Jacobi numa seção posterior. Por outro lado, podemos estender esse estudo clássico para um tratamento em Teoria de Campos. Isto é possível devido a existência de uma analogía direta entre essas teorias. Em vez de etiquetar q^i, a trajetória como variável fundamental para o estudo do sistema dinâmico, consideraremos agora um conjunto de campos $\psi_A(x)$, onde $A = 1, ..., N$. Estes campos são definidos em uma região D dimensional do espaço-tempo Ω, onde nos também definimos o funcional de ação

$$W[\psi_A] \equiv \int_\Omega d^D x \mathcal{L}(x, \psi_A(x), \partial_\mu \psi_A(x)),$$

nota-se que a função Lagrangiana é agora substituída pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \psi_A, \partial_\mu \psi_A).$$

Como exemplo do uso das variações totais, assim como da Equação de Lie em Teoria de Campos, vamos considerar o modelo de Proca [46], que possui a seguinte ação

$$W[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right), \tag{2.32}$$

onde o tensor $F_{\mu\nu}$ é definido como

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.33}$$

Nesse caso, a variável dinâmica é o vector com componentes A_μ. A variação total é dada por

$$\begin{aligned} \delta W &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + m A^\mu \delta A_\mu \right) \\ &\quad + \int d^4x \partial_\alpha \delta x^\alpha \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right). \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito da equação representa a variação na forma da densidade Lagrangiana, enquanto que o segundo termo é a contribuição da variação no volume de integração. Lembremos que uma vez que não estamos usando variações a ponto fixo, a variação δ e as derivadas parciais ∂_μ não comutam, de fato, temos que

$$\delta \partial_\mu A_\nu = \partial_\mu \delta A_\nu - (\partial_\mu \delta x^\alpha) \partial_\alpha A_\nu. \tag{2.34}$$

Usando (2.34) e realizando derivações por partes para assim separar as variações arbitrárias δx^μ e δA_μ obtemos

$$\delta W = \int d^4x = \left[\delta A_\nu \left(\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu \right) + \delta x^\alpha \partial_\mu \Theta^\mu{}_\alpha + \partial_\mu \left(F^{\nu\mu} \delta A_\nu - \delta x^\alpha \Theta^\mu{}_\alpha \right) \right],$$

onde temos definido o tensor

$$\Theta^\mu{}_\alpha \equiv -F^{\mu\nu} \partial_\alpha A_\nu + \frac{1}{4} \delta^\mu_\alpha F^{\nu\beta} F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} m^2 \delta^\mu_\alpha A_\nu A^\nu. \tag{2.35}$$

Esse tensor não é simétrico e é usualmente mal chamado de tensor de energia-momento canônico do campo de Proca [47]. Além disso se consideramos $m^2 = 0$ na densidade Lagrangiana (2.32), o campo de Proca torna-se o campo Electromagnético. Nesse caso, o tensor correspondente, $\Theta^\mu{}_\alpha(m^2 = 0)$ in (2.35), é o tensor de energia-momento canônico, e ainda assim não é simétrico. O método de simetrização de Belinfante [32] requer o uso de termos de divergência. Nas etapas seguintes, vamos mostrar como obter a expressão correta e simetrizada para o tensor de energia-momento sem utilizar o método de Belinfante, apenas o Princípio Variacional. Desse modo, identificamos primeiro o Gerador, ou densidade Geradora, como

$$\mathcal{G}^\mu \equiv F^{\nu\mu} \delta A_\nu - \delta x^\alpha \Theta^\mu{}_\alpha, \tag{2.36}$$

tal que a Equação de Lie é dada por

$$\Delta \mathcal{L} = \delta A_\nu \left(\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu \right) + \delta x^\alpha \partial_\mu \Theta^\mu{}_\alpha + \partial_\mu \mathcal{G}^\mu. \tag{2.37}$$

Quando escrevemos $\Delta\mathcal{L} = 0$, indicamos a invariância da ação sobre algum grupo especial de variação. A Equação de Euler-Lagrange é obtida ao considerar um volume fixo de integração, também chamada variação a ponto fixo, $\delta x^\alpha = 0$, tal que a variação total no campo é equivalente à variação fixa $\delta A_\nu = \bar{\delta} A_\nu$. Sob essas condições (2.37) produz

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \tag{2.38}$$

De (2.38) e devido a antisimetria do tensor $F_{\mu\nu}$ temos como consequência $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Consideremos agora a transformação de Poincaré

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \varepsilon^\mu, \tag{2.39}$$

onde $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ e ε^μ são parâmetros constantes e independentes. A transformação de Poincaré induz uma transformação no campo vetorial $A'_\mu(x') = (\partial x^\nu / \partial x'^\mu) A_\nu(x)$, tal que a variação em A_μ é dada por

$$\delta A_\mu = -(\partial_\mu \delta x^\alpha) A_\alpha. \tag{2.40}$$

Substituindo (2.40) na equação de Lie e considerando que essa transformação deixa invariante a teoria, $\Delta\mathcal{L} = 0$, escrevemos

$$0 = \partial_\mu \left(A_\alpha F^{\nu\mu} \partial_\nu \delta x^\alpha - \delta x^\alpha \Theta^\mu{}_\alpha \right) - A_\alpha \left(\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu \right) \partial_\nu \delta x^\alpha + \delta x^\alpha \partial_\mu \Theta^\mu{}_\alpha.$$

De novo, devido à antisimetria do tensor $F^{\nu\mu}$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu (A_\alpha F^{\nu\mu}) \partial_\nu \delta x^\alpha - \partial_\mu (\delta x^\alpha \Theta^\mu{}_\alpha) - A_\alpha \partial_\mu F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta x^\alpha \\ &\quad + m^2 A^\nu A_\alpha \partial_\nu \delta x^\alpha + \delta x^\alpha \partial_\mu \Theta^\mu{}_\alpha, \\ &= (\partial_\nu \delta x^\alpha) F^{\nu\mu} \partial_\mu A_\alpha + m^2 A^\nu A_\alpha \partial_\nu \delta x^\alpha - \partial_\mu (\delta x^\alpha \Theta^\mu{}_\alpha) + \delta x^\alpha \partial_\mu \Theta^\mu{}_\alpha. \end{aligned} \tag{2.41}$$

realizando derivação por partes podemos escrever (2.41) como

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left[\delta x^\alpha \left(F^{\mu\nu} \partial_\nu A_\alpha + m^2 A^\mu A_\alpha - \Theta^\mu{}_\alpha \right) \right] \\ &\quad - \delta x^\alpha \partial_\mu (F^{\mu\nu} \partial_\nu A_\alpha + m^2 A^\mu A_\alpha \delta x^\alpha - \delta x^\alpha \partial_\mu \Theta^\mu{}_\alpha). \end{aligned}$$

Portanto, a Equação de Lie tem agora a forma

$$\delta x^\alpha \partial_\mu T^\mu{}_\alpha + \partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0, \tag{2.42}$$

onde identificamos o tensor $T^\mu{}_\alpha$ como

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\alpha &\equiv F^{\mu\nu} \partial_\nu A_\alpha + m^2 A^\mu A_\alpha \delta x^\alpha - \delta x^\alpha \partial_\mu \Theta^\mu{}_\alpha, \\ &= F^{\mu\nu} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\alpha F^{\nu\beta} F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} m^2 \delta^\mu_\alpha A_\nu A^\nu + m^2 A_\alpha A^\mu. \end{aligned} \tag{2.43}$$

que mostra a expressão correta para o tensor de Energia-momento simetrizado do campo de Proca. Assim também, identificamos um novo Gerador $\mathcal{J}^\mu = \delta x^\alpha T^\mu{}_\alpha$, que tem que ser conservado devido à invariância do modelo de Proca sob transformações de Poincaré, como se pode

provar

$$\begin{aligned}\delta x^\alpha \partial_\mu T^\mu{}_\alpha &= \delta x^\alpha \left[\partial_\mu(F^{\mu\nu}F_{\nu\alpha}) + \frac{1}{4}\partial_\alpha(F^{\nu\beta}F_{\nu\beta}) - \frac{1}{2}m^2\partial_\alpha(A_\nu A^\nu) + m^2\partial_\mu(A_\alpha A^\mu)\right], \\ &= \delta x^\alpha F_{\nu\alpha}\partial_\mu F^{\mu\nu} + \delta x^\alpha \left[F^{\mu\nu}\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}F^{\nu\beta}\partial_\alpha F_{\nu\beta}\right] \\ &\quad + \delta x^\alpha \left[m^2 A^\nu\left(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu\right) + m^2 A_\alpha \partial_\mu A^\mu\right].\end{aligned}$$

Reordenamos essa expressão como

$$\begin{aligned}\delta x^\alpha \partial_\mu T^\mu{}_\alpha &= \delta x^\alpha F_{\nu\alpha}(\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2) + \delta x^\alpha m^2 A_\alpha \partial_\mu A^\mu \\ &\quad + \delta x^\alpha \left[F^{\mu\nu}\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}F^{\nu\beta}\partial_\alpha F_{\nu\beta}\right].\end{aligned}$$

Finalmente, nota-se que o último termo do lado direito da equação pode-se escrever como

$$\begin{aligned}E &= \delta x^\alpha \left[F^{\mu\nu}\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}F^{\nu\beta}\partial_\alpha F_{\nu\beta}\right] \\ &= \delta x^\alpha \left[\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}F^{\nu\mu}\partial_\nu F_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}F^{\nu\mu}\partial_\alpha F_{\nu\mu}\right],\end{aligned}$$

e devido à antisimetria do tensor $F^{\mu\nu}$ temos que

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}\delta x^\alpha F^{\mu\nu}\left[\partial_\mu F_{\nu\alpha} - \partial_\nu F_{\mu\alpha} - \partial_\alpha F_{\nu\mu}\right], \\ &= \frac{1}{2}\delta x^\alpha F^{\mu\nu}\left[\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu}\right].\end{aligned}$$

Definamos $B_{\mu\nu\alpha} \equiv \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu}$, de modo que temos

$$\delta x^\alpha \partial_\mu T^\mu{}_\alpha = \delta x^\alpha F_{\nu\alpha}(\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2) + \frac{1}{2}\delta x^\alpha F^{\mu\nu}B_{\mu\nu\alpha} + \delta x^\alpha m^2 A_\alpha \partial_\mu A^\mu, \tag{2.44}$$

onde escrevemos $\delta x^\alpha \partial_\mu T^\mu{}_\alpha$ como uma combinação de expressões fundamentais da teoria. Sempre que a Equação de Euler-Lagrange para o campo de Proca for válida, isto é, no campo físico temos $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 = 0$ e $\partial_\mu A^\mu = 0$. Como também temos que $B_{\mu\nu\alpha} = 0$ é sempre satisfeito devido à definição do tensor $F_{\mu\nu}$. Essa expressão é chamada de Identidade de Bianchi, devido à sua semelhança geométrica com a identidade do mesmo nome na teoria da Gravitação. Sobre o campo físico temos que a lado direito da equação (2.44) é nulo, portanto, substuindo na equação de Lie obtemos

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0.$$

O Gerador $\mathcal{J}^\mu = \delta x^\alpha T^\mu{}_\alpha$ é agora uma corrente conservada. Este resultado é similar ao obtido em [48].

2.3 A estrutura do Espaço de Fase

No Espaço de Fase definimos os Parênteses de Poisson para duas funções diferenciáveis $A = A(q^i, p_i, t)$ e $B = B(q^i, p_i, t)$ como

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i}\frac{\partial A}{\partial p_i}, \tag{2.45}$$

a partir da qual se mostra que essa expressão algébrica é antisimétrica nos seus argumentos, assim como sua linearidade em A e B. Adicionalmente temos a Identidade de Jacobi

$$\{A,\{B,C\}\}+\{B,\{C,A\}\}+\{C,\{A,B\}\}=0, \tag{2.46}$$

e a regra do produto $\{AB,C\}=A\{B,C\}+\{A,C\}B$. Particularmente, quando avaliamos esses parênteses nas variáveis canônicamente conjugadas q^i e p_i obtemos os chamados parênteses fundamentais $\{q^i,q^j\}=\{p_i,p_j\}=0$ e $\{q^i,p_j\}=\delta^i_j$. A evolução temporal de quaisquer função bem definida no Espaço de Fase se escreve como

$$\frac{dF}{dt}=\{F,H\}+\frac{\partial F}{\partial t}.$$

Mesmo que às vezes seja útil diferenciar entre o par canônico q^i e p_i, essas podem ser consideradas como componentes de uma nova variável $z^\mu\equiv(q^1,...,q^N,p_1,...,p_N)$. Nesse caso, o Parêntese de Poisson pode ser reescrito como

$$\{A,B\}=\varepsilon^{\mu\nu}\frac{\partial A}{\partial z^\mu}\frac{\partial B}{\partial z^\nu}, \tag{2.47}$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu}$ são os elementos da matriz antisimétrica $2N\times 2N$

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}0_N & 1_N\\ 1_N & 0_N\end{pmatrix}, \tag{2.48}$$

onde denotamos por 0_N e 1_N as $N\times N$ matrices nula e identidade, respectivamente. Também satisfaz $\varepsilon^2=-1$ e, $\varepsilon^T=-\varepsilon$, ou em termos das componentes $\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon^{\nu\gamma}=\delta^\gamma_\mu$. Nota-se que o Parêntese de Poisson fundamental é dado por $\{z^\mu,z^\nu\}=\varepsilon^{\mu\nu}$ e a Equação de Hamilton se escreve como

$$\dot{z}^\mu=\{z^\mu,H\}=\varepsilon^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial z^\nu}. \tag{2.49}$$

Uma transformação $\bar{z}^\mu=T^\mu(z^\nu)$ é chamada canônica caso o Parêntese de Poisson seja invariante, isto é

$$\{\bar{z}^\mu,\bar{z}^\nu\}=\varepsilon^{\mu\nu}. \tag{2.50}$$

Inversamente, podemos dizer que qualquer transformação $\bar{z}^\mu=T^\mu(z^\nu)$ será canônica se satisfazer a seguinte condição

$$\varepsilon^{\mu\nu}=\left\{z^\alpha\frac{\partial T^\mu}{\partial z^\alpha},z^\beta\frac{\partial T^\nu}{\partial z^\beta}\right\}=\frac{\partial T^\mu}{\partial z^\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial T^\nu}{\partial z^\beta}. \tag{2.51}$$

Desde que a identidade é uma transformação canônica, podemos explorar as propriedades das transformações infinitesimais $\bar{z}^\mu=z^\mu+\delta z^\mu$. Essas transformações têm que satisfazer a condição

$$\varepsilon^{\mu\nu}=\left(\delta^\mu_\alpha+\frac{\partial\delta z^\mu}{\partial z^\alpha}\right)\varepsilon^{\alpha\beta}\left(\delta^\nu_\beta+\frac{\partial\delta z^\nu}{\partial z^\beta}\right),$$

que, até a primeira ordem nas variações, torna-se

$$0=\varepsilon^{\gamma\nu}\frac{\partial\delta z^\mu}{\partial z^\gamma}+\varepsilon^{\mu\gamma}\frac{\partial\delta z^\nu}{\partial z^\gamma}.$$

Multiplicando por $\varepsilon_{\alpha\nu}\varepsilon_{\beta\mu}$ e das propriedades da matriz ε, a condição para se obter uma transformação canônica infinitesimal se reescreve como

$$\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\left(\varepsilon_{\beta\mu}\delta z^{\mu}\right)=\frac{\partial}{\partial z^{\beta}}\left(\varepsilon_{\alpha\mu}\delta z^{\mu}\right),$$

que é válida sempre que escolhemos uma função $G^{can}(z)$ de tal modo que

$$\varepsilon_{\alpha\mu}\delta z^{\mu}=\frac{\partial G^{can}(z)}{\partial z^{\alpha}}. \tag{2.52}$$

Portanto, uma transformação canônica infinitesimal tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}\bar{z}^{\mu} &= z^{\mu}+\varepsilon^{\alpha\mu}\frac{\partial G^{can}(z)}{\partial z^{\alpha}}=z^{\mu}+\left\{z^{\mu},G^{can}\right\},\\ &= z^{\mu}+\theta\left\{z^{\mu},G_{\theta}^{can}\right\}.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Onde escrevemos a função G^{can}, o gerador das transformações canônicas infinitesimais, como função do parâmetro θ, isto é, $G^{can}=\theta G_{\theta}^{can}$. A variação ao longo desse parâmetro θ pode ser definida como $\delta_{\theta}G^{can}\equiv\theta\left\{z^{\mu},G_{\theta}^{can}\right\}$, o que gera um cambio sob quaisquer função no Espaço de Fase da forma

$$\begin{aligned}\delta_{\theta}F(z^{\mu}) &= F(z^{\mu}+\delta_{\theta}z^{\mu})-F(z^{\mu})=\theta\delta_{\theta}z^{\mu}\frac{\partial F}{\partial z^{\mu}},\\ &= \theta\left\{F,G^{can}\right\}.\end{aligned} \tag{2.54}$$

A partir dessa relação podemos concluir que se $\{F,G^{can}\}=0$, a função F se torna uma invariante sob transformações canônicas. Observe que se escrevemos $F=H$, o gerador da transformação canônica comuta com o Hamiltoniano $\{H,G^{can}\}=0$ e é portanto uma quantidade conservada

$$\frac{d}{dt}G^{can}=0.$$

Agora, se considerarmos o Hamiltoniano como gerador das transformações canônicas $G^{can}=H$, esse irá produzir a seguinte variação nas variáveis canônicas

$$\delta_{\theta}z^{\mu}=\theta\left\{z^{\mu},H\right\}=\theta\frac{dz^{\mu}}{dt},$$

por outro lado, das relações obtidas na equação (2.53) temos

$$\frac{dz^{\mu}}{dt}=\varepsilon^{\alpha\mu}\frac{\partial H}{\partial z^{\alpha}}. \tag{2.55}$$

Esta equação tem como solução

$$z^{\mu}=z_{0}^{\mu}+\varepsilon^{\alpha\mu}\frac{\partial H}{\partial z^{\alpha}}t, \tag{2.56}$$

da qual vemos que a evolução do sistema é um desdobramento de uma transformação canônica, ou que o Hamiltoniano é quem gera a variação temporal ao longo de toda a trajetória.

As transformações canônicas foram definidas como as transformações que deixam a estrutura do Parêntese de Poisson invariante, mas, o que pode ser dito sobre a estrutura da Equações de Hamilton? Para investigar isto procedemos em considerar a transformação $\bar{z}^{\mu}=\bar{z}^{\mu}(z^{\nu},t)$,

para a qual associamos a Hamiltoniana $\bar{H} = \bar{H}(\bar{z}^\mu, t)$. Como a evolução temporal das novas variáveis $\bar{z}^\mu$ é dada por

$$\frac{d}{dt}\bar{z}^\mu = \{\bar{z}^\mu, H\} + \frac{\partial \bar{z}^\mu}{\partial t} = \varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{z}^\mu}{\partial z^\alpha}\frac{\partial H}{\partial z^\beta} + \frac{\partial \bar{z}^\mu}{\partial t}, \tag{2.57}$$

e, por outro lado, se essa evolução corresponde à definida pela nova função Hamiltoniana, temos

$$\frac{d}{dt}\bar{z}^\mu = \varepsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}^\alpha}. \tag{2.58}$$

Comparando ambas equações, (2.57) e (2.58), obtemos que

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}^\mu} = \varepsilon_{\mu\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{z}^\gamma}{\partial z^\alpha}\frac{\partial H}{\partial z^\beta} + \varepsilon_{\mu\alpha}\frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial t}. \tag{2.59}$$

Claramente, o novo Hamiltoniano $\bar{H}$ deve satisfazer $\partial^2\bar{H}/\partial\bar{z}^\mu\partial\bar{z}^\nu = \partial^2\bar{H}/\partial\bar{z}^\nu\partial\bar{z}^\mu$. Essa condição é necessária e suficiente para garantir a existência do novo Hamiltoniano. Portanto, temos que satisfazer

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\left(\varepsilon_{\mu\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{z}^\gamma}{\partial z^\alpha}\frac{\partial H}{\partial z^\beta} + \varepsilon_{\mu\alpha}\frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}\left(\varepsilon_{\nu\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{z}^\gamma}{\partial z^\alpha}\frac{\partial H}{\partial z^\beta} + \varepsilon_{\nu\alpha}\frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial t}\right),$$

e, multiplicando por $\partial\bar{z}^\mu/\partial z^\rho.\partial\bar{z}^\nu/\partial z^\lambda$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial z^\lambda}\left(\varepsilon_{\mu\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{z}^\gamma}{\partial z^\alpha}\frac{\partial H}{\partial z^\beta} + \varepsilon_{\mu\alpha}\frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial \bar{z}^\mu}{\partial z^\rho} = \frac{\partial}{\partial z^\rho}\left(\varepsilon_{\nu\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{z}^\gamma}{\partial z^\alpha}\frac{\partial H}{\partial z^\beta} + \varepsilon_{\nu\alpha}\frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial \bar{z}^\nu}{\partial z^\lambda}. \tag{2.60}$$

Nesse ponto é conveniente definir a seguinte quantidade

$$L^{\mu\nu} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial z^\mu}\frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial z^\nu}. \tag{2.61}$$

e com essa definição vamos reescrever a equação (2.60) como

$$\frac{\partial}{\partial t}L_{\rho\lambda} + \{L_{\rho\lambda}, H\} + \varepsilon^{\alpha\beta}\left(L_{\rho\alpha}\frac{\partial H}{\partial z^\beta \partial z^\lambda} - L_{\beta\lambda}\frac{\partial H}{\partial z^\alpha \partial z^\rho}\right) = 0. \tag{2.62}$$

Nota-se que, como cada termo do lado esquerdo da equação envolve diferentes ordens de derivadas de H, para poder satisfazer a condição (2.62) para todo Hamiltoniano, cada um desses termos deverão ser nulos. Do primeiro termo temos que $L_{\rho\lambda}$ deve ser independente do tempo e, do Parêntese de Poisson $\{L_{\rho\lambda}, H\} = 0$, devemos ter que $L_{\rho\lambda}$ seja independente dos z^α também. Finalmente, ajustando a zero o terceiro termo temos que $L_{\rho\lambda} = k\varepsilon_{\rho\lambda}$, onde k é uma constante.

Para entender o que estas condições significam, definimos os chamados Parênteses de Lagrange para um conjunto de funções independentes $F_\mu = F_\mu(z^\alpha)$ como

$$[F_\mu, F_\nu]_z \equiv -\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial z^\alpha}{\partial F_\mu}\frac{\partial z^\beta}{\partial F_\nu}, \tag{2.63}$$

essa estrutura é antisimétrica e também satisfaz $[F_\mu, F_\alpha]_z \{F_\alpha, F_\nu\} = -\delta_{\mu\nu}$. Em particular, essa última propriedade é importante porque nos permite identificar o Parêntese de Lagrange

como o inverso do Parêntese de Poisson. Agora consideremos uma transformação canônica e calculemos o Parêntese de Lagrange nas novas variáveis

$$[F_\mu, F_\nu]_{\bar{z}} = -\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial F_\mu}\frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial F_\nu} = -\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial z^\rho}\frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial z^\gamma}\frac{z^\rho}{\partial F_\mu}\frac{z^\gamma}{\partial F_\nu}, \tag{2.64}$$

e, de (2.50) temos $[F_\mu, F_\nu]_{\bar{z}} = [F_\mu, F_\nu]_z$. Portanto, o Parêntese de Lagrange é independente de uma escolha em particular de variáveis canônicas utilizadas.

Assim, reconhecemos $L^{\rho\lambda}$, de (2.61), como o Parêntese de Lagrange dos z^α com respeito as novas variáveis $\bar{z}^\alpha$, e a condição (2.62) se escreve

$$L^{\rho\lambda} \equiv \left[z^\rho, z^\lambda\right]_{\bar{z}} = k\varepsilon_{\rho\lambda}, \tag{2.65}$$

tornando-se assim condição para uma transformação canônica se escolhemos $k = 1$. Existem outras possibilidades, como a dilatação $\bar{z}^\rho = \sqrt{k}z^\rho$ ou a troca de variáveis canônicas $\bar{q} = p, \bar{p} = q$, ainda que essas últimas transformações não sejam estritamente canônicas.

2.4 O formalismo de Hamilton-Jacobi

O procedimento para a obtenção da equação de Hamilton-Jacobi que mostramos anteriormente teve o seguinte roteiro: Partindo de uma descrição Lagrangiana, definimos as variáveis canônicas e efetuamos uma transformação de Legendre, para assim obter o formalismo Hamiltoniano. Enseguida, efetuamos uma transformação canônica que nos leva a um Hamiltiano nulo. Essa transformação é realizada através da função F_2 introduzida segundo o Principio de ação de Weiss.

Carathéodory desenvolveu outra forma para obter a Equação de Hamilton-Jacobi. Este novo método é baseado na construção de Lagrangianas que produzem as mesmas equações de movimento. Essas Lagrangianas, chamadas de equivalentes, são construídas mediante a adição de uma derivada temporal total de uma função $S = S(t, q^i)$. Ele provou que, a fim de obter um extremo do funcional de ação é necessário que S satisfaça a equação de Hamilton-Jacobi. Essa equação está relacionada às equações de movimento de Hamilton devido à conexão entre as equações diferenciais parciais de primeira ordem e um sistema de equações diferenciais ordinárias, ou seja as Equações Características do sistema. Em contraste com o Princípio Variacional apresentado nas seções precedentes, o formalismo desenvolvido pelo Carathéodory é exclusivo para sistemas regulares, e a adequada generalização para sistemas vinculados será apresentada no próximo capítulo.

2.4.1 Lagrangianas equivalentes e a equação de Hamilton-Jacobi

Consideremos dois funções Lagrangianas, L e L^*, tal que suas respectivas equações de movimento são exatamente iguais, isto é, a forma funcional de suas respectivas expressões de

Euler-Lagrange são as mesmas $\mathbb{E}_i = \mathbb{E}_i^*$. Escrevendo explicitamente a derivada temporal total da expressão de Euler-Lagrange (2.11) obtemos

$$\mathbb{E}_i - \mathbb{E}_i^* = \frac{\partial \Lambda}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \ddot{q}^j \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0, \tag{2.66}$$

onde $\Lambda\left(t, q^i, \dot{q}^i\right) = L - L^*$. Para essas equações funcionais podemos estabelecer como nulo o coeficiente de $\ddot{q}^j$. Desse modo reduzimos drasticamente a forma de Λ, pois

$$\Lambda = \dot{q}^i A_i(q^j, t) + B(q^j, t), \tag{2.67}$$

onde A_i e B são funções arbitrárias. Substituindo essas expressões em (2.66), obtemos a seguinte condição

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial q^i} = 0. \tag{2.68}$$

Resolvemos a equação (2.68) considerando a existência de uma função, digamos $S = S(t, q^i)$, tal que

$$A_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \quad B = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Embora não tenhamos resolvido completamente (2.66), temos determinado uma forma funcional para $\Lambda\left(t, q^i, \dot{q}^i\right)$ como

$$\Lambda = \dot{q}^i \frac{\partial S}{\partial q^i} + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Portanto, a função L^* torna-se

$$L^*(t, q^i, \dot{q}^i) = L(t, q^i, \dot{q}^i) - \frac{\partial S}{\partial t} - \dot{q}^k \frac{\partial S}{\partial q^k} = L - \frac{dS}{dt}. \tag{2.69}$$

Diferentemente da seção anterior, aqui só estamos modificando a forma da Lagrangiana, deixando a variável temporal, assim como as coordenadas generalizadas e suas derivadas inalteradas. Desde que a construção de Lagrangianas equivalentes (2.69) seja baseada em

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = \frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j},$$

notamos a estreita relação com a condição Hessiana. A inclusão de uma derivada temporal total na Lagrangiana não muda seu caráter regular ou singular.

A equivalência das equações de Euler-Lagrange também pode ser analisada diretamente pelo Princípio Variacional. O funcional de ação para a nova Lagrangiana é dado por

$$W^*[q^i] = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[L(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)) - \frac{d}{dt} S(q^i, \dot{q}^i(t)) \right],$$

de modo que a mudança no funcional de ação para uma mesma trajetória $q^i(t)$ é

$$W[q^i] = W^*[q^i] + S(t_0) - S(t_f). \tag{2.70}$$

Considerando a variação ao redor da trajetória física, tal que, o funcional de ação seja estacionário $\delta W[q^i_{phys}] = 0$, o novo funcional também será estacionário, desde que as variações

no contorno da função S sejam nulas. Dizemos que as contribuições das derivadas totais na ação mantêm inalteradas as equações de movimento. A afirmação inversa também é satisfeita, a trajetória física que extremiza $\bar{W}[q^i]$ também extremiza o funcional da ação original.

Agora, consideremos para uma trajetória dada $q^i(t)$ uma função $z^i = z^i(t, q^j)$. Essa função z^i é chamada de campo geodésico se satisfazer $\dot{q}^i = z^i(t, q^j)$, isto é, um campo geodésico é um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem e que pode ser integrado tal que obtemos uma família de curvas $\mathcal{C} : q^i = q^i(t)$. Assumiremos as seguintes condições para a Lagrangiana $\bar{L}$ sobre o campo geodésico

$$L^*(t, q^i, \dot{q}^i = z^i(t, q^j)) = 0, \tag{2.71}$$

e $\bar{L} > 0$, caso contrário. Consideremos uma curva $\mathcal{K}_1$ da família $\mathcal{C}$, e avaliamos no funcional de ação

$$W^*[\mathcal{K}_1 : q^i] = \int_{t_0}^{t_f} dt L^*(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)) = 0,$$

enquanto que para outra curva $\mathcal{K}_2$ que possui iguais pontos de contorno de $\mathcal{K}_1$ em t_f e t_0 temos

$$W^*[\mathcal{K}_2 : q^i] = \int_{t_0}^{t_f} dt L^*(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)) > 0.$$

Logo, a curva $\mathcal{K}_1$ solução do campo geodésico que extremiza o funcional de ação W, também extremizará W^*. Portanto, a trajetória $q^i(t)$ é um extremo sempre que suas velocidades são campos geodésicos. Sob essas circunstâncias a função Lagrangiana também tem que satisfazer

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^i}(t, q^i, \dot{q}^i = z^i(t, q^j)) = 0. \tag{2.72}$$

Essa condição impõe uma forte relação na forma da função $S = S(t, q^i)$, pois

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial S}{\partial q^i},$$

de modo que sob o campo geodésico temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial S}{\partial q^i}. \tag{2.73}$$

Voltando à equação (2.71), temos que $L(t, q^i, \dot{z}^i) - \dot{z}^k \partial S/\partial q^k - \partial S/\partial t = 0$ e, substituindo a condição (2.73), obtemos

$$\dot{z}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L(t, q^j, \dot{z}^j) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{2.74}$$

As equações (2.73), (2.74) assim como a existência do campo geodésico $\dot{q}^i = z^i(t, q^j)$ são pontos fundamentais da abordagem de Carathéodory ao formalismo de Hamilton-Jacobi. Contudo, a existência a priori do campo geodésico é uma imposição muito forte, pois este em geral é obtido quando resolvemos o sistema dinâmico. Podemos contornar esse problema introduzindo o momento canônico, que, ao longo do campo geodésico (2.73) resulta em

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left(t, q^j, \dot{q}^j\right) = \frac{\partial S}{\partial q^i}\left(t, q^j\right), \tag{2.75}$$

também definimos $p_0 = \partial S/\partial t$, tal que a equação (2.74) se torna

$$p_0 + \dot{z}^i p_i - L(t, q^j, \dot{z}^j) = 0. \tag{2.76}$$

Anteriormente já tinhamos visto que para sistemas regulares a condição Hessiana nos permitia escrever as velocidades em termos de momentos canônicos $\dot{q}^i = \phi^i(t, q^j, p_j)$, enquanto que da equação (2.75) temos também $p_i = \beta_i\,(t, q^j)$, combinando essas relações obtemos

$$\dot{q}^i = \phi^i(t, q^j, p_j = \beta_j\left(t, q^k\right)) = z^i(t, q^j), \tag{2.77}$$

determinando assim o campo geodésico. Para simplificar a notação, escrevemos $z^i = \dot{q}^i$ e da definição do Hamiltoniano canônico, temos que

$$H_0 \equiv p_0 + H(t, q^i, p_i = \partial S/\partial q^i) = 0. \tag{2.78}$$

Essa é uma equação parcial de primeira ordem para a função S, chamada de equação de Hamilton-Jacobi. Essa equação tem um significado geométrico interessante. Consideremos o caso no qual $q^i = x^i$ representa a coordenada de uma partícula num espaço tridimensional cartesiano. Conforme (2.75), as componentes do momento canônico são dadas por

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} \rightarrow \boldsymbol{p} = \nabla S.$$

Portanto, o momento canônico é perpendicular às superfícies equipotenciais de S, logo a trajetória física é representada por curvas ortogonais à superfície $S = constante$. A equação (2.75) é também conhecida como condição de transversalidade, mesmo que não estivéssemos utilizando coordenadas cartesianas.

Exemplo: Partícula carregada dentro de um campo magnético constante mais um potencial quadrático

A fim de esclarecer algumas ideias, consideraremos o modelo de uma partícula carregada, submetida a um campo magnético $\boldsymbol{B}$ mais um potencial quadrático; a Lagrangiana desse sistema é

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 + \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{A} - \frac{k}{2}\boldsymbol{x}^2, \tag{2.79}$$

onde consideramos que o movimento é num plano, tal que $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ é o vetor posição e $\boldsymbol{A}$ é o vetor potencial, relacionado a um campo magnético uniforme perpendicular ao plano de movimento mediante $\boldsymbol{A} = 1/2\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{x}$. Levamos em conta também as seguintes unidades $q = c = 1$. Para um campo magnético constante, existem dois tipos de escolha de calibre, a primeira chamada de calibre de Landau, $\boldsymbol{A} = 1/2\,(-Bx_2, 0)$ ou $\boldsymbol{A} = 1/2\,(0, Bx_1)$ e a segunda é a escolha do gauge simétrico $\boldsymbol{A} = 1/2\,(-Bx_2, Bx_1)$.

É importante mencionar que a versão quântica desse problema (com $k = 0$) no calibre de Landau foi resolvido em [49]; entretanto só no início dos anos oitenta Lauglin [50] resolveu esse problema no calibre simétrico e essa versão tem sido ampliamente utilizada para modelar o efeito Hall Quântico. A versão clássica deste problema não é trivial e seu tratamento

à la Hamilton-Jacobi não é estudado nos livros-textos. Iniciaremos seu estudo calculando o momento canônico

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial x_i} = m\dot{x}_i - \frac{B}{2}\varepsilon_{ij}x_j, \tag{2.80}$$

onde ε_{ij} é o símbolo de Levi-Civita, com $\varepsilon_{12} = 1$. A equação (2.80) representa uma relação que pode ser invertida para assim escrever a velocidade $\dot{x}_i$ em termos de p_i, tal relaçao é chamada de dinâmica. Nesse caso temos

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m}\left(p_i + \frac{B}{2}\varepsilon_{ij}x_j\right). \tag{2.81}$$

Como estudamos teorias regulares, podemos escrever a função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_i + \frac{B}{2}\varepsilon_{ij}x_j\right)^2 + \frac{k}{2}x_i^2. \tag{2.82}$$

Nota-se também que utilizamos simplemente os sub-índices desde que as coordenadas pertençem a um espaço Euclideano, logo, podemos subir e descer os índices sem nenhum problema de sinal. Queremos resolver a equação de Hamilton-Jacobi para $S = S(t, x_1, x_2)$, onde $p_i = \partial S/\partial x_i$. Escrevendo explicitamente todas as componentes, temos de (2.78) e (2.82) que

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{B}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2} - \frac{B}{2}x_1\right)^2 + \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 0. \tag{2.83}$$

Como a parte que representa a Hamiltoniana na equação de Hamilton-Jacobi não depende explicitamente da variável temporal, é razoável escrever o seguinte *ansätz* $S = -Et + W(x_1, x_2)$, onde E é uma constante arbitrária que a posteriori identificaremos como a energia do sistema. Temos que

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{B}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x_2} - \frac{B}{2}x_1\right)^2 + \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = E. \tag{2.84}$$

Lembremos que se $B = 0$ em (2.84), voltamos à equação de Hamilton-Jacobi para um oscilador harmônico. Nesse caso é possível escrever $W(x_1, x_2) = W_1(x_1) + W_2(x_2)$, ja que as componentes do vetor posição estão desacopladas. De fato, a maior parte dos exemplos dos livros-textos de mecânica clássica somente estudam modelos nos quais a separação de variável é possível. No nosso caso, não é possível utilizar tal *ansätz* com um sistema cartesiano a não ser escrevamos em coordenadas polares, onde $x_1 = r\cos\theta$ e $x_2 = r\sin\theta$. Um cálculo direto nos mostra que a equação de Hamilton-Jacobi (2.84) torna-se

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} - \frac{1}{2}Br^2\right)^2 + \frac{k}{2}r^2 = E, \tag{2.85}$$

onde $Z(r, \theta) = W(x_1, x_2)$. Mesmo que não seja tão evidente como no caso do oscilador harmônico, consideremos uma solução da forma $Z(r, \theta) = R(r) + \Theta(\theta)$. Essa suposição torna-se evidente se escrevemos (2.85) como

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \sqrt{2m\left(E - \frac{k}{2}r^2\right)r^2 - 2mr^2\left(\frac{dR}{dr}\right)^2} + \frac{1}{2}Br^2.$$

Uma vez que o lado esquerdo da equação é puramente dependente do argumento θ enquanto o lado direito depende simplesmente do variável radial r, temos que $\Theta = E_\theta \theta$, onde E_θ é uma constante, assim como a função R tem a seguinte forma integral

$$R = \int dr \sqrt{E - \frac{k}{2}r^2 - \frac{1}{2mr^2}\left(E_\theta - \frac{1}{2}Br^2\right)^2}. \tag{2.86}$$

Portanto, o uso das coordenadas polares é uma ferramenta importante para a solução da equação de Hamilton-Jacobi de uma partícula carregada num campo magnético constante já que nessas coordenadas se aproveita a simetria rotacional do calibre $\boldsymbol{A} = 1/2\,(-Bx_2, Bx_1)$. Há ainda uma outra transformação que separa as coordenadas de posição deste problema, e que será estudada na seguinte subseção.

2.4.2 Equações Características

Existe uma equivalência entre uma equação diferencial parcial de primeira ordem com um sistema de equações diferenciais ordinárias. Para entender essa equivalência precisamos do conceito de Curvas Características. Para poder entender melhor esse conceito e assim aplicá-lo ao formalismo de Hamilton-Jacobi, primeiro, consideramos um exemplo clássico utilizado em [51]. Consideremos a equação

$$a\frac{\partial S}{\partial q_1} + b\frac{\partial S}{\partial q_2} - c = 0,$$

onde a, b e c são funções de q_1, q_2 e S. Para uma solução dada $S = S(q_1, q_2)$ temos que um ponto no plano (q_1, q_2, S) possui um plano tangente cujo vetor normal (perpendicular) tem como componentes $(p_1 = \partial S/\partial q_1, p_2 = \partial S/\partial q_2, -1)$ as quais se relacionam pela equação $ap_1 + bp_2 - c = 0$. Um vetor tangente à solução da nossa equação considerada tem como componentes (a, b, c) e a solução $S = S(q_1, q_2)$ tem que ser a união de curvas desse vetor tangente. Chamamos a todas estas curvas de Curvas Características, e essas satisfazem, sob uma parametrização particular t, o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dq_1}{dt} = a, \frac{dq_2}{dt} = b, \frac{dS}{dt} = c.$$

Por conseguinte existe uma relação entre a equação de Hamilton-Jacobi e um conjunto de equações diferenciais. Mostraremos nesta seção que esse conjunto não é mais que as equações de movimento do formalismo Hamiltoniano. Para atingir isto, primeiro vamos derivar parcialmente e relação ao momento canônico p_i, a Equação de Hamilton-Jacobi, assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0}{\partial p_i} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left[p_j\phi^j - L(t, q^j, \phi^j)\right], \\ &= \phi^i + p_j\frac{\partial \phi^j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial q^j}\frac{\partial \phi^j}{\partial p_i} = \dot{q}^j, \end{aligned}$$

onde na última linha utilizamos a relação $\dot{q}^j = \phi^i$ assim como a definição do momento canônico. Portanto, obtemos

$$dq^i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}dt. \tag{2.87}$$

Por outro lado, da condição de transversalidade (2.75) temos que

$$dp_i = \left[\dot{q}^j \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i} + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\right] dt. \tag{2.88}$$

O segundo termo do lado direito da equação pode ser determinado a partir da equação de Hamilton-Jacobi, já que

$$\frac{\partial H_0}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) + \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j}\right) = 0, \tag{2.89}$$

e utilizando a equação (2.87) no terceiro termo, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) + \frac{\partial H}{\partial q^i} + \dot{q}^j\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j}\right) = 0, \tag{2.90}$$

combinando (2.89) e (2.90) em (2.88), resulta

$$dp_i = \frac{\partial H_0}{\partial q^i} dt. \tag{2.91}$$

As equações (2.87) e (2.91) são equivalentes às equações de Hamilton e são chamadas de Equações Características. Soluções dessas equações são as Curvas Características, que são geodésicas do sistema. Finalmente, diferenciando a função $S = S\left(t, q^j\right)$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial q^i} dq^i = -H dt + p_i dq^i, \tag{2.92}$$

onde no primeiro termo do lado direito usamos a equação de Hamilton-Jacobi (2.78), enquanto que para o segundo termo utilizamos a condição de transversalidade. Substituindo a equação (2.87) em (2.92) conseguimos escrever a função S dependente unicamente da variável temporal. Integrando obtemos

$$dS = \left[p_i \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - H\right] dt = \left[p_i \dot{q}^i - H\right] dt, \tag{2.93}$$

nota-se que essa expressão para S é análoga à obtida para o funcional de ação escrito na forma canônica.

Exemplo: Partícula carregada dentro de um campo magnético constante mais um potencial quadrático

Voltamos ao modelo anterior (2.79) que foi resolvido usando a equação de Hamilton-Jacobi em coordenadas polares. Também podemos fazer uso das Equações Características (2.87) e (2.91) para resolver esse problema em coordenadas cartesianas. Neste caso temos

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m}\left(p_i + \frac{B}{2}\varepsilon_{ij} x_j\right), \tag{2.94}$$

e

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{B}{2m}\left(\varepsilon_{ij} p_j - \frac{B}{2} x_i\right) - k x_i. \tag{2.95}$$

A Equação Característica (2.94) em perfeito acordo com (2.81), resultado da relação dinâmica do sistema. Além disso, podemos derivar mais uma vez e utilizar (2.95), de modo que obtemos a equação de movimento do sistema $m\ddot{x}_k = B\varepsilon_{ki}\dot{x}_i + kx_k$ ou

$$m\ddot{x}_1 = B\dot{x}_2 + kx_1, \tag{2.96a}$$

$$m\ddot{x}_2 = -B\dot{x}_1 + kx_2. \tag{2.96b}$$

Mais uma vez, a escolha do calibre simétrico acopla as coordenadas de nosso sistema (2.96). Contudo, neste caso podemos desacoplar essas equações introduzindo a variável complexa $z = x_1 + ix_2$, de modo que escrevemos

$$m\ddot{z} + iB\dot{z} - kz = 0,$$

a qual possui como solução

$$z = a_1 \exp iw_1 t + a_2 \exp iw_2 t, \tag{2.97}$$

onde a_1 e a_2 são constantes complexas, e

$$w_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4km}}{2m}.$$

Naturalmente, podemos voltar e obter as variáveis cartesianas pela transformação inversa $x_1 = (z + z^*)/2$, $x_2 = (z - z^*)/2i$. Também temos a variável $p_z \equiv m\dot{z} + iBz/2$ que possui como componentes cartesianas os momentos canônicos p_1 e p_2. Uma vez que temos a solução para z de (2.96), também temos solução para p_z e, assim também para todas as variáveis canônicamente conjugadas x_i e p_i. Podemos substituir as soluções para essas variáveis em (2.92), desse modo obtemos uma expressão para a função $S(x_1, x_2, t)$.

2.4.3 Integrabilidade

A equação de Hamilton-Jacobi (2.78) é uma equação diferencial parcial de primeira ordem para a função S e possui $N + 1$ variáveis, que são q^i e t. A fim de obter uma solução completa da Equação de Hamilton-Jacobi, temos que integrar $N + 1$ vezes por cada $p_i = \partial S/\partial q^i$ e $p_0 = \partial S/\partial t$. Portanto, teremos $N + 1$ constantes de integração. Porém, devido à presença de uma só derivada temporal partial da função S em (2.78), esta função só será determinada até uma constante, isto é, se S é uma solução, logo, $S + k$ é também uma solução. Uma das $N + 1$ constantes de integração tem que ser esta constante aditiva k, logo, a solução completa da equação de Hamilton-Jacobi tem a seguinte forma

$$S = S\left(t, q^i, \alpha^i\right). \tag{2.98}$$

Da definição de momento canônico se mostra que $p_i = p_i(t, q^i, \alpha^i)$. Por outro lado, da forma explícita da equação (2.98) podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha^i}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha^i}\right) + \dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha^i}\right), \tag{2.99}$$

enquanto que da equação de Hamilton-Jacobi obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha^i}\right) &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha^i}\left(t, q^i, p_i = \partial S/\partial q^i\right), \\ &= -\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial \alpha^i} = -\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j}.\end{aligned}$$

Usando esta última relação juntamente com (2.87) em (2.99), temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha^i}\right) = 0, \tag{2.100}$$

como resultado, obtemos as seguintes N constantes $\beta^i \equiv \partial S/\partial \alpha^i$. Esta relação pode ser invertida se considerarmos

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial \alpha^i}\right) \neq 0,$$

de onde obtemos a forma explícita para uma solução das Equações Características $q^i = q^i\left(t, \alpha^i, \beta^i\right)$, enquanto que, para a segunda Equação Característica temos que $p_i = p_i\left(t, q^j\left(t, \alpha^k, \beta^k\right), \alpha^j\right) = p_i\left(t, \alpha^i, \beta^i\right)$.

Até agora, supomos que possuimos a forma explícita para a solução completa da Equação de Hamilton-Jacobi. O seguinte passo seria perguntar sob quais condições essa hipótese é possível. Para poder responder, consideremos a solução das Equações Características como

$$q^i = q^i\left(t, \alpha^j, \beta^j\right), \quad p_i = p_i(t, \alpha^j, \beta^j). \tag{2.101}$$

Logo, se derivarmos $\partial S/\partial \alpha^i = \partial S/\partial q^j . \partial q^j/\partial \alpha^i$ e usarmos a condição de transversalidade, obtemos

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha^i} = p_k \frac{\partial q^k}{\partial \alpha^i}.$$

Enquanto uma segunda derivação nos leva a

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} - p_k \frac{\partial^2 q^k}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} = \frac{\partial q^k}{\partial \alpha^i}\frac{\partial p_k}{\partial \alpha^j}.$$

O lado direito da equação é simétrico nos índices i e j. Logo temos

$$\frac{\partial q^k}{\partial \alpha^i}\frac{\partial p_k}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial q^k}{\partial \alpha^j}\frac{\partial p_k}{\partial \alpha^i} = \left[\alpha^i, \alpha^j\right] = 0, \tag{2.102}$$

que identificamos como a condição de Parênteses de Lagrange nulos (2.63). Claramente, um procedimento análogo nos leva a condição $[\beta^i, \beta^j] = 0$. Neste caso, esta estrutura aparece como uma condição para a Integrabilidade da equação de Hamilton-Jacobi. Ainda mais, a condição (2.102) é uma condição suficiente para considerar as variáveis canônicamente conjugadas q^i e p_i como campos geodésicos. Para provar esta afirmação, consideremos as soluções (2.101), as quais já satisfazem a condição de Parênteses de Lagrange nulos (2.102). Esta condição pode ser reescrita, uma vez que o termo do lado esquerdo de (2.102) é

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^j}\left(p_k \frac{\partial q^k}{\partial \alpha^i}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha^i}\left(p_k \frac{\partial q^k}{\partial \alpha^j}\right),$$

esta relação é evidentemente satisfeita se considerarmos uma função $\sigma = \sigma\left(t, \alpha^i\right)$ tal que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha^i} = p_k \frac{\partial q^k}{\partial \alpha^i}. \tag{2.103}$$

Se a equação (2.101) é inversível, temos que $\alpha^i = \alpha^i\left(t, q^j\right)$ e, assim podemos definir uma nova função $\Sigma\left(t, q^i\right) \equiv \sigma\left(t, \alpha^i\left(t, q^j\right)\right)$. Desta relação segue

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha^i} = \frac{\partial \Sigma}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial \alpha^i},$$

logo, comparando com (2.103) temos que $p_k = \partial\Sigma/\partial q^k$ que é análoga à condição de transversalidade. Se derivamos esta nova relação com relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(p_i - \frac{\partial \Sigma}{\partial q^i}\right) = \dot{p}_i - \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial q^i \partial t} - q^j \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial q^i \partial q^j} = 0.$$

Como o momento canônico satisfaza sua respectiva Equação Característica, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H_0}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial q^i \partial t} - q^j \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial q^i \partial q^j}, \\ &= \frac{\partial}{\partial q^i}\left(H_0 - \frac{\partial \Sigma}{\partial t} - q^j \frac{\partial \Sigma}{\partial q^j}\right). \end{aligned}$$

Isso é satisfeito se considerarmos

$$H_0 - \frac{\partial \Sigma}{\partial t} - q^j \frac{\partial \Sigma}{\partial q^j} = f(t), \tag{2.104}$$

e, sem perdida de generalidade podemos escolher $f(t) = 0$. Assim identificamos (2.104) como a equação de Hamilton-Jacobi e Σ como a nossa função geradora $S\left(t, q^i\right)$.

Aqui termina o nosso tratamento do formalismo de Hamilton-Jacobi segundo o procedimento de Carathéodory. Nota-se que no decorrer desse procedimento, se deve satisfazer a condição Hessiana a fim de obter a equação de Hamilton-Jacobi.

No seguinte capítulo estudaremos a generalização desse formalismo para analisar sistemas vinculados, que é o foco principal desta tese. No entanto, o programa que seguimos até aqui, isto é, a introdução das variáveis canônicas, a obtenção das Equações Característica e a Condição de Integrabilidade serão de grande ajuda para a generalização desse formalismo.

Capítulo 3

Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares

3.1 Introdução

Sistemas físicos que são descritos por uma função Lagrangiana são classificados em dois diferentes grupos, dependendo de satisfazerem ou não a Condição Hessiana. Um sistema regular possui uma matriz Hessiana cuja determinante é nula, ou seja, satisfaz a Condição Hessiana e, portanto, é possível construir um espaço de fase sem nenhuma ambigüidade. Por outro lado, os sistemas singulares, também chamados de sistemas vinculados, são aqueles que não satisfazem a Condição Hessiana.

Foi no início dos anos cinquenta que Dirac [1] desenvolveu um método para lidar com sistemas singulares utilizando a formulação Hamiltoniana. Este método continuou sendo melhorado por ele, Bergmann [2] assim como muitos outros (veja por exemplo [3]) durante os anos seguintes utilizaram essa ferramenta, que sem dúvidaé a mais poderosa para lidar com sistemas vinculados. A importância do estudo de vínculos reside, entre outros, na relação entre esses sistemas e as teorias de calibre.

Não obstante o forte posicionamento do formalismo de Dirac, há diversas tentativas para a construção de novos métodos para o estudo dos sistemas vinculados. Neste capítulo estudaremos a abordagem de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares, que foi iniciado por Güler [9] como uma generalização do método Carathéodory para sistemas regulares [10] apresentado no Capítulo II. No formalismo de Hamilton-Jacobi, os vínculos da teoria aparecem como um conjunto de Equações Diferenciais Parciais, condições necessárias para a existência de extremos de um determinado funcional de ação. Relacionadas a esse sistema de Equações Diferencial Parcial, também chamados de Hamiltonianos, temos as chamadas Equações Características que descrevem a dinâmica do sistema como dependente de diversos parâmetros "temporais". Para que o conjunto de Hamiltonianos seja também uma condição de suficiência deve obedecer a chamada Condição de Integrabilidade, ou seja, ele deve formar um conjunto completo de vínculos involutivos.

A procura da Integrabilidade do sistema, que é, de fato, a análise de vínculos propriamente dita, geralmente revela dois tipos de Hamiltonianos, chamados de involutivos e não-involutivos. O primeiro grupo são os que formam um conjunto fechado de equações integráveis. A presença de um conjunto de Hamiltonianos não-involutivos indica uma dependência entre os parâmetros da teoria, que devem ser eliminados com uma redefinição da dinâmica do espaço de fase.

Neste capítulo, vamos acompanhar de perto os procedimentos mostrados em [23] e [31] onde classificamos os Hamiltonianos e estudamos seus papéis dentro do formalismo. Para visualizar esse procedimento, examinamos um modelo de mecânica analítica, a chamada Mecânica Quântica Topológica (Chern-Simons) [33] que tem uma estreita relação com a Electrodinâmica Topologicamente Massiva [35]. A análise de vínculos mostra que a Mecânica Quântica Topológica possui os dois tipos de Hamiltonianos, isto nos permite fazer uso de todo o procedimento mostrado dentro do formalismo de Hamilton-Jacobi.

3.2 O formalismo de Hamilton-Jacobi

Como vimos no Capítulo II, podemos evitar o formalismo de Hamilton e obter a equação de Hamilton-Jacobi diretamente do formalismo Lagrangiano, para isto simplesmente extremizamos o funcional de ação usando Lagrangianas equivalentes. Neste procedimento foi necessário satisfazer a Condição Hessian, isto é, que o determinante da matriz Hessiana

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial q^j}, \quad i,j = 1,2,...,N \tag{3.1}$$

seja não nula, ou em outras palavras, que o sistema seja regular.

Como já foi estudado, sempre que a Condição Hessian se mantém, é possível determinar as acelerações como uma função exclusiva da posição e das velocidades num determinado momento. Por outro lado, se o determinante de (3.1) é nulo, somos incapazes de determinar as velocidades completamente. Nesse último caso, consideramos que o posto da matriz Hessiana é P, então, existe uma submatriz regular

$$W_{ab} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial q^a \partial q^b}, \quad a,b = 1,2,...,P \tag{3.2}$$

que produz P relações dinâmicas

$$p_a = p_a(t \equiv q^0, q^i, \dot{q}^i), \tag{3.3}$$

que podem ser invertidas para ter $\dot{q}^a = \dot{q}^a(q^0, q^i, p_b)$. A condição (3.2) também assegura que temos $R = N - P$ relações

$$p_z - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z} = 0, \quad z = 1,2,...,R.$$

Definimos $H_z \equiv \partial L/\partial \dot{q}^z$, de modo que temos R relações que podem ser escritas da seguinte forma

$$H'_z(q^0, q^i, p_z) \equiv p_z - H_z = 0, \tag{3.4}$$

essas relações não devem depender de quaisquer velocidades, caso contrário, seria possível resolver para uma delas. As equações (3.4) são chamadas de vínculos canônicos da teoria, uma que vez são resultados da própia definição dos momentos canônicos. Essas relações também mostram que nem todas as $2N$ variáveis canônicas q^i e p_i são independentes; de fato, o número correto de variáveis independentes deve ser $2N - (N - P) = N + P$.

Voltando à teoria de Hamilton-Jacobi, vemos que com o auxílio de Lagrangianas equivalentes $\bar{L} = L - \partial S/\partial q^0$, a condição que extremiza o funcional de ação é

$$p_0 + p_i \dot{q}^i - L(q^0, q^i, \dot{q}^i) = 0, \tag{3.5}$$

onde $p_0 = \partial S/\partial q^0$ e $p_i = \partial S/\partial q^i$. A equação (3.5) pode ser identificada como a equação de Hamilton-Jacobi apenas para sistemas regulares. Para sistemas singulares, no entanto, temos que perceber que os momentos canônicos estão divididos em dois grupos: os que fornecem vinculos canônicos que são os p_z e os que fornecem as relações dinâmicas. Definimos o Hamiltoniano canônica como

$$\begin{aligned} H_0 &\equiv p_i \dot{q}^i - L(q^0, q^i, \dot{q}^i), \\ &= p_a \dot{q}^a + p_z \dot{q}^z - L(q^0, q^i, \dot{q}^a, \dot{q}^z). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nessa relação podemos substituir a equação (3.3) e assim eliminar a dependência nas velocidades $\dot{q}^a$. Além disso, temos que o Hamiltoniano canônico também não depende das velocidades $\dot{q}^z$ uma vez que

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}^z} = p_z - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z} = 0.$$

Portanto, esse Hamiltoniano é simplesmente uma função das variáveis canônicas e a variável temporal q^0. Escrevemos (3.5) como

$$H_0' \equiv p_0 + H_0 = 0, \tag{3.7}$$

essa equação, juntamente com (3.5) forma um conjunto de $R + 1$ Equações Differenciais Parciais de Hamilton-Jacobi. As variáveis $t^\alpha \equiv (q^0, q^z)$ desempenham o papel de parâmetros da teoria, uma vez que suas respetivas derivadas temporais, isto é, suas velocidades $\dot{q}^\alpha$ não estão determinadas dentro da equação (3.5). Com esta notação escrevemos a coleção de equações (3.5) e (3.7) como

$$H_\alpha' \equiv p_\alpha + H_\alpha = 0, \quad \alpha = 0, 1, ..., R. \tag{3.8}$$

O lado esquerdo dessas equações, digamos H_0' e H_z' são chamadas de Hamiltonianos, a razão por trás desse nome será esclarecida na próxima seção.

3.2.1 Equações Características

Nesta seção, vamos mostrar que o conjunto de Equações Diferenciais Parciais de Hamilton-Jacobi (3.8) está relacionado a um novo conjunto de equações diferenciais, chamado de Equações

Características do sistema. Primeiro, nota-se que a partir das definições (3.6) e (3.7) temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_0'}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i}\left(p_a\dot{q}^a - H_z\dot{q}^z - L\right), \\ &= \delta_a^i\dot{q}^a + p_a\frac{\partial\dot{q}^a}{\partial p_i} - \frac{\partial H_z}{\partial p_i}\dot{q}^z - \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}\frac{\partial\dot{q}^a}{\partial p_i},\end{aligned} \tag{3.9}$$

devido à definição do momento canônico, o segundo e quarto termo do lado direito da equação são iguais, então obtemos

$$\delta_a^i\dot{q}^a = \frac{\partial H_0'}{\partial p_i} + \frac{\partial H_z}{\partial p_i}\dot{q}^z. \tag{3.10}$$

A partir da definição $q^0 = t$, temos que $\dot{q}^0 = 1$ logo, podemos introduzir a unidade na equação (3.10) e reescrevê-la de forma compacta

$$dq^a = \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_a}dt^\alpha. \tag{3.11}$$

Observa-se que essa última equação pode ser generalizada para

$$dq^i = \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i}dt^\alpha, \tag{3.12}$$

uma vez que para as variáveis q^z simplesmente obtemos as identidades

$$dq^z = \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_z}dt^\alpha = dt^z. \tag{3.13}$$

A equação (3.12) é a nossa primeira Equação Característica e nos informa sobre a evolução dinâmica da variável canônica q^i. Essa equação também ratifica que não só $q^0 = t$ desempenha o papel de parâmetro temporal, mas também que temos outros R parâmetros $q^z = t^z$. A segunda Equação Característica nos diz sobre a variável canônica restante p_i; aqui momenteneamente esquecemos a expressão explícita (3.8) e consideramos

$$H_\alpha'\left(t^\alpha, p_\alpha, q^a, p_a\right) = 0, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}\left(t^\alpha, q^a\right). \tag{3.14}$$

Essa generalização será útil posteriormente. Agora, derivando em relação à q^i obtemos

$$\frac{\partial H_\alpha'}{\partial q^i} + \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_a}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^a} + \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_\beta}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^\beta} = 0, \tag{3.15}$$

e da definição de momento canônico temos que

$$dp_i = \frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^a}dq^a + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial t^\alpha}dt^\alpha. \tag{3.16}$$

Vamos multiplicar a equação (3.15) por $-dt^\alpha$ e adicioná-la à equação (3.16), tal que

$$\begin{aligned}dp_i + \frac{\partial H_\alpha'}{\partial q^i}dt^\alpha &= \frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^a}dq^a + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial t^\alpha}dt^\alpha - \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_a}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^a}dt^\alpha - \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_\beta}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^\beta}dt^\alpha, \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^a}\left(dq^a - \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_a}dt^\alpha\right) + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^\alpha}\left(dt^\alpha - \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_\beta}dt^\alpha\right).\end{aligned}$$

A Equação Característica (3.11) assegura que o primeiro termo do lado direito da equação é nulo. O segundo termo só será nulo se assumirmos que os Hamiltonianos H'_α dependam linearmente dos momentos canônicos, isto é

$$\frac{\partial H'_\alpha}{\partial p_\beta} = \delta^\beta_\alpha, \tag{3.17}$$

claro está que essa relação é sempre satisfeita se assumirmos a expressão (3.8). Portanto, sob a condição (3.17), obtemos a segunda Equação Característica

$$dp_i = -\frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^i} dt^\alpha. \tag{3.18}$$

A última Equação Característica nos diz sobre a dinâmica da função $S = S\left(q^\alpha, q^a\right)$. Obtemos isso realizando o diferencial

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q^a} dq^a + \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} dq^\alpha = p_a dq^a + p_\alpha dq^\alpha,$$

que devido à equação (3.8) pode ser reescrito como

$$dS = p_a dq^a - H_\alpha dq^\alpha. \tag{3.19}$$

Essa equação está ainda longe de ser integrada devido à dependência das variáveis q^α.

3.2.2 Integrabilidade

O procedimento após a obtenção do conjunto de Equações Diferenciais Parciais de Hamilton-Jacobi $H'_\alpha = 0$ é o estudo das condições necessárias para obter uma solução completa para esse sistema e, como consequência, integrar as correspondentes Equações Características.

Sem perda de generalidade, vamos supor que possamos resolver as Equações Características (3.12) e (3.18) com soluções da forma

$$q^a = q^a\left(t^\alpha\right), \quad p_a = p_a(t^\alpha).$$

Gostaríamos de saber em que condições, o sistema de Hamiltonianos (3.14) é completamente integravel, isto é, se possui uma solução completa

$$S = S\left(t^\alpha, q^a\left(t^\alpha\right)\right). \tag{3.20}$$

Para esse efeito, vamos diferenciar com relação à t^α, assim temos que

$$\frac{dS}{dt^\alpha} = \frac{\partial S}{\partial t^\alpha} + \frac{dq^a}{dt^\alpha}\frac{\partial S}{\partial q^a} = p_\beta \frac{dt^\beta}{dt^\alpha} + p_a \frac{dq^a}{dt^\alpha}. \tag{3.21}$$

Agora definiremos o índice $i' = 0, 1, 2, ..., N$, assim, podemos reescrever (3.21) em uma forma mais simples

$$\frac{dS}{dt^\alpha} = p_{i'} \frac{dq^{i'}}{dt^\alpha}.$$

Executando uma segunda diferenciação obtemos

$$\frac{d^2S}{dt^\alpha dt^\beta} = \frac{dp_{i'}}{dt^\beta}\frac{dq^{i'}}{dt^\alpha} + p_{i'}\frac{d^2q^{i'}}{dt^\alpha dt^\beta},$$

nota-se que uma vez que o segundo termo do lado direito, assim como todo o lado esquerdo da equação são simétricos em α e β, temos

$$\frac{dp_{i'}}{dt^\beta}\frac{dq^{i'}}{dt^\alpha} - \frac{dp_{i'}}{dt^\alpha}\frac{dq^{i'}}{dt^\beta} = 0. \tag{3.22}$$

A equação (3.22) pode ser escrita em uma forma mais simples se definirmos os Parênteses de Lagrange

$$\left[t^\alpha, t^\beta\right] \equiv \frac{dq^{i'}}{dt^\alpha}\frac{dp_{i'}}{dt^\beta} - \frac{dq^{i'}}{dt^\beta}\frac{dp_{i'}}{dt^\alpha}. \tag{3.23}$$

Portanto, a condição para a existência de uma solução completa (3.20) é dada por

$$\left[t^\alpha, t^\beta\right] = 0. \tag{3.24}$$

Há uma diferença notável entre a definição dos Parênteses de Lagrange (3.23) com os definidos no capítulo anterior. Neste caso os parênteses agem sobre um espaço de fase estendido no qual temos que considerar tanto a variável tempo $q^0 = t$ assim como seu par canônico p_0.

Por outro lado, pode-se também provar que a condição (3.22), ou equivalentemente (3.24), nos permite definir a função S, transversa ao campo geodésico q^i. Podemos fazer isso através de uma diferenciação parcial em (3.22) tal que

$$\frac{d}{dt^\beta}\left(p_{i'}\frac{dq^{i'}}{dt^\alpha}\right) - \frac{d}{dt^\alpha}\left(p_{i'}\frac{dq^{i'}}{dt^\beta}\right) = 0,$$

então, deve existir uma função, digamos $\sigma\left(t^\alpha\right)$ que satisfaça

$$\frac{d\sigma}{dt^\alpha} = p_{i'}\frac{dq^{i'}}{dt^\alpha}. \tag{3.25}$$

Agora, se as funções $q^{i'} = q^{i'}\left(t^\alpha\right)$ são inversíveis, temos que $t^\alpha = t^\alpha\left(q^{i'}\right)$ e, assim podemos definir a função $S\left(t^\alpha, q^{i'}\right) \equiv \sigma\left(t^\alpha\left(q^{i'}\right), q^{i'}\right)$. Derivando

$$\frac{d\sigma}{dt^\alpha} = \frac{\partial S}{\partial q^{i'}}\frac{dq^{i'}}{dt^\alpha}, \tag{3.26}$$

e logo comparando com a equação (3.25) obtemos $p_{i'} = \partial S/\partial q^{i'}$.

A condição dos Parênteses de Lagrange torna-se necessária e suficiente para a existência de uma solução completa S (3.20). Mesmo assim, esta condição de integrabilidade torna-se mais funcional quando expressa em termos dos Hamiltonianos da teoria. Para este efeito, vale lembrar que das Equações Características (3.12) e (3.18) temos

$$dq^{i'} = \frac{\partial H'_\alpha}{\partial p_{i'}}dt^\alpha, \quad dp_{i'} = -\frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^{i'}}dt^\alpha,$$

e substituindo-as na condição (3.24) obtemos

$$\left[t^{\alpha}, t^{\beta}\right] = -\frac{\partial H'_{\alpha}}{\partial p_{i'}}\frac{\partial H'_{\beta}}{\partial q^{i'}} + \frac{\partial H'_{\beta}}{\partial p_{i'}}\frac{\partial H'_{\alpha}}{\partial q^{i'}} = \left\{H'_{\alpha}, H'_{\beta}\right\}. \tag{3.27}$$

A condição de integrabilidade em termos dos Parênteses de Lagrange torna-se então numa condição sobre os Parênteses de Poisson entre os Hamiltonianos do sistema. Dizemos que dois Hamiltonianos que satisfazem a condição de integrabilidade

$$\left\{H'_{\alpha}, H'_{\beta}\right\} = 0, \tag{3.28}$$

são involutivos. A equação (3.28) é também chamada de Condição de Integrabilidade de Frobenius ou simplesmente Condição de Integrabilidade. Podemos combinar tanto essas condições com as Equações Características em uma única equação se definirmos o chamado diferencial fundamental

$$dF = \left\{F, H'_{\alpha}\right\} dt^{\alpha}. \tag{3.29}$$

Quando sustituirmos F com alguma das variáveis canônicas, q^i ou p_i obtemos as Equações Características (3.12) e (3.18). Também temos

$$dH'_{\alpha} = 0, \tag{3.30}$$

é completamente equivalente a (3.28) uma vez que os parâmetros t^{α} são independentes entre eles, logo dH'_{α} será nulo quando todos os Parênteses de Poisson sejam nulos na equação (3.29). Há ainda a possibilidade de que os Hamiltonianos fechem uma álgebra

$$\left\{H'_{\alpha}, H'_{\beta}\right\} = C^{\gamma}_{\ \alpha\beta} H'_{\gamma}, \tag{3.31}$$

onde $C^{\gamma}_{\ \alpha\beta}$ são as constantes de estrutura. Neste caso, a Condição de Integrabilidade também é satisfeita, devido à (3.8)

$$dH'_{\alpha} = \left\{H'_{\alpha}, H'_{\beta}\right\} dt^{\beta} = C^{\gamma}_{\ \alpha\beta} H'_{\gamma} dt^{\beta} = 0. \tag{3.32}$$

Uma vez que os Hamiltonianos que satisfazem (3.31) também satisfazem (3.30) chamamos a eles de involutivos. Contudo, não todos os sistemas físicos satisfazem a Condição de Integrabilidade diretamente. Na seguinte seção analisamos estes sistemas.

3.2.3 Hamiltonianos não-involutivos: Parênteses Generalizados

Em geral, a imposição da Condição de Integrabilidade nos leva a três casos diferentes:

- Primeiro, a condição é satisfeita automaticamente, isto é, obtém-se uma identidade $0 = 0$.

- O segundo caso é que a Condição de Integrabilidade produz uma expressão do tipo $\chi\left(q^i, p_i\right) = 0$, neste caso vamos a definir um novo Hamiltoniano, digamos $H' \equiv \chi\left(q^i, p_i\right)$. Como vimos anteriormente, enquanto esse Hamiltoniano seja linear nos momentos canônicos, é possível configurá-lo dentro da estrutura das Equações Características e portanto do diferencial

fundamental. Nesse caso, temos também que testar a Condição de Integrabilidade deste $dH' = d\chi = 0$.

- Como último caso, temos que a Condição de Integrabilidade impõe uma relação entre duas ou mais variáveis t^α. Nota-se que esse caso viola a condição de que todas as variáveis relacionadas a um Hamiltoniano devem ser independentes. Apesar disso, o diferencial fundamental dá uma visão sobre como esses Hamiltonianos devem ser eliminados, cujo processo é mostrado a seguir.

Consideraremos um conjunto de Hamiltonianos, digamos H'_α, cada um esta relacionado com a variável t^α. A partir da forma das Equações Características construímos o diferencial fundamental (3.29). Podemos separar a variável tempo t das outras t^z, de modo que escrevemos

$$dF = \{F, H'_0\}dt + \{F, H'_z\}dt^z. \tag{3.33}$$

Uma vez que temos o conjunto completo de Hamiltonianos, qualquer hamiltoniano dado, digamos H'_x, deve satisfazer a Condição de Integrabilidade

$$dH'_x = \{H'_x, H'_0\}dt + \{H'_x, H'_z\}dt^z = 0. \tag{3.34}$$

Dizemos que dois Hamiltonianos são não-involutivos se a matriz com componentes

$$M_{xz} \equiv \{H'_x, H'_z\} \tag{3.35}$$

não é nula. Nesse casos, a partir de (3.34) temos

$$M_{xz}dt^z = -\{H'_x, H'_0\}dt.$$

Nota-se que pode existir uma dependência entre os parâmetros t e t^z se a matriz M_{xz} possui inversa

$$dt^z = -M^{-1}_{zx}\{H'_x, H'_0\}dt. \tag{3.36}$$

Portanto, a presença de Hamiltonianos não-involutivos viola a Condição de Integrabilidade uma vez que a independência das variáveis t^α já não é satisfeita. Contudo, as variáveis t^z podem ser eliminadas da evolução dinâmica do sistema. Isso é obtido usando (3.36) em (3.34) para que possamos reescrever o diferencial fundamental como

$$\begin{aligned} dF &= \{F, H'_0\}dt - \{F, H'_z\}M^{-1}_{zx}\{H'_x, H'_0\}dt, \\ &= \left(\{F, H'_0\} - \{F, H'_z\}M^{-1}_{zx}\{H'_x, H'_0\}\right)dt. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Dessa forma, definimos os Parênteses Generalizados

$$\{A, B\}^* \equiv \{A, B\} - \{A, H'_z\}M^{-1}_{zx}\{H'_x, B\}, \tag{3.38}$$

de modo que, substituindo estes parênteses dentro do diferential fundamental obtemos

$$dF = \{F, H'_0\}^*dt. \tag{3.39}$$

Certamente, essa redução de variáveis t^z na evolução da teoria é restringida a todos os Hamiltonianos H'_x não-involutivos na qual a matriz (3.35) é inversível. No caso em que nem todos os Hamiltonianos são não-involutivos, ou a matriz M_{xz} não é inversível, o procedimento é semelhante. Escolhemos um subconjunto de Hamiltonianos $H'_{\bar{x}}$ não-involutivo tal que a matriz

$$M_{\bar{x}\bar{z}} \equiv \{H'_{\bar{x}}, H'_{\bar{z}}\}, \tag{3.40}$$

seja inversível. Com essa definição, podemos escrever o diferencial fundamental (3.33) como

$$dF = \{F, H'_0\}dt + \{F, H'_{\hat{r}}\}dt^{\hat{r}} + \{F, H'_{\bar{z}}\}dt^{\bar{z}}, \tag{3.41}$$

aqui o sub-índice $\hat{r}$ representa a parte não-inversível da matriz (3.35). A Condição de Integrabilidade para um Hamialtoniano não-involutivo arbitrário H'_x se lê

$$dH'_x = \{H'_x, H'_0\}dt + \{H'_x, H'_{\hat{r}}\}dt^{\hat{r}} + \{H'_x, H'_{\bar{z}}\}dt^{\bar{z}} = 0.$$

Essa relação pode ser escrita como um conjunto

$$\{H'_{\hat{x}}, H'_{\hat{r}}\}dt^{\hat{r}} + \{H'_{\hat{x}}, H'_{\bar{z}}\}dt^{\bar{z}} = -\{H'_{\hat{x}}, H'_0\}dt, \tag{3.42a}$$

$$\{H'_{\bar{x}}, H'_{\hat{r}}\}dt^{\hat{r}} + \{H'_{\bar{x}}, H'_{\bar{z}}\}dt^{\bar{z}} = -\{H'_{\bar{x}}, H'_0\}dt. \tag{3.42b}$$

A partir da segunda linha identificamos a submatriz regular $M_{\bar{x}\bar{z}}$, logo a equação (3.42b) fornece a seguinte relação

$$dt^{\bar{z}} = -M^{-1}_{\bar{x}\bar{z}}\left[\{H'_{\bar{x}}, H'_0\}dt + H'_{\bar{x}}, H'_{\hat{r}}\}dt^{\hat{r}}\right],$$

denotemos com $t^{\hat{\alpha}}$ a coleção de variáveis t e $t^{\hat{r}}$, assim escrevemos a relação anterior como

$$dt^{\bar{z}} = -M^{-1}_{\bar{x}\bar{z}}\{H'_{\bar{x}}, H'_{\hat{\alpha}}\}dt^{\hat{\alpha}}, \tag{3.43}$$

e substituindo essa em (3.41) obtemos

$$\begin{aligned} dF &= \{F, H'_{\hat{\alpha}}\}dt^{\hat{\alpha}} + \{F, H'_{\bar{z}}\}dt^{\bar{z}}, \\ &= \left[\{F, H'_{\hat{\alpha}}\} - \{F, H'_{\bar{z}}\}M^{-1}_{\bar{x}\bar{z}}\{H'_{\bar{x}}, H'_{\hat{\alpha}}\}\right]dt^{\hat{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Essa relação também nos permite definir os Parênteses Generalizados, com o subconjunto regular dos Hamiltonianos não-involutivos, como

$$\{A, B\}^* \equiv \{A, B\} - \{A, H'_{\bar{z}}\}M^{-1}_{\bar{x}\bar{z}}\{H'_{\bar{x}}, B\}. \tag{3.45}$$

Portanto, a dinâmica do sistema só irá depender das variáveis $t^{\hat{\alpha}}$, isto é, t e $t^{\hat{r}}$, que estão relacionadas ao subconjunto irregular dos Hamiltonianos não-involutivos

$$dF = \{F, H'_{\hat{\alpha}}\}^* dt^{\hat{\alpha}}. \tag{3.46}$$

Retornamos à equação (3.42a), que pode ser escrita como

$$\{H'_{\hat{x}}, H'_{\bar{z}}\}dt^{\bar{z}} + \{H'_{\hat{x}}, H'_{\hat{\alpha}}\}dt^{\hat{\alpha}} = 0.$$

Ao substituir a equação (3.43) obtemos

$$\{H'_{\hat{x}}, H'_{\hat{\alpha}}\}^* dt^{\hat{\alpha}} = 0. \tag{3.47}$$

que afirma que os Hamiltonianos restantes $H'_{\hat{x}}$ devem também satisfazer a Condição de Integrabilidade $dH'_{\hat{x}} = \{H'_{\hat{x}}, H'_{\hat{\alpha}}\}^* dt^{\hat{\alpha}}$ sob os novos Parênteses Generalizados.

A presença de Hamiltonianos não-involutivos viola a independência linear das variáveis temporais ou parâmetros relacionados a esses Hamiltonianos, mas a imposição da Condição Integrabilidade fornece um método para eliminar esses parâmetros, permitindo-nos obter um conjunto completo de Hamiltonianos involutivos sob a álgebra dos Parênteses Generalizados. Portanto, podemos dizer que o papel dos Hamiltonianos não-involutivos é a redução do espaço de fase.

Agora, estudaremos como a redução da dinâmica, devido à presença de Hamiltonianos não-involutivos, atua na teoria da Mecânica Quântica Topológica.

3.2.4 Mecânica Quântica Topológica: Hamiltonianos não-involutivos

As teorias Topologicamente Massivas foram propostas por Jackiw *et al.* [35] no início dos anos oitenta. Essas teorias são construídas pela adição de um termo de Chern-Simons nas teorias de calibre em três dimensões. Assim, a teoria da Eletrodinâmica Topologicamente Massiva, também conhecida como de Maxwell-Chern-Simons, é descrita pela seguinte ação

$$W[A_\mu] = \int d^3x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{4} \varepsilon^{\mu\nu\gamma} F_{\mu\nu} A_\gamma \right], \tag{3.48}$$

que é invariante sob a transformação $\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon$, isto é, transformações $U(1)$. No chamado calibre de Weyl temos que $A^0 = 0$, assim, a equação (3.48) torna-se

$$W[A_\mu] = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{A}^2 - \frac{\mu}{2} \boldsymbol{A} \times \dot{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{2} (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 \right], \tag{3.49}$$

onde $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2)$. Esta ação é análoga à de uma partícula massiva carregada movendo-se em um plano sob a influência de um campo electromagnético externo

$$W[\boldsymbol{x}] = \int dt \left[\frac{m}{2} \boldsymbol{x}^2 + \frac{e}{c} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) - eV(\boldsymbol{x}) \right],$$

se considerarmos as seguintes características: primeiro, $A_i = \varepsilon_{ij} x_j A(\boldsymbol{x})$, $V(\boldsymbol{x}) = V(x)$, isto é, possui uma simetría rotacional e, segundo, $A(\boldsymbol{x}) = -B/2$, $V(x) = k\boldsymbol{x}^2/2$, onde B e k são constantes positivas. Nesse caso temos

$$W[\boldsymbol{x}] = \int dt \left[\frac{m}{2} \boldsymbol{x}^2 + \frac{B}{2} \boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{x}} - \frac{k}{2} \boldsymbol{x}^2 \right]. \tag{3.50}$$

A semelhança entre (3.49) e (3.50) é evidente. Este modelo clássico também foi estudado no Capítulo II sob o formalismo de Hamilton-Jacobi uma vez que ele é regular. Como já mencionamos, a teoria da Maxwell-Chern-Simons é invariante sob transformações $U(1)$ logo, esperamos

uma invariância similar para seu análogo mecânico. Nesse sentido, se propõe uma generalização do (3.50) que possua algumas propriedades de invariância

$$L\left(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},q\right)\equiv\frac{m}{2}D\boldsymbol{x}\cdot D\boldsymbol{x}+\frac{B}{2}\boldsymbol{x}\times D\boldsymbol{x}-\frac{k}{2}\boldsymbol{x}^{2}+\nu q, \tag{3.51}$$

onde ν é uma constante de acoplamento, e

$$Dx_i\equiv\dot{x}_i+q\varepsilon_{ij}x_{j,} \tag{3.52}$$

é a derivada covariante. Observa-se que a Lagrangiana (3.51) não depende somente das N coordenadas $\dot{x}_i$, mas também de uma nova variável q. No limite $m\to 0, k\to 0$, temos

$$L_0\left(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},q\right)=\frac{B}{2}\boldsymbol{x}\times D\boldsymbol{x}+\nu q. \tag{3.53}$$

As teorias descritas por (3.51) e (3.53) são chamadas de Mecânica Quântica Topológica. Contudo, a Lagrangiana (3.51) tem uma estrutura completamente diferente da Lagrangiana (3.53). Observa-se que a Lagrangiana reduzida L_0 é apenas linear em suas velocidades, portanto não satisfaz a condição Hessiana, ou seja, (3.53) representa uma teoria singular.

Escreveremos a ação (3.53) em termos das componentes do vector $\boldsymbol{x}$ e substituiremos a definição da derivada covariante

$$\begin{aligned}W_0\left[x^i,q\right] &= \int dt\left[\frac{B}{2}\varepsilon_{ij}x_i\left(\dot{x}_j+q\varepsilon_{jk}x_{k,}\right)+\nu q\right],\\ &= \int dt\left[\frac{B}{2}\varepsilon_{ij}x_i\dot{x}_j-qC\right],\end{aligned} \tag{3.54}$$

onde C, é apenas uma função das componentes do vector $\boldsymbol{x}$ e, se comporta como um potencial definido por

$$C\equiv\frac{B}{2}x_ix_i-\nu. \tag{3.55}$$

As propriedades Lagrangianas de nosso interesse são obtidas através da realização da variação total para o funcional de ação, ou equivalentemente escrevendo a Equação Lie. Escrevemos $\delta W_0\left[x^i,q\right]=\int dt\Delta L$ e

$$\Delta L=B\left(\varepsilon_{ij}\dot{x}_j-qx_i\right)\bar{\delta}x_i-C\bar{\delta}q+\frac{d}{dt}\left(-\frac{B}{2}\varepsilon_{ij}x_j\delta x_i-qC\delta t\right). \tag{3.56}$$

Por simples inspeção da derivada total nessa equação, identificamos o Gerador $G\equiv p_i\delta x_i+\pi\delta q-H_0\delta t$ como

$$G=-\frac{B}{2}\varepsilon_{ij}x_j\delta x_i-qC\delta t, \tag{3.57}$$

assim como os momentos canônicos de x^i e q e o Hamiltoniano Canônico

$$p_i \equiv \frac{\partial L_0}{\partial\dot{x}_i}=-\frac{B}{2}\varepsilon_{ij}x_j, \tag{3.58a}$$

$$\pi \equiv \frac{\partial L_0}{\partial\dot{q}}=0, \tag{3.58b}$$

$$H_0 \equiv p_i\dot{x}_i+\pi\dot{q}-L_0=qC. \tag{3.58c}$$

Além disso, devido à linearidade das velocidades em (3.54) dizemos que essa é uma ação de primeira ordem. Em geral, as Lagrangianas correspondentes às ações de primeira ordem são escritas como $L = K(x)\dot{x} - V(x)$ e, a partir dessa expressão, identificamos os momentos canónicos, bem como o Hamiltoniano canônico $p = K(x), H_0 = V(x)$, respectivamente. Dizemos também que as Lagrangianas de primeira ordem já estão escritas na forma canônica pois $L = p\dot{x} - H_0$.

Voltando à Equação de Lie, identificamos as equações de Euler-Lagrange quando igualamos a zero os coeficientes das variações das variáveis independentes δx_i e δq. Obtemos

$$\varepsilon_{ij}\dot{x}_j - qx_i = 0, \tag{3.59a}$$
$$\frac{B}{2}x_i x_i - \nu = 0. \tag{3.59b}$$

Como mencionamos anteriormente, o modelo da Mecânica Quântica Topológica (3.53) é invariante sob transformações de calibre. Para esta análise de simetria utilizamos a Equação Lie para variações de ponto fixo $\delta t = 0$ ($\delta x_i = \bar{\delta} x_i$, $\bar{\delta} q = \delta q$), assim temos

$$\begin{aligned}\Delta L &= B\left(\varepsilon_{ij}\dot{x}_j - qx_i\right)\delta x_i - C\delta q - \frac{d}{dt}\left(\frac{B}{2}\varepsilon_{ij}x_j\delta x_i\right), \\ &= B\left[\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\left(\dot{x}_j\delta x_i - x_j\delta\dot{x}_i\right) - qx_i\delta x_i - \frac{1}{2}x_i x_i\delta q\right] + \nu\delta q,\end{aligned}$$

agora, se considerarmos a seguinte transformação

$$\delta q = \dot{\alpha}, \tag{3.60a}$$
$$\delta x_i = -\varepsilon_{ij}x_j\alpha. \tag{3.60b}$$

onde a função $\alpha = \alpha(t)$ é chamada de "potencial de calibre"e substituímos em (3.56), obtemos que

$$\begin{aligned}\Delta L &= B\left[\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\left(-\dot{x}_j x_k\alpha + x_j x_k\alpha + x_j x_k\dot{\alpha}\right) - \frac{1}{2}x_i x_i\dot{\alpha}\right] + \nu\dot{\alpha}, \\ &= B\left[\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}x_j x_k\alpha - \frac{1}{2}x_i x_i\dot{\alpha}\right] + \nu\dot{\alpha}, \\ &= \nu\frac{d}{dt}\alpha,\end{aligned}$$

pois $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik} = \delta_{jk}$. Se a potencial de calibre é independente do tempo, teriamos que o funcional de ação é invariante sob rotações globais $\delta x_i = -\varepsilon_{ij}x_j\alpha$. Por outro lado, a versão local dessa simetria deixa o funcional de ação quasi-invariante. Por isso dizemos que (3.60) são as transformações de calibre da Mecânica Quântica Topológica.

Aseguir estudaremos o problema sob o formalismo Hamilton-Jacobi, nesse caso, o sistema é governado pelo seguinte conjunto de Hamiltonianos

$$H' \equiv p_0 + H_0 = 0, \tag{3.61a}$$
$$H'_i \equiv p_i + \frac{B}{2}\varepsilon_{ij}x_j = 0, \tag{3.61b}$$
$$H'_q \equiv \pi = 0. \tag{3.61c}$$

Cada um desses H', H'_i e H'_q correspondem aos parâmetros $t = x^0$, $\lambda^i \equiv x^i$ e $\lambda \equiv q$, respectivamente. Os Parênteses de Poisson são dados por $\{x^i, p_j\} = \delta_{ij}$ e $\{q, \pi\} = 1$, a partir desta estrutura construímos o diferencial fundamental

$$dF = \{F, H'\}\, dx^0 + \{F, H'_i\}\, d\lambda^i + \left\{F, H'_q\right\} d\lambda. \tag{3.62}$$

Observe que o Hamiltoniano H'_i é não-involutivo uma vez que

$$\left\{H'_i, H'_j\right\} = \left\{p_i + \frac{B}{2}\varepsilon_{ik}x_k, p_j + \frac{B}{2}\varepsilon_{jl}x_l\right\} = B\varepsilon_{ij}, \tag{3.63}$$

Logo, podemos eliminar os parâmetros $\lambda^i \equiv x^i$ da evolução dinámida do sistema se definimos os Parênteses Generalizados

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, H'_i\} M^{-1}_{ij} \{H'_j, G\}, \tag{3.64}$$

onde a matriz $M_{ij} \equiv \left\{H'_i, H'_j\right\}$ possui inversa (lembrando que $\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} = \delta_{ij}$)

$$M^{-1}_{ij} = -\frac{1}{B}\varepsilon_{ij}. \tag{3.65}$$

A redefinição da dinâmica não afeta as variáveis q e π, porque mantém a álgebra $\{q, \pi\}^* = 1$, enquanto que para as variáveis canônicas x_i e p_j temos

$$\{x_i, p_j\}^* = \frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad \{x_i, x_j\}^* = -\frac{1}{B}\varepsilon_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}^* = -\frac{B}{4}\varepsilon_{ij}, \tag{3.66}$$

e o diferencial fundamental agora é dado por

$$dF = \{F, H'\}^*\, dx^0 + \left\{F, H'_q\right\}^* d\lambda. \tag{3.67}$$

Claro, ainda temos que testar a Condição de Integrabilidade para H'_q. Como $\left\{H'_q, H'_q\right\}^* = 0$, em que $dH'_q = 0$ define um novo Hamiltoniano

$$dH'_q = \left\{H'_q, H'\right\}^* dx^0 = -C dx^0.$$

Esse Hamiltoniano (3.55) ainda tem que satisfazer a Condição de Integrabilidade $dC = 0$ com o diferencial fundamental definido em (3.67). Sendo C uma função da variável x^2, temos $\left\{C, H'_q\right\}^* = 0$. Também temos $\{C, C\}^* = -B^2 \{x_i, x_j\}^* x_i x_j = 0$, devido à antisimetria dos Parênteses Generalizados entre as variáveis x_i. Portanto, temos que a Condição de Integrabilidade para o Hamiltoniano C é satisfeita identicamente

$$dC = \{C, -qC\}^*\, dx^0 + \left\{C, H'_q\right\}^* d\lambda = 0.$$

Assim, obtemos o conjunto completo de Hamiltonianos do sistema H', H'_q e C. Esses Hamiltonianos são involutivos, pois todos os Parênteses Generalizados entre eles são nulos, exceto

$$\left\{H'_q, H'\right\}^* = -C, \tag{3.68}$$

a qual fecha uma álgebra de Lie. As Equações Características estao dadas pelo diferencial fundamental, definido num espaço de fase estendido

$$dF = \{F, H'\}^* dx^0 + \left\{F, H'_q\right\}^* d\lambda + \{F, C\}^* d\omega, \tag{3.69}$$

onde ω representa o parâmetro relacionado ao Hamiltoniano C. Para o primeiro grupo de variáveis canônicas, q e π, obtemos

$$dq = d\lambda, \tag{3.70a}$$
$$d\pi = -Cdx^0. \tag{3.70b}$$

O significado dessas equações é simples. A equação (3.70a) significa que a variável q permanece como um parâmetro pois não tem evolução dinâmica $\dot{q} = dq/dx^0 = 0$. A equação (3.70b) é equivalente à Condição de Integrabilidade para o Hamiltoniano H'_q assim como também representa a equação de Euler-Lagrange para a variável q ainda que esta variável não forneça evolução no sistema.

Para o segundo grupo de variáveis canônicas, x_i e p_i, obtemos

$$dx_i = -\varepsilon_{ij} q x_j dx^0 - \varepsilon_{ij} x_j d\omega, \tag{3.71a}$$
$$dp_i = -\frac{B}{2} q x_i^* dx^0 - \frac{B}{2} x_i d\omega. \tag{3.71b}$$

Lembremos que, sendo o conjunto de Hamiltonianos involutivo, em seguida, seus respectivos parâmetros são independentes entre si. Por conseguinte, a fim de estudar só a evolução temporal, temos que

$$\dot{x}_i = -\varepsilon_{ij} q x_j, \tag{3.72a}$$
$$\dot{p}_i = -\frac{B}{2} q x_i. \tag{3.72b}$$

As equações (3.72a) e (3.72b) representam a equação de Euler-Lagrange para a variável x_i. Isso pode ser notado com a ajuda do Hamiltoniano (3.61b), o qual podemos reescrever (3.72b) como

$$-\frac{B}{2} \varepsilon_{ij} \dot{x}_j = -\frac{B}{2} q x_i,$$

que é claramente equivalente a (3.72a). Portanto, provamos assim a equivalência entre as equações de Euler-Lagrange com as Equações Características do sistema. Contudo, ainda temos outra variável ω que não possui um equivalente no formalismo Lagrangiano, pois foi introducida em um espaço de fase estendido. Antes de estudar o papel dessas variáveis e seus respectivos Hamiltonianos implementaremos uma visão geométrica sobre a Condição de Integrabilidade.

3.2.5 Quadro Geométrico

Connsideraremos as variáveis canônicas como uma única entidade, digamos $z^I = (q^i, p_i)$, e definamos a seguinte quantidade

$$X^I_\alpha \equiv \left\{z^I, H'_\alpha\right\}, \tag{3.73}$$

esta expressão está intimamente relacionada com o diferencial fundamental (3.29), pois $dz^I = \left\{z^I, H'_\alpha\right\} dt^\alpha = X^I_\alpha dt^\alpha$. De fato, temos que (3.73) são as componentes de um campo vectorial X_α, que avaliado em qualquer função F dá

$$X_\alpha [F] \equiv X^I_\alpha \frac{\partial F}{\partial z^I}. \tag{3.74}$$

Escolheremos $F = z^I$, neste caso temos que $X_\alpha \left[z^I\right] = X^J_\alpha \partial z^I / \partial z^J = X^J_\alpha \delta^I_J = X^I_\alpha$. Portanto, temos que as Equações Características podem ser escritas como

$$dz^I = X^I_\alpha dt^\alpha = X_\alpha \left[z^I\right] dt^\alpha. \tag{3.75}$$

A adequada generalização dessa equação para quaisquer funções no espaço de fase pode ser obtida a partir de (3.74)

$$X_\alpha [F] = \left\{z^I, H'_\alpha\right\} \frac{\partial F}{\partial z^I} = \frac{\partial F}{\partial z^I} \frac{dz^I}{dt^\alpha} = \frac{dF}{dt^\alpha},$$

com o que temos

$$dF = \left\{F, H'_\alpha\right\} dt^\alpha = X_\alpha [F] \, dt^\alpha. \tag{3.76}$$

Vemos que os vetores X_α estão intimamente relacionados à evolução dinâmica do sistema. Resolvendo as Equações Características (3.75) temos que os X_α geram a solução do problema variacional. Por outro lado, o desvio entre os dois vectores é dado pelo comutador

$$[X_\alpha, X_\beta] F = X_\alpha [X_\beta [F]] - X_\beta [X_\alpha [F]], \tag{3.77}$$

podemos escrever essa expressão em termos do Parênteses de Poisson

$$X_\alpha [X_\beta [F]] = X_\alpha \left[\left\{F, H'_\beta\right\}\right] = \left\{\left\{F, H'_\beta\right\}, H'_\alpha\right\},$$

dessa forma, temos que

$$[X_\alpha, X_\beta] F = \left\{\left\{F, H'_\beta\right\}, H'_\alpha\right\} - \left\{\left\{F, H'_\alpha\right\}, H'_\beta\right\} = \left\{\left\{H'_\alpha, H'_\beta\right\}, F\right\},$$

onde na última igualdade usamos a identidade de Jacobi. Considerando que os Hamiltonianos são involutivos, isto é, a equação (3.31) se mantém, podemos escrever

$$[X_\alpha, X_\beta] F = \left\{C^\gamma_{\alpha\beta} H'_\gamma, F\right\} = -C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma [F] + \left\{C^\gamma_{\alpha\beta}, F\right\} H'_\gamma.$$

Portanto, sempre que as constantes de estrutura $C^\gamma_{\alpha\beta}$ são independentes das variáveis canônicas, temos que a Condição de Integrabilidade torna-se

$$[X_\alpha, X_\beta] = -C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma, \tag{3.78}$$

essa equação define uma base para esses vetores. Nota-se que esse procedimento baseia-se na estrutura do diferencial fundamental e nas propriedades algébricas do Parêntese de Poisson, portanto, também é válido no caso em que a dinâmica do sistema tenha que ser redefinida pelo Parêntese Generalizado. Essas ideias geométricas ser ão de utilidade para a construção da estrutura simplética na seguinte seção.

3.2.6 Hamiltonianos Involutivos: Geradores das Transformações Canônicas

No capítulo II construímos a estrutura simplética do espaço de fase considerando a variável $z^I = (q^i, p_i)$ assim como explorando as propriedades dos Parênteses de Poisson e das transformações canônicas. Nesta seção, seguiremos uma análise semelhante usando a geometria diferencial.

Primeiro cogitaremos em um sistema regular e construiremos a chamada 2-forma simplética

$$\omega = dq^i \wedge dp_i, \tag{3.79}$$

que é não-degenerada e fechada ($d\omega = 0$). Nesta expressão também introduzimos o produto exterior $\wedge$ que age nas formas diferenciais. O objeto geométrico (3.79) nos permite escrever uma equação de Hamilton independentemente das coordenadas. Para isso, primeiramente, definimos o seguinte vetor $X_H \equiv (\partial H/\partial p_i, -\partial H/\partial q^i)$. O produto interior, i_{X_H}, é uma operação que mede a contração de uma forma diferencial com um vector, neste caso a contração é definida por

$$i_{X_H} dq^i \equiv \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{3.80a}$$

$$i_{X_H} dp_i \equiv -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{3.80b}$$

O produto interior também pode ser avaliado sobre 2-formas, digamos ω (3.79) seguindo a regra da cadeia

$$i_{X_H}\omega = i_{X_H}\left(dq^i \wedge dp_i\right) = \left(i_{X_H} dq^i\right) dp_i - \left(i_{X_H} dp_i\right) dq^i,$$

desse modo, substituindo (3.80) nesta última equação, obtemos

$$i_{X_H}\omega = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i = dH. \tag{3.81}$$

Essa é a Equação em termo de formas diferenciais. Agora, se queremos construir uma estrutura similar para sistemas singulares temos que examinar cuidadosamente a forma simplética. Nota-se que da definição de momento canônico temos

$$\begin{aligned} \omega_L &= dq^i \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right), \\ &= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j}\right) dq^i \wedge dq^j + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) dq^i \wedge d\dot{q}^j. \end{aligned}$$

Portanto, percebe-se que somente se a Lagrangiana for regular, a forma ω_L será não-degenerada. Este resultado insinua que para sistemas vinculados a forma simplética deve ter um termo referente às variáveis canônicas inversíveis $dq^a \wedge dp_a$.

A terceira Equação Característica (3.19) fornece uma melhor sugestão para a construção da forma simplética, pois ela define uma 1-forma diferencial

$$\theta \equiv dS = p_a dq^a - H_\alpha dt^\alpha, \tag{3.82}$$

a partir da qual obtemos uma 2-forma ω_c diferenciando $\omega = -d\theta$. Logo

$$\omega = dq^a \wedge dp_a + dH_\alpha \wedge dt^\alpha. \tag{3.83}$$

Esta forma simplética depende, como esperado, de um termo chamado principal $\omega_P \equiv dq^a \wedge dp_a$ e um termo que diz sobre a estrutura de vínculos $a \equiv dH_\alpha \wedge dt^\alpha$. Analisamos a 2-forma a a partir do diferencial fundamental $dH_\alpha = \left\{H_\alpha H'_\beta\right\} dt^\beta$, sendo $H'_\alpha = p_\alpha + H_\alpha$ logo

$$\begin{aligned} dH_\alpha &= \left\{H'_\alpha, H'_\beta\right\} dt^\beta - \left\{p_\alpha, H'_\beta\right\} dt^\beta H_\alpha, \\ &= \left\{H'_\alpha, H'_\beta\right\} dt^\beta - \left\{p_\alpha, p_\beta + H_\beta\right\} dt^\beta, \\ &= \left[\left\{H'_\alpha, H'_\beta\right\} + \frac{\partial H_\beta}{\partial t^\alpha}\right] dt^\beta, \end{aligned}$$

sempre que a Condição de Integrabilidade é satisfeita, a última equação torna-se

$$dH_\alpha = \frac{\partial H_\beta}{\partial t^\alpha} dt^\beta = \frac{\partial^2 L}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} dt^\beta. \tag{3.84}$$

Na última linha da equação usamos a definição de H_β. Dessa forma temos que

$$a = \frac{\partial^2 L}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} dt^\beta \wedge dt^\alpha = 0, \tag{3.85}$$

devido à antisimetria do produto exterior e à simetria das derivadas parciais. Portanto, a forma simplética canônica $\omega = \omega_P + a$ é degenerada sempre que a Condição de Integrabilidade for satisfeita. Quando aplicamos o produto interior para esta 2-forma obtemos

$$i_{X_\alpha}\omega = dH'_\alpha, \tag{3.86a}$$

$$i_{X_\alpha} i_{X_\beta}\omega = \left\{H'_\alpha, H'_\beta\right\}, \tag{3.86b}$$

onde o lado direito da equação torna-se nulo sempre que a integrabilidade for satisfeita. Dizemos que os vetores X_α são autovetores da forma simplética e possuem autovalores nulos.

Agora, tendo definido a estrutura simplética passamos a estudar as transformações canônicas, que são aquelas que preservam a forma simplética. Uma vez que as transformações canônicas estão também relacionadas à dinâmica do sistema; primeiro analisaremos a variação de qualquer função F como

$$\delta F = \delta t^\alpha X_\alpha F. \tag{3.87}$$

Aqui consideraremos $\delta t^\alpha = \bar{t}^\alpha - \delta t^\alpha$ que são funções arbitrárias de z^I. Claramente, para $\delta t^\alpha = dt^\alpha$ a equação (3.87) torna-se o diferencial fundamental (3.29). Para $F = z^I$ temos que

$$\delta z^I = \bar{z}^I\left(\bar{t}^\alpha\right) - z^I\left(t^\alpha\right) = \delta t^\alpha X_\alpha\left[z^I\right]. \tag{3.88}$$

Uma transformação g produz essa variação assim

$$\bar{z}^I\left(\bar{t}^\alpha\right) = g z^I\left(t^\alpha\right), \tag{3.89}$$

logo temos que $(g-1)\, z^I = \delta t^\alpha X_\alpha \left[z^I\right]$ ou, equivalentemente

$$g = 1 + \delta t^\alpha X_\alpha. \tag{3.90}$$

A seguir consideraremos a transformação $f = 1 - \delta t^\alpha X_\alpha$, de tal modo que quando se aplica juntamente com g temos

$$gf = 1 - \delta t^\alpha X_\alpha \delta t^\beta X_\beta,$$

e, dado que a Condição de Integrabilidade pode também ser descrita como condição sob os vectores X_α, e ser uma base completa (3.78), temos que se essa condição for satisfeita

$$gf = fg = 1,$$

dessa relação vemos que a inversa da g se escreve como $g^{-1} = f = 1 - \delta t^\alpha X_\alpha$. Agora, esta transformação também afeta a forma simplética como $g\omega g^{-1}$. Substituindo (3.90) temos

$$\begin{aligned} g\omega g^{-1} &= \omega - \delta t^\alpha X_\alpha \delta t^\beta \omega X_\beta, \\ &= \omega - \delta t^\alpha \delta t^\beta i_{X_\alpha} i_{X_\beta} \omega. \end{aligned}$$

Mais uma vez, quando a Condição de Integrabilidade é satisfeita, temos a forma simplética invariante. Portanto, as transformações g são canônicas. Assim, é mostrado que o conjunto completo de Hamiltonianos involutivo H'_α, que está relacionado aos vectores X_α, são geradores das transformações canônicas

$$\delta z^I = \delta t^\alpha X_\alpha z^I = \left\{z^I, H'_\alpha\right\} \delta t^\alpha. \tag{3.91}$$

Nosso interesse no estudo das transformações canônicaa é relacioná-las com as transformações de calibre. Para esse fim, devemos restringir-nos a transformações canônica a tempos fixos, isto é $\delta t^0 = \delta t = 0$, que é o equivalente clâssico à variação de ponto fixo na teoria de campos. Neste caso, para que a seguinte variação

$$\delta z^I = \left\{z^I, H'_z\right\} \delta t^z, \tag{3.92}$$

seja canônica, temos que satisfazer a seguinte condição

$$\left\{H'_x, H'_y\right\} = C^z_{\ xy} H'_z, \tag{3.93}$$

No entanto, essa condição não garante integrabilidade sob a álgebra dos Hamiltonianos, que ainda é dada por (3.31), logo

$$\left\{H'_x, H'_y\right\} = C^0_{\ xy} H'_0 + C^z_{\ xy} H'_z. \tag{3.94}$$

A fim de conciliar essas duas equações, (3.93) e (3.94), temos que considerar $C^0_{\ xy} = 0$ ou $H'_0 = 0$. Uma vez que a condição $C^0_{\ xy} = 0$ se reflete em $\{H'_0, H'_z\} = 0$, vemos que ela é realmente muito forte, pois quase nunca é satisfeita. Por outro lado, a condição $H'_0 = 0$ reduz o

espaço de fase, restringindo a dinâmica para as variações (3.92). Com base nesses pressupostos, dizemos que

$$G^{can} \equiv H'_z \delta t^z, \tag{3.95}$$

é o Gerador das transformações canônica, pois

$$\delta z^I = \left\{ z^I, G^{can} \right\}. \tag{3.96}$$

Mesmo que esse Gerador não seja o Gerador da transformações de calibre G^g no sentido Lagrangiano, podemos relacioná-los quando impomos que (3.96) deixa o funcional de ação invariante, bem como a estrutura das Equações Características. Consideramos isto devido a seguinte razão: sabemos que a função S foi definida mediante variações a ponto fixo como $L^* - L = dS/dt$; no caso regular essa função corresponde ao funcional de ação da teoria, enquanto que para o caso singular, simplesmente podemos dizer que o diferencial $dS = \theta$ é proporcional à variação a ponto fixo ΔL. Por outro lado, esse diferencial esta relacionado à 1-forma simplética (3.82) a qual é preservada pelas variações (3.88), tal que

$$I \equiv \int \omega = \int d\theta, \tag{3.97}$$

assim, as variações que preservam a integral, devem satisfazer a Equação de Lie até termos uma diferencial total. Isto é, sendo invariâncias ou quase-invariâncias da teoria, relacionamos assim os geradores G^{can} e G^g. Agora, continuamos com o modelo da Mecânica Quântica Topologica para esclarecer este procedimento.

3.2.7 Mecânica Quântica Topológica: Hamiltonianos involutivos

Consideraremos o modelo da Mecânica Quântica Topológica estudado anteriormente. Das Equações Características (3.71) e (3.72) temos que as variações independentes ao longo das variáveis λ e ω , denotadas por δ_λ e δ_ω são dadas por

$$\begin{aligned} \delta_\lambda q &= \delta\lambda, \\ \delta_\omega x_i &= -\varepsilon_{ij} x_j \delta\omega, \\ \delta_\omega p_i &= -\frac{B}{2} x_i \delta\omega. \end{aligned}$$

Essas variações representam transformações globais por estarem relacionadas aos parâme-tros independentes $\delta\lambda$ e $\delta\omega$. Agora, já sabemos que a Mecânica Quântica Topológica apresenta uma simetria relacionada a uma transformação local (3.60). Essas transformações locais não são consideradas dentro da Condicão de Integrabilidade devido a que esta impõe independencia entre t, λ e ω. Superamos este problema considerando $\lambda = \lambda(t)$ e $\omega = \omega(t)$ e escrevendo as variações como

$$\delta q = \delta\lambda, \tag{3.98a}$$

$$\delta x_i = -\varepsilon_{ij} x_j \delta\omega, \tag{3.98b}$$

$$\delta p_i = -\frac{B}{2} x_i \delta\omega. \tag{3.98c}$$

Aqui eliminamos os subíndices porque todas as variações estão relacionadas. Além disso, observamos que, se substituirmos a definição dos momentos canônicos em (3.98c) obtemos o mesmo resultado que (3.98b) logo, serão equações equivalentes.

Sabemos que o Gerador das transformações canônicas G^{can} é dado pela combinação linear dos Hamiltonianos involutivos $G_\lambda \equiv H'_q$ e $G_\omega \equiv C$. Escrevemos

$$G^{can} \equiv G_\lambda \delta\lambda + G_\omega \delta\omega. \tag{3.99}$$

Esse é o Gerador da transformações canônicas, pois seus Parênteses Generalizados com as variáveis q, x_i e p_i ocorre

$$\{q, G^{can}\}^* = \delta\lambda, \tag{3.100a}$$

$$\{x_i, G^{can}\}^* = -\varepsilon_{ij} x_j \delta\omega, \tag{3.100b}$$

$$\{p_i, G^{can}\}^* = -\frac{B}{2} x_i \delta\omega. \tag{3.100c}$$

Nota-se que esses parênteses coincidem com as variações (3.98). Agora, ao substituir essas variações em (3.56), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta L &= -B\left(\varepsilon_{ij}\dot{x}_j - q x_i\right)\varepsilon_{ik} x_k \delta\omega - C\delta\lambda + \frac{d}{dt}\left(\frac{B}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik} x_j x_k \delta\omega\right), \\ &= \nu\delta\lambda + \frac{B}{2} x_k x_k \left(\delta\dot{\omega} - \delta\lambda\right). \end{aligned}$$

A partir dessa expressão vemos que, se considerarmos $\delta\lambda = \delta\dot{\omega}$, a teoria é quase-invariante. Além disso, sob esta condição, o Gerador das transformações canônicas torna-se o Gerador da transformação de calibre

$$G^g \equiv G_\lambda \delta\dot{\omega} + G_\omega \delta\omega, \tag{3.101}$$

pois gera as variações

$$\delta q = \{q, G^g\}^* = \delta\dot{\omega}, \tag{3.102a}$$

$$\delta x_i = \{x_i, G^g\}^* = -\varepsilon_{ij} x_j \delta\omega, \tag{3.102b}$$

que são as bem conhecidas transformações de calibre do modelo. Agora, notemos que o espaço de fase inicial desse modelo tem a dimensão $2N = 6$, devido as 4 variáveis canônicas relacionadas ao par (x_i, p_i) e 2 ao par (q, π). E um total de $N_n + N_i = 4$ Hamiltonianos, sendo $N_n = 2$ não-involutivos e $N_i = 2$ involutivos. Ainda assim, como mostrado pelo diferencial fundamental, existem $N_i = 2$ parâmetros independentes, previamente a relacionar esses Hamiltonianos involutivos a geradores da transformação de calibre, sem contar ao parâmetro temporal. A construção dos Parênteses Generalizados mostrou que podemos eliminar Hamiltonianos do sistema sempre que estes sejam não-involutivos, então, se considerarmos mais $N_i = 2$ Hamiltonianas para eliminar os parâmetros independentes, temos um sistema bem definido. Neste caso, o espaço de fase do sistema, chamado de espaço de fase reduzido tem dimensão $2N^* \equiv 2N - (N_n + N_i) - N_i = 2N - N_n - 2N_i$. Enquanto que o número total de graus de liberdade é N^*, vemos que o modelo de Mecânica Quântica Topologica, o sistema não possui graus de liberdade.

Capítulo 4

O modelo BF para a Gravitação Bi-dimensional

4.1 Introdução

Até o momento não existe nenhuma teoria quântica satisfatória para a Gravitação em quatro dimensões. A fim de compreender algumas propriedades da gravidade em nível quântico, alguns teóricos têm encontrado um interessante tema de pesquisa em modelos de dimensão inferior de gravitação [52]. Existem, no entanto, algumas trivialidades nesses modelos. Por exemplo, a gravitação tridimensional pura não contém graus de liberdade, porém no caso bidimensional, é bem conhecido que as equações de Einstein tornam-se identicamente nulas.

Devido a este comportamento trivial da Gravitação bidimensional costuma-se fazer algumas reformulações na ação de Einstein-Hilbert. Um dos modelos mais utilizados se deve a Jackiw e a Teitelboim [53], em que a ação é dada por

$$W_{JT} = \int d^2x\sqrt{g}\psi\left(R-k\right), \tag{4.1}$$

onde ψ é um campo dilaton utilizado como multiplicador de Lagrange, e k é a constante cosmológica. As equações de Euler-Lagrange para o modelo de Jackiw-Teitelboim são dadas por

$$R-k=0, \;\; \nabla_\mu\nabla_\nu\psi+\frac{1}{2}kg_{\mu\nu}\psi=0, \tag{4.2}$$

isto é, tornando nula a variação do campo dilaton, obtém-se a curvatura constante, enquanto que a equação de movimento para o campo dilaton é determinado sem fazer restrições adicionais sobre a métrica. Para uma extensa revisão de dois modelos dilaton bi-dimensionais da gravidade ver a referência [34].

O modelo de Jackiw-Teitelboim pode ser reformulado como uma teoria de calibre $SO(2,1)$ que pode ser reproduzido através de uma ação BF [54]. A análise Hamiltoniana do modelo de BF foi estudada tanto no nível clássico como quântico em [55].

Neste capítulo mostraremos como é construído o modelo BF, assim como a sua equivalência com o modelo de Jackiw-Teitelboim. Em seguida faremos a análise de vínculos, construindo

os Parênteses Generalizados, assim como obteremos as Equações Características. Analisando essas equações construíremos o gerador de transformações canônicas.

4.2 O Modelo BF

Sob uma variedade d-dimensional $\mathcal{M}$, o modelo BF consiste num grupo de Lie G uma $(d-2)-$forma B, também chamada de campo de fundo (Background) ou simplesmente campo B, e uma $2-$forma F. A ação BF é dada por

$$W_{BF}[B,A] = \int_{\mathcal{M}} Tr(B \wedge F), \tag{4.3}$$

onde a conexão de calibre A é uma $1-$forma relacionada a F através da derivada covariante D como $F = DA = dA + A \wedge A$. Considerando um elemento do grupo de Lie da teoria como g, percebe-se que sob a representação adjunta de G, o traço do produto exterior é invariante de calibre

$$Tr(B^g \wedge F^g) = Tr(gBg^{-1} \wedge gFg) = Tr(gB \wedge Fg^{-1}) = Tr(B \wedge F).$$

Certamente, dependendo da dimensão da variedade, podem ser construídos outros invariantes. Por exemplo, para $d = 2$ podemos adicionar o termo $Tr(B \wedge B)$ a (4.3), ou em $d = 3$ adicionar $Tr(B \wedge B \wedge B)$. A seguir, estudaremos puramente o modelo BF bidimensional.

Quando estudamos as variações totais de um determinado funcional de ação, separamos explicitamente a variação na forma da Lagrangiana da variação do volume de integração. Na linguagem das formas diferenciais, a forma funcional de ação não contém explicitamente o elemento volume, por estar escrito implicitamente na conexão de calibre $A = A_\mu dx^\mu$, assim como no campo B. Para escrever a Equação de Lie para o modelo BF, abandonamos a elegância da notação das forma diferenciais e, em vez disso, usamos as componentes

$$F = \frac{1}{2!} F^a_{\mu\nu} J_a dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{4.4a}$$

$$B = B^a J_a \tag{4.4b}$$

onde J_a são os geradores da álgebra de Lie $\mathcal{G}$, isto é, $A_\mu = A^a_\mu J_a$. Dado que a conexão de calibre e seu respectivo campo F são relacionados por uma derivada covariante, da equação (4.4a) obtemos a seguinte relação

$$F^a_{\mu\nu} J_a = \partial_\mu A^a_\nu J_a - \partial_\nu A^a_\mu J_a + A^a_\mu A^b_\nu [J_a, J_b]. \tag{4.5}$$

Especializamo-nos em álgebras de Lie tal que $[J_a, J_b] = f_{\ ab}^{\ c} J_c$, onde a constante de estrutura é indicada por $f_{\ ab}^{\ c}$. Assim temos que

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f_{bc}^{\ \ a} A^b_\mu A^c_\nu, \tag{4.6}$$

permitindo-nos escrever a derivada covariante do seguinte modo

$$D_\mu A^a_\nu = \partial_\mu A^a_\nu - f_{bc}^{\ \ a} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{4.7}$$

Agora, quando substituímos a expressão para a campo F assim como para o campo B das equações (4.4) no funcional de ação (4.3), obtemos

$$W_{BF}[B,A] = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} B^a F^b_{\mu\nu} g_{ab} dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

com $g_{ab} = Tr(J_a J_b)$. Uma vez que o traço de uma matriz é uma aplicação linear e simétrica, $g_{ab} = g_{ba}$ podem ser consideradas como as componentes de um tensor métrico. Dessa forma, podemos descer os índices por meio desse traço, isto é, $B_a = g_{ab}B^b$. É claro que se g_{ab} possui uma inversa, também podemos subir os índices como $B_a = g^{ab}B_b$. Devido à antissimetria do produto exterior, podemos escrever a ação do modelo BF como

$$W_{BF}[B,A] = \varepsilon^{01}\int_{\mathcal{M}} d^2x F_{01} B_a, \tag{4.8}$$

onde $\varepsilon^{\alpha\beta}$ é o tensor de Levi-Civita, e por notação consideramos $\varepsilon^{01} = 1$.

As propriedades principais do formalismo Lagrangiano podem ser obtidas através da realização das variações totais no funcional de ação (4.8). Considerando que os elementos g_{ab} não são dependentes do espaco-tempo, escrevemos a Equação de Lie como

$$\Delta\mathcal{L} = \delta B_a F^a_{01} + \delta A^a_\alpha \left(\delta^\alpha_0 D_1 B_a - \delta^\alpha_1 D_0 B_a\right) + \delta x^\alpha \Theta^\mu{}_\alpha + \partial_\mu G^\mu, \tag{4.9}$$

onde

$$\Theta^\mu{}_\alpha = \left(\delta^\mu_0 \partial_\nu A^a_1 - \delta^\mu_1 \partial_\nu A^a_0\right) B_a - \delta^\mu_\nu F^a_{01} B_a, \tag{4.10a}$$

$$G^\mu = \delta^\mu_0 B_a \delta A^a_1 - \delta^\mu_1 B_a \delta A^a_0 - \Theta^\mu{}_\alpha \delta x^\alpha, \tag{4.10b}$$

são o tensor de Energia-Momento canônico $\Theta^\mu{}_\alpha$ e o gerador G^μ. As equações de Euler-Lagrange do formalismo são obtidas considerando as variações a ponto fixo e campos nulos quando calculados no contorno determinado. Nesse caso obtemos

$$0 = F^a_{01}, \tag{4.11a}$$

$$0 = \delta^\alpha_0 D_1 B_a - \delta^\alpha_1 D_0 B_a. \tag{4.11b}$$

Ambas as equações podem ser reescritas como $F = 0$ e $DB = 0$. A interpretação dessas equações é direta pois temos uma conexão plana A, já que possui um campo F nulo, enquanto que o campo B é paralelo a A.

Considerando somente as variações a ponto fixo, $\delta x^\alpha = 0$, temos que (4.9) se torna

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= \delta B_a F^a_{01} + \delta A^a_0 D_1 B_a - \delta A^a_1 D_0 B_a + \partial_\mu\left(\delta^\mu_0 B_a \delta A^a_1 - \delta^\mu_1 B_a \delta A^a_0\right), \\ &= \delta B_a F^a_{01} + \delta A^a_0 D_1 B_a - \delta A^a_1 D_0 B_a + \partial_0\left(B_a \delta A^a_1\right) - \partial_1\left(B_a \delta A^a_0\right).\end{aligned}$$

Pode-se obter uma forma mais conveniente para esta expressão através da substituição da definição da derivada covariante

$$\Delta\mathcal{L} = \delta B_a F^a_{01} + B_a\left(D_0 \delta A^a_1 - D_1 \delta A^a_0\right). \tag{4.12}$$

Construímos a teoria considerando que A^a_μ é um campo de calibre, então, a pergunta que se faz será saber que tipo de transformação para o campo B torna o modelo BF invariante. A fim de testar as propriedades de invariância de calibre, vamos primeiro substituir $\delta A^a_\mu = D_\mu \Lambda^a$, onde Λ^a é função diferenciável arbitrária. Neste caso temos que (4.12) se torna

$$\Delta\mathcal{L} = \delta B_a F^a_{01} + B_a \left[D_0, D_1\right] \Lambda^a,$$

e de (4.7) podemos demonstrar a regra de comutação

$$\left[D_0, D_1\right] \Lambda^a = -f_{bc}{}^a \Lambda^b F^c_{01}. \tag{4.13}$$

Logo,

$$\Delta\mathcal{L} = \delta B_a F^a_{01} - f_{bc}{}^a B_a \Lambda^b F^c_{01} = \left(\delta B_a - f_{ca}{}^b B_b \Lambda^c\right) F^a_{01}.$$

A imposição da invariância de calibre $\Delta\mathcal{L} = 0$ sobre $\delta A^a_\mu = D_\mu \Lambda^a$ torna-se uma restrição sobre o campo B

$$\delta B_a = f_{ca}{}^b B_b \Lambda^c = -f_{ac}{}^b B_b \Lambda^c.$$

Portanto,

$$\delta A^a_\mu = D_\mu \Lambda^a, \tag{4.14a}$$
$$\delta B_a = -f_{ac}{}^b B_b \Lambda^c, \tag{4.14b}$$

são transformações de calibre, por deixarem invariante a teoria.

4.2.1 O modelo BF bidimensional e a teoria de Jackiw-Teitelboim

A seguir, construiremos um modelo de teoria de calibre do grupo de Poincaré $ISO(1,1)$, em que escrevemos a conexão A como a combinação da $1-$forma zweibein e^I e a $1-$forma de conexão de spin ω. Esses campos são considerados independentes, pois trabalhamos no formalismo da primeira ordem da gravitação

$$A = e^I P_I + \omega \Lambda, \tag{4.15}$$

onde $I = 0, 1$, e P_I e Λ são os geradores das translações e *boost* de Lorentz, respectivamente

$$\left[\Lambda, P_I\right] = \epsilon_I{}^J P_J, \quad \left[P_I, P_J\right] = 0, \tag{4.16}$$

também definimos o símbolo de Levi-Civita ϵ_{IJ} tal que $\epsilon_{01} = 1$. A métrica de Killing é definida através desses geradores como

$$g_{ab} = Tr(J_a J_b), \quad a, b = 0, 1, 2, \tag{4.17}$$

com $J_0 = P_0$, $J_1 = P_1$ e $J_2 = \Lambda$. No caso bidimensional, a métrica de Killing é degenerada, logo, não é possível construir uma teoria de calibre consistente. É habitual considerar a presença

de uma constante cosmológica k não nula, de modo que se pode deformar a álgebra de Poincaré em álgebra de (anti) de Sitter

$$[\Lambda, P_I] = \epsilon_I \ ^J P_J, \quad [P_I, P_J] = k\epsilon_{IJ}\Lambda, \tag{4.18}$$

nesse caso, a métrica de Killing resulta invariante e não degenerada

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} k\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

A álgebra de (anti) de Sitter expressa em termos dos geradores J_a é dada por $[J_a, J_b] = f_{ab} \ ^c J_c = \epsilon_{abc} g^{cd} J_d$, com $g_{ab} = 1/2 f_{ac} \ ^d f_{db} \ ^c$ e $\epsilon_{012} = 1$.

Em termos do zweibein e a conexão de spin temos que o campo F pode ser escrito como

$$F = (de^I - \omega\epsilon^I{}_J \wedge e^J)P_I + (d\omega + \frac{k}{2}\epsilon_{IJ}e^I \wedge e^J)\Lambda \equiv T^I P_I + R\Lambda, \tag{4.20}$$

em que T^I e R representam a $2-$formas de torsão e curvatura do campo zweibein no formalismo de primeira ordem. A equação de conexão plana se lê

$$de^I = \omega\epsilon^I{}_J \wedge e^J, \tag{4.21a}$$

$$d\omega = -\frac{k}{2}\epsilon_{IJ}e^I \wedge e^J. \tag{4.21b}$$

Considerando um campo zweibein inversível, é possível calcular a conexão de spin, da qual obtemos o escalar de curvatura de Ricci $R = k$. Esse é o procedimento padrão para mostrar a equivalência entre os modelos BF bi-dimensional com a teoria de Jackiw-Teitelboim, encontrando-se, por exemplo, em [54] e [56].

4.3 Formalismo de Hamilton-Jacobi

Vimos na seção anterior que a ação do modelo BF bidimensional (4.3) pode ser utilizada para modelar a teoria da gravitação de Jackiw-Teitelboim. Na construção do modelo, definimos objetos geométricos, as formas diferenciais, assim como a derivada covariante (4.7), que podem ser introduzidas novamente no funcional de ação (4.3), para assim poder escrever

$$W_{BF}[B, A] = \int dx^2 B_a(\partial_0 A_1^a - D_1 A_0^a). \tag{4.22}$$

Como é possível eliminar termos de divergência na ação sem afetar as equações de movimento, reescrevemos (4.3) por meio de sua ação equivalente

$$W_{BF}[B, A] = \int dx^2 \left(B_a \partial_0 A_1^a + A_0^a D_1 B_a\right), \tag{4.23}$$

que é mais adequada para uma análise de vínculos, pois considera a componente A_0^a como um multiplicador de Lagrange. As ações equivalentes (4.22) e (4.23) fornecem as mesmas equações

de Euler-Lagrange (4.11). Assim, a invariância de calibre é preservada ainda que tenhamos eliminado os termos de divergência.

A ausência do termo $\partial_0 B_a$ assim como a linearidade das velocidades A_1^a fazem de (4.22) e (4.23) ações de primeira ordem. Como ações de primeira ordem são escritas na forma canônica $L = \dot{q}^i p_i - H_0$; de modo claro identificamos os momentos canônicamente conjugados

$$\pi_a^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu^a)}, \qquad \Pi^a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 B_a)}, \tag{4.24}$$

como vínculos canônicos. Reconhecemos também a Hamiltoniana canônica $\mathcal{H}_0 = -A_0^a D_1 B_a$. E o conjunto de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi é

$$\mathcal{H}' \equiv \pi + \mathcal{H}_0 = 0 \to x^0, \tag{4.25a}$$
$$\mathcal{H}'^0_a \equiv \pi_a^0 = 0 \to A_0^a \equiv \lambda_0^a, \tag{4.25b}$$
$$\mathcal{H}'^1_a \equiv \pi_a^1 - B_a = 0 \to A_1^a \equiv \lambda_1^a, \tag{4.25c}$$
$$\mathcal{H}'^a \equiv \Pi^a = 0 \to B_a \equiv \epsilon_a. \tag{4.25d}$$

O lado esquerdo dessas equações são chamadas de densidades Hamiltonianas. Para cada uma delas temos as variáveis independentes x^0, λ_μ^a e ϵ_a que desempenham o papel de parâmetros da teoria. Definimos os Parênteses de Poisson tal que

$$\{A_\mu^a, \pi_b^\nu\} = \delta_b^a \delta_\nu^\mu \delta(x-y), \quad \{B_a, \Pi^b\} = \delta_b^a \delta(x-y). \tag{4.26}$$

Com essa estrutura, escreve-se o diferencial fundamental, que descreve a evolução dinâmica de qualquer função no espaço de fase tal como

$$dF = \int dy \left[\{F, \mathcal{H}'\} dx^0 + \{F, \mathcal{H}'^\mu_a\} d\lambda_\mu^a + \{F, \mathcal{H}'^a\} d\epsilon_a\right]. \tag{4.27}$$

Nota-se que a partir desse diferencial, as densidades Hamiltonianas atuam como geradores da evolução dinâmica em cada direção dos seus correspondentes parâmetros. O diferencial fundamental é utilizado para testar a Condição de Integrabilidade a fim de encontrar outras possíveis densidades hamiltonianas. Como estudado no Capítulo III, também analisaremos a álgebra das densidades hamiltonianas anteriores, construiremos os Parênteses Generalizados com os hamiltonianos não-involutivos para depois encontrarmos os vínculos restantes. Para o modelo BF, esse método simplifica os cálculos, como esclarece certos aspectos do formalismo.

Como o subconjunto de densidades Hamiltonianas $h^0 \equiv \mathcal{H}'^a$ e $h^1 \equiv \mathcal{H}'^1_a$ é não-involutivo, construímos a matriz $M(x,y)$ com componentes

$$M^{rs}(x,y) \equiv \{h^r(x), h^s(y)\} = \begin{pmatrix} 0_{3\times3} & 1_{3\times3} \\ -1_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{pmatrix} \delta(x-y), \quad r,s = 0,1. \tag{4.28}$$

Essa matriz possui inversa

$$M^{-1}_{rs}(x,y) = \begin{pmatrix} 0_{3\times3} & -1_{3\times3} \\ 1_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{pmatrix} \delta(x-y), \tag{4.29}$$

com a qual é possível reduzir o espaço de fase eliminando os parâmetros relacionados às densidades Hamiltonianas não-involutivas $(\lambda_1^a, \epsilon_a)$ construindo os Parênteses Generalizados

$$\{F(x), G(y)\}^* \equiv \{F(x), G(y)\} - \int dzdw\{F(x), h'^s(z)\}M_{rs}^{-1}(z,w)\{h'^r(w), G(y)\}, \quad (4.30)$$

assim o novo diferencial fundamental é dado por

$$dF = \int dx \left[\{F, \mathcal{H}'\}^* dx^0 + \{F, \mathcal{H}_a'^0\}^* d\lambda_0^a\right]. \quad (4.31)$$

Da equação (4.30) obtemos que os únicos Parênteses Generalizados não nulos são

$$\{A_\mu^a, \pi_b^\nu\}^* = \delta_b^a \delta_\nu^\mu \delta(x-y), \qquad \{A_\mu^a(x) B_b(y)\}^* = \delta_b^a \delta_\mu^1 \delta(x-y).$$

A redução do espaço de fase é agora evidente, desde que B_a e Π^a não são mais variáveis canônicamente conjugadas. De fato, agora temos que B_a tem o papel de momento canônico do π_a^1. Assim como mencionamos anteriormente, precisamos testar a Condição de Integrabilidade do sistema. Observamos que $d\mathcal{H}_a'^0 = 0$ fornece a relação

$$dH_a'^0 = -D_1 B_a dx^0,$$

por isso temos de considerar uma nova densidade Hamiltoniana

$$\mathcal{C}_a' \equiv D_1 B_a = 0. \quad (4.32)$$

Qualquer nova Hamiltoniana deve satisfazer a Condição de Integrabilidade. Aqui $d\mathcal{C}_a' = 0$ é satisfeita identicamente, portanto, não é necessário definir novas densidades Hamiltonianas e o programa Integrabilidade está fechado.

4.3.1 Equações Características

O modelo BF só possui duas densidades Hamiltonianas sob a álgebra dos Parênteses Generalizados $\mathcal{G}_a^0 \equiv \mathcal{H}_a'^0$ e $\mathcal{G}_a \equiv \mathcal{C}_a'$. Nós os tínhamos renomeado, uma vez que é sabido que estes hamiltonianos agem como geradores da evolução dinâmica $\mathcal{G}_a^0$ e $\mathcal{G}_a$ sendo eles involutivos

$$\{\mathcal{G}_a(x), \mathcal{G}_b(y)\}^* = f_{ab}{}^c \mathcal{G}_c(x)\delta(x-y).$$

Impondo ω^a como um novo parâmetro, que corresponde ao gerador $\mathcal{G}_a$, o diferencial fundamental final é dado por

$$dF = \int dx \left[\{F, \mathcal{H}'\}^* dx^0 + \{F, \mathcal{G}_a^0\}^* d\lambda^a + \{F, \mathcal{G}_a\}^* d\omega^a\right], \quad (4.33)$$

em que também renomeamos $\lambda^a \equiv \lambda_0^a$. As Equações Características são computadas através da equação (4.33). Obtemos

$$dB_a = -f_{ab}{}^c B_c \left[A_0^b dx^0 + d\omega^b\right], \quad (4.34a)$$

$$d\Pi^a = 0, \quad (4.34b)$$

e

$$dA^a_\mu = \delta^1_\mu D_1 A^a_0 dx^0 + \delta^0_\mu d\lambda^a - \delta^1_\mu D_1 d\omega^a, \tag{4.35a}$$

$$d\pi^\mu_a = \delta^0_\mu D_1 B_a dx^0 - \delta^1_\mu f_{ab}{}^c B_c \left[A^b_0 dx^0 - d\omega^b\right]. \tag{4.35b}$$

Essas equações devem ser equivalentes as Euler-Lagrange(4.11). Como usamos um parâmetro ω^a a mais que no formalismo Lagrangiano, é preciso esclarecer em que condições a equivalência dessas equações é válida. Devido a todos os parâmetros x^0, λ^a e ω^a serem linearmente independentes e devido à Condição de Integrabilidade, a evolução dinâmica na direcção de cada um dos dados parâmetros é totalmente independente dos outros. Portanto, a evolução temporal para o conjunto de Equações Características (4.34) é dada por

$$D_0 B_a = 0, \tag{4.36a}$$

$$\partial_0 \Pi^a = 0. \tag{4.36b}$$

Vemos que (4.36a) é uma das equações de Euler-Lagrange para o campo B (4.11b). Como o momento canônico Π^a é nulo, a equação (4.36b) representa a condição para a integrabilidade da densidade Hamiltoniana relacionada a esse momento. Essa relação está também relacionada ao fato de que o campo B_a serve como multiplicador de Lagrange na ação. A evolução temporal para o segundo conjunto de Equações Características (4.35) é

$$\partial_0 A^a_\mu = \delta^1_\mu D_1 A^a_0, \tag{4.37a}$$

$$\partial_0 \pi^\mu_a = \delta^0_\mu D_1 B_a - \delta^1_\mu f_{ab}{}^c B_c A^b_0. \tag{4.37b}$$

Nota-se que a componente $\mu = 0$ para a equação (4.37a) afirma que A^a_0 permanece como um parâmetro da teoria, enquanto que a componente $\mu = 1$ é a equação de Euler-Lagrange (4.24). Para $\mu = 0$, (4.37b) produz $\partial_0 \pi^0_a = D_1 B_a = \mathcal{C}'_a$, que é zero por imposição de Integrabilidade. Portanto, esta equação reproduz a equação de Euler-Lagrange $D_1 B_a = 0$. Finalmente, para $\mu = 1$ (4.37b) obtemos

$$\partial_0 \pi^1_a + f_{ab}{}^c B_c A^b_0 = 0,$$

dessa relação, assim como de (4.36a) obtemos que $\partial_0 \pi^1_a = \partial_0 B_a$, que corrobora a interpretação de B_a como momento canonicamente conjugado a A^a_1. Assim, temos mostrado que a evolução temporal das Equações Características (4.34) e (4.35) é completamente equivalente as equações de Euler-Lagrange (4.11).

4.3.2 Geradores das Transformações Canônicas e de Calibre

As Equações Características também fornecem as variações nas direções dos parâmetros λ^a and ω^a. Por considerarmos esses parâmetros independentes, as variações globais ao longo desses parâmetros são dadas por

$$\delta_\lambda A^a_\mu = \delta^0_\mu \delta\lambda^a, \quad \delta_\omega A^a_\mu = -\delta^1_\mu D_1 \delta\omega^a, \tag{4.38a}$$

$$\delta_\omega \pi^\mu_a = \delta^1_\mu f_{ab}{}^c B_c \delta\omega^b. \tag{4.38b}$$

Nota-se que escrevemos δ_λ e δ_ω para indicar as variações independentes nas direções λ^a e ω^a respectivamente. Não escrevemos as variações para o campo B_a por ser é equivalente ao momento canônico π^1_a.

A fim de analisar uma versão local para as variações (4.38), temos que considerar os parâmetros dependentes do tempo $\lambda^a = \lambda^a(x^0)$ e $\omega^a = \omega^a(x^0)$. Para esse caso, escrevemos

$$\delta A^a_\mu = \delta^0_\mu \delta\lambda^a - \delta^1_\mu D_1 \delta\omega^a, \tag{4.39a}$$

$$\delta\pi^\mu_a = \delta^1_\mu f_{ab}{}^c B_c \delta\omega^b. \tag{4.39b}$$

O gerador das transformações canônicas é dado por

$$G^{can} \equiv \int dy \left[\mathcal{G}^0_a \delta\lambda^a + \mathcal{G}_a \delta\omega^a\right], \tag{4.40}$$

pois

$$\delta A^a_\mu = \left\{A^a_\mu, G^{can}\right\}^* = \delta^0_\mu \delta\lambda^a - \delta^1_\mu D_1 \delta\omega^a, \tag{4.41a}$$

$$\delta\pi^\mu_a = \left\{\pi^\mu_a, G^{can}\right\}^* = \delta^1_\mu f_{ab}{}^c B_c \delta\omega^b. \tag{4.41b}$$

A fim de relacionar o gerador G^{can} com o gerador das transformações de calibre, podemos testar, substituindo na equação de Lie a ponto fixo (4.12), lembrando que $\pi^1_a = B_a$, logo

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= \delta\pi^1_a F^a_{01} + B_a \left(D_0 \delta A^a_1 - D_1 \delta A^a_0\right), \\ &= f_{ab}{}^c B_c \delta\omega^b F^a_{01} + B_a \left(-D_0 D_1 \delta\omega^a - D_1 \delta\lambda^a\right).\end{aligned}$$

Utilizando a regra de comutação para derivadas covariantes, equação (4.13), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= f_{ab}{}^c B_c \delta\omega^b F^a_{01} + B_a \left(-D_1 D_0 \delta\omega^a + f_{bc}{}^a \delta\omega^b F^c_{01} - D_1 \delta\lambda^a\right), \\ &= -B_a D_1 \left(D_0 \delta\omega^a + \delta\lambda^a\right) + B_c \delta\omega^b F^a_{01} \left(f_{ab}{}^c + f_{ba}{}^c\right),\end{aligned}$$

O segundo termo no lado direito da equação é igual a zero devido à antissimetria da constante de estrutura. Portanto, se o conjunto de variações (4.39) ou (4.41) deixa a teoria invariante $\Delta\mathcal{L} = 0$, os parâmetros λ^a e $\delta\omega^a$ não são mais totalmente independentes, mas satisfazem as seguintes relações

$$\delta\omega^a = -\Lambda^a, \tag{4.42a}$$

$$\delta\lambda^a = D_0 \Lambda^a, \tag{4.42b}$$

Claramente, sob essas condições, o gerador de transformações canônicas G^{can} se torna o gerador das transformações de calibre

$$G^{gauge} \equiv \int dy \left[\mathcal{G}^0_a D_0 \Lambda^a - \mathcal{G}_a \Lambda^a\right],$$

pois reproduz as transformações de calibre (4.32)

$$\delta A^a_\mu = \left\{A^a_\mu, G^{gauge}\right\}^* = \delta^0_\mu D_0 \Lambda^a + \delta^1_\mu D_1 \Lambda^a = D_0 \Lambda^a, \tag{4.43a}$$

$$\delta B_a = \left\{\pi^1_a, G^{gauge}\right\}^* = -f_{ab}{}^c B_c \Lambda^b, \tag{4.43b}$$

as mesmas obtidas da análise da Equação de Lie. Finalmente, contaremos o número de graus de liberdade da teoria. Lembremos que o índice a possui 3 valores, portanto, o número de variáveis canônicas é 6×3, sendo 2×3 relacionadas ao par (B_a, Π^a), e 4×3 ao par (A^a_μ, π^μ_a). Também temos 2×3 Hamiltonianos não-involutivos $(\mathcal{H}'^1_a, \mathcal{H}'a)$ e 2×3 Hamiltonianos involutivos $(\mathcal{G}^a_\lambda, \mathcal{G}^a_\omega)$, dando como resultado um espaço de fase de dimensão $6\times3-2\times3-2(2\times3) = 0$, sendo este também o número de graus de liberdade do modelo BF.

Capítulo 5

Campo de Yang-Mills Topologicamente Massivo e Auto-dualidade

5.1 Introdução

É bem conhecido que em $2+1$ dimensões as teorias não-abelianas são super-renormalizáveis e sofrem de divergências infravermelhas. Uma maneira de evitar essas divergências [57] é pela adição de um termo de Chern-Simons, ou seja, construir uma teoria Topologicamente Massiva [35]. Assim, temos a teoria de Maxwell-Chern-Simons, a teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva e da Gravitação Topologicamente Massiva. Como resultado da adição do termo de Chern-Simons, é fornecida uma massa para os campos mantendo a sua invariância de calibre. Outra característica importante das teorias Topológicamente Massivas é que, a nível quântico a massa topológica fornece um *cut-off* infravermelho natural. Essas teorias são também de grande interesse uma vez que elas são de utilidade em modelos de matéria condensada, como no Efeito Hall Quântico [58], superconductividade [59], bem como a sua relevância no estudo de teorias de calibre quatro-dimensionais com alta temperatura [60].

Com relação à análise da vínculos, a teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva foi estudada usando o formalismo Hamiltoniano em [61]. Esta análise demonstrou que a álgebra dos vínculos, bem como o número de graus de liberdade são inalterados pelo termo massivo. A teoria de Maxwell-Chern-Simons foi quantizada, utilizando a quantização canônica de Dirac assim como também pelo Princípio de Ação de Schwinger em [62]. Mais recentemente, tanto a teoría de Maxwell-Chern-Simons como a teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva foram analisadas utilizando o formalismo de primeira ordem [63] desde que o cálculo dos vértices se tornam mais simples. Em primeira ordem também temos que estas teorias já estão escritas na forma canônica e a identificação dos vínculos é direta. É importante destacar que existe uma correspondência entre as teorias Topologicamente Massivas e os modelos Auto-duais, esses últimos introduzidos por Townsend [36]. Os modelos Auto-duais também são definidos em dimensões ímpares, mas apresentam uma estrutura mais simples no que diz respeito às teorias Topologicamente Massivas devido à linearidade nos campos de velocidade. Essa equivalência

foi analisada com o formalismo de Faddev-Jackiw [37] e foram revistas em [64] e [65]. A importância dessa equivalência reside na estrutura das teorias Topologicamente Massivas que também pode ser estudada com os mais simples e equivalentes modelos Auto-duais.

Por outro lado, existem diversas formas de estudar a dinâmica de um sistema. Como foi indicado por Dirac [66], essas formas de dinâmica são resultados de se impor que as equações de movimento da teoria sejam expressas na sua forma Hamiltoniana, enquanto se mantenha invariante sob transformações de Poincaré e, estão, por sua vez, relacionadas com a escolha de uma hipersuperfície onde são impostas as condições iniciais do problema em particular. A chamada forma Frontal ou de Plano nulo é que a superficie em consideração é $\Sigma : \tau = x^+$, onde $x^+ \equiv (x^0 + x^2)/\sqrt{2}$ é uma das coordenadas do Cone de Luz em $2+1$ dimensões. Existe um interesse no estudo de teoria de campos no Plano Nulo devido à redução do número de graus de liberdade independentes da teoria; isto está relacionado com o fato de que a grupo de estabilidade do grupo de Poincaré no Plano Nulo possui sete geradores, em comparação com os seis geradores na forma Instantânea. Para a Cromodinâmica Quântica [67] assim como para modelos com quebra espontânea da simetria [68], tem-se mostrado que a dinâmica no Plano Nulo fornece exitações quânticas livres no vácuo devido a uma separação completa dos graus de liberdade físicos.

Neste capítulo, prosseguiremos com o análise de vínculos *à la* Hamilton-Jacobi da teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva. Primeiro, estudamos as propriedades Lagrangianas, usando a Equação de Lie, depois obtemos o conjunto completo de Hamiltonianos involutivos por meio da Condição de Integrabilidade, calculamos as Equações Características e identificamos o Gerador da transformação de calibre. Seguindo esse mesmo roteiro, estudaremos a teoria na dinâmica no Plano Nulo em que mostraremos como difere a estrutura dos vínculos devido à presença de Hamiltonianos não-involutivos. Também estudamos os vínculos do modelo Auto-dual para assim encontrar a correspondência entre essas duas teorias desde o ponto de vista do formalismo de Hamilton-Jacobi.

5.2 Teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva

A adição de um termo de Chern-Simons a um campo de Yang-Mills em $2+1$ dimensões resulta na chamada teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva, sua ação lê-se

$$W_{TMYM} = \int d^3x \left[-\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4} \varepsilon^{\mu\nu\gamma} \left(F^a_{\mu\nu} A^a_\gamma - \frac{g}{3} f^{abc} A^a_\mu A^b_\nu A^c_\gamma \right) \right], \tag{5.1}$$

onde μ é o parâmetro de massa e as componentes do tensor$F$ são definidas por

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{5.2}$$

Estudamos as propriedades Lagrangianas realizando variações totais no funcional de ação, dessa forma obtemos a Equação de Lie, da qual identificamos as equações de movimento, os momentos canônicos, a Hamiltoniana canônica assim como testar a invariância ou quase-invariância de

calibre da teoria. Escrevemos $\delta W_{TMYM} = \int d^3x \Delta\mathcal{L}$, onde $\Delta\mathcal{L}$ contém a variação na forma da densidade Lagrangiana e a variação no espaço-tempo. Obtemos

$$\Delta\mathcal{L} = \delta A^a_\alpha \left(D_\nu F^{a\nu\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F^a_{\beta\gamma} \right) + \delta x^\nu \partial_\mu \Theta^\mu{}_\nu + \partial_\mu \mathcal{G}^\mu. \tag{5.3}$$

Nessa expressão, definimos a derivada covariante

$$D_\mu X^a \equiv \partial_\mu X^a - g f^{abc} X^b A^c_\mu, \tag{5.4}$$

com essa definição, podemos também escrever (5.2) como

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - D_\nu A^a_\mu = D_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu, \tag{5.5}$$

que resulta ser útil nos cálculos. Partindo das definições (5.4) e (5.5) obtemos a chamada identidade de Bianchi

$$D_\alpha F_{\beta\mu} + D_\mu F_{\alpha\beta} + D_\beta F_{\mu\alpha} = 0, \tag{5.6}$$

devido ao seu significado geométrico e semelhança com uma identidade do mesmo nome encontrada no contexto da Relatividade Geral.

Na Equação de Lie também introduzimos o tensor de energia-momentum $\Theta^\mu{}_\nu$ que tem uma forma bastante extensa, não-simétrica e dependente do termo de massivo

$$\begin{aligned} \Theta^\mu{}_\nu &= -F^{a\mu\alpha}\partial_\nu A^a_\alpha + \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^a_{\alpha\beta} F^{a\alpha\beta} \\ &\quad -\frac{\mu}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left[\delta^\mu_\beta A^a_\gamma \partial_\nu A^a_\alpha + \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu \left(F^a_{\alpha\beta} A^a_\gamma - \frac{g}{3} f^{abc} A^a_\alpha A^b_\beta A^c_\gamma \right) \right]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

O gerador $\mathcal{G}^\mu$ é dado por

$$\mathcal{G}^\mu = \delta A^a_\alpha \left(-F^{a\mu\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\gamma} A^a_\gamma \right) - \delta x^\nu \Theta^\mu{}_\nu. \tag{5.8}$$

A evolução temporal do sistema está relacionada com uma folheação no espaço-tempo $\tau = x^0$, assim a componente $\mathcal{G}^0$ corresponde à derivada temporal no gerador clássico $G = p\delta q - H\delta t$, assim identificamos os momentos canônicos

$$\pi^\alpha_a = -F^{a0\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{0\alpha\gamma} A^a_\gamma,$$

como a Hamiltoniana canônica Θ^{00}, retornaremos a essas expressões para a análise de vínculos. A equação de movimento é obtida a partir de (5.3) quando há uma ação estacionária sob variações a ponto fixo $\delta x^\alpha = 0$ com variações nulas do campo A^a_α no contorno. Assim, a equação de Euler-Lagrange é dada por

$$\mathcal{E}^\alpha \equiv D_\nu F^{a\nu\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F^a_{\beta\gamma} = 0. \tag{5.9}$$

A fim de encontrar a invariância ou quase-invariância de calibre desse sistema, consideraremos as variações de ponto fixo apenas. Nesse caso, escrevemos a Equação de Lie como

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= \delta A^a_\alpha \left(D_\nu F^{a\nu\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F^a_{\beta\gamma} \right) + \partial_\mu \left[\delta A^a_\alpha \left(-F^{a\mu\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\gamma} A^a_\gamma \right) \right], \\ &= \delta A^a_\alpha D_\mu F^{a\mu\alpha} - \partial_\mu \left(\delta A^a_\alpha F^{a\mu\alpha} \right) + \frac{\mu}{2}\left[\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F^a_{\beta\gamma} \delta A^a_\alpha + \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \partial_\beta \left(A^a_\gamma \delta A^a_\alpha \right) \right]. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Essa variação é dividida em duas partes: a que representa o campo de Yang-Mills mais o termo (Chern-Simons) topológico $\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}_{YM} + \frac{\mu}{2}\Delta\mathcal{L}_{CS}$. Passamos a reescrever o termo de Yang-Mills como

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}_{YM} &= \delta A^a_\alpha D_\mu F^{a\mu\alpha} - \partial_\mu\left(\delta A^a_\alpha F^{a\mu\alpha}\right), \\ &= \delta A^a_\alpha\left(\partial_\mu F^{a\mu\alpha} - g f^{abc} F^{b\mu\alpha} A^c_\mu\right) - \partial_\mu\left(\delta A^a_\alpha F^{a\mu\alpha}\right), \\ &= -F^{a\mu\alpha}\partial_\mu \delta A^a_\alpha - g f^{abc} F^{b\mu\alpha} A^c_\mu \delta A^a_\alpha,\end{aligned}$$

onde na penúltima linha temos apenas reordenado o primeiro e terceiro termo do lado direito da equação. Agora mudando os índices no último termo obtemos

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}_{YM} &= -F^{a\mu\alpha}\left(\partial_\mu \delta A^a_\alpha + g f^{bac} A^c_\mu \delta A^b_\alpha\right), \\ &= -F^{a\mu\alpha}\left(\partial_\mu \delta A^a_\alpha - g f^{abc} A^c_\mu \delta A^b_\alpha\right), \\ &= -F^{a\mu\alpha} D_\mu \delta A^a_\alpha. \end{aligned} \tag{5.11}$$

A partir dessa expressão, obtemos a transformação de calibre para o campo de Yang-Mills, pois as derivadas covariantes satisfazem a regra de comutação

$$[D_\mu, D_\nu]X^a = -g f^{abc} X^b F^c_{\mu\nu}, \tag{5.12}$$

e, devido à antisimetria da constante de estrutura f^{abc} temos que para $\delta A^a_\alpha = D_\alpha X^a$, onde X^a é uma função diferenciável arbitrária, a variação no funcional de ação é

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}_{YM} &= -F^{a\mu\alpha} D_\mu D_\alpha X^a = -F^{a\mu\alpha}\left(D_\alpha D_\mu X^a - g f^{abc} X^b F^c_{\mu\alpha}\right), \\ &= -\Delta\mathcal{L}_{YM} + g f^{abc} X^b F^{a\mu\alpha} F^c_{\mu\alpha},\end{aligned}$$

assim obtemos $\Delta\mathcal{L}_{YM} = 0$. Portanto, a transformação $\delta A^a_\alpha = D_\alpha X^a$ deixa a teoria de Yang-Mills field invariante. Agora, se substituirmos essa variação no termo de Chern-Simons

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}_{CS} &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F^a_{\beta\gamma}\delta A^a_\alpha + \varepsilon^{\beta\alpha\gamma}\partial_\beta\left(A^a_\gamma \delta A^a_\alpha\right), \\ &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F^a_{\beta\gamma} D_\alpha X^a - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta\left(A^a_\gamma D_\alpha X^a\right),\end{aligned}$$

e da definição de derivada covariante

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}_{CS} &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F^a_{\beta\gamma}\left(\partial_\alpha X^a - g f^{abc} X^b A^c_\alpha\right) + \varepsilon^{\beta\alpha\gamma}\partial_\beta\left(A^a_\gamma D_\alpha X^a\right), \\ &= -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} X^a D_\alpha F^a_{\beta\gamma} + \partial_\alpha\left(\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F^a_{\beta\gamma} X^a\right) - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta\left(A^a_\gamma D_\alpha X^a\right), \\ &= -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} X^a D_\alpha F^a_{\beta\gamma} + \partial_\alpha\left[\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(F^a_{\beta\gamma} X^a + A^a_\gamma D_\beta X^a\right)\right].\end{aligned}$$

Nota-se que, se multiplicarmos a identidade de Bianchi por $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$, temos que $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} D_\alpha F^a_{\beta\gamma} = 0$. Portanto, sob a transformação $\delta A^a_\alpha = D_\alpha X^a$ o termo de Chern-Simons torna-se uma divergência total, deixando assim, a teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva quase-invariante.

Finalmente, podemos usar a Equação de Lie para simetrizar o tensor de energia-momentum canônico (5.7). Esse procedimento é baseado na invariância sob transformações de Poincaré. Obtemos, após a simetrização, que o termos de Chern-Simons não acrescenta qualquer contribuição para o tensor energia-momentum do sistema, tendo assim, um tensor igual ao obtido para o campo de Yang-Mills

$$(T^{\mu}{}_{\nu})_{TMYM} = F^{a\mu\sigma}F^{a}_{\sigma\nu} + \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\nu}F^{a}_{\alpha\beta}F^{a\alpha\beta}, \tag{5.13}$$

cujo procedimento é mostrado no apêndice (A.1) para o caso abeliano.

5.3 Formalismo de Hamilton-Jacobi

Agora realizaremos com a análise de vínculos. A partir da Equação de Lie já tinhamos identificado os momentos canônicos

$$\pi^{\mu}_{a} = -F^{a0\mu} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{0\mu\nu}A^{a}_{\nu}. \tag{5.14}$$

Nota-se que devido à antisimetria do símbolo de Levi-Civita, a componente temporal do momentos é um vínculo canônica $\pi^{0}_{a} = 0$, resultado análogo ao campo de Yang-Mills. Para a componente espacial, obtemos uma relação dinâmica

$$\pi^{i}_{a} = -\eta^{ij}F^{a}_{0j} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A^{a}_{j}, \quad \varepsilon^{ij} \equiv \varepsilon^{0ij}, \tag{5.15}$$

podendo ser invertida para assim obter $\partial_0 A^{a}_{i}$ como uma função dos momentos canônicos

$$\partial_0 A^{a}_{i} = -\eta_{ij}\pi^{j}_{a} + D_i A^{a}_{0} + \frac{\mu}{2}\eta^{jk}_{ij}\varepsilon A^{a}_{k}. \tag{5.16}$$

De (5.14) e (5.16), ou calculando Θ^{00}, construimos o Hamiltoniano canônico $\mathcal{H}_0 \equiv \pi^{\mu}_{a}\partial_0 A^{a}_{\mu} - \mathcal{L}$. Obtemos

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2}\eta_{ij}\left[\pi^{i}_{a} - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ik}A^{a}_{k}\right]\left[\pi^{j}_{a} - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{jl}A^{a}_{l}\right] + \frac{1}{4}F^{a}_{ij}F^{aij} - A^{a}_{0}\left[D_i\pi^{i}_{a} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A^{a}_{j}\right]. \tag{5.17}$$

Portanto, a teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva é caracterizada pelo seguinte conjunto de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi ou Hamiltonianos

$$\mathcal{H}' \equiv \pi + \mathcal{H}_0 = 0 \rightarrow x^0, \tag{5.18a}$$

$$\mathcal{H}'^{0}_{a} \equiv \pi^{0}_{a} = 0 \rightarrow A^{a}_{0} \equiv \lambda^{a}, \tag{5.18b}$$

onde foi renomeado $A^{a}_{0} \equiv \lambda^{a}$ pois esse campo age agora como um parâmetro e, $\pi = \partial S/\partial x^0$, $\pi^{0}_{a} = \partial S/\partial A^{a}_{0}$. Os Hamiltonianos $\mathcal{H}'$ e $\mathcal{H}'^{0}_{a}$ estão relacionados aos parâmetros x^0 e λ^{a}, respectivamente. A fim de testar a Condição de Integrabilidade para o sistema (5.18) construiremos o Parêntese de Poisson fundamental $\left\{A^{a}_{\mu}(x), \pi^{\nu}_{a}(y)\right\} = \delta^{\nu}_{\mu}\delta(x-y)$. Com essa estrutura construímos o diferencial fundamental

$$dF = \int d^3y \left[\left\{F(x), \mathcal{H}'(y)\right\}dx^0 + \left\{F(x), \mathcal{H}'^{0}_{a}(y)\right\}d\lambda^{a}\right].$$

O Hamiltoniano $\mathcal{H}_a'^0$ é involutivo pois $\{\mathcal{H}_a'^0(x), \mathcal{H}_a'^0(y)\} = 0$ logo, sua Condição de Integrabilidade só depende do Parêntese de Poisson com o Hamiltoniano $\mathcal{H}'$. Neste caso, temos

$$\left\{\mathcal{H}_a'^0(x), \mathcal{H}'(y)\right\} = \left[D_i\pi_a^i + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a\right] dx^0,$$

portanto, definimos um novo Hamiltoniano

$$\mathcal{C}_a' \equiv\ D_i\pi_a^i + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a. \tag{5.19}$$

Sendo esse Hamiltoniano o resultado da Condição de Integrabilidade, não tem uma variável correspondente no espaço de fase original. É importante notar que $\mathcal{C}_a'$ também são involutivos desde que satisfaçam a seguinte álgebra

$$\{\mathcal{C}_a'(x), \mathcal{C}_b'(y)\} = f_{abc}\mathcal{C}_c'(x)\delta(x-y), \tag{5.20}$$

e os outros Parênteses de Poisson são nulos. Como resultado dessa álgebra, temos que a Condição de Integrabilidade para $\mathcal{C}_a'$, isto é, $d\mathcal{C}_a' = 0$ é satisfeita idênticamente.

5.3.1 Equações Características

Quando a Condição de Integrabilidade é completamente satisfeita, terminamos com um conjunto de Hamiltonianos involutivos, neste caso $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}_a'^0$ e $\mathcal{C}_a'$. Precisamos ampliar o nosso espaço de fase inicial a fim de considerar o Hamiltoniano $\mathcal{C}_a'$. Vamos renomear os Hamiltonianos $\mathcal{G}_a^\lambda \equiv \mathcal{H}_a'^0$ e $\mathcal{G}_a^\omega \equiv \mathcal{C}_a'$, uma vez que eles agem como geradores. O novo diferencial fundamental que engloba todos os Hamiltonianos involutivos tem a forma

$$dF = \int d^3y \left[\{F(x), \mathcal{H}'(y)\}\, dx^0 + \left\{F(x), \mathcal{G}_a^\lambda(y)\right\} d\lambda^a + \{F(x), \mathcal{G}_a^\omega(y)\}\, d\omega^a\right]. \tag{5.21}$$

Aqui temos ω^a como novo parâmetro relacionado ao Hamiltoniano $\mathcal{G}_a^\omega$. A partir deste diferencial obtemos as seguintes Equações Características

$$\begin{aligned}
dA_\mu^a &= \delta_\mu^k\left[-\eta_{jk}\pi_a^j + D_k A_0^a + \frac{\mu}{2}\eta_{ij}\varepsilon^{jk}A_k^a\right] dx^0 + \delta_\mu^0\, d\lambda^a - \delta_\mu^k D_k d\omega^a, && \text{(5.22a)}\\
d\pi_a^\mu &= \delta_k^\mu\delta_k^\mu\left(D_j F^{ajk} + g f^{abc}\pi_b^k A_0^c - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{jk}D_0 A_j^a\right) dx^0 \\
&\quad + \delta_0^\mu\left(D_k\pi_a^k + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{kj}\partial_k A_j^a\right) dx^0 + \delta_k^\mu\left[g f^{abm}\pi_m^k + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{jk}\partial_j\delta_a^b\right] d\omega^b. && \text{(5.22b)}
\end{aligned}$$

Essas equações descrevem a evolução dinâmica do sistema como dependente dos parâmetros x^0, λ^a e ω^a. A Condição de Integrabilidade afirma que esses parâmetros são independentes. Então, se considerarmos apenas a evolução na direção temporal, isto é x^0, temos

$$\begin{aligned}
\partial_0 A_0^a &= 0, && \text{(5.23a)}\\
\partial_0 A_i^a &= -\eta_{ij}\pi_a^j + D_i A_0^a + \frac{\mu}{2}\eta_{ij}\varepsilon^{jk}A_k^a, && \text{(5.23b)}\\
\partial_0\pi_a^0 &= D_i\pi_a^i + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a, && \text{(5.23c)}\\
\partial_0\pi_a^i &= D_j F^{aji} + g f^{abc}\pi_b^i A_0^c - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ji}D_0 A_j^a. && \text{(5.23d)}
\end{aligned}$$

A análise dessas equações é direta, (5.23a) significa que os A_0^a ainda permanece como um parâmetro da teoria. A equação (5.23b) é exatamente a relação dinâmica (5.16) resultante da definição dos momentos canônicos. Uma vez que o momento π_a^0 é nulo, temos a equação (5.23c) que representa a Condição de Integrabilidade para $\mathcal{G}_a^\lambda \equiv \mathcal{H}_a'^0$. Além disso, observa-se que esta equação é equivalente à componente temporal da equação de Euler-Lagrange $\mathcal{E}^\alpha \equiv D_\nu F^{a\nu\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F^a_{\beta\gamma}$, uma vez que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^0 &= -D_i F^{a0i} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}F^a_{ij} = D_i\left(\pi^i_a - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A^a_j\right) + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}F^a_{ij} \\
&= D_i\pi^i_a + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\left(F^a_{ij} - D_iA^a_j\right), \\
&= D_i\pi^i_a - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_j A^a_i = D_i\pi^i_a + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A^a_j,
\end{aligned}$$

é (5.23c). Finalmente, podemos escrever a equação (5.23d) como $-D_0\pi^i_a + D_jF^{aji} - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ji}D_0A^a_j = 0$, o que é equivalente à componente espacial da equação de Euler-Lagrange $\mathcal{E}^i$. Para visualizar isso, calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^i &= D_0F^{a0i} + D_jF^{aji} - \mu\varepsilon^{ij}F^a_{0j}, \\
&= D_0\left(-\pi^i_a + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A^a_j\right) + D_jF^{aji} - \mu\varepsilon^{ij}F^a_{0j}, \\
&= -D_0\pi^i_a + D_jF^{aji} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\left(\partial_jA_0 - F^a_{0j}\right),
\end{aligned}$$

usando a relação (5.5), essa equivalência é atingida.

5.3.2 Gerador das transformações canônicas

A evolução temporal das Equações Características é, então, equivalente às equações de Euler-Lagrange. A evolução ao longo dos parâmetros λ^a e ω^a são variações, denotadas com δ_λ e δ_ω, dadas por

$$\delta_\lambda A^a_\mu = \delta^0_\mu\delta\lambda^a \tag{5.24a}$$
$$\delta_\omega A^a_\mu = -\delta^k_\mu D_k\delta\omega^a, \tag{5.24b}$$
$$\delta_\omega\pi^i_a = \left(gf^{abm}\pi^i_m + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ji}\partial_j\delta^b_a\right)\delta\omega^b, \tag{5.24c}$$

aqui ainda estamos considerando que os parâmetros são linearmente independentes. Em seguida, temos que o conjunto de variaçãoes (5.24) representam as transformações globais. Para estudar as transformações locais, devemos considerar os parâmetros λ^a e ω^a como dependentes da variável temporal x^0. Escrevemos as variações (5.24) como

$$\delta A^a_\mu = \delta^0_\mu\delta\lambda^a - \delta^k_\mu D_k\delta\omega^a, \tag{5.25a}$$
$$\delta\pi^i_a = gf^{abm}\pi^i_m\delta\omega^b - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_j\delta\omega^a. \tag{5.25b}$$

Temos simplesmente representado as variações δ_λ e δ_ω por δ, por estarem correlacionadas. O conjunto de variações locais (5.25) agora é gerado pela combinação linear de Hamiltonianos

involutivos

$$G^{can} \equiv \int d^3y \left[\mathcal{G}_a^{\lambda}\delta\lambda^a + \mathcal{G}_a^{\omega}\delta\omega^a\right], \tag{5.26}$$

onde chamamos G^{can} de gerador das transformações canônicas, pois

$$\delta A_\mu^a = \left\{A_\mu^a, G^{can}\right\} = \delta_\mu^0\delta\lambda^a - \delta_\mu^k D_k\delta\omega^a, \tag{5.27a}$$

$$\delta\pi_a^i = \left\{\pi_a^i, G^{can}\right\} = gf^{abm}\pi_m^i\delta\omega^b - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_j\delta\omega^a. \tag{5.27b}$$

Sabemos que a teoria de Yang-Mills topologicamente massiva possui um grupo de transformações que deixa seu funcional de ação quase-invariante. O gerador dessas transformações de calibre G^g está relacionado com o G^{can}. A relação entre esses gerador é obtida quando se analisa sob que tipo de condição as variações (5.27) são uma invariância da teoria. Para isso, substituimos as variações no funcional de ação ou, equivalentemente, na Equação de Lie (5.3) para variações a ponto fixo

$$\Delta\mathcal{L} = \left(\delta_\alpha^0\delta\lambda^a - \delta_\alpha^j D_j\delta\omega^a\right)\left(D_\nu F^{a\nu\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\beta\gamma}^a\right) - \partial_\mu\left[\delta A_\alpha^a\left(F^{a\mu\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\gamma}A_\gamma^a\right)\right],$$

devido à quase-invariância, eliminamos os termos de contorno. Sob esta consideração temos $X^aD_\mu Y^a = -Y^aD_\mu X^a$, logo

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} &= \delta\lambda^a\left(D_iF^{ai0} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}F_{ij}^a\right) - D_i\delta\omega^a\left(D_0F^{a0i} + D_jF^{aji} - \mu\varepsilon^{ij}F_{0j}^a\right), \\
&= -F^{ai0}D_i\delta\lambda^a + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\delta\lambda^aF_{ij}^a + D_0D_i\delta\omega^aF^{a0i} + F^{aji}D_jD_i\delta\omega^a + \mu\varepsilon^{ij}F_{0j}^aD_i\delta\omega^a, \\
&= F^{a0i}D_i\delta\lambda^a + F^{a0i}D_0D_i\delta\omega^a + F^{aji}D_jD_i\delta\omega^a + \mu\varepsilon^{ij}\left(F_{0j}^aD_i\delta\omega^a + \frac{1}{2}\delta\lambda^aF_{ij}^a\right),
\end{aligned}$$

utilizando a regra de comutação das derivadas covariantes, temos $F^{a0i}D_0D_i\delta\omega^a = F^{a0i}D_iD_0\delta\omega^a$ e $F^{aji}D_jD_i\delta\omega^a = 0$. Assim

$$\Delta\mathcal{L} = F^{a0i}D_i\left(D_0\delta\omega^a + \delta\lambda^a\right) + \mu\varepsilon^{ij}\left[-\delta\omega^aD_iF_{0j}^a + \frac{1}{2}\delta\lambda^aF_{ij}^a\right].$$

Usamos a identidade Bianchi para obter $\varepsilon^{ij}D_0F_{ij}^a = -\varepsilon^{ij}\left(D_jF_{0i}^a + D_iF_{j0}^a\right) = 2\varepsilon^{ij}D_iF_{0j}^a$. Dessa forma, a Equação de Lie torna-se

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} &= F^{a0i}D_i\left(D_0\delta\omega^a + \delta\lambda^a\right) + \mu\varepsilon^{ij}\left[-\frac{1}{2}\delta\omega^aD_0F_{ij}^a + \frac{1}{2}\delta\lambda^aF_{ij}^a\right], \\
&= F^{a0i}D_i\left(D_0\delta\omega^a + \delta\lambda^a\right) + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}F_{ij}^a\left(D_0\delta\omega^a + \delta\lambda^a\right).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

A partir dessa expressão, temos a quase-invariância da teoria satisfeita, se considerarmos

$$\delta\lambda^a = -D_0\delta\omega^a, \tag{5.29}$$

por isso temos só um parâmetro arbitrário, digamos $\delta\omega^a = -X^a$. Sob essa condição, temos a variação no campo A_μ^a cuja forma é

$$\delta A_\mu^a = \delta_\mu^0D_0X^a + \delta_\mu^iD_iX^a = \delta_\mu^\nu D_\nu X^a = D_\mu X^a.$$

A partir da condição (5.29) escrevemos o gerador da transformação transformação de calibre como

$$\mathcal{G}^g \equiv \mathcal{G}_a^\lambda \delta\lambda^a + \mathcal{G}_a^\omega \delta\omega^a = \left(\mathcal{G}_a^\lambda D_0 + \mathcal{G}_a^\omega\right) X^a. \tag{5.30}$$

Agora, o espaço de fase inicial possui $3N$ variáveis canônicas (A_μ^a, π_a^μ) onde o índice a tem N valores. A análise de vínculos indica que só existem $2N$ Hamiltonianos involutivos. Portanto, o espaço reduzido possui dimensão $6N - 2(2N) = 2N$. Notemos que o termo de massa topológica não contribui para mudança do número de graus de liberdade do sistema que é N.

5.4 Campo de Yang-Mills Topologicamente Massivo no Plano Nulo

Nas teorias de campo relativísticas, temos a liberdade de escolher o parâmetro que determina a evolução temporal do sistema. Esta liberdade vem de um requisito físico, a covariância de Poincaré. A escolha de um parâmetro específico τ acompanha a escolha de uma família de superfícies $\tau = cte$. Se sabemos a configuração dos campos sob um dos membros dessa família de superfícies, as equações de movimento na forma canônica deve fornecer a evolução dessa configuração em superfícies posteriores a uma forma única. Nos modelos estudados nesta tese, usamos a dinâmica na forma Instantânea, na qual escolhemos $\tau = x^0$ como parâmetro temporal, ainda assim, como foi mostrado por Dirac, existem outras formas de dinâmica relativística. Foi demostrado que existem cinco formas inequivalentes da dinâmica Hamiltoniana em teorias de campo relativísticas [69]. Uma delas é a dinâmica no Plano Nulo, definida pela superfície $\tau = x^+$, onde x^+ é uma das componentes das coordenadas de Cone de Luz. Em um espaço-tempo de Minkowski $2+1$ dimensional, as coordenadas de Cone de Luz são definidas por

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 + x^2\right), \quad x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 - x^2\right), \quad x^1 = x^1, \;\; i = 1, 2, ..., d-1.$$

Voltando ao problema em consideração, temos que nas coordenadas de cone de luz, os momentos canônicos do campo de Yang-Mills Topologicamente Massivo são

$$\pi_a^\mu = -F^{a+\mu} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{+\mu\nu} A_\nu^a. \tag{5.31}$$

O símbolo de Levi-Civita tem por convenção o valor de $\varepsilon^{+-1} = 1$, logo, escrevemos as componentes dos momentos (5.31) como

$$\pi_a^+ = 0, \tag{5.32a}$$

$$\pi_a^- = F_{+-}^a + \frac{\mu}{2} A_1^a, \tag{5.32b}$$

$$\pi_a^1 = F_{-1}^a - \frac{\mu}{2} A_-^a. \tag{5.32c}$$

Nota-se que (5.32a) e (5.32c) são vínculos canônicos. Esta é a primeira diferença com a dinâmica na forma Instantânea ($\tau = x^0$) , estudada na seção anterior, uma vez que uma coordenada espacial A_1^a age como parâmetro da teoria. Por outro lado, a equação (5.32b) é uma

relação dinâmica

$$\partial_+ A^a_- = \pi^-_a + \partial_- A^a_+ - g f^{abc} A^b_+ A^c_- - \frac{\mu}{2} A^a_-. \tag{5.33}$$

A densidade Hamiltoniana canônica é $\mathcal{H}_c \equiv \pi^\mu_a \partial_+ A^a_\mu - \mathcal{L} = \pi^-_a \partial_+ A^a_- + \pi^i_a \partial_+ A^a_i - \mathcal{L}$, substituindo as expressões dos momentos canônicos, obtemos

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\left[\pi^-_a - \frac{\mu}{2} A^a_1\right]^2 - A^a_+ \left[D_- \pi^-_a + D_1 \pi^1_a - \frac{\mu}{2}\left(\partial_1 A^a_- - \partial_- A^a_1\right)\right], \tag{5.34}$$

dessa forma, temos o seguinte conjunto de densidades Hamiltonianas

$$\mathcal{H}' \equiv p_+ + \mathcal{H}_c = 0 \to \tau = x^+, \quad p_+ = \partial S / \partial x^+, \tag{5.35a}$$

$$\mathcal{H}'^+_a \equiv \pi^+_a = 0 \to \lambda^a_+ \equiv A^a_+, \quad \pi^+_a = \partial S / \partial A^a_+, \tag{5.35b}$$

$$\mathcal{H}'^1_a \equiv \pi^1_a - F^a_{-1} + \frac{\mu}{2} A^a_- = 0 \to \lambda^a_1 \equiv A^a_1, \quad \pi^1_a = \partial S / \partial A^a_1. \tag{5.35c}$$

As variáveis x^+, A^a_+ e A^a_1 são agora os parâmetros da teoria e cada um está relacionada com uma densidade Hamiltoniana. A Condição de Integrabilidade do sistema é estudada a partir do diferencial fundamental

$$dF = \int d^3y \left[\left\{F(x), \mathcal{H}'(y)\right\} dx^+ + \left\{F(x), \mathcal{H}'^+_a(y)\right\} d\lambda^a_+ + \left\{F(x), \mathcal{H}'^1_a(y)\right\} d\lambda^a_1\right]. \tag{5.36}$$

A estrutura dos Parênteses de Poisson é a mesma dada para a dinâmica na forma instantânea $\left\{A^a_\mu(x), \pi^\nu_a(y)\right\} = \delta^\nu_\mu \delta(x-y)$. Agora, impondo $d\mathcal{H}'^+_a = 0$, isto é, a Condição de Integrabilidade para o Hamiltoniano $\mathcal{H}'^+_a$ obtemos

$$d\mathcal{H}'^+_a = \left[D_- \pi^-_a + D_1 \pi^1_a - \frac{\mu}{2}\left(\partial_1 A^a_- - \partial_- A^a_1\right)\right] dx^+,$$

que nos leva a definir uma nova densidade Hamiltoniana

$$\mathcal{C}'_a \equiv D_- \pi^-_a + D_1 \pi^1_a - \frac{\mu}{2}\left(\partial_1 A^a_- - \partial_- A^a_1\right), \tag{5.37}$$

que satisfaz a Condição de Integrabilidade. Por outro lado, temos que a densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}'^1_a$ é não-involutiva uma vez que

$$M_{ab}(x,y) \equiv \left\{\mathcal{H}'^1_a(x), \mathcal{H}'^1_b(y)\right\} = -2D^x_- \delta_{ab} \delta(x-y). \tag{5.38}$$

Sendo assim, o parâmetro λ^a_1 relacionado a $\mathcal{H}'^1_a$ pode ser eliminado do diferencial fundamental ao inverter a matriz com elementos (5.38) e construímos os Parênteses Generalizados. Supondo que esta matriz inversa exista, isto é, $G_{ab}(x,y) \equiv M^{-1}_{ab}(x,y)$, ela satisfaz

$$\int d^3z M_{ac}(x,z) G_{cb}(z,y) = \delta_{ab} \delta(x-y).$$

Substituindo (5.38) nessa última equação, temos $G_{ab}(x,y)$ tem que satisfazer a seguinte equação diferencial

$$-2D^x_- G_{ab}(x,y) = \delta_{ab} \delta(x-y). \tag{5.39}$$

Observando que esta equação não depende da massa topológica μ, é também válida para o campo de Yang-Mills livre no Plano Nulo. Além disso, temos que $G_{ab}(x,y)$ é a função de Green da equação (5.39) e depende da constante de acoplamento g assim como da variável A_{-}^{a} devido à presença da derivada covariante. Para resolver essa equação, primeiro consideramos $g=0$, para assim ter

$$-2\partial_{-}^{x}G_{ab}^{(0)}(x,y)=\delta_{ab}\delta(x-y), \tag{5.40}$$

que possui como solução particular

$$G_{ab}^{(0)}(x,y)=-\frac{1}{4}\delta_{ab}\epsilon(x-y), \tag{5.41}$$

onde $\epsilon(x-y)\equiv\epsilon(x^{-}-y^{-})\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=-\epsilon(y-x)$ é a função sinal, que satisfaz

$$\partial_{-}^{x}\epsilon(x-y)=2\delta(x-y).$$

Nota-se que também podemos escolher uma solução do tipo $\epsilon(x-y)+f(x^{+})$, mas podemos escolher $f(x^{+})=0$ sem afetar as equações de movimento do problema. No Apêndice B mostramos alguns detalhes sobre esta peculiaridade na dinâmica do Plano Nulo. Outras características do estudo de vínculos no Plano Nulo podem ser encontradas em [70] e [71] no contexto do formalismo de Dirac. Agora, a solução completa para $G_{ab}(x,y)$ é constituída pela série infinita

$$G_{ab}=G_{ab}^{(0)}+gG_{ab}^{(1)}+g^{2}G_{ab}^{(2)}+...=\sum_{n=0}^{\infty}g^{n}G_{ab}^{(n)}. \tag{5.42}$$

Substituindo essa seŕie em (5.39) obtemos

$$-\frac{1}{2}\delta_{ab}\delta(x-y)=\partial_{-}^{x}G_{ab}(x,y)-gf^{ace}G_{cb}(x,y)\,A_{-}^{e}(x),$$

assim como em (5.40) do lado esquerdo da equação, para obter

$$\partial_{-}^{x}G_{ab}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}g^{n}\partial_{-}^{x}G_{ab}^{(n)}-f^{ace}\sum_{n=0}^{\infty}g^{n+1}G_{cb}^{(n)}A_{-}^{e},$$
$$\partial_{-}^{x}G_{ab}^{(0)}=\partial_{-}^{x}G_{ab}^{(0)}+g\left[\partial_{-}^{x}G_{ab}^{(1)}-f^{ace}G_{cb}^{(0)}A_{-}^{e}\right]+g^{2}\left[\partial_{-}^{x}G_{ab}^{(2)}-f^{ace}G_{cb}^{(1)}A_{-}^{e}\right]+...$$

dessa forma, obtemos uma correlação entre $G_{ab}^{(n)}$ e seu antecessor

$$\partial_{-}^{x}G_{ab}^{(n+1)}=f^{ace}G_{cb}^{(n)}A_{-}^{e}. \tag{5.43}$$

Desde que é conhecida, $G_{ab}^{(0)}$ logo podemos fazer uso de (5.43) a fim de construir todos os elementos da série (5.42). Portanto, a forma explícita para a função de Green $G_{ab}(x,y)$ é

$$G_{ab}(x,y)=-\frac{1}{4}\delta_{ab}\epsilon(x-y)-\frac{1}{8}gf^{abc}\int dzA_{-}^{c}(z)\,\epsilon(x-z)\,\epsilon(z-y)+... \tag{5.44}$$

Com a matriz $G_{ab}(x,y)$ definida, escrevemos os Parênteses Generalizados como

$$\{F(x),G(y)\}^{*}\equiv\{F(x),G(y)\}$$
$$-\int dzdw\left\{F(x),\mathcal{H}_{b}^{\prime 1}(y)\right\}G_{ab}(z,w)\left\{\mathcal{H}_{a}^{\prime 1}(x),G(y)\right\}, \tag{5.45}$$

a partir dessa expressão, obtemos os seguintes parênteses fundamentais

$$\left\{A_{\mu}^{a}\left(x\right),A_{\nu}^{b}\left(y\right)\right\}^{*}=\delta_{\mu}^{1}\delta_{\nu}^{1}G_{ab}\left(x,y\right), \tag{5.46a}$$

$$\left\{A_{\mu}^{a}\left(x\right),\pi_{b}^{\nu}\left(y\right)\right\}^{*}=\delta_{ab}\delta_{\mu}^{\nu}\delta\left(x-y\right)-\delta_{\mu}^{1}\left[\delta_{1}^{\nu}D_{-}^{y}-\delta_{-}^{\nu}D_{1}^{y}+\frac{\mu}{2}\delta_{-}^{\nu}\right]G_{ab}\left(x,y\right), \tag{5.46b}$$

$$\left\{\pi_{a}^{\mu}\left(x\right),\pi_{b}^{\nu}\left(y\right)\right\}^{*}=\left[\delta_{1}^{\nu}D_{-}^{y}-\delta_{-}^{\nu}D_{1}^{y}+\frac{\mu}{2}\delta_{-}^{\nu}\right]\left[\delta_{1}^{\mu}D_{-}^{x}-\delta_{-}^{\mu}D_{1}^{x}+\frac{\mu}{2}\delta_{-}^{\mu}\right]G_{ab}\left(x,y\right). \tag{5.46c}$$

A construção dos Parênteses Generalizados é um resultado direto da Condição de Integrabilidade para o Hamiltoniano $\mathcal{H}_{a}^{\prime 1}$ e, como consequência, redefine a dinâmica do sistema. Temos agora que testar se os Hamiltonianos restantes, ou seja, $\mathcal{H}_{a}^{\prime +}$ e $\mathcal{C}_{a}^{\prime}$ são involutivos. De (5.46b) temos que a densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}_{a}^{\prime +}$ só comuta com A_{+}^{a}, logo, seus Parênteses Generalizados com outros Hamiltonianos são nulos. Para $\mathcal{C}_{a}^{\prime}$ temos que

$$\left\{\mathcal{C}_{a}^{\prime}\left(x\right),\mathcal{C}_{b}^{\prime}\left(y\right)\right\}^{*}=gf^{abc}\mathcal{C}_{c}^{\prime}\left(x\right)\delta\left(x-y\right),$$

esta álgebra indica que $\mathcal{C}_{a}^{\prime}$ é involutivo.

Obtemos o conjunto completo de Hamiltonianos involutivos, isto é, $\mathcal{H}^{\prime}$, $\mathcal{G}_{a}^{\lambda}\equiv\mathcal{H}_{a}^{\prime +}$ e $\mathcal{G}_{a}^{\omega}\equiv\mathcal{C}_{a}^{\prime}$, cada um deles está relacionado aos parâmetros x^{+}, λ_{+}^{a} e ω^{a}. Este último parâmetro é introduzido através da expansão do espaço de fase tal que o diferencial fundamental é agora dado por

$$dF=\int d^{3}y\left[\left\{F(x),\mathcal{H}^{\prime}(y)\right\}^{*}dx^{+}+\left\{F(x),\mathcal{G}_{a}^{\lambda}(y)\right\}^{*}d\lambda_{+}^{a}+\left\{F(x),\mathcal{G}_{a}^{\omega}(y)\right\}^{*}d\omega^{a}\right]. \tag{5.47}$$

Substituindo $F=A_{\mu}^{a}$ obtém-se as seguintes Equações Característica

$$dA_{+}^{a}=d\lambda_{+}^{a}, \tag{5.48a}$$

$$dA_{-}^{a}=\left[\pi_{a}^{-}+\partial_{-}A_{+}^{a}-gf^{abc}A_{+}^{b}A_{-}^{c}-\frac{\mu}{2}A_{1}^{a}\right]dx^{+}-D_{-}d\omega^{a}, \tag{5.48b}$$

$$dA_{1}^{a}=dx^{+}\int d^{3}yF_{+-}^{b}\left(y\right)\left(D_{1}^{y}-\frac{\mu}{4}\right)G_{ab}\left(x,y\right)+dx^{+}D_{1}A_{+}^{a}-D_{1}d\omega^{a}, \tag{5.48c}$$

Uma vez que os parâmetros x^{+}, λ_{+}^{a} e ω^{a} são linearmente independentes, podemos considerar a evolução temporal independentemente das variações em $\lambda_{+}^{a},\omega^{a}$. Assim, a equação (5.48a) torna-se $\partial_{+}A_{+}^{a}=0$, indicando que a variável A_{+}^{a} ainda permanece como um parâmetro da teoria. A equação (5.48b) é equivalente à relação dinâmica (5.33), resultado da definição do momento canônico π_{a}^{-}. Devido à presença da função $G_{ab}\left(x,y\right)$ em (5.48c), temos que derivar essa equação com relação a D_{-}^{x}

$$\partial_{+}A_{1}^{a}=\int d^{3}yF_{+-}^{b}\left(y\right)\left[D_{1}^{y}-\frac{\mu}{4}\right]G_{ab}\left(x,y\right)+D_{1}A_{+}^{a},$$

$$D_{-}\partial_{+}A_{1}^{a}=-\frac{1}{2}\int d^{3}yF_{+-}^{b}\left(y\right)\left[D_{1}^{y}-\frac{\mu}{4}\right]\delta_{ab}\delta\left(x,y\right)+D_{-}D_{1}A_{+}^{a},$$

para assim obter

$$D_{-}F_{+1}^{a}=\frac{1}{2}D_{1}F_{+-}^{a}+\frac{\mu}{8}F_{+-}^{a},$$

essa equação corresponde a uma das equações de Euler-Lagrange. O fato de se obter uma relação dinâmica para a Equação Característica da variável A_1^a vem da existência de um subconjunto de Hamiltonianos involutivos correspondentes a esse parâmetro.

Agora, a evolução do campo A_μ^a ao longo dos parâmetros λ_+^a e ω^a é dada pelas variações

$$\delta A_\mu^a = \delta_\mu^+ \delta\lambda_+^a - \delta_\mu^- D_- \delta\omega^a - \delta_\mu^1 D_1 \delta\omega^a, \tag{5.49}$$

a partir dessa expressão identificamos o Gerador das transformações canônicas G^{can} como

$$G^{can} \equiv \int dy \left(\mathcal{G}_a^\lambda \delta\lambda_+^a + \mathcal{G}_a^\omega \delta\omega^a \right), \tag{5.50}$$

pois

$$\delta A_\mu^a = \left\{ A_\mu^a, G^{can} \right\}^*. \tag{5.51}$$

Como fizemos nos exemplos anteriores, podemos obter o Gerador da transformação de calibre G^g impondo que as variações (5.49) sejam simetrias do campo de Yang-Mills Topologicamente Massivo, isto é, substituindo essas variações na Equação de Lie e procurando a condição para obter uma quase-invariância. Temos

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} = &\left(\delta_\alpha^+ \delta\lambda_+^a - \delta_\alpha^- D_- \delta\omega^a - \delta_\alpha^1 D_1 \delta\omega^a\right) \left(D_\nu F^{a\nu\alpha} + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}^a \right) \\ &- \partial_\mu \left[\delta A_\alpha^a \left(F^{a\mu\alpha} + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\gamma} A_\gamma^a \right) \right],\end{aligned}$$

e, eliminando termos de contorno temos

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} = &\delta\lambda_+^a \left(D_\nu F^{a\nu+} + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{+\beta\gamma} F_{\beta\gamma}^a \right) - \left(D_\nu F^{a\nu-} + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{-\beta\gamma} F_{\beta\gamma}^a \right) D_- \delta\omega^a \\ &- \left(D_\nu F^{a\nu 1} + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{1\beta\gamma} F_{\beta\gamma}^a \right) D_1 \delta\omega^a,\end{aligned}$$

ou em termos de componentes

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} = &\delta\lambda_+^a \left(D_- F^{a-+} + D_1 F^{a1+} + \mu \varepsilon^{+-1} F_{-1}^a \right) \\ &- \left(D_+ F^{a+-} + D_1 F^{a1-} + \mu \varepsilon^{-1+} F_{1+}^a \right) D_- \delta\omega^a \\ &- \left(D_- F^{a-1} + D_+ F^{a+1} + \mu \varepsilon^{1+-} F_{+-}^a \right) D_1 \delta\omega^a.\end{aligned}$$

reorganizamos essa equação como

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} = &F^{a+-} D_- \left(\delta\lambda_+^a + D_+ \delta\omega^a \right) + F^{a+1} D_1 \left(\delta\lambda_+^a + D_+ \delta\omega^a \right) \\ &+ \mu \left[\delta\lambda_+^a F_{-1}^a + \delta\omega^a \left(D_- F_{1+}^a + \delta\omega^a D_1 F_{+-}^a \right) \right].\end{aligned} \tag{5.52}$$

Usando a identidade de Bianchi, $D_+ F_{-1} + D_1 F_{+-} + D_- F_{1+} = 0$, escrevemos (5.52) como

$$\Delta\mathcal{L} = F^{a+-} D_- \left(\delta\lambda_+^a + D_+ \delta\omega^a \right) + F^{a+1} D_1 \left(\delta\lambda_+^a + D_+ \delta\omega^a \right) + \mu F_{-1}^a \left(\delta\lambda_+^a + D_+ \delta\omega^a \right),$$

o que é claramente nulo se considerarmos $\delta\lambda_+^a = -D_+ \delta\omega^a$. Lembrando que já eliminamos termos de contorno para obter esse resultado, então $\Delta\mathcal{L} = 0$ significa que a teoria é quase-invariante e sob essa condição a variação (5.49) torna-se

$$\delta A_\mu^a = -\delta_\mu^+ D_+ \delta\omega^a - \delta_\mu^- D_- \delta\omega^a - \delta_\mu^1 D_1 \delta\omega^a = -D_\mu \delta\omega^a,$$

que é a transformação de calibre da teoria. Além disso, o Gerador dessa transformação se escreve como

$$G^g \equiv \int dy \left(-\mathcal{G}_a^{\lambda} D_+ + \mathcal{G}_a^{\omega}\right) \delta\omega^a.$$

Agora, assim como no caso da descrição na forma Instantânea, o espaço de fase inicial é $6N$, enquanto que agora o sistema possui N Hamiltonianos não-involutivos e $2N$ Hamiltonianos involutivos, portanto existe uma mudança no espaço de fase final do sistema, possuindo esse uma dimensão de $6N - N - 2(2N) = N$. Portanto, o número de graus de liberdade do sistema se reduz pela metade, comparado com a forma Instantânea. Nota-se que neste contexto estamos considerando que N é par, isto é sempre válido já que toda matriz antisimétrica de dimensão ímpar tem determinante nulo, portanto a matriz inversa com elementos G_{ab} é bem determinada para N par.

5.5 Auto-dualidade da teoria Topologicamente Massiva Abeliana

As teorias Topologicamente Massivas foram introduzidas no início dos anos oitenta como um novo método para fornecer um *cut-off* infravermelho para as teorias de calibre puramente cinéticas em $2+1$ dimensões. Alguns anos mais tarde, Townsend introduziu os modelos Auto-duais, que também são definidos em dimensões ímpares. Existe uma correspondência entre as teorias Topologicamente Massivas e as teorias de Townsend. Por exemplo, o correspondente modelo Auto-dual para a Eletrodinâmica Topologicamente Massivo é dado por uma densidade Lagrangiana que consiste na parte massiva de um campo de Proca mais um termo de Chern-Simons

$$\mathcal{L}_{SD} = \frac{1}{2} m^2 B_\mu B^\mu - \frac{1}{2} m \epsilon_{\mu\nu\rho} B^\mu \partial^\nu B^\rho,$$

onde B_μ é um campo vetorial. Observamos que o modelo de Auto-dual contém uma estrutura mais simples devido à presença de apenas derivadas de primeira ordem na Lagrangiana. Nesta seção, analisaremos a estrutura de vínculos desse modelo segundo o formalismo de Hamilton-Jacobi.

Alguns autores preferem fazer uma redefinição do campo $B_\mu \to f_\mu/m$, assim temos

$$\mathcal{L}_{SD} = \frac{1}{2} f_\mu f^\mu - \frac{1}{2m} \varepsilon_{\mu\nu\rho} f^\mu \partial^\nu f^\rho. \tag{5.53}$$

Agora, escreveremos a variação total do funcional de ação, $\delta W_{SD} = \int d^3x \Delta\mathcal{L}_{SD}$, para assim obter as propriedades Lagrangianas de nosso interesse. a Equação de Lie é dada por

$$\Delta\mathcal{L}_{SD} = \delta f_\alpha \left(f^\alpha - \frac{1}{m} \varepsilon^{\alpha\nu\rho} \partial_\nu f_\rho \right) + \delta x^\alpha \partial_\mu \Theta^\mu_{\ \alpha} + \partial_\mu \left[-\frac{1}{2m} \varepsilon^{\alpha\mu\beta} f_\alpha \delta f_\beta - \delta x^\alpha \Theta^\mu_{\ \alpha} \right],$$

onde $\Theta^\mu{}_\alpha$ é o tensor de energia-momento canônico

$$\Theta^\mu_{\ \alpha} = -\frac{1}{2m} \varepsilon^{\sigma\mu\beta} f_\sigma \partial_\alpha f_\beta - \frac{1}{2} \delta^\mu_\alpha f_\sigma f^\sigma + \frac{1}{2m} \varepsilon^{\sigma\beta\rho} \delta^\mu_\alpha f_\sigma \partial_\beta f_\rho. \tag{5.54}$$

Usando a invariância sob a transformação Poincaré (onde $\delta x^{\alpha} = \omega^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha}$, com $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ e a^{α} constantes, e $\delta f_{\alpha} = -\left(\partial_{\alpha}\delta x^{\beta}\right) f_{\beta}$) na Equação de Lie, é possível simetrizar (5.54). Este procedimento é um pouco extenso e é mostrado no Apêndice (A.2), onde obtemos

$$T^{\mu\nu} = f^{\mu} f^{\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} f_{\alpha} f^{\alpha}. \tag{5.55}$$

A partir da Equação de Lie também identificamos a expressão de Euler-Lagrange como o coeficiente de δf_{α}. Portanto, a equação de Euler-Lagrange é

$$f_{\mu} - \frac{1}{m}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\nu} f^{\rho} = 0, \tag{5.56}$$

derivando essa equação e, como resultado da antissimetria de $\varepsilon_{\mu\nu\rho}$, obtemos

$$\partial_{\mu} f^{\mu} = 0. \tag{5.57}$$

Sabemos que o termo topologicamente massivo, tanto da teoria abeliana como da não abeliana, é quase-invariante sob a transformação $\delta f^{\mu} = \partial^{\mu}\Lambda$, com $\Lambda = \Lambda(x)$ uma função arbitrária, mas o termo Proca não é invariante. Portanto, o modelo Auto-dual não possui invariância de calibre. Isto será refletido na ausência de Hamiltonianos involutivo, como mostraremos a seguir.

A densidade Lagrangiana (5.53) é de primeira ordem, portanto o modelo Auto-dual é vinculado. Identificamos os momentos canônicos, bem como o Hamiltoniano canônico como

$$\pi^{\mu} = -\frac{1}{2m}\epsilon^{\alpha 0\mu} f_{\alpha}, \tag{5.58a}$$

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2} f_{\mu} f^{\mu} + \frac{1}{m}\epsilon^{ij} f_0 \partial_i f_j, \tag{5.58b}$$

A partir dessas expressões obtemos o seguinte conjunto de Hamiltonianos (onde $\pi = \partial S/\partial x^0$, $\pi^{\mu} = \partial S/\partial f_{\mu}$)

$$\mathcal{H}' \equiv \pi + \mathcal{H}_0 \rightarrow x^0, \tag{5.59a}$$

$$\mathcal{H}'^0 \equiv \pi^0 = 0 \rightarrow f_0 \equiv \lambda_0, \tag{5.59b}$$

$$\mathcal{H}'^i \equiv \pi^i + \frac{1}{2m}\epsilon^{ij} f_j = 0 \rightarrow f_i \equiv \lambda_i, \tag{5.59c}$$

as variáveis x^0 e $f_{\mu} \equiv \lambda_{\mu}$ são agora parâmetros da teoria. Os Parênteses de Poisson são definidos tais que $\{f_{\mu}(x), \pi^{\nu}(y)\} = \delta^{\mu}_{\nu}\delta(x-y)$ e o diferencial fundamental é dado por

$$dF = \int d^2y \left[\{F, \mathcal{H}'\} dx^0 + \left\{F, \mathcal{H}'^0\right\} d\lambda_0 + \left\{F(x), \mathcal{H}'^i(y)\right\} d\lambda_i\right]. \tag{5.60}$$

Uma vez que a densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}'^0$ comuta consigo mesmo e $\mathcal{H}'^i$, temos que a Condição de Integrabilidade $d\mathcal{H}'^0 = 0$ resulta em

$$d\mathcal{H}'^0 = \left[f^0 - \frac{1}{m}\epsilon^{ij}\partial_i f_j\right] dx^0 = 0,$$

o que nos leva a definir um novo Hamiltoniano

$$\mathcal{C}' \equiv f^0 - \frac{1}{m}\epsilon^{ij}\partial_i f_j = 0. \tag{5.61}$$

Devido aos parenteses

$$\begin{aligned}\left\{\mathcal{C}'(x), \mathcal{H}'^0(y)\right\} &= \delta(x-y), \\ \left\{\mathcal{C}'(x), \mathcal{H}'^i(y)\right\} &= \frac{1}{m}\epsilon^{ij}\partial_j^x \delta(x-y),\end{aligned}$$

notamos que a Condição de Integrabilidade para o novo Hamiltoniano fornece uma relação entre os parâmetros λ_0, λ_i e x^0, assim não temos mais a independência entre esses parâmetros. Podemos afirmar o mesmo com a Condição de Integrabilidade para o Hamiltoniano $\mathcal{H}'^i$, uma vez que

$$\begin{aligned}\left\{\mathcal{H}'^i(x), \mathcal{H}'^j(y)\right\} &= \left\{\pi^i, \frac{1}{2m}\epsilon^{jl}f_l\right\} + \left\{\frac{1}{2m}\epsilon^{ik}f_k, \pi^j\right\} \\ &= \frac{1}{m}\epsilon^{ij}\delta(x-y).\end{aligned}$$

Portanto, identificamos $h_1 \equiv \mathcal{H}'^1$, $h_2 \equiv \mathcal{H}'^2$, $h_3 \equiv \mathcal{H}'^0$ e $h_4 \equiv \mathcal{C}'$ como Hamiltonianos não-involutivos. Procedemos a eliminação desses Hamiltonianos através da construção dos Parênteses Generalizados. Primeiro, construimos a matriz $M(x,y)$ com componentes

$$M_{rs}(x,y) \equiv \{h_r(x), h_s(y)\} \qquad r,s = 1,2,3,4.$$

Explicitando em componentes cada um dos Hamiltonianos

$$h_1 = \pi^1 + \frac{1}{2m}f_1, \quad h_2 = \pi^2 - \frac{1}{2m}f_2, \tag{5.62a}$$

$$h_3 = \pi^0, \quad h_4 = f_0 - \frac{1}{m}\left(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\right), \tag{5.62b}$$

logo temos

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{1}{m}\partial_2^x \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 & -\frac{1}{m}\partial_1^x \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{m}\partial_2^x & -\frac{1}{m}\partial_1^x & 1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y). \tag{5.63}$$

Supondo que $M(x,y)$ possue inversa, e a partir da definição

$$\int d^2z M(x,z) M^{-1}(z,y) = I_{4\times 4}\delta(x-y),$$

obtemos que esta inversa existe e tem a forma

$$M^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -m & \partial_1^x & 0 \\ m & 0 & \partial_2^x & 0 \\ \partial_1^x & \partial_2^x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y). \tag{5.64}$$

onde $I_{4\times4}$ é a matriz Identidade 4×4. Os Parênteses Generalizados são definidos como

$$\begin{aligned}\{F(x),G(y)\}^{*} &= \{F(x),G(y)\} \\ &\quad -\int d^2zd^2w\,\{F(x),h_r(z)\}\,M^{-1}_{rs}(z,w)\,\{h_s(w),G(y)\}\,. \quad (5.65)\end{aligned}$$

Substituindo F e G pelas componentes do campo f^{μ}, observamos que a estrutura simplética da teoria é governada pelos parênteses fundamentais

$$\{f^0(x),f^0(y)\}^{*} = 0, \quad (5.66a)$$

$$\{f^0(x),f^i(y)\}^{*} = \partial^i_x\delta(x-y), \quad (5.66b)$$

$$\{f^i(x),f^j(y)\}^{*} = -m\varepsilon^{ij}\delta(x-y). \quad (5.66c)$$

Existe um campo escalar φ incorporado dentro da álgebra de (5.66), esse escalar satisfaz

$$\{\varphi(x),\pi(y)\}^{*} = \delta(x-y),$$

Nesse sentido, de (5.66a) escrevemos o campo f^0 como a combinação

$$f^0 = \alpha\varphi + \beta\pi,$$

onde $\alpha=\alpha(x)$ e $\beta=\beta(x)$ são operadores, em geral. A escolha de um "valor"particular para α e β servirá apenas para uma melhor visualização da correspondência. Definimos os operadores $\hat{\nabla}\equiv(-\nabla^2)^{1/2}$, $\hat{\partial}_i\equiv(-\nabla^2)^{-1/2}\,\partial_i$ e escolhemos $\beta=0$ e $\alpha=-\hat{\nabla}$, tal que

$$f^0(x) = -\hat{\nabla}\varphi(x), \quad (5.67a)$$

$$f^i(x) = \hat{\partial}^i_x\pi(x) - m\varepsilon^{ik}\hat{\partial}^x_k\varphi(x). \quad (5.67b)$$

são soluções do sistema (5.66).

Por outro lado, temos a teoria de Maxwell-Chern-Simons, também chamada de Electrodinamica Topologicamente Massiva, que é descrita pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}F_{\mu\nu}A_{\gamma}, \quad (5.68)$$

com $F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$. Dos resultados do modelo não-abeliano, temos que a álgebra dos Parênteses de Poisson mantém-se intacta na análise de vínculos, devido à presença de apenas Hamiltonianos involutivos. Sendo esse resultado igual para o caso abeliano, temos $\{A_{\mu},\pi^{\nu}\}=\delta^{\nu}_{\mu}\delta(x-y)$. A fim de identificar um campo escalar sob esta álgebra, primeiro precisamos definir as quantidades

$$E^i \equiv \varepsilon^{ij}F_{j0}, \quad (5.69a)$$

$$B \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}F_{ij} = \varepsilon^{ij}\partial_iA_j. \quad (5.69b)$$

Nota-se que E^i age como as componentes do campo eléctrico, enquanto B é a componente do campo magnético perpendicular ao plano (x_1,x_2). Agora, seguindo a definição dos momentos canônicos $\pi^i=-F^{0i}+\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j$ obtemos a seguinte expressão para o campo E^i

$$E^i = \varepsilon^{ij}\pi_j + \frac{\mu}{2}A^i, \quad (5.70)$$

assim, a álgebra dos Parênteses de Poisson torna-se

$$\begin{aligned} \{B(x), B(y)\} &= 0, && (5.71a) \\ \{B(x), E^i(y)\} &= \partial_x^i \delta(x-y), && (5.71b) \\ \{E^i(x), E^j(y)\} &= -\mu\varepsilon^{ij}\delta(x-y). && (5.71c) \end{aligned}$$

A semelhança entre (5.66) e (5.71) é evidente. Identificamos os campos

$$B = f^0, \quad E^i = f^i \tag{5.72}$$

assim como o parâmetro de massa $m = \mu$. Além disso, vimos que o tensor energia-momento da teoria de Maxwell-Chern-Simons simetrizado não depende do termo massivo, obtendo um resultado análogo ao caso do campo eletromagnético

$$T^{\mu\nu}_{MCS} = -F^{\mu\sigma}F^{\nu}{}_{\sigma} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}.$$

Sob uma variedade de três dimensões, o dual de um tensor de segunda ordem é uma $1-$forma, que tem componentes $F^{\mu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, ou equivalente a $F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu\alpha\beta}F^{\mu}$. Em termos do campo dual, o tensor de energia-momentum simetrizado tem a forma

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{MCS} &= (-\eta^{\mu\nu}F_{\alpha}F^{\alpha} + F^{\mu}F^{\nu}) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(2F_{\alpha}F^{\alpha}), \\ &= F^{\mu}F^{\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha}F^{\alpha}. && (5.73) \end{aligned}$$

Ambos tensores (5.55) e (5.73) tem a mesma forma quando consideramos $f^{\mu} = F^{\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, claro, que esta definição está em perfeito acordo com o resultado de (5.69) e a identificação (5.72). Agora, através da substituição da expansão do campo escalar (5.67), a energia do sistema se escreve como

$$\begin{aligned} T^{00}_{MCS} &= T^{00}_{SD} = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right), \\ &= \frac{1}{2}\left[\pi^2 + \mu^2\varphi\left(\nabla^2 + \mu^2\right)\varphi\right], \end{aligned}$$

onde temos eliminado termos de contorno.

Assim obtemos uma correlação entre estas duas teorias, mesmo que tenham propriedades de invariância diferentes. O fato é que a teoria de Maxwell-Chern-Simons e a uma Auto-dual são ambas resultado de um único modelo, descrito pela assim chamado Lagrangiana *master*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}f^{\mu}f_{\mu} - f_{\mu}F^{\mu} + \frac{1}{2}\mu F^{\mu}A_{\mu}, \tag{5.74}$$

onde f^{μ} e A_{μ} são consideradas variáveis independentes. Existem, ainda, generalizações de Lagrangianas *master* para proporcionar um melhor entendimento da auto-dualidade (see [72]) assim como sua importância na gravitação massiva [73].

Capítulo 6

Gravitação Linearizada

6.1 Introdução

Apesar que a gravidade tem uma diferença significativa com os outros campos, por tratar os fenómenos gravitacionais como uma manifestação da geometria do espaço-tempo, com as mesmas ferramentas para sua quantização canónica. É bem conhecido que o campo de gravitação, bem como as outras interações fundamentais, é uma teoria singular e, em seguida, requer métodos consistentes para a sua análise de vínculos. Na verdade, quando Dirac iniciou o estudo do campo gravitacional [74] descobriu que uma folheação do espaço-tempo simplifica a estrutura de vínculos de gravidade com o custo de abandonar a simetria na descrição Lagrangiana. Uma exposição pormenorizada da teoria canônica da gravitação pode ser lida em [75]. Na fase inicial desse estudo foram encontrados vários problemas teóricos, um deles foi o problema da não-renormalização. A fim de evitar esse problema, têm sido construídas teorias três-dimensionais, como a Gravitação Topologicamente Massiva [35] ou a Nova Gravitação Massiva [76], de onde obtemos, por linearização, o estudo do conteúdo de partículas da gravidade.

O procedimento de linearização consiste em manter a ordem inferior de uma aproximação fraca na métrica, dessa forma, obtemos um campo de spin dois sob um espaço-tempo de Minkowski. Este é o campo de gravitação linearizado, descrito por uma densidade Lagrangiana que possui uma quase-invariância de calibre. É importante notar que essa mesma Lagrangiana foi encontrada por Fierz e Pauli [77] no estudo da equação de onda relativista para partículas com spin arbitrário. Em geral, pode-se trabalhar com uma família de densidades Lagrangianas diferenciadas por um parâmetro [78] onde a Lagrangiana de Fierz–Pauli aparece como um membro dessa família. Essa família é edificada pela adição de um termo de superfície que só irá afetar a forma funcional dos vínculos, mas não a sua álgebra [79].

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: apresentamos as chamadas variáveis de Goldberg, para assim reescrever a ação de Einstein-Hilbert em termos dessas variáveis. Esse procedimento nos permite escrever de maneira elegante a expansão perturbativa. O campo de gravitação linearizada é dada pela ordem mais baixa desta expansão. Mostramos também

o "*Ponto de vista de Feynman*"da Gravitação e comparamos a estrutura da Lagrangiana de Feynman com a expressa em termos das variáveis de Goldberg depois da linearização. Depois de escolher qual descrição é mais adequada para a nossa análise de vínculos, escrevemos a Equação de Lie e obtemos as propriedades que serão úteis ao nosso estudo e, realizamos à análise à la Hamilton-Jacobi [27].

6.2 A ação equivalente de Einstein-Hilbert e as variáveis de Goldberg

A ação de Einstein-Hilbert em d dimenções é dada por [80]

$$W_{EH} = -\frac{1}{\kappa^2}\int d^d x\sqrt{\epsilon g}R, \tag{6.1}$$

onde $\epsilon = (-1)^{d-1}$, κ^2 é um parâmetro escolhido de forma que no limite de aproximação fraca as equações de Euler-Lagrange do movimento da Relatividade Geral se assemelham a Lei de Newton da gravitação. O determinante da métrica é dada por $g \equiv \det g_{\mu\nu}$ e a curvatura de Ricci é definida por

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}), \tag{6.2}$$

e o símbolo Christoffel é dado por

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}), \tag{6.3}$$

nota-se que esta expressão pode ser invertida a fim de obter a derivada parcial da métrica como

$$\partial_\alpha g^{\mu\nu} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}g^{\beta\nu} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta}g^{\beta\mu}. \tag{6.4}$$

Sabemos que a subtração dos termos de divergência na Lagrangiana não afeta as equações de Euler-Lagrange. Para a Relatividade Geral, temos a eliminação dos termos de divergência que também removem derivadas de segunda ordem no escalar de Ricci. Realiza-se esse procedimento escrevendo

$$\begin{aligned}\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\partial_\gamma\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \partial_\alpha\left(\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_\alpha\left(\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\right), \\ &= \partial_\alpha\left(\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\partial_\alpha\sqrt{\epsilon g} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\sqrt{\epsilon g}\partial_\alpha g^{\mu\nu},\end{aligned}$$

uma vez que $\partial_\alpha g = gg^{\rho\sigma}\partial_\alpha g_{\rho\sigma} = -gg_{\rho\sigma}\partial_\alpha g^{\rho\sigma}$ e, substituindo (6.4) na última equação, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \partial_\alpha\left(\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) + \sqrt{\epsilon g}\left(\frac{1}{2}g_{\rho\sigma}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\right)\partial_\alpha g^{\rho\sigma}, \\ &= \partial_\alpha\left(\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - \sqrt{\epsilon g}\left(\frac{1}{2}g_{\rho\sigma}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\right)\left(\Gamma^\rho_{\alpha\beta}g^{\beta\sigma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}g^{\beta\rho}\right),\end{aligned}$$

resultando na expressão seguinte

$$\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \partial_\alpha\left(\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - \sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - 2\Gamma^\beta_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\mu}\right). \tag{6.5}$$

Um resultado análogo pode ser obtido para $\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}$, neste caso temos

$$\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \partial_\nu\left(\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\right) + \sqrt{\epsilon g}\Gamma^\alpha_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\gamma}g^{\sigma\gamma}, \tag{6.6}$$

então, ao substituir as eqs. (6.5) e (6.6) na densidade Lagrangiana de Einstein-Hilbert, observamos que as derivadas de segunda ordem na métrica agora fazem parte de um termo de divergência

$$\sqrt{\epsilon g}R = \sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}) - \partial_\alpha\left[\sqrt{\epsilon g}\left(g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\nu}\right)\right].$$

A chamada parte Gamma-Gamma da Lagrangiana de Einstein-Hilbert é, então, uma Lagrangiana equivalente

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{\kappa^2}\sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}), \tag{6.7}$$

que contém apenas derivadas de primeira ordem da métrica. A equação (6.1) como também (6.7) produzem a equação de Einstein, quando consideramos a variação da métrica $g_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \tag{6.8}$$

que é resultado de variações a ponto fixo do tensor métrico. Ao invés de trabalhar com a métrica, podemos usar como variável din âmica uma densidade métrica, também chamada de variável de Goldberg [81] (um tratamento moderno destas variáveis também pode ser encontrado em [82])

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{\epsilon g}g^{\mu\nu}, \tag{6.9a}$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv (\epsilon g)^{-1/2}g_{\mu\nu}. \tag{6.9b}$$

Essas variáveis satisfazem $\tilde{g}^{\nu\sigma}\tilde{g}_{\mu\sigma} = g^{\nu\sigma}g_{\mu\sigma} = \delta^\nu_\mu$, e a partir dela obtemos $\tilde{g}_{\mu\beta}\partial_\rho\tilde{g}^{\mu\alpha} = -\tilde{g}^{\mu\alpha}\partial_\rho\tilde{g}_{\mu\beta}$ e, juntamente, com as seguintes propriedades

$$\partial_\rho g = \frac{2}{d-2}g\tilde{g}_{\mu\nu}\partial_\rho\tilde{g}^{\mu\nu}, \tag{6.10a}$$

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \sqrt{\epsilon g}\left[\frac{1}{d-2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\sigma\gamma}\partial_\rho\tilde{g}^{\sigma\gamma} - \tilde{g}_{\mu\sigma}\tilde{g}_{\nu\gamma}\partial_\rho\tilde{g}^{\sigma\gamma}\right], \tag{6.10b}$$

podemos escrever o símbolo de Christoffel (6.3) como

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[&\frac{1}{d-2}\delta^\alpha_\nu\tilde{g}_{\sigma\gamma}\partial_\mu\tilde{g}^{\sigma\gamma} + \frac{1}{d-2}\delta^\alpha_\mu\tilde{g}_{\sigma\gamma}\partial_\nu\tilde{g}^{\sigma\gamma} - \tilde{g}_{\nu\gamma}\partial_\mu\tilde{g}^{\alpha\gamma}\\ &-\tilde{g}_{\mu\gamma}\partial_\nu\tilde{g}^{\alpha\gamma} + \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\mu\sigma}\tilde{g}_{\nu\gamma}\partial_\beta\tilde{g}^{\sigma\gamma} - \frac{1}{d-2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\sigma\gamma}\partial_\beta\tilde{g}^{\sigma\gamma}].\end{aligned} \tag{6.11}$$

Essa relação também nos ajuda a escrever a parte Gamma-Gamma da ação de Einstein-Hilbert, ou seja, a densidade Lagrangiana (6.7) em termos das variáveis de Goldberg como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{EH} = &-\frac{1}{\kappa^2}\left[\frac{1}{2}\tilde{g}_{\alpha\beta}\partial_\nu\tilde{g}^{\beta\mu}\partial_\mu\tilde{g}^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\tilde{g}_{\alpha\rho}\tilde{g}_{\beta\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{g}^{\rho\beta}\partial_\nu\tilde{g}^{\sigma\alpha}\right]\\ &-\frac{1}{\kappa^2}\frac{1}{4(d-2)}\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\rho\sigma}\partial_\alpha\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\beta\tilde{g}^{\rho\sigma}.\end{aligned} \tag{6.12}$$

O estudo da teoria linearizada da gravitação surge a partir da análise de um novo campo, digamos $\varphi^{\mu\nu}(x)$, que mede o desvio dessa densidade métrica com a métrica de Minkowski, isto é

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} + \kappa\varphi^{\mu\nu}, \tag{6.13}$$

enquanto que a inversa da variável de Goldberg será dada pela expansão

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \kappa\varphi_{\mu\nu} + \kappa^2\varphi^{\sigma}_{\mu}\varphi_{\sigma\nu} - ... \tag{6.14}$$

Portanto, a densidade Lagrangiana (6.7) resulta numa soma de infinitos termos da forma $\mathcal{L}_{EH} = \sum_{n=0}\kappa^n\mathcal{L}^{(n)}$, onde κ é o parâmetro da expanssão. A ordem mais baixa $\mathcal{L}^{(0)} \equiv \mathcal{L}$ descreve a teoria da gravitação linearizada

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^{\alpha\beta}\partial_\beta\varphi^{\mu}_{\alpha} + \frac{1}{4}\partial_\mu\varphi_{\alpha\beta}\partial^\mu\varphi^{\alpha\beta} - \frac{1}{4(d-2)}\partial_\alpha\varphi^{\mu}_{\mu}\partial^\alpha\varphi^{\nu}_{\nu}, \tag{6.15}$$

por só conter a primeira ordem na aproximação (6.14), isto é, $\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \kappa\varphi_{\mu\nu}$, ou em outras palavras, com um parâmetro da expansão fraco. Na próxima seção, estudaremos a mesma teoria, mas do ponto de vista de Feynman. Esta nova abordagem permite comparar as descrições para o campo de spin dois. Embora essas descrições sejam equivalentes, a estrutura de vínculos é totalmente diferente. Como o campo de spin dois também está presente em teorias de gravitação mais complexas e, visando seu estudo em trabalhos futuros, escolheremos aquela Lagrangiana que nos permita uma análise de vínculos mais adequada.

6.3 A abordagem de Feynman para a Gravitação Linearizada

Na *Lectures Notes on Gravity* [83], Feynman propôs um método para obter uma descrição Lagrangiana do campo de gravitação linearizada. Ele afirma que a partir do ponto de vista de um físico de partículas, seria extremamente útil ter uma teoria da gravidade num espaço-tempo plano, enquanto que mantém todas as características dos fenômenos gravitacionais de um limite não-relativístico. Nesse processo construtivo apenas os campos de spin par têm que ser considerados, desde que campos de spin fracionários levam a potenciais não-estáticos e spin ímpares permitem uma força repulsiva. Uma vez que a gravidade tem um potencial de longo alcance, o campo que descreve essa interação tem que ser não massivo.

O campo escalar (spin zero) não pode descrever a gravidade, desde que a sua interação com o campo eletromagnético, $T^{\mu}_{\mu}k^{-2}T^{\nu}_{\nu}$, é nulo uma vez que o campo eletromagnético tem traço nulo. Por conseguinte, o campo escalar não interage com fótons e, em seguida, deixa de descrever a deflexão da luz. Um modelo de campo escalar gravitacional também foi proposto por Nordström [84], mas contradize a experiência, porque falha ao tentar calcular o periélio de Mercúrio.

O próximo passo é considerar o campo de spin dois $h_{\mu\nu}$. Este campo tensorial tem que ser simétrico, já que um campo antisimétrico que contém 6 variáveis independentes, seria equivalente ao campo eletromagnético (descrito por dois campos vetoriais). A Lagrangiana mais geral para a teoria de spin dois é dada por

$$\mathcal{L} = a_1\partial_\sigma h_{\mu\nu}\partial^\sigma h^{\mu\nu} + a_2\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma_\mu + a_3\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\mu h^\sigma_\sigma + a_4\partial_\mu h^\nu_\nu\partial^\mu h^\sigma_\sigma + a_5\partial_\sigma h_{\mu\nu}\partial^\nu h^{\mu\sigma}, \quad (6.16)$$

deve-se observar que o quinto termo difere do segundo por uma divergência

$$\partial_\sigma h_{\mu\nu}\partial^\nu h^{\mu\sigma} - \partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma_\mu = \partial_\sigma\left(h_{\mu\nu}\partial^\nu h^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma}\partial^\nu h_{\mu\nu}\right). \quad (6.17)$$

Portanto, podemos desprezar este termo, deixando assim uma Lagrangiana da forma

$$\mathcal{L} = a_1\partial_\sigma h_{\mu\nu}\partial^\sigma h^{\mu\nu} + a_2\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma_\mu + a_3\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\mu h^\sigma_\sigma + a_4\partial_\mu h^\nu_\nu\partial^\mu h^\sigma_\sigma. \quad (6.18)$$

O raciocínio que segue Feynman consiste em estudar a interação da gravitação com a matéria; neste caso, o Lagrangiano para esta teoria é dada por $\mathcal{L}+\mathcal{L}_{matt.}-\lambda T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$, onde λ é a constante de acoplamento e $T^{\mu\nu}$ representa o tensor de energia-momento da matéria. Devido à simetria do $h_{\mu\nu}$ temos

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial h_{\alpha\beta}} = \Delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu + \delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu\right),$$

essa expressão é útil para calcular a equação de Euler-Lagrange para a teoria com interação

$$\begin{aligned} -\lambda T_{\alpha\beta} &= 2a_1\partial_\sigma\partial^\sigma h_{\alpha\beta} + a_2\partial^\sigma\left(\partial_\alpha h_{\beta\sigma} + \partial_\beta h_{\alpha\sigma}\right) \\ &\quad + a_3\left(\partial_\alpha\partial_\beta h^\sigma_\sigma + \eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}\right) + 2a_4\eta_{\alpha\beta}\partial_\sigma\partial^\sigma h^\mu_\mu. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Considerando que o tensor energia-momento é conservado, isto é $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, derivamos a equação (6.19) com respeito a α (ou β) e, assim obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned} 0 &= 2a_1\partial_\sigma\partial^\sigma\partial^\alpha h_{\alpha\beta} + a_2\partial^\sigma\left(\partial^\alpha\partial_\alpha h_{\beta\sigma} + \partial^\alpha\partial_\beta h_{\alpha\sigma}\right) \\ &\quad + a_3\left(\partial^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta h^\sigma_\sigma + \partial_\beta\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}\right) + 2a_4\partial_\sigma\partial^\sigma\partial_\beta h^\mu_\mu, \\ &= \left(2a_1 + a_2\right)\partial_\sigma\partial^\sigma\partial^\alpha h_{\alpha\beta} + \left(a_2 + a_3\right)\partial^\alpha\partial^\sigma\partial_\beta h_{\alpha\sigma} + \left(a_3 + 2a_4\right)\partial_\sigma\partial^\sigma\partial_\beta h^\mu_\mu. \end{aligned}$$

e se considerarmos que os três termos $\partial_\sigma\partial^\sigma\partial^\alpha h_{\alpha\beta}$, $\partial^\alpha\partial^\sigma\partial_\beta h_{\alpha\sigma}$ e $\partial_\sigma\partial^\sigma\partial_\beta h^\mu_\mu$ são independentes, temos seus respectivos coeficientes nulos, assim obtemos três equações

$$\begin{aligned} 2a_1 + a_2 &= 0, \\ a_2 + a_3 &= 0, \\ a_3 + 2a_4 &= 0, \end{aligned}$$

para quatro parâmetros independentes. Isto significa que temos a liberdade de escolher o fator de escala da lagrangiana e, então podemos definir, por exemplo $a_1 = 1/4$. Com isso obtemos $a_2 = -a_3 = 1/2$ e $a_4 = -1/4$. Em seguida, o campo da gravitação linearizada é descrito pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\mu_\alpha + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial_\beta h^{\mu\beta} - \frac{1}{4}\partial_\beta h\partial^\beta h + \frac{1}{4}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta}. \quad (6.20)$$

Este resultado também corresponde à densidade Lagrangiana Fierz-Pauli [77].

A teoria descrita por (6.20) é equivalente a apresentada em (6.15) descrita em termos das variáveis Goldberg linearizadas. A relação entre essas duas descrições é evidente se escrevermos

$$\varphi^{\mu\nu} = -\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\right) h_{\alpha\beta}. \tag{6.21}$$

Essa equação significa que ao invés de trabalhar com uma expansão nas variáveis Goldberg, estamos expandindo na métrica de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu}$ até os termos de primeira ordem.

Mesmo que estas descrições sejam equivalentes, sua estrutura de vínculos é diferente. A fim de discriminar uma dessas Lagrangianas, primeiro notemos que, com a versão linearizada das variáveis de Goldberg, os momentos canônicos são dados por

$$\hat{\pi}_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 g^{\alpha\beta}\right)} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\varphi_{0\beta} + \partial_\beta\varphi_{0\alpha}\right) + \frac{1}{2}\partial_0\varphi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2(d-2)}\eta_{\alpha\beta}\partial_0\varphi^\mu_\mu. \tag{6.22}$$

A partir dessa relação, obtemos duas equações dinâmicas

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_{00} &= -\frac{1}{2(d-2)}\left[(d-1)\partial_0\varphi_{00} + \partial_0\varphi^i_i\right], \\
\hat{\pi}_{ij} &= -\frac{1}{2}\left(\partial_i\varphi_{0j} + \partial_j\varphi_{0i}\right) + \frac{1}{2}\partial_0\varphi_{ij} - \frac{1}{2(d-2)}\eta_{ij}\partial_0\varphi_{00} - \frac{1}{2(d-2)}\eta_{ij}\partial_0\varphi^k_k,
\end{aligned}$$

assim como dois Hamiltonianos não-involutivos $\mathcal{H}'_{0i} = \hat{\pi}_{0i} + \frac{1}{2}\partial_i\varphi_{00}$ e $\mathcal{H}''_i = \hat{\pi}^i_i - \frac{1}{2}\partial_i\varphi^i_0 + \pi_{00}$. Portanto, por razão de simplicidade, apenas estudaremos a análise de vínculos com a variável $h_{\mu\nu}$, como mostramos a continuação.

6.4 Equação de Lie e a ação de Fierz-Pauli

A partir de agora vamos nos concentrar na ação Fierz-Pauli

$$W_{LG} = \int d^dx \left(-\frac{1}{2}\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\mu_\alpha + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial_\beta h^{\mu\beta} - \frac{1}{4}\partial_\beta h\partial^\beta h + \frac{1}{4}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta}\right). \tag{6.23}$$

Como fizemos nos capítulos anteriores, as propriedades Lagrangianas que são de interesse aos nossos propósitos são obtidas pela Equação de Lie, resultado da realização das variações totais em (6.23). Temos $\delta W_{LG} = \int d^3x\Delta\mathcal{L}$, onde $\Delta\mathcal{L}$ contém a variação na forma da Lagrangiana assim como a variação no espaço-tempo. Escrevemos

$$\Delta\mathcal{L} = \delta h_{\alpha\beta}\mathcal{E}^{\alpha\beta} + \delta x^\alpha\partial_\mu\Theta^\mu{}_\alpha + \partial_\mu\mathcal{G}^\mu, \tag{6.24}$$

onde $\mathcal{E}^{\alpha\beta}$ é a expressão de Euler-Lagrange

$$\mathcal{E}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left[\partial_\sigma\partial^\sigma h^{\alpha\beta} + \partial_\sigma\left(\partial^\alpha h^{\beta\sigma} + \partial^\beta h^{\alpha\sigma}\right) - \partial^\alpha\partial^\beta h^\sigma_\sigma + \eta^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \eta^{\alpha\beta}\partial_\sigma\partial^\sigma h^\mu_\mu\right], \tag{6.25}$$

o tensor de energia-momento canônico, denotado com $\Theta^{\mu}{}_{\alpha}$ é dado por

$$\Theta^{\mu}{}_{\alpha} = \pi^{\mu\rho\sigma}\partial_{\alpha}h_{\rho\sigma} - \delta^{\mu}_{\alpha}\mathcal{L}, \tag{6.26}$$

e $\mathcal{G}^{\mu}$ é o gerador

$$\mathcal{G}^{\mu} = \pi^{\mu\alpha\beta}\delta h_{\alpha\beta} - \Theta^{\mu}{}_{\alpha}\delta x^{\alpha}, \tag{6.27}$$

aqui temos denotado por $\pi^{\mu\alpha\beta}$ a expressão

$$\begin{aligned}\pi^{\mu\alpha\beta} \equiv & -\frac{1}{2}\left(\partial^{\alpha}h^{\mu\beta} + \partial^{\beta}h^{\mu\alpha}\right) + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\rho}h^{\mu\rho} \\ & +\frac{1}{4}\left(\eta^{\mu\alpha}\partial^{\beta}h^{\sigma}_{\sigma} + \eta^{\mu\beta}\partial^{\alpha}h^{\sigma}_{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial^{\mu}h^{\rho}_{\rho} + \frac{1}{2}\partial^{\mu}h^{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{6.28}$$

Quando impomos tipos diferentes de variações na Equação de Lie (6.24), obtemos diferentes características do formalismo Lagrangiano. A primeira é a equação de Euler-Lagrange $\mathcal{E}^{\alpha\beta} = 0$, obtida a partir de variações a ponto fixo $\delta x^{\alpha} = 0$ com os campos inalterados no contorno de estudo. Explicitamente temos

$$2\mathcal{E}^{00} = \partial_i\partial_j h^{ij} - \partial_j\partial^j h^i_i, \tag{6.29a}$$

$$2\mathcal{E}^{0i} = -\partial_j\partial^j h^{0i} + \partial^0\partial_j h^{ij} + \partial^i\partial_j h^{0j} - \partial^0\partial^i h^j_j, \tag{6.29b}$$

e

$$\begin{aligned}2\mathcal{E}^{ij} = & \partial^j\partial_0 h^{0i} + \partial^i\partial_0 h^{0j} - \partial_0\partial_0 h^{ij} + \partial_k\partial^j h^{ki} \\ & +\partial_k\partial^i h^{kj} - \partial^i\partial^j h_{00} - \partial^i\partial^j h^k_k - \partial^k\partial_k h^{ij} \\ & +\eta^{ij}\left(-2\partial_0\partial_k h^{0k} + \partial_0\partial_0 h^k_k + \partial^k\partial_k h^0_0 + \partial^k\partial_k h^l_l - \partial_k\partial_l h^{kl}\right).\end{aligned} \tag{6.30}$$

Para a variação a ponto fixo $\delta x^{\alpha} = 0$ e, considerando que a expressão (6.28) está relacionada com a expressão de Euler-Lagrange (6.25) por $\mathcal{E}^{\alpha\beta} = -\partial_{\mu}\pi^{\mu\alpha\beta}$, a Equação de Lie (6.24) toma a forma

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= \delta h_{\alpha\beta}\mathcal{E}^{\alpha\beta} + \partial_{\mu}\left(\pi^{\mu\alpha\beta}\delta h_{\alpha\beta}\right), \\ &= -\delta h_{\alpha\beta}\partial_{\mu}\pi^{\mu\alpha\beta} + \partial_{\mu}\left(\pi^{\mu\alpha\beta}\delta h_{\alpha\beta}\right),\end{aligned}$$

que, efetuando uma derivada parcial, torna-se

$$\Delta\mathcal{L} = \pi^{\mu\alpha\beta}\partial_{\mu}\delta h_{\alpha\beta}. \tag{6.31}$$

Antes de estudar que tipo de variação $\delta h_{\alpha\beta}$ deixa invariante a teoria, nota-se que, a partir da relação (6.28), temos

$$\begin{aligned}2\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\pi^{\mu\alpha\beta} = & -\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\partial_{\mu}h^{\mu\beta} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}\partial^{\beta}h^{\mu\alpha} + \partial_{\mu}\partial_{\rho}\partial^{\beta}h^{\mu\rho} \\ & +\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\partial^{\beta}h^{\sigma}_{\sigma} - \partial_{\mu}\partial^{\mu}\partial^{\beta}h^{\rho}_{\rho} + \partial_{\mu}\partial^{\mu}\partial_{\alpha}h^{\alpha\beta},\end{aligned}$$

o primeiro termo do lado direito da equação cancela com o último, o segundo termo cancela com o terceiro, enquanto o quarto termo cancela com o quinto. Portanto

$$\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\pi^{\mu\alpha\beta} = 0. \tag{6.32}$$

É evidente que esta relação é satisfeita sob o campo físico, onde a equação de Euler-Lagrange de movimento é válido, uma vez que $\partial_\mu\partial_\alpha\pi^{\mu\alpha\beta} = -\partial_\alpha\mathcal{E}^{\alpha\beta} = 0$; ainda assim, a equação (6.32) é uma identidade e sempre é válida. Devido a esta expressão, assim como da simetria do $\delta h_{\alpha\beta}$, é razoável considerar

$$\delta h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X_\beta + \partial_\beta X_\alpha, \tag{6.33}$$

onde X_α são funções diferenciáveis arbitrárias, como a transformação de calibre para o campo de gravitação linearizado, pois a partir de (6.31) temos

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} &= 2\pi^{\mu\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha X_\beta = 2\partial_\mu\left(\pi^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha X_\beta\right) - 2\left(\partial_\mu\pi^{\mu\alpha\beta}\right)\partial_\alpha X_\beta, \\
&= 2\partial_\mu\left[\pi^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha X_\beta\right] - 2\partial_\alpha\left[X_\beta\partial_\mu\pi^{\mu\alpha\beta}\right] + 2\left(\partial_\alpha\partial_\mu\pi^{\mu\alpha\beta}\right)X_\beta, \\
&= 2\partial_\mu\left[\pi^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha X_\beta - X_\beta\partial_\alpha\pi^{\alpha\mu\beta}\right],
\end{aligned}$$

deixando esta teoria quase-invariante.

Quando construímos a Lagrangiana da gravitação linearizada, segundo à abordagem de Feynman, consideramos um termo de interação $-\lambda T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$, onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da matéria o qual tem que ser conservado $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Mesmo assim, a teoria tem um tensor energia-momento canônico que deve ser considerado dentro do termo de interação. Para vermos isso claramente, consideraremos apenas uma parte da Lagrangiana, $\mathcal{L} = 1/4\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta}$, que fornece uma equação de Euler-Lagrange $\partial_\mu\partial^\mu h_{\alpha\beta} = 0$, assim como um tensor de energia-momento simetrizado

$$\Theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial^\alpha h_{\mu\nu}\partial^\beta h^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\partial_\gamma h_{\mu\nu}\partial^\gamma h^{\mu\nu}.$$

Se quisermos considerar este tensor energia-momento como uma fonte para o campo em si, podemos escrever $\partial_\mu\partial^\mu h_{\alpha\beta} = \Theta^{\alpha\beta}$, logo, a Lagrangiana deve ter derivadas de ordem superior e o tensor energia-momento tem que ser modificado também. Este é o problema de consistência que foi estudado primeiro por Gupta [85] e seguido por Deser [86], que expandiu seus argumentos para o campo de Yang-Mills. Na *Lectures on Gravitation*, Feymann também utiliza a consistência para obter assim a teoria da Relatividade Geral a partir do campo de gravitação linearizado. No entanto, seus argumentos não eram tão gerais como os dados pelo Deser.

6.5 O formalismo de Hamilton-Jacobi

No estudo da estrutura de vínculos de Gravitação linearizada, seja utilizando o formalismo de Dirac ou outros métodos diferentes, é habitual quebrar a covariância na descrição Lagrangiana fazendo explícita a variável de evolução x^0. Este procedimento é útil, porque permite um melhor controle do termo de superfície que será eliminado, a fim de alcançar uma máxima simplificação nos momentos canônicos na estrutura de vínculos. Este procedimento também reduz em uma quantidade razoável os cálculos para o estudo desta teoria em outro tipo de dinâmica, tal como no Plano Nulo ou, para uma outra versão desta teoria, como a gravitação topologicamente massiva linearizada.

A Lagrangiana de Fierz-Pauli (6.23) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\partial_i h^{i0}\partial_0 h_{00} + \partial_0 h_{0i}\left(\frac{1}{2}\partial^i h^{00} + \frac{1}{2}\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ji}\right) \\ &\quad +\partial_0 h_{ij}\left(\frac{1}{4}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_k h^{k0}\right) - \mathcal{V}, \end{aligned} \tag{6.34}$$

onde $\mathcal{V}$ é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= -\frac{1}{2}\partial_i h_{0j}\partial^i h^{0j} - \frac{1}{4}\partial_i h_{jk}\partial^i h^{jk} + \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial^i h^j_j + \frac{1}{4}\partial_i h^j_j \partial^i h^k_k \\ &\quad -\frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial^j h_{00} - \frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial^j h^k_k + \frac{1}{2}\partial_i h^{i0}\partial_j h^{j0} + \frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial_k h^{kj}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Esta divisão do espaço-tempo não afeta a estrutura de calibre da teoria (ver Apêndice C.0.1). A presença dos termos $\partial_0 h_{00}$, $\partial_0 h_{0i}$ e $\partial_0 h_{ij}$ indica que devem existir seus correspondentes momentos canônicos. Neste caso, temos

$$p^{00} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 h_{00}} = -\frac{1}{2}\partial_i h^{i0}, \tag{6.36a}$$

$$p^{0i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 h_{0i}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\partial^i h^{00} + \frac{1}{2}\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ji}\right), \tag{6.36b}$$

$$p^{ij} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 h_{ij}} = \frac{1}{2}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_k h^{k0}, \tag{6.36c}$$

A partir dessas equações, identificamos (6.36a) e (6.36b) como vínculos canônicos. No entanto, nota-se que, usando a seguinte relação

$$\partial_\rho h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h_{\mu\nu} = \partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial_\rho h_{\mu\nu} + \partial_\rho\left(h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h_{\mu\nu}\right) - \partial_\gamma\left(h_{\alpha\beta}\partial_\rho h_{\mu\nu}\right), \tag{6.37}$$

e eliminando os termos de contorno, pode-se escrever (6.34) como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\partial_i h^{i0}\partial_0 h_{00} + \frac{1}{2}\partial_0 h_{0i}\partial^i h^{00} + \partial_0 h_{0i}\left(\frac{1}{2}\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ji}\right) \\ &\quad +\partial_0 h_{ij}\left(\frac{1}{4}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_k h^{k0}\right) - \mathcal{V}, \\ &= -\frac{1}{2}\partial_i h^{i0}\partial_0 h_{00} + \frac{1}{2}\partial^i h_{0i}\partial_0 h^{00} + \partial_0 h_{0i}\left(\frac{1}{2}\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ji}\right) \\ &\quad +\partial_0 h_{ij}\left(\frac{1}{4}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_k h^{k0}\right) - \mathcal{V}, \end{aligned}$$

Claramente, os dois primeiros termos do lado direito das equações anulam-se mutuamente e obtemos

$$\mathcal{L} = \partial_0 h_{0i}\left(\frac{1}{2}\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ji}\right) + \partial_0 h_{ij}\left(\frac{1}{4}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_k h^{k0}\right) - \mathcal{V}. \tag{6.38}$$

Dessa forma, eliminamos a velocidade $\partial_0 h_{00}$. Claro que, a eliminação dos termos de superfície reflete-se numa nova expressão para os momentos canônicos de $\partial_0 h_{00}$ e $\partial_0 h_{0i}$, uma vez que

$$\bar{p}^{00} = 0, \quad \bar{p}^{0i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ji}\right), \tag{6.39}$$

enquanto que o momento canônico de $\partial_0 h_{ij}$ mantém-se inalterado.

Podemos realizar este procedimento novamente, desta vez com o primeiro termo da equação (6.38). Obtemos

$$\mathcal{L} = \partial_0 h_{ij}\left(\frac{1}{4}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{2}\partial^j h^{0i} - \frac{1}{2}\partial^i h^{0j} + \eta^{ij}\partial^k h_{0k} - \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k\right) - \mathcal{V}. \tag{6.40}$$

Os momentos canônicos são dados por

$$\pi^{0\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 h_{0\mu}} = 0, \tag{6.41a}$$

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 h_{ij}} = \frac{1}{2}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{2}\partial^j h^{0i} - \frac{1}{2}\partial^i h^{0j} + \eta^{ij}\partial^k h_{0k} - \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_0 h^k_k. \tag{6.41b}$$

De (6.41a) vemos que foi obtida uma grande simplificação no momento $\pi^{0\mu}$. Como foi apontado por Anderson [87], é possível simplificar os vínculos canônicos e obter um resultado semelhante com o campo de Yang-Mills, em que um destes vínculos tem a forma canônica $\pi^0_a = 0$.

A equação (6.41b) é uma relação dinâmica, de onde se obtém ∂h_{ij} em termos de sua respectivo momento canônico

$$\partial_0 h^{ij} = 2\left[\pi^{ij} - \frac{1}{(d-2)}\eta^{ij}\pi^k_k + \frac{1}{2}\partial^j h^{0i} + \frac{1}{2}\partial^i h^{0j}\right]. \tag{6.42}$$

Nota-se a dependência desta relação com a dimensão da teoria que no caso bi-dimensional não é possível proceder com esta relação. O Hamiltoniano canônico é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 = {} & \pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{(d-2)}\pi^i_i\pi^j_j + 2\pi^{ij}\partial_i h_{0j} \\ & - \frac{1}{4}\partial_i h_{jk}\partial^i h^{jk} + \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial^i h^j_j + \frac{1}{4}\partial_i h^j_j \partial^i h^k_k \\ & - \frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial^j h_{00} - \frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial^j h^k_k + \frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial_k h^{kj}.\end{aligned} \tag{6.43}$$

De acordo com o formalismo de Hamilton-Jacobi, temos um conjunto de densidades Hamiltonianas

$$\mathcal{H}' \equiv \pi + \mathcal{H}_0 = 0 \to t \equiv x^0, \tag{6.44a}$$

$$\mathcal{H}'^{\mu} \equiv \pi^{0\mu} = 0 \to h_{0\mu} \equiv \lambda_\mu, \tag{6.44b}$$

o Hamiltoniano $\mathcal{H}'$ está relacio-nado com a variável de tempo x^0 enquanto que o $\mathcal{H}'^{\mu}$ está relacionado com a variável $h_{0\mu}$, que agora é considerada como um parâmetro da teoria. Os Parênteses de Poisson fundamentais são dados por

$$\{h_{\alpha\beta}(x), \pi^{\mu\nu}(y)\} = \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\delta(x-y), \tag{6.45}$$

lembremos que todos esses parênteses são calculados em tempos iguais $x^0 = y^0$. Escrevemos o diferencial fundamental como

$$dF = \int dy\left[\{F(x), \mathcal{H}'(y)\}dx^0 + \{F(x), \mathcal{H}'^0(y)\}d\lambda_0(y) + 2\{F(x), \mathcal{H}'^i(y)\}d\lambda_i(y)\right], \tag{6.46}$$

o coeficiente 2 em um dos parênteses se deve à simetria da variável $h_{0i} = h_{i0} \equiv \lambda_i$.

Neste ponto, testamos a Condição de Integrabilidade a fim de obter o conjunto completo de Hamiltonianos involutivos. Uma vez que os hamiltonianos $\mathcal{H}'^0$ e $\mathcal{H}'^i$ satisfazem

$$\{\mathcal{H}'^0, \mathcal{H}'^0\} = \{\mathcal{H}'^j, \mathcal{H}'^i\} = \{\mathcal{H}'^0, \mathcal{H}'^i\} = 0,$$

seus correspondentes Condições de Integrabilidade, $d\mathcal{H}'^0 = 0$ e $d\mathcal{H}'^i = 0$ dependerão do Parênteses de Poisson com o Hamiltoniano $\mathcal{H}'$. Temos

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}'^0 &= \frac{1}{2}\left[\partial_i\partial^i h^j_j - \partial_i\partial^j h^i_j\right] dx^0, \\ d\mathcal{H}'^i &= 2\left[\partial_j \pi^{ij}\right] dx^0. \end{aligned}$$

Portanto, temos que definir novas densidades hamiltonianas, sejam $\mathcal{C}'^0$ e $\mathcal{C}'^i$

$$\mathcal{C}'^0 \equiv \partial_i\partial^i h^j_j - \partial_i\partial^j h^i_j, \tag{6.47a}$$

$$\mathcal{C}'^i \equiv \partial_j \pi^{ij}. \tag{6.47b}$$

A Condição de Integrabilidade deve ser testada também para estes novos Hamiltonianos. Uma vez que os parênteses entre eles são nulos, e

$$\left\{\mathcal{C}'^0, \mathcal{H}'\right\} = \partial_i\partial_j\pi^{ij}\delta(x-y) = \partial_i\mathcal{C}'^i\delta(x-y),$$

temos que $d\mathcal{C}'^\mu = 0$ é identicamente satisfeita. Como resultado, temos que $\mathcal{H}'^\mu$ e $\mathcal{C}'^\mu$ são o conjunto completo de Hamiltonianos involutivos da teoria.

6.5.1 Equações Características

Os Hamiltonianos $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}'^\mu$ e $\mathcal{C}'^\mu$ são agora geradores da evolução dinâmica do campo gravitacional linearizado. Vamos renomear $\mathcal{G}^\mu_\lambda \equiv \mathcal{H}'^\mu$ e $\mathcal{G}^\mu_\omega \equiv \mathcal{C}'^\mu$, além de ampliar o espaço de fase a fim de incluir o gerador $\mathcal{G}'^\mu_\omega$, atingindo isso através da introdução de um novo parâmetro ω_μ. O diferencial fundamental é dado por

$$\begin{aligned} dF = &\int dy \left[\{F(x), \mathcal{H}'(y)\}dx^0 + \{F(x), \mathcal{G}^0_\lambda(y)\}d\lambda_0(y) + 2\{F(x), \mathcal{G}^i_\lambda(y)\}d\lambda_i(y)\right] \\ &+ \int dy \{F(x), \mathcal{G}^\mu_\omega(y)\}d\omega_\mu(y). \end{aligned} \tag{6.48}$$

Obtemos as Equações Características ao substituir a função arbitrária F em (6.48) pelas variáveis canônicas $h_{\mu\nu}$ e $\pi^{\mu\nu}$. Obtemos

$$\begin{aligned} dh_{\mu\nu} = &2\left[\Delta^{kl}_{\mu\nu}\pi_{kl} - \frac{1}{(d-2)}\eta_{km}\Delta^{km}_{\mu\nu}\pi^l_l + \Delta^{kl}_{\mu\nu}\partial_k h_{0l}\right] dx^0 \\ &+ \Delta^{00}_{\mu\nu}d\lambda_0 + 2\Delta^{0k}_{\mu\nu}d\lambda_k - \Delta^{kl}_{\mu\nu}\partial_l d\omega_k, \end{aligned} \tag{6.49}$$

e

$$
\begin{aligned}
d\pi^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\Delta^{\mu\nu}_{00}\left[\partial^k\partial_k h^l_l - \partial_k\partial_l h^{kl}\right]dx^0 + 2\Delta^{\mu\nu}_{0l}\left[\partial_k\pi^{kl}\right]dx^0 \\
&+\frac{1}{2}\Delta^{\mu\nu}_{kl}\left[-\partial^k\partial^l h_{00} + \eta^{kl}\partial_m\partial^m h_{00} + \eta^{kl}\partial_n\partial^n h^m_m - \partial^m\partial_m h^{kl}\right]dx^0 \\
&+\frac{1}{2}\Delta^{\mu\nu}_{kl}\left[-\eta^{kl}\partial_m\partial^n h^m_n - \eta^{nl}\partial^k\partial_n h^m_m + 2\eta^{ml}\partial_n\partial_m h^{nk}\right]dx^0 \\
&+\Delta^{\mu\nu}_{kl}\left[-\eta^{lk}\partial_m\partial^m + \eta^{km}\partial_m\partial^l\right]d\omega_0. \qquad (6.50)
\end{aligned}
$$

Nota-se que estas equações dependem do novo parâmetro ω_μ, que não tem qualquer análogo no formalismo Lagrangiano.

A Condição de Integrabilidade assegura a independência linear dos parâmetros x^0, λ_μ e ω_μ. Portanto, podemos separar a evolução dinâmica ao longo de cada parâmetro. Por enquanto, vamos apenas analisar a evolução temporal das variáveis canônicas. Para $h_{\mu\nu}$ temos

$$
\partial_0 h_{\mu\nu} = 2\left[\Delta^{kl}_{\mu\nu}\pi_{kl} - \frac{1}{(d-2)}\eta_{km}\Delta^{km}_{\mu\nu}\pi^l_l + \Delta^{kl}_{\mu\nu}\partial_k h_{0l}\right]. \qquad (6.51)
$$

A presença da expressão $\Delta^{kl}_{\mu\nu}$ em todos os termos do lado direito da equação indica que $\partial_0 h_{00} = \partial_0 h_{0i} = 0$ reforça que as variáveis $h_{0\mu}$ são ainda parâmetros da teoria. Além disso, as componentes h_{ij} são dadas por

$$
\partial_0 h_{ij} = 2\pi_{ij} - \frac{2}{(d-2)}\eta_{ij}\pi^k_k + \partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i},
$$

esta expressão é igual a (6.42), resultado de inverter a expressão dinâmica dada pelos momentos canônicos π^{ij}.

A evolução temporal dos momentos $\pi^{\mu\nu}$ são dadas por

$$
\begin{aligned}
\partial_0\pi^{00} &= \frac{1}{2}\left(\partial^i\partial_i h^j_j - \partial_i\partial_j h^{ij}\right), &(6.52a)\\
\partial_0\pi^{0i} &= \partial_j\pi^{ij}, &(6.52b)\\
\partial_0\pi^{ij} &= \frac{1}{2}\left(\eta^{ij}\partial_k\partial^k - \partial^i\partial^j\right)h_{00} + \frac{1}{2}\eta^{ij}\left(\partial_k\partial^k h^l_l - \partial_k\partial_l h^{kl}\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[-\partial^k\partial_k h^{ij} - \partial^i\partial^j h^k_k + \partial_k\partial^i h^{jk} + \partial_k\partial^j h^{ik}\right]. &(6.52c)
\end{aligned}
$$

Observa-se que a partir da própria definição dos momentos canônicos temos $\pi^{0\mu} = 0$. Em seguida, as equações (6.52a) e (6.52b) representam as Condições de Integrabilidade para seus respectivos geradores $\mathcal{G}'^{\mu}_{\lambda}$. Nota-se também que (6.52a) é equivalente à componente $\mathcal{E}^{00}$ da equação de Euler-Lagrange enquanto que a componente $\mathcal{E}^{0i}$ pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_j\partial^0 h^{ij} - \partial^i\partial^0 h^j_j + \partial^i\partial_j h^{0j} - \partial_j\partial^j h^{0i}, \\
&= \partial_j\left[2\pi^{ij} - \frac{2}{(d-2)}\eta^{ij}\pi^k_k + \partial^i h^{0j} + \partial^j h^{0i}\right] \\
&\quad -\partial^i\left[-\frac{2}{(d-2)}\pi^k_k + 2\partial_j h^{0j}\right] + \partial^i\partial_j h^{0j} - \partial_j\partial^j h^{0i}, \\
&= 2\partial_j\pi^{ij} - \frac{2}{(d-2)}\partial^i\pi^k_k + \frac{2}{(d-2)}\partial^i\pi^k_k + 2\partial_j\partial^i h^{0j} \\
&\quad +\partial_j\partial^j h^{0i} - 2\partial^i\partial_j h^{0j} - \partial_j\partial^j h^{0i},
\end{aligned}
$$

pois os termos $\partial^i \pi^k_k$ cancelam uns aos outros, bem como os termos proporcionais à variável h^{0i}, logo temos $\partial_j \pi^{ij} = 0$. Portanto, a equação (6.52b) é equivalente à componente $\mathcal{E}^{0i}$ da equação de Euler-Lagrange. Também devemos esperar que a equação (6.52c) esteja em perfeito acordo com a equação de Euler-Lagrange (6.30). Isto pode ser demonstrado ao substituirmos as expressões para $\partial_0 h^{0k}$ e $\partial_0 h^k_k$ na equação $\mathcal{E}^{ij} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial_0\partial_0 h^{ij} + \partial^j\partial_0 h^{0i} + \partial^i\partial_0 h^{0j} + \partial_k\partial^j h^{ki} + \partial_k\partial^i h^{kj} - \partial^i\partial^j h_{00} - \partial^i\partial^j h^k_k - \partial^k\partial_k h^{ij} \\ &\quad +\eta^{ij}\left(\partial_0\partial_0 h^k_k - 2\partial_k\partial_0 h^{0k} + \partial^k\partial_k h^0_0 + \partial^k\partial_k h^l_l - \partial_k\partial_l h^{kl}\right), \end{aligned}$$

dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial_0\left[2\pi^{ij} - \frac{2}{(d-2)}\eta^{ij}\pi^k_k + \partial^i h^{0j} + \partial^j h^{0i}\right] + \eta^{ij}\partial_0\left[-\frac{2}{(d-2)}\pi^k_k + 2\partial_k h^{0k}\right] \\ &\quad +\partial^j\partial_0 h^{0i} + \partial^i\partial_0 h^{0j} + \partial_k\partial^j h^{ki} + \partial_k\partial^i h^{kj} - \partial^i\partial^j h_{00} - \partial^i\partial^j h^k_k - \partial^k\partial_k h^{ij} \\ &\quad +\eta^{ij}\left(-2\partial_k\partial_0 h^{0k} + \partial^k\partial_k h^0_0 + \partial^k\partial_k h^l_l - \partial_k\partial_l h^{kl}\right), \end{aligned}$$

novamente, os termos proporcional à $\partial_0 \pi^k_k$ cancelam uns aos outros, bem como a proporcional à $\partial_0 h^{0i}$. Portanto $\mathcal{E}^{ij} = 0$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 2\partial_0\pi^{ij} &= \partial_k\partial^j h^{ki} + \partial_k\partial^i h^{kj} - \partial^i\partial^j h_{00} - \partial^i\partial^j h^k_k - \partial^k\partial_k h^{ij} \\ &\quad +\eta^{ij}\left(\partial^k\partial_k h_{00} + \partial^k\partial_k h^l_l - \partial_k\partial_l h^{kl}\right), \end{aligned}$$

que é igual a (6.52c). Dessa forma, a equivalência entre as Equações Características e as de Euler-Lagrange é provada.

6.5.2 Gerador das Transformações Canônicas

As variações ao longo da direção dos parâmetros λ_μ e ω_μ são dadas por

$$\delta_\lambda h_{\mu\nu} = \Delta^{00}_{\mu\nu}\delta\lambda_0 + 2\Delta^{0k}_{\mu\nu}\delta\lambda_k, \tag{6.53a}$$

$$\delta_\omega h_{\mu\nu} = -\Delta^{kl}_{\mu\nu}\partial_l\delta\omega_k, \tag{6.53b}$$

$$\delta_\omega \pi^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu}_{kl}\left[-\eta^{lk}\partial_m\partial^m + \eta^{km}\partial_m\partial^l\right]\delta\omega_0, \tag{6.53c}$$

nessas equações temos denotado com os subíndices λ e ω ao longo de qual dos parâmetros independentes estamos variando os campos. A Condição de Integrabilidade só nos permite estudar transformações globais. A fim de transformar (6.53) numa transformação local, é preciso considerar os parâmetros dependentes do tempo $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x^0 = t)$ e $\omega_\mu = \omega_\mu(x^0 = t)$. Para isto, escrevemos

$$\delta h_{\mu\nu} = \Delta^{00}_{\mu\nu}\delta\lambda_0 + 2\Delta^{0k}_{\mu\nu}\delta\lambda_k - \Delta^{kl}_{\mu\nu}\partial_l\delta\omega_k, \tag{6.54a}$$

$$\delta\pi^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu}_{kl}\left[-\eta^{kl}\partial_m\partial^m + \eta^{km}\partial_m\partial^l\right]\delta\omega_0, \tag{6.54b}$$

aqui abandonamos o subíndice, uma vez que neste caso as variações são também dependentes do tempo.

O gerador das transformações canônicas é dada pela combinação dos geradores $\mathcal{G}'^{\mu}_{\lambda}$ e $\mathcal{G}'^{\mu}_{\omega}$, assim temos

$$G^{can} = \int dy \left[\mathcal{G}'^{0}_{\lambda}\delta\lambda_0 + 2\mathcal{G}'^{i}_{\lambda}\delta\lambda_i + \mathcal{G}'^{0}_{\omega}\delta\omega_0 + \mathcal{G}'^{i}_{\omega}\delta\omega_i\right], \tag{6.55}$$

podendo ser mostrado

$$\begin{aligned}
\{h_{\mu\nu}, G^{can}\} &= \delta h_{\mu\nu} = \Delta^{00}_{\mu\nu}\delta\lambda_0 + 2\Delta^{0k}_{\mu\nu}\delta\lambda_k - \Delta^{kl}_{\mu\nu}\partial_l\delta\omega_k, &\text{(6.56a)}\\
\{\pi^{\mu\nu}, G^{can}\} &= \delta\pi^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu}_{kl}\left[-\eta^{kl}\partial_m\partial^m + \eta^{km}\partial_m\partial^l\right]\delta\omega_0. &\text{(6.56b)}
\end{aligned}$$

Agora, ao impor a invariância sob as variações $\delta\lambda_\mu$ e $\delta\omega_\mu$ podemos relacionar esses parâmetros. Como fizemos nos capítulos anteriores, medimos a invariância ou a quase-invariância da teoria através da análise da Equação de Lie. Uma vez que a variação do campo $h_{\mu\nu}$ não contém a variável ω_0, escreveremos a Lagrangiana (6.38) de uma forma mista, misturando os momentos canônicos com algumas velocidades, assim

$$\mathcal{L} = \pi^{ij}\partial_0 h_{ij} - \frac{1}{4}\partial_0 h_{ij}\partial_0 h^{ij} - \frac{1}{4}\partial_0 h^i_i\partial_0 h^k_k - \mathcal{V}.$$

Lembremos que a Equação de Lie tem a mesma forma funcional, mesmo que trabalharmos com a Lagrangiana na forma canônica ou na forma mista. Assim, a Equação de Lie a ponto fixo lê-se (veja Apêndice C.0.2)

$$\Delta\mathcal{L} = \delta\pi^{ij}\partial_0 h_{ij} + \pi^{ij}\partial_0\delta h_{ij} - \frac{1}{2}\partial_0 h_{ij}\partial_0\delta h^{ij} + \frac{1}{2}\partial_0 h^i_i\partial_0\delta h^k_k - \delta\mathcal{V}. \tag{6.57}$$

Ao substituirmos (6.54) e eliminando termos de contorno, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} = {} & h^{0i}\left[-\partial_j\partial^j\left(\delta\lambda_i + \frac{1}{2}\partial_0\delta\omega_i\right) + \partial_i\partial^j\left(\delta\lambda_j + \frac{1}{2}\partial_0\delta\omega_j\right)\right]\\
& - h_{ij}\left[\partial^j\partial^i\left(\partial_0\delta\omega_0 + \frac{1}{2}\delta\lambda_0\right) - \eta^{ij}\partial^k\partial_k\left(\frac{1}{2}\delta\lambda_0 + \partial_0\delta\omega_0\right)\right].
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Neste caso, a condição $\Delta\mathcal{L} = 0$ não significa que nosso sistema seja invariante, pois já eliminamos os termos de contorno. Como as variáveis h^{0i} e h_{ij} são independentes entre si, a quase-invariância do nosso problema tem como soluções

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta\lambda_0 &= -\partial_0\delta\omega_0,\\
\delta\lambda_i &= -\frac{1}{2}\partial_0\delta\omega_i + \partial_i X_0.
\end{aligned}$$

Nota-se que a variação $\delta\lambda_i$ não é unicamente determinada desde que o termo proporcional à h^{0i} em (6.58) permite a introdução do termo $\partial_i X_0$. Mesmo assim, podemos fixá-la, comparando-a com a variação produzida pela equação dinâmica (6.41b) com a obtida pela Equação Característica (6.54b). Isto é, a variação dos momentos canônicos é dada por

$$\begin{aligned}
\delta\pi^{ij} &= \frac{1}{2}\partial^0\delta h^{ij} - \frac{1}{2}\partial^j\delta h^{0i} - \frac{1}{2}\partial^i\delta h^{0j} + \eta^{ij}\partial^k\delta h_{0k} - \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_0\delta h^k_k,\\
&= -\frac{1}{4}\partial^0\left(\partial^i\delta\omega^j + \partial^j\delta\omega^i\right) - \frac{1}{2}\partial^j\delta\lambda^i - \frac{1}{2}\partial^i\delta\lambda^j + \eta^{ij}\partial_k\delta\lambda^k + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_0\partial^k\delta\omega_k,
\end{aligned}$$

substituindo a expressão para $\delta\lambda_i$ e comparando com (6.54b), isto é, $\delta\pi^{ij} = \partial^j\partial^i\delta\omega_0 - \eta^{ij}\partial_k\partial^k\delta\omega_0$, obtemos que $X_0 = \delta\omega_0$. Agora vamos apenas renomear o parâmetro $\delta\omega_i = -2X_i$ de modo que

$$\begin{aligned}
\delta h_{00} &= \delta\lambda_0 = -2\partial_0 X_0, \\
\delta h_{0i} &= \delta\lambda_i = \partial_0 X_i + \partial_i X_0, \\
\delta h_{ij} &= -\Delta^{kl}_{\mu\nu}\partial_l\delta\omega_k = \partial_i X_j + \partial_j X_i,
\end{aligned}$$

que pode ser escrito na forma $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu$. Sob estas condições, o gerador das transformações canônicas torna-se agora

$$G^g = \int dy \left[-2\mathcal{G}'^0_\lambda \partial_0\delta\omega_0 + 2\mathcal{G}'^i_\lambda \left(-\frac{1}{2}\partial_0\delta\omega_i + \partial_i\delta\omega_0 \right) + \mathcal{G}'^0_\omega \delta\omega_0 + \mathcal{G}'^i_\omega \delta\omega_i \right], \tag{6.59}$$

gerador da transformação de calibre. Finalmente, podemos contar os graus de liberdade do sistema: Considerando um espaço-tempo de d dimensões, temos um total de $d(d+1)$ variáveis canônicas $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}, \pi^{\mu\nu} = \pi^{\nu\mu}$, e d Hamiltonianos involutivos $\mathcal{G}^\mu_\lambda$ e d $\mathcal{G}^\mu_\omega$. Devido a não existência de Hamiltonianos não involutivos, temos como resultado um total de $d(d+1)/2 - (d+d) = d(d-3)/2$ graus de liberdade. Assim, no caso $d = 4$ temos um total de 2 graus de liberdade, enquanto que para o caso $d = 3$ o sistema não possui graus de liberdade.

Capítulo 7

Considerações finais

Nesta tese estudamos a análise clássica de vínculos através do formalismo de Hamilton-Jacobi. Esta análise é baseada no método de Lagrangianas equivalentes de Carathéodory, porém também está intimamente relacionada com o Princípio Variacional. Por esse motivo, apresentamos no capítulo II o método de variações totais no funcional de ação para assim obter diversos Princípios Variacionais, tais como o Princípio de Hamilton, de Weiss e de Maupertuis, além de ser o equivalente clássico ao Princípio de ação de Schwinger. Obtemos também, a Equação de Lie, que possui uma ligação direta com o teorema de Noether e, portanto, com as simetrias da teoria em consideração. Essa equação fornece também uma alternativa para a obtenção do gerador das transformações de calibre como mostramos mais adiante. A equação de Lie também proporciona um método alternativo ao de Belinfante para a simetrização do tensor de energia-momento. Ao longo da tesis mostramos como efetuar esta simetrização para o modelo de Proca, para a teoria de Maxwell-Chern-Simons e para o modelo Auto-dual. É importante ressaltar que todo o processo relacionado ao Princípio Variacional e a Equação de Lie é válido tanto para sistemas regulares como singulares.

No capítulo II também mostramos a Equação de Hamilton-Jacobi. Para a sua obtenção, seguimos duas abordagens: a primeira esta relacionada ao Princípio de Weiss no espaço de fase que permite a introdução da função geratriz $S(t, q^i)$, a qual tem que satisfazer a equação de Hamilton-Jacobi. Dentro deste quadro teórico e, como uma seção introdutória à abordagem geométrica que será apresentada no capítulo seguinte, mostramos a estrutura simplética para teorias regulares e aqui definimos as transformações canônicas que deixam a estrutura dos Parênteses de Poisson invariante. A segunda abordagem à equação de Hamilton-Jacobi está relacionada ao método de Carathéodory das Lagrangianas equivalentes. Todo este procedimento é válido somente para sistemas regulares, contudo, o estudo das Equações Características e a Condição de Integrabilidade vão a servir como guia para a análise do caso singular. Acompanhamos esta seção com um modelo da mecânica clássica que representa a uma partícula carregada em um campo magnético constante e um potencial quadrático. Esse modelo é interessante devido a sua relação com o efeito Hall Quântico, além de ter uma solução não tão simples devido ao acomplamento das coordenadas cartesianas na equação de Hamilton-Jacobi.

Esse problema pode ser resolvido utilizando a simetría rotacional do problema sempre que considerarmos o chamado gauge simétrico (se utilizamos o gauge de Landau as coordenadas estão desacopladas e é possível fazer uma separação de variáveis). A solução do mesmo problema, mas focado na solução das Equações Características resulta ser prático devido que o desacoplamento das coordenadas é mais evidente quando consideramos a variável complexa $z = x_1 + ix_2$, que também explora a simetria rotacional.

No capítulo III mostramos o método de Güler para a obtenção de um conjunto de Equações Diferenciais Parciais de Hamilton-Jacobi chamadas Hamiltonianos, uma vez que agem como geradoras da dinâmica do sistema. Também mostramos que para que esse sistema de equações seja integrável, temos que satisfazer a Condição de Integrabilidade, que é a pedra angular da estrutura matemática deste formalismo. Ao impor essa condição, obtemos o conjunto completo de Hamiltonianos do sistema, que devem ser involutivos. Caso algum Hamiltoniano não satisfaça a Condição de Integrabilidade, esses podem ser eliminados ao construir o Parêntese Generalizado redefinindo desta forma a dinâmica do sistema. Para construir a estrutura simplética da teoria utilizamos uma abordagem geométrica, construimos vetores e formas diferenciais que estão relacionadas às Equações Características bem como, mostramos que obtemos uma forma simplética degenerada e a partir dela estudamos as transformações canônicas no contexto de sistemas vinculados. Além disso, mostramos que o conjunto completo de Hamiltonianos involutivos é o gerador dessas transformações. Como já foi mencionado anteriormente, a Conjetura de Dirac relaciona os vínculos de primeira classe (Hamiltonianos involutivos) com as simetrias de calibre, e existem diversos métodos para a obtenção do gerador das transformações associadas a essas simetrias. Uma vez que o formalismo de Hamilton-Jacobi inicia-se a partir de Lagrangeanas equivalentes, que diferem por uma derivada temporal total relacionada a dS (relacionada à forma simplética), é natural impor que as variações ao longo dos parâmetros da teoria, que estão relacionados aos Hamiltonianos involutivos, sejam invariâncias da teoria. Para obter esse resultado substituímos as variações dentro da Equação de Lie e consideramos $\Delta L = 0$ para uma teoria invariante, ou $\Delta L = dF$ para uma teoria quase-invariante.

Ainda que as aplicações na teoria de campos sejam um dos principais objetivos desta tese, incluímos ainda no capítulo III uma uma aplicação dentro do marco da Mecânica Analítica, chamada de Mecânica Quântica Topológica. Esse modelo é o análogo clássico à teoria abeliana do campo de Yang-Mills Topologicamente Massivo e é interessante por apresentar tanto Hamiltonianos involutivos como não-involutivos, permitindo assim uma análise à la Hamilton-Jacobi completa. O modelo da Mecânica Quântica Topológica possui como variáveis dinâmicas a coordenada de posição x_i e a variável q imposta para manter a invariância de calibre que possui seu equivalente na teoria de campos. Resulta que os vínculos canônicos relacionados as variáveis x_i são não-involutivos, portanto construímos o Parêntese Generalizado, enquanto que a Condição de Integrabilidade sob este parênteses fornece um novo vínculo qC, proporcional à Hamiltoniana canônica. Aqui percebemos que a variável q age como um multiplicador de Lagrange e, portanto sua Equação Característica não deve fornecer informação dinâmica, o que em seguida é mostrado. Identificamos, depois, o gerador das transformações canônicas, que

possui dois parâmetros. Considerando que as variações ao longo desses parâmetros são simetrias do modelo, isto é, considerando que anulam a Equação de Lie, obtemos uma relação entre os parâmetros ($\delta\lambda = \delta\dot{\omega}$), permitindo assim obter o gerador da transformação de calibre desta teoria.

No capítulo IV estudamos o modelo BF em duas dimensões. Este modelo é equivalente à teoria de Jackiw-Teitelboim que é bem conhecida por modelar gravitação bi-dimensional, uma vez que as equações da Relatividade Geral resultam triviais, ainda que não se possa dizer o mesmo da sua estrutura interna. Esta teoria é descrita por dois campos, um campo dilaton B_a e um campo de calibre A^a_μ. A análise a nível Lagrangiano da Equação de Lie é escrita, considerando esses campos como independentes, e apartir dessa equação também obtemos de manera natural a invariância da teoria como resultado da imposição $\Delta\mathcal{L} = 0$. A análise à la Hamilton-Jacobi mostra que tanto o vínculo canônico relacionado à variável B_a quanto ao relacionado à variável A^a_1 resultam não-involutivos. A construção dos Parênteses Generalizados não leva a maiores complicações, uma vez que a inversa da matriz formada com os Hamiltonianos não-involutivos é bem definida e a dinâmica do sistema é redefinida. A partir dos parênteses fundamentais, observamos também que a variável B_a pode ser identificada com π^1_a, que é a variável canônicamente conjugada a A^a_1 e cuja Equação Característica não fornece informação dinâmica do sistema. É importante mencionar que o estudo do modelo BF segundo o formalismo de Dirac identifica as variáveis B_a e π^1_a já no inicio da análise de vínculos, portanto todos os vínculos restantes são de primeira classe sem necessidade alguma da redefinição da dinâmica da teoria. Depois de estudar a equivalência emtre as Equações Características com as equações de Euler-Lagrange e identificar o gerador das transformações canônicas, utilizamos a Equação de Lie para relacionar os parâmetros do modelo e assim obter o gerador da transformação de calibre.

No capítulo V, logo após estudar as propriedades a nível Lagrangiano da teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva analisamos a estrutura de vínculos, tanto na forma Instantânea como no Plano Nulo. Na forma Instantânea o formalismo é direto uma vez que todos os Hamiltonianos presentes na teoria resultam ser involutivos sem a necessidade de uma redefinição da dinâmica por meio da construção do Parêntese Generalizado. Temos também que o termo massivo não afeta a contagem de graus de liberdade do sistema, por outro lado, o estudo em coordenadas de Cone de Luz possui uma estrutura mais rica, devido a presencia de Hamiltonianos "não-involutivos"$\mathcal{H}'^1_a$ e, mencionamos esses entre aspas porque que existe, entre eles um subconjunto de Hamiltonianos involutivos. Essa é uma das características mais importantes na dinâmica do Plano Nulo e se reflete na não-unicidade da inversa da matriz formada pelos Hamiltonianos $\mathcal{H}'^1_a$. Contudo, podemos escolher uma inversa, em particular aquela que não dependa de uma função no tempo $f(x^+) = 0$, sem alterar as equações de movimento do sistema. Tanto na forma Instantânea como no Plano Nulo, obtemos o gerador da transformação de calibre utilizando a Equação de Lie asociando assim os dois parâmetros da teoria $\delta\lambda_a$ e $\delta\omega_a$. Neste processo eliminamos os termos de contorno da equação, confirmando assim que a teoria é quase-invariante.

Nesse mesmo capítulo estudamos tambem a teoria Auto-dual vetorial f_μ, que é equivalente ao caso abeliano da teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva, chamada de Maxwell-Chern-Simons. Esta teoria é constituída por um termo massivo de Proca mais um termo de Chern-Simons, portanto não possui invariância de calibre. Isto é corroborado com a análise de vínculos da teoria, que não apresenta nenhum Hamiltoniano involutivo. Com todos os Hamiltonianos restantes construímos o Parêntese Generalizado e nessa estrutura identificamos um campo escalar. Esse mesmo campo escalar também é identificado dentro do Parêntese de Poisson da teoria de Maxwell-Chern-Simons, uma vez que sua dinâmica não tem que ser redefinida. Assim, temos que variável f_μ corresponde ao auto-dual do campo tensorial $F_{\mu\nu}$ mostrando assim a correspondência entre estas duas teorias.

No capítulo VI estudamos a teoria da Gravitação Linearizada. Apresentamos primeiro, a Lagrangiana da Einstein-Hilbert assim como a sua equivalente, chamada Gamma-Gamma que não possui derivadas de segunda ordem na métrica. Em seguida apresentamos as variáveis de Goldberg que são densidades métricas. Essas variáveis permitem escrever em uma forma conveniente a ação de Einstein-Hilbert e permitem um melhor acompanhamento da expansão perturbativa da teoria. Todavia, a análise de vínculos da teoria linearizada com variáveis de Goldberg parece bem complexa devido à presenção de vínculos canônicos não-involutivos. Embora esses Hamiltonianos possam ser eliminados, redefinindo a dinâmica do sistema, esse processo não será útil para posteriores aplicações em teorias mais complexas de gravitação. Por essa razão preferimos um estudo de vínculos onde a variável dinâmica seja a métrica.

O método para obter a Lagrangiana para a Gravitação Linearizada em termos da métrica não é unico. Uma forma é linearizar diretamente a Lagrangiana de Einstein-Hilbert, outro método (mostrado nesta tese) é utilizar o processo de consistência formulado pelo Feynman. Utilizando quaisquer dos dois métodos obtemos assim a Lagrangiana de Fierz-Pauli, que tambêm está relacionada com a teoria linearizada em termos da variáveis de Goldberg. Comquanto estas duas teorias sejam equivalentes, suas estruturas de vínculos diferem drasticamente. Além de possuir vínculos canônicos involutivos, a Lagrangiana de Fierz-Pauli permite obter uma simplificação desses quando foliamos o espaço-tempo e eliminamos os termos de superficie. Se bem esse proceso elimina as covariância da teoria no formalismo Lagrangeano, esta não perde suas propriedades de calibre, como foi mostrado a partir da análise da Equação de Lie. Neste caso, a Condição de Integrabilidade só fornece Hamiltonianos involutivos ao sistema que são geradores das transformações canônicas do sistema. Para obter o gerador da transformação de calibre utilizamos a equação de Lie, mas diferente dos outros casos, existe uma indeterminação para relacionar os parâmetros dessa teoria. Contudo, a relação dinâmica como resultado da definição do momento conjugado nos permite relacionar os parâmetros de manera única.

Como perspectivas futuras e, havendo completado o formalismo clássico de vínculos, planejamos complementar o formalismo para obter um programa de quantização vía integração funcional à la Hamilton-Jacobi. Assim como a nível clássico, a propria estrutura matemática do formalismo fornece elementos para redefinir a dinâmica e obter os geradores das transformações canônicas; esperamos que o análise da equação característica $dS = p_i dq^i - H'_a dt^a$ nos leve a

uma análise a nível quântico naturalmente. Por outro lado, no que concerne as aplicações, estamos interessados em estudar os geradores das supersimmetrias. Nesse sentido, precisamos generalizar o formalismo apresentado nesta tese para sistemas de Berezin, uma vez que seus elementos implementam tanto as variáveis bosónicas como as fermiônicas. Vale ressaltar que o trabalho apresentado em [14] não contempla a nova divisão entre Hamiltonianos nem o papel de cada um deles no formalismo. O estudo das variações totais assim como da Equação de Lie para sistemas de Berezin tambem é necessário para a análise de vínculos à la Hamilton-Jacobi. A análise da teoria de Yang-Mills Topologicamente Massiva nos incentiva ao estudo da teoria da Gravitação Topologicamente Massiva assim como sua versão linearizada. Segunda esta linha de estudo, vemos que a análise do modelo de Auto-dual para a teoria da gravitação linearizada topologicamente massiva é útil, pois reduz o estudo de uma teoria de ordem superior para uma de primeira ordem. Finalmente, gostaríamos de generalizar o método de simetrização, resultante da invariância de Poincaré na Equação de Lie, para ações de ordem superior e, assim aplicá-la a modelos tais como a teoria de Podolsky.

Referências Bibliográficas

[1] P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Can. J. Math. **2**, 129 (1950);

P. A. M. Dirac, *The Hamiltonian form of field dynamics*, Can. J. Math. **3**, 1 (1951);

P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York 1964).

[2] P. G. Bergmann, *Non-linear field theories*, Phys. Rev. **75**, 680 (1949);

J. L. Anderson, P. G. Bergmann, *Constraints in Covariant Field Theories*, Phys. Rev. **83**, 1018 (1951);

P. G. Bergmann, I. Goldberg, *Dirac Bracket Transformations in Phase Space*, Phys. Rev. **98**, 531 (1955).

[3] A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems* (1976).

D. M. Gitman, I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with constraints*, Springer (1990).

M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press (1992).

[4] L. Castellani, *Symmetries in Constrained Hamiltonian Systems*, Ann. of Phys. **143**, 357 (1982).

[5] M. Henneaux, C. Teitelboim, J. Zanelli, *Gauge Invariance and Degree of Freedom Count*, Nucl. Phys. ***B*332**, 169 (1990).

[6] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, *Symmetries and Physical functions in General Gauge Theory*, Int. J. Mod. Phys. ***A*21**, 327 (2006).

[7] L. Faddeev, R. Jackiw, *Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1692 (1988).

[8] J. Barcelos-Neto, C. Wotzasek, *Sympletic Quantization of Constrained Systems*, Mod. Phys. Lett ***A*7**, 1737 (1992).

J. Barcelos-Neto, C. Wotzasek, *Faddeev-Jackiw Quantization and Constraints*, Mod. Phys. Lett ***A*7**, 4981 (1992).

[9] Y. Güler, Il Nuovo Cimento $\boldsymbol{B100}$, 251 (1987);

Y. Güler, *On the dynamics of singular, continuous systems*, J. Math. Phys. **30**, 785 (1992);

Y. Güler, Il Nuovo Cimento $\boldsymbol{B107}$, 1398 (1992).

[10] C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, American Mathematical Society; 3rd edition (1999).

[11] Y. Güler, Il Nuovo Cimento $\boldsymbol{B111}$, 513 (1996).

Y. Güler, D. Baleanu, *Hamilton-Jacobi quantization of the finite dimensional systems with constraints*, Il Nuovo Cimento $\boldsymbol{B114}$, 709 (1999).

[12] B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, *Hamilton-Jacobi formulation for singular systems with second order Lagrangians*, Il Nuovo Cimento $\boldsymbol{B111}$ (1996).

[13] B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, *Generalization of the Hamilton-Jacobi approach for higher order singular systems*, Il Nuovo Cimento $\boldsymbol{B113}$ (1998).

[14] B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, J. L. Tomazelli, *Hamilton-Jacobi approach to Berezinian singular systems*, Ann. Phys. **267**, 75 (1998).

[15] D. Baleanu, Y. Güler, *Hamilton-Jacobi treatment of a nonrelativistic particle on a curved space*, J. Phys. $\boldsymbol{A34}$, 73 (2001).

[16] D. Baleanu, Y. Güler, *Multi - Hamilton-Jacobi quantization of* $O(3)$ *nonlinear sigma model*, Mod. Phys. Lett. $\boldsymbol{A16}$, 873 (2001).

[17] D. Baleanu, Y. Güler, *Hamilton-Jacobi treatment of chiral Schwinger model*, Int. J. Theor. Phys. **40**, 2017 (2001);

D. Baleanu, Y. Güler, *Hamilton-Jacobi treatment of front form Schwinger model*, Int. J. Mod. Phys. $\boldsymbol{A17}$, 1449 (2002).

[18] S. T. Hong, Y. W. Kim, K. D. Rothe, *Symplectic Embedding and Hamilton-Jacobi analysis of Proca Model*, Mod. Phys. Lett. $\boldsymbol{A17}$, 435 (2002);

D. Baleanu, Y. Güler, *Hamilton-Jacobi formalism of Abelian Proca's model revisited*, Il Nuovo Cimento. $\boldsymbol{B117}$, 353 (2002).

[19] D. Baleanu, Y. Güler, *2-D gravity and the Hamilton-Jacobi formalism*, Il Nuovo Cimento $\boldsymbol{B117}$, 917 (2002).

[20] B. M. Pimentel, P.J. Pompeia, J.F. da Rocha-Neto, R.G. Teixeira, *The Teleparallel Lagrangian and Hamilton-Jacobi formalism*, Gen. Rel. Grav. **35**, 877 (2003);

B. M. Pimentel, P. J. Pompeia, J. F. da Rocha-Neto, *The Hamilton-Jacobi approach to teleparallelism*, Il Nuovo Cimento $\boldsymbol{B120}$, 981 (2005).

[21] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, P. J. Pompeia, *First order actions: A New view*, Mod. Phys. Lett. $\boldsymbol{A20}$, 2873 (2005).

[22] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, P. J. Pompeia, *Hamilton-Jacobi approach for first order actions and theories with higher derivatives*, Ann. Phys. 323, 527 (2008).

[23] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Non-Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism*, Ann. Phys. $\mathbf{323}$, 3137 (2008).

[24] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, G. R. Zambrano, *Hamilton-Jacobi formalism on the null-plane: Applications*, PoS ISFTG 046 (2009).

[25] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, G. R. Zambrano, *Topologically Massive Yang-Mills field on the null-plane: A Hamilton-Jacobi approach*, AIP Conf. Proc. $\mathbf{1296}$, 402 (2010).

[26] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, P. J. Pompeia, *General Relativity in two dimensions: A Hamilton-Jacobi constraint analysis*, Ann. Phys. $\mathbf{325}$, 2499 (2010).

[27] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Hamilton-Jacobi formalism for Linearized Gravity*, Class. Quant. Grav. $\mathbf{28}$, 175015 (2011).

[28] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Two dimensional BF gravity: A Hamilton-Jacobi analysis*, accepted in J. Math. Phys.

[29] B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Correspondence between the Self-Dual model and the Topologically Massive Electrodynamics: A new view*, Presented in XII Hadron Physics (2012).

[30] H. J. Rothe, K. D. Rothe, *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Hamiltonian Systems*, World Scientific Publishing Company, (2010).

[31] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism*, to be summited.

[32] J. Belinfante, *On the spin angular momentum of mesons*, Physica $\mathbf{6}$, 887 (1939);

J. Belinfante, *On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields*, Physica $\mathbf{7}$, 449 (1940).

[33] G. V. Dunne, R. Jackiw, C. A: Trugenberger, *Topological (Chern-Simons) Quantum Mechanics*, Phys. Rev. D41, 661 (1990).

[34] R. Jackiw, *Two Lectures on two-dimensional gravity*, arXiv:9511048[gr-qc] (1995);

D. Grumiller, W. Kummer, D. V. Vassilevich, *Dilaton gravity in two-dimensions*, Phys. Rept. $\mathbf{369}$, 327 (2002).

[35] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, *Three-Dimensional Massive Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982);

S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, *Topologically massive gauge theories*, Ann. Phys. 140, 372 (1982);

S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, *Topologically massive gauge theories-Erratum*, Ann. Phys. **185**, 406 (1988).

[36] P. K. Townsend, K. Pilch, P. Van Nieuwenhuizen, *Self-duality in odd dimensions*, Phys. Lett. ***B*136**, 38 (1984).

[37] S. Deser, R. Jackiw, *Self-duality of Topologically Massive Gauge Theories*, Phys. Lett. ***B*139**, 371 (1984).

[38] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Dover Publications (1986).

[39] E.C.G. Sudarshan, N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, John Wiley and Sons, (1974).

[40] P. Weiss, *On the Hamilton-Jacobi Theory and Quantization of a Dynamical Continuum*, Proc. R. Soc. Lond. ***A*169**, 102 (1938).

[41] J. Schwinger, L. Deraad Jr., K. Milton, W. Tsai, J. Norton *Classical Electrodynamics*, Westview Press, (1998);

K. Milton, J. Schwinger, *Electromagnetic Radiation: Variational Methods, Waveguides and Accelerators*, Springer, (2006).

[42] J. Schwinger, *The Theory of Quantized Fields. I*, Phys. Rev. **82**, 914 (1951).

[43] J. Schwinger, *Quantum Mechanics: Symbolism of Atomic Measurements*, Springer-Verlag, Berlin (2001).

[44] E. J. Saletan, A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Wiley & Sons Inc (1971).

[45] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics, Vol. 1 Course of Theoretical Physics*, Butterworth-Heinemann; 3rd edition (1976) .

[46] A. Proca, J. de Phys. et rad. **7**, 347 (1936); A. Proca, J. de Phys. et Rad. **8**, 23 (1937).

[47] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization* Springer-Verlag, Berlin, (1996).

[48] M. Montesinos, E. Flores, *Symmetric Energy-momentum Tensor in Maxwell, Yang-Mills, and Proca Theories Obtained Using Only Noether's Theorem*, Rev. Mex. Fís. **52**, 29 (2006).

[49] L. D. Landau, *Diamagnetismus der Metalle*, Z. Phys **64**, 629 (1930).

[50] R. Laughlin, *Quantized Motion of Three Two-dimensional Electrons in a Strong Magnetic Field*,Phys. Rev. B **27**, 3383 (1983).

[51] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, Wiley-VCH; 1st edition (1989).

[52] J. D. Brown, *Lower Dimensional Gravity*, World Scientific Pub. Co. Inc. (1988).

[53] C. Teitelboim, *Gravitation and Hamiltonian Structure in Two Spacetime Dimensions*, Phys. Lett. **B126** 41 (1983); C. Teitelboim, *Supergravity and Hamiltonian Structure in Two Spacetime Dimensions*, Phys. Lett. **B126** 46(1983).

R. Jackiw, C. Teitelboim, *Quantum Theory of Gravity*, S. Christensen (editor), Bristol (1984);

R. Jackiw, *Lower Dimensional Gravity*, Nucl. Phys. **B252**, 343 (1985).

[54] K. Isler, C. A. Trugenberger, *Gauge Theory of Two-dimensional Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **63**, 834 (1989).

[55] C. P. Constantinidis, J. A. Lourenço, I. Morales, O. Piguet, A. Rios, *Canonical Analysis of the Jackiw-Teitelboim Model in the Temporal Gauge: I. The Classical Theory*, Class. Quant. Grav. **25**, 125003 (2008);

C. P. Constantinidis, O. Piguet, A. Perez, *Quantization of the Jackiw-Teitelboim Model*, Phys. Rev. **D79**, 084007 (2009).

[56] M. Weis, *Topological Aspects of Quantum Gravity*, Thesis accepted for the Ph. D. degree in Physics at the Faculty of Science, University of Copenhagen 1997.

[57] R. Jackiw, S. Templeton, *How super-renormalizable interactions cure their infrared divergences*, Phys. Rev. **D23**, 2291 (1981).

[58] M. Stone, *Quantum Hall Effect*, World Scientific, Singapore (1992).

[59] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Singapore (1990).

[60] T. Appelquist, R. D. Pisarki, *High-temperature Yang-Mills theories and three-dimensional quantum chromodynamics*, Phys. Rev. **D23**, 2305 (1981).

[61] D. Evens, G. Kunstatter, *Hamiltonian analysis of topologically massive Yang-Mills theory*, Phys. Rev. **D37**, 435 (1988).

[62] J. M. Martínes-Fernández, C. Wotzasek, *Constrained quantization of a Topologically massive gauge theory in* $(2+1)$*-dimensions*, Z. Phys. **C43**, 305 (1989).

[63] N. Kiriushcheva, S. V. Kuzmin, D. G. C. McKeon, *An Analysis of the First Order Form of Gauge Theories*, arXiv:1112.2003 [hep-th] (2011).

[64] G. Dunne, *Self-Dual Chern-Simons Theories*, arXiv:9410065 [hep-th] (1994).

[65] S. E. Hjelmeland, *Duality for the Non-Specialist*, arXiv:9705122 [hep-th] (1996).

[66] P. A. M. Dirac, *Forms of Relativistic Dynamics*, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).

[67] P. P. Srivastava, S. J. Brodsky, *Light-front-quantized QCD in the light-cone gauge: The doubly transverse gauge propagator*, Phys. Rev. D 64, 045006 (2001);

S. J. Brodsky, *Gauge Theories on the Light-Front*, Braz. J. Phys. **34**, 157 (2004).

[68] T. Heinzl, S. Krusche, E. Werner, *Nontrivial vacuum structure in light cone quantum field theory*, Phys. Lett. $\boldsymbol{B272}$, 54 (1991).

[69] B. L. G. Bekker, *Forms of Relativistic Dynamics, Lecture Notes in Physics*, **572**, Springer, New York (2001).

[70] M. Huszar, *Light Front Quantization by Dirac's Method*, J. Phys. A: Math. Gen. **9**, 1359 (1976).

[71] P. J. Steinhardt, *Problems of quantization in the infinite momentum frame*, Ann. Phys **128**, 425 (1980).

[72] D. Dalmazi, *Generalized duality between local vector theories in* $D = 2 + 1$, JHEP **0608**, 040 (2006).

[73] P. J. Arias, *Spin* 2 *en dimensión* $2 + 1$, Doctoral Thesis (1994), arXiv:9803083[gr-qc] (1998);

P. J. Arias, F. A. Schaposnik, *Self-dual formulation of* $d = 3$ *gravity theories in the Path-integral framework*, Int. J. of Mod. Phys. $\boldsymbol{A26}$, 2437 (2011);

E. A. Bergshoeff, O. Hohm, P. K. Townsend, *On Higher Derivatives in 3D Gravity and Higher Spin Gauge Theories*, Ann. Phys. **325**, 1118 (2010).

[74] P. A. M. Dirac, *The Theory of Gravitation in Hamiltonian Form*, Proc. Roy. Soc. Lond. $\boldsymbol{A19}$, 333 (1958).

[75] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity I: The Canonical Theory*, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).

[76] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, P. K. Townsend, *Massive Gravity in Three Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **102**, 201301 (2009);

E. A. Bergshoeff, O. Hohm, P. K. Townsend, *More on massive 3D gravity*, Phys. Rev. $\boldsymbol{D79}$, 124042 (2009).

[77] M. Fierz, W. Pauli, *On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field*, Proc. R. Soc. Lond. $\boldsymbol{A173}$, 211 (1939).

[78] T. Padmanabhan, *From Gravitons to Gravity: Myths and Reality*, Int. J. Mod. Phys. $\boldsymbol{D17}$, 367 (2008).

[79] K. R. Green, N. Kiriushcheva, S. V. Kuzmin, *Analysis of Hamiltonian formulations of linearized General Relativity*, Eur. Phys. J. $\boldsymbol{C71}$, 1678 (2011).

[80] D. Hilbert, Originally published as *Die Grundlagen der Physik* in Konigl. Gesell. Wiss. Göttingen. Nachr., math.-phys. Klasse (1916). Presented in the section of 1915. English translated in *The Genesis of General Relativity*, Boston Studies in the Philosophy of Science $\mathbf{250}$, 1925 (2007).

[81] J. N. Goldberg, *Conservations Laws in General Relativity*, Phys. Rev. $\mathbf{111}$, 315 (1958).

[82] G. Scharf, *Quantum Gauge Theories: A True Ghost Story*, Wiley-Interscience; 1st edition (2001).

[83] R. Feynman, F. Morinigo, W. Wagner, B. Hatfield, D. Pines, *Feynman Lectures On Gravitation*, Westview Press, 1st edition (2002).

[84] G. Nordström, Phys. Zeit. $\mathbf{13}$, 1126 (1912);
G. Nordström, Ann. d. Phys. $\mathbf{40}$, 856 (1913);
G. Nordström, Ann. d. Phys. $\mathbf{42}$, 533 (1913).

[85] S. N. Gupta, *Gravitation and Electromagnetism*, Phys. Rev. $\mathbf{96}$, 1683 (1954).

[86] S. Deser, *Self-interaction and gauge invariance*, Gen. Rel. Grav. $\mathbf{1}$, 9 (1970).

[87] J. L. Anderson, *Reduction of Primary Constraints in Generally Covariant Field Theories*, Phys. Rev. $\mathbf{111}$, 965 (1958).

Apêndice A

Simetrização do tensor de energia-momento via Equação de Lie

Nesta seção calcularemos o tensor de energia-momento simetrizado das teorias de Maxwell-Chern-Simons e do modelo Auto-dual utilizando a invariância sob transformações de Poincaré na Equação de Lie.

A.1 Teoria de Maxwell-Chern-Simons

A teoria de Maxwell-Chern-Simons, caso abeliano do campo de Yang-Mills Topologicamente Massivo, é descrita pela seguinte funcional de ação

$$W_{MCS} = \int d^3x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4} \varepsilon^{\mu\nu\gamma} F_{\mu\nu} A_\gamma \right]. \tag{A.1}$$

Realizando variações totais obtemos a Equação de Lie

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} = \delta A_\alpha \left(\partial_\mu F^{\mu\alpha} + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{\rho\sigma\alpha} F_{\rho\sigma} \right) + \delta x^\alpha \partial_\mu \Theta^\mu{}_\alpha \\ + \partial_\mu \left[\left(-F^{\mu\alpha} + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\gamma} A_\gamma \right) \delta A_\alpha - \delta x^\alpha \Theta^\mu{}_\alpha \right]. \end{aligned} \tag{A.2}$$

onde o tensor de energia-momento canônico é dado por

$$\Theta^\mu{}_\alpha = -F^{\mu\beta} \partial_\alpha \varphi_\beta + \frac{1}{4} \delta^\mu_\alpha F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \frac{\mu}{2} \left(\varepsilon^{\mu\beta\gamma} A_\gamma \partial_\alpha \varphi_\beta - \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\sigma\gamma} \delta^\mu_\alpha F_{\rho\sigma} A_\gamma \right). \tag{A.3}$$

Para simetrizar o tensor energia-momentum canônico, vamos a considerar a transformação de Poincaré

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \tag{A.4a}$$

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \varepsilon^\mu, \tag{A.4b}$$

que induz uma transformação no vector A_μ

$$A'_\mu (x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu (x) = \left[\delta^\nu_\mu - \partial_\mu \delta x^\nu \right] A_\nu (x) = A_\mu (x) - \partial_\mu \delta x^\nu A_\nu,$$

logo

$$\delta A_\mu = -A_\nu \partial_\mu \delta x^\nu. \tag{A.5}$$

Agora, definindo

$$\pi^{\mu\alpha} \equiv -F^{\mu\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\gamma}A_\gamma, \tag{A.6}$$

escrevemos a Equação de Lie para variações a ponto fixo

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha}F_{\rho\sigma}\delta A_\alpha + \pi^{\mu\alpha}\partial_\mu \delta A_\alpha + \delta x^\alpha \partial_\mu \Theta^\mu{}_\alpha - \partial_\mu\left(\delta x^\alpha \Theta^\mu{}_\alpha\right),$$

substituindo (A.5) temos que

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} =& -\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha}F_{\rho\sigma}A_\nu\partial_\alpha\delta x^\nu - \pi^{\mu\alpha}\partial_\mu\left(A_\nu\partial_\alpha\delta x^\nu\right) + \delta x^\alpha\partial_\mu\Theta^\mu{}_\alpha - \partial_\mu\left(\delta x^\alpha\Theta^\mu{}_\alpha\right),\\
=& -\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha}F_{\rho\sigma}A_\nu\partial_\alpha\delta x^\nu - \pi^{\mu\alpha}\left(\partial_\mu A_\nu\right)\partial_\alpha\delta x^\nu + \delta x^\alpha\partial_\mu\Theta^\mu{}_\alpha - \partial_\mu\left(\delta x^\alpha\Theta^\mu{}_\alpha\right),\\
=& \left[-\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha}F_{\rho\sigma}A_\nu - \pi^{\mu\alpha}\partial_\mu A_\nu\right]\partial_\alpha\delta x^\nu + \delta x^\alpha\partial_\mu\Theta^\mu{}_\alpha - \partial_\mu\left(\delta x^\alpha\Theta^\mu{}_\alpha\right),\\
=& \left[-\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\rho\sigma\mu}F_{\rho\sigma}A_\alpha - \pi^{\sigma\mu}\partial_\sigma A_\alpha\right]\partial_\mu\delta x^\alpha + \delta x^\alpha\partial_\mu\Theta^\mu{}_\alpha - \partial_\mu\left(\delta x^\alpha\Theta^\mu{}_\alpha\right),\\
=& \delta x^\alpha\partial_\mu\left[\Theta^\mu{}_\alpha + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\rho\sigma\mu}F_{\rho\sigma}A_\alpha + \pi^{\sigma\mu}\partial_\sigma A_\alpha\right]\\
&- \partial_\mu\left[\delta x^\alpha\left(\Theta^\mu{}_\alpha + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\rho\sigma\mu}F_{\rho\sigma}A_\alpha + \pi^{\sigma\mu}\partial_\sigma A_\alpha\right)\right],
\end{aligned}$$

agora, definindo

$$T^\mu{}_\alpha \equiv \Theta^\mu{}_\alpha + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\rho\sigma\mu}F_{\rho\sigma}A_\alpha + \pi^{\sigma\mu}\partial_\sigma A_\alpha. \tag{A.7}$$

e substituindo (A.6) e (A.3) obtemos

$$\begin{aligned}
T^\mu{}_\alpha =& -F^{\mu\beta}\partial_\alpha A_\beta + \frac{1}{4}\delta^\mu_\alpha F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \left(-F^{\sigma\mu} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\sigma\mu\gamma}A_\gamma\right)\partial_\sigma A_\alpha\\
&+ \frac{\mu}{2}\left(\varepsilon^{\mu\sigma\gamma}A_\gamma\partial_\alpha A_\sigma - \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\gamma}\delta^\mu_\alpha F_{\rho\sigma}A_\gamma\right) + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\rho\sigma\mu}F_{\rho\sigma}A_\alpha,\\
=& -F^{\mu\sigma}\partial_\alpha A_\sigma + \frac{1}{4}\delta^\mu_\alpha F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\sigma\mu}\partial_\sigma A_\alpha\\
&+ \frac{\mu}{2}\left(\varepsilon^{\mu\sigma\gamma}A_\gamma\partial_\alpha A_\sigma + \varepsilon^{\sigma\mu\gamma}A_\gamma\partial_\sigma A_\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\gamma}\delta^\mu_\alpha F_{\rho\sigma}A_\gamma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\mu}F_{\rho\sigma}A_\alpha\right),\\
=& \frac{1}{4}\delta^\mu_\alpha F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\sigma\mu}\left(\partial_\sigma A_\alpha - \partial_\alpha A_\sigma\right)\\
&+ \frac{\mu}{2}\left[\varepsilon^{\mu\sigma\gamma}A_\gamma F_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\gamma}\delta^\mu_\alpha F_{\rho\sigma}A_\gamma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\mu}\delta^\gamma_\alpha F_{\rho\sigma}A_\gamma\right],\\
=& \frac{1}{4}\delta^\mu_\alpha F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\sigma\mu}F_{\sigma\alpha}\\
&+ \frac{\mu}{2}\left[\varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^\rho_\alpha F_{\rho\sigma}A_\gamma + \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\rho\sigma\mu}\delta^\gamma_\alpha - \varepsilon^{\rho\sigma\gamma}\delta^\mu_\alpha\right)F_{\rho\sigma}A_\gamma\right],\\
=& \frac{1}{4}\delta^\mu_\alpha F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\sigma\mu}F_{\sigma\alpha} + \frac{\mu}{2}\left[\varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^\rho_\alpha + \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\rho\sigma\mu}\delta^\gamma_\alpha - \varepsilon^{\rho\sigma\gamma}\delta^\mu_\alpha\right)\right]F_{\rho\sigma}A_\gamma,
\end{aligned}$$

analizando a expresão

$$\begin{aligned}
\Sigma^{\rho\sigma\gamma} &= \varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\rho\sigma\mu}\delta^{\gamma}_{\alpha} - \varepsilon^{\rho\sigma\gamma}\delta^{\mu}_{\alpha}\right), \\
&= \varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\rho\sigma\beta}\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\gamma}_{\alpha} - \varepsilon^{\rho\sigma\beta}\delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{\mu}_{\alpha}\right), \\
&= \varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\beta}\left(\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\gamma}_{\alpha} - \delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{\mu}_{\alpha}\right), \\
&= \varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\beta}\varepsilon_{\lambda\beta\alpha}\varepsilon^{\lambda\mu\gamma}, \\
&= \varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} - \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\beta}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta}\varepsilon^{\lambda\mu\gamma}, \\
&= \varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} - \frac{1}{2}\left(\delta^{\rho}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\alpha} - \delta^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\rho}_{\alpha}\right)\varepsilon^{\lambda\mu\gamma}, \\
&= \varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} - \frac{1}{2}\left(\delta^{\sigma}_{\alpha}\varepsilon^{\rho\mu\gamma} - \delta^{\rho}_{\alpha}\varepsilon^{\sigma\mu\gamma}\right), \\
&= \varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\alpha}\varepsilon^{\rho\mu\gamma} + \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\alpha}\varepsilon^{\sigma\mu\gamma}, \\
&= \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\sigma}_{\alpha}\varepsilon^{\rho\mu\gamma}\right),
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
T^{\mu}{}_{\alpha} &= \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\alpha}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\sigma\mu}F_{\sigma\alpha} + \frac{\mu}{4}\left(\varepsilon^{\mu\sigma\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\sigma}_{\alpha}\varepsilon^{\rho\mu\gamma}\right)F_{\rho\sigma}A_{\gamma}, \\
T^{\mu}{}_{\alpha} &= \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\alpha}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\sigma\mu}F_{\sigma\alpha} + \frac{\mu}{4}\left(\varepsilon^{\mu\sigma\gamma}F_{\alpha\sigma} - \varepsilon^{\rho\mu\gamma}F_{\rho\alpha}\right)A_{\gamma}, \\
T^{\mu}{}_{\alpha} &= \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\alpha}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\sigma\mu}F_{\sigma\alpha} + \frac{\mu}{4}\left(\varepsilon^{\mu\sigma\gamma}F_{\alpha\sigma} - \varepsilon^{\sigma\mu\gamma}F_{\sigma\alpha}\right)A_{\gamma}, \\
T^{\mu}{}_{\alpha} &= \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\alpha}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\sigma\mu}F_{\sigma\alpha} + \frac{\mu}{4}\left(\varepsilon^{\mu\sigma\gamma}F_{\alpha\sigma} - \varepsilon^{\mu\sigma\gamma}F_{\alpha\sigma}\right)A_{\gamma}, \\
T^{\mu}{}_{\alpha} &= \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\alpha}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\sigma\mu}F_{\sigma\alpha},
\end{aligned} \tag{A.8}$$

e o termo de Chern-Simons não afeta a energia do sistema.

A.2 Modelo Auto-dual

O modelo Auto-dual é descrito pela seguinte funcional de ação

$$W = \int d^3x \left(\frac{1}{2}f_{\mu}f^{\mu} - \frac{1}{2m}\epsilon_{\mu\nu\rho}f^{\mu}\partial^{\nu}f^{\rho}\right), \tag{A.9}$$

e sua correspondente equação de Lie que é obtida, considerando variações totais $\delta W = \int \Delta\mathcal{L}$ dada por

$$\Delta\mathcal{L} = \delta f_{\alpha}\left(f^{\alpha} - \frac{1}{m}\epsilon^{\alpha\nu\rho}\partial_{\nu}f_{\rho}\right) + \delta x^{\alpha}\partial_{\mu}\Theta^{\mu}{}_{\alpha} + \partial_{\mu}\left[-\frac{1}{2m}\epsilon^{\alpha\mu\beta}f_{\alpha}\delta f_{\beta} - \delta x^{\alpha}\Theta^{\mu}{}_{\alpha}\right], \tag{A.10}$$

onde o tensor de energia-momentum canónico $\Theta^{\gamma}{}_{\lambda}$ é

$$\Theta^{\mu}{}_{\alpha} = -\frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\mu\beta}f_{\sigma}\partial_{\alpha}f_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\alpha}f_{\sigma}f^{\sigma} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\rho}\delta^{\mu}_{\alpha}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\rho}. \tag{A.11}$$

A primeira expressão é identificada como a equação de movimento de Euler-Lagrange, que decorre das variações a ponto fixo com campos nulos no contorno do espaço-tempo (A.10), obtemos

$$f^{\alpha} - \frac{1}{m}\epsilon^{\alpha\mu\nu}\partial_{\mu}f_{\nu} = 0. \tag{A.12}$$

Note-se que se derivamos esta equação, conseguimos

$$\partial_{\alpha}f^{\alpha} = 0, \tag{A.13}$$

como uma consequência da antisimmetria do símbolo de Levi-Civita. Agora, é posível simetrizar (A.11) se utilizamos a invariância sob transformações de Poincaré, onde $\delta x^{\alpha} = \omega^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta} + a^{\alpha}$, com $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ e a^{α} constantes. Esta transformação também impõe uma transformação no campo vectorial $\delta f_{\alpha} = -\left(\partial_{\alpha}\delta x^{\beta}\right) f_{\beta}$. Substituindo na equação de Lie

$$\begin{aligned}
0 =& \delta f_{\mu}\left(f^{\mu} - \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_{\nu}f_{\rho}\right) - \frac{1}{2m}\partial_{\mu}\left(\epsilon^{\sigma\mu\beta}f_{\sigma}\delta f_{\beta}\right) + \delta x^{\alpha}\partial_{\mu}\Theta^{\mu}{}_{\alpha} - \partial_{\mu}\left(\delta x^{\alpha}\Theta^{\mu}{}_{\alpha}\right), \\
=& -\left(\partial_{\mu}\delta x^{\alpha}\right)\left(f_{\alpha}f^{\mu} - \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\rho}f_{\alpha}\partial_{\nu}f_{\rho}\right) + \frac{1}{2m}\partial_{\mu}\left(\epsilon^{\sigma\mu\beta}f_{\sigma}f_{\alpha}\partial_{\beta}\delta x^{\alpha}\right) \\
&+ \delta x^{\alpha}\partial_{\mu}\Theta^{\mu}{}_{\alpha} - \partial_{\mu}\left(\delta x^{\alpha}\Theta^{\mu}{}_{\alpha}\right), \\
=& -f_{\alpha}f^{\mu}\partial_{\mu}\delta x^{\alpha} + \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\rho}f_{\alpha}\partial_{\nu}f_{\rho}\partial_{\mu}\delta x^{\alpha} + \frac{1}{2m}\partial_{\mu}\left(\epsilon^{\sigma\mu\beta}f_{\sigma}f_{\alpha}\partial_{\beta}\delta x^{\alpha}\right) \\
&+ \delta x^{\alpha}\partial_{\mu}\Theta^{\mu}{}_{\alpha} - \partial_{\mu}\left(\delta x^{\alpha}\Theta^{\mu}{}_{\alpha}\right),
\end{aligned}$$

e devido à antisimmetria do $\epsilon^{\sigma\mu\beta}$ assim como da simetria das derivadas parciais $\partial_{\mu}\partial_{\beta}\delta x^{\alpha}$, o terceiro termo no lado direito da equação pode ser re-escrito como $\partial_{\mu}\left(\epsilon^{\sigma\mu\beta}f_{\sigma}f_{\alpha}\partial_{\beta}\delta x^{\alpha}\right) = \partial_{\mu}\left(\epsilon^{\sigma\mu\beta}f_{\sigma}f_{\alpha}\right)\partial_{\beta}\delta x^{\alpha} = \partial_{\beta}\left(\epsilon^{\sigma\beta\mu}f_{\sigma}f_{\alpha}\right)\partial_{\mu}\delta x^{\alpha}$, re-ordenamos os termos como

$$\begin{aligned}
0 =& \left[-f_{\alpha}f^{\mu} + \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\rho}f_{\alpha}\partial_{\nu}f_{\rho} + \frac{1}{2m}\partial_{\beta}\left(\epsilon^{\sigma\beta\mu}f_{\sigma}f_{\alpha}\right)\right]\partial_{\mu}\delta x^{\alpha} + \delta x^{\alpha}\partial_{\mu}\Theta^{\mu}{}_{\alpha} - \partial_{\mu}\left(\delta x^{\alpha}\Theta^{\mu}{}_{\alpha}\right), \\
=& \left[-f_{\alpha}f^{\mu} + \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\rho}f_{\alpha}\partial_{\nu}f_{\rho} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\mu}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\alpha} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\mu}f_{\alpha}\partial_{\beta}f_{\sigma}\right]\partial_{\mu}\delta x^{\alpha} \\
&+ \delta x^{\alpha}\partial_{\mu}\Theta^{\mu}{}_{\alpha} - \partial_{\mu}\left(\delta x^{\alpha}\Theta^{\mu}{}_{\alpha}\right), \\
=& \left[-f_{\alpha}f^{\mu} + \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\rho}f_{\alpha}\partial_{\nu}f_{\rho} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\mu}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\alpha} - \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\beta\sigma}f_{\alpha}\partial_{\beta}f_{\sigma}\right]\partial_{\mu}\delta x^{\alpha} \\
&+ \delta x^{\alpha}\partial_{\mu}\Theta^{\mu}{}_{\alpha} - \partial_{\mu}\left(\delta x^{\alpha}\Theta^{\mu}{}_{\alpha}\right),
\end{aligned}$$

o segundo e quarto termo dentro dos parênteses são iguais, então

$$0 = \left[-f_{\alpha}f^{\mu} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\nu\rho}f_{\alpha}\partial_{\nu}f_{\rho} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\mu}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\alpha}\right]\partial_{\mu}\delta x^{\alpha} + \delta x^{\alpha}\partial_{\mu}\Theta^{\mu}{}_{\alpha} - \partial_{\mu}\left(\delta x^{\alpha}\Theta^{\mu}{}_{\alpha}\right). \tag{A.14}$$

renomeamos

$$C^{\mu}{}_{\alpha} \equiv -f_{\alpha}f^{\mu} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\sigma\beta}f_{\alpha}\partial_{\sigma}f_{\beta} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\mu}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\alpha}, \tag{A.15}$$

tal que, pode-se escrever (A.14) como

$$\begin{aligned} 0 &= C^{\mu}{}_{\alpha}\partial_{\mu}\delta x^{\alpha} + \delta x^{\alpha}\partial_{\mu}\Theta^{\mu}{}_{\alpha} - \partial_{\mu}\left(\delta x^{\alpha}\Theta^{\mu}{}_{\alpha}\right), \\ &= \delta x^{\alpha}\partial_{\mu}\left(\Theta^{\mu}{}_{\alpha} - C^{\mu}{}_{\alpha}\right) - \partial_{\mu}\left[\delta x^{\alpha}\left(\Theta^{\mu}{}_{\alpha} - C^{\mu}{}_{\alpha}\right)\right]. \end{aligned}$$

Consequentemente, podemos definir um novo tensor de energia-momentum, $T^{\mu}{}_{\alpha} \equiv \Theta^{\mu}{}_{\alpha} - C^{\mu}{}_{\alpha}$, tal que

$$0 = \delta x^{\alpha}\partial_{\mu}T^{\mu}{}_{\alpha} - \partial_{\mu}\left(\delta x^{\alpha}T^{\mu}{}_{\alpha}\right), \tag{A.16}$$

e

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\alpha} = &-\frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\mu\beta}f_{\sigma}\partial_{\alpha}f_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\alpha}f_{\sigma}f^{\sigma} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\rho}\delta^{\mu}_{\alpha}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\rho} \\ &+ f_{\alpha}f^{\mu} - \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\sigma\beta}f_{\alpha}\partial_{\sigma}f_{\beta} - \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\mu}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\alpha}, \end{aligned}$$

reordenando os termos, podemos escrever

$$T^{\mu}{}_{\alpha} = f_{\alpha}f^{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\alpha}f_{\sigma}f^{\sigma} + K^{\mu}{}_{\alpha}, \tag{A.17a}$$

$$K^{\mu}{}_{\alpha} \equiv -\frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\mu\beta}f_{\sigma}\partial_{\alpha}f_{\beta} + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\rho}\delta^{\mu}_{\alpha}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\rho} - \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\sigma\beta}f_{\alpha}\partial_{\sigma}f_{\beta} - \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\mu}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\alpha}. \tag{A.17b}$$

Para a última expressão, (A.17b), temos que

$$\begin{aligned} K^{\mu}{}_{\alpha} &= \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\sigma\beta}\left(f_{\sigma}\partial_{\alpha}f_{\beta} - f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\alpha} - f_{\alpha}\partial_{\sigma}f_{\beta}\right) + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\rho}\delta^{\mu}_{\alpha}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\rho}, \\ &= \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\sigma\beta}\left[f_{\sigma}\left(\partial_{\alpha}f_{\beta} - \partial_{\beta}f_{\alpha}\right) - f_{\alpha}\partial_{\sigma}f_{\beta}\right] + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\rho}\delta^{\mu}_{\alpha}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\rho}, \\ &= \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\sigma\beta}\left[f_{\sigma}\left(\delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{\rho}_{\alpha}\right)\partial_{\gamma}f_{\rho} - f_{\alpha}\partial_{\sigma}f_{\beta}\right] + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\beta\rho}\delta^{\mu}_{\alpha}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\rho}, \end{aligned}$$

devido que o símbolo de Levi-Civita em três dimensões satisfaz $\epsilon_{\lambda\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\gamma\rho} = \delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{\rho}_{\alpha}$, logo

$$\begin{aligned} K^{\mu}{}_{\alpha} &= \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\sigma\beta}\left[\epsilon_{\lambda\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\gamma\rho}f_{\sigma}\partial_{\gamma}f_{\rho} - f_{\alpha}\partial_{\sigma}f_{\beta}\right] + \frac{1}{2m}\delta^{\mu}_{\alpha}\epsilon^{\sigma\beta\rho}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\rho}, \\ &= \frac{1}{2m}\left[\epsilon^{\mu\sigma\beta}\epsilon_{\lambda\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\gamma\rho}f_{\sigma}\partial_{\gamma}f_{\rho} - \epsilon^{\mu\sigma\beta}f_{\alpha}\partial_{\sigma}f_{\beta}\right] + \frac{1}{2m}\delta^{\mu}_{\alpha}\epsilon^{\sigma\beta\rho}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\rho}, \\ &= \frac{1}{2m}\left[\left(\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\alpha} - \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\lambda}\right)\epsilon^{\lambda\gamma\rho}f_{\sigma}\partial_{\gamma}f_{\rho} - \epsilon^{\mu\sigma\beta}f_{\alpha}\partial_{\sigma}f_{\beta}\right] + \frac{1}{2m}\delta^{\mu}_{\alpha}\epsilon^{\sigma\beta\rho}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\rho}, \\ &= \frac{1}{2m}\left[\epsilon^{\mu\gamma\rho}f_{\alpha}\partial_{\gamma}f_{\rho} - \delta^{\mu}_{\alpha}\epsilon^{\sigma\gamma\rho}f_{\sigma}\partial_{\gamma}f_{\rho} - \epsilon^{\mu\sigma\beta}f_{\alpha}\partial_{\sigma}f_{\beta}\right] + \frac{1}{2m}\delta^{\mu}_{\alpha}\epsilon^{\sigma\beta\rho}f_{\sigma}\partial_{\beta}f_{\rho}, \end{aligned}$$

vemos que o primeiro e terceiro termo do lado direito da equação cancelam-se entre si, assim como o segundo com o quarto termo. Nota-se que o cancelamento do termo $K^{\mu}{}_{\alpha}$ é consequência das propiedades do termo de Levi-Civita e não, uma eliminação de termos de divergência. Portanto, substituindo em (A.17a), obtemos uma versão simetrizada do tensor de energia-momentum

$$T^{\mu\nu} = f^{\mu}f^{\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}f_{\sigma}f^{\sigma}. \tag{A.18}$$

Agora, nota-se que

$$\begin{aligned}\delta x^{\alpha}\partial_{\mu}T^{\mu}{}_{\alpha} &= \delta x^{\alpha}\left(f_{\alpha}\partial_{\mu}f^{\mu}+f^{\mu}\partial_{\mu}f_{\alpha}-f^{\mu}\partial_{\alpha}f_{\mu}\right),\\ &= \delta x^{\alpha}\left[f_{\alpha}\partial_{\mu}f^{\mu}+f^{\mu}\left(\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\alpha}-\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\mu}\right)\partial_{\beta}f_{\sigma}\right],\\ &= \delta x^{\alpha}\left[f_{\alpha}\partial_{\mu}f^{\mu}+\epsilon_{\lambda\mu\alpha}\epsilon^{\lambda\beta\sigma}f^{\mu}\partial_{\beta}f_{\sigma}\right],\end{aligned}$$

substituindo esse em (A.16)

$$\partial_{\mu}\left(\delta x^{\alpha}T^{\mu}{}_{\alpha}\right)=\delta x^{\alpha}\left[f_{\alpha}\partial_{\mu}f^{\mu}+\epsilon_{\lambda\mu\alpha}f^{\mu}\left(\epsilon^{\lambda\beta\sigma}\partial_{\beta}f_{\sigma}\right)\right].$$

Sempre que a equação de Euler-Lagrange (A.12) for válida e, como consequência da (A.13), obtemos

$$\partial_{\mu}\left(\delta x^{\alpha}T^{\mu}{}_{\alpha}\right)=\delta x^{\alpha}\left[f_{\alpha}\partial_{\mu}f^{\mu}+m\epsilon_{\lambda\mu\alpha}f^{\mu}f^{\lambda}\right]=0,$$

resultando na conservação da corrente $\mathcal{J}^{\mu}=\delta x^{\alpha}T^{\mu}{}_{\alpha}$. Logo

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{\mu} &= \omega_{\alpha\beta}x^{\beta}T^{\mu\alpha}+a_{\alpha}T^{\mu\alpha},\\ &= \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(x^{\beta}T^{\mu\alpha}-x^{\alpha}T^{\mu\beta}\right)+a_{\alpha}T^{\mu\alpha},\end{aligned}$$

e

$$\partial_{\mu}\mathcal{J}^{\mu}=\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\partial_{\mu}\left(x^{\beta}T^{\mu\alpha}-x^{\alpha}T^{\mu\beta}\right)+a_{\alpha}\partial_{\mu}T^{\mu\alpha}=0,$$

essa relação tambem resulta em considerar um tensor de energia-momento sem divergencia $\partial_{\mu}T^{\mu\alpha}=0$ e o tensor de momento angular $M^{\beta\mu\alpha}\equiv x^{\beta}T^{\mu\alpha}-x^{\alpha}T^{\mu\beta}$.

Apêndice B

Algumas características da dinâmica no Plano Nulo

B.1 Campo Complexo em $3+1$

A densidade Lagrangiana no campo escalar complexo em coordenadas de Cone de Luz é dada por

$$\mathcal{L} = \partial^{\mu}\varphi\partial_{\mu}\varphi^{*} - m^{2}\varphi\varphi^{*} = \partial_{+}\varphi\partial_{-}\varphi^{*} + \partial_{-}\varphi\partial_{+}\varphi^{*} - \partial_{i}\varphi\partial_{i}\varphi^{*} - m^{2}\varphi\varphi^{*}. \tag{B.1}$$

Nota-se a dependência em primeira ordem nas velocidades $\partial_{+}\varphi$ e $\partial_{+}\varphi^{*}$, o que indica que estamos lidando com uma teoria com vínculos. Uma vez que os campos φ e φ^{*} são considerados independentes, os renomeamos $\varphi_{1} = \varphi$ and $\varphi_{2} = \varphi^{*}$. A equação de Euler-Lagrange é

$$\left(2\partial_{+}\partial_{-} - \partial_{i}\partial_{i} + m^{2}\right)\varphi_{a} = 0, \quad a = 1, 2, \tag{B.2}$$

também conhecida como equação de Klein-Gordon-Fock. A estructura singular dessa teoria esta caracterizada pelo seguinte conjunto de densidades Hamiltonianas

$$\mathcal{H}' \equiv p_{+} + \mathcal{H}_{c} = 0 \rightarrow \tau \equiv x^{+}, p_{+} = \partial S/\partial x^{+}, \tag{B.3a}$$

$$\mathcal{H}'_{a} \equiv \pi^{a} - \partial_{-}\varphi_{a} = 0 \rightarrow \lambda_{a} \equiv \varphi_{a}, \pi^{a} = \partial S/\partial\varphi_{a}, \tag{B.3b}$$

onde a densidade Hamiltoniana canônica é dada por $\mathcal{H}_{c} = \partial_{i}\varphi_{1}\partial_{i}\varphi_{2} + m^{2}\varphi_{1}\varphi_{2}$. A Hamiltoniana $\mathcal{H}'_{a}$ é não-involutiva uma vez que

$$M_{ab}\left(x, y\right) \equiv \left\{\mathcal{H}'_{a}\left(x\right), \mathcal{H}'_{b}\left(y\right)\right\} = -2\delta_{ab}\partial^{x}_{-}\delta\left(x - y\right), \tag{B.4}$$

indicando que a variável λ_{a}, conjugada a essa Hamiltoniana, pode ser eliminada da dinâmica do sistema se construirmos o Parêntese Generalizado

$$\begin{aligned}\left\{F\left(x\right), G\left(y\right)\right\}^{*} \equiv & \left\{F\left(x\right), G\left(y\right)\right\} \\ & - \int dzdw \left\{F\left(x\right), \mathcal{H}'_{a}\left(z\right)\right\} M^{-1}_{ab}\left(z, w\right) \left\{\mathcal{H}'_{a}\left(w\right), G\left(y\right)\right\}.\end{aligned} \tag{B.5}$$

A matriz inversa com componentes $M_{ab}^{-1}(x,y)$ tem que satisfazer

$$\int dz M_{ac}(x,z)\, M_{cb}^{-1}(z,y) = \delta_{ab}\delta(x-y), \tag{B.6}$$

onde temos $\delta(x-y) \equiv \delta(x^- - y^-)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$. Substituindo (B.4) em (B.6) obtemos que

$$-2\partial_-^x M_{ab}^{-1}(x,y) = \delta_{ab}\delta(x-y). \tag{B.7}$$

É bem conhecido que a função sinal $\epsilon(x-y) \equiv \epsilon(x^- - y^-)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = -\epsilon(y-x)$ satisfaz $\partial_-^x \epsilon(x-y) = 2\delta(x-y)$, logo uma solução geral para (B.7) tem a forma

$$M_{ab}^{-1}(x,y) = -\frac{1}{4}\delta_{ab}\epsilon(x-y) + f_{ab}\left(x^+, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right), \tag{B.8}$$

onde $f_{ab} = f_{ab}(x^+, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ são funções arbitrárias. Podemos escolher uma determinada solução, considerando uma dada condição de contorno que fixa f_{ab}. Para essa solução particular obtemos como Parênteses Generalizados fundamentais

$$\{\varphi_a(x), \varphi_b(y)\}^* = -\frac{1}{4}\delta_{ab}\epsilon(x-y) + f_{ab}, \tag{B.9a}$$

$$\left\{\varphi_a(x), \pi^b(y)\right\}^* = \frac{1}{2}\delta_{ab}\delta(x-y), \tag{B.9b}$$

$$\left\{\pi^a(x), \pi^b(y)\right\}^* = \frac{1}{2}\delta_{ab}\partial_-^x\delta(x-y). \tag{B.9c}$$

A evolução dinâmica do sistema é agora fornecido pelo seguinte diferencial fundamental

$$dF = \int dy \left\{F(x), \mathcal{H}'(y)\right\}^* dx^+, \tag{B.10}$$

de onde obtemos a seguinte Equação Característica para o momento canônico

$$d\pi^a = \frac{1}{2}\left[\delta_{a1}\left(\partial_i\partial_i - m^2\right)\varphi_2 + \delta_{a2}\left(\partial_i\partial_i - m^2\right)\varphi_1\right] dx^+. \tag{B.11a}$$

Notemos que se substituirmos (B.3b) nessa última equação, obtemos a equação de Klein-Gordon-Fock sem impor qualquer outra condição sobre a função f_{ab}.

A não unicidade da matriz inversa está relacionada com um subconjunto de Hamiltonianas involutivas. Para isso consideremos a combinação linear

$$H'_a \equiv \int d^3x \Lambda_{ab}\left(x^+, \boldsymbol{x}\right)\mathcal{H}'_b(x), \tag{B.12}$$

onde $d^3x = dx^- d^2\boldsymbol{x}$ e $\Lambda_{ab} = \Lambda_{ab}(x^+, \boldsymbol{x})$ são funções arbitrárias. Essa função Hamiltoniana comuta com quaisquer densidade $\mathcal{H}'_a$ já que

$$\{H'_a, \mathcal{H}'_b(x)\} = \int d^3y \Lambda_{ac}\left(y^+, \boldsymbol{y}\right)\{\mathcal{H}'_c(y), \mathcal{H}'_b(x)\} = 2\partial_-^x \Lambda_{ab}\left(x^+, \boldsymbol{x}\right) = 0.$$

Agora consideremos uma combinação mais geral com um conjunto de funções $F_{ab} = F_{ab}(x)$ e representada pelo funcional

$$F_{ab}[\mathcal{H}'_b] \equiv \int d^3x F_{ab}(x)\,\mathcal{H}'_b(x). \tag{B.13}$$

Essa expressão contém um subconjunto de Hamiltonianos involutivos. Logo, o complemento deste subconjunto fornece os Hamiltonianos não-involutivos de onde se obtém os Parênteses Generalizados. Identificamos esses subconjuntos se escrevemos

$$F_{ab}\left[\mathcal{H}'_b\right] = \int d^3x \left[F_{ab}\left(x\right) + \Lambda_{ab}\left(x^+, \boldsymbol{x}\right)\right] \mathcal{H}'_b\left(x\right) - \int d^3x \Lambda_{ab}\left(x^+, \boldsymbol{x}\right) \mathcal{H}'_b\left(x\right),$$

Para que essa decomposição seja unica temos que impor uma condição de contorno sob a função $F'_{ab}\left(x\right) = F_{ab}\left(x\right) + \Lambda_{ab}\left(x^+, \boldsymbol{x}\right)$. Uma dessas condições que são bem determinadas no Plano Nulo é

$$F'_{ab}\left(x^- = \infty\right) = -F'_{ab}\left(x^- = -\infty\right), \tag{B.14}$$

que se reflete na determinação para Λ_{ab} em

$$\Lambda_{ab}\left(x^+, \boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{2}\left[F'_{ab}\left(x^- = \infty\right) + F'_{ab}\left(x^- = -\infty\right)\right].$$

A condição (B.14) é satisfeita pela função sinal $F'_{ab} = 1/4\delta_{ab}\epsilon\left(x - y\right)$. Portanto, o Hamiltoniano não-involutivo tem a forma

$$\bar{H}'_a = \frac{1}{4}\int d^3x \epsilon\left(x - y\right) \mathcal{H}'_a\left(x\right). \tag{B.15}$$

que pode ser mostrado se calcularmos

$$\bar{M}_{ab}\left(x, y\right) \equiv \left\{\bar{H}'_a\left(x\right), \bar{H}'_b\left(y\right)\right\} = \frac{1}{4}\delta_{ab}\epsilon\left(x - y\right), \tag{B.16}$$

o que é um resultado diferente do em (B.4). A principal diferença é que a matriz (B.16) possui uma inversa única

$$\bar{M}^{-1}_{ab}\left(x, y\right) = 2\delta_{ab}\partial^x_-\delta\left(x - y\right). \tag{B.17}$$

A partir dessa inversa construímos os Parênteses Generalizados, obtemos a estrutura fundamental dada por

$$\left\{\varphi_a\left(x\right), \varphi_b\left(y\right)\right\}^* = -\frac{1}{4}\delta_{ab}\epsilon\left(x - y\right), \tag{B.18a}$$

$$\left\{\varphi_a\left(x\right), \pi^b\left(y\right)\right\}^* = \frac{1}{2}\delta_{ab}\delta\left(x - y\right), \tag{B.18b}$$

$$\left\{\pi^a\left(x\right), \pi^b\left(y\right)\right\}^* = \frac{1}{2}\delta_{ab}\partial^x_-\delta\left(x - y\right), \tag{B.18c}$$

que resulta ser os mesmos parênteses obtidos em (B.9) sob a escolha particular de $f_{ab}\left(x^+, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) = 0$.

Apêndice C

Equação de Lie para a Gravitação Linearizada

C.0.1 Foliação espaço-tempo da Lagrangiana

Quebramos a covariância da densidade Lagrangiana de Fierz-Pauli dividindo as coordenadas do espaço-tempo, dessa forma escrevemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\partial_i h^{i0}\partial_0 h_{00} + \partial_0 h_{0i}\left(\frac{1}{2}\partial^i h^{00} + \frac{1}{2}\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ji}\right)\\ &+ \partial_0 h_{ij}\left(\frac{1}{4}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_k h^{k0}\right) - \mathcal{V},\end{aligned} \tag{C.1}$$

onde $\mathcal{V}$ é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{V} = &-\frac{1}{2}\partial_i h_{0j}\partial^i h^{0j} - \frac{1}{4}\partial_i h_{jk}\partial^i h^{jk} + \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial^i h^j_j + \frac{1}{4}\partial_i h^j_j \partial^i h^k_k\\ &- \frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial^j h_{00} - \frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial^j h^k_k + \frac{1}{2}\partial_i h^{i0}\partial_j h^{j0} + \frac{1}{2}\partial_i h^i_j \partial_k h^{kj}.\end{aligned} \tag{C.2}$$

Uma vez que estamos interessados nas simetrias a nível Lagrangiano, escrevemos a Equação de Lie para pontos fixos $\Delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}$. De (C.1) temos

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\partial_i \delta h^{i0}\partial_0 h_{00} - \frac{1}{2}\partial_i h^{i0}\partial_0 \delta h_{00} + \partial_0 \delta h_{0i}\left(\frac{1}{2}\partial^i h^{00} + \frac{1}{2}\partial^i h^j_j - \partial_j h^{ji}\right)\\ &+ \partial_0 h_{0i}\left(\frac{1}{2}\partial^i \delta h^{00} + \frac{1}{2}\partial^i \delta h^j_j - \partial_j \delta h^{ji}\right) + \partial_0 \delta h_{ij}\left(\frac{1}{4}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_k h^{k0}\right)\\ &+ \partial_0 h_{ij}\left(\frac{1}{4}\partial^0 \delta h^{ij} - \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial^0 \delta h^k_k + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_k \delta h^{k0}\right) - \delta\mathcal{V}.\end{aligned}$$

Nossa intenção é escrever essa equação como dependente das variáveis h_{00}, h_{0i} e h_{ij}. Podemos fazer isso através da eliminação dos termos de contorno, tanto espaciais como temporais, tendo

assim:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}h_{00}\partial_0\partial_i\delta h^{i0} + \frac{1}{2}h^{i0}\partial_i\partial_0\delta h_{00} - \frac{1}{2}h_{00}\partial^i\partial_0\delta h_{0i} - \frac{1}{2}h^j_j\partial^i\partial_0\delta h_{0i} + h^{ji}\partial_j\partial_0\delta h_{0i}$$
$$+ h_{0i}\left(-\frac{1}{2}\partial_0\partial^i\delta h^{00} - \frac{1}{2}\partial_0\partial^i\delta h^j_j + \partial_0\partial_j\delta h^{ji}\right) - \frac{1}{4}h^{ij}\partial^0\partial_0\delta h_{ij} + \frac{1}{4}h^i_i\partial_0\partial^0\delta h^j_j - \frac{1}{2}h^{0i}\partial_i\partial_0\delta h^j_j$$
$$+ h_{ij}\left(-\frac{1}{4}\partial_0\partial^0\delta h^{ij} + \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial_0\partial^0\delta h^k_k - \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_0\partial_k\delta h^{k0}\right) - \delta\mathcal{V},$$

reordenando esses termos, obtemos

$$\delta\mathcal{L} = h_{ij}\left(-\frac{1}{2}\partial^0\partial_0\delta h^{ij} + \partial^j\partial_0\delta h^{0i} + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_0\partial^0\delta h^k_k - \eta^{ij}\partial_0\partial_k\delta h^{k0}\right)$$
$$+ h_{0i}\left(-\partial_0\partial^i\delta h^j_j + \partial_0\partial_j\delta h^{ji}\right) - \delta\mathcal{V}. \tag{C.3}$$

Agora executamos a variação do termo $\mathcal{V}$ a partir de (C.2) seguindo o mesmo procedimento utilizado anteriormente

$$\delta\mathcal{V} = -\partial_i h_{0j}\partial^i\delta h^{0j} - \frac{1}{2}\partial_i h_{jk}\partial^i\delta h^{jk} + \frac{1}{2}\partial_i\delta h_{00}\partial^i h^j_j + \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial^i\delta h^j_j + \frac{1}{2}\partial_i h^j_j\partial^i\delta h^k_k$$
$$- \frac{1}{2}\partial_i\delta h^i_j\partial^j h_{00} - \frac{1}{2}\partial_i h^i_j\partial^j\delta h_{00} - \frac{1}{2}\partial_i\delta h^i_j\partial^j h^k_k - \frac{1}{2}\partial_i h^i_j\partial^j\delta h^k_k + \partial_i h^{i0}\partial_j\delta h^{j0} + \partial_i h^i_j\partial_k\delta h^{kj},$$
$$\delta\mathcal{V} = h_{0i}\partial_j\partial^j\delta h^{0i} + \frac{1}{2}h_{ij}\partial_k\partial^k\delta h^{ij} - \frac{1}{2}h^i_i\partial^k\partial_k\delta h_{00} - \frac{1}{2}h_{00}\partial_i\partial^i\delta h^j_j - \frac{1}{2}h^i_i\partial_k\partial^k\delta h^l_l$$
$$+ \frac{1}{2}h_{00}\partial^j\partial_i\delta h^i_j + \frac{1}{2}h_{ij}\partial^i\partial^j\delta h_{00} + \frac{1}{2}h^i_i\partial^k\partial^l\delta h_{kl} + \frac{1}{2}h_{ij}\partial^i\partial^j\delta h^k_k - h^{i0}\partial_i\partial_j\delta h^{j0} - h_{ij}\partial^i\partial_k\delta h^{kj},$$

temos que

$$\delta\mathcal{V} = h_{00}\left(\frac{1}{2}\partial^j\partial^i\delta h_{ij} - \frac{1}{2}\partial_i\partial^i\delta h^j_j\right) + h^{0i}\left(\partial_j\partial^j\delta h_{0i} - \partial_i\partial^j\delta h_{0j}\right)$$
$$+ h_{ij}\left(\frac{1}{2}\partial^i\partial^j\delta h_{00} + \frac{1}{2}\partial^i\partial^j\delta h^k_k - \partial^i\partial_k\delta h^{kj} + \frac{1}{2}\partial_k\partial^k\delta h^{ij}\right)$$
$$+ h^i_i\left(\frac{1}{2}\partial^k\partial^l\delta h_{kl} - \frac{1}{2}\partial^k\partial_k\delta h_{00} - \frac{1}{2}\partial_k\partial^k\delta h^l_l\right). \tag{C.4}$$

De (C.3) e (C.4) obtemos

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}h_{00}\left(-\partial^j\partial^i\delta h_{ij} + \partial_i\partial^i\delta h^j_j\right)$$
$$+ h_{0i}\left(-\partial_0\partial^i\delta h^j_j + \partial_0\partial_j\delta h^{ji} - \partial_j\partial^j\delta h_{0i} + \partial_i\partial^j\delta h_{0j}\right)$$
$$+ h_{ij}\left[-\frac{1}{2}\partial^0\partial_0\delta h^{ij} - \frac{1}{2}\partial^i\partial^j\delta h_{00} + \partial^j\partial_0\delta h^{0i} - \frac{1}{2}\partial^i\partial^j\delta h^k_k + \partial^i\partial_k\delta h^{kj} - \frac{1}{2}\partial_k\partial^k\delta h^{ij}\right]$$
$$+ \eta^{ij}h_{ij}\left[\frac{1}{2}\partial_0\partial_0\delta h^k_k + \frac{1}{2}\partial^k\partial_k\delta h_{00} - \partial_0\partial_k\delta h^{k0} - \frac{1}{2}\partial^k\partial^l\delta h_{kl} + \frac{1}{2}\partial_k\partial^k\delta h^l_l\right].$$

Nota-se que uma vez que todos os $h_{\alpha\beta}$ são independentes, todos seus coeficientes devem ser nulos para assim obter uma simetria. De

$$0 = -\partial^j\partial^i\delta h_{ij} + \partial_i\partial^i\delta h^j_j,$$
$$0 = -\partial_0\partial^i\delta h^j_j + \partial_0\partial_j\delta h^{ji} - \partial_j\partial^j\delta h_{0i} + \partial_i\partial^j\delta h_{0j},$$

temos que

$$\delta h_{ij} = \partial_i X_j + \partial_j X_i,$$
$$\delta h_{0i} = \partial_0 X_i + \partial_i X_0,$$

substituindo essa expressão no coeficiente de h_{ij} obtemos

$$\delta\mathcal{L} = h_{ij}\left[-\frac{1}{2}\partial^i\partial^j\delta h_{00} + \partial^j\partial_0\partial^i X^0\right] + \eta^{ij}h_{ij}\left[\partial_0\partial_0\partial_k X^k + \frac{1}{2}\partial^k\partial_k\delta h_{00}\right],$$

logo identificamos

$$\delta h_{00} = 2\partial_0 X_0.$$

Portanto, obtemos uma quase-invariância da teoria devido à eliminação de termos de contorno na Equação de Lie sob a transformação de calibre $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu$.

C.0.2 Equação de Lie para a obtenção do Gerador da transformação de Calibre

Reduzimos a Lagrangiana de Fierz-Pauli para assumir a forma

$$\mathcal{L} = \partial_0 h_{ij}\left(\frac{1}{4}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{2}\partial^j h^{0i} - \frac{1}{2}\partial^i h^{0j} + \eta^{ij}\partial^k h_{0k} - \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k\right) - \mathcal{V}, \tag{C.5}$$

de onde obtemos uma simplificação máxima dos momentos canônicos $\pi^{0\mu} = 0$, e

$$\pi^{ij} = \frac{1}{2}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{2}\partial^j h^{0i} - \frac{1}{2}\partial^i h^{0j} + \eta^{ij}\partial^k h_{0k} - \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_0 h^k_k, \tag{C.6}$$

sendo o único momento canônico não nulo. Em seguida reescrevemos a Lagrangiana

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \partial_0 h_{ij}\left(\frac{1}{2}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{2}\partial^j h^{0i} - \frac{1}{2}\partial^i h^{0j} + \eta^{ij}\partial^k h_{0k} - \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k - \frac{1}{4}\partial^0 h^{ij} + \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k\right) - \mathcal{V}, \\
&= \partial_0 h_{ij}\left(\pi^{ij} - \frac{1}{4}\partial^0 h^{ij} + \frac{1}{4}\eta^{ij}\partial^0 h^k_k\right) - \mathcal{V}, \\
&= \pi^{ij}\partial_0 h_{ij} - \frac{1}{4}\partial_0 h_{ij}\partial_0 h^{ij} - \frac{1}{4}\partial_0 h^i_i\partial_0 h^k_k - \mathcal{V},
\end{aligned}$$

nesse ponto estamos considerando as variáveis π^{ij} e as velocidades $\partial_0 h_{ij}$ como variáveis independentes. Portanto, a variação fixa $\Delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}$ é dada por

$$\delta\mathcal{L} = \delta\pi^{ij}\partial_0 h_{ij} + \pi^{ij}\partial_0\delta h_{ij} - \frac{1}{2}\partial_0 h_{ij}\partial_0\delta h^{ij} + \frac{1}{2}\partial_0 h^i_i\partial_0\delta h^k_k - \delta\mathcal{V}.$$

Substituindo a expressão para π^{ij} e eliminando os termos de contorno, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= -h_{ij}\partial_0\delta\pi^{ij} + \left(\frac{1}{2}\partial^0 h^{ij} - \frac{1}{2}\partial^j h^{0i} - \frac{1}{2}\partial^i h^{0j} + \eta^{ij}\partial^k h_{0k} - \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_0 h^k_k\right)\partial_0\delta h_{ij} \\
&\quad + \frac{1}{2}h_{ij}\partial_0\partial_0\delta h^{ij} - \frac{1}{2}h^i_i\partial_0\partial_0\delta h^k_k - \delta\mathcal{V}, \\
\delta\mathcal{L} &= \left(-h_{ij}\partial_0\delta\pi^{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}\partial_0\partial_0\delta h^{ij}\right) + \left(\frac{1}{2}\partial^0 h^{ij} - \partial^j h^{0i} + \eta^{ij}\partial^k h_{0k} - \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_0 h^k_k\right)\partial_0\delta h_{ij} \\
&\quad - \frac{1}{2}h^i_i\partial_0\partial_0\delta h^k_k - \delta\mathcal{V}, \\
&= \left(-h_{ij}\partial_0\delta\pi^{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}\partial_0\partial_0\delta h^{ij}\right) - \frac{1}{2}h^{ij}\partial_0\partial_0\delta h_{ij} + h^{0i}\partial^j\partial_0\delta h_{ij} \\
&\quad - h_{0i}\partial^i\partial_0\delta h^j_j + \frac{1}{2}h^i_i\partial_0\partial_0\delta h^k_k - \frac{1}{2}h^i_i\partial_0\partial_0\delta h^k_k - \delta\mathcal{V},
\end{aligned}$$

isto é

$$\delta\mathcal{L} = -h_{ij}\partial_0\delta\pi^{ij} + h^{0i}\left(\partial^j\partial_0\delta h_{ij} - \partial_i\partial_0\delta h^j_j\right) - \delta\mathcal{V}. \tag{C.7}$$

Agora, substituindo (C.4) obtemos

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= -h_{ij}\partial_0\delta\pi^{ij} + h_{00}\left(-\frac{1}{2}\partial^j\partial^i\delta h_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i\partial^i\delta h^j_j\right) \\
&\quad + h^{0i}\left(\partial^j\partial_0\delta h_{ij} - \partial_i\partial_0\delta h^j_j - \partial_j\partial^j\delta h_{0i} + \partial_i\partial^j\delta h_{0j}\right) \\
&\quad - h_{ij}\left(\frac{1}{2}\partial^i\partial^j\delta h_{00} + \frac{1}{2}\partial^i\partial^j\delta h^k_k - \partial^i\partial_k\delta h^{kj} + \frac{1}{2}\partial_k\partial^k\delta h^{ij}\right) \\
&\quad - h^i_i\left(\frac{1}{2}\partial^k\partial^l\delta h_{kl} - \frac{1}{2}\partial^k\partial_k\delta h_{00} - \frac{1}{2}\partial_k\partial^k\delta h^l_l\right),
\end{aligned} \tag{C.8}$$

que é a Equação de Lie que será utilizada, juntamente com as Equações Características, a fim dese obter a relação entre dois geradores: a relacionada com a transformação canônica e a relacionada com a transformação de calibre.