4

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–T.005/96

Grupos de Newton-Hooke e outros Grupos Cinemáticos

Luís Carlos Bassalo Crispino

Orientador

Prof. Dr. Ruben Aldrovandi

Fevereiro 1997

Dedico este trabalho às minhas duas famílias, àquela em que fui criado e àquela que estou ajudando a construir.

Agradecimentos

Ao Prof. Ruben Aldrovandi, pela orientação segura e competente, pela disponibilidade e paciência durante a realização deste trabalho. Obrigado por muito contribuir para minha formação profissional e cultural.

Ao Prof. José G. Pereira, pela participação ativa e constante nas reuniões e discussões, pelo estímulo e toda a dedicação para com este trabalho.

A todos os professores, funcionários e alunos do IFT, sempre solícitos e dispostos a colaborar.

À Universidade Federal do Pará, em especial a todos os colegas do Departamento de Física, por esta oportunidade.

Ao Prof. José M. F. Bassalo, por todo o apoio, desde quando fazer Física era apenas um sonho ...

Ao Prof. George E. A. Matsas, pelo incentivo e disponibilidade.

Aos amigos: Sérgio, Van, Castiña, Clisthenis, Paulo, Carlos e Mateus; pela força na luta diária.

À Ângela, por inumeráveis coisas, que incluem apoio, incentivo, compreensão e companheirismo; e também pela digitação de parte deste trabalho.

Aos meus pais, pelo apoio total e incondicional.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram e/ou incentivaram a realização deste trabalho.

Resumo

Visando um estudo futuro do limite não-relativístico de uma teoria de gauge para os grupos de de Sitter, o qual pode ser obtido através de uma contração de Inönü-Wigner, fazemos um estudo da estrutura algébrica dos grupos de Newton-Hooke. Após uma breve revisão dos grupos de de Sitter e das contrações de Inönü-Wigner, apresentamos os grupos cinemáticos, que incluem numa mesma categoria os grupos de de Sitter, Poincaré, Newton-Hooke e Galilei, entre outros. Estudamos a relação entre estes grupos cinemáticos. Obtemos a forma explícita dos geradores dos grupos de Newton-Hooke na representação cinemática, uma expressão fechada para um elemento genérico destes grupos através do método dos projetores, suas leis de composição, além das transformações induzidas no espaço e no tempo. Os resultados são então comparados com os de outros grupos cinemáticos relevantes. Finalizamos conjecturando sobre uma possível teoria de gauge para os grupos de Newton-Hooke.

Palavras chave: grupos cinemáticos, contrações de Inönü-Wigner, transformações finitas.
Área de conhecimento: 1.05.01.03-7 .

Abstract

Aiming at a further study of the nonrelativistic limit of a gauge theory for the de Sitter groups, which may be obtained through a Inönü-Wigner contraction, we study the algebraic structure of these Newton-Hooke groups. After a brief review of the de Sitter groups and of the properties of Inönü-Wigner contractions, we present the kinematical groups, which include in the same class de Sitter, Poincaré, Newton-Hooke and Galilei groups. The relationship between these kinematical groups are examined. We obtain the explicit form of Newton-Hooke generators in the kinematical representation. Starting from the definition of matrix functions, we make use of projectors to obtain a closed expression for the generic element of these groups. We also obtain their composition laws, and the closed expression for finite Newton-Hooke transformations acting on space and time. We compare the results obtained with those for other relevant kinematical groups. We conclude by conjecturing about a possible gauge theory for the Newton-Hooke groups.

Keywords: kinematical groups, Inönü-Wigner contractions, finite transformations.

Índice

Introdução

Das quatro interações fundamentais da natureza, três são hoje descritas por teorias de gauge. O eletromagnetismo e a teoria das interações (nucleares) fracas foram unificadas com notável sucesso pela teoria de Weinberg-Salam, que constitui uma teoria de gauge para o grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$. A teoria das interações fortes (ou cromodinâmica quântica) é formulada como uma teoria de gauge para o grupo $SU(3)_C$. Há bastante confiança da parte dos físicos em que as interações (excetuando-se a gravitacional) entre as partículas elementares até distâncias da ordem de 10^{-16} *cm* sejam corretamente descritas por uma teoria de gauge para o grupo $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ [Cheng e Li, 1984]. Houve ainda tentativas ulteriores de construir uma teoria que unificasse todas estas três interações como componentes de uma única força, através da proposição de teorias de gauge para grupos maiores como o SU(5) e o SO(10).

As teorias de gauge para simetrias internas têm como variedade base o espaço-tempo de Minkowski e como fibra típica o grupo de estrutura (ou de gauge) das mesmas. As conexões sobre os fibrados principais são os campos fundamentais destas teorias, mediando as interações por elas descritas, e nada têm a ver, nem com a métrica do espaço-tempo de Minkowski, nem com a métrica do grupo de simetria. Cada partícula sentirá estes campos de uma determinada maneira, dependendo de sua carga. A teoria einsteiniana da Relatividade Geral (RG), apresenta-se de uma maneira fundamentalmente diferente das teorias de gauge, construída relacionando as interações gravitacionais com a estrutura geométrica do espaço-tempo, considerado como uma variedade pseudo-riemanniana. A RG admite somente conexões que preservem a métrica e tenham torção nula. Desta forma, suas conexões ficam completamente determinadas em termos da métrica, que adquire o status de campo fundamental da teoria. Além do mais, por admitir o princípio da universalidade, todas as partículas na RG sentem a mesma conexão, independente de suas massas (cargas gravitacionais). É este princípio que nos permite falar de curvatura do espaço-tempo, pois quando submetidas somente à interação gravitacional, todas as partículas seguem uma mesma trajetória, uma geodésica deste espaço-tempo.

Diante de tantos progressos na teoria das partículas elementares calcados na sua formulação em termos de teorias de gauge, parece bastante natural pensarmos que um possível caminho rumo a uma teoria unificada para todas as interações da natureza (incluindo a gravitacional), esteja na elaboração de uma teoria de gauge para a gravitação [Aldrovandi, 1978].

Quando pensamos em descrever a interação gravitacional por meio de uma teoria de gauge, uma primeira pergunta é posta diante de nós: qual o grupo de estrutura dessa teoria? Após a generalização do trabalho de Yang e Mills, proposta por Utiyama em 1956, houve várias tentativas para enquadrar a gravitação no esquema das teorias de gauge. Uma vez que as partículas elementares podem ser classificadas em representações unitárias e irredutíveis do grupo de Poincaré e que este é o grupo de isometrias do espaço-tempo de Minkowski, tomado como variedade base das teorias de gauge usuais, é bastante natural que pensemos neste como sendo o grupo de estrutura de uma possível teoria de gauge para a gravitação. Foi Kibble quem primeiro sugeriu [Kibble, 1961] que a teoria de Einstein-Cartan pode ser uma teoria de gauge para o grupo de Poincaré. Entretanto, este não foi o único grupo de estrutura de uma teoria de gauge para a gravitação a ser proposto na literatura. Entre as muitas outras propostas encontradas na literatura (as referências podem ser traçadas a partir de [Hehl *et al.*, 1995]), Cho reivindicou a equivalência entre a teoria da gravitação de Einstein e uma teoria de gauge para o grupo das translações [Cho, 1976].

Pelo fato do grupo de Poincaré não ser semi-simples, a abordagem usual das teorias de gauge, partindo das lagrangeanas invariantes de Yang-Mills para este grupo fica comprometida [Stédile, 1982]. Para contornarmos este problema, podemos usar o fato do grupo de Poincaré ser uma contração de Inönü-Wigner [Inönü e Wigner, 1953] dos grupos de de Sitter [Gursey, 1964], que são semi-simples. Com isso em mente, pode-se construir uma teoria de gauge para os grupos de de Sitter e em seguida tomar-se o limite apropriado, efetuando a contração para o grupo de Poincaré. Fazendo isso obtém-se uma teoria com a estrutura geométrica e dinâmica de uma teoria de gauge para o grupo de Poincaré ([Aldrovandi e Stédile, 1984] e [Aldrovandi e Pereira, 1986]).

Embora as equações obtidas por este processo sejam as identidades de Bianchi e as cquações de Yang-Mills para o grupo de Poincaré, esta teoria de gauge continua sem um lagrangeano que conduza às equações dinâmicas, além de não ser quantizável de forma consistente. Quando tenta-se resolver estes problemas através da adição de contratermos, volta-se exatamente a uma teoria de gauge para de Sitter, o que reafirma a importância desta última neste contexto ([Pereira, 1986] e [Aldrovandi e Pereira, 1988]).

O procedimento descrito acima implica em assumir um dos grupos de de Sitter como sendo o verdadeiro grupo de simetria da natureza, sendo o grupo de Poincaré uma simetria aproximada, válida no limite não-cosmológico de de Sitter, limite este obtido através de uma contração de Inönü-Wigner [Aldrovandi e Pereira, 1995b]. Dentro desse contexto, pode-se especular se algum efeito global, oriundo da simetria de de Sitter, não subsistiria no limite de baixas velocidades de uma teoria de gauge para os grupos de de Sitter. De acordo com o nosso esquema, esse limite deve ser obtido por meio de uma contração não-relativística de uma teoria de gauge para estes grupos. Essa contração é inteiramente análoga à contração do grupo de Poincaré para o grupo de Galilei, obtida tomando-se apropriadamente o limite $c \to \infty$, sendo "c" a velocidade da luz no vácuo.

No entanto, através desta contração de Inönü-Wigner, obtemos como limite não-relativístico dos grupos de de Sitter os grupos de Newton-Hooke [Cariñena *et al.*, 1981], que não são semi-simples e que foram pouco explorados na literatura. Assim, com o objetivo futuro de se desenvolver uma teoria de gauge para os grupos de Newton-Hooke, um estudo detalhado da estrutura algébrica destes grupos pouco conhecidos torna-se essencial. O objetivo da presente dissertação é exatamente apresentar um tal estudo.

No presente trabalho, dedicamos o primeiro capítulo a uma apresentação dos grupos de de Sitter, de suas álgebras e dos processos de contração de Inönü-Wigner. No capítulo II apresentamos os que ficaram conhecidos na literatura como grupos cinemáticos [Bacry e Lévy-Leblond , 1968], categoria em que se incluem os grupos de de Sitter, Poincaré, Newton-Hooke e Galilei, entre outros, e fazemos um estudo detalhado da relação entre eles através dos processos de contração de Inönü-Wigner. Trabalhando na representação cinemática, estudamos com detalhe o processo de contração dos grupos de de Sitter para os grupos de Newton-Hooke, apresentando a forma explícita dos geradores destes últimos nessa representação.

No capítulo III, utilizando o método dos projetores [Gantmacher, 1960], obtemos expressões fechadas para um elemento genérico dos grupos de Newton-Hooke, apresentando a lei de composição destes grupos e estudando as transformações de Newton-Hooke, comparando os resultados com aqueles de outros grupos cinemáticos relevantes.

Após esse estudo da estrutura algébrica dos grupos de Newton-Hooke apresentamos os nossos comentários finais no capítulo IV, onde fazemos também uma breve digressão sobre uma possível teoria de gauge para os grupos de Newton-Hooke, apresentando-a em linhas gerais e comentando os pontos essenciais. Encerramos então com algumas especulações de caráter cosmológico.

I - ASPECTOS ALGÉBRICOS DOS GRUPOS DE DE SITTER

I.1 - Os Grupos de de Sitter

Quando a Teoria da Relatividade Especial (TRE) foi proposta por Einstein em 1905, a idéia do que seria interpretado por Minkowski em 1908 como espaço-tempo contínuo foi primeiramente imposta aos físicos. Tínhamos um espaço-tempo plano, definido pelo elemento de linha:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2, \qquad [I.1.1]$$

aqui escrito nas coordenadas $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$; e com métrica de Lorentz-Minkowski dada por $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$.

O grupo das transformações que deixa o elemento de linha [I.1.1] invariante é o grupo de Lorentz inomogêneo ISO(3,1) o qual Wigner propôs chamar de grupo de Poincaré, por volta de 1950. Este grupo consiste no produto semidireto entre o grupo pseudo-ortogonal de Lorentz, SO(3,1), e o grupo das translações espaço-temporais, T(3,1). Este é o grupo de movimentos (ou grupo de isometria) do espaço-tempo de Minkowski definido por [I.1.1]. Em outras palavras, é o grupo de transformações que leva [I.1.1] nele mesmo. Este grupo, que já era conhecido pelos físicos como grupo de transformações que deixava invariante a Eletrodinâmica de Maxwell[†] , ganhou importância ainda maior quando em 1937 Wigner classificou as partículas em representações unitárias irredutíveis deste grupo.

Com o advento da Teoria da Relatividade Geral (TRG), também proposta por Einstein em 1915, e com ela a idéia de que o espaço-tempo se encurva na presença de matéria (Einstein, 1907), a passagem do espaço-tempo plano de Minkowski para um espaço-tempo curvo parecia um caminho natural.

Foi assim que entre as primeiras soluções das equações de Einstein (Schwarzschild, 1916; Einstein, 1917), o astrônomo holandês Willem de Sitter propôs em

---

[†] A covariância das equações de Maxwell com relação às transformações de Lorentz foi mostrada por Lorentz e Poincaré antes mesmo de Einstein ter proposto a Teoria da Relatividade Especial.

1917 uma solução considerando o universo homogêneo e uniforme, com constante cosmológica não nula, porém vazio ($T_{\mu\nu} = 0$). Esse modelo cosmológico ficou conhecido como Universo Esférico de de Sitter (opondo-se ao Universo Cilíndrico de Einstein). Surgia então na física a idéia de um espaço-tempo pseudo-riemanniano com curvatura constante (aqui estamos nos referindo à quadricurvatura ou curvatura quadridimensional). O grupo de de Sitter aparece como o grupo de isometrias (ou movimentos ou endomorfismos isométricos) deste espaço. Vejamos isto com um pouco mais de detalhe.

Espaço-Tempo com Curvatura Constante

Vamos dividir os espaços quadridimensionais com curvatura constante em dois tipos, os espaços riemannianos e os espaços-tempos pseudo-riemannianos.

Entre os espaços riemannianos temos o $\mathbf{E}^4$, com curvatura nula e a hiperesfera $\mathbf{S}^4$, com curvatura positiva, a qual podemos pensar como uma inclusão no $\mathbf{E}^5$, dada pela hipersuperfície cujos pontos, expressos em coordenadas cartesianas $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$, satisfazem a equação:

$$(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + (\xi^4)^2 = L^2 \ , \qquad [I.1.2]$$

onde L é o raio da hiperesfera. O grupo de movimentos da hiperesfera $\mathbf{S}^4$ é o grupo ortogonal SO(5).

Entre os espaços-tempos pseudo-riemannianos temos o espaço-tempo de Minkowski, **M**, dado por [I.1.1]; o espaço-tempo de de Sitter, DS(4,1), e o espaço-tempo de anti-de Sitter, DS(3,2).

Espaço-Tempo de de Sitter DS(4,1): Hipersuperfície incluída no $\mathbf{E}^{4,1}$, cujos pontos em coordenadas cartesianas satisfazem:

$$-(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + (\xi^4)^2 = +L^2 \ , \qquad [I.1.3]$$

onde L é muitas vezes chamado de "raio" do (hiper-)hiperbolóide. Este é o análogo quadridimensional do hiperbolóide de uma folha (ou de uma seção), dado, nas coordenadas cartesianas do $\mathbf{E}^3$, por:

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2 \ .$$

O grupo de movimentos deste espaço-tempo é o grupo pseudo-ortogonal SO(4,1), que denominaremos de **grupo de de Sitter.** Este espaço-tempo tem curvatura constante positiva.

Espaço-Tempo de Anti-de Sitter DS(3,2): Hipersuperfície incluída no $\mathbf{E}^{3,2}$, cujos pontos satisfazem:

$$-(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 - (\xi^4)^2 = -L^2 \ . \qquad [I.1.4]$$

Este é o análogo quadridimensional do hiperbolóide de duas seções (ou de duas folhas), dado por:

$$x^2 - y^2 - z^2 = a^2 \ .$$

O grupo de movimentos deste espaço-tempo é o grupo pseudo-ortogonal SO(3,2), que denominaremos de **grupo de anti-de Sitter**. Este espaço-tempo tem curvatura constante negativa.

Os espaços-tempos de de Sitter e anti-de Sitter podem ser tratados conjuntamente, escrevendo as equações [I.1.3] e [I.1.4] como:

$$\eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu + \eta_{44}(\xi^4)^2 = +\eta_{44}L^2 \ ; \ \mu,\nu = 0,1,2,3^{\dagger} \ , \qquad [I.1.5]$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ são as componentes da métrica de Lorentz-Minkowski que na nossa convenção serão dadas por:

---

† aqui, bem como em todo o texto, adotaremos a convenção de soma de Einstein, a menos que se ressalte o contrário.

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1) \quad ; \qquad [I.1.6]$$

e

$$\begin{cases} \eta_{44} = +1, & \text{para o caso de de Sitter} \quad , \\ \eta_{44} = -1, & \text{para o caso de anti - de Sitter} \, . \end{cases}$$

Sendo os espaços-tempos de de Sitter hipersuperfícies quadridimensionais, podemos efetuar sua projeção estereográfica ("à la" Poincaré) sobre o espaço-tempo de Minkowski (neste momento entendido apenas como o conjunto de pontos $\mathbf{R}^4$). Para tanto tomaremos como centro de projeção (CP) o ponto:

$$CP = \left(\xi^0 = 0,\ \xi^1 = 0,\ \xi^2 = 0,\ \xi^3 = 0,\ \xi^4 = +L\right) \ ,$$

e como (hiper)plano projetivo aquele dado por $\xi^4 = -L$ (ver figura I.1, onde representamos a projeção estereográfica de DS(3,2), extraída de [Aldrovandi e Pereira, 1995a]).

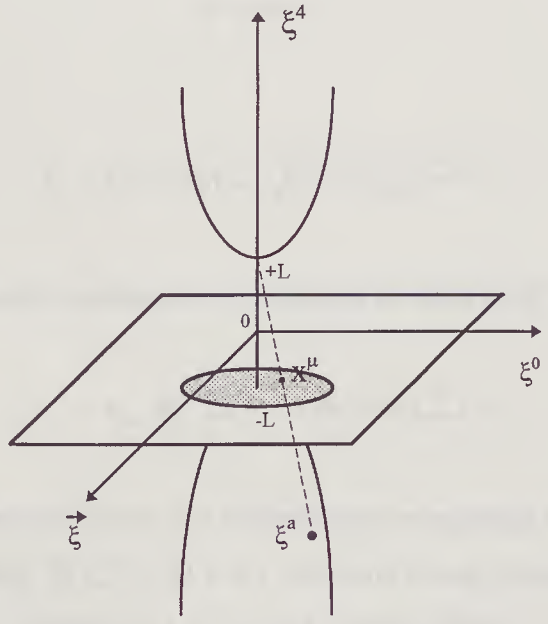

figura I.1

Com esta projeção, a cada ponto da hipersuperfície DS(4,1) ou DS(3,2) (excetuando-se o centro projetivo) serão atribuídas as coordenadas :

$$x^{\mu} = \frac{\xi^{\mu}}{\phi} = \frac{2\xi^{\mu}}{1 - \dfrac{\xi^{4}}{L}} \quad , \qquad [I.1.7]$$

com:

$$\phi \equiv \frac{1}{2}\left(1 - \xi^{4} / L\right) = \frac{1}{1 + \eta_{44}\dfrac{\sigma^{2}}{4L^{2}}} \quad , \qquad [I.1.8]$$

e por sua vez :

$$\sigma^{2} \equiv \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} \quad . \qquad [I.1.9]$$

Às coordenadas x^{μ} chamaremos por razões óbvias de coordenadas de projeção estereográfica ou coordenadas conformes [Gürsey, 1964].

As transformações inversas são dadas por:

$$\xi^{\mu} = \phi x^{\mu} \quad , \qquad [I.1.10a]$$

e

$$\xi^{4} = L(1 - 2\phi) = \pm\sqrt{L^{2} - \eta_{44}\phi^{2}\sigma^{2}} \quad . \qquad [I.1.10b]$$

Quando restringimos o elemento de linha do $\mathbf{E}^{4,1}$ ou $\mathbf{E}^{3,2}$, a saber :

$$ds^{2} = \eta_{ab}\, d\xi^{a}\, d\xi^{b} \quad ; \quad a, b = 0,1,2,3,4 \quad ; \qquad [I.1.11]$$

aos pontos das hipersuperfícies que definem respectivamente os espaços-tempos de de Sitter e anti-dc Sitter (eqs. [I.1.3] e [I.1.4]), obtemos como elemento de linha destes espaços-tempos, escrito nas coordenadas de projeção estereográfica:

$$ds^{2} = \phi^{2}\, \eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu} \quad , \qquad [I.1.12]$$

de onde concluímos que as componentes da métrica nestas coordenadas são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \phi^2 \; \eta_{\mu\nu} \quad . \qquad [I.1.13]$$

A título de completeza, vamos determinar a expressão da curvatura riemanniana constante destes espaços-tempos. Para tanto, iniciemos pelos símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\left\{\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}\right\} \quad . \qquad [I.1.13a]$$

$$\therefore \quad \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \eta_{44}\, \frac{\phi}{2L^2}\left\{\eta_{\mu\nu} x^{\rho} - \delta^{\rho}{}_{\mu}\, \eta_{\nu\sigma} x^{\sigma} - \delta^{\rho}{}_{\nu}\, \eta_{\mu\sigma} x^{\sigma}\right\} \quad . \qquad [I.1.13b]$$

Daí então obtemos o tensor de curvatura de Riemann:

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}{}_{\varsigma\rho}\Gamma^{\varsigma}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\varsigma\sigma}\Gamma^{\varsigma}{}_{\nu\rho} \quad . \qquad [I.1.14a]$$

$$\therefore \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\varsigma} R^{\varsigma}{}_{\nu\rho\sigma} = \frac{\eta_{44}}{L^2}\left\{g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}\right\} \quad . \qquad [I.1.14b]$$

Da forma de [I.1.14b] vê-se claramente que tratam-se de espaços-tempos com curvatura constante, que têm como forma geral do tensor de curvatura de Riemann a expressão:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{12} R \left\{g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}\right\} \quad , \qquad [I.1.14b]$$

onde R é o escalar de curvatura de Ricci-Riemann, dado por:

$$R = R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = g^{\nu\rho}\, R^{\mu}{}_{\rho\mu\nu} \; ; \qquad [I.1.16]$$

que no nosso caso particular de espaços-tempos de de Sitter é:

$$R = \eta_{44} \frac{12}{L^2} \quad . \qquad [I.1.17]$$

É ao valor do escalar de curvatura de Riemann que chamamos de curvatura de um espaço (-tempo). Vemos explicitamente que o espaço-tempo de de Sitter ($\eta_{44} = +1$) tem curvatura constante positiva igual a ${+12}/{L^2}$ e o espaço-tempo de anti-de Sitter ($\eta_{44} = -1$) tem curvatura constante negativa igual a ${-12}/{L^2}$.

Este é um bom momento para ressaltar que a métrica que relaciona as componentes contravariantes e covariantes das coordenadas cartesianas ξ^a é η_{ab} , e aquela que relaciona as coordenadas conformes x^μ é $g_{\mu\nu} = \phi^2 \eta_{\mu\nu}$. Mais precisamente:

$$\xi_a = \eta_{ab} \xi^b \quad , \qquad [I.1.18a]$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \phi^2 \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad . \qquad [I.1.18b]$$

I.2 - As Álgebras de Lie dos Grupos de de Sitter

No estudo de grupos de Lie, logramos grande simplificação ao nos restringirmos à álgebra de Lie do grupo de Lie em questão e suas respectivas representações. Desta forma, quando estabelecemos uma base para uma representação do grupo de Lie precisamos lidar apenas com um número finito de geradores desta álgebra de Lie, ao invés de uma infinidade funcional (na potência do contínuo) de elementos do grupo.

Vamos então escrever um elemento genérico de um grupo de de Sitter como a exponencial de um elemento genérico da sua álgebra de Lie, a saber:

$$U = \exp\left\{\frac{1}{2}\omega^{ab}Z_{ab}\right\} , \tag{I.2.1}$$

onde $\{Z_{ab}\}$ é o conjunto de geradores do grupo de de Sitter e ω^{ab} é o parâmetro associado ao respectivo gerador Z_{ab} . Tanto Z_{ab} como ω^{ab} são anti-simétricos por troca dos índices a e b.

As álgebras de Lie dos grupos de de Sitter são caracterizadas pelas relações de comutação:

$$[Z_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{bd}Z_{ac} - \eta_{ac}Z_{bd} , \tag{I.2.2}$$

típicas das álgebras de Lie pseudo-ortogonais $\mathfrak{so}(p,q)$, e válidas para todas as realizações destas álgebras.

Entre as possíveis realizações das álgebras de de Sitter, vamos primeiramente apresentar a chamada "representação cinemática", na qual os geradores Z_{ab} podem ser representados por campos vetoriais no $\mathbf{E}^{3,2}$ ou $\mathbf{E}^{4,1}$. Denotaremos por L_{ab} os operadores diferenciais que constituem os geradores desta realização das álgebras de de Sitter . Eles são expressos, por meio das coordenadas cartesianas ξ^{a}, como:

$$L_{ab} = \xi_a \frac{\partial}{\partial \xi^b} - \xi_b \frac{\partial}{\partial \xi^a} \quad . \qquad [I.2.3]$$

Além da realização cinemática temos também as representações matriciais. Uma delas é a representação vetorial, na qual os elementos de cada uma das agora matrizes Z_{ab} são dados por:

$$[Z_{ab}]^m{}_n = (\eta_{an}\delta^m{}_b - \eta_{bn}\delta^m{}_a) \quad . \qquad [I.2.4]$$

Uma outra representação matricial para os geradores dos grupos de de Sitter é aquela expressa em termos das matrizes gama (γ) de Dirac, conhecida por representação espinorial, que é dada por [Dirac, 1935]:

$$Z_{ab} \equiv S_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b] \ , \qquad [I.2.5]$$

onde vemos que a matriz $\gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0$, aqui denotada (por uniformidade de notação) por γ_4 , associada à simetria quiral, apresenta-se em pé de igualdade com as outras matrizes γ [Gürsey, 1964].

É um exercício direto mostrar que cada classe de operadores [I.2.3], [I.2.4] e [I.2.5] satisfaz à álgebra dada por [I.2.2].

I.3 - Contrações Simples de Inönü-Wigner

Freqüentemente ouvimos dizer que uma teoria física é o caso limite de uma outra ou que os resultados obtidos por uma teoria convergem para os de uma outra, dentro de certas aproximações. Como fez Segal no final da década de 40 [Segal, 1951], este fato pode ser refraseado dizendo-se que a álgebra de operadores do grupo de invariância associado a esta dada teoria física aproxima-se ou apresenta-se como o caso limite de uma outra (sempre que, é claro, pudermos associar grupos de invariância à teoria).

Foi com base nisto que em 1953, generalizando a relação existente entre o grupo de Lorentz inomogêneo e o grupo de Galilei, Inönü e Wigner apresentaram o processo de contrações que recebeu os seus nomes [Inönü e Wigner, 1953][†] . Nas palavras do próprio Inönü: "o processo de contração de grupos é um método pelo qual, a partir de um dado grupo de Lie, pode-se obter um outro grupo de Lie não isomorfo ao primeiro, através de uma operação de tomada de limite" [Inönü, 1964].

No artigo de 1953, Inönü e Wigner falam em contração de grupos de Lie apesar de lidarem apenas com as álgebras de Lie destes grupos. Influenciados por este trabalho, alguns autores parecem assumir que ao realizar-se a contração entre álgebras, o problema da contração entre grupos fica completamente determinado, o que não é verdade em geral. Foi Saletan [Saletan, 1961] quem chamou atenção para o fato de a contração da álgebra de Lie de um grupo de Lie não determinar necessariamente a contração deste grupo de Lie. Aqui, por simplicidade, trataremos apenas de contrações entre álgebras de Lie.

Recomendando as referências originais ([Inönü e Wigner, 1953] e [Inönü e Wigner, 1954]), assim como as já bem estabelecidas (*e. g.* [Inönü, 1964] e [Gilmore, 1974]) sobre este assunto, nos limitaremos aqui a ressaltar algumas características das contrações simples de Inönü-Wigner:

i) Toda álgebra de Lie $\mathcal{G}$ pode ser contraída com relação a quaisquer de suas subálgebras de Lie $\mathcal{H}$, mas somente com relação às mesmas.

[†] Inclusive o nome "contração" foi sugerido neste artigo de 1953.

ii) Os geradores nos quais é efetuada a contração passam a constituir, após o processo, uma subálgebra invariante abeliana $\mathcal{A}$ da álgebra $\mathcal{G}$ contraída, que denotaremos $\mathcal{G}$ '; i.e.: $[\mathcal{G}', \mathcal{A}] \subset \mathcal{A}$ e $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = 0$.

iii) A subálgebra $\mathcal{H}$ com relação à qual a contração é efetuada permanece inalterada pelo processo sendo portanto isomorfa a $\mathcal{G}' - \mathcal{A}$.

iv) A álgebra contraída $\mathcal{G}$ 'será então isomorfa a soma semidireta da subálgebra $\mathcal{H}$, inalterada pelo processo, com a subálgebra invariante abeliana $\mathcal{A}$, resultante da contração; i.e.: $\mathcal{G}' \approx \mathcal{H} \oplus \mathcal{A}$.[‡]

Conclui-se diretamente de ii) que a álgebra contraída $\mathcal{G}$ ' não será semi-simples.

É claro que todas estas características refletem-se na estrutura dos grupos de Lie associados a estas álgebras. É por isso que muitas vezes falamos em contração de grupos quando na verdade nos referimos à contração das álgebras destes grupos. O processo de contração de grupos de Lie ainda aguarda por uma formulação geral, embora alguns desenvolvimentos nesta direção já tenham sido apresentados (*e.g.* [Brennich, 1974]).

Para exemplificar o processo de contração, procedamos com a obtenção da álgebra de Poincaré a partir das álgebras de de Sitter. Retomemos as álgebras de de Sitter, dadas por [I.2.2] e separemos os geradores Z_{ab} em $Z_{\mu\nu}$ e $Z_{\mu 4} \equiv L\Pi_\mu$. Feito isso, as relações de comutação [I.2.2] passam a ser escritas como:

$$\left[Z_{\mu\nu}, Z_{\rho\sigma}\right] = \eta_{\nu\rho} Z_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} Z_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma} Z_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho} Z_{\nu\sigma} \quad , \qquad \text{[I.3.1a]}$$

$$\left[Z_{\mu\nu}, \Pi_\rho\right] = \eta_{\nu\rho} \Pi_\mu - \eta_{\mu\rho} \Pi_\nu \quad , \qquad \text{[I.3.1b]}$$

$$\left[\Pi_\mu, \Pi_\nu\right] = -\frac{\eta_{44}}{L^2} Z_{\mu\nu} \quad . \qquad \text{[I.3.1c]}$$

‡ Neste texto a soma semidireta entre álgebras será denotada pelo símbolo $\oplus$, enquanto que utilizaremos $\otimes$ para representar o produto semidireto entre grupos.

Note-se que estas relações de comutação ainda definem as álgebras de de Sitter $\mathscr{so}(4,1)$ e $\mathscr{so}(3,2)$. O que fizemos foi apenas uma mudança de base de $\{Z_{ab}\ ;\ a,b=0,1,2,3,4\}$ para $\{Z_{\mu\nu}\ ,\ \Pi_\mu\ ;\ \mu,\nu=0,1,2,3\}$.

Feito isso ficamos sugestionados a pensar que a contração para a álgebra de Poincaré consistirá na tomada do limite quando L tende a infinito nas relações de comutação [I.3.1], e será exatamente isso que faremos. Entretanto, precisamos ainda assegurar um comportamento bem definido para os novos geradores $\{Z_{\mu\nu},\Pi_\mu\}$, neste limite. Um caso bastante ilustrativo deste processo de contração é o da representação cinemática, na qual os geradores assumem uma forma explícita, dependendo do sistema de coordenadas escolhido para o espaço-tempo que hospeda esta representação.

Ao expressarmos os geradores [I.2.3] nas coordenadas de projeção estereográfica, obtemos:

$$L_{\mu\nu}=\frac{1}{\phi^2}\left\{x_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}-x_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}, \qquad \text{[I.3.2a]}$$

$$L_{\mu 4}=\eta_{44}L\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{\eta_{44}}{4L^2}\left[\sigma^2\delta^\nu{}_\mu-\frac{2x^\nu}{\phi^2}x_\mu\right]\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right\}\equiv L\Pi_\mu\ , \qquad \text{[I.3.2b]}$$

onde usamos [I.1.10b] e que $\partial x^\mu/\partial\xi^4=0$.

Tomando o limite $L\to\infty$:

$$\lim_{L\to\infty}\phi=1\ ; \qquad \text{[I.3.3]}$$

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}=\lim_{L\to\infty}L_{\mu\nu}=\left\{x_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}-x_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}, \qquad \text{[I.3.4a]}$$

e

$$\mathcal{P}_\mu=\lim_{L\to\infty}\frac{\Pi_\mu}{\eta_{44}}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\ . \qquad \text{[I.3.4b]}$$

Note-se que a forma explícita dos geradores após a contração depende do sistema de coordenadas escolhido. Inclusive, poderíamos efetuar todo o processo de contração sem mencionar as coordenadas de projeção estereográfica, trabalhando somente com as coordenadas cartesianas do $\mathbf{E}^5$, ξ^a [Gilmore, 1974]. Nunca é demais ressaltar que este processo de contração não se resume à tomada do limite $L \to \infty$. Por exemplo, precisamos também nos restringir às vizinhanças de um ponto com coordenadas convenientemente escolhidas [Wigner, 1950].

Desta forma, após a contração, ou melhor dizendo, após tomarmos o limite $L \to \infty$ das novas relações de comutação da álgebra de de Sitter, envolvendo os novos geradores $\{\mathcal{L}_{\mu\nu}, \mathcal{P}_{\mu\nu}\}$, trabalhando na representação cinemática, obtemos:

$$[\,\mathcal{L}_{\mu\nu}\,,\,\mathcal{L}_{\rho\sigma}\,] = \eta_{\nu\sigma}\mathcal{L}_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\mathcal{L}_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}\mathcal{L}_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}\mathcal{L}_{\nu\sigma}\ , \qquad \text{[I.3.5a]}$$

$$[\,\mathcal{L}_{\mu\nu}\,,\,\mathcal{P}_{\rho}\,] = \eta_{\nu\rho}\mathcal{P}_{\mu} - \eta_{\mu\rho}\mathcal{P}_{\nu}\ , \qquad \text{[I.3.5b]}$$

$$[\,\mathcal{P}_{\mu}\,,\,\mathcal{P}_{\nu}\,] = 0\ . \qquad \text{[I.3.5c]}$$

Estas são exatamente as relações de comutação da álgebra do grupo de Poincaré, $\mathit{iso}(3,1)$. As relações [I.3.5a] identificam a subálgebra de Lorentz, $\mathit{so}\,(3,1)$. Os comutadores [I.3.5b] mostram que $\mathcal{P}_{\mu}$ são vetores de Lorentz. Já os comutadores [I.3.5c] identificam a subálgebra abeliana das translações espaço-temporais, $\mathcal{T}\,(3,1)$. As relações [I.3.5c] juntamente com [I.3.5b] caracterizam esta álgebra das translações como um ideal abeliano da álgebra de Poincaré (ver figura I.2). Pode-se verificar diretamente a manifestação das características das contrações de Inönü-Wigner, mencionadas anteriormente.

$$\left.\begin{matrix} SO(4,1) \\ SO(3,2) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{"}L\to\infty\text{"}} ISO(3,1) \approx SO(3,1) \otimes T^{3,1}$$

figura I.2

Um fato importante para o qual não poderíamos deixar de chamar atenção é que ao efetuarmos a contração estamos modificando drasticamente o espaço (-tempo) que tem como grupo de isometria o grupo original. Ao contrairmos as álgebras de de Sitter para as de Poincaré, estaremos passando dos espaços-tempos de de Sitter [I.1.11], que são curvos, para o espaço-tempo de Minkowski [I.1.1], que é plano. Um caso análogo pode ser visualizado quando contraímos o grupo das rotações espaciais (SO(3), grupo de movimentos da esfera $\mathbf{S}^2$) para o grupo euclidiano a duas dimensões (ISO(2), grupo de movimentos do plano $\mathbf{E}^2$) .

Terminemos este capítulo mencionando que o exemplo historicamente mais importante das contrações de Inönü-Wigner é a contração da álgebra de Poincaré para a álgebra do grupo de Galilei inomogêneo (incluindo as translações), atingida no limite $c\to\infty$, quando este é tomado da maneira apropriada [Inönü, 1964].

$$\boxed{\text{Grupos de de Sitter}} \xrightarrow{\text{"}L\to\infty\text{"}} \boxed{\text{Grupo de Poincaré}} \xrightarrow{\text{"}c\to\infty\text{"}} \boxed{\text{Grupo de Galilei Inomogêneo}}$$

figura I.3

No próximo capítulo abordaremos com mais detalhe este e outros casos de contrações de Inönü-Wigner.

II - GRUPOS CINEMÁTICOS

II.1 - Definição dos Grupos Cinemáticos

Pensemos no **Princípio da Relatividade** como estabelecendo a equivalência entre os fenômenos físicos observados por sistemas de referência relacionados entre si por transformações bem definidas. Do ponto de vista matemático, seria bastante desejável que o conjunto de tais transformações tivesse a estrutura algébrica de um grupo. Argumentos físicos nos sugerem um caráter contínuo para este grupo, o que nos conduz à estrutura de um grupo de Lie. Seguindo este raciocínio podemos dizer que uma teoria da relatividade trará consigo a especificação de um tal grupo de Lie destas transformações ao qual chamamos de **grupo cinemático** da teoria.

Se chamarmos de referenciais inerciais aos sistemas de referência dos quais a descrição dos fenômenos físicos é equivalente, o grupo cinemático consistirá no conjunto de todas as transformações que relacionam dois referencias inerciais quaisquer. Podemos dizer que o grupo cinemático caracteriza o sistema isolado mais geral possível de uma dada teoria da relatividade.

Não é difícil imaginarmos quais classes de transformações deveriam estar incluídas em um tal grupo. Pensemos na *física newtoniana*. A homogeneidade e isotropia do espaço bem como a homogeneidade do tempo; que nos levam à conservação (*e.g.* via teorema de Noether) do momento linear, do momento angular e da energia; nos dão indicações diretas de que respectivamente as translações espaciais, as translações temporais e as rotações espaciais devem fazer parte do *grupo cinemático galileano*. Apesar de que hoje em dia possam parecer os exemplos mais básicos de invariância das leis da física, estes parecem não ter sido os primeiros a ser formulados explicitamente. Foi no seu "*Diálogo Sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo*", de 1632 [Galilei, 1632], que Galilei estabeleceu a equivalência entre as observações feitas em repouso e em velocidade constante, sendo muito provavelmente esta a primeira formulação de um princípio de relatividade. Transformações deste tipo, relacionando referenciais que diferem entre si por movimentos inerciais, vêm, juntamente com as rotações e generalizações das translações, completar os nossos grupos cinemáticos.

O fato de que saibamos quais são os tipos de transformações que constituem nossos grupos cinemáticos está longe de significar que conheçamos a lei de composição que determina completamente estes grupos (i.e., como estas transformações relacionam-se entre si). Uma prova disso é que tivemos de aguardar até o início do século XX para que físicos como Lorentz, Poincaré e Einstein nos mostrassem serem as transformações de Lorentz e não as de Galilei (as quais podem ser obtidas das de Lorentz no limite apropriado) as transformações inerciais com relação as quais as leis da física são covariantes.

Neste contexto, é bastante natural que nos perguntemos quais as hipóteses sob as quais tais grupos como o de Poincaré e o de Galilei aparecem como bons candidatos para grupos cinemáticos. Um tal questionamento foi provavelmente inaugurado por Lalan, em 1936 [Lalan, 1936]. Um estudo sistemático sobre a classificação de tais grupos cinemáticos foi apresentado por Bacry e Lévy-Leblond em 1968 [Bacry e Lévy-Leblond, 1968][†]; onde eles concluem que sob as hipóteses de isotropia espacial, invariância por paridade e inversão temporal, além de uma fraca imposição de causalidade, as álgebras de Lie destes grupos cinemáticos são as álgebras de de Sitter e todas as suas possíveis contrações isotrópicas.

Este trabalho de Bacry e Lévy-Leblond objetivava estudar prováveis substitutos para o grupo de Poincaré, que naquela época acreditava-se ser responsável pelas dificuldades apresentadas pela relatividade especial na física de partículas (*cf.* [Bacry, 1989]).

O fato conhecido da violação da paridade e da inversão temporal no âmbito das interações fracas levou Bacry a abandonar tais hipóteses e a apresentar em 1986, juntamente com Nuyts, [Bacry e Nuyts, 1986], uma classificação das álgebras dos grupos cinemáticos como grupos de Lie de dez parâmetros preservando a isotropia do espaço. Essas álgebras revelaram-se como todas as possíveis deformações (que são o inverso de contrações, no sentido de Levy-Nahas [Levy-Nahas, 1967]) isotrópicas da álgebra do chamado grupo estático.

† Na verdade, Bacry e Lévy-Leblond classificaram as álgebras destes grupos cinemáticos.

II.2 - Os Grupos Cinemáticos de Bacry e Lévy-Leblond

Vamos então apresentar as álgebras dos grupos cinemáticos, como obtidas por Bacry e Lévy-Leblond, em 1968. Do ponto de vista físico, as transformações que constituem estes grupos cinemáticos são:

- Rotações espacias, representadas pelos 3 geradores de momento angular, J_i, $i = 1,2,3$.
- *Translações espaciais generalizadas* †, representadas pelos 3 geradores de *momento linear generalizado*, P_i .
- Transformações inerciais, representadas pelos 3 geradores de "boost", B_i .
- *Translações temporais generalizadas*, representadas pelo gerador de *energia generalizada*, T.

As hipóteses admitidas são as seguintes:

i) Isotropia Espacial ou Invariância por Rotações.

Esta hipótese implica que os geradores tenham a "boa" transformação por rotações, i.e., que T seja um escalar e P_i, B_i e os próprios J_i sejam as componentes de um vetor. Em termos das relações de comutação estas propriedades são escritas como:

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k \quad , \qquad [II.2.1a]$$

$$[J_i, P_j] = \varepsilon_{ijk} P_k \quad , \qquad [II.2.1b]$$

$$[J_i, B_j] = \varepsilon_{ijk} B_k \quad , \qquad [II.2.1c]$$

$$[J_i, T] = 0 \quad ; \qquad [II.2.1d]$$

† Essas *translações generalizadas* devem ser entendidas em um sentido amplo, podendo até mesmo significar rotações no caso de uma variedade com curvatura constante não nula. Como podemos ver em [II.2.2a] e em [II.2.2c] , elas podem não comutar entre si.

onde :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, \text{ para permutaç ões cíclicas de } (i = j,\ j = 2,\ k = 3), \\ -1, \text{ para permutaç ões cíclicas de } (i = 3,\ j = 2,\ k = 1), \\ 0, \text{ nos outros casos.} \end{cases}$$

ε_{ijk} é o conhecido símbolo totalmente anti-simétrico de Kronecker/Levi-Civita.

ii) Como automorfismos σ das álgebras dos grupos cinemáticos, serão admitidas a paridade (ou inversão espacial) π e a inversão temporal τ.

Claro está que estes serão automorfismos involutivos ("involutive automorphisms"), *i.e.* $\sigma^2 = I$, onde I denota a transformação identidade. Devemos também ressaltar que estes não são admitidos como automorfismos internos ("inner automorphisms"), o que dito de outra maneira significa que paridade e inversão temporal não são tidos como elementos dos grupos cinemáticos – o que estamos requerendo é apenas a invariância da álgebra destes grupos por estas operações.

Conforme mencionamos anteriormente, foi feita uma classificação das álgebras dos grupos cinemáticos por Bacry e Nuyts considerando somente a hipótese i) , mas o número de casos possíveis torna-se grande e vários deles são de difícil interpretação do ponto de vista da física.

Vejamos explicitamente na tabela abaixo o comportamento dos geradores das álgebras dos grupos cinemáticos por π e τ :

	Paridade (π)	***Inversão Temporal (τ)***
J_i	J_i	J_i
P_i	$-P_i$	P_i
B_i	$-B_i$	$-B_i$
T	T	$-T$

tabela II.1

iii) As transformações inerciais em uma dada direção, geradas pelo B_i correspondente, formam um subgrupo não-compacto.

Note-se que dentre as três hipóteses, esta é a única que diz respeito ao caráter global de uma transformação, e portanto, à estrutura do grupo cinemático em si.

Para entendermos melhor as implicações desta hipótese, recordemos os subgrupos uniparamétricos do grupo das rotações espaciais SO(3), que são compactos, e têm a característica de que uma rotação de 2π radianos corresponde à identidade. Percebemos então que com esta hipótese estamos garantindo que nenhum "boost" (com parâmetro) não nulo corresponda à identidade. Pode-se mostrar que esta hipótese pode ser entendida como equivalente a uma forma fraca do princípio de causalidade† .

Note-se que não requeremos a não-compaticidade dos subgrupos uniparamétricos gerados por P_i, o que significa que estamos admitindo espaços-tempos (aqui ainda sem um significado bem definido) fechados espacialmente; e dos gerados por T o que ainda acarretará problemas com a causalidade (como no caso do grupo de Carroll e do grupo de anti-de Sitter).

Vamos agora obter quais são as álgebras condizentes com as três hipóteses anteriores. Para tanto, precisamos ainda obter as expressões admissíveis para os comutadores que, juntamente com [II.2.1], definem tais álgebras. Estes comutadores são $[T,P_i]$; $[T,B_i]$; $[P_i,P_j]$; $[B_i,B_j]$ e $[P_i,B_j]$. Levando-se em consideração as hipóteses i) e ii), obtemos:

$$\left[T, P_i\right] = pB_i \ , \qquad [II.2.2a]$$

$$\left[T, B_i\right] = qP_i \ , \qquad [II.2.2b]$$

$$\left[P_i, P_j\right] = r\varepsilon_{ijk} J_k \ , \qquad [II.2.2c]$$

† Esta hipótese implica que, se em um dado sistema de referência dois eventos ocorrem em um mesmo ponto, então nenhuma transformação inercial poderá alterar a ordem temporal destes eventos.

$$\left[B_i, B_j\right] = s\varepsilon_{ijk} J_k \quad , \qquad \text{[II.2.2d]}$$

$$\left[P_i, B_j\right] = t\delta_{ij} T \quad . \qquad \text{[II.2.2e]}$$

Como estamos assumindo álgebras reais (cujo corpo é o conjunto dos reais), então p, q, r, s e t serão números reais.

Na definição de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$, os axiomas que devem ser satisfeitos pela regra de composição ou multiplicação de Lie, [,] , são a linearidade, a anti-simetria e a identidade de Jacobi, a saber:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \quad , \qquad \text{[II.2.3]}$$

para todo X, Y e Z pertencente a $\mathcal{G}$.

Assim, o próximo passo na determinação das possíveis álgebras de Lie dos grupos cinemáticos consiste em obter quais as condições entre as constantes de estrutura p, q, r, s e t , quando requeremos que a identidade de Jacobi seja satisfeita pelos geradores T, P_i, B_i, e J_i. Fazendo isso, resulta que as condições não triviais e independentes são:

$$r - pt = 0 \ , \qquad \text{[II.2.4a]}$$

$$s + qt = 0 \ . \qquad \text{[II.2.4b]}$$

Passemos então à classificação das álgebras de Lie dos grupos cinemáticos, caracterizados por apresentarem algumas(ou nenhuma) das constantes de estrutura p, q, r, s, e t iguais a zero, já levando em consideração a hipótese iii), *i.e.*, descartando as possibilidades que resultarem em subgrupos uniparamétricos compactos gerados pelos B_i. Apresentemos os casos possíveis:

a) $p \neq 0$, $q \neq 0$, $r \neq 0$, $s \neq 0$ e $t \neq 0$. As possibilidades são a álgebra $\mathfrak{so}(4,1)$ do grupo de de Sitter e a álgebra $\mathfrak{so}(3,2)$ do grupo de anti-de Sitter.

b) $p = 0$, $q \neq 0$, $r = 0$, $s \neq 0$ e $t \neq 0$. A única possibilidade neste caso é a álgebra $iso(3,1)$ do grupo de Poincaré.

c) $p \neq 0$, $q = 0$, $r \neq 0$, $s = 0$ e $t \neq 0$. As possibilidades são:

- uma álgebra isomorfa à do grupo de Poincaré, só que os papéis dos geradores das translações espaciais P_i e das transformações inerciais B_i encontram-se invertidos. A esta álgebra chamamos de álgebra de para-Poincaré.
- a álgebra $iso(4)$, com a parte inomogênea (não-compacta) dada pelas transformações inerciais gerada pelos B_i.

d) $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ e $t \neq 0$. A única possibilidade neste caso é a álgebra do grupo de Carroll (assim denominado por Lévy-Leblond, em 1965, em homenagem ao escritor inglês Lewis Carroll, pseudônimo do professor de matemática Charles L. Dodgson, autor de "Alice no país das maravilhas"; pelo fato de que em um mundo no qual o grupo de invariância fosse o grupo de Carroll, praticamente não haveria causalidade) que pode ser interpretado também como um limite do grupo de Poincaré para baixas velocidades e grandes intervalos do gênero espaço ("space-like intervals") [Lévy-Leblond, 1965].

e) $p \neq 0$, $q \neq 0$, $r = 0$, $s = 0$ e $t = 0$. As possibilidades neste caso são as álgebras dos grupos que ficaram conhecidos na literatura como grupos de Newton-Hooke [Cariñena *et al.*, 1981]. O nome de Newton foi associado a estes grupos por Bacry e Lévy-Leblond [Bacry e Lévy-Leblond, 1968] por estes descreverem um universo cosmológico (algumas transformações que compõem estes grupos acusam um efeito de longo alcance devido a sua curvatura) e não-relativístico (pequenas velocidades quando comparadas com a velocidade da luz no vácuo). Já o nome de Hooke deriva do fato do operador invariante de Casimir correspondente à energia interna da extensão central desta álgebra conter (a menos de um sinal) um potencial harmônico [Derome e Dubois, 1972].

f) $p = 0$, $q \neq 0$, $r = 0$, $s = 0$ e $t = 0$. Neste caso, a única possibilidade é a álgebra de Lie do grupo de Galilei.

g) $p \neq 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ e $t = 0$. Neste caso temos uma álgebra isomórfica a do grupo de Galilei, só que os papéis dos geradores das translações espaciais P_i e das transformações inerciais B_i, como em um dos casos do item c (para-Poincaré), encontram-se invertidos. A esta álgebra damos o nome de álgebra de para-Galilei.

h) $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ e $t = 0$. A única possibilidade neste caso é a álgebra do grupo estático, assim chamado por representar a álgebra de sistemas infinitamente massivos, e que portanto não podem se mover (este fato é mais facilmente visto quando comparamos as extensões centrais desta álgebra com as do grupo de Galilei).

Na tabela seguinte apresentamos os comutadores, já com os sinais corretos (o que implica que p, q, r, s e t são agora todos positivos), de cada uma das onze álgebras possíveis para os grupos cinemáticos que estão de acordo com as hipóteses assumidas. Estes, juntamente com os comutadores [II.2.1], determinam completamente estas álgebras.

	so (4,1)	so (3,2)	Poincaré	iso(4)	para-Poincaré	Carroll	Newton-Hooke(+)	Newton-Hooke(-)	Galilei	para-Galilei	Estática
$[T,P_i]$	$+pB_i$	$-pB_i$	0	pB_i	$-pB_i$	0	$+pB_i$	$-pB_i$	0	pB_i	0
$[T,B_i]$	qP_i	qP_i	qP_i	0	0	0	qP_i	qP_i	qP_i	0	0
$[P_i,P_j]$	$r\varepsilon_{ijk}J_k$	$-r\varepsilon_{ijk}J_k$	0	$r\varepsilon_{ijk}J_k$	$-r\varepsilon_{ijk}J_k$	0	0	0	0	0	0
$[B_i,B_j]$	$-s\varepsilon_{ijk}J_k$	$-s\varepsilon_{ijk}J_k$	$-s\varepsilon_{ijk}J_k$	0	0	0	0	0	0	0	0
$[P_i,B_j]$	$t\delta_{ij}T$	$t\delta_{ij}T$	$t\delta_{ij}T$	$t\delta_{ij}T$	$t\delta_{ij}T$	$t\delta_{ij}T$	0	0	0	0	0

tabela II.2

II.3 - As Álgebras dos Grupos Cinemáticos de Bacry e Lévy-Leblond como Contrações de Inönü-Wigner das Álgebras de de Sitter

Um outro resultado importante obtido por Bacry e Lévy-Leblond [Bacry e Lévy-Leblond, 1968] é que as álgebras de Lie dos grupos cinemáticos listadas na tabela II.2 estão relacionadas entre si por contrações simples de Inönü-Wigner. Mais especificamente, todas estas álgebras podem ser obtidas das álgebras de de Sitter, $\mathfrak{so}$ (4,1) e $\mathfrak{so}$ (3,2), por meio de uma seqüência apropriada destas contrações, sempre preservando a álgebra das rotações espaciais (contrações isotrópicas).

Para melhor entendermos este fato lembremos que, conforme ressaltado na seção I.3, onde apresentamos as contrações de Inönü-Wigner, toda álgebra de Lie $\mathcal{G}$ só pode ser contraída com relação a uma álgebra de Lie $\mathcal{H}$ se, e somente se, $\mathcal{H}$ for uma subálgebra de Lie de $\mathcal{G}$. Além das subálgebras triviais formadas por um só gerador concluímos, observando os comutadores [II.2.1] e [II.2.2], que todas as álgebras dos grupos cinemáticos têm como subálgebras (ao menos) aquelas geradas por $\{J_i\}$, $\{J_i,T\}$, $\{J_i,P_i\}$, e $\{J_i,B_i\}$; todas estas possuindo a álgebra das rotações espaciais como subálgebra. Sendo assim, uma vez que todos os grupos cinemáticos (por definição) devem possuir isotropia espacial, vamos então contrair suas álgebras com relação a estas quatro subálgebras, que por sua vez contêm como subálgebra a álgebra das rotações espaciais. Apresentemos cada uma destas contrações.

i) **Contração Velocidade-Espaço.** Este tipo de contração deixa inalterada a subálgebra gerada por $\{J_i,T\}$, constituída pela soma direta da álgebra das rotações espaciais e da álgebra unidimensional das translações temporais. Para efetuarmos esta contração redefinimos os geradores como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i &\equiv J_i \quad , \\ \mathcal{P}_i &\equiv \epsilon P_i \quad , \\ \mathcal{B}_i &\equiv \epsilon B_i \quad , \\ \mathcal{T} &\equiv T \quad . \end{aligned}$$

Substituímos estas identificações nos comutadores das álgebras de cada um dos grupos cinemáticos[†] e após isso tomamos o limite singular $\epsilon \to 0$ dos comutadores envolvendo os novos geradores ($\mathcal{J}_i$, $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{T}$) , admitindo que estes estejam bem definidos neste limite.

Fisicamente este processo implica que as translações espaciais geradas por $\mathcal{P}_i$ sejam pequenas e que as velocidades decorrentes das transformações inerciais geradas por $\mathcal{B}_i$ sejam também pequenas. Esta contração implicará nas seguintes modificações das álgebras dos grupos cinemáticos:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{so}(4,1) & \longrightarrow & \text{Newton-Hooke (+)}, \\
\mathfrak{so}(3,2) & \longrightarrow & \text{Newton-Hooke (-)}, \\
\mathfrak{iso}(3,1) & \longrightarrow & \text{Galilei} \quad , \\
\left.\begin{array}{r}\text{para} - \text{Poincaré} \\ \mathfrak{iso}\,(4)\end{array}\right\} & \longrightarrow & \text{para-Galilei} \quad , \\
\text{Carroll} & \longrightarrow & \text{Estática} \quad .
\end{array}
$$

Podemos aqui definir formalmente as álgebras dos grupos de Newton-Hooke a partir desta contração simples de Inönü-Wigner, a saber:

- **Álgebra de Newton-Hooke (+):** álgebra obtida da contração velocidade-espaço da álgebra do grupo de de Sitter, $\mathfrak{so}(4,1)$.
- **Álgebra de Newton-Hooke (-):** álgebra obtida da contração velocidade-espaço da álgebra do grupo de anti-de Sitter, $\mathfrak{so}(3,2)$.

Poderíamos aqui indagar porque não apresentamos explicitamente as contrações velocidade-espaço das álgebras que aparecem à direita do esquema anterior. A resposta provém de uma propriedade das contrações de Inönü-Wigner, a saber: contraindo-se uma segunda vez com relação a mesma subálgebra não altera-se o resultado da primeira

[†] Até aqui (antes da tomada do limite) temos uma álgebra isomorfa à álgebra original.

contração. Sendo assim ao impormos uma contração velocidade-espaço a álgebras que já resultarem de uma tal contração, estas álgebras não são alteradas.

ii) **Contração Velocidade-Tempo.** Esta contração deixa inalterada a subálgebra gerada por $\{J_i, P_i\}$. Corresponde a identificarmos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_i &\equiv J_i \quad , \\
\mathcal{P}_i &\equiv P_i \quad , \\
\mathcal{B}_i &\equiv \in B_i \quad , \\
\mathcal{T} &\equiv \in T \quad ;
\end{aligned}
$$

e após isso tomarmos o limite $\in \to 0$, assumindo um bom comportamento dos novos geradores neste limite.

A interpretação física deste limite corresponde a considerarmos pequenas velocidades, assim como pequenos intervalos tipo tempo. Após este processo:

$$\mathfrak{so}(4,1) \longrightarrow \mathfrak{iso}(4)$$

$$\mathfrak{so}(3,2) \longrightarrow \text{para-Poincaré}$$

$$\mathfrak{iso}(3,1) \longrightarrow \text{Carroll}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Newton – Hooke }(+)\\ \text{Newton – Hooke }(-)\end{array}\right\} \longrightarrow \text{para-Galilei}$$

$$\text{Galilei} \longrightarrow \text{Estática} \quad .$$

iii) **Contração Espaço-Tempo.** Este tipo de contração preserva a subálgebra gerada por $\{J_i, B_i\}$. Neste caso redefinimos os geradores da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_i &\equiv J_i \quad , \\
\mathcal{P}_i &\equiv \in P_i \quad , \\
\mathcal{B}_i &\equiv B_i \quad , \\
\mathcal{T} &\equiv \in T \quad .
\end{aligned}
$$

Substituímos então estas redefinições nos comutadores que determinam a álgebra e após isso tomamos o limite $\in \to 0$, sempre admitindo que os novos geradores tenham um limite bem definido.

O significado físico desta contração é que estamos considerando pequenos intervalos tanto espaciais como temporais. Após este processo, as álgebras que sofrerão modificações são as seguintes:

$$\left.\begin{array}{r} \mathit{so}(4,1) \\ \mathit{so}(3,2) \end{array}\right\} \longrightarrow \mathit{iso}(3,1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{para} - \text{Poincaré} \\ \mathit{iso}(4) \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Carroll}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Newton} - \text{Hooke}\ (+) \\ \text{Newton} - \text{Hooke}\ (-) \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Galilei}$$

$$\text{para-Galilei} \longrightarrow \text{Estática}$$

iv) **Contração Geral.** Esta contração deixa inalterada somente a subálgebra das rotações espaciais, gerada por $\{J_i\}$. Corresponde às identificações:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{J}_i & \equiv J_i & , \\ \mathcal{P}_i & \equiv \in P_i & , \\ \mathcal{B}_i & \equiv \in B_i & , \\ \mathcal{T} & \equiv \in T & ; \end{array}$$

nos comutadores das álgebras de cada um dos grupos cinemáticos, e aí então à tomada do limite singular $\in \rightarrow 0$ nestas álgebras. Devemos ainda garantir que os novos geradores ($\mathcal{J}_i$, $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{T}$) estejam bem definidos neste limite.

Fisicamente esta contração corresponde a considerarmos intervalos espaciais e temporais pequenos, além de baixas velocidades. Após este processo todas as álgebras são contraídas para a do grupo estático.

A figura a seguir, extraída do artigo de Bacry e Lévy-Leblond [Bacry e Lévy-Leblond, 1968], ilustra o esquema de contrações entre as álgebras dos grupos cinemáticos, especificando as contrações que as relacionam.

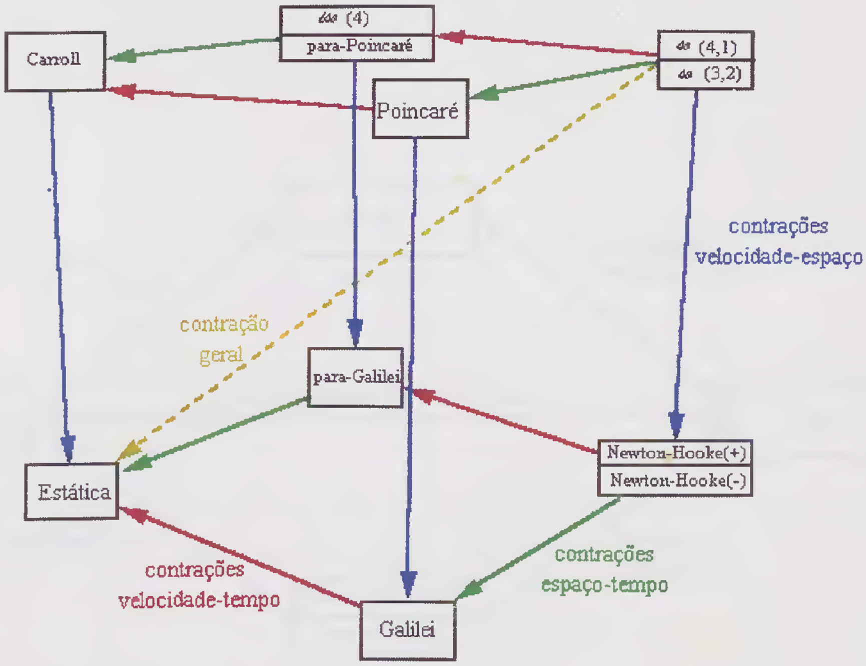

figura II.1

Note-se que todas as contrações isotrópicas aqui apresentadas deixam inalterados os comutadores [II.2.1]. Isto já era esperado, uma vez que estas relações são comuns às álgebras de todos os grupos cinemáticos e os resultados de tais contrações são sempre álgebras destes grupos.

Na figura II.1 confirma-se o que foi dito no início desta seção, a saber: todas as álgebras dos grupos cinemáticos que estão de acordo com as hipóteses expostas na seção II.2 podem ser obtidas das álgebras de de Sitter, $\mathfrak{so}(4,1)$ e $\mathfrak{so}(3,2)$, por meio de uma seqüência apropriada de contrações simples isotrópicas de Inönü-Wigner.

Tomemos agora, a título de exemplo, a álgebra do grupo de Galilei, que não pode ser obtida por uma única contração deste tipo. Conforme indica a figura II.2 abaixo, existem duas possibilidades de obtermos a álgebra de Galilei a partir das álgebras de de Sitter.

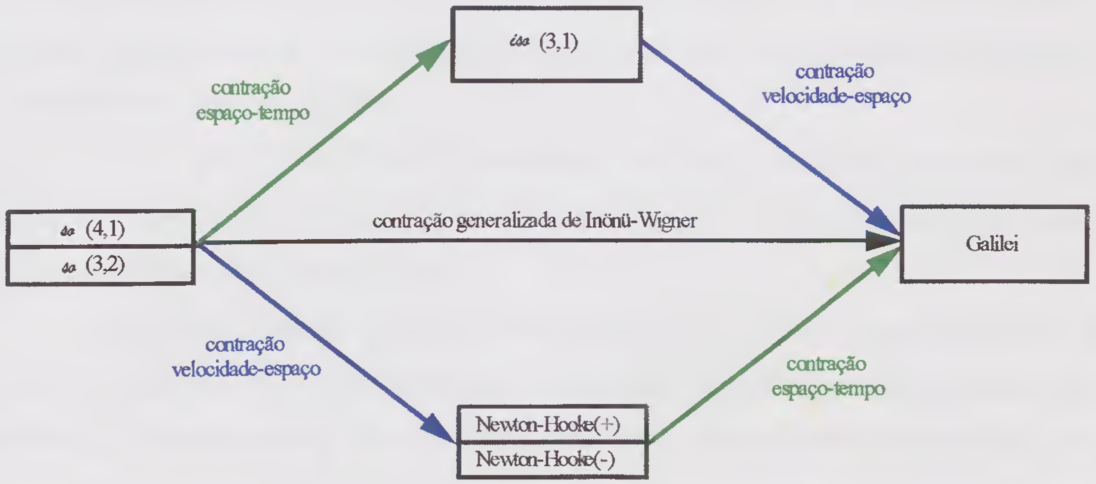

figura II.2

Comparando o diagrama da figura II.2 com o da figura I.1, vemos que os grupos de Newton-Hooke aparecem como outros possíveis grupos intermediários entre os de de Sitter e o de Galilei. Observando o esquema de contrações podemos dizer que os grupos de Newton-Hooke estão para o de Galilei, assim como os de de Sitter estão para o de Poincaré. Podemos ainda dizer que enquanto o grupo de Poincaré é o limite não-cosmológico dos grupos de de Sitter, os de Newton-Hooke são os limites não-relativísticos destes grupos semi-simples.

Poderíamos indagar entretanto, se a álgebra de Galilei pode ou não ser obtida diretamente das álgebras de de Sitter, por uma única contração de algum tipo. A resposta é afirmativa. De fato, se procedermos com as redefinições:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_i &\equiv J_i \quad , \\
\mathcal{P}_i &\equiv \epsilon^2 P_i \quad , \\
\mathcal{B}_i &\equiv \epsilon B_i \quad ,
\end{aligned}
$$

$$7 \equiv \in T \quad ;$$

nos comutadores das álgebras de de Sitter obtemos, após tomarmos o limite $\in \rightarrow 0$ destes comutadores (admitindo que os novos geradores tenham um bom comportamento neste limite), a álgebra do grupo de Galilei.

Este tipo de contração envolvendo quadrados ou ainda potências mais elevadas do parâmetro $\in$ foi sugerido por Wigner e ficou conhecido na literatura como contração generalizada de Inönü-Wigner.

Em 1961, Saletan [Saletan, 1961] propôs uma possível generalização das contrações de grupos de Lie, que receberam o seu nome. Nesse artigo Saletan apresenta outros tipos de transformações lineares singulares entre os operadores infinitesimais de álgebras de Lie, mais gerais do que as envolvidas nas contrações simples de Inönü-Wigner. Não abordaremos as contrações de Saletan no presente trabalho, deixando a indicação aos interessados da literatura especializada (*e.g.* [Gilmore, 1974]).

II.4 - As Álgebras dos Grupos de Newton-Hooke

Devido ao interesse especial que temos neste trabalho pelo limite não-relativístico dos grupos de de Sitter, visando o estudo futuro de uma Teoria de Gauge para os grupos de Newton-Hooke, vamos apresentar com certo detalhe a contração das álgebras de de Sitter para as álgebras de Newton-Hooke.

Na seção anterior, tivemos o cuidado talvez até excessivo de chamar atenção para o fato de que precisamos assegurar um comportamento bem definido aos geradores, quando submetidos ao limite que determina a contração. Isto é melhor entendido quando escolhemos uma representação para a álgebra e observamos o que acontece com seus geradores ao impormos este limite. Tomemos o caso particular da representação cinemática, escrita nas coordenadas conformes. Neste caso, os geradores podem ser expressos como:

$$L_{\mu\nu} = x^{\rho}\left\{\eta_{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} - \eta_{\nu\rho}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right\} \quad , \qquad \text{[II.4.1a]}$$

e

$$L_{\mu 4} = \eta_{44}L\left\{\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{\eta_{44}}{4L^2}\left[\sigma^2\delta^{\nu}{}_{\mu} - 2\eta_{\mu\rho}x^{\nu}x^{\rho}\right]\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right\} \quad . \qquad \text{[II.4.1b]}$$

Vamos escolher $\{x^{\mu}\}$ como sendo as coordenadas cartesianas usuais do espaço-tempo de Minkowski, a saber:

$$x^0 \equiv ct \quad , \qquad \text{[II.4.2a]}$$

$$x^1 \equiv x \quad , \qquad \text{[II.4.2b]}$$

$$x^2 \equiv y \quad , \qquad \text{[II.4.2c]}$$

$$x^3 \equiv z \quad . \qquad \text{[II.4.2d]}$$

Em geral o limite não-relativístico de uma teoria é obtido fazendo-se $c \to \infty$, redefinindo-se apropriadamente as grandezas que apresentarem divergências indesejáveis. Para que possamos proceder desta forma, é necessário reescrevermos os geradores [II.4.1], separando aqueles que possuem componentes temporais. Usando [II.4.2] e [I.1.6], ficamos com:

$$L_{ij} = x^k \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} - \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} \equiv \mathcal{L}_{ij} \ , \tag{II.4.3a}$$

$$L_{i0} = c \left\{ t \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{x^j \delta_{ij}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \equiv c \mathcal{L}_{i0} \ , \tag{II.4.3b}$$

$$L_{i4} = \eta_{44} L \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\eta_{44}}{4L^2} \left[(\delta_{jk} x^j x^k - c^2 t^2) \frac{\partial}{\partial x^i} - 2\delta_{ij} x^j \left(x^k \frac{\partial}{\partial x^k} + t \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \right\} \equiv \eta_{44} L \mathcal{L}_{i4} \ , \tag{II.4.3c}$$

$$L_{04} = \eta_{44} \frac{L}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta_{44}}{4L^2} \left[(\delta_{jk} x^j x^k + c^2 t^2) \frac{\partial}{\partial t} + 2c^2 t x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \right\} \equiv \eta_{44} \frac{L}{c} \mathcal{L}_{04} \ ; \tag{II.4.3d}$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$.

Para garantirmos um bom comportamento dos novos geradores $\left\{ \mathcal{L}_{ij}, \mathcal{L}_{i0}, \mathcal{L}_{i4}, \mathcal{L}_{04} \right\}$ no limite $c \to \infty$, vamos definir um novo parâmetro com dimensão de tempo, dado por:

$$\tau \equiv \frac{L}{c} \ ; \tag{II.4.4}$$

que permanecerá finito neste limite, *i.e.*:

$$\lim_{c \to \infty} \frac{L}{c} = \tau \ . \tag{II.4.5}$$

Usando esta redefinição em [II.4.3], obtemos:

$$\mathcal{L}_{ij} = L_{ij} = x^k \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} - \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} , \qquad [II.4.6a]$$

$$\mathcal{L}_{i0} = \frac{L_{i0}}{c} = t \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2} x^j \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial t} , \qquad [II.4.6b]$$

$$\mathcal{L}_{i4} = \frac{\eta_{44}}{\tau c} L_{i4} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\eta_{44}}{4\tau^2 c^2} \delta_{jk} x^j x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\eta_{44}}{4\tau^2} t^2 \frac{\partial}{\partial x^i} +$$

$$+ \frac{2\eta_{44}}{4\tau^2 c^2} \delta_{ij} x^j x^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{2\eta_{44}}{4\tau^2 c^2} \delta_{ij} x^j t \frac{\partial}{\partial t} , \qquad [II.4.6c]$$

$$\mathcal{L}_{04} = \frac{\eta_{44}}{\tau} L_{04} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta_{44}}{4\tau^2 c^2} \delta_{ij} x^i x^j \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta_{44}}{4\tau^2} t^2 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2\eta_{44}}{4\tau^2} t x^i \frac{\partial}{\partial x^i} . \qquad [II.4.6d]$$

Tomando o limite $c \to \infty$ nos novos geradores [II.4.6], lembrando de [II.4.5], ficamos com:

$$J_{ij} = \lim_{c \to \infty} \mathcal{L}_{ij} = x^k \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} - \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} , \qquad [II.4.7a]$$

$$B_i \equiv \lim_{c \to \infty} \mathcal{L}_{i0} = t \frac{\partial}{\partial x^i} , \qquad [II.4.7b]$$

$$P_i \equiv \lim_{c \to \infty} \mathcal{L}_{i4} = \left(1 + \frac{\eta_{44} t^2}{4\tau^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} , \qquad [II.4.7c]$$

$$T = \lim_{c\to\infty} \mathcal{L}_{04} = \left(1 - \frac{\eta_{44} t^2}{4\tau^2}\right)\frac{\partial}{\partial t} - 2\eta_{44}\frac{t x^i}{4\tau^2}\frac{\partial}{\partial x^i} \quad ; \tag{II.4.7d}$$

que são os geradores da representação cinemática das álgebras de Newton-Hooke, escritos nas coordenadas conformes.

Nota-se claramente que quando tomamos o limite $\tau \to \infty$ nos geradores [II.4.7], estes se reduzem aos bem conhecidos geradores da álgebra do grupo de Galilei [Gilmore, 1974].

Vejamos agora o comportamento das relações de comutação. Quando escrevemos os comutadores das álgebras de de Sitter [I.2.2] em termos dos geradores $\{\mathcal{L}_{ij}, \mathcal{L}_{i0}, \mathcal{L}_{i4}, \mathcal{L}_{04}\}$, dados por [II.4.6], ficamos com:

$$\left[\mathcal{L}_{ij}, \mathcal{L}_{pq}\right] = \delta_{jp}\mathcal{L}_{iq} + \delta_{iq}\mathcal{L}_{jp} - \delta_{jq}\mathcal{L}_{ip} - \delta_{ip}\mathcal{L}_{jq} \quad , \tag{II.4.8a}$$

$$\left[\mathcal{L}_{ij}, \mathcal{L}_{k0}\right] = \delta_{jk}\mathcal{L}_{i0} - \delta_{ik}\mathcal{L}_{j0} \quad , \tag{II.4.8b}$$

$$\left[\mathcal{L}_{ij}, \mathcal{L}_{k4}\right] = \delta_{jk}\mathcal{L}_{i4} - \delta_{ik}\mathcal{L}_{j4} \quad , \tag{II.4.8c}$$

$$\left[\mathcal{L}_{ij}, \mathcal{L}_{04}\right] = 0 \quad , \tag{II.4.8d}$$

$$\left[\mathcal{L}_{i0}, \mathcal{L}_{j0}\right] = \frac{1}{c^2}\mathcal{L}_{ij} \quad , \tag{II.4.8e}$$

$$\left[\mathcal{L}_{i0}, \mathcal{L}_{j4}\right] = \frac{1}{c^2}\delta_{ij}\mathcal{L}_{04} \quad , \tag{II.4.8f}$$

$$\left[\mathcal{L}_{i0}, \mathcal{L}_{04}\right] = -\mathcal{L}_{i4} \quad , \tag{II.4.8g}$$

$$\left[\mathcal{L}_{i4},\mathcal{L}_{j4}\right]=-\frac{\eta_{44}}{\tau^2c^2}\mathcal{L}_{ij}\ ,\qquad [II.4.8h]$$

$$\left[\mathcal{L}_{i4},\mathcal{L}_{04}\right]=-\frac{\eta_{44}}{\tau^2}\mathcal{L}_{i0}\ ,\qquad [II.4.8i]$$

$$\left[\mathcal{L}_{04},\mathcal{L}_{04}\right]=0\ ;\qquad [II.4.8j]$$

que é o caso mais geral possível, dentre as álgebras dos grupos cinemáticos de Bacry e Lévy-Leblond.

Destas expressões pode-se observar que no limite $\tau \to \infty$, obtemos a álgebra do grupo de Poincaré e se tomarmos conjuntamente os limites $\tau \to \infty$ e $c \to \infty$, nesta ordem ou na ordem inversa, obtemos a álgebra do grupo de Galilei, sempre com os geradores apropriados.

Obtenhamos agora as álgebras dos grupos de Newton-Hooke, tomando o limite $c \to \infty$ nos comutadores [II.4.8]. Assumindo as redefinições [II.4.7], e mais que:

$$J_{ij} \equiv -\varepsilon_{ijk} J_k\ ;\qquad [II.4.9]$$

obtemos explicitamente as álgebras de Newton-Hooke, a saber:

$$\left[J_i, J_j\right]=\varepsilon_{ijk} J_k\ ,\qquad [II.4.10a]$$

$$\left[J_i, B_j\right]=\varepsilon_{ijk} B_k\ ,\qquad [II.4.10b]$$

$$\left[J_i, P_j\right]=\varepsilon_{ijk} P_k\ ,\qquad [II.4.10c]$$

$$[J_i, T] = 0 \ , \qquad [II.4.10d]$$

$$[B_i, B_j] = 0 \ , \qquad [II.4.10e]$$

$$[B_i, P_j] = 0 \ , \qquad [II.4.10f]$$

$$[B_i, T] = -P_i \ , \qquad [II.4.10g]$$

$$[P_i, P_j] = 0 \ , \qquad [II.4.10h]$$

$$[P_i, T] = -\frac{\eta_{44}}{\tau^2} B_i \ , \qquad [II.4.10i]$$

$$[T, T] = 0 \ ; \qquad [II.4.10j]$$

em perfeito acordo com o que apresentamos na seção II.2.

Conforme podemos ver nas relações de comutação [II.4.10], a subálgebra gerada pelos { P_i , B_i } constitui uma subálgebra invariante abeliana das álgebras de Newton-Hooke. Vemos assim que estas álgebras de Newton-Hooke não são semi-simples. Isto pode ser encarado como conseqüência do fato de estas últimas serem contrações de Inönü-Wigner das álgebras de de Sitter (*cf.* seção I.3).

Note-se ainda que [II.4.10i] são as únicas relações de comutação que diferenciam as álgebras de Newton-Hooke da de Galilei. A álgebra de Galilei pode ser obtida tomando-se o limite $\tau \to \infty$ nos comutadores [II.4.10].

III - REPRESENTAÇÃO PARA OS GRUPOS DE NEWTON-HOOKE E OUTROS GRUPOS CINEMÁTICOS

III.1 - Expressões Fechadas para Transformações Finitas

Apesar de há muito lidarmos com alguns desses grupos cinemáticos apresentados no capítulo anterior, como o grupo de Poincaré , só recentemente [Aldrovandi *et al.*, 1996] nos foi apresentada uma representação da transformação geral deste grupo (envolvendo conjuntamente rotações, boosts e translações) . A ausência de tais expressões na literatura é provavelmente justificada pelo fato de os autores considerarem suficiente, do ponto de vista didático, a apresentação isolada das transformações que constituem um tal grupo. É verdade que a lei de composição de um grupo cinemático pode ser obtida sem a necessidade do conhecimento da expressão fechada do elemento genérico do grupo [Bacry e Lévy-Leblond, 1968]. Entretanto, não podemos negar o interesse na obtenção do elemento genérico a partir do qual poderíamos estudar, por exemplo, como se dá a composição das transformações individuais que constituem os grupos cinemáticos.

Conforme mencionado na seção I.2, podemos expressar o elemento genérico G de um grupo de Lie , como a exponencial do elemento genérico A da álgebra de Lie deste grupo de Lie, *i.e.* :

$$G = e^A = I + A + (½)\, A^2 + \dots + (1/n!)\, A^n + \dots \quad , \qquad [III.1.1]$$

onde I denota a matriz identidade.

Olhando-se inadvertidamente para a expressão acima, poderíamos pensar que precisamos calcular as infinitas potências do elemento A para podermos obter uma forma fechada para G. No entanto, quando pensamos em termos das representações matriciais das álgebras e grupos de Lie, uma luz é projetada sobre este processo infinitamente laborioso; na verdade, só as primeiras potências da matriz A precisarão ser determinadas, pois encontramos uma relação de recorrência que nos permitirá escrever as potências de ordem superior em termos das de ordem mais baixa.

Um bom exemplo do que acabamos de dizer é um conhecido resultado envolvendo as matrizes de Pauli, dadas por:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \qquad [III.1.2]$$

Podemos escrever a forma fechada para um elemento genérico do grupo SU(2), através da exponencial do elemento genérico da álgebra, como:

$$\exp\left\{\omega_k \; \frac{\sigma_k}{2}\right\} = I \cosh\left(\frac{w}{2}\right) + \frac{1}{w}\,\omega_k\,\sigma_k \;\operatorname{senh}\left(\frac{w}{2}\right) \quad , \qquad [III.1.3]$$

com k = 1,2,3 ; e $w \equiv \sqrt{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 + (\omega_3)^2}$.

O resultado simples expresso por [III.1.3] é uma conseqüência direta de uma propriedade do produto entre matrizes de Pauli, a saber:

$$\sigma_j\,\sigma_k = I\,\delta_{jk} + i\,\varepsilon_{jkl}\,\sigma_l \quad ; \quad j, k, l = 1, 2, 3 \quad ; \qquad [III.1.4]$$

o que nos permite obter por indução a expressão final [III.1.3], já a partir dos primeiros termos da série infinita [III.1.1] .

Vejamos a seguir, lembrando alguns conceitos concernentes a funções de matrizes, como abreviar o cálculo de exponenciais de matrizes com certas características especiais.

III.2 - Funções de Matrizes †

Seja A uma matriz quadrada de ordem N, definida sobre um corpo $\mathbb{K}$. Consideremos a ação de A sobre o espaço vetorial $\mathbb{K}^N$, formado pelos vetores (matrizes coluna) $|\chi\rangle$, A: $\mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é chamado *valor característico* ou *autovalor* de A, se existe um vetor não nulo $|\lambda\rangle \in \mathbb{K}^N$, para o qual :

$$A\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle \quad . \qquad \text{[III.2.1]}$$

Todo vetor que satisfaça esta relação é chamado *vetor característico* ou *autovetor* de A associado ao autovalor λ . Ao conjunto de todos os autovalores da matriz A chamaremos de *espectro* de A e denotaremos por SpA.

Chamaremos de *matriz característica* de A à matriz (λI-A). O determinante da matriz característica:

$$\Delta(\lambda) \equiv \det(\lambda I\text{-}A) \quad , \qquad \text{[III.2.2]}$$

será um polinômio de grau N em λ, ao qual chamaremos de *polinômio característico* de A. As raízes deste polinômio característico são justamente os valores característicos de A. À equação cujas soluções são os autovalores de A,

$$\Delta(\lambda) = 0 \quad ,$$

chamaremos de *equação característica* ou *equação secular* de A.

Um autovalor λ é dito *não-degenerado* ou *simples* quando a ele corresponder um, e somente um, autovetor $|\lambda\rangle$ (a menos de um fator multiplicativo constante). Por outro lado, se cxistirem pelo menos dois autovetores linearmente

† Nesta seção não adotaremos a convenção de soma de Einstein e todas as somatórias, quando existirem, serão explicitadas.

independentes de A correspondentes a um mesmo autovalor, então este autovalor é dito *degenerado*.

Por simplicidade, só trataremos nesta seção o caso de matrizes para as quais todos seus autovalores são não-degenerados (i.e. , matrizes com espectro não-degenerado) , pois esta situação se verificará para os exemplos mais importantes que veremos aqui. Quando este for o caso, sempre poderemos escolher como base ortonormal para $\mathbb{K}^N$ um conjunto de autovetores $\left\{ |\lambda_j\rangle \right\}$ de A associados aos respectivos autovalores não-degenerados λ_j ; $j = 1,2, ..., N$.

Em termos dos seus autovalores, o polinômio característico de A pode ser escrito como:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) \ldots (\lambda-\lambda_N) \quad . \qquad [III.2.3]$$

De acordo com um teorema da análise matricial [Gantmacher, 1960], se uma função f(z) pode ser expandida em série se potências num círculo de convergência $|z-z_0| < r$, a saber :

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p (z-z_0)^p \quad ; \qquad [III.2.4]$$

então esta expansão permanece válida quando a variável (escalar) complexa z é substituída por uma matriz A e o número complexo z_0 é substituído pela matriz Iz_0 , desde que os autovalores de A estejam todos no interior do círculo de convergência desta expansão em série de f(z).

Assim, a função f(A) da matriz A será dada por :

$$f(A) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p (A-Iz_0)^p \quad , \qquad [III.2.5]$$

que terá sentido sempre que os autovalores de A estiverem na região de convergência da expansão de f(z).

A função exponencial em que estamos especialmente interessados figura como um caso particular do teorema anterior. Como a função exponencial é analítica para todo valor de $z \in \mathbb{C}$, então a expansão desta função em série de Maclaurin, a saber:

$$e^{z} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} z^{p} \quad , \qquad [III.2.6]$$

será válida em todo plano complexo, *i.e.* , seu círculo de convergência terá raio infinito (*cf.* [Churchill, 1975]). Desta forma , o desenvolvimento

$$e^{A} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^{p} \quad , \qquad [III.2.7]$$

é válido qualquer que seja a matriz quadrada A, o que justifica [III.1.1].

Vamos agora aos projetores . No caso em que a matriz quadrada A, de ordem N, possui um espectro não-degenerado, vale a *relação de fechamento* ("closure relation"):

$$I = \sum_{j=1}^{N} \left|\lambda_j\right\rangle \left\langle\lambda_j\right| \quad . \qquad [III.2.8]$$

Da ortogonalidade da base formada pelos autovetores de A , $\left\{ \left|\lambda_j\right\rangle \right\}$, a saber:

$$\left\langle\lambda_i \middle| \lambda_j\right\rangle = \delta_{ij} \quad ; \quad i,j = 1,2, \ldots, N \; ; \qquad [III.2.9]$$

conclui-se que o conjunto $\{Z_j [A] \; ; \; j = 1,2, \ldots , N \}$, com :

$$Z_j[A] \equiv |\lambda_j\rangle\langle\lambda_j| \quad , \qquad [III.2.10]$$

constitui um conjunto de projetores , i.e. , $(Z_j)^2 = Z_j$. Além disso, os Z_j podem ser escolhidos tais que $Tr(Z_j) = 1$, de forma que sejam ortonormais pelo traço, $Tr\,(Z_i\, Z_j) = \delta_{ij}$, para todo i e j de 1 até N.

Agindo com a matriz A, pela esquerda, sobre a relação de fechamento [III.2.8] segue diretamente, usando [III.2.1], que :

$$A = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j Z_j [A] \quad . \qquad [III.2.11]$$

Pode-se mostrar que a função f[A] , a qual por hipótese pode ser expandida em série de potências da matriz A, pode ainda ser reescrita em função dos projetores de A como :

$$f(A) = \sum_{j=1}^{N} f(\lambda_j) Z_j [A] \quad . \qquad [III.2.12]$$

Note-se que, embora o conjunto de projetores { Z_j [A] } dependa da matriz A, eles são os mesmos para todas as funções f (A).

No caso da exponencial de A, [III.2.7], ficamos com a matriz :

$$e^A = \sum_{j=1}^{N} e^{\lambda_j} Z_j [A] \quad . \qquad [III.2.13]$$

O teorema da Cayley-Hamilton [Gantmacher, 1960] nos diz que toda matriz quadrada A satisfaz sua equação característica, i.e. :

$$\Delta(A) = (A - I\lambda_1)(A - I\lambda_2) \ldots (A - I\lambda_N) = 0 \quad . \qquad [III.2.14]$$

Sendo assim, somente as potências de A (matriz quadrada NxN) até a ordem N-1 serão independentes e as potências de ordem igual ou superior a N poderão ser escritas em termos das potências inferiores.

Fazendo uso de [III.2.12] para escrever as potências independentes de A, obtemos:

$$I = \sum_{j=1}^{N} Z_j \;;\; A = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j Z_j \;;\; A^2 = \sum_{j=1}^{N} (\lambda_j)^2 Z_j \;;\ldots;\; A^{N-1} = \sum_{j=1}^{N} (\lambda_j)^{N-1} Z_j \,. \qquad \text{[III.2.15]}$$

Estas equações constituem um sistema de equações matriciais lineares com número de equações igual ao número de incógnitas. Sendo A uma matriz não degenerada, podemos usar a regra de Cramer [Bellman, 1960] para obter uma forma fechada para os projetores $Z_j[A]$. Pelo fato das matrizes que constituem o sistema de equações [III.2.15] serem matrizes de Vandermonde, obtém-se diretamente que:

$$Z_j\,[A] = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} \frac{(A-\lambda_k)}{(\lambda_j-\lambda_k)} \quad . \qquad \text{[III.2.16]}$$

Temos então os projetores escritos como polinômios em A, cujos coeficientes dependem dos autovalores desta matriz. Como, desde o início, estamos admitindo somente matrizes A com espectro não-degenerado , não há problemas com [III.2.16].

Conseqüentemente , a função f(A) , para a qual valha [III.2.5] e satisfazendo a condição de convergência , pode ser escrita como :

$$f[A] = \sum_{j=1}^{N} f(\lambda_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} \frac{(A-\lambda_k)}{(\lambda_j-\lambda_k)} \quad . \qquad \text{[III.2.17]}$$

Como caso particular, a função exponencial de A, [III.2.13], ficará :

$$e^{A} = \sum_{j=1}^{N} e^{\lambda_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} \frac{(A-\lambda_k)}{(\lambda_j-\lambda_k)} \quad . \qquad [III.2.18]$$

Esta expressão é válida para toda matriz quadrada A de ordem N com autovalores não-degenerados. Este será o caso de alguns dos grupos cinemáticos, como os de de Sitter , de Poincaré e de Newton-Hooke ; mas não o de outros como o de Galilei.

III.3 - Uma Representação para as Álgebras de de Sitter

Pensemos nas coordenadas cartesianas { ξ^a ; a = 0, 1, 2, 3, 4 } do espaço a cinco dimensões como constituindo um vetor coluna , a saber :

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \\ \xi^4 \end{bmatrix} \quad . \qquad [III.3.1]$$

Nessa notação , as superfícies que constituem os espaços-tempos de de Sitter, [I.1.5], podem ser escritas como :

$$\xi^T \eta \, \xi = \eta_{44} L^2 \quad , \qquad [III.3.2]$$

onde η é a matriz quadrada da métrica, com componentes dadas por [I.1.6].

Pensemos nos grupos de de Sitter como atuando sobre as coordenadas ξ . Sendo G um elemento genérico destes grupos, podemos escrever o vetor transformado como:

$$\xi' = G \, \xi \quad . \qquad [III.3.3]$$

Como os grupos de de Sitter preservam a forma bilinear dada por [III.3.2], concluímos que :

$$G^T \eta \, G = \eta \quad . \qquad [III.3.4]$$

Escrevendo um elemento genérico destes grupos como a exponencial de um clemento genérico da respectiva álgebra, $G = e^A$, chegamos até a seguinte condição para os elementos da álgebra :

$$A^T = - \eta A \eta^{-1} \quad . \qquad [III.3.5]$$

Esta condição é comum a todas as álgebras de grupos ortogonais ou pseudo-ortogonais.

Desta forma, um elemento genérico das álgebras de de Sitter será dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} \\ A_{01} & 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{02} & -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24} \\ A_{03} & -A_{13} & -A_{23} & 0 & A_{34} \\ \eta_{44}A_{04} & -\eta_{44}A_{14} & -\eta_{44}A_{24} & -\eta_{44}A_{34} & 0 \end{bmatrix} . \qquad [III.3.6]$$

Já preparando para os processos de contração que serão efetuados posteriormente , escreveremos as coordenadas ξ^a em termos das coordenadas conformes x^μ , usando as expressões [I.1.10]. Como coordenadas x^μ utilizaremos as *coordenadas minkowskianas* [II.4.2]. Sendo assim, ficamos com :

$$\xi = \begin{bmatrix} \phi\, c\, t \\ \phi\, x \\ \phi\, y \\ \phi\, z \\ L\,(1 - 2\phi) \end{bmatrix} .$$

Claro está que estas coordenadas têm um comportamento extremamente indesejável tanto no limite $L \to \infty$, como quando $c \to \infty$. Para remediarmos o problema, efetuaremos a mudança para as coordenadas apropriadas a estas contrações . Admitindo a redefinição dada por [II.4.4] e [II.4.5], e ainda que a matriz que efetua a mudança das coordenadas só possa depender de parâmetros constantes, chegamos até :

$$\xi^C = S\, \xi \quad , \qquad [III.3.7]$$

com :

$$S \equiv \mathrm{diag}\,[\,1/c\,,1\,,1\,,1\,,-1/L\,] \quad . \tag{III.3.8}$$

Assim:

$$\xi^C = \begin{bmatrix} \phi\, t \\ \phi\, x \\ \phi\, y \\ \phi\, z \\ 2\phi - 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{III.3.9a}$$

onde :

$$\phi = \left[1 - \frac{\eta_{44}\, t^2}{4\tau^2} + \eta_{44} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4c^2\, \tau^2} \right]^{-1} \quad . \tag{III.3.9b}$$

Feito isso , garantimos um bom comportamento para ξ^C em ambas as contrações . No limite $c \to \infty$, ficamos com :

$$\varphi \equiv \lim_{c \to \infty} \phi = \left[1 - \eta_{44} \left(\frac{t}{2\tau} \right)^2 \right]^{-1} \quad , \tag{III.3.10a}$$

$$\xi^{NH} \equiv \lim_{c \to \infty} \xi^C = \begin{bmatrix} \varphi\, t \\ \varphi\, x \\ \varphi\, y \\ \varphi\, z \\ 2\,\varphi - 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{III.3.10b}$$

Já no limite $\tau \to \infty$, temos :

$$\lim_{\tau \to \infty} \phi = 1 \quad , \tag{III.3.11a}$$

$$\xi^P \equiv \lim_{\tau \to \infty} \xi^C = \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{III.3.11b}$$

Claro também está que :

$$\lim_{\substack{\tau\to\infty \\ c\to\infty}} \phi = 1 \quad \text{e} \quad \xi^G \equiv \lim_{\substack{c\to\infty \\ \tau\to\infty}} \xi^C = \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \qquad [III.3.12]$$

Desta forma , multiplicando-se [III.3.3] pela direita por S e inserindo convenientemente a matriz identidade $I = S^{-1} S$, obtemos :

$$\xi'^{\,C} = S\; G\; S^{-1}\, \xi^C \equiv G^C \xi^C \quad , \qquad [III.3.13]$$

onde $\xi'^{\,C} \equiv S\,\xi'$.

É fácil mostrar que se $G^C \equiv S\,G\,S^{-1}$ e $G = \exp{(A)}$, então podemos escrever :

$$G^C = \exp{(A^C)} \quad , \qquad [III.3.14a]$$

onde:

$$A^C = S\,A\,S^{-1} \quad . \qquad [III.3.14b]$$

Definindo $s \equiv \eta_{44}$ para não sobrecarregar a notação, podemos escrever:

$$A^C = \begin{bmatrix} 0 & A_{01}/c & A_{02}/c & A_{03}/c & -\tau A_{04} \\ cA_{01} & 0 & A_{12} & A_{13} & -\tau c A_{14} \\ cA_{02} & -A_{12} & 0 & A_{23} & -\tau c A_{24} \\ cA_{03} & -A_{13} & -A_{23} & 0 & -\tau c A_{34} \\ -sA_{04}/\tau & +sA_{14}/c\tau & +sA_{24}/c\tau & +sA_{34}/c\tau & 0 \end{bmatrix} \quad . \qquad [III.3.15]$$

Precisamos ainda reparametrizar convenientemente A^C , para que esta represente corretamente as álgebras dos grupos cinemáticos apropriados , após as devidas contrações. Esta reparametrização é dada por :

$$A_{0i} \equiv -v_i / c \quad , \qquad [III.3.16a]$$

$$A_{ij} \equiv -\varepsilon_{ijk}\, \omega_k \quad , \qquad [III.3.16b]$$

$$A_{i4} \equiv -a_i \,/\, (c\tau) \quad , \qquad [III.3.16c]$$

$$A_{04} \equiv -b \,/\, \tau \quad . \qquad [III.3.16d]$$

Sendo assim, ficamos com:

$$A^C = \begin{bmatrix} 0 & -v_1/c^2 & -v_2/c^2 & -v_3/c^2 & b \\ -v_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 & a_1 \\ -v_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 & a_2 \\ -v_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 & a_3 \\ s\,b/\tau^2 & -s\,a_1/c^2\tau^2 & -s\,a_2/c^2\tau^2 & -s\,a_3/c^2\tau^2 & 0 \end{bmatrix} . \qquad [III.3.17]$$

Aqui podemos encarar os ω_i como parâmetros das rotações espaciais, os v_i como parâmetros dos *boosts* de de Sitter, os a_i como parâmetros das translações espaciais generalizadas de de Sitter, e o b como parâmetro associado à translação temporal generalizada de de Sitter.

A expressão [III.3.17] fornece uma representação (matricial) para um elemento genérico das álgebras de de Sitter, com a vantagem de já estar na parametrização adequada, que permite os processos de contração simples de Inönü-Wigner esquematizados na figura II.2, aqui resumidos à tomada dos limites convenientes.

Pode-se verificar que:

$$A^P = \lim_{\tau\to\infty} A^C \quad , \qquad [III.3.18a]$$

fornece uma representação para o elemento genérico da álgebra de Poincaré (que pode ser encontrado em [Aldrovandi *et al.* , 1996] , a menos de uma transformação de similaridade); e que :

$$A^G = \lim_{\substack{\tau\to\infty \\ c\to\infty}} A^C = \lim_{c\to\infty} A^P \quad , \qquad [III.3.18b]$$

fornece uma representação para o elemento genérico da álgebra de Galilei (que pode ser encontrada em [Aldrovandi , 1996]).

III.4 - Elemento Genérico e Lei de Composição dos Grupos de Newton-Hooke

Neste trabalho estamos particularmente interessados nos grupos de Newton-Hooke, que descrevem um universo cosmológico (algumas tranformações que compõem estes grupos acusam um efeito global devido à sua curvatura) e não-relativístico. Como um passo importante rumo ao entendimento destes grupos, vamos nesta seção obter uma representação para o elemento genérico dos mesmos, utilizando o *método dos projetores* exposto na seção III.2 , partindo do elemento genérico das álgebras destes grupos, a saber:

$$A^{NH} = \lim_{c \to \infty} A^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ -v_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 & a_1 \\ -v_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 & a_2 \\ -v_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 & a_3 \\ s\,b/\tau^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \qquad [III.4.1]$$

Sim, pois, uma vez que o limite da exponencial é a exponencial do limite, podemos escrever :

$$G^{NH} = \lim_{c \to \infty} G^C = \lim_{c \to \infty} \left[\exp\left(A^C\right)\right] = \exp\left[\lim_{c \to \infty} \left(A^C\right)\right] = \exp\left(A^{NH}\right) \quad , \qquad [III.4.2]$$

onde fizemos uso de [III.3.12a] e [III.4.1]. Sendo assim, podemos exponenciar diretamente o elemento das álgebras de Newton-Hooke, [III.4.1], para obter o elemento genérico destes grupos; isso resulta ser extremamente mais simples do que exponenciar o elemento genérico das álgebras de de Sitter e só então tomar o limite que conduz aos grupos de Newton-Hooke.

Passemos então à exponencial de [III.4.1]. A equação característica de A^{NH} é dada por :

$$\det\left(\lambda I - A^{NH}\right) = \lambda^5 + \left(w^2 - \frac{s\,b^2}{\tau^2}\right)\lambda^3 - \frac{s\,b^2\,w^2}{\tau^2}\,\lambda = 0 \quad , \qquad [III.4.3]$$

onde:

$$w \equiv \sqrt{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 + (\omega_3)^2} \quad . \qquad [III.4.4]$$

Os autovalores de A^{NH}, todos distintos, são :

$$\lambda_0 = 0 \quad , \qquad [III.4.5a]$$

$$\lambda_1 = +i\,w \quad , \qquad [III.4.5b]$$

$$\lambda_2 = -\,iw \quad , \qquad [III.4.5c]$$

$$\lambda_3 = \kappa \quad , \qquad [III.4.5d]$$

$$\lambda_4 = -\kappa \quad , \qquad [III.4.5e]$$

com

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{s}\ b}{\tau} \quad . \qquad [III.4.6]$$

Fazendo uso da expansão em projetores da função exponencial de uma matriz não-degenerada , dada por [III.2.13] obtemos:

$$G^{NH} = Z_0 + (Z_1 + Z_2)\cos w + i\,(Z_1 - Z_2)\mathrm{sen}\, w + (Z_3 + Z_4)\cosh \kappa + (Z_3 - Z_4)\mathrm{senh}\, \kappa \quad . \qquad [III.4.7]$$

Note-se que no caso de anti-de Sitter, para o qual s = -1, temos que $\kappa \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ (i.e., κ é um número imaginário puro). Neste caso , podemos definir $\kappa \equiv i\,k$, com $k \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $\cosh \kappa \to \cos \kappa$ e $\mathrm{senh}\, \kappa \to i\,\mathrm{sen}\, \kappa$.

Usando [III.2.16], obtemos a forma explícita dos projetores, a saber:

$$Z_0 = -\,\frac{(A^2 + w^2)\,(A^2 - \kappa^2)}{w^2\kappa^2} \quad , \qquad [III.4.8a]$$

$$Z_1 = \frac{A(A + iw)\,(A^2 - \kappa^2)}{2w^2\,(\kappa^2 + w^2)} \quad , \qquad [III.4.8b]$$

$$Z_2 = \frac{A(A - iw)\,(A^2 - \kappa^2)}{2w^2\,(\kappa^2 + w^2)} \quad , \qquad [III.4.8c]$$

$$Z_3 = \frac{A\,(A^2 + w^2)\,(A + \kappa)}{2\kappa^2\,(\kappa^2 + w^2)} \quad , \qquad [III.4.8d]$$

$$Z_4 = \frac{A\,(A^2 + w^2)\,(A - \kappa)}{2\kappa^2\,(\kappa^2 + w^2)} \quad . \qquad [III.4.8e]$$

Podemos então reescrever [III.4.7] como:

$$G^{NH}(\omega_i, v_i, a_i, b) = I + \frac{A^2(\kappa^2 - w^2) - A^4}{w^2\kappa^2} + \frac{1}{(\kappa^2 + w^2)}\left[\frac{(A^4 - A^2\kappa^2)}{w^2}\cos w + \right. \quad . \qquad [III.4.9]$$

$$\left. - \frac{(A^3 - A\kappa^2)}{w}\,\mathrm{sen}\, w + \frac{(A^4 + A^2 w^2)}{\kappa^2}\cosh\kappa + \frac{(A^3 + A w^2)}{\kappa}\,\mathrm{senh}\,\kappa \right]$$

Vamos agora apresentar as potências A^2 , A^3 e A^4 ; calculadas a partir de [III.4.1], com o auxílio do programa computacional *Mathematica*™ . Iniciemos por apresentar algumas quantidades auxiliares, que servem para abreviar as expressões das potências da matriz A, a saber:

$$m_i \equiv \varepsilon_{ijk}\ \omega_j\, v_k \quad , \qquad [III.4.10a]$$

$$n_i \equiv \varepsilon_{ijk}\ \omega_j\, a_k \quad , \qquad [III.4.10b]$$

$$M_i \equiv \frac{\kappa^2}{b}\, a_i - m_i \quad , \qquad [III.4.10c]$$

$$N_i \equiv n_i - b\, v_i \quad . \qquad [III.4.10d]$$

Fazendo uso destas expressões [III.4.10], assim como de [III.4.6], podemos escrever:

$$
A^2 = \begin{bmatrix}
s\,b^2/\tau^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
M_1 & \omega_1{}^2 - w^2 & \omega_1\omega_2 & \omega_1\omega_3 & N_1 \\
M_2 & \omega_1\omega_2 & \omega_2{}^2 - w^2 & \omega_2\omega_3 & N_2 \\
M_3 & \omega_1\omega_3 & \omega_2\omega_3 & \omega_3{}^2 - w^2 & N_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & s\,b^2/\tau^2
\end{bmatrix}, \qquad [\mathrm{III}.4.11]
$$

$$
A^3 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & s\,b^3/\tau^2 \\
\begin{matrix} -\omega_1(v_i\omega_i) + v_1 w^2 + \\ + \dfrac{\kappa^2}{b} N_1 \end{matrix} & 0 & \omega_3 w^2 & -\omega_2 w^2 & \begin{matrix} \omega_1(a_i\omega_i) - a_1 w^2 + \\ + bM_1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} -\omega_2(v_i\omega_i) + v_2 w^2 + \\ + \dfrac{\kappa^2}{b} N_1 \end{matrix} & -\omega_3 w^2 & 0 & \omega_1 w^2 & \begin{matrix} \omega_2(a_i\omega_i) - a_2 w^2 + \\ + bM_2 \end{matrix} \\
\begin{matrix} -\omega_3(v_i\omega_i) + v_3 w^2 + \\ + \dfrac{\kappa^2}{b} N_3 \end{matrix} & \omega_2 w^2 & -\omega_1 w^2 & 0 & \begin{matrix} \omega_3(a_i\omega_i) - a_3 w^2 + \\ + bM_3 \end{matrix} \\
b^3/\tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}, \quad [\mathrm{III}.4.12]
$$

$$
A^4 = \begin{bmatrix}
b^4/\tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\begin{array}{l}\frac{\kappa^2 \omega_1}{b}(\omega_i a_i) + \\ +(\kappa^2 - w^2) M_1\end{array} & (w^2 - \omega_1{}^2) w^2 & -\omega_1 \omega_2 w^2 & -\omega_1 \omega_3 w^2 & \begin{array}{l}-b\omega_1(\omega_i v_i) + \\ +(\kappa^2 - w^2) N_1\end{array} \\
\begin{array}{l}\frac{\kappa^2 \omega_2}{b}(\omega_i a_i) + \\ +(\kappa^2 - w^2) M_2\end{array} & -\omega_1 \omega_2 w^2 & (w^2 - \omega_2{}^2) w^2 & -\omega_2 \omega_3 w^2 & \begin{array}{l}-b\omega_2(\omega_i v_i) + \\ +(\kappa^2 - w^2) N_2\end{array} \\
\begin{array}{l}\frac{\kappa^2 \omega_3}{b}(\omega_i a_i) + \\ +(\kappa^2 - w^2) M_3\end{array} & -\omega_1 \omega_3 w^2 & -\omega_2 \omega_3 w^2 & (w^2 - \omega_3{}^2) w^2 & \begin{array}{l}-b\omega_3(\omega_i v_i) + \\ +(\kappa^2 - w^2) N_3\end{array} \\
0 & 0 & 0 & 0 & b^4/\tau^4
\end{bmatrix} \quad .[III.4.13]
$$

Basta então substituirmos estas potências de A em [III.4.9] para obtermos a expressão fechada de G^{NH}. Antes disso, porém, vamos definir outras expressões auxiliares , a saber:

$$
B_i \equiv \frac{1}{b(\kappa^2 + w^2)} (\omega_j a_j)\, \omega_i \quad , \qquad [III.4.14a]
$$

$$
C_i \equiv \frac{-1}{(\kappa^2 + w^2)} b\, (\omega_j v_j)\, \omega_i \quad , \qquad [III.4.14b]
$$

$$
Q_i \equiv \frac{1}{(\kappa^2 + w^2)} N_i \quad , \qquad [III.4.14c]
$$

$$
E_i \equiv \frac{1}{(\kappa^2 + w^2)} M_i \quad , \qquad [III.4.14d]
$$

$$X_i \equiv \frac{1}{b}\left(C_i + \kappa Q_i\right) \qquad , \qquad [III.4.14e]$$

$$Y_i \equiv b\left(B_i + E_i\right) \qquad . \qquad [III.4.14f]$$

Assumindo estas definições , escrevemos o elemento genérico dos grupos de Newton-Hooke como:

$$G^{NH} = \begin{bmatrix} \cosh\left[\frac{\sqrt{s}\,b}{\tau}\right] & 0 & 0 & 0 & \frac{\tau}{\sqrt{s}}\operatorname{senh}\left[\frac{\sqrt{s}\,b}{\tau}\right] \\ V_1 & R_{11} & R_{12} & R_{13} & D_1 \\ V_2 & R_{21} & R_{22} & R_{23} & D_2 \\ V_3 & R_{31} & R_{32} & R_{33} & D_3 \\ \frac{\sqrt{s}}{\tau}\operatorname{senh}\left[\frac{\sqrt{s}\,b}{\tau}\right] & 0 & 0 & 0 & \cosh\left[\frac{\sqrt{s}\,b}{\tau}\right] \end{bmatrix} \quad ; \qquad [III.4.15]$$

onde :

$$V_i \equiv \frac{-(\kappa^2+w^2)}{w^2}B_i + \left(\frac{\kappa^2}{w^2}B_i - E_i\right)\cos w - \frac{1}{w}\left(X_i + v_i\right)\operatorname{sen} w + \qquad [III.4.16a]$$
$$+ \left(B_i + E_i\right)\cosh\kappa + \frac{X_i}{\kappa}\operatorname{senh}\kappa \qquad ,$$

$$D_i \equiv \frac{-(\kappa^2+w^2)}{w^2}C_i + \left(\frac{1}{w^2}C_i - Q_i\right)\cos w - \frac{1}{w}\left(Y_i + a_i\right)\operatorname{sen} w + \qquad [III.4.16b]$$
$$+ \left(\frac{1}{\kappa^2}C_i + Q_i\right)\cosh\kappa + \frac{Y_i}{\kappa}\operatorname{senh}\kappa \qquad ,$$

e os R_{ij} são os elementos da matriz genérica do grupo de rotações SO(3), compatível com a parametrização que estamos utilizando. Nessa parametrização esta matriz, que representa uma rotação espacial arbitrária, é dada por :

$$\left[R_{ij}\right]_{3x3} = \begin{bmatrix} \left[1-\left(\frac{\omega_1}{w}\right)^2\right]\cos w + \left(\frac{\omega_1}{w}\right)^2 & \frac{\omega_1\omega_2(1-\cos w)}{w^2} - \frac{\omega_3}{w}\operatorname{sen} w & \frac{\omega_1\omega_2(1-\cos w)}{w^2} + \frac{\omega_2}{w}\operatorname{sen} w \\ \frac{\omega_1\omega_2(1-\cos w)}{w^2} + \frac{\omega_3}{w}\operatorname{sen} w & \left[1-\left(\frac{\omega_2}{w}\right)^2\right]\cos w + \left(\frac{\omega_2}{w}\right)^2 & \frac{\omega_2\omega_3(1-\cos w)}{w^2} - \frac{\omega_1}{w}\operatorname{sen} w \\ \frac{\omega_1\omega_3(1-\cos w)}{w^2} - \frac{\omega_2}{w}\operatorname{sen} w & \frac{\omega_2\omega_3(1-\cos w)}{w^2} + \frac{\omega_1}{w}\operatorname{sen} w & \left[1-\left(\frac{\omega_3}{w}\right)^2\right]\cos w + \left(\frac{\omega_3}{w}\right)^2 \end{bmatrix} \qquad .[III.4.17]$$

Note-se que os V_i e os D_i apresentam-se como funções complicadas dos parâmetros (ω_i , v_i , a_i ,b) da álgebra , dados em [III.4.1]. Isto resulta das sucessivas ações da matriz A sobre si mesma, à medida que consideramos potências cada vez mais elevadas na exponencial do elemento da álgebra.

Para simplificarmos os resultados que apresentamos a seguir , utilizaremos a parametrização [III.4.15] para o elemento genérico dos grupos de Newton-Hooke, *i.e.* :

$$G^{NH} = G^{NH}(R_{ij}, V_i, D_i, b) \qquad ; \qquad [III.4.18]$$

embora, sempre que for preciso, podemos lançar mão das relações entre estes novos parâmetros (R_{ij} , V_i , D_i ,b) e aqueles utilizados na expressão [III.4.1] do elemento genérico das álgebras de Newton-Hooke, (ω_i, v_i , a_i ,b). Utilizando as definições [III.4.16], [III.4.14], [III.4.10], [III.4.6] e [III.4.4], obtemos as transformações entre os parâmetros convenientes para os grupos e para as álgebras, a saber:

$$V_i = V_i(\omega_i, v_i, a_i, b) \qquad , \qquad [III.4.19a]$$

$$D_i = D_i(\omega_i, v_i, a_i, b) \qquad , \qquad [III.4.19b]$$

e R_{ij} é dado em termos dos ω_i por [III.4.17].

A lei de composição dos grupos de Newton-Hooke na parametrização [III.4.18] é obtida quando multiplicamos dois elementos na forma de matrizes do tipo de [III.4.15]. Fazendo isso:

$$G^{NH}\left(R''_{ik}, V''_i, D''_i, b''\right) = G^{NH}\left(R'_{ij}, V'_i, D'_i, b'\right) G^{NH}\left(R_{jk}, V_j, D_j, b\right) , \qquad [III.4.20]$$

obtemos :

$$R''_{ik} = R'_{ij} R_{jk} \qquad , \qquad [III.4.21a]$$

$$V''_i = V'_i \cosh\left[\frac{\sqrt{s}\,b}{\tau}\right] + R'_{ij} V_j + \frac{D'_i \sqrt{s}}{\tau} \operatorname{senh}\left[\frac{\sqrt{s}\,b}{\tau}\right] \qquad , \qquad [III.4.21b]$$

$$D''_i = \frac{V'_i \tau}{\sqrt{s}} \operatorname{senh}\left[\frac{\sqrt{s}\,b}{\tau}\right] + R'_{ij} D_j + D'_i \cosh\left[\frac{\sqrt{s}\,b}{\tau}\right] \qquad , \qquad [III.4.21c]$$

$$b'' = b' + b \qquad ; \qquad [III.4.21d]$$

onde chamamos atenção para a aditividade dos parâmetros das translações temporais generalizadas e para a lei simples de composição das rotações espaciais, dadas respectivamente por [III.4.21d] e [III.4.21a]. Em contrapartida, devemos notar a complicada composição dos *boosts* de Newton-Hooke e das translações espaciais generalizadas, dadas por [III.4.21b] e [III.4.21c], respectivamente.

A lei de composição dos grupos de Newton-Hooke explicitada pelas relações [III.4.21] já havia sido apresentada anteriormente [Bacry e Lévy-Leblond, 1968], entretanto, não é do nosso conhecimento que uma forma fechada para o elemento genérico deste grupo, como a expressa por [III.4.15], possa ser encontrada na literatura.

III.5 - Elemento Genérico e Lei de Composição do Grupo de Galilei

Vamos agora obter o elemento genérico do grupo de Galilei. Usando [III.3.17] e [III.3.18b] ficamos com :

$$A^G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ -v_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 & a_1 \\ -v_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 & a_2 \\ -v_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [III.5.1]$$

Da equação característica de A^G ,

$$\det(\lambda I - A^G) = \lambda^5 + \lambda^3 w^2 = 0 \quad , \qquad [III.5.2]$$

segue imediatamente que A^G possui um espectro degenerado , dado por :

$$\mathrm{Sp}\, A^G = \{\lambda_0 = 0 \,,\ \lambda_1 = +iw \,,\ \lambda_2 = -iw \,,\ \lambda_3 = 0 \,,\ \lambda_4 = 0\} \quad .. \qquad [III.5.3]$$

Uma vez que A^G possui um autovalor degenerado, não podemos fazer uso do método de projetores, como exposto na seção III.2, para obter a exponencial de A^G , e portanto o elemento genérico ,

$$G^G = \exp A^G \quad , \qquad [III.5.4]$$

do grupo de Galilei. No entanto, podemos utilizar a teoria geral de funções de matrizes [Gantmacher, 1960], que inclui o caso de matrizes com espectro degenerado, para calcular o elemento genérico desse grupo [Aldrovandi, 1996]. Podemos ainda exponenciar diretamente A^G e assim encontrar a expressão fechada de G^G a partir de um número não muito grande de termos de [III.1.1] (cf. [Aldrovandi, 1996]). Nenhuma destas duas maneiras será a que apresentaremos aqui para a obtenção do elemento genérico do grupo de Galilei.

Uma vez que já dispomos do elemento genérico dos grupos de Newton-Hooke e que estamos trabalhando em uma parametrização na qual vale :

$$G^{G} = \lim_{\tau \to \infty} G^{NH} \quad , \qquad [III.5.5]$$

podemos obter G^{G} diretamente de [III.4.15] e [III.4.16] . Fazendo isto, resulta que :

$$G^{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ \mathcal{V}_1 & R_{11} & R_{12} & R_{13} & \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{V}_2 & R_{21} & R_{22} & R_{23} & \mathcal{D}_2 \\ \mathcal{V}_3 & R_{31} & R_{32} & R_{33} & \mathcal{D}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad [III.5.6]$$

onde :

$$\mathcal{V}_i = \lim_{\tau \to \infty} V_i = \left[\frac{\operatorname{sen} w - w}{w^3}\right]\left[\omega_j v_j\right]\omega_i + \left[\frac{\cos w - 1}{w^2}\right]\left[\varepsilon_{ijk}\,\omega_j v_k\right] - \frac{\operatorname{sen} w}{w} v_i \quad ,[III.5.7a]$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_i = \lim_{\tau \to \infty} D_i = & \frac{1}{w^4}\left[1 - \frac{w^2}{2} - \cos w\right] b\left[\omega_j v_j\right]\omega_i + \left[\frac{w - \operatorname{sen} w}{w^3}\right]\left\{\left[\omega_j a_j\right]\omega_i - b\left[\varepsilon_{ijk}\,\omega_j v_k\right]\right\} + \\ & + \left[\frac{\cos w - 1}{w^2}\right]\left\{b v_i - \varepsilon_{ijk}\,\omega_j a_k\right\} + \left[\frac{\operatorname{sen} w}{w}\right] a_i \quad ,[III.5.7b]\end{aligned}$$

e os R_{ij} são os mesmos dados em [III.4.17].

Pode-se obter diretamente de [III.5.6] todos os casos particulares das transformações de Galilei. Apresentamos alguns deles :

$G^G(R_{ij}, \mathcal{V}_i = 0, \mathcal{D}_i = 0, b = 0) \rightarrow$ somente rotações espaciais ,

$G^G(R_{ij} = \delta_{ij}, \mathcal{V}_i = 0, \mathcal{D}_i, b = 0) \rightarrow$ somente translações espaciais ,

$G^G(R_{ij} = \delta_{ij}, \mathcal{V}_i = 0, \mathcal{D}_i = 0, b) \rightarrow$ somente translações temporais ,

$G^G(R_{ij} = \delta_{ij}, \mathcal{V}_i, \mathcal{D}_i = 0, b = 0) \rightarrow$ somente *boosts* ou transformações inerciais de Galilei .

Note-se que $R_{ij} = \delta_{ij}$ equivale a $\omega_i = 0$.

Procedendo de maneira completamente análoga àquela utilizada para os grupos de Newton-Hooke , obtemos a lei de composição do grupo de Galilei, a saber :

$$G^G(R''_{ik}, \mathcal{V}''_i, \mathcal{D}''_i, b'') = G^G(R'_{ij}, \mathcal{V}'_i, \mathcal{D}'_i, b')\, G^G(R_{jk}, \mathcal{V}_j, \mathcal{D}_j, b) \quad ; \qquad \text{[III.5.8]}$$

onde :

$$R''_{ik} = R'_{ij} R_{jk} \quad , \qquad \text{[III.5.9a]}$$

$$\mathcal{V}''_i = \mathcal{V}'_i + R'_{ij} \mathcal{V}_j \quad , \qquad \text{[III.5.9b]}$$

$$\mathcal{D}''_i = \mathcal{V}'_i\, b + R'_{ij} \mathcal{D}_j + \mathcal{D}'_i \quad , \qquad \text{[III.5.9c]}$$

$$b'' = b' + b \quad . \qquad \text{[III.5.9d]}$$

Vamos agora apresentar a transformação genérica de Galilei nesta parametrização , usando as coordenadas cartesianas {t, x, y, z}. Podemos então usar [III.3.12] e [III.5.6] para escrever :

$$\xi'^{G} = G^{G}(R_{ij}, \mathcal{V}_i, \mathcal{D}_i, b)\, \xi^{G} \quad . \tag{III.5.10}$$

Obtemos então :

$$t' = t + b \quad , \tag{III.5.11a}$$

$$x' = \mathcal{V}_1 t + R_{11} x + R_{12} y + R_{13} z + \mathcal{D}_1 \quad , \tag{III.5.11b}$$

$$y' = \mathcal{V}_2 t + R_{21} x + R_{22} y + R_{23} z + \mathcal{D}_2 \quad , \tag{III.5.11c}$$

$$z' = \mathcal{V}_3 t + R_{31} x + R_{32} y + R_{33} z + \mathcal{D}_3 \quad ; \tag{III.5.11d}$$

com $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{D}_i$ e R_{ij} dados respectivamente por [III.5.7a], [III.5.7b] e [III.4.17].

Os livros textos em geral limitam-se a apresentar o caso particular das transformações de Galilei, dadas por :

$$\xi'^{G} = G^{G}(R_{ij} = \delta_{ij}, \mathcal{V}_i = v\, \delta_{i1}, \mathcal{D}_i = a\, \delta_{i1}, b)\, \xi^{G} \quad . \tag{III.5.12}$$

Gostaríamos de chamar atenção para o *caráter absoluto do tempo* com relação às transformações do grupo de Galilei , dadas por [III.5.11] , que pode ser explicitado pela igualdade :

$$\Delta t' = \Delta t \quad ; \tag{III.5.13}$$

que nos diz que na *relatividade galileana* o intervalo de tempo entre dois eventos dados é o mesmo, independente do sistema de referência galileano que utilizemos para medi-lo.

Isto não é válido para os grupos cinemáticos em geral. Lembremos, por exemplo, do grupo cinemático de Poincaré da TRE. Para uma transformação de Lorentz pura entre um sistema S e um sistema S′ , que se move com velocidade constante de módulo v em relação a S , temos que :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \qquad [III.5.14]$$

Esta é a expressão da *dilatação temporal lorentziana*, evidenciando que na TRE o intervalo entre dois eventos é diferente quando medido em dois referenciais inerciais distintos, se estes estiverem em movimento uniforme um com relação ao outro; i.e., o intervalo de tempo possui caráter relativo.

III.6 - Transformações de Newton-Hooke

Vamos concluir este capítulo apresentando a transformação geral de Newton-Hooke, na parametrização apresentada na seção III.4, usando as coordenadas conformes escritas no limite $c \to \infty$, como dadas em [III.3.10].

Tomando este limite em [III.3.13] obtemos :

$$\xi'^{NH} = G^{NH}\, \xi^{NH} \quad , \qquad \text{[III.6.1]}$$

onde fizemos uso de [III.3.10b] e [III.4.2]. Usando a forma explícita de G^{NH} , dada em [III.4.15], ficamos com:

$$\varphi'\, t' = \varphi\, t \cosh\left[\frac{\sqrt{s}\, b}{\tau}\right] + (2\varphi - 1)\, \frac{\tau}{\sqrt{s}}\, \operatorname{senh}\left[\frac{\sqrt{s}\, b}{\tau}\right] \quad , \qquad \text{[III.6.2a]}$$

$$\varphi'\, x_i' = V_i\, \varphi\, t + R_{ij}\, \varphi\, x_j + D_i\, (2\varphi - 1) \quad , \qquad \text{[III.6.2b]}$$

$$2\,\varphi' - 1 = \varphi\, t\, \frac{\sqrt{s}}{\tau}\, \operatorname{senh}\left[\frac{\sqrt{s}\, b}{\tau}\right] + (2\varphi - 1) \cosh\left[\frac{\sqrt{s}\, b}{\tau}\right] \quad ; \qquad \text{[III.6.2c]}$$

onde $x_i = (x, y, z)$, φ é dado por [III.3.10a] e , obviamente:

$$\varphi' = \varphi(t') = \left[1 - \eta_{44}\, \frac{t'^2}{4\tau^2}\right]^{-1} \quad . \qquad \text{[III.6.3]}$$

Manipulando algebricamente [III.6.2a] e [III.6.2c], podemos escrever :

$$\varphi' \sqrt{s}\, \operatorname{senh}\left[\frac{\sqrt{s}\, b}{\tau}\right]\left(\frac{t'}{\tau}\right) = (2\varphi' - 1) \cosh\left[\frac{\sqrt{s}\, b}{\tau}\right] - (2\varphi - 1) \quad . \qquad \text{[III.6.4a]}$$

As translações temporais puras de Newton-Hooke ($b \neq 0$, $V_i = 0$, $R_{ij} = \delta_{ij}$, $D_i = 0$) se caracterizam por [III.6.4a] e por:

$$x'_i = \left[\frac{1 - \eta_{44} \dfrac{t'^2}{4\tau^2}}{1 - \eta_{44} \dfrac{t^2}{4\tau^2}} \right] x_i \quad . \qquad \text{[III.6.4b]}$$

Assim, além das translações temporais de Newton-Hooke terem um comportamento não trivial expresso por [III.6.4a], elas afetam também as coordenadas espaciais de acordo com a equação [III.6.4b]. Vemos então que estas são completamente diferentes das translações temporais de Galilei e de Poincaré, dadas simplesmente por $t' = t + b$ e $x'_i = x_i$.

Na ausência das translações temporais de Newton-Hooke ($b = 0$), obtemos das equações [III.6.2]:

$$t' = t \quad , \qquad \text{[III.6.5a]}$$

$$x'_i = V_i\, t + R_{ij}\, x_j + D_i \frac{(2\,\varphi - 1)}{\varphi} \quad . \qquad \text{[III.6.5b]}$$

Notemos que as transformações inerciais puras de Newton-Hooke ($b = 0$, $V_i \neq 0$, $R_{ij} = \delta_{ij}$, $D_i = 0$) têm a mesma forma que os *boosts* de Galilei. As rotações espaciais puras são as mesmas em ambos os casos. Já as translações espaciais puras de Newton-Hooke ($b = 0$, $V_i = 0$, $R_{ij} = \delta_{ij}$, $D_i \neq 0$) dependem do tempo, sendo dadas por:

$$x'_i = x_i + \left[1 + \eta_{44} \frac{t^2}{4\tau^2} \right] D_i \quad . \qquad \text{[III.6.6]}$$

Isto difere completamente das translações espaciais de Galilei e Poincaré, para as quais temos $x'_i = x_i + \mathcal{D}_i$.

As equações [III.6.2a] e [III.6.2c] conduzem a uma relação altamente não trivial entre os intervalos de tempo-coordenada (Δt) entre dois eventos, quando observados por dois referenciais conectados por uma translação temporal de Newton-Hooke. Entretanto, quando a transformação de Newton-Hooke não inclui translações temporais (b = 0), os intervalos de tempo-coordenada entre dois eventos dados são coincidentes, *i. e.* :

$$\Delta t' = \Delta t \qquad . \qquad [III.6.7]$$

Podemos então dizer que referenciais conectados por rotações espaciais, translações espaciais e/ou transformações inerciais de Newton-Hooke têm associado a cada par de eventos um mesmo intervalo de tempo-coordenada.

A fim de obtermos uma relação mais simples entre os intervalos de tempo-coordenada associados a referenciais relacionados por uma transformação de Newton-Hooke que envolva uma translação temporal ($b \neq 0$), vamos analisar o caso em que τ seja muito maior que as demais grandezas temporais envolvidas. Admitindo assim que:

$$\left(\frac{b}{\tau}\right), \left(\frac{t}{\tau}\right), \left(\frac{t'}{\tau}\right) \ll 1 \qquad , \qquad [III.6.8]$$

obtemos como primeira aproximação:

$$t' \approx t\left[1 + \frac{\eta_{44}}{2}\left(\frac{b}{\tau}\right)^2\right] + b \qquad ; \qquad [III.6.9a]$$

de onde segue que:

$$\Delta t' \approx \left[1 + \frac{\eta_{44}}{2}\left(\frac{b}{\tau}\right)^2\right]\Delta t \qquad . \qquad [III.6.9b]$$

Desta expressão concluímos que os intervalos de tempo-coordenada são modificados pelas translações temporais de Newton-Hooke. Assim, a um mesmo fenômeno físico teremos associados diferentes intervalos de tempo-coordenada, quando este iniciar em coordenadas temporais t diferentes.

Vamos agora determinar qual a relação entre esses intervalos de tempo-coordenada (Δt) e os intervalos de tempo próprio ($\Delta\zeta_{NH}$) medidos por diferentes referenciais de Newton-Hooke.

Lembrando do elemento de linha de de Sitter em coordenadas conformes, dado por [I.1.12], obtemos que o tempo próprio medido por referenciais de de Sitter, nestas coordenadas, é:

$$d\zeta_{DS}{}^2 = \left[1 - \frac{\eta_{44}t^2}{4\tau^2} + \frac{\eta_{44}\left(x^2+y^2+z^2\right)}{4\tau^2c^2}\right]^{-2}\left\{dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)\right\} . \qquad \text{[III.6.10]}$$

Tomando o limite $c \to \infty$, que corresponde à contração de de Sitter para Newton-Hooke, na expressão acima, obtemos:

$$d\zeta_{NH}{}^2 \equiv \lim_{c\to\infty} d\zeta_{DS}{}^2 = \left[1 - \frac{\eta_{44}t^2}{4\tau^2}\right]^{-2} dt^2 \ , \qquad \text{[III.6.11]}$$

que é o intervalo infinitesimal de tempo próprio medido pelos referenciais de Newton-Hooke.

Integrando essa última expressão obtemos a relação entre o tempo-coordenada t e o tempo próprio dos observadores de Newton-Hooke ζ_{NH} , a saber :

$$\zeta_{NH} = \frac{2\tau}{\sqrt{\eta_{44}}} \ \text{arc tagh}\left[\frac{\sqrt{\eta_{44}}\,t}{2\tau}\right] \ , \qquad \text{[III.6.12a]}$$

ou, a relação inversa:

$$t = \frac{2\tau}{\sqrt{\eta_{44}}} \ \text{tagh}\left[\frac{\sqrt{\eta_{44}}\,\zeta_{NH}}{2\tau}\right] \ . \qquad \text{[III.6.12b]}$$

Procedendo com esta mudança de coordenadas nas equações [III.6.2a] e [III.6.2c], obtemos que, após uma transformação genérica de Newton-Hooke:

$$\zeta_{NH}' = \zeta_{NH} + b \quad , \qquad \text{[III.6.13a]}$$

de onde segue que:

$$\Delta \zeta_{NH}' = \Delta \zeta_{NH} \quad . \qquad \text{[III.6.13b]}$$

Isso significa que o intervalo de tempo próprio associado a dois eventos é sempre o mesmo, independente de qual referencial de Newton-Hooke o esteja medindo. Dito de outra maneira, um mesmo fenômeno físico terá sempre a mesma duração medida de qualquer sistema de referência de Newton-Hooke.

Desta forma, assim como no caso da relatividade galileana, em um universo cujo grupo cinemático seja um dos grupos de Newton-Hooke, teremos um tempo absoluto.

IV - Comentários Finais

No presente trabalho dedicamos uma atenção especial aos grupos de Newton-Hooke. Como vimos, estes grupos podem ser encarados como limites não-relativísticos dos grupos de de Sitter. Um universo que tivesse como grupo cinemático um grupo de Newton-Hooke seria então não-relativístico, e suas translações espaciais e temporais conteriam um efeito global devido ao parâmetro τ, o qual está associado à curvatura dos espaços-tempos de de Sitter, cujas isometrias compõem os grupos de de Sitter.

Se o grupo cinemático do espaço-tempo relativístico fosse um grupo de de Sitter ao invés do grupo de Poincaré (o qual é o limite do primeiro quando $\tau \to \infty$), o limite não-relativístico desse universo teria como grupo cinemático um grupo de Newton-Hooke ao invés do de Galilei (que é o limite dos de Newton-Hooke quando $\tau \to \infty$). Até o presente, acreditamos que o universo não-relativístico de partículas livres seja descrito pelo grupo de Galilei. O estudo detalhado das modificações que as transformações de Newton-Hooke sofrem em relação às transformações de Galilei permite avaliar quais as chances do universo em que vivemos ter, no limite não-relativístico, o grupo cinemático de Newton-Hooke; ou, pelo menos, quão grande teria de ser o parâmetro τ para justificar o fato de evidências experimentais a este respeito nunca terem sido detectadas . Além do mais, o entendimento detalhado das transformações de Newton-Hooke nos daria indícios de onde e como os resultados experimentais apresentariam desvios devido a esta hipótese, com relação àqueles previstos supondo o grupo de Galilei.

Neste sentido, é importante comparar quais as diferenças fundamentais entre os grupos cinemáticos de Newton-Hooke e Galilei. No que diz respeito às transformações infinitesimais, os geradores destes grupos na representação cinemática mostram bem as diferenças entre as transformações de ambos. No caso de Newton-Hooke, temos:

rotações : $$J^{NH}_{ij} = x^k \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} - \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} \quad , \qquad [IV.1a]$$

boosts : $$B_i^{NH} = t \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \qquad [IV.1b]$$

translações espaciais de Newton-Hooke : $$P_i^{NH} = \left[1 + \frac{\eta_{44}\, t^2}{4\,\tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \qquad [IV.1c]$$

translações temporais de Newton-Hooke: $$T^{NH} = \left[1 - \frac{\eta_{44}\, t^2}{4\,\tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial t} - \eta_{44} \frac{t\, x^i}{2\,\tau^2} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad . \qquad [IV.1d]$$

Já no caso de Galilei:

rotações : $$J_{ij}^G = x^k \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} - \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} \quad , \qquad [IV.2a]$$

boosts : $$B_i^G = t \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \qquad [IV.2b]$$

translações espaciais : $$P_i^G = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \qquad [IV.2c]$$

translações temporais : $$T^G = \frac{\partial}{\partial t} \quad . \qquad [IV.2d]$$

Vemos destas expressões que os geradores das rotações e boosts têm exatamente as mesmas formas, tanto no caso dos grupos de Newton-Hooke, como no caso do grupo de Galilei. No caso das translações espaciais, os geradores de Newton-Hooke diferem do de Galilei por um fator proporcional a τ^{-2}, e que portanto se anula (como deveríamos esperar) no limite $\tau \to \infty$.

No que diz respeito às translações temporais , as expressões [IV.1d] e [IV.2d] também diferem por termos que se anulam no limite $\tau \to \infty$; além disso, nos dizem que, enquanto as translações temporais de Galilei agem só sobre a sua coordenada temporal, as translações temporais de Newton-Hooke agem também sobre as respectivas coordenadas espaciais, associadas à representação cinemática dos geradores destes últimos.

De acordo com o que vimos no capítulo II, podemos passar dos grupos de Newton-Hooke para o de Galilei por uma contração espaço-tempo de Inönü-Wigner, que corresponde as identificações :

$$J_i \to J_i, \quad P_i \to \in P_i, \quad B_i \to B_i, \quad T \to \in T \quad ;$$

e da tomada do limite $\in \to 0$ nos comutadores das álgebras de Newton-Hooke. Como interpretação física, dissemos que esta contração corresponde a considerar somente pequenas translações espaciais e temporais. Isto torna-se explícito quando observamos as expressões [IV.1] e [IV.2], onde vemos que os efeitos globais em P_i^{NH} e T^{NH} desaparecem no limite $\tau \to \infty$.

Além disso, como em geral associamos os geradores das translações espaciais com o trimomentum, e o das translações temporais com a energia, a comparação das expressões de P_i^G e T^G com as de P_i^{NH} e T^{NH} sugere uma modificação nas definições do trimomentum e da energia, no caso de uma teoria que tenha um grupo de Newton-Hooke como grupo cinemático. Inclusive, a relação de comutação que diferencia os grupos de N.-H. do de Galilei, a saber :

$$\left[P_i^{NH}, T^{NH}\right] = \frac{-\eta_{44}}{\tau^2} B_i^{NH} \qquad ,$$

mostra que a energia e os momenta não comutam entre si, indicando que em uma tal teoria as energias não serão mais invariantes por translações espaciais de Newton-Hooke, o que difere completamente da física que tem como pano de fundo os grupos de Galilei ou Poincaré.

No capítulo III, obtivemos as transformações finitas induzidas nas coordenadas espaciais e temporal, no caso dos grupos de Newton-Hooke. Elas são:

$$\varphi' \sqrt{s}\ \mathrm{senh}\left[\frac{\sqrt{s}\, b}{\tau}\right]\left(\frac{t'}{\tau}\right) = \left(2\varphi' - 1\right)\cosh\left[\frac{\sqrt{s}\, b}{\tau}\right] - \left(2\varphi - 1\right) \quad , \qquad [IV.3a]$$

$$\varphi'\ x_i' = V_i \varphi\, t + R_{ij}\, \varphi\, x_j + D_i\, (2\varphi - 1) \quad , \qquad [IV.3b]$$

com:

$$\varphi = \varphi\,(t) = \left[1 - \frac{\eta_{44}\, t^2}{4\,\tau^2}\right] \quad e \quad \varphi' = \varphi\,(t') \quad . \qquad [IV.3c]$$

Vamos então compará-las com as transformações de Galilei, dadas por:

$$t' = t + b \quad , \qquad [IV.4a]$$

$$x_i' = \mathcal{V}_i\, t + R_{ij}\, x_j + \mathcal{D}_i \quad . \qquad [IV.4b]$$

Para ambos os grupos, as transformações no espaço e no tempo para rotações puras têm a mesma forma, a saber:

$$t' = t \quad ,$$

$$x_i' = R_{ij}\, x_j \quad .$$

O mesmo ocorre para as transformações inerciais puras, caso em que:

$$t' = t \quad ,$$

$$x_i' = x_i + v_i t \quad ;$$

onde $v_i = V_i$ no caso de Newton-Hooke e $v_i = \mathcal{V}_i$ no caso de Galilei.

Já para as translações espaciais puras temos:

Newton-Hooke	Galilei
$t' = t$	$t' = t$
$x'_i = x_i + \left[1 + \dfrac{\eta_{44}\, t^2}{4\tau^2}\right] D_i$	$x'_i = x_i + \mathcal{D}_i$

Tabela 4.1

A tabela 4.1 nos diz que, embora em ambos os casos as translações espaciais puras só afetem as coordenadas espaciais, as transformações de Newton-Hooke incluem um efeito adicional que depende (i) do instante em que ocorre a translação espacial, (ii) do parâmetro τ (iii) e de qual dos dois grupos de Newton-Hooke está sendo considerado.

Finalmente, no caso das translações temporais puras temos:

Newton-Hooke	Galilei
$\varphi' \sqrt{s}\, \mathrm{senh}\left[\dfrac{\sqrt{s}\, b}{\tau}\right]\left(\dfrac{t'}{\tau}\right) = (2\varphi' - 1)\cosh\left[\dfrac{\sqrt{s}\, b}{\tau}\right] - (2\varphi - 1)$	$t' = t + b$
$x'_i = \left[\dfrac{4\tau^2 - \eta_{44}\, t'^2}{4\tau^2 - \eta_{44}\, t^2}\right] x_i$	$x'_i = x_i$

Tabela 4.2

Nesta tabela evidencia-se o contraste entre as translações temporais puras nos dois casos. Enquanto que no caso de Galilei só a coordenada temporal é afetada aditivamente , as translações temporais de Newton-Hooke afetam não só a coordenada temporal de uma maneira altamente complicada, mas também as coordenadas espaciais.

Devemos notar que a análise comparativa entre as transformações finitas das coordenadas espaciais e temporal está em concordância com aquela feita para os geradores de ambos os grupos na representação cinemática. Como não utilizamos esta representação para obter o elemento genérico dos grupos de Newton-Hooke e Galilei, com os quais pudemos escrever [IV.3] e [IV.4], concluímos que tal concordância corrobora a parametrização adotada neste trabalho.

Após a análise desenvolvida até aqui, acreditamos contar com os ingredientes algébricos necessários para examinar uma teoria de gauge para os grupos de Newton-Hooke. Na verdade, esta foi a motivação pela qual desenvolvemos o estudo contido nesta dissertação e constitui um passo importante a ser dado como continuação deste trabalho.

Conforme concluímos no capítulo II, os grupos de Newton-Hooke não são semi-simples, uma vez que possuem uma subálgebra invariante abeliana gerada pelos boosts e translações espaciais destes grupos. Por essa razão, a forma de Cartan-Killing dos mesmos é degenerada. Isto apresenta-se como um problema na obtenção das equações dinâmicas de uma teoria de gauge para os grupos de N.-H. , quando tentamos partir de uma lagrangeana invariante de Yang-Mills a ela associada. Entretanto, o fato destes grupos poderem ser obtidos como contrações de Inönü-Wigner dos grupos de de Sitter (que são semi-simples), faz com que possamos seguir um procedimento semelhante àquele utilizado na literatura para obter uma teoria de gauge de Poincaré a partir da teoria de gauge de de Sitter [Aldrovandi e Stédile, 1984].

O primeiro passo é a obtenção de uma teoria de gauge tendo como grupo de estrutura o grupo de de Sitter e como variedade base o espaço-tempo de Minkowski [Pereira, 1986]. As componentes das grandezas definidas neste espaço-tempo, são indexadas com a segunda metade do alfabeto grego, a saber: μ, ν, ρ, σ, ... , indo de 0 até 3.

O fibrado principal da teoria é construído associando-se a cada ponto da variedade base, com coordenadas x^μ , um grupo de de Sitter. Temos também um fibrado associado onde cada fibra constitui um espaço-tempo de de Sitter, cujo grupo de isometria é o respectivo grupo de de Sitter. As componentes das grandezas definidas na fibra serão identificadas pelo uso das primeiras letras do alfabeto latino: a, b, c, ... , indo de 0 até 4, e também das primeiras letras do alfabeto grego: α, β, γ, ... , estas indo de 0 até 3.

O potencial de gauge, que é o campo fundamental da teoria, é uma conexão sobre o fibrado principal, sendo portanto uma 1-forma a valores na álgebra de Lie do grupo de de Sitter. Quando escolhemos um conjunto de geradores { Z_{ab} } para o grupo de estrutura e um sistema de coordenadas { x^μ } para a variedade base, podemos escrever :

$$A = \frac{1}{2} Z_{ab} A^{ab}{}_{\mu} dx^{\mu} \quad .$$

A derivada covariante de A, que é a curvatura da conexão A, é dada por :

$$F = DA = dA + \frac{1}{2}[\![A, A]\!] = dA + A \wedge A \quad ,$$

onde " $[\![\, ,]\!]$ " é o comutador graduado ou colchete de Lichnerowicz, " d " é a derivada exterior e o símbolo "$\wedge$" denota o produto exterior entre formas diferenciais [Aldrovandi e Pereira, 1995a]. A 2-forma F é o que chamamos de intensidade de campo de gauge, que pode ser escrito, nas bases { Z_{ab} } e { dx^{μ} }, como:

$$F = \frac{1}{4} Z_{ab} F^{ab}{}_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \quad .$$

As suas componentes são dadas por :

$$F^{ab}{}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A^{ab}{}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{ab}{}_{\mu} + f^{ab}{}_{cd\,ef} A^{cd}{}_{\mu} A^{ef}{}_{\nu} \quad ,$$

onde $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$, e $f^{ab}{}_{cd\,ef}$ são as constantes de estrutura do grupo de gauge:

$$[Z_{cd}, Z_{ef}] = f^{ab}{}_{cd\,ef} Z_{ab} \quad .$$

No caso dos grupos de de Sitter, $f^{ab}{}_{cd\,ef}$ são dadas em [I.2.2].

Partindo da ação invariante de uma teoria de gauge de de Sitter para a gravitação, obtemos as equações dinâmicas desta teoria pelo princípio da ação estacionária. Por se tratar de uma teoria de gauge agindo no espaço-tempo, a medida invariante será dada por $h\, d^4x$, onde h é o determinante da tetrada que está relacionada com a mudança de referenciais no espaço-tempo. No nosso desenvolvimento, assumimos a prescrição de Kibble [Kibble, 1961], a saber :

$$h^{\alpha}{}_{\mu} \equiv \partial_{\mu} x^{\alpha} + \kappa B^{\alpha}{}_{\mu} \quad ,$$

a qual relaciona o campo de tetradas com novos campos de gauge associados às translações, $B^{\alpha}{}_{\mu}$, obtidos após uma reparametrização conveniente.

Conseqüentemente , as equações dinâmicas desta teoria conterão, além dos termos usuais que figuram nas equações de Yang-Mills para simetrias internas, a saber :

$$\partial^{\mu} F^{ab}{}_{\mu\nu} + f^{ab}{}_{cd\,ef}\, A^{cd\,\mu}\, F^{ef}{}_{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

termos adicionais como:

$$h_{\alpha}{}^{\rho} (\partial_{\nu}\, h^{\alpha}{}_{\rho}) F_{ab}{}^{\nu\mu} \qquad \text{e} \qquad h_{\alpha}{}^{\mu}\, \mathcal{L}_{YM} \ ;$$

especialmente nas equações dinâmicas para os potenciais de gauge associados às translações.

Como preparação para a contração que nos conduzirá às equações dinâmicas da teoria de gauge para os grupos de Newton-Hooke, devemos separar as quantidades envolvidas em componentes espaciais e temporais, levando em conta os fatores τ e c, a exemplo do que fizemos na seção II.4 com os geradores do grupo de de Sitter na representação cinemática. Só para darmos uma idéia, as componentes dos potenciais de gauge $A^{ab}{}_{\mu}$ serão separadas em oito classes, o mesmo acontecendo com as componentes dos campos de gauge $F^{ab}{}_{\mu\nu}$. É só após esta separação que devemos tomar o limite $c \rightarrow \infty$ nas equações.

Quanto às fontes da teoria, devemos considerar que as eventuais modificações da energia e do trimomentum numa teoria de Newton-Hooke, que comentamos anteriormente, devem ser levadas em conta quando da determinação da expressão do tensor energia-momentum. Este é um ponto bastante delicado no desenvolvimento de uma teoria de gauge para grupos como os de de Sitter e os de Newton-Hooke.

Dentre as várias expressões resultantes, temos um interesse especial na equação para a componente temporal do potencial de gauge associado às translações temporais, pois é esta componente que será associada ao potencial escalar gravitacional da teoria, após as devidas aproximações. É aí que está a principal importância desta teoria. Sim, pois, se no lugar do grupo de Poincaré, admitirmos um dos grupos de de Sitter como o grupo de simetria da natureza, teremos como limite não-relativístico um grupo de Newton-Hooke ao invés do grupo de Galilei. Isto significa que o potencial gravitacional que deverá ser considerado no limite de campo fraco é o resultante desta equação a que estamos nos referindo; isso desde que, é claro, acreditemos na teoria de gauge de de Sitter como teoria alternativa para a gravitação.

Ainda sobre a equação do potencial gravitacional de Newton-Hooke, devemos lembrar que esta deverá se reduzir àquela do grupo de Galilei, e portanto a do potencial newtoniano no limite $\tau \rightarrow \infty$. Além disso, ela difere desta última por termos proporcionais ao inverso deste parâmetro τ . Esperamos então que o estudo de tal equação forneça eventuais correções ao potencial newtoniano, que nos permitam inferir sobre a dinâmica do universo em larga escala e a baixas velocidades. Quando compararmos estas previsões com os dados observacionais disponíveis, obteremos assim um teste da viabilidade desta teoria como teoria alternativa para a gravitação. Em particular, o problema da massa faltante é de grande interesse pois uma modificação no potencial de Newton pode eventualmente explicar esse problema sem a necessidade de se supor a existência de matéria escura.

Diante disso, consideramos que um passo essencial deve ser dado como continuação deste trabalho: a construção detalhada de uma teoria de gauge para os grupos de Newton-Hooke, para que a partir da mesma possamos obter a forma precisa da equação para o potencial gravitacional de Newton-Hooke, e daí analisar detalhadamente as modificações com relação ao potencial newtoniano apresentadas por suas soluções.

Referências

- [Aldrovandi, 1978] "Notas sobre Teorias Clássicas de Gauge e Gravitação", R. Aldrovandi, Conferências dadas na 1a. Escola Brasileira de Cosmologia e Gravitação - CBPF, IFT C - 01/78.
- [Aldrovandi, 1996] "Finite Galilei Transformations", R. Aldrovandi; comunicações particulares.
- [Aldrovandi e Pereira, 1986] "Natural Poincaré gauge model", R. Aldrovandi and J. G. Pereira, Phys. Rev., **D 33**, 2788-2795.
- [Aldrovandi e Pereira, 1988] "On the quantization of Poincaré and de Sitter gauge models", R. Aldrovandi and J. G. Pereira, J. Math. Phys., **29**, 1472-1476.
- [Aldrovandi e Pereira, 1995a] "An Introduction to Geometrical Physics", R. Aldrovandi and J. G. Pereira, World Scientific, Singapore.
- [Aldrovandi e Pereira, 1995b] "The case for a gravitational de Sitter gauge theory", R. Aldrovandi and J. G. Pereira, in "Topics in Theoretical Physics", Proceedings of the Theoretical Physics Symposium in honor of Paulo Leal Ferreira; ed. by V. C. Aguilera-Navarro, D. Galetti, B. M. Pimentel and L. Tomio; Editora Instituto de Física Teórica.
- [Aldrovandi e Stédile, 1984] "Complete Gauge Theory for the Whole Poincaré Group", R. Aldrovandi and E. Stédile, Int. J. Theor. Phys., **23**, 321-323.
- [Aldrovandi et al., 1996] "Lie Algebra Invariants and Closed Expressions for Finite Transformations", R. Aldrovandi, A. L. Barbosa and L. P. Freitas; não publicado.
- [Bacry, 1989] "Localizability and Space in Quantum Physics", H. Bacry, em "Lecture Notes in Physics", vol. 308, Springer-Verlag , Berlin.
- [Bacry e Lévy-Leblond, 1968] "Possible Kinematics", H. Bacry and J.-M. Lévy-Leblond, J. Math. Phys., **9**, 1605-1614.
- [Bacry e Nuyts, 1986] "Classification of ten-dimensional kinematic groups with space isotropy", H. Bacry and J. Nuyts, J. Math. Phys., **27**, 2455-2457.
- [Bellman, 1960] "Introduction to Matrix Analysis", R. Bellman, McGraw-Hill , New York.

- [Brennich, 1974] "Analytic Contraction of Lie Groups", R. H. Brennich, Rep. Math. Phys., **6**, 343-360.
- [Cariñena *et al.*, 1981] "Kinematic groups and dimensional analysis", J. F. Cariñena, M. A. del Olmo and M. Santander, J. Phys. A, **14**, 1-14.
- [Cheng e Li, 1984] "Gauge theory of elementary particle physics", T.-P. Cheng and L.-F. Li, Oxford University Press.
- [Cho, 1976] "Einstein Lagrangian as the translational Yang-Mills Lagrangian", Y. M. Cho, Phys. Rev. D, **14**, 2521-2525.
- [Churchill, 1975] "Variáveis Complexas e suas Aplicações", R. V. Churchill, McGraw-Hill, Brasil.
- [Derome e Dubois, 1972] "Hooke's Symmetries and Nonrelativistic Cosmological Kinematics". - I , J.-R. Derome and J.-G. Dubois, Il Nuovo Cimento B, **9**, 351-376.
- [de Sitter, 1917] "On Einstein's Theory of Gravitation, and its Astronomical Consequences. Third Paper", W. de Sitter, Mont. Not. Roy. Astron. Soc., **78**, 3-28.
- [Dirac, 1935] "The Electron Wave Equation in de Sitter Space", P. A. M. Dirac, Ann. Math., **36**, 657-669.
- [Einstein, 1905] "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" ("On the Electrodynamics of Moving Bodies"), A. Einstein, Annalen der Physik, **17**. Tradução para o inglês publicada em "The Principle of Relativity", Dover Publications, New York, 1952.
- [Einstein, 1907] A. Einstein, Jahrb. Rad.Elektr., **4**, 411.
- [Einstein, 1915] A. Einstein, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., part 2, a)778, b)799, c)831, d)844.
- [Einstein, 1917] A. Einstein, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., part 1, 142.
- [Galilei, 1632] "Dialogo Sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo - Tolemaico e Copernicano", G. Galilei, Giulio Einaudi editore, Torino, 1970.
- [Gantmacher, 1960] "The Theory of Matrices", F. R. Gantmacher, Chelsea Pub. Co., New York.
- [Gilmore, 1974] "Lie Groups, Lie Algebras, and some of their Applications", R. Gilmore, John Wiley & Sons, New York.

- [Gürsey, 1964] "Introduction to the de Sitter Group", F. Gürsey, in Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics (Lectures of the Instanbul Summer School of Theoretical Physics, July 16 - August 4, 1962), ed. by F. Gürsey, Gordon and Breach, 365-389.
- [Hehl *et al.*, 1995] "Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance"; F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, and Y. Ne'eman; Phys. Rep., **258**, 1-171.
- [Inönü e Wigner, 1953] "On the Contraction of Groups and their Representations", E. Inönü and E. P. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **39**, 510-524.
- [Inönü e Wigner, 1954] "On a Particular Type of Convergence to a Singular Matrix", E. Inönü and E. P. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **40**, 119-121.
- [Inönü, 1964] "Contraction of Lie groups and their representations", E. Inönü, in Group Theoretical Conceptsand Methods in Elementary Particle Physics (Lectures of the Instanbul Summer School of Theoretical Physics, July 16 - August 4, 1962), ed. by F. Gürsey, Gordon and Breach, 364-402.
- [Kibble, 1961] "Lorentz Invariance and the Gravitational Field", T. W. B. Kibble, J. Math. Phys., **2**, 212-221.
- [Lalan, 1936] "La cinématique et la théorie des groupes", V. Lalan, Compt. Rend. Acad. Sci., **203**, 1491-1493.
- [Lévy-Leblond, 1965] "Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré", J.-M. Lévy-Leblond, Ann. Int. H. Poincaré, **A-III**, 1-12.
- [Levy-Nahas, 1967] "Deformation and Contraction of Lie Algebras", M. Levy-Nahas, J. Math. Phys., **8**, 1211-1222.
- [Minkowski, 1908] "Space and Time", H. Minkowski; "a Translation of an Address delivered at the 80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians, at Cologne, 21 September, 1908"; publicada em "The Principle of Relativity", Dover Publications, New York, 1952.
- [Pereira, 1986] "Teorias de Gauge para a Gravitação", Tese de Doutorado, Instituto de Física Teórica - Unesp.
- [Saletan, 1961] "Contraction of Lie Groups", E. J. Saletan, J. Math. Phys., **2** , 1-21.

- [Schwarzschild, 1916] K. Schwarzschild, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., part 2, a)189, b)424.
- [Segal, 1951] "A Class of Operator Algebras Which Are Determined by Groups", I. E. Segal, Duke Math. J., **18**, 221-265.
- [Stédile, 1982] "Gravitação como Teoria de Gauge do Grupo de Poincaré", Tese de Doutorado, Instituto de Física Teórica - Unesp.
- [Utiyama, 1956] "Invariant Theoretical Interpretation of Interaction", R. Utiyama, Phys. Rev., **101**, 1597-1607.
- [Wigner, 1939] "On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group", E. P. Wigner, Ann. Math., **40**, 149-204.
- [Wigner, 1950] "Some Remarks on the Infinite de Sitter Space", E. P. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **36**, 184-188.
- [Yang e Mills, 1954] "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance", C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev., **96**, 191-195.