



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Engenharia
Campus de Bauru



**APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE ELEMENTOS FINITOS NA
ESTRATIFICAÇÃO DE ARMAZENADORES TÉRMICOS COM
BARREIRAS DE MEIOS POROSOS**

SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

**Dissertação apresentada à
Faculdade de Engenharia da
UNESP - Campus de Bauru, para
obtenção do título de Mestre em
Engenharia Industrial.**

**BAURU – SP
Abril – 2004**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Engenharia
Campus de Bauru



**APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE ELEMENTOS FINITOS NA
ESTRATIFICAÇÃO DE ARMAZENADORES TÉRMICOS COM
BARREIRAS DE MEIOS POROSOS**

SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

Orientador: Prof. Dr. Alcides Padilha

**Dissertação apresentada à
Faculdade de Engenharia da
UNESP - Campus de Bauru, para
obtenção do título de Mestre em
Engenharia Industrial.**

**BAURU – SP
Abril – 2004**

Ficha catalográfica elaborada por
DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO
UNESP - Bauru

Oliveira, Santiago del Rio.

Aplicação da técnica de elementos finitos na
estratificação de armazenadores térmicos com barreiras de
meios porosos / Santiago del Rio Oliveira - - Bauru :
[s.n.], 2004.

154 f.

Orientador: Alcides Padilha.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, 2004.

1. Estratificação térmica. 2. Convecção mista. 3. Meios
porosos. 4. Elementos finitos. I – Título. II – Universidade
Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia.



ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE *SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA*, ALUNO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNESP – CAMPUS DE BAURU.

No dia dezoito de março de dois mil e quatro, às 09 horas, no anfiteatro do prédio da Pós-graduação da Faculdade de Engenharia da UNESP, Campus de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos Professores Doutores: Alcides Padilha do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia - UNESP – Campus de Bauru, Presidente da Banca, Luis Fernando Alzuguir Azevedo do Departamento de Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica – PUC/RJ e Ivan De Domenico Valarelli do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia – UNESP – Campus de Bauru, a fim de proceder a arguição pública da Dissertação de Mestrado do candidato *Santiago Del Rio Oliveira*, intitulada “APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE ELEMENTOS FINITOS NA ESTRATIFICAÇÃO DE ARMAZENAMENTO TÉRMICO UTILIZANDO BARREIRAS DE MEIOS POROSOS”. O Professor Doutor Alcides Padilha, Presidente da Banca, apresentou o candidato, que dissertou sobre seu trabalho, em quarenta minutos, após, o candidato foi argüido oralmente pelos membros componentes da Comissão Examinadora no tempo regulamentar exigido. Logo após, reuniu-se a Comissão Examinadora, tendo apresentado o conceito final: **APROVADO**. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após, lida e aprovada, será assinada pelos Senhores Membros da Comissão Examinadora. Bauru, 19 de março de dois mil e quatro. / . / . / . / . /

Prof. Dr. Alcides Padilha - Presidente

Prof. Dr. Luis Fernando Alzuguir Azevedo - Membro

Prof. Dr. Ivan de Domenico Valarelli - Membro

“Não se pode ensinar tudo a alguém, pode-se apenas ajudá-lo a encontrar por si mesmo”.

(Galileu Galilei)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que colaboraram para a realização deste trabalho e, em particular:

Ao Prof. Dr. Alcides Padilha, que além da orientação e estímulo, ainda me dedicou seu apoio e principalmente sua amizade.

Ao Prof. Dr. Vicente Luiz Scalon, cuja seriedade e dedicação guiaram-me nas muitas dificuldades do trabalho, e pela amizade que me proporcionou.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia de Bauru, pela atenção que me dispensaram quando solicitados.

Aos professores do curso de Pós-graduação pelo idealismo e dedicação.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

OLIVEIRA S. D. R. **Aplicação da técnica de elementos finitos na estratificação de armazenadores térmicos com barreiras de meios porosos.** 2004. 154 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2004.

RESUMO

É desenvolvido um modelo matemático para estudar o comportamento da estratificação térmica de líquido em um tanque armazenador com meio poroso. O tanque considerado é de geometria retangular com relação comprimento-altura igual a 1. O modelo utiliza a formulação transiente de vorticidade e função corrente para predizer o desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas durante um processo de carregamento. Foi fixado um número de Reynolds igual a 200 para o escoamento de entrada e uma faixa do número de Richardson de 0,001 a 10. Outros parâmetros considerados incluem o número de Biot (perda de calor pelas paredes do tanque), o número de Darcy (permeabilidade do meio poroso), a posição e a espessura do meio poroso. Os resultados mostram a influência desses parâmetros físicos que devem ser considerados para um bom projeto de tanques armazenadores com estratificação térmica.

Palavras-chave: estratificação térmica, convecção mista, meios porosos, elementos finitos.

OLIVEIRA S. D. R **Application of finite element technic in stratification of thermal storages with porous medium restraints.** Bauru, 2004. 154 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2004.

ABSTRACT

A mathematical model is developed to study the behaviour of thermal stratification of liquid in a typical storage tank with porous medium. The tank considered has rectangular geometry with length-to-height ratio equal of 1. The model employs a transient stream function-vorticity formulation to predict the development of stream function and temperature fields in a charging process. The Reynolds number of the inlet flow is fixed at 200 and a range of the Richardson number from 0,001 to 10. Other parameters considered include the Biot number (heat loss from tank walls), the Darcy number (permeability of the porous medium), the position and the thickness of the porous medium. The results show the influence of these physic parameters that should be considered for a good design of storage tanks with thermal stratification.

Key-words: thermal stratification, mixed convection, porous medium, finite element.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	VI
LISTA DE TABELAS	XII
NOMENCLATURA	XIII
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – Generalidades	1
1.2 – A energia solar	2
1.3 – Processos de armazenamento de energia	4
1.4 – Motivação.....	5
1.5 – Objetivos	6
CAPÍTULO 2 – REVISÃO DE LITERATURA	8
CAPÍTULO 3 – MODELO MATEMÁTICO.....	20
3.1 – Descrição.....	20
3.2 – Estratificação térmica.....	22
3.3 – Modelo físico	25
3.4 – Modelo teórico	26
3.5 – Modelo matemático para o meio livre	27
3.6 – Modelo matemático para o meio poroso.....	30
3.7 – Condições de contorno.....	32
3.8 – Parâmetros de eficiência	36
3.9 – Propriedades físicas.....	37

CAPÍTULO 4 – MÉTODO NUMÉRICO	39
4.1 – A técnica dos elementos finitos	39
4.2 – Discretização das equações governantes.....	41
4.3 – Condições de contorno	49
4.4 – O código computacional	50
CAPÍTULO 5 – RESULTADOS E DISCUSSÕES	53
5.1 – Efeitos do número de Richardson	54
5.2 – Permeabilidade do meio poroso.....	71
5.3 – Espessura do meio poroso.....	77
5.4 – Posição do meio poroso	85
5.5 – Perda de calor.....	96
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E EXTENSÕES FUTURAS	100
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	104
APÊNDICE A – EQUAÇÕES DO PROBLEMA	113
A.1 – Equações para o meio livre	113
A.2 – Equações para o meio poroso.....	119
A.3 – Equação para a temperatura de mistura.....	123
APÊNDICE B – ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES	124
B.1 – Adimensionalização das equações para o meio livre	124
B.2 – Adimensionalização das equações para o meio poroso.....	129
B.3 – Adimensionalização das condições de contorno	133
B.4 – Adimensionalização da temperatura de mistura.....	137

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Esquema de um armazenador térmico.....	21
Figura 3.2 – Sistema captação - utilização de energia solar com estocagem térmica	21
Figura 3.3 – Capacidade de armazenamento em função da diferença de temperatura imposta.....	24
Figura 3.4 – Estrutura cristalina do níquel poroso.....	25
Figura 3.5 – Armazenador térmico estratificado com meio poroso.....	26
Figura 4.1 – Elemento bidimensional, linear e isoparamétrico.....	40
Figura 5.1 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (sem meio poroso): $Ri = 0,001$, $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$	56
Figura 5.2 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (sem meio poroso): $Ri = 0,01$, $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$	57
Figura 5.3 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (sem meio poroso): $Ri = 0,1$, $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$	58

Figura 5.4 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (sem meio poroso): $Ri = 1$, $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$.	59
Figura 5.5 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (sem meio poroso): $Ri = 10$, $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$.	60
Figura 5.6 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo (sem meio poroso)	61
Figura 5.7 – Variação do percentual de carregamento útil do tanque com o tempo em função do número de Richardson (sem meio poroso)	62
Figura 5.8 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (com meio poroso): $Ri = 0,001$, $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$.	63
Figura 5.9 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (com meio poroso): $Ri = 0,01$, $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$.	64
Figura 5.10 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (com meio poroso): $Ri = 0,1$, $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$.	65
Figura 5.11 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (com meio poroso): $Ri = 1$, $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$.	66

- Figura 5.12 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (com meio poroso): $Ri = 10$, $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$67
- Figura 5.13 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo (com meio poroso)69
- Figura 5.14 – Variação do percentual de carregamento útil no tanque com o tempo em função do número de Richardson (com meio poroso)70
- Figura 5.15 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função do número de Darcy: $Ri = 0,001$ em $\tau = 15$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$ 72
- Figura 5.16 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função do número de Darcy ($Ri = 0,001$)73
- Figura 5.17 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função do número de Darcy: $Ri = 0,1$ em $\tau = 20$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$ 74
- Figura 5.18 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função do número de Darcy: $Ri = 10$ em $\tau = 10$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$ 75
- Figura 5.19 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função do número de Darcy ($Ri = 0,1$)76
- Figura 5.20 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função do número de Darcy ($Ri = 10$)76

Figura 5.21 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da espessura do meio poroso: $Ri = 0,001$ em $\tau = 20$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$	78
Figura 5.22 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 0,001$)	79
Figura 5.23 – Variação do percentual de carregamento do tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 0,001$)	79
Figura 5.24 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da espessura do meio poroso: $Ri = 0,1$ em $\tau = 20$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$	80
Figura 5.25 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 0,1$)	81
Figura 5.26 – Variação do percentual de carregamento do tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 0,1$)	82
Figura 5.27 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da espessura do meio poroso: $Ri = 10$ em $\tau = 20$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$	83
Figura 5.28 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 10$)	84
Figura 5.29 – Variação do percentual de carregamento do tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 10$)	84

- Figura 5.30 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da posição do meio poroso: $Ri = 0,01$ em $\tau = 20$ e $S = 0,1$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$ 86
- Figura 5.31 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 0,01$ e $S = 0,1$)87
- Figura 5.32 – Variação do percentual de carregamento do tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 0,01$ e $S = 0,1$)88
- Figura 5.33 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da posição do meio poroso: $Ri = 1$ em $\tau = 20$ e $S = 0,1$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$ 89
- Figura 5.34 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 1$ e $S = 0,1$)90
- Figura 5.35 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da posição do meio poroso: $Ri = 0,01$ em $\tau = 20$ e $S = 0,2$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$ 91
- Figura 5.36 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 0,01$ e $S = 0,2$)92
- Figura 5.37 – Campos de função corrente e temperaturas em função da posição do meio poroso: $Ri = 1$ em $\tau = 20$ e $S = 0,2$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$ 94
- Figura 5.38 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 1$ e $S = 0,2$)95

- Figura 5.39 – Variação do percentual de carregamento do tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 1$ e $S = 0,2$)95
- Figura 5.40 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função do número de Biot: $Ri = 10$ em $\tau = 15$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$ 97
- Figura 5.41 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função do número de Biot ($Ri = 10$)98
- Figura 5.42 – Variação do percentual de carregamento do tanque com o tempo em função do número de Biot ($Ri = 10$)99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades físicas da água e do níquel.....	38
--	----

NOMENCLATURA

H	altura do armazenador térmico, $[m]$
L	comprimento do armazenador térmico, $[m]$
a_r	relação de aspecto, L/H
s	espessura do meio poroso, $[m]$
S	espessura do meio poroso, adimensional, s/H
d	posição do meio poroso, $[m]$
D	posição do meio poroso, adimensional, d/H
P	profundidade do armazenador térmico, $[m]$
x, y	coordenadas cartesianas, $[m]$
X, Y	coordenadas cartesianas adimensionais, x/H e y/H
Pr	número de Prandtl no meio livre
Pr'	número de Prandtl no meio poroso
Re	número de Reynolds
Ra	número de Rayleigh
Gr	número de Grashof
Ri	número de Richardson
Da	número de Darcy
Bi	número de Biot
k	condutividade térmica do fluido, $[W/mK]$
k_{mp}	condutividade térmica do meio poroso, $[W/mK]$
K	permeabilidade do meio poroso, $[m^2]$
u	velocidade na direção x , $[m/s]$
v	velocidade na direção y , $[m/s]$
u_0	velocidade de carregamento, $[m/s]$
U	velocidade adimensional na direção X
V	velocidade adimensional na direção Y

C_p	calor específico a pressão constante, $[J/kgK]$
h	coeficiente de transferência de calor, $[W/m^2K]$
g	aceleração da gravidade, $[m/s^2]$
t	tempo, $[s]$
T	temperatura, $[K]$
T_0	temperatura do ambiente, $[K]$
T_1	temperatura do fluido na tomada de entrada, $[K]$
$\langle N \rangle$	matriz função de aproximação
W	função peso
V_e	volume elementar
$[M]$	matriz do termo transiente
$[D]$	matriz do termo difusivo
$[C]$	matriz do termo convectivo
$[K]$	matriz do termo fonte
$[\Gamma_\psi]$	matriz da condição de contorno da função corrente
$[\Gamma_\theta]$	matriz da condição de contorno da temperatura
$[\Gamma_\Omega]$	matriz da condição de contorno da vorticidade
A	operador diferencial
C	percentual de carregamento útil do tanque, $[\%]$
f	função genérica
\vec{n}	vetor normal
Y_1	posição da tomada de saída, adimensional, y_1/H
Y_2	posição da tomada de entrada, adimensional, y_2/H

SÍMBOLOS GREGOS

σ	relação entre capacidades térmicas, adimensional
ϕ	porosidade, [%]
μ	viscosidade dinâmica, [kg/ms]
ν	viscosidade cinemática, [m ² /s]
ρ	densidade, [kg/m ³]
ρ_0	densidade de referência, [kg/m ³]
α	difusividade térmica, [m ² /s]
β	coeficiente volumétrico de expansão térmica, [1/K]
ω	vorticidade, [1/s]
Ω	vorticidade adimensional
ψ	função corrente, [m ² /s]
Ψ	função corrente adimensional
θ	temperatura adimensional
γ	incremento genérico
τ	tempo adimensional
α_c	coeficiente genérico
β_c	coeficiente genérico
$\Delta\tau$	incremento de tempo, adimensional
Δn	subdivisão da malha
ΔN	subdivisão da malha, adimensional
ξ	coordenada do elemento de referência na direção x
η	coordenada do elemento de referência na direção y
ε	tolerância percentual, [%]
Φ	variável genérica
Γ_e	superfície elementar

ÍNDICES SUBSCRITOS

<i>i, j, k</i>	referentes à discretização
<i>f</i>	referente ao fluido de trabalho
<i>mp</i>	referente ao meio poroso
<i>s</i>	referente à matriz sólida
<i>e</i>	referente ao volume e superfície elementares
<i>t</i>	referente à entrada
<i>o</i>	referente à saída
<i>w</i>	referente às fronteiras do armazenador
<i>mix</i>	referente à mistura
<i>m</i>	avaliação temporal de variável
<i>n</i>	relativo à iteração

Capítulo 1

Introdução

1.1 – Generalidades

A crise de energia nos anos setenta manifestou-se principalmente pelo aumento acentuado nos preços da energia e pela ameaça de esgotamento dos recursos petrolíferos. Esta situação preocupante veio estimular o interesse em processos de aproveitamento de formas de energia alternativas, bem como a comercialização de equipamentos para as transformar, de modo a poderem satisfazer as necessidades de consumo de energia da humanidade.

Assim, muitas esperanças foram depositadas em fontes de energia que a natureza põe à disposição do homem, as chamadas energias renováveis: o sol, os ventos, os cursos de água, as ondas, as marés, os resíduos animais e vegetais e o calor das águas subterrâneas. E o fato dos processos de conversão destas fontes de energia não serem poluentes tornava-as especialmente atraentes para uma humanidade já preocupada com a degradação do meio ambiente.

Após a crise energética, com a estabilização dos preços do petróleo e previsões menos pessimistas sobre as reservas de combustíveis fósseis

ainda por explorar, diminuíram os interesses dos políticos responsáveis pelo planejamento energético, dos fabricantes de equipamentos e dos consumidores de energias renováveis. Mais recentemente, no entanto, novas ameaças de crise energética motivaram novamente a retomada do estudo das fontes alternativas de energia, dentre essas a energia solar.

1.2 – A energia solar

Investimentos científico, político, tecnológico e financeiro realizados permitiram demonstrar que alguns campos de aplicação da energia convertida a partir dos recursos energéticos renováveis eram tecnicamente domináveis e economicamente vantajosos para seus utilizadores. Entre estes se encontram algumas aplicações da energia solar.

O aproveitamento da energia gerada pelo Sol, inesgotável na escala terrestre de tempo, tanto como fonte de calor quanto de luz, é hoje, sem sombra de dúvidas, uma das alternativas energéticas mais promissoras para enfrentar os desafios do novo milênio. E quando se fala em energia, deve-se lembrar que o Sol é responsável pela origem de praticamente todas as outras formas de energia. Em outras palavras, as formas de energia são, em última instância, derivadas da energia do Sol. (CRESESB, 2003).

Algumas formas de utilização da energia solar são apresentadas a seguir:

a) Energia solar fototérmica: nesse caso, há interesse na quantidade de energia que um determinado corpo é capaz de absorver, sob a forma de calor, a partir da radiação solar incidente no mesmo. A utilização dessa forma de energia implica em como captá-la e armazená-la. Os equipamentos mais difundidos com o objetivo específico de se captar a energia solar fototérmica são conhecidos como *coletores de energia solar*. Os coletores de energia solar são aquecedores de fluidos (líquidos ou gasosos) e são classificados em *coletores concentradores* ou *coletores planos* em função da existência ou não de

dispositivos de concentração da radiação solar. O fluido aquecido (água aquecida para banho, ar quente para secagem de grãos, gases para acionamento de turbinas, etc.), é armazenado em reservatórios termicamente isolados até o seu uso. (CRESESB, 2003).

Os coletores de energia solar planos são, hoje, largamente utilizados para aquecimento de água em residências, hospitais, hotéis, etc., devido à economia e redução do consumo de energia elétrica.

b) Arquitetura bioclimática: é o estudo que visa harmonizar as construções ao clima e características locais, pensando no homem que habitará ou trabalhará nelas, e tirando partido da energia solar, através de correntes convectivas naturais e de microclimas criados por vegetação apropriada. É a adoção de soluções arquitetônicas e urbanísticas adaptadas às condições específicas (clima e hábitos de consumo) de cada lugar, utilizando, para isso, a energia que pode ser diretamente obtida das condições locais. A arquitetura bioclimática não se restringe a características arquitetônicas adequadas. Preocupa-se, também, com o desenvolvimento de equipamentos e sistemas que são necessários ao uso da edificação (aquecimento de água, circulação de ar e de água, iluminação, conservação de alimentos, etc.) e com o uso de materiais de conteúdo energético tão baixo quanto possível. (CRESESB, 2003).

c) Energia solar fotovoltaica: é a energia obtida através da conversão direta da luz em eletricidade (efeito fotovoltaico). O efeito fotovoltaico, relatado por Edmond Becquerel, em 1839, é o aparecimento de uma diferença de potencial nos extremos de uma estrutura de um material semicondutor, produzida pela absorção da luz. A célula fotovoltaica é a unidade fundamental do processo de conversão. Inicialmente o desenvolvimento da tecnologia apoiou-se na busca por empresas do setor de telecomunicações, bem como de formas de energia para sistemas instalados em localidades remotas. O segundo agente impulsionador foi a “corrida espacial”, com o desenvolvimento de equipamentos de baixo custo e baixo peso para fornecer a quantidade de energia necessária para longos períodos

de permanência no espaço. Outro uso espacial que impulsionou o desenvolvimento desses equipamentos foi à necessidade de energia para satélites. (CRESESB, 2003).

Assim, nota-se a importância das aplicações da energia solar, visto que investimentos já realizados mostraram as vantagens de sua utilização. Nesse contexto insere-se o estudo do armazenamento de energia, visando sua melhoria e ao aperfeiçoamento e otimização dos equipamentos envolvidos e, conseqüentemente, diminuindo os custos envolvidos nos processos.

1.3 – Processos de armazenamento de energia

Existem diversas formas de se armazenar energia, entre elas: armazenamento térmico (sensível ou latente), armazenamento por bombeamento de água, armazenamento por vapor pressurizado, armazenamento por ar comprimido, armazenamento eletromagnético, armazenamento eletroquímico, armazenamento químico, armazenamento mecânico, entre outros. Alguns parâmetros como o tipo de energia a ser armazenada, a duração da armazenagem, o uso final da energia, além de outros fatores, é o que determina a adoção de um ou outro sistema de armazenamento. (CRESESB, 2003).

Os sistemas de armazenamento térmico são usualmente os de maior aplicabilidade, e tem sua utilização na grande maioria dos processos industriais, além de aplicação direta em coletores de energia solar para aquecimento de água, resfriamento e aquecimento ambiental, em processos de secagem e outros.

Pode-se subdividi-los em:

a) armazenamento de calor sensível – feito através da elevação da temperatura de líquidos ou sólidos, sendo este último mais raro.

b) armazenamento de calor latente – também chamado de armazenamento por mudança de fase, onde se usa o calor latente de fusão ou vaporização de materiais como sais, enxofres, materiais compostos e outros.

c) armazenamento híbrido – quando se consegue armazenar calor combinando os calores sensível e latente.

Mesmo sabendo-se que as capacidades térmicas específicas dos armazenadores de calor sensível são menores que as dos armazenadores de calor latente, é ainda interessante analisar com maior profundidade o armazenamento de calor sensível em líquidos, sendo este o objetivo principal deste trabalho. Isto se justifica pela facilidade de operação, facilidade de controle, baixo custo, níveis de temperaturas mais baixos e principalmente a possibilidade de operar diretamente com o fluido de trabalho.

1.4 – Motivação

Dentre as motivações para a realização desse trabalho, destacam-se o armazenamento e a utilização da energia solar. Devido a defasagem no tempo entre o período em que o fluido de trabalho é aquecido pela radiação solar e aquele em que é utilizado, torna-se necessário seu armazenamento para posterior utilização. Daí que, na maioria das instalações solares, é necessário incluir reservatórios para o armazenamento da energia captada, conhecidos como armazenadores térmicos.

Inicialmente surgiram unidades de armazenamento por calor sensível, que quando acopladas a um determinado sistema como, por exemplo, a uma bateria de coletores de energia solar, operavam entre dois níveis distintos de temperatura do fluido de trabalho. Caso houvesse um processo de mistura entre as massas de fluido quente (proveniente dos coletores para o topo do tanque) e fluido frio (da alimentação injetado no fundo do tanque), a temperatura do fluido

estocado teria um valor médio abaixo da temperatura do fluido quente de entrada. (PADILHA, 1982).

Em alguns sistemas de aproveitamento de energia, no entanto, este nível médio de temperatura alcançado é indesejável, por não ser suficiente para acionar uma máquina térmica, por exemplo, havendo pouca disponibilidade do sistema de estocagem em fornecer calor a níveis determinados de temperatura para realização de trabalho. Assim, considerando a necessidade de manutenção de níveis constantes de temperatura nas fontes quente e fria e da obtenção, ao mesmo tempo, de uma grande quantidade de energia térmica armazenada, surgiu à idéia de se utilizar o processo de estocagem por estratificação. Através desse processo, num único reservatório consegue-se manter um líquido a duas temperaturas distintas, sem ocorrer mistura. O fluido quente é injetado pelo topo do tanque, ficando aí estocado, ao passo que o fluido frio sai pelo fundo do tanque seguindo o caminho inverso. (PADILHA, 1982).

Esta forma de estocagem vem sendo amplamente estudada nas duas últimas décadas, tanto em estudos teóricos, nos quais busca-se desenvolver modelos matemáticos capazes de simular o comportamento da frente de estratificação, como estudos experimentais, onde são utilizados protótipos de armazenadores térmicos para a obtenção dos perfis de temperatura do fluido estocado.

1.5 – Objetivos

O objetivo principal desse trabalho é desenvolver um modelo matemático e obter sua respectiva solução numérica para estudar o comportamento da estratificação térmica de líquido em um armazenador térmico em operação dinâmica de carregamento. Esse modelo matemático será obtido através das equações de Navier-Stokes utilizando a formulação transiente de vorticidade e função corrente e sua solução obtida numericamente através da técnica dos elementos finitos.

É incluído no interior do armazenador térmico um meio poroso a fim de verificar sua influência na estratificação térmica do fluido armazenado e a sua relação com a eficiência de armazenamento. O meio poroso será modelado matematicamente através da formulação original de Darcy e os resultados obtidos para o armazenador sem e com o meio poroso. Além disso, serão analisados os efeitos da espessura, posição e permeabilidade do meio poroso. Por fim, para analisar os efeitos da inclusão do material poroso no tanque, serão calculados a temperatura de mistura do fluido de trabalho e a porcentagem de carregamento útil do tanque com o tempo.

Para alcançar esses objetivos é necessário o desenvolvimento dos seguintes tópicos:

1. Análise e compreensão das equações de Navier-Stokes para o meio livre e da formulação original de Darcy para o meio poroso.
2. Estudo e aplicação da técnica dos elementos finitos para discretizar as equações diferenciais parciais do problema.
3. Desenvolvimento de um código computacional em ambiente de programação C para solucionar numericamente as equações discretizadas.
4. Obtenção da solução numérica do problema para diversos parâmetros de projeto.
5. Análise dos resultados e conclusões.

Capítulo 2

Revisão de literatura

Nas duas últimas décadas, um grande esforço técnico e científico tem sido feito com os objetivos de melhorar o conhecimento teórico e aperfeiçoar os modelos existentes de armazenadores térmicos de líquido estratificado. Com isso, diversos autores têm realizado tanto estudos teóricos e experimentais desses armazenadores com um objetivo em comum: melhorar a eficiência desses tanques através do aumento de sua capacidade de armazenamento de energia. Assim, nessa revisão de literatura buscou-se traçar um panorama geral dessa área do conhecimento, desde estudos pioneiros sobre esses armazenadores, passando pelo desenvolvimento de técnicas numéricas e códigos computacionais relacionados à sua análise e por fim algumas técnicas que vêm sendo utilizadas no sentido de aumentar a quantidade de energia armazenada através da melhoria da estratificação térmica do fluido de trabalho.

Cabelli (1977) realizou um estudo numérico utilizando um modelo matemático bidimensional para analisar o desenvolvimento transiente dos campos de função corrente e temperaturas em armazenadores de líquido estratificado utilizados em aplicações de energia solar. A modelagem matemática do problema foi feita através das equações de Navier-Stokes e sua solução foi obtida numericamente através do método de diferenças finitas. Foram estudados

casos com um e dois circuitos de escoamento e também as configurações geométricas das tomadas de entrada e saída do fluido de trabalho. Assim, puderam ser analisados os efeitos do número de Reynolds e do número de Grashof na estratificação térmica do fluido armazenado. Além disso, foi feita uma comparação entre o modelo matemático bidimensional e sua solução numérica com uma solução analítica unidimensional. Os resultados mostraram que a discrepância entre os dois modelos é pequena.

Em outro estudo numérico, Chan et al. (1983) desenvolveram um modelo matemático bidimensional e transiente para analisar o escoamento convectivo misto em um armazenador térmico com estratificação de líquido. O desenvolvimento do modelo matemático foi baseado nas equações de conservação para escoamento convectivo natural e laminar utilizando a aproximação de Boussinesq. O escoamento convectivo forçado foi imposto através da utilização de condições de influxo e efluxo. Assim, o desenvolvimento transiente dos campos de velocidades e temperaturas foi analisado para diversas condições de contorno. Além disso, foram também estudadas as configurações geométricas das tomadas de entrada e saída do fluido de trabalho. Foi concluído que o armazenador pode armazenar energia a uma maior taxa quando água quente é carregada pelo topo do tanque e água fria é extraída pela sua base. Concluiu-se também que a direção das tomadas de entrada e saída, que podem ser tanto verticais ou horizontais, tem efeito desprezível na eficiência de armazenamento térmico.

Um modelo semi-empírico unidimensional e transiente foi proposto por Padilha (1982) para descrever a história dos perfis de temperatura de um líquido e das paredes de seu armazenador durante as operações de carga, descarga e resfriamento natural. O modelo matemático foi solucionado numericamente e os resultados teóricos foram comparados com dados experimentais disponíveis na literatura. Foi verificada também a influência da relação altura-diâmetro do armazenador na eficiência da estratificação térmica.

Guo e Wu (1985) também realizaram um estudo numérico utilizando um modelo matemático bidimensional para analisar o desenvolvimento transiente dos campos de função corrente e temperaturas em armazenadores térmicos com líquido estratificado utilizados em sistemas de armazenamento de energia solar. O modelo matemático foi desenvolvido utilizando os princípios de convecção natural e forçada. Para obter a solução numérica do modelo matemático, um sistema de equações diferenciais parciais, foi desenvolvido um esquema ADI aperfeiçoado, o que permitiu obterem-se soluções numéricas para valores elevados dos números de Grashof e Reynolds. Assim, puderam ser analisados os efeitos desses adimensionais na estratificação térmica do fluido de trabalho, com um e dois circuitos de escoamento no interior do armazenador.

Carroci (1987) realizou um trabalho cujo objetivo foi estudar o comportamento térmico de um armazenador de calor sensível de líquido estratificado. Foram obtidos modelos matemáticos utilizando as equações de conservação com algumas considerações, acompanhadas das condições de contorno adequadas para cada situação de operação do armazenador. Com esses modelos resolvidos numericamente pelo método de diferenças finitas, foram determinados os perfis de temperaturas do fluido de trabalho, mostrando a degradação da estratificação no resfriamento natural e o comportamento desses perfis de temperatura em operações de carregamento e descarregamento. Todos os casos resolvidos teoricamente foram comparados com resultados experimentais, apresentando boa concordância entre si.

Em outro trabalho, Hahne e Chen (1998) conduziram um estudo numérico das características do escoamento e transferência de calor em armazenadores cilíndricos de água quente durante processo de carregamento. O armazenador foi considerado adiabático e a eficiência de carregamento foi utilizada para verificar a eficiência da estratificação térmica. Foi dada ênfase aos efeitos que influenciam a eficiência de carregamento, tais como: diferentes temperaturas de carregamento, velocidades e vazões de carregamento e relações de aspecto do armazenador. Os resultados foram apresentados tanto na forma

dimensional quanto adimensional. Eles indicam que os números de Richardson, Peclet, Fourier e a relação de aspecto do armazenador têm grande influência na eficiência de carregamento. Foi obtida também uma correlação entre esses parâmetros, podendo ser utilizada no auxílio de projetos de armazenadores de água quente.

Uma melhoria da transferência de calor em um sistema de armazenamento de energia por calor latente utilizando um tubo aletado internamente foi apresentada por Zhang e Faghri (1996). Nesse estudo, um material de mudança de fase ocupa o espaço anular em torno do tubo, enquanto o fluido escoava internamente ao tubo aletado. A fusão do material de mudança de fase é descrita por um modelo de transformação de temperaturas combinado com a transferência de calor do fluido de transferência. A condução de calor nas aletas internas foi modelada matematicamente como sendo um problema de condução de calor transiente bidimensional e solucionado numericamente pelo método de diferenças finitas. Os resultados mostraram que a adição de aletas internas pode intensificar a transferência de calor em sistemas de armazenamento de energia térmica quando um fluido com baixa condutividade térmica é utilizado como fluido de transferência.

Ismail, Leal e Zanardi (1996) obtiveram resultados numéricos de armazenadores de líquido estratificado para armazenamento a quente. Foram obtidas soluções numéricas usando a técnica dos volumes de controle. Foi utilizado um modelo bidimensional simplificado para o caso de condução pura. Os resultados numéricos obtidos através do modelo bidimensional foram comparados com resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura, apresentando boa concordância entre si.

O desenvolvimento transiente da estratificação térmica em sistemas armazenadores de líquido foi analisado numericamente por Al-Najem e El-Refae (1997). Para isso foi desenvolvido um código computacional baseado na formulação integral de Chapeau-Galerkin. A validação do código

computacional foi feita através de comparação com dados experimentais disponíveis na literatura e resultados em diferenças finitas. Os resultados apresentados mostraram que o fator de mistura turbulento, oriundo das perturbações hidrodinâmicas nas tomadas de entrada e saída do armazenador térmico, é importante na avaliação do desempenho térmico desses armazenadores. O fator de mistura turbulento é incluído no modelo matemático para produzir boa concordância com os dados experimentais. Além disso, a variação desse fator é expressa como função exponencial decrescente dos números de Reynolds e Richardson. Foram analisados também os efeitos de malha nos resultados computacionais e no tempo de processamento.

Nelson, Balakrishnan e Murthy (1999) realizaram um estudo numérico da degradação da energia armazenada e da estratificação térmica em armazenadores de frio verticais e cilíndricos utilizando um modelo de condução bidimensional. Foi visto que o grau da estratificação térmica depende da relação altura-diâmetro, espessura da parede do armazenador, das propriedades termofísicas do material do armazenador, do tipo e espessura do isolamento utilizado e do projeto do sistema de admissão de água fria e água quente. Analisaram-se alguns casos de carregamento, descarregamento e resfriamento natural. Notou-se que a degradação das termoclinas ocorre principalmente devido às perdas de calor para o meio ambiente, difusão térmica no tanque de armazenamento, condução axial na parede do armazenador e mistura entre as massas de diferentes temperaturas durante as operações de carregamento e descarregamento.

Convecção mista em tanques de armazenamento térmico com líquido estratificado foi analisada numericamente por Spall (1998). Os cálculos numéricos foram realizados admitindo injeção de água fria pela base de um tanque, considerado-o isolado do ambiente e contendo um fluido inicialmente em repouso e com temperatura constante. Os resultados foram apresentados para números de Reynolds de 500 a 3000 e números de Arquimedes de 0,5 a 5. Os resultados foram obtidos utilizando o modelo de turbulência usual e foi visto que

para a formação e manutenção da estratificação térmica, o número de Arquimedes deve ser maior que dois, independentemente do número de Reynolds.

Também Eames e Norton (1998) realizaram um estudo teórico e experimental em armazenadores de água quente com estratificação. Eles compararam os resultados obtidos através de um modelo numérico transiente tridimensional em volumes finitos com medidas experimentais de velocidades de entrada e perfis de temperaturas iniciais. Foi realizado também um estudo paramétrico dos efeitos das localizações das tomadas de entrada e saída do fluido de trabalho na eficiência de armazenamento térmico para uma ampla faixa de condições de operação do armazenador.

Em outro estudo numérico e experimental, Leal (1999) analisou o armazenamento de calor e frio. Foi proposto um modelo numérico bidimensional e transiente baseado nas equações da conservação da massa, quantidade de movimento e conservação da energia. Foi feita uma simplificação no modelo bidimensional e foram realizadas comparações entre o modelo completo e simplificado. Os resultados numéricos foram comparados com resultados experimentais de resfriamento natural e operações de carga e descarga, onde foi verificada boa concordância entre os mesmos. Foram estudados também alguns parâmetros que influenciam a eficiência de extração, tais como: relação de aspecto, diferença entre a temperatura do fluido na entrada e saída e vazão mássica do fluido de trabalho.

O comportamento térmico de um armazenador cilíndrico e horizontal com estratificação de líquido foi estudado por Alizadeh (1999) experimentalmente e numericamente. Para isso foram utilizados quatro arranjos experimentais nos quais água fria é injetada pela base do tanque com diferentes temperaturas iniciais. Além disso, foi mostrado que a estratificação térmica pode ser melhorada através da utilização de um bocal divergente na tomada de entrada do fluido de trabalho, provocando uma redução de sua velocidade. Para validar os resultados experimentais, foram utilizados dois modelos matemáticos

unidimensionais para efeito de comparação, conhecidos como *Turbulent Mixing Model* e *Displacement Mixing Model*. Os resultados obtidos por esses dois modelos matemáticos mostraram-se em boa concordância com os resultados experimentais obtidos.

Num outro estudo numérico, Bouhdjar e Harhad (2002) desenvolveram um modelo matemático para analisar o escoamento convectivo misto e transiente em um armazenador térmico de líquido estratificado. Nesse estudo foi analisada a utilização de diferentes fluidos como meios de armazenamento de calor em tanques cilíndricos com diferentes relações de aspecto. Numericamente, a utilização de diferentes fluidos foi feita através da variação das diferentes propriedades físicas dos mesmos, representadas pelo número de Prandtl. O sistema em estudo consiste em um tanque cilíndrico com injeção de fluido pelo topo e descarga de fluido pela base. O modelo matemático foi desenvolvido através das equações de conservação para escoamento convectivo laminar e natural baseadas na aproximação de Boussinesq. O escoamento convectivo forçado foi imposto através de condições de contorno de influxo e efluxo e a solução do problema foi obtida numericamente através do método dos volumes de controle. Na análise foram considerados três fluidos distintos e relações de aspecto variando de 3 a 1/3. Com isso, pôde-se fazer uma análise desses parâmetros na eficiência de estratificação do líquido no armazenador.

Num estudo numérico e experimental, Leal e Ismail (2001) apresentaram resultados do desenvolvimento transiente dos campos de velocidades e temperaturas em tanques termicamente estratificados para armazenamento de frio e quente. Na análise foi utilizado um modelo matemático bidimensional baseado nas equações da continuidade, quantidade de movimento e energia. A solução numérica do modelo matemático foi obtida utilizando-se a técnica dos volumes de controle. Os resultados numéricos foram comparados com resultados experimentais obtidos pelos autores e também por outros autores, apresentando boa concordância entre si. Foram analisados também alguns

parâmetros que influenciam a eficiência de extração tais como: relação de aspecto, diferença entre a temperatura de entrada e saída do fluido de trabalho e sua velocidade de escoamento. Foi visto que a eficiência de extração aumenta com o aumento da relação de aspecto, com o aumento da velocidade de escoamento e também com a diferença de temperaturas do fluido.

Com o objetivo de melhorar a estratificação térmica em um tanque de armazenamento de água utilizado em sistemas de captação de energia solar, Adams e Davidson (1993) realizaram um estudo experimental com um meio poroso flexível fixado no interior do armazenador. O meio poroso tem como objetivo reduzir a quantidade de movimento do fluido na entrada e minimizar a mistura entre as massas de água de diferentes temperaturas, preservando sua estratificação térmica. Os testes foram realizados de acordo com três montagens experimentais e em cada simulação foi calculado um número de mistura adimensional baseado na energia armazenada no interior do tanque. Os resultados obtidos com o meio poroso flexível foram comparados com resultados obtidos anteriormente com um tubo rígido tipo chuveiro. Foi concluído que sob condições usuais de operação, o armazenador térmico apresentou maior eficiência de estratificação com o meio poroso flexível do que com o tubo rígido tipo chuveiro.

Com o mesmo objetivo, Yee e Lai (2001) desenvolveram um modelo matemático e obtiveram sua solução numérica para um tubo poroso rígido localizado no interior de um armazenador térmico para analisar seus efeitos na estratificação térmica de líquido. O modelo matemático foi desenvolvido através das equações de Navier-Stokes para a região livre e através do modelo original de Darcy para o tubo poroso, utilizando a formulação transiente de vorticidade e função corrente para predizer o desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas durante um processo de carregamento. Foi considerado um número de Reynolds de 200 para o escoamento de entrada e o número de Richardson variando de 0,01 a 100. Outros parâmetros analisados são o número de Biot (ou seja, perda de calor pelo tanque), o número de Darcy (permeabilidade do tubo poroso), a localização de um defletor na região do escoamento de entrada e o

diâmetro do tubo poroso. Os resultados mostraram que todos esses fatores devem ser levados em consideração para a melhoria de projetos de armazenadores de líquido estratificado com um tubo poroso no seu interior.

Uma análise dos conteúdos de energia e exergia em armazenadores térmicos de líquido estratificado foi realizada por Rosen (2001). Para estimar as quantidades de energia e exergia foram utilizados seis modelos distintos de distribuição de temperaturas. A escolha de uma distribuição em particular envolve alguns fatores, tais como precisão dos resultados e esforço computacional. Para cada um dos modelos de distribuição de temperaturas utilizados, foi mostrada sua relação com a formação da estratificação térmica, com a eficiência de armazenamento de energia e com sua capacidade de armazenamento de exergia. Assim, espera-se que os resultados obtidos pela análise da exergia sejam úteis no projeto e análise de sistemas de armazenamento térmico.

A dinâmica da termoclina foi analisada por Berkel, Rindt e Steenhoven (2002) em armazenadores de líquido estratificado através de análise numérica e comparação com resultados experimentais. As análises experimental e numérica mostraram-se complementares. Enquanto a experimental mostra o processo de mistura na termoclina, a simulação numérica analisa a variação espacial e temporal da termoclina. A concordância entre as duas análises é boa.

Zachár et al. (2003) desenvolveram um trabalho numérico e experimental para avaliar os efeitos de placas de diferentes dimensões posicionadas na direção do escoamento de entrada em um armazenador de líquido com estratificação. A placa tem o objetivo de melhorar a estratificação térmica do fluido de trabalho no interior do armazenador térmico através da redução da quantidade de movimento do escoamento de entrada. Para isso foi desenvolvido um modelo matemático através das equações de Navier-Stokes cuja solução foi obtida numericamente através do método de diferenças finitas. Os resultados numéricos foram validados através de resultados experimentais. Foi observado

que placas com maiores dimensões melhoram a estratificação térmica do fluido em escoamentos com velocidades mais elevadas. Foram estudados também casos de entrada de água fria pelo topo do tanque. Notou-se que o diâmetro da placa e a distância entre a placa e o topo do tanque tem efeito significativo na estratificação térmica do fluido no interior do armazenador térmico quando a água fria entra pelo topo do tanque.

De maneira a melhorar o processo de armazenamento térmico, Mehling et al. (2003) adicionaram um substrato de um material de mudança de fase (PCM) no topo de um tanque de armazenamento de água quente estratificada termicamente. Foi visto que além de proporcionar uma maior densidade de armazenamento de energia, esse substrato compensou as perdas de calor do topo do tanque para o ambiente. Foram apresentados tanto resultados experimentais através de um protótipo de armazenador quanto resultados numéricos utilizando o método de diferenças finitas. Os experimentos e simulações numéricas foram realizados idealizando diferentes substratos cilíndricos do material de mudança de fase. Com somente 1/16 do volume do armazenador substituído pelo material de mudança de fase, 3/16 da quantidade de água localizada no topo do tanque teve sua capacidade de armazenamento aumentada de 50% para 200% e sua densidade de armazenamento de energia foi aumentada de 20% para 45%.

Shah e Furbo (2003) realizaram um estudo teórico e experimental dos efeitos das configurações da tomada de entrada de água em um armazenador térmico utilizado em aplicações solares. Cálculos realizados através dos conceitos da mecânica dos fluidos computacional permitiram analisar três diferentes projetos de entrada e ilustrar suas influências no comportamento térmico de um armazenador de energia solar. Os resultados mostraram claramente que o projeto da tomada de entrada tem grande impacto no desenvolvimento do escoamento no interior do tanque e também no armazenamento de água quente. Além disso, foram realizados cálculos numéricos para simular o carregamento do armazenador. Um protótipo de armazenador térmico, similar ao armazenador térmico simulado pelo modelo matemático foi construído com paredes cilíndricas

e transparentes, de maneira que as modificações na estrutura do escoamento devido aos jatos de entrada pôde ser visualizada. Os resultados experimentais foram analisados utilizando a primeira e segunda lei da termodinâmica. Foram mostradas que as variações de entropia e exergia durante o processo de carregamento são influenciadas pelo número de Richardson, pelo volume do tanque e pelas condições iniciais do fluido armazenado.

Em outro estudo numérico e experimental, Shin et al. (2004) analisaram o mecanismo de estratificação térmica em um tanque armazenador de líquido para analisar condições ótimas de operação e projeto. Para isso foi desenvolvido um código computacional para analisar o escoamento de fluido no interior do tanque utilizando o algoritmo SIMPLE. A validação do código computacional foi realizada através de comparação com dados experimentais obtidos com um protótipo em escala. Assim, foi feita uma análise sistemática de alguns parâmetros operacionais e de projeto tais como: dimensões do armazenador, tempo de carregamento, geometria dos difusores e velocidades de entrada e saída do fluido de trabalho. Considerando que a eficiência térmica do tanque armazenador é reduzida drasticamente devido aos efeitos da recirculação do fluido no interior do armazenador e mistura das massas de diferentes temperaturas devido aos efeitos de turbulência, foram propostas novas técnicas de projeto onde a mistura entre as massas de água quente e fria é mínima. Assim, de acordo com um série de estudos paramétricos foram obtidos diversos resultados para parâmetros de projeto e operação de armazenadores térmicos.

Assim, pela revisão de literatura nota-se que existe um grande esforço teórico e experimental com os objetivos de melhor compreender os mecanismos relacionados à estocagem de energia em armazenadores de líquido com estratificação, de maneira a otimizar a quantidade de energia armazenada. Para isso, diversos assuntos vêm sendo estudados, como por exemplo: um melhor projeto e localização das tomadas de entrada e saída do fluido de trabalho, a busca por parâmetros ótimos de projeto e operação desses tanques e a utilização de materiais porosos, todos na tentativa de melhorar o processo de estratificação

térmica do fluido armazenado. Esse é também o objetivo principal desse trabalho, que consiste na análise dos efeitos da inclusão de um meio poroso no interior de um armazenador térmico com estratificação de líquido.

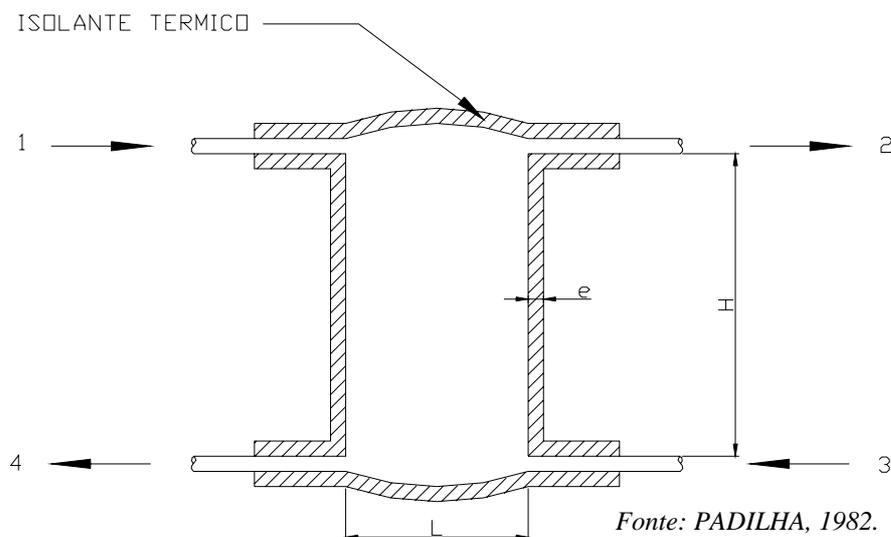
Capítulo 3

Modelo matemático

3.1 – Descrição

No processo de estratificação térmica, o fluido no interior do reservatório distribui-se em três regiões distintas: uma região onde o fluido é quente, fluido este proveniente de um sistema de captação qualquer; uma região fria, alimentada pelo fluido que retorna de um sistema de utilização; e uma outra região intermediária, que separa as duas precedentes e está submetida a um apreciável gradiente de temperatura. A curva que representa a história da temperatura do fluido em estratificação ao longo da altura do tanque é denominada de termoclina. (PADILHA, 1982).

As Figuras 3.1 e 3.2 representam, respectivamente, um tanque de estocagem e o seu posicionamento num sistema genérico de utilização de energia. Ao tanque de estocagem associam-se dois circuitos independentes como pode ser visto na Figura 3.2: o circuito primário, que compreende o sistema de captação e conversão da energia em energia térmica através do aquecimento de um fluido de trabalho que se deslocará para a região superior do tanque de estocagem, e o circuito secundário, que se constitui no sistema que irá utilizar este fluido aquecido, resfriando-o e injetando-o na região inferior do armazenador.



1 – Entrada do fluido quente 2 – Saída do fluido quente

3 – Entrada do fluido frio 4 – Saída do fluido frio

Figura 3.1 – Esquema de um armazenador térmico.

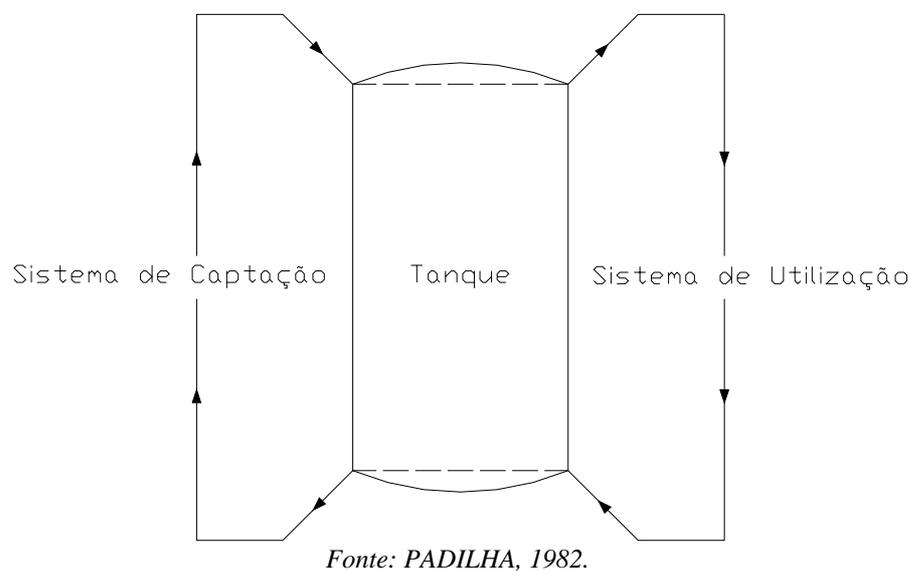


Figura 3.2 – Sistema captação-utilização de energia com estocagem térmica.

Conforme citado anteriormente, podem ser definidas três situações para o fluido no tanque de estocagem: carga, descarga e resfriamento natural. A primeira situação corresponde ao carregamento do tanque pelo fluido

quente, enquanto que a descarga corresponde a uma maior entrada de fluido frio, com a conseqüente retração da frente quente. Já o resfriamento natural corresponde à situação em que as duas frentes estão estacionárias, sendo que as perdas de energia através das paredes do armazenador para o ambiente, que ocorrem também nos outros dois casos, adquirem aí, um papel mais importante.

3.2 – Estratificação térmica

A estratificação em armazenadores vem sendo estudada com freqüência pois é de grande interesse conhecer o comportamento térmico desses armazenadores, com o intuito de melhorar sua eficiência e conseqüentemente diminuir o custo do calor armazenado.

Um dos fatores que prejudicam a estabilidade da estratificação, além das perdas externas, são as correntes convectivas que aparecem no interior do fluido de trabalho, acelerando a degradação da estratificação. Este efeito faz com que o armazenador anteriormente num estado estratificado caminhe para um estado homogêneo. Os vários estágios da degradação da estratificação térmica no interior do armazenador são registrados pelas termoclinas. O conhecimento do comportamento das termoclinas servirá para a seleção de tanques em projetos de sistemas térmicos em função dos parâmetros de operação da fonte quente e da carga. (PADILHA, 1982).

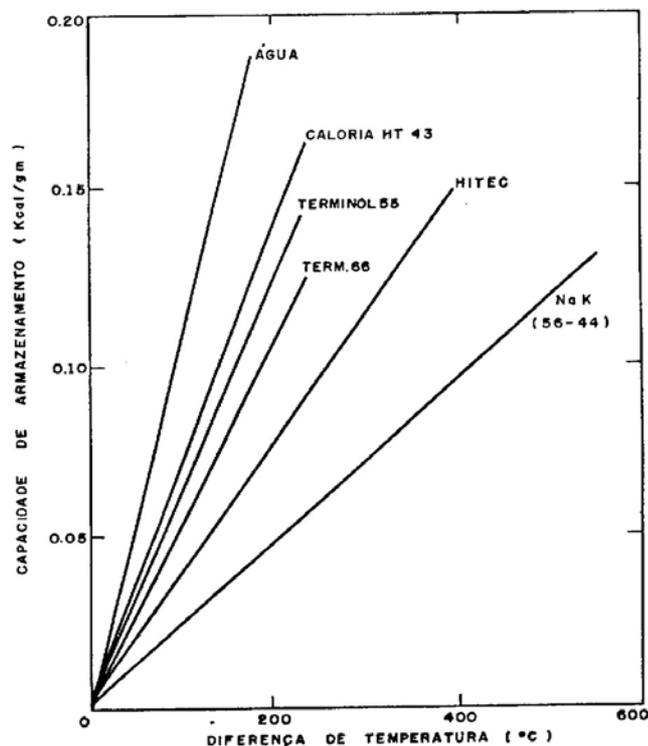
Com base nisso, recentemente considerável atenção tem sido dada às técnicas que podem ser utilizadas para promover e manter a estratificação térmica em tanques de armazenamento. Dentre essas, destaca-se a utilização de um tubo de distribuição tipo chuveiro, como descrito por Loehrke et al. (1979). A utilização desse dispositivo mostrou-se uma técnica bastante promissora, embora restrita a grandes vazões. Nesse caso, um tubo para injeção de líquido com orifícios em torno de sua circunferência é utilizado para distribuir e reduzir a quantidade de movimento do fluido na entrada do tanque e conseqüentemente minimizar a mistura entre as massas de diferentes temperaturas.

Um dispositivo modificado que utiliza o mesmo princípio físico, um tubo poroso de níquel, foi proposto por Yee e Lai (2001). De acordo com esse estudo, a utilização de um tubo poroso em um escoamento de baixa velocidade mostrou-se uma técnica bastante eficiente para a melhoria da estratificação térmica do fluido no tanque. Além disso, experimentalmente o dispositivo apresentou boa eficiência e com a vantagem de ser simples e não requerer modificações no projeto do sistema de estocagem e no modo de operação do tanque.

Outras técnicas também podem ser utilizadas, como por exemplo, a utilização de discos rígidos posicionados na direção do escoamento de entrada do fluido de trabalho no tanque, como descrito por Zachár et al. (2003), e experimentalmente a utilização de meios porosos flexíveis. (ADAMS e DAVIDSON, 1993). Outros fatores podem ser também considerados no estudo da estratificação térmica, tais como: vazão volumétrica do fluido entrando e saindo do tanque, o tamanho e a localização das tomadas de entrada e saída e o volume do armazenador.

Tudo isso indica que estão sendo desenvolvidos modelos matemáticos, numéricos e estudos experimentais visando um aumento da eficiência dos armazenadores térmicos através da melhoria da estratificação térmica do fluido armazenado. Esse também é o objetivo principal desse trabalho, que é utilizar um meio poroso no interior do armazenador a fim de verificar sua influência na formação e manutenção da estratificação térmica.

Para o armazenamento de calor sensível utilizando-se um líquido em baixas temperaturas, a água é o fluido mais adequado, pois reúne fatores importantes como alto calor específico, baixo custo, grande capacidade de armazenamento e segurança no seu manuseio por não ser tóxica nem inflamável. Na Figura 3.3 está mostrada a capacidade de armazenamento em função da diferença de temperatura imposta para vários fluidos utilizados para armazenamento térmico.



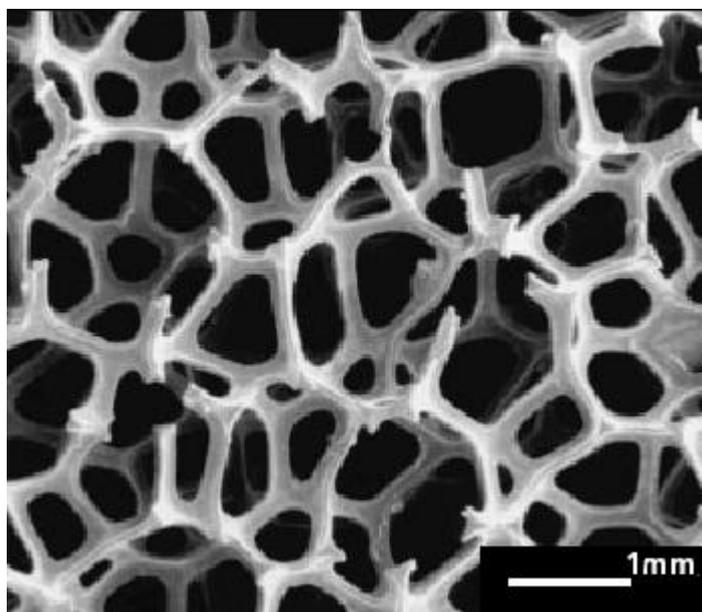
Fonte: CARROCI, 1987.

Figura 3.3 – Capacidade de armazenamento em função da diferença de temperatura imposta.

Como meio poroso, foram admitidas propriedades do níquel puro com porosidade de 98%, como aquele utilizado no trabalho de Yee e Lai (2001). Esse material é conhecido comercialmente como *INCOFOAM*, cuja estrutura cristalina pode ser visualizada na Figura 3.4. Esse material de alta porosidade, além de possuir excelente condutividade térmica, apresenta uma estrutura cristalina uniforme, o que lhe confere excelentes propriedades mecânicas, sendo fabricado com diferentes porosidades e espessuras. (BADICHE et al., 2000).

Esse material possui aplicações em baterias recarregáveis, onde alta porosidade, alta condutividade térmica e uma estrutura porosa regular são necessárias para se obter menores pesos e uma maior quantidade de energia absorvida. Possui também aplicações nas novas tecnologias em células de

combustíveis e devido a sua resistência a corrosão, altas temperaturas e grandes esforços, são amplamente utilizados como material de filtros. (BANHART, 2001).



Fonte: BADICHE, 2000.

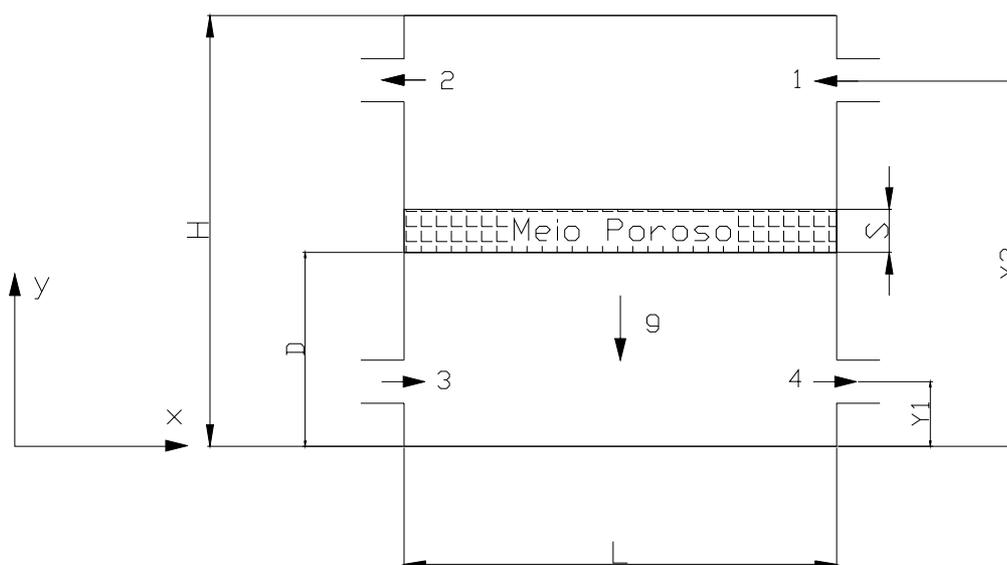
Figura 3.4 – Estrutura cristalina do níquel poroso.

3.3 – Modelo físico

Um tanque armazenador de geometria quadrada é considerado na análise. O fluido de trabalho utilizado é a água. Considerou-se que as perdas por radiação são pequenas, por se tratar de camadas de fluidos a baixas temperaturas. Para o estudo do desenvolvimento do escoamento com o tempo, deve-se concentrar a análise na transferência de calor causada pelo processo de convecção. Segundo Guo e Wu (1985), tanto a transferência de calor por convecção natural como a transferência de calor por convecção forçada são importantes para a obtenção dos perfis de velocidades e temperaturas do fluido no interior do armazenador. O escoamento forçado será imposto através de condições de contorno apropriadas.

A ênfase do presente trabalho é o estudo do desenvolvimento transiente dos perfis de velocidades e dos perfis de temperaturas do fluido no interior do armazenador. Além disso, inicialmente o armazenador foi considerado como perfeitamente isolado, eliminando as trocas de calor entre o tanque e o ambiente. As tomadas de saída e entrada do fluido de trabalho são consideradas horizontais e localizadas na superfície vertical direita do armazenador, respectivamente nas posições $Y_1 = 0,2$ e $Y_2 = 0,8$ com dimensão $Y_o = Y_t = 0,05$.

Assim, podem-se analisar os efeitos de um meio poroso disposto horizontalmente no centro do tanque armazenador, $Y = 0,5$, no processo de carregamento de água no armazenador térmico. Na Figura 3.5 está mostrado o esquema físico do armazenador térmico em análise:



1 – Entrada do fluido quente 2 – Saída do fluido quente
3 – Entrada do fluido frio 4 – Saída do fluido frio

Figura 3.5 – Armazenador térmico estratificado com meio poroso.

3.4 – Modelo teórico

O modelo matemático utilizado para analisar o desenvolvimento dos campos de velocidades e temperaturas no interior do armazenador térmico é

obtido através das equações de Navier-Stokes para o meio livre e através do modelo original de escoamento de Darcy para o meio poroso utilizando a formulação transiente de vorticidade e função corrente. No desenvolvimento do modelo matemático são feitas as seguintes considerações:

1. O meio poroso é considerado homogêneo e saturado pelo fluido e seu escoamento é caracterizado pela Lei de Darcy.
2. O meio poroso é considerado isotrópico e a matriz sólida é considerada em equilíbrio térmico com a água.
3. Exceto na superfície lateral esquerda, todas as outras superfícies do armazenador são consideradas como perfeitamente isoladas do ambiente.
4. As propriedades termofísicas da água são assumidas constantes, exceto sua variação de densidade, originando as forças de empuxo.
5. Na operação de carregamento da água, esta é considerada incompressível e seu escoamento transiente, laminar e bidimensional.
6. Para a água, o calor específico apresenta um valor elevado de modo que sua temperatura não seja influenciada pelo atrito e, portanto, pela dissipação viscosa.

3.5 – Modelo matemático para o meio livre

O modelo matemático para o meio livre é baseado nas equações de Navier-Stokes para um fluido puro e newtoniano. Desprezam-se os termos de dissipação viscosa e de pressão na equação da energia e utiliza-se a aproximação usual de Boussinesq. Assim, as equações para um fluido incompressível, utilizando a formulação transiente de vorticidade e função corrente são representadas na forma dimensional pelas equações 3.1 a 3.3, dadas por:

$$\omega = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = g\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.3)$$

Detalhes da obtenção do modelo matemático para o escoamento meio livre podem ser vistos no Apêndice A. As equações 3.1 a 3.3 são adimensionalizadas através das seguintes variáveis adimensionais:

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \tau = \frac{tu_0}{H}, \quad \Psi = \frac{\psi}{u_0 H}, \quad \Omega = \frac{\omega H}{u_0}$$

onde H é o comprimento característico, representado pela altura do tanque armazenador. Após substituições das variáveis adimensionais nas equações 3.1 a 3.3 e posterior manipulação algébrica, obtém-se as equações finais na forma adimensional para o escoamento no meio livre, equações 3.4 a 3.6, dadas por:

$$\Omega = - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (3.6)$$

onde Re, Pr e Gr representam os números usuais de Reynolds, Prandtl e Grashof, definidos respectivamente por:

$$\text{Re} = \frac{u_0 H}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\rho \nu C_p}{k}, \quad \text{Gr} = \frac{g \beta (T_1 - T_0) H^3}{\nu^2}$$

O número de Reynolds representa a razão entre as forças de inércia e forças viscosas. Ele determina a existência de um escoamento laminar ou turbulento. Para baixos valores de Reynolds, as forças viscosas são suficientemente grandes em comparação às forças inerciais. Assim, o escoamento laminar é mantido. Porém, com o aumento de Reynolds, os efeitos viscosos se tornam progressivamente menos importantes quando comparados aos efeitos inerciais, e pequenas perturbações podem ser amplificadas até o ponto onde ocorre à transição para o regime turbulento. (INCROPERA e DEWITT, 1998).

A interpretação física do número de Prandtl se origina na sua definição como a razão entre a difusividade de momento e a difusividade térmica. O número de Prandtl fornece uma medida da efetividade relativa dos transportes, por difusão, de momento e energia no interior das camadas limite fluidodinâmica e térmica, respectivamente. Por fim, o número de Grashof fornece uma medida da razão entre as forças de empuxo e as forças viscosas na camada limite fluidodinâmica. Seu papel na convecção natural é muito semelhante ao do número de Reynolds na convecção forçada. (INCROPERA e DEWITT, 1998).

A relação Gr/Re^2 é usualmente conhecida como o número de Richardson, Ri, que é uma medida da importância relativa entre as forças de empuxo e as forças de inércia. Quando $\text{Ri} \ll 1$ a convecção livre é desprezível e quando $\text{Ri} \gg 1$ a convecção forçada é desprezível. Já quando $\text{Ri} \approx 1$ tanto a convecção natural quanto a convecção forçada são igualmente importantes no desenvolvimento dos campos de velocidades e temperaturas no interior do armazenador. (YEE e LAI, 2001).

Detalhes do processo de adimensionalização das equações para o meio livre podem ser vistos no Apêndice B.

3.6 – Modelo matemático para o meio poroso

O modelo matemático para o meio poroso é baseado na formulação original de Darcy para um fluido puro e newtoniano. Desprezam-se os termos de dissipação viscosa e de pressão na equação da energia e utiliza-se a aproximação usual de Boussinesq. Assim, as equações para um fluido incompressível, utilizando a formulação transiente de vorticidade e função corrente são representadas na forma dimensional pelas equações 3.7 e 3.8, dadas por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{Kg\beta\rho}{\mu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.7)$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_{mp}}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.8)$$

onde σ é a relação entre as capacidades térmicas da matriz sólida e do fluido e k_{mp} é a difusividade térmica do meio poroso, representadas matematicamente pelas equações 3.9 e 3.10, dadas por:

$$\sigma = \frac{\phi(\rho C_p)_f + (1-\phi)(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \quad (3.9)$$

e

$$k_{mp} = \phi k_f + (1-\phi)k_s \quad (3.10)$$

Detalhes da obtenção do modelo matemático para o meio poroso podem ser vistos no Apêndice A. As equações 3.7 e 3.8 são adimensionalizadas através das seguintes variáveis adimensionais:

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \tau = \frac{tu_0}{H}, \quad \Psi = \frac{\psi}{u_0 H}$$

onde H é o comprimento característico, representado pela altura do tanque armazenador. Após substituição das variáveis adimensionais nas equações 3.7 e 3.8 e posterior manipulação algébrica, obtém-se as equações finais na forma adimensional para o escoamento no meio poroso, equações 3.11 e 3.12, dadas por:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = - \frac{\text{RaDa}}{\text{RePr}'} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (3.11)$$

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}'} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (3.12)$$

onde Pr' , Ra e Da representam os números de Prandtl para o meio poroso, Rayleigh e Darcy, definidos respectivamente por:

$$\text{Pr}' = \frac{\rho \mathcal{V} C_p}{k_{mp}}, \quad \text{Ra} = \frac{g \beta (T_1 - T_0) H^3}{\nu \alpha}, \quad \text{Da} = \frac{K}{H^2}$$

O número de Prandtl nesse caso agrega as propriedades físicas da matriz sólida e do fluido. O número de Rayleigh é um adimensional que indica a transição na camada limite de convecção natural, dependendo da magnitude relativa das forças de empuxo e das forças viscosas do fluido. Ele é o produto dos

números de Grashof e de Prandtl. O número de Darcy mede a permeabilidade do meio poroso e é comum combinar os número de Rayleigh e Darcy num só produto, conhecido como número de Rayleigh modificado. (INCROPERA e DEWITT, 1998).

Detalhes do processo de adimensionalização das equações para o meio poroso podem ser vistos no Apêndice B.

3.7 – Condições de contorno

Considera-se que o fluido no tanque armazenador está inicialmente em repouso e com temperatura uniforme igual a do ambiente. Além disso, admite-se que no instante inicial as variáveis em estudo tem seus valores nulos. Em termos matemáticos isso pode ser escrito na forma dimensional da seguinte maneira:

$$0 < x < L, \quad 0 < y < H, \quad \psi = \omega = T - T_0 = 0$$

Utilizando as variáveis adimensionais citadas anteriormente, as condições iniciais podem ser reescritas na sua forma adimensional, equação 3.13, dada por:

$$0 < X < a_r, \quad 0 < Y < 1, \quad \Psi = \Omega = \theta = 0 \quad (3.13)$$

Admite-se não ocorrer escorregamento nas fronteiras rígidas do armazenador, ou seja, as velocidades horizontal e vertical são iguais a zero nas fronteiras e, conseqüentemente, a função corrente tem valor numérico constante. O fluxo de massa que entra e sai do armazenador altera a magnitude dessa constante nas tomadas de entrada e saída do fluido de trabalho.

Algumas dificuldades, inerentes à análise da região onde o fluido entra no armazenador estão relacionadas aos perfis de velocidades e temperaturas, que devem ser mencionadas aqui. Por questão de simplicidade, são assumidos valores constantes dessas variáveis. A velocidade tangencial nas fronteiras sólidas é assumida como sendo zero e conseqüentemente, a função corrente é distribuída linearmente através das entradas. Na tomada de entrada u_0 é utilizada como velocidade de referência e a velocidade adimensional $U = \partial\Psi/\partial Y$ é assumida como tendo valor unitário. Além disso, é assumido que o fluido que entra no armazenador é irrotacional, ou seja, a vorticidade do escoamento de entrada é assumida como tendo valor nulo. (CABELLI, 1977). Finalmente, o processo de carregamento corresponde à entrada de fluido quente no tanque, ou seja, pode-se assumir que o fluido que entra no armazenador possui temperatura adimensional e constante igual à unidade. Matematicamente, as condições de contorno na tomada de entrada podem ser escritas na forma dimensional como:

$$\psi_t = uy_t, \quad T_t = T_1, \quad \omega_t = 0$$

Utilizando as variáveis adimensionais citadas anteriormente, as condições de contorno na tomada de entrada podem ser reescritas na sua forma adimensional, equação 3.14, dada por:

$$\Psi_t = Y_t, \quad \theta_t = 1, \quad \Omega_t = 0 \quad (3.14)$$

Deve ser feita uma observação com relação à condição de contorno utilizada para a temperatura na tomada de entrada. A adoção de um valor de temperatura adimensional unitária é amplamente utilizado por diversos autores e facilmente encontrado na literatura disponível. Entretanto essa condição deve ser vista somente como uma simplificação, pois não representa a quantidade de energia transferida do fluido aquecido para o fluido armazenado, situação comumente encontrada em armazenamento de energia. Assim, os resultados

obtidos no presente trabalho devem ser analisados sob a ótica dessa condição simplificada. Uma análise mais adequada dos efeitos do carregamento pode ser realizada utilizando uma condição de fluxo de calor na tomada de entrada do fluido no armazenador.

Na tomada de saída do fluido de trabalho, as distribuições de temperaturas e velocidades são desconhecidas. Entretanto, devido à necessidade de condições de contorno, os gradientes de temperatura e função corrente na tomada de saída foram assumidos como sendo nulos e o escoamento foi assumido como sendo uniforme e irrotacional. Isso novamente produz valores nulos de vorticidade para o escoamento de saída. (CABELLI, 1977). Matematicamente, as condições de contorno na tomada de saída podem ser escritas na forma dimensional como:

$$\frac{\partial \psi_o}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_o}{\partial x} = 0, \quad \omega_o = 0$$

Utilizando as variáveis adimensionais citadas anteriormente, as condições de contorno da tomada de saída podem ser reescritas na sua forma adimensional, equação 3.15, dada por:

$$\frac{\partial \Psi_o}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \theta_o}{\partial X} = 0, \quad \Omega_o = 0 \quad (3.15)$$

Com exceção da superfície vertical esquerda, as demais fronteiras rígidas do armazenador são admitidas como sendo adiabáticas, o que pode ser escrito na forma dimensional por:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

Utilizando as variáveis adimensionais citadas anteriormente, as condições de fronteira adiabática podem ser reescritas na sua forma adimensional, equação 3.16, dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (3.16)$$

Na fronteira lateral esquerda, admite-se perda de calor do fluido para o ambiente por convecção. Matematicamente, assumindo transferência de calor unidimensional, essa condição pode ser escrita na forma dimensional como:

$$-k_w \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_0)$$

onde w indica a fronteira sólida e k_w sua condutividade térmica.

Utilizando as variáveis adimensionais citadas anteriormente, a condição de troca de calor por convecção pode ser reescrita na forma adimensional, equação 3.17, dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = -\text{Bi} \theta \quad (3.17)$$

onde Bi representa o número de Biot, definido matematicamente como:

$$\text{Bi} = \frac{hH}{k_w}$$

Ressalta-se que $\text{Bi} = 0$ corresponde a uma superfície adiabática, ou seja, perfeitamente isolada do meio ambiente.

Com exceção da fronteira sólida compreendida entre as tomadas de entrada e saída do fluido armazenado, que possui valores nulos de função corrente, e na tomada de saída do fluido, as demais fronteiras sólidas possuem valor de função corrente numericamente igual ao valor da função corrente na tomada de entrada do armazenador, ou seja, $\Psi = \Psi_t$.

Os valores numéricos de vorticidade nas fronteiras sólidas são calculados através de expansão em séries de Taylor da função corrente em torno de um ponto sólido. Tal expressão foi sugerida por Angirasa (2000), escrita matematicamente na forma dimensional como:

$$\omega_w = 2 \frac{\Psi_{w+1} - \Psi_w}{\Delta n^2}$$

onde w representa a fronteira sólida e Δn o tamanho da subdivisão da malha normal a superfície sob consideração. Cálculos com expressões de ordem mais elevada não são necessariamente mais precisos ou preferíveis. (ANDERSON et al., 1984). Utilizando as variáveis adimensionais citadas anteriormente, a condição de contorno para o cálculo da vorticidade nas fronteiras sólidas pode ser reescrita na forma adimensional, equação 3.18, dada por:

$$\Omega_w = 2 \frac{\Psi_{w+1} - \Psi_w}{\Delta N^2} \quad (3.18)$$

Detalhes do processo de adimensionalização das condições de contorno podem ser vistos no Apêndice B.

3.8 – Parâmetros de eficiência

Para analisar os efeitos da inclusão horizontal do meio poroso no centro do armazenador térmico são utilizados dois parâmetros distintos: a temperatura de mistura do fluido e o percentual de carregamento útil no tanque.

Para o cálculo da temperatura de mistura do fluido, utiliza-se expressão similar à utilizada por Yee e Lai (2001), escrita na forma dimensional como:

$$T_{mix} = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} T dV_e$$

Utilizando os adimensionais propostos anteriormente, e posterior manipulação algébrica, obtém-se a expressão para a temperatura de mistura na forma adimensional, equação 3.19, dada por:

$$\theta_{mix} = \frac{1}{a_r} \int_0^{a_r} \int_0^1 \theta dY dX \quad (3.19)$$

Detalhes do processo de adimensionalização da temperatura de mistura podem ser vistos no Apêndice B.

Além disso, estimou-se o percentual de carregamento útil do tanque em função do tempo. Esse percentual é baseado nos valores de temperaturas nas quais o fluido de trabalho pode ser utilizado em alguma aplicação prática, por exemplo, no acionamento de uma máquina térmica. Para isso adotou-se como referência valores de temperatura adimensionais maiores ou iguais a 0,9. Assim, pode-se ter uma idéia quantitativa da influência do meio poroso no processo de carregamento do tanque.

3.9 – Propriedades físicas

Na Tabela 1 podem ser vistas propriedades físicas da água e do níquel, obtidas de Incropera e DeWitt (1998) a 300 K, utilizadas para estimar os valores numéricos dos parâmetros k_{mp} , Pr' e σ para o níquel com porosidade de 98%.

Tabela 1 – Propriedades físicas da água e do níquel

	Água	Níquel
C_p [J/kgK]	$4,179 \times 10^3$	444
μ [Ns/m ²]	855×10^{-6}	-
k [W/mK]	613×10^{-3}	90,7
ρ [kg/m ³]	1000	8900

A condutividade térmica do meio poroso, equação 3.10 é calculada como sendo:

$$k_{mp} = \phi k_f + (1 - \phi) k_s = 2,415 \text{ W/mK}$$

Deve ser mencionado que o cálculo da condutividade térmica do meio poroso através da equação acima é uma simplificação, sendo válido somente para porosidades elevadas. A viscosidade cinemática da água é calculada como:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 855 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

Assim, o número de Prandtl para o meio poroso é calculado como sendo:

$$\text{Pr}' = \frac{\rho \nu C_p}{k_{mp}} = 1,48$$

Por último, a relação entre as capacidades térmicas do fluido e do meio poroso, equação 3.9, é calculada como sendo:

$$\sigma = \frac{\phi (\rho C_p)_f + (1 - \phi) (\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} = 0,989$$

Capítulo 4

Método numérico

4.1 – A técnica dos elementos finitos

Neste trabalho foi utilizada a técnica dos elementos finitos (*FEM – Finite Element Method*) para solucionar numericamente o conjunto de equações diferenciais parciais relacionado ao fenômeno em análise. O princípio fundamental desse método consiste em utilizar funções, conhecidas por funções de aproximação, para aproximar a solução do problema no interior do domínio dos chamados elementos de referência. Os elementos de referência representam um sistema de referência auxiliar que se relaciona ao sistema de referência real através de uma transformação de coordenadas. Quanto às dimensões esses elementos de referência podem ser unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais, e lineares, quadráticos ou cúbicos com relação à ordem da função de aproximação.

Como a geometria do problema em análise é simples, nesse trabalho utilizaram-se elementos bidimensionais lineares de quatro nós. Além disso, admitiu-se que esses elementos são isoparamétricos, ou seja, a transformação de coordenadas e as funções de aproximação utilizam as mesmas funções para sua construção. Essas funções de aproximação podem ser

encontradas na literatura referente à técnica dos elementos finitos. A Figura 4.1 ilustra o elemento linear de quatro nós utilizado na solução numérica:

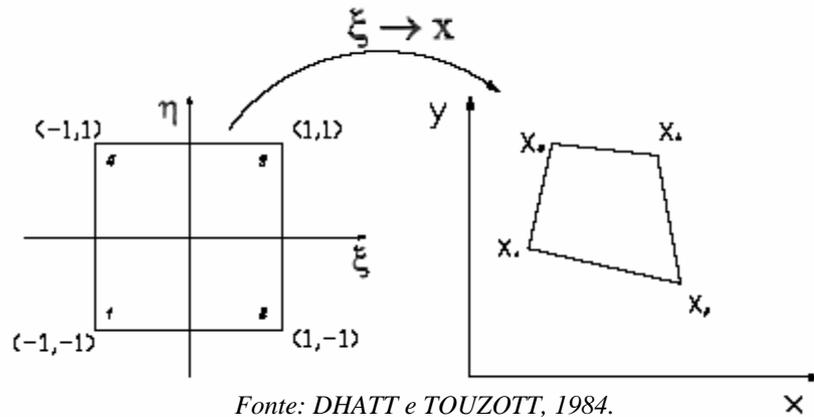


Figura 4.1 – Elemento bidimensional, linear e isoparamétrico.

A partir do elemento de referência, utilizou-se a seguinte função de aproximação, de acordo com Dhatt e Touzot (1984), dada por:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{4} \langle (1-\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1+\eta) \quad (1-\xi)(1+\eta) \rangle$$

onde ξ e η representam as coordenadas do elementos de referência nas direções X e Y respectivamente.

A técnica dos elementos finitos é baseada nos mesmos princípios do método dos resíduos ponderados, que procura uma solução na qual o desvio obtido pela integral dessa solução ao longo de um domínio, utilizando uma função peso pré-determinada, seja mínimo. Assim, admitindo que a equação que rege um problema genérico seja $A(\Phi) - f = 0$, sua forma em resíduos ponderados, equação 4.1, é dada por:

$$\int_{V_e} W(A(\Phi) - f) dV_e = 0 \tag{4.1}$$

onde W é uma função peso, Φ é uma variável genérica e V_e é um volume elementar de integração. A solução da equação 4.1 depende da escolha da função peso, podendo gerar melhores ou piores resultados. Esta escolha pode ser feita com o auxílio de referências básicas de elementos finitos, como Dhatt e Touzot (1984). No entanto, existe um procedimento mais usual, conhecido como método de Galerkin, onde se utiliza como valor da função peso a própria função de aproximação da variável em análise, ou seja:

$$W = \langle N \rangle$$

Além disso, o domínio do problema deve ser dividido em diversos elementos, que quando agrupados representam todo o domínio em análise. Cada elemento é formado por nós e esses nós devem ser numerados para indicar como foi feita a subdivisão do domínio e qual a inter-relação entre os nós. Por fim, a posição de cada um dos nós deve ser conhecida dentro do domínio e como estes estão interligados de forma a gerar os elementos de referência. Por se tratar de um problema com uma geometria simples foi utilizada malha regular com o mesmo número de subdivisões em ambos os eixos coordenados.

As condições de contorno foram tratadas através de uma condição de contorno genérica utilizada por Scalon (1998), e desenvolvidas para um elemento quadrilateral linear através de sua função de aproximação. As integrais resultantes da aplicação da técnica dos elementos finitos foram solucionadas numericamente através do método bidirecional de Gauss para elementos quadriláterais de quatro nós, de acordo com Dhatt e Touzot (1984).

4.2 – Discretização das equações governantes

De acordo com a formulação em resíduos ponderados, equação 4.1, as equações 3.4 a 3.6, 3.11 e 3.12 podem ser reescritas, equações 4.2 a 4.6, dadas por:

$$\int_{V_e} W \left[\Omega + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) \right] dV_e = 0 \quad (4.2)$$

$$\int_{V_e} W \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) \right] dV_e = 0 \quad (4.3)$$

$$\int_{V_e} W \left[\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \right] dV_e = 0 \quad (4.4)$$

$$\int_{V_e} W \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \frac{\text{RaDa}}{\text{Re Pr}'} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] dV_e = 0 \quad (4.5)$$

$$\int_{V_e} W \left[\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{1}{\text{Re Pr}'} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \right] dV_e = 0 \quad (4.6)$$

As equações 4.2 a 4.6 podem ser subdivididas em diversas integrais, equações 4.7 a 4.11, dadas por:

$$\int_{V_e} W \Omega dV_e + \int_{V_e} \left(W \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + W \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) dV_e = 0 \quad (4.7)$$

$$\int_{V_e} W \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} dV_e + \int_{V_e} W \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right) dV_e - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \int_{V_e} W \frac{\partial \theta}{\partial X} dV_e - \frac{1}{\text{Re}} \int_{V_e} \left(W \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + W \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) dV_e = 0 \quad (4.8)$$

$$\int_{V_e} W \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dV_e + \int_{V_e} W \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) dV_e - \frac{1}{\text{Re Pr}} \int_{V_e} \left(W \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + W \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) dV_e = 0 \quad (4.9)$$

$$\int_{V_e} \left(W \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + W \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) dV_e + \frac{\text{RaDa}}{\text{RePr}'_{V_e}} \int_{V_e} W \frac{\partial \theta}{\partial X} dV_e = 0 \quad (4.10)$$

$$\sigma \int_{V_e} W \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dV_e + \int_{V_e} W \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) dV_e - \frac{1}{\text{RePr}'_{V_e}} \int_{V_e} \left(W \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + W \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) dV_e = 0 \quad (4.11)$$

Para detalhar o tratamento dado a cada uma das integrais representadas nas equações 4.7 a 4.11, as mesmas serão identificadas a partir de sua contribuição física, ou seja, termo fonte, termo difusivo, termo convectivo e termo transiente.

Tratamento dos termos transientes: esse termo apresenta formulações distintas e diversas hipóteses podem ser utilizadas na sua análise. Neste trabalho optou-se por uma formulação conhecida como matriz massa concentrada. Utilizando uma variável genérica Φ nos lugares de Ω e θ , os termos transientes das equações 4.8, 4.9 e 4.11 podem ser reescritos como:

$$\int_{V_e} W \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} dV_e = \int_{V_e} W dV_e \frac{\Phi_j^{m+1} - \Phi_j^m}{\Delta \tau}$$

Este tipo de aproximação é comumente utilizada em diferenças finitas e o valor m indica a avaliação da variável em um tempo τ e $m+1$ em um tempo $\tau + \Delta \tau$.

Considerando a função peso de acordo com Galerkin, tem-se:

$$\int_{V_e} W dV_e \frac{\Phi_j^{m+1} - \Phi_j^m}{\Delta \tau} = \int_{V_e} N_i dV_e \frac{\Phi_j^{m+1} - \Phi_j^m}{\Delta \tau} = [M] \frac{\Phi_j^{m+1} - \Phi_j^m}{\Delta \tau}$$

onde a matriz massa, denotada por $[M]$, está representada na equação 4.21, dada por:

$$[M] = \int_{V_e} N_i dV_e \quad (4.12)$$

Tratamento dos termos difusivos: o estudo deste termo já é bastante conhecido dado sua semelhança com a equação de Poisson. Como este termo possui derivadas de segunda ordem, trabalha-se com o que se convencionou denominar em elementos finitos de "forma fraca" (weak form). Isso facilita a implementação computacional do modelo matemático, pois tem a vantagem de permitir o uso de funções de aproximação de ordem mais baixa, nesse caso as que possuam apenas a primeira derivada, facilitando sua implementação. Esta redução da ordem da equação diferencial é feita através de uma integração por partes. Utilizando uma variável genérica Φ nos lugares de Ψ , Ω e θ , os termos difusivos das equações 4.7 a 4.11 podem ser reescritos como:

$$\int_{V_e} \left(W \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + W \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right) dV_e = - \int_{V_e} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Y} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) dV_e + \int_{\Gamma_e} W \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} d\Gamma_e$$

onde \bar{n} é o vetor normal à superfície do elemento. Esta formulação tem como complicador um termo de integral sobre uma superfície Γ_e . Este termo, no entanto, só precisa ser considerado nas fronteiras do domínio de solução, uma vez que nos elementos internos sempre existe um vetor \bar{n} de mesma direção e sentido contrário a de um elemento adjacente.

Nas superfícies estes valores de derivada normal são as próprias condições de contorno necessárias para a solução do problema. Quando os valores são especificados nos contornos basta desconsiderar toda a discretização e impor os valores de Φ nos nós. Desta forma cobre-se a maior parte das condições de contorno usuais e soluciona-se o problema da integral de superfície. A análise da integral de superfície será feita posteriormente.

Após a aproximação nodal, a integral a ser resolvida sobre o domínio torna-se:

$$\int_{V_e} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Y} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) dV_e = \int_{V_e} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Y} \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) dV_e \Phi_j$$

Considerando a função peso de acordo com Galerkin, tem-se:

$$\int_{V_e} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Y} \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) dV_e \Phi_j = \int_{V_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) dV_e \Phi_j$$

Assim, o termo difusivo pode ser agrupado numa matriz $[D]$, equação 4.13, dada por:

$$[D] = \int_{V_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) dV_e \quad (4.13)$$

Tratamento dos termos convectivos: considerando a aproximação nodal para o campo de função corrente $\Psi = N_k \Psi_k$ e para a variável genérica Φ , utilizada nos lugares de Ω e θ , os termos convectivos das equações 4.8, 4.9 e 4.11 podem ser reescritos como:

$$\int_{V_e} W \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Phi}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) dV_e = \int_{V_e} W \left(\frac{\partial N_k}{\partial Y} \Psi_k \frac{\partial N_j}{\partial X} - \frac{\partial N_k}{\partial X} \Psi_k \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) dV_e \Phi_j$$

Inserindo a aproximação de Galerkin, onde a função peso é igual à função de interpolação, a expressão acima é reescrita como:

$$\int_{V_e} W \left(\frac{\partial N_k}{\partial Y} \Psi_k \frac{\partial N_j}{\partial X} - \frac{\partial N_k}{\partial X} \Psi_k \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) dV_e \Phi_j$$

$$= \int_{V_e} N_i \left(\frac{\partial N_k}{\partial Y} \Psi_k \frac{\partial N_j}{\partial X} - \frac{\partial N_k}{\partial X} \Psi_k \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) dV_e \Phi_j$$

Assim, o termo convectivo pode ser agrupado em uma matriz $[C]$, equação 4.14, dada por:

$$[C] = \int_{V_e} N \left(\frac{\partial N_k}{\partial Y} \Psi_k \frac{\partial N_j}{\partial X} - \frac{\partial N_k}{\partial X} \Psi_k \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) dV_e \quad (4.14)$$

Tratamento dos termos fontes: o termo fonte pode variar ao longo do domínio, ou seja, pode variar com a posição. Nesse caso, a forma mais adequada seria admitir uma variação de posição de acordo com as funções de aproximação e utilizar a aproximação nodal para a mesma. Entretanto, existe um tratamento alternativo amplamente utilizado que não considera a variação do termo fonte pelas funções de aproximação. Utilizando a variável genérica Φ no lugar de Ω , o termo fonte da equação 4.7 pode ser reescrito como:

$$\int_{V_e} W \Phi dV_e$$

Considerando a função peso de acordo com Galerkin, tem-se:

$$\int_{V_e} N_j dV_e \Phi_j$$

onde a matriz para o termo fonte é similar a matriz massa $[M]$ definida para o termo transiente, equação 4.12, dada por:

$$[M] = \int_{V_e} N_j dV_e$$

Além disso, para os termos fontes das equações 4.8 e 4.10, utilizando a variável genérica Φ no lugar de θ e utilizando a aproximação nodal, a expressão para a integral pode ser reescrita como:

$$\int_{V_e} W \frac{\partial \Phi}{\partial X} dV_e = \int_{V_e} W \frac{\partial N_j}{\partial X} dV_e \Phi_j$$

Considerando a função peso de acordo com Galerkin, tem-se:

$$\int_{V_e} W \frac{\partial N_j}{\partial X} dV_e \Phi_j = \int_{V_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial X} dV_e \Phi_j$$

onde o termo fonte pode ser representado por uma matriz $[K]$, equação 4.15, dada por:

$$[K] = \int_{V_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial X} dV_e \quad (4.15)$$

As matrizes $[M]$, $[D]$, $[C]$ e $[K]$, representadas matematicamente pelas equações 4.12 a 4.15 são as matrizes que devem ser obtidas a partir da aplicação da técnica dos elementos finitos. Com essas matrizes é possível construir o sistema base para a solução do problema, ou seja, um sistema linear cuja solução será a solução do problema em análise.

Sistema linear de equações do problema: utilizando as matrizes acima e substituindo convenientemente a variável genérica Φ pelas variáveis Ψ , θ e Ω , as equações do problema podem ser representadas matricialmente, equações 4.16 a 4.20, dadas por:

$$[D]\Psi_j^{m+\gamma} = [M]\Omega_j^{m+\gamma} + [\Gamma_\Psi] \quad (4.16)$$

$$[M]\frac{\Omega_j^{m+1} - \Omega_j^m}{\Delta\tau} + [C]\Omega_j^{m+\gamma} + \frac{1}{\text{Re}}[D]\Omega_j^{m+\gamma} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2}[K]\theta_j^{m+\gamma} + [\Gamma_\Omega] \quad (4.17)$$

$$[M]\frac{\theta_j^{m+1} - \theta_j^m}{\Delta\tau} + [C]\theta_j^{m+\gamma} + \frac{1}{\text{RePr}}[D]\theta_j^{m+\gamma} = [\Gamma_\theta] \quad (4.18)$$

$$[D]\Psi_j^{m+\gamma} = -\frac{\text{RaDa}}{\text{RePr}'}[K]\theta_j^{m+\gamma} + [\Gamma_\Psi] \quad (4.19)$$

$$\sigma[M]\frac{\theta_j^{m+1} - \theta_j^m}{\Delta\tau} + [C]\theta_j^{m+\gamma} + \frac{1}{\text{RePr}'}[D]\theta_j^{m+\gamma} = [\Gamma_\theta] \quad (4.20)$$

onde $[\Gamma_\Psi]$, $[\Gamma_\theta]$ e $[\Gamma_\Omega]$ representam, respectivamente, as matrizes das condições de contorno referentes à função corrente, temperatura e vorticidade.

O valor de γ é deixado para permitir uma discretização genérica de forma que:

$$\Phi_j^\gamma = \gamma\Phi_j^{m+1} + (1-\gamma)\Phi_j^m$$

O procedimento de solução adotado para o sistema linear representado pelas equações 4.16 a 4.20 é o seguinte:

1. Adota-se um valor inicial para os campos de Ψ, θ e Ω .
2. Calculam-se os valores de θ no instante posterior através das equações 4.18 e 4.20 utilizando o método de eliminação de Gauss.
3. Com os valores de θ calculam-se os valores de Ω no mesmo instante através da equação 4.17 utilizando o método de eliminação de Gauss.

4. Com os valores de θ e Ω calculam-se os valores de Ψ no mesmo instante através das equações 4.16 e 4.19 utilizando o método de eliminação de Gauss.

5. Através de um procedimento iterativo verifica-se a convergência do problema de acordo com uma tolerância percentual adotada.

6. Depois de atingida a convergência no instante considerado, a temperatura de mistura é calculada numericamente através da equação 3.19.

7. É acrescentado um passo de tempo.

8. Os passos 2 a 7 são repetidos até que o incremento de tempo atinja o tempo total de análise.

Para verificar a convergência do problema é utilizado o critério utilizado por Scalon (1998), representado matematicamente por:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i,j} (\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n)^2}{\sum_{i,j} (\Phi_{i,j}^n)^2}} \leq \varepsilon$$

4.3 – Condições de contorno

O tratamento das condições de contorno através do método dos elementos finitos não é uma tarefa simples, pois vem acompanhada de uma série de operações não imediatas. Para facilitar sua implementação, nesse trabalho foi utilizado um tratamento simplificado, vide Scalon (1998), no qual as condições de contorno podem ser expressas genericamente por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} = \alpha_c \Phi + \beta_c$$

Esta equação é capaz de representar qualquer condição de contorno usual e outras ainda podem ser aproximadas. Assim, através da função

de aproximação do elemento quadrilateral de quatro nós obtém-se a expressão matemática para as condições de contorno do problema em função da aproximação nodal das variáveis de interesse. Maiores detalhes da análise das condições de contorno para o método dos elementos finitos podem ser encontrados em Dhatt e Touzot (1984).

4.4 – O código computacional

O código computacional foi desenvolvido em ambiente de programação C a partir de rotinas pré-programadas por Scalon (1998). Foi feita uma adequação do código computacional de modo a representar a situação física em análise, como por exemplo: alteração da formulação de variáveis primitivas para vorticidade e função corrente, implementação de condições de efluxo e influxo e a inclusão de um meio poroso no domínio de solução.

Para selecionar a malha mais adequada à solução do problema, três malhas diferentes foram empregadas no presente estudo. Foram consideradas malhas com subdivisões de 21×21 , 31×31 , e 41×41 , que correspondem a subdivisões com dimensões 0,05, 0,03 e 0,025 respectivamente. Foi utilizada como comparação a temperatura de mistura no tanque. Os resultados mostraram que o desvio máximo na temperatura de mistura no tanque obtida usando as duas primeiras malhas é de 3,8%, e reduz-se para 0,55% para malha 41×41 . Assim, uma malha uniforme de 41×41 subdivisões foi escolhida para esse estudo.

Além disso, foram analisados alguns incrementos de tempo para a malha escolhida. Por exemplo, viu-se que o desvio máximo entre os resultados obtidos com $\Delta\tau = 1 \times 10^{-2}$ e $\Delta\tau = 1 \times 10^{-3}$ é somente de 1,2%. Assim, foram utilizados incrementos de tempo de $\Delta\tau = 1 \times 10^{-2}$ e uma malha de 41×41 subdivisões em todos os cálculos numéricos realizados nesse estudo.

A seqüência de cálculos matemáticos do código computacional pode ser visualizada pelo diagrama de blocos mostrado abaixo:

Parâmetros de entrada:

Pr: número de Prandtl; Re: número de Reynolds; Ri: número de Richardson;
 Bi: número de Biot; Da: número de Darcy; Ra: número de Rayleigh;
 Pr': número de Prandtl no meio poroso;
 L: largura do tanque; H: altura do tanque; D: posição do meio poroso;
 S: espessura do meio poroso; a_r : relação de aspecto do armazenador;
 τ : tempo de análise; $\Delta\tau$: incremento de tempo;
 Número de subdivisões em x e número de subdivisões em y;
 Número máximo de iterações; ε : tolerância percentual



Montagem da malha de elementos finitos e leitura das condições iniciais



- Adota-se um valor inicial para os campos de Ψ, θ e Ω ;
- Calculam-se os valores de θ no instante seguinte através das equações 4.18 e 4.20;
- Com os valores de θ calculam-se os valores de Ω no mesmo instante através da equação 4.17;
- Com os valores de θ e Ω calculam-se os valores de Ψ no mesmo instante através das equações 4.16 e 4.19;
- Através de um procedimento iterativo verifica-se a convergência do problema de acordo com a tolerância percentual adotada e a temperatura de mistura é calculada através da equação 3.19;



Atualiza-se os valores das variáveis θ, Ω e Ψ e o processo de solução em marcha segue até que o valor de $\Delta\tau$ atinja o valor de τ .



Parâmetros de saída:

Valores numéricos dos campos de θ, Ω, Ψ e θ_{mix} para cada intervalo de tempo considerado.

Com o objetivo de verificar a eficiência do código computacional realizaram-se simulações numéricas com condições físicas similares aos trabalhos de Cabelli (1977), Vahl Davis (1983), Guo e Wu (1985) e Angirasa (2000). Observou-se excelente concordância entre os resultados obtidos pelo código computacional desenvolvido nesse trabalho e os resultados obtidos pelos autores citados anteriormente.

No presente estudo, todas as simulações computacionais foram realizadas para um tempo adimensional de 25, que corresponde a um tempo de carregamento de aproximadamente 41 horas, onde grande parte do desenvolvimento do escoamento pôde ser visualizada. O tempo de processamento para cada simulação computacional, utilizando um computador Pentium 4.0 com processador de 2.3 GHz foi de aproximadamente 4 horas.

Capítulo 5

Resultados e discussões

No presente estudo os cálculos computacionais foram realizados admitindo água como fluido de trabalho em operação de carregamento, $Pr = 5,8$, barreira porosa de níquel, $Pr' = 1,48$, Ri variando de 0,001 a 10 e número de Reynolds fixo em $Re = 200$. Segundo Hollands e Lightstone (1989), esse baixo valor do número de Reynolds não só é benéfico para a produção de estratificação térmica como também assegura a validade da Lei de Darcy para o escoamento no meio poroso. Além disso, foi considerado um armazenador de geometria quadrada, ou seja, com relação de aspecto $a_r = 1$. As tomadas de entrada e saída de água estão posicionadas verticalmente em $Y_2 = 0,8$ e $Y_1 = 0,2$ respectivamente. Detalhes geométricos do armazenador em análise podem ser vistos na Figura 3.5.

Devido a existência de diversos parâmetros envolvidos na simulação computacional, é feito um estudo inicial admitindo um armazenador térmico perfeitamente isolado, $Bi = 0$, e com um meio poroso de espessura $S = 0,1$ disposto horizontalmente no centro do armazenador, $D = 0,5$. O meio poroso de níquel possui 98 % de porosidade e permeabilidade em termos do número de Darcy igual a 1×10^{-7} . Esses dados foram obtidos da literatura disponível. (BEAVERS e JOSEPH, 1967). Esse conjunto de condições é utilizado como

referência. No estudo do efeito individual de cada parâmetro no escoamento e transferência de calor no interior do tanque armazenador, somente o valor desse parâmetro será modificado, enquanto todos os outros parâmetros são mantidos constantes. Além disso, para $Ri = 0,001; 0,01; 0,1; 1$ e 10 , os números de Rayleigh utilizados são respectivamente de $232; 2320; 23200; 232000$ e 2320000 .

Nos gráficos de perfis são plotadas 10 isocurvas, com o campo de função corrente variando de 0 a -0,05 e o campo de temperaturas variando de 0 a 1. Os cálculos computacionais foram realizados com tolerância de 0,01% e um máximo de 20 iterações em cada incremento de tempo.

5.1 – Efeitos do número de Richardson

Inicialmente foi feita uma análise do desenvolvimento transiente dos campos de função corrente e temperaturas em um tanque armazenador de líquido sem meio poroso. Nas Figuras 5.1 a 5.5 estão mostrados os desenvolvimentos dos campos de função corrente e temperaturas com o tempo para números de Richardson de $0,001; 0,01; 0,1; 1$ e 10 respectivamente.

Para $Ri = 0,001$ e $0,01$, Figuras 5.1 e 5.2 respectivamente, observa-se que as forças de inércia dominam o campo de função corrente e que o mesmo é insignificante em aproximadamente metade do armazenador. Nota-se também que as isotermas estão em processo de desenvolvimento nos instantes de tempo considerados e que os efeitos de inércia são evidentes devido à distorção do campo de temperaturas.

Para $Ri = 0,1$, Figura 5.3, começam a surgir os efeitos do empuxo, onde nota-se que as linhas de função corrente ocupam uma região maior do armazenador e as isotermas começam a adquirir características de estratificação.

No caso de $Ri = 1$, Figura 5.4, ambos efeitos de convecção natural e forçada são igualmente importantes no desenvolvimento dos campos de

função corrente e temperaturas no interior do armazenador. A mudança mais significativa ocorre no campo de temperaturas, onde o fluido apresenta visivelmente características de estratificação térmica nos intervalos de tempo considerados. Isso pode ser visto claramente através da distribuição em camadas das isotermas.

Finalmente para $Ri = 10$, Figura 5.5, a estratificação térmica se torna mais evidente em todo o processo de carregamento do tanque devido à presença dominante da convecção natural.

Com isso, através dos resultados obtidos, é evidente a influência do número de Richardson na formação da estratificação térmica. Assim, pode-se confirmar que a formação de estratificação térmica ocorre naturalmente para $Ri > 1$, o que já havia sido observado por outros autores. (CABELLI, 1977; GUO e WU, 1985; YEE e LAI, 2001).

Na Figura 5.6 estão mostradas as variações da temperatura de mistura no tanque com o tempo para os números de Richardson considerados. Nota-se que a temperatura de mistura no tanque aumenta com o aumento do número de Richardson e com o tempo.

Os casos com $Ri = 0,001$ e $0,01$ possuem as menores temperaturas de mistura. Isso ocorre devido a forte presença dos efeitos de inércia que inibem a formação de estratificação térmica e resulta em grande quantidade de água a temperaturas elevadas sendo descarregada na tomada de saída do tanque em instantes avançados de carregamento.

Já nos casos de $Ri = 0,1$, 1 e 10 notam-se maiores valores da temperatura de mistura em função do tempo de carregamento. Isso pode ser explicado pela formação de estratificação térmica que ocorre no interior do tanque, o que resulta em uma maior quantidade de calor armazenado nos intervalos de tempo considerados.

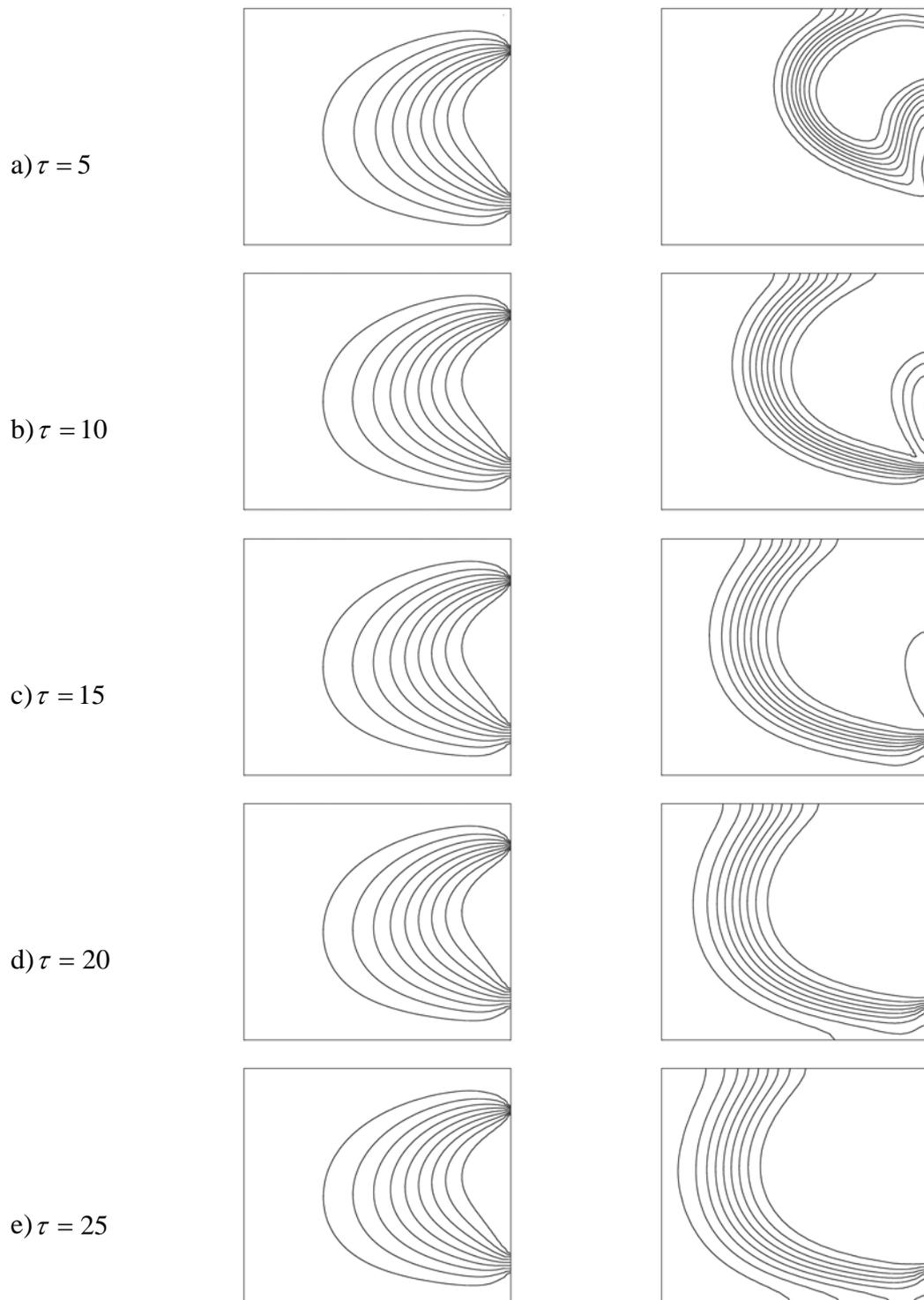


Figura 5.1 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (sem meio poroso):

$$Ri = 0,001, \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

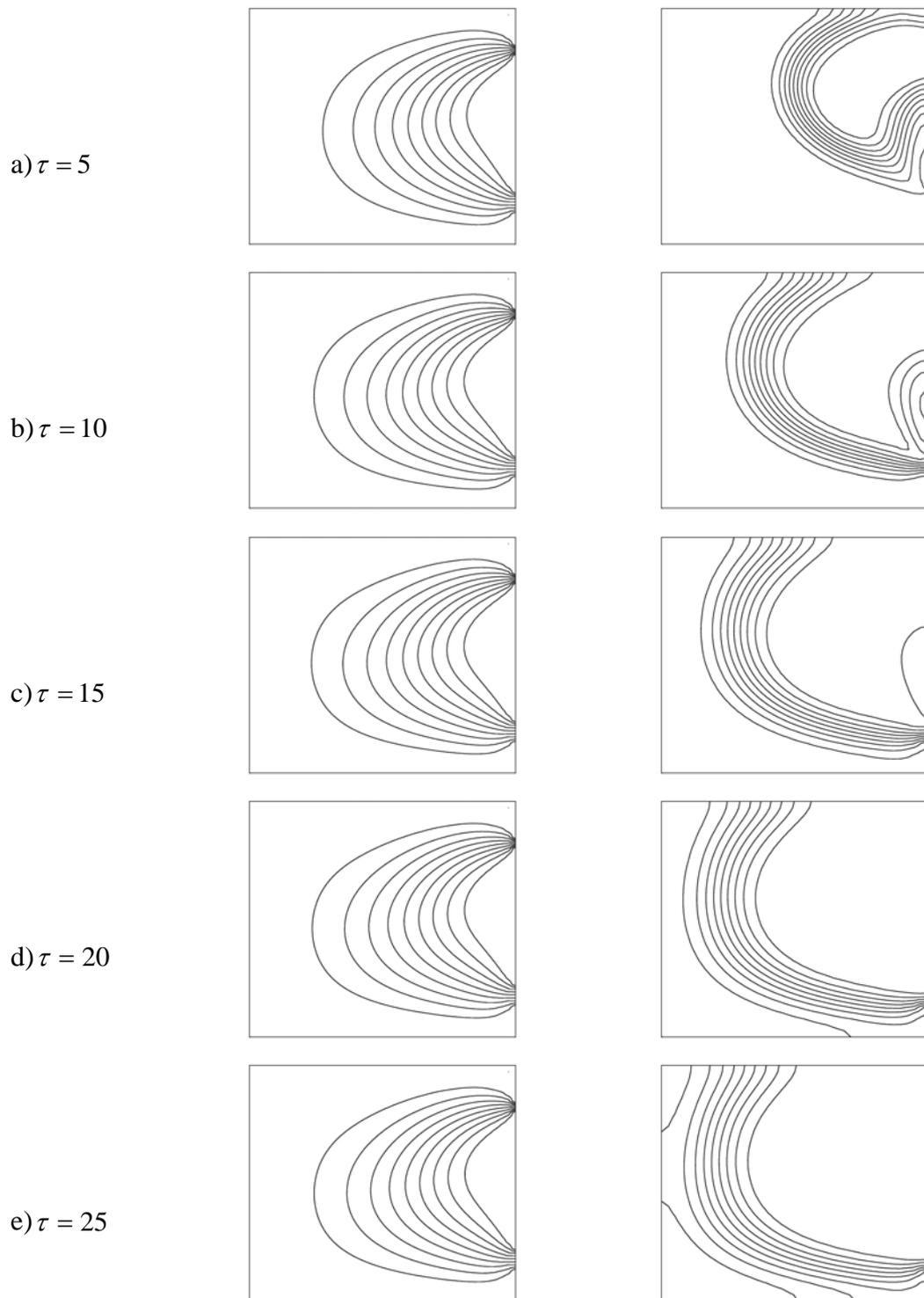


Figura 5.2 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (sem meio poroso):

$$Ri = 0,01, \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

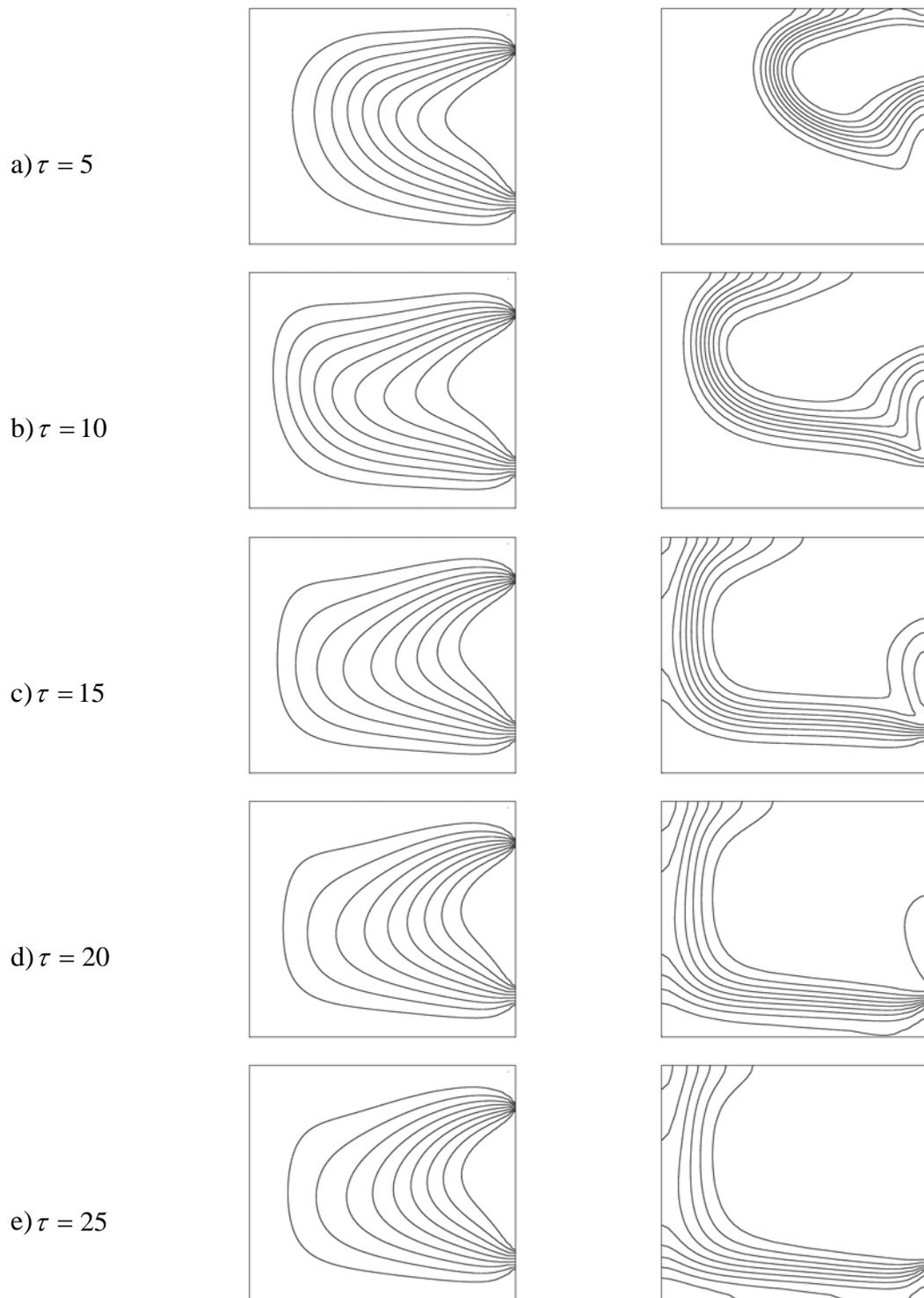


Figura 5.3 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (sem meio poroso):

$$Ri = 0,1, \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

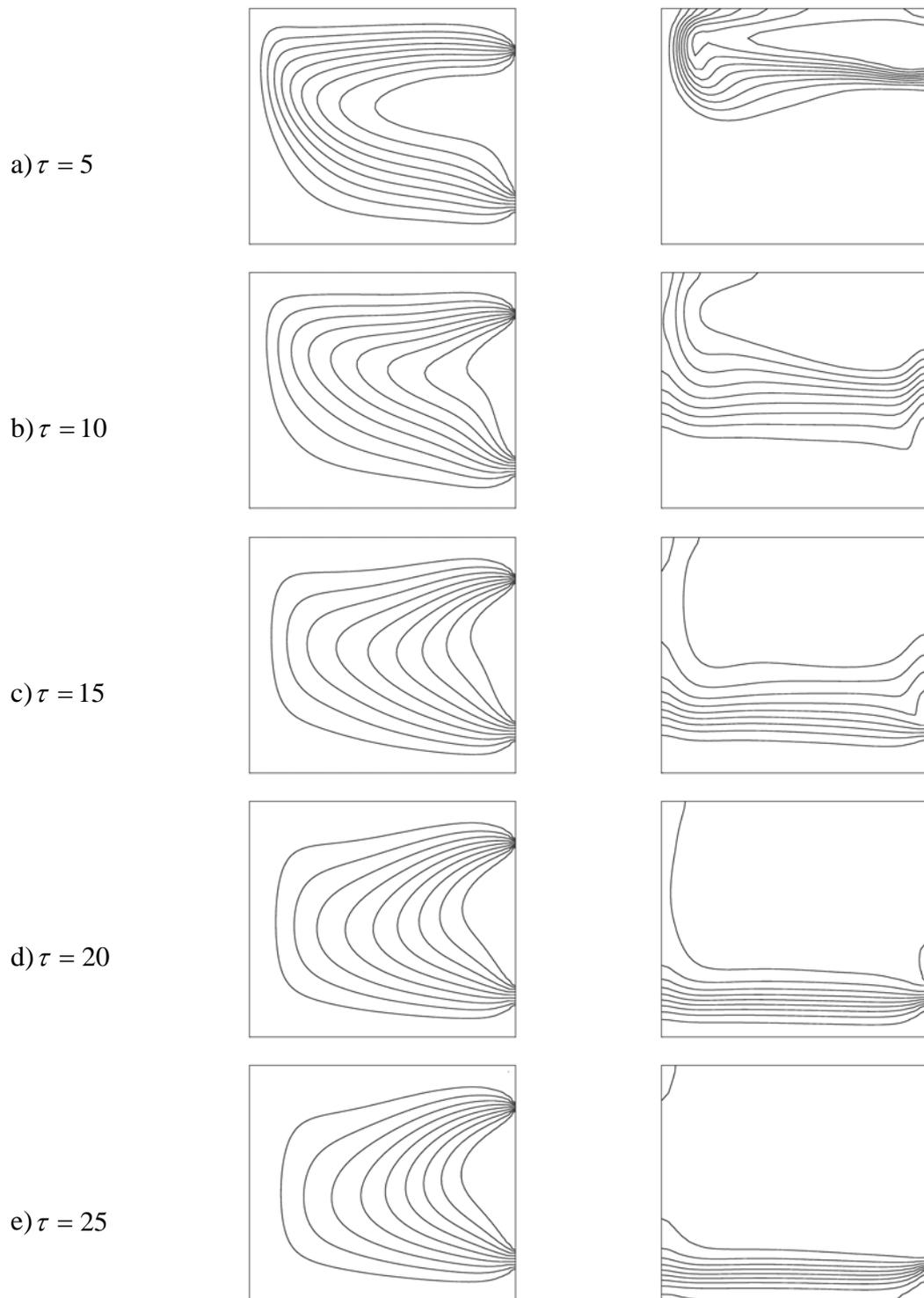


Figura 5.4 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (sem meio poroso):

$$Ri = 1, \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

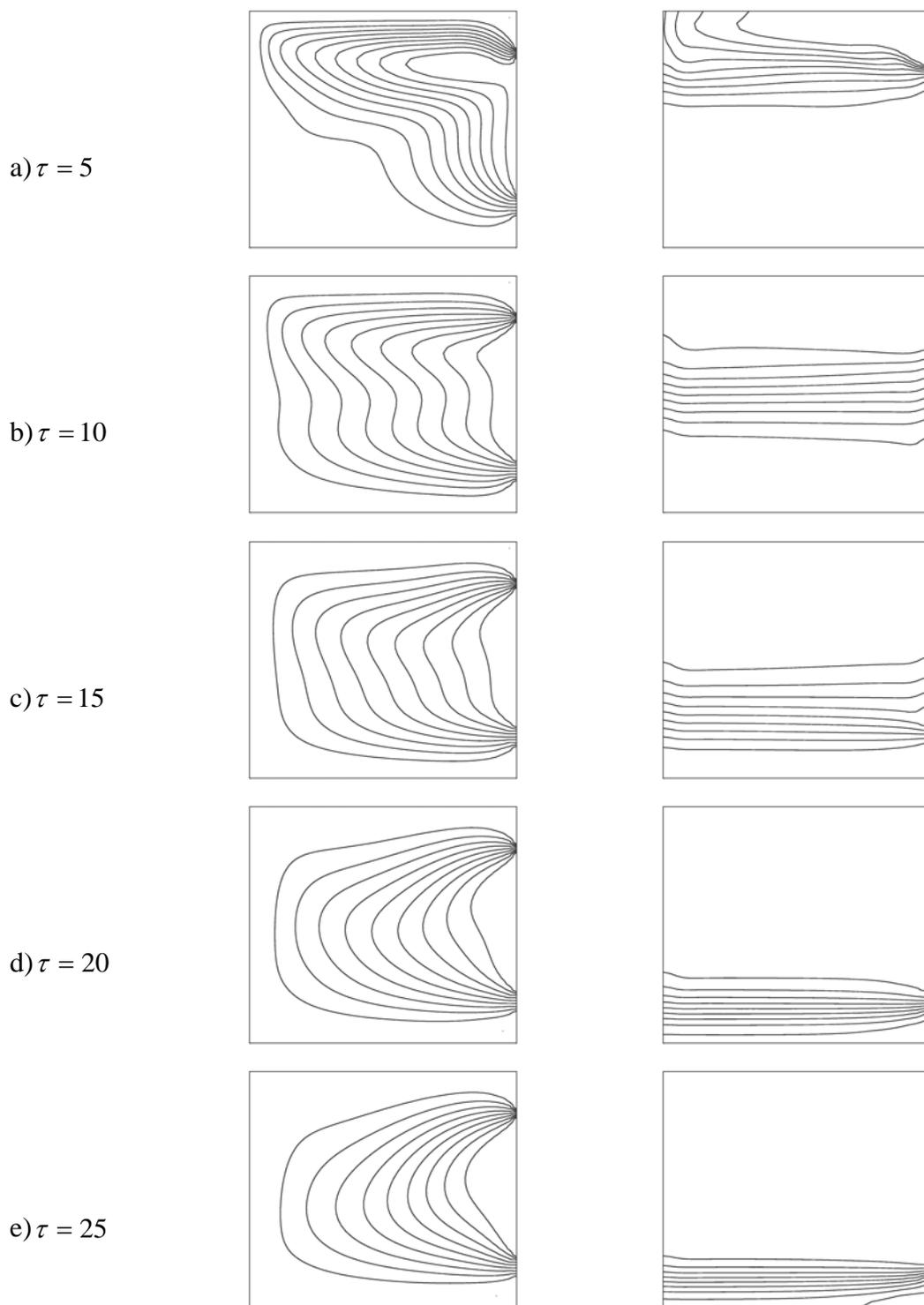


Figura 5.5 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (sem meio poroso):

$$Ri = 10, \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

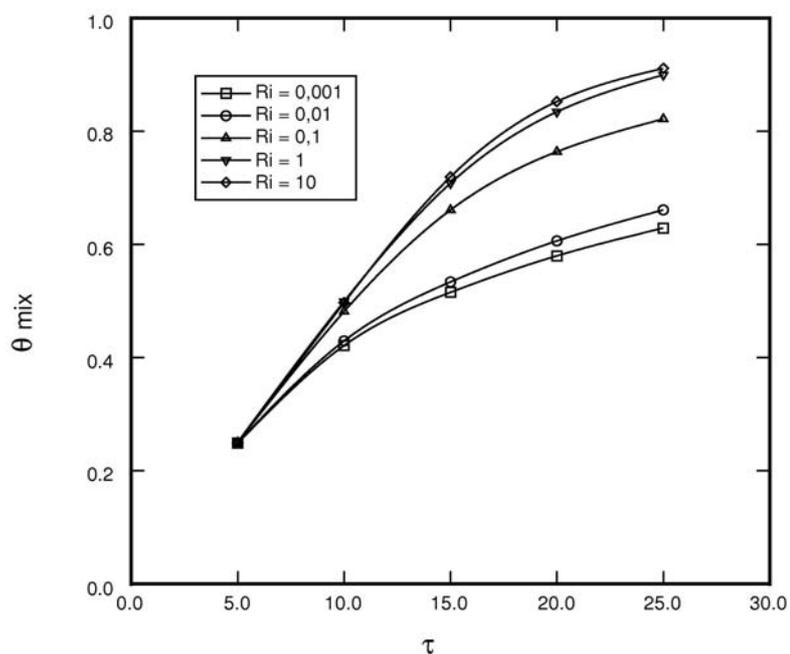


Figura 5.6 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo (sem meio poroso).

Assim, pode-se afirmar que a eficiência de um tanque armazenador térmico pode ser melhorada se a estratificação térmica for mantida, o que ocorre naturalmente em regime de convecção natural, isto é, para $Ri > 1$.

Na Figura 5.7 estão mostrados os percentuais de carregamento útil no tanque com o tempo para os números de Richardson considerados. Nota-se que o percentual de carregamento útil de água aumenta com o número de Richardson e com o tempo. Para baixos valores do número de Richardson, por exemplo $Ri = 0,001$ e $0,01$, em $\tau = 25$ tem-se aproximadamente 40% do tanque carregado com água a temperaturas mais elevadas. No mesmo instante, para $Ri = 1$ e 10 , aproximadamente 80% do tanque encontra-se bem carregado.

Assim, conclui-se que com o aumento do número de Richardson, há um aumento do percentual de carregamento útil de água no tanque, aumentando sua disponibilidade em fornecer o fluido em temperaturas mais elevadas.

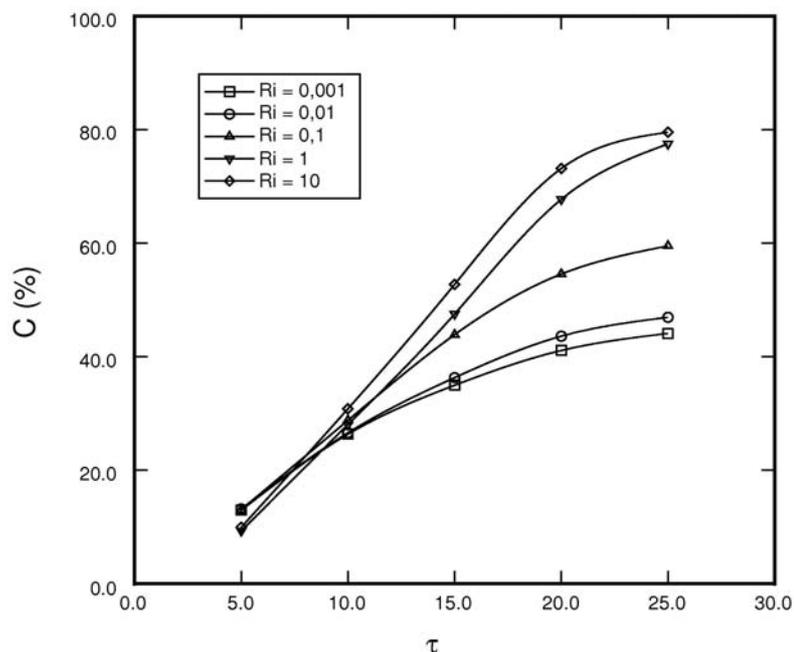


Figura 5.7 – Variação do percentual de carregamento útil do tanque com o tempo em função do número de Richardson (sem meio poroso).

A inclusão do meio poroso é feita através da discretização diferenciada do domínio de solução. Essa distinção é feita no código computacional desenvolvido, que atribui as equações de Navier-Stokes à região do escoamento no meio livre e atribui as equações do modelo de Darcy ao escoamento no meio poroso. As equações diferenciais são solucionadas separadamente e seus resultados numéricos são agrupados de forma a representar todo o domínio de solução. Além disso, não é necessário nenhum tipo de condição de acoplamento entre o escoamento no meio livre e o escoamento no meio poroso, pois se trata de um escoamento contínuo do fluido de trabalho no interior do armazenador térmico.

Com a inclusão do meio poroso de níquel na posição central do tanque armazenador, os desenvolvimentos dos campos de função corrente e temperaturas durante o processo de carregamento do tanque estão mostrados nas Figuras 5.8 a 5.12. As linhas tracejadas indicam a localização do meio poroso.

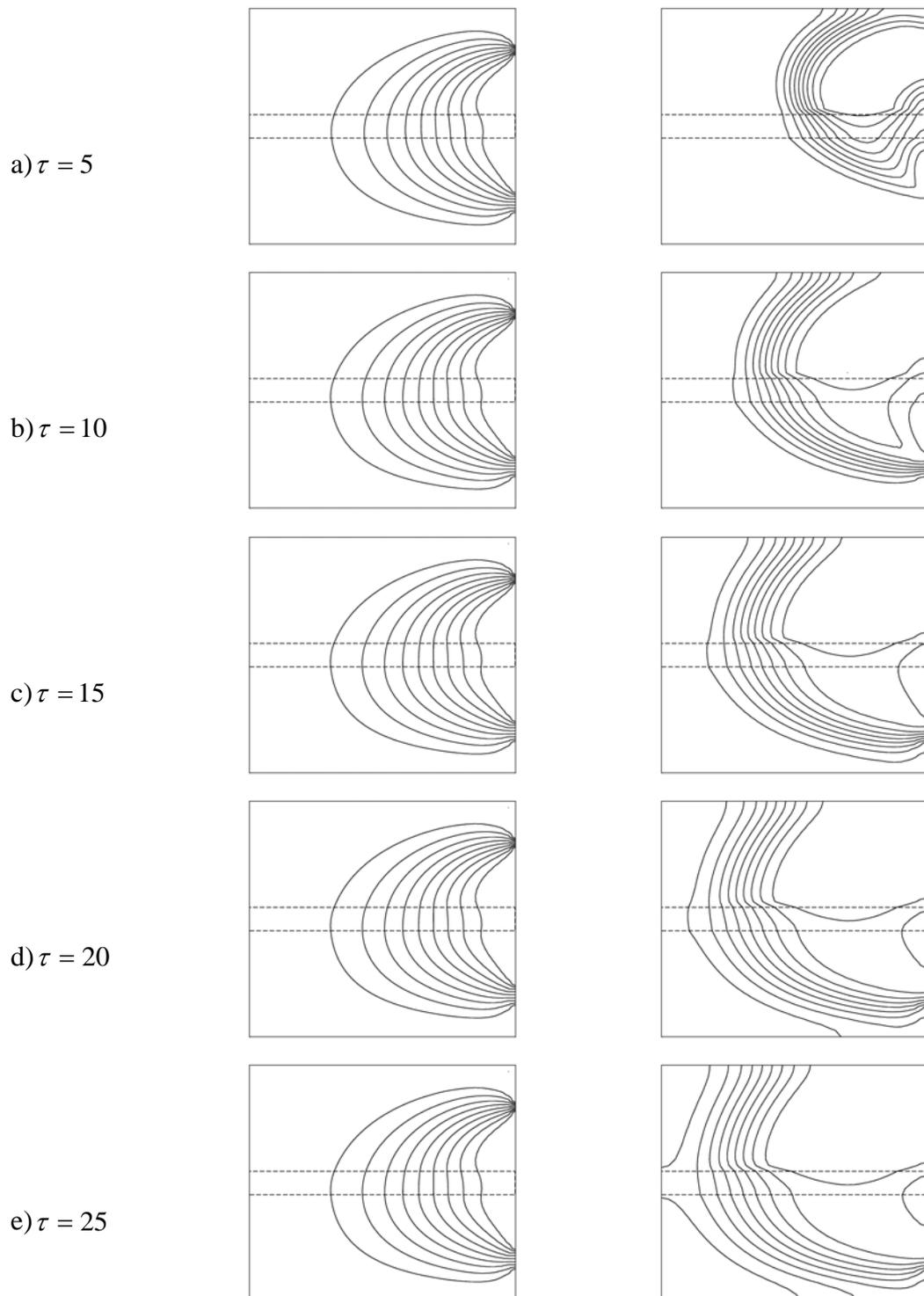


Figura 5.8 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (com meio poroso):

$$Ri = 0,001, \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

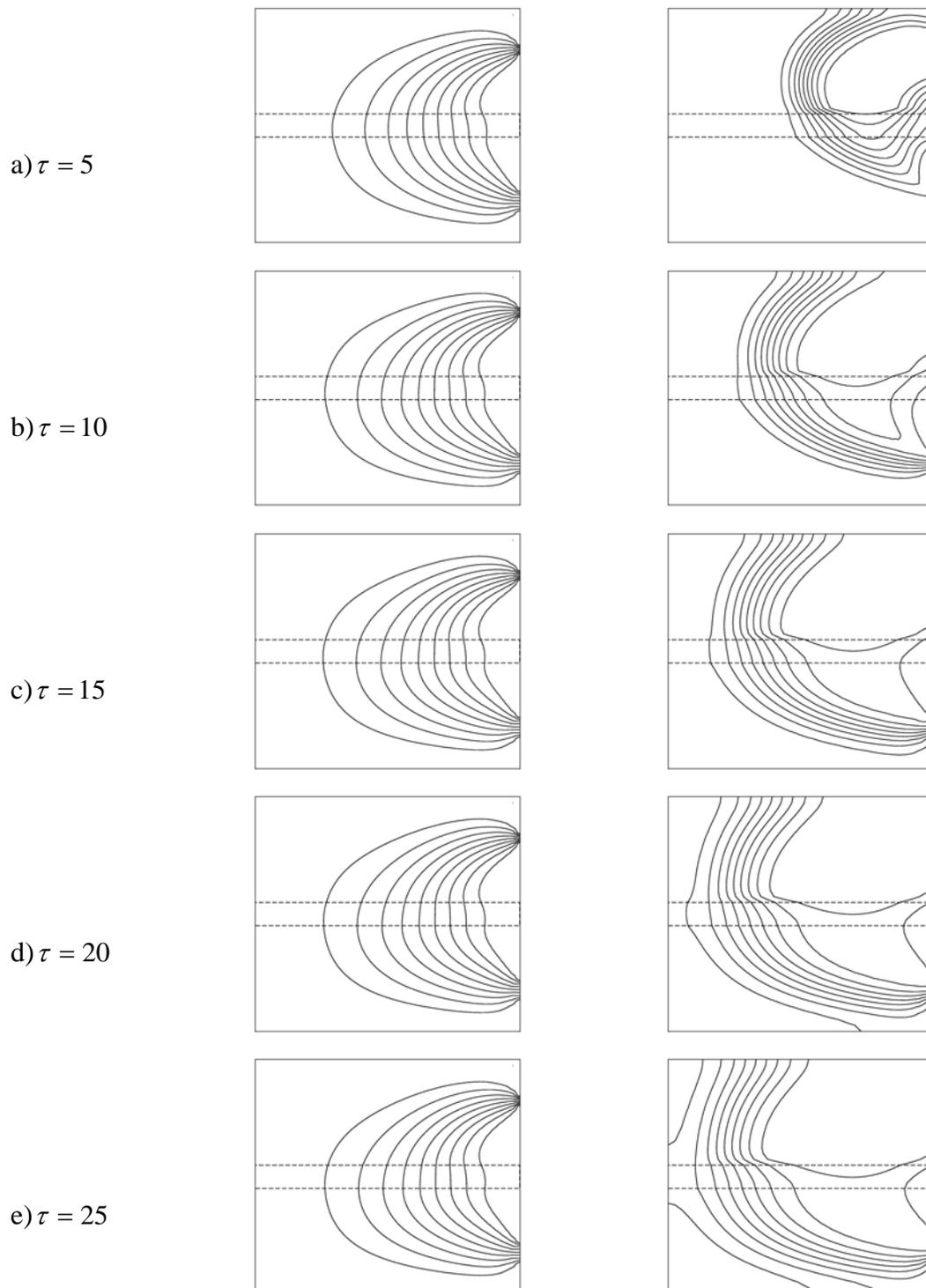


Figura 5.9 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (com meio poroso):

$$Ri = 0,01, \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

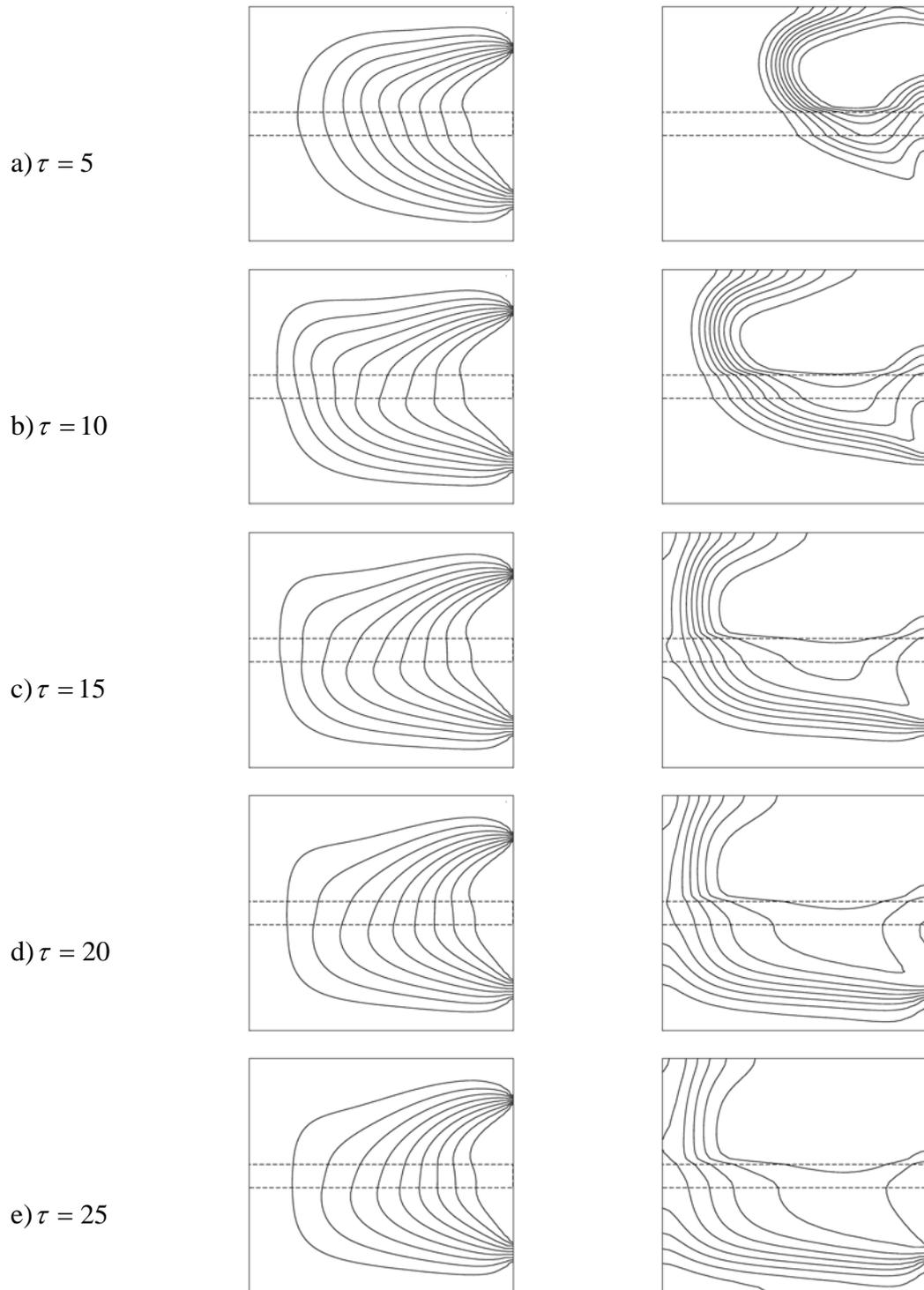


Figura 5.10 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (com meio poroso):

$$Ri = 0,1, \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

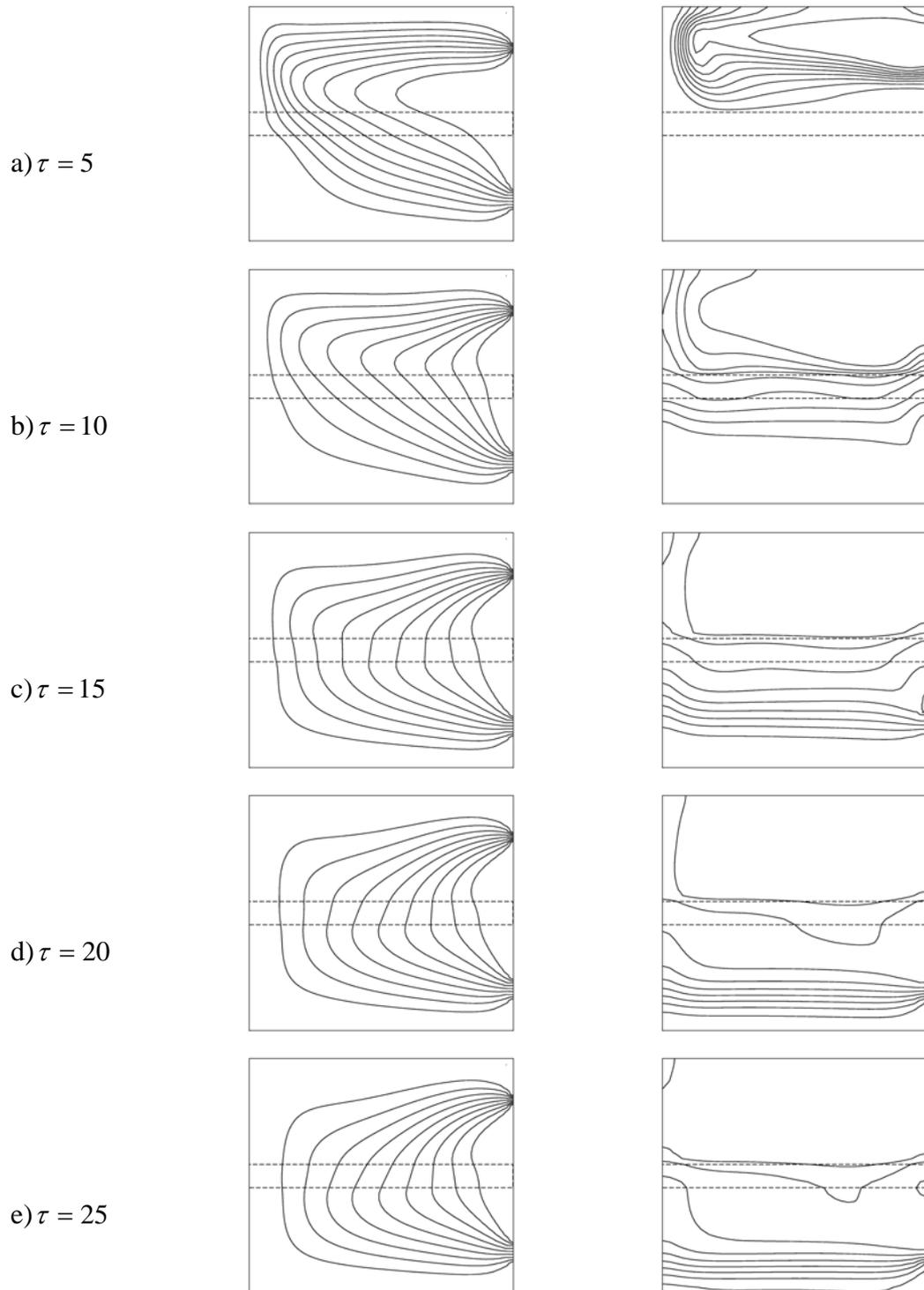


Figura 5.11 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (com meio poroso):

$$Ri = 1, \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

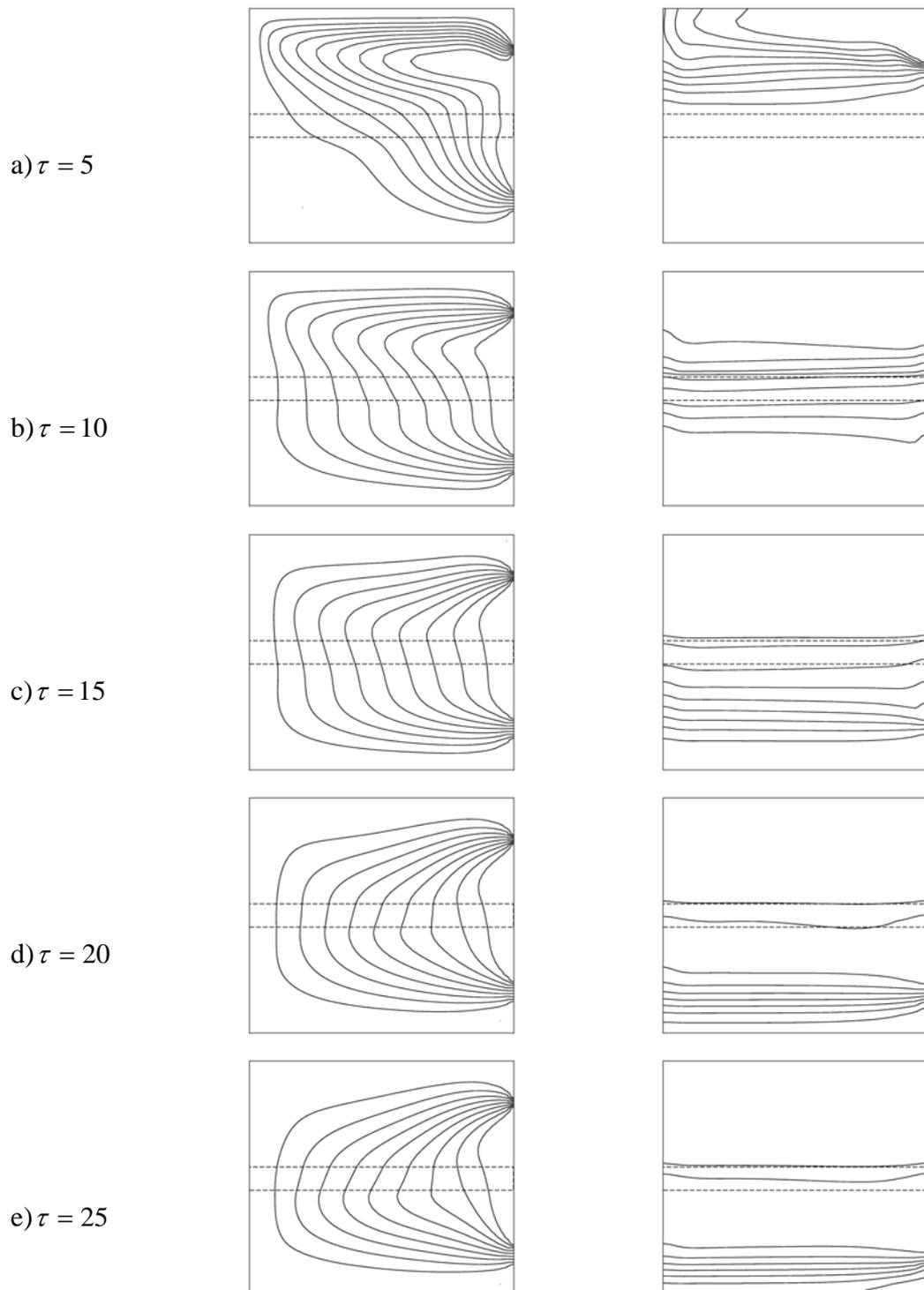


Figura 5.12 – Desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas respectivamente com o tempo (com meio poroso):

$$Ri = 10, \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

Para $Ri = 0,001$ e $0,01$, Figuras 5.8 e 5.9 respectivamente, nota-se que as forças de inércia tem efeito dominante e não foi observada mudança significativa nos perfis de função corrente. Entretanto, as isotermas apresentaram comportamentos diferenciados com a adição do meio poroso. Observou-se que o meio poroso serviu como uma barreira à propagação de calor, pois houve uma redução da região do armazenador com temperaturas mais elevadas da água. Entretanto, no interior do meio poroso notou-se a tendência de estratificação das isotermas com maiores temperaturas.

Para $Ri = 0,1$, Figura 5.10, verifica-se comportamento semelhante aos casos anteriores. As linhas de função corrente não tiveram alterações significativas e as isotermas tenderam a se estratificar no interior do meio poroso. No entanto, novamente o meio poroso serviu como uma barreira à propagação de calor, pois houve uma redução da região de maiores temperaturas da água.

Para $Ri = 1$ e 10 , Figuras 5.11 e 5.12 respectivamente, nota-se uma influência menos acentuada do meio poroso. As linhas de função corrente não apresentam mudanças significativas e as isotermas apresentam comportamento semelhante ao caso do tanque sem meio poroso, Figuras 5.4 e 5.5, estando bem estratificadas. Com isso, nota-se nesse caso que o meio poroso não teve efeito significativo sobre a estratificação térmica para $Ri \geq 1$, pois a mesma ocorre naturalmente na predominância do regime de convecção natural. No entanto, percebe-se que o meio poroso prejudicou o processo de carregamento do tanque, pois houve uma redução da região de temperaturas mais elevadas. Isso pode ser visto mais facilmente para $Ri = 1$ e 10 em $\tau \geq 15$, onde nota-se que a região de temperaturas mais elevadas permaneceu acima do meio poroso.

Assim, foi observado que o meio poroso incluso horizontalmente no centro do armazenador térmico pode favorecer a formação da estratificação térmica em regime de convecção forçada, ou seja, para $Ri < 1$. Para regime de convecção natural, no entanto, não verificou-se influência significativa

do meio poroso na formação da estratificação térmica, pois a mesma ocorre naturalmente nesse caso.

Na Figura 5.13 estão mostradas as variações da temperatura de mistura no tanque com o tempo para os números de Richardson considerados. Verificou-se comportamento similar ao caso do tanque sem meio poroso, onde a temperatura de mistura no tanque aumenta no decorrer do processo de carregamento. Entretanto, notaram-se menores valores numéricos da temperatura de mistura no tanque nos instantes considerados. Nesse caso o meio poroso atua como uma barreira à propagação de calor, diminuindo a região de temperaturas mais elevadas e conseqüentemente o valor da temperatura de mistura.

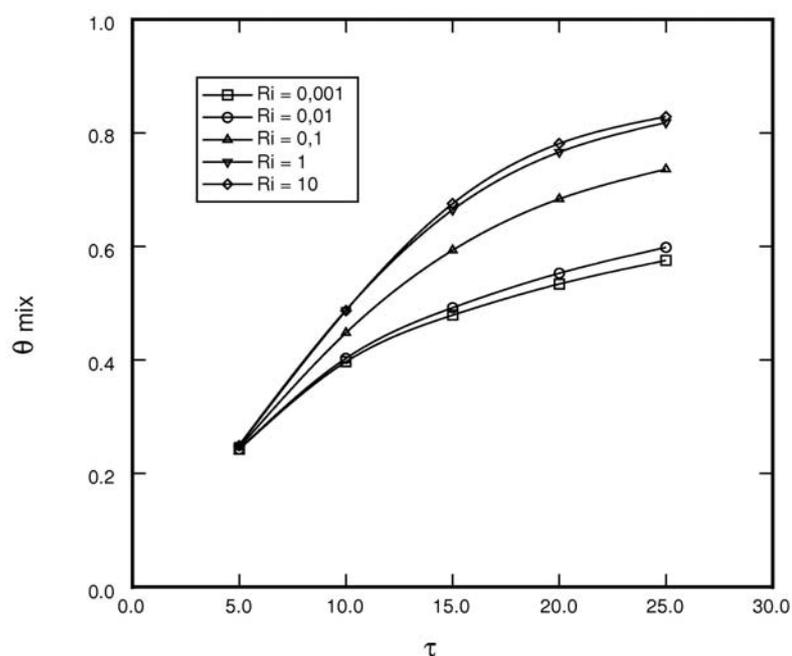


Figura 5.13 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo (com meio poroso).

Assim, pode-se dizer que um armazenador térmico com um meio poroso pode ter sua eficiência reduzida, principalmente para $Ri \geq 1$. Para $Ri < 1$, entretanto, não houve mudança significativa na eficiência do tanque e sim uma tendência mais acentuada de estratificação térmica.

Na Figura 5.14 estão mostrados os percentuais de carregamento útil no tanque com o tempo para os números de Richardson considerados. Nota-se comportamento similar ao caso do tanque sem meio poroso, onde o percentual de carregamento útil de água aumenta com o aumento do número de Richardson e com o tempo. Entretanto, para o tanque com meio poroso o percentual de carregamento útil é menor do que o percentual de carregamento útil no tanque sem meio poroso. Para $\tau \geq 15$, não se observa mudança significativa no percentual de carregamento útil no tanque para os números de Richardson considerados. Nesse caso o meio poroso está atuando novamente como uma barreira à propagação de calor, levando a uma menor disponibilidade do tanque em fornecer água a temperaturas mais elevadas.

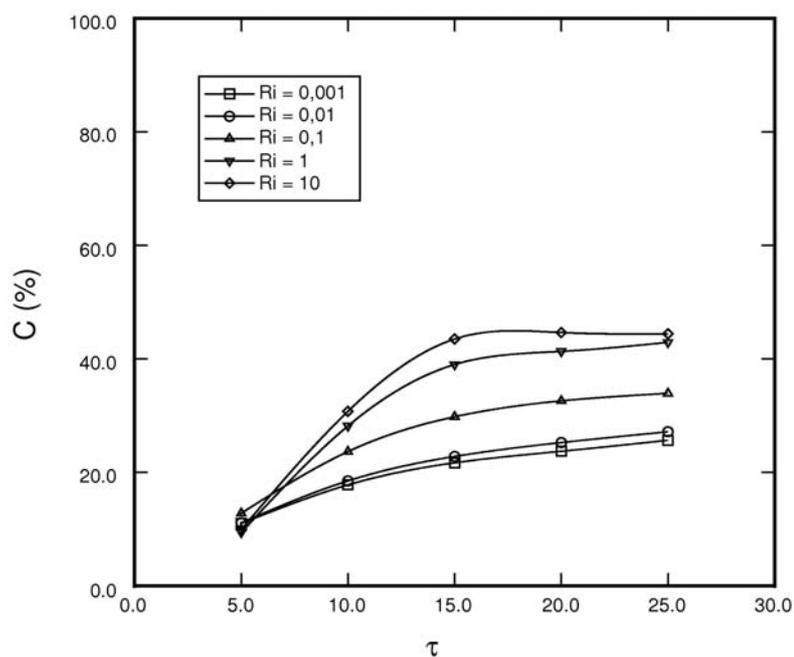


Figura 5.14 – Variação do percentual de carregamento útil do tanque com o tempo em função do número de Richardson (com meio poroso).

Logo, pode-se afirmar que a presença do meio poroso auxiliou a formação da estratificação térmica. No entanto, ocorreu um retardamento do processo de carregamento do tanque em todos os casos considerados.

5.2 – Permeabilidade do meio poroso

A permeabilidade de um meio poroso expressa a facilidade ou dificuldade na qual um fluido pode escoar através do mesmo. Assim, ela pode ter grande efeito no desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas no interior do tanque. O número de Darcy está diretamente relacionado à permeabilidade do meio poroso. No presente estudo, os dados referentes à permeabilidade foram retirados de um estudo realizado por Beavers e Joseph (1967), que adotaram uma permeabilidade padrão em função do número de Darcy igual a 1×10^{-7} . Devido à disponibilidade limitada de dados de permeabilidade disponíveis na literatura, não foi possível realizar um estudo mais amplo dos efeitos da permeabilidade do meio poroso. Entretanto, no presente estudo foi considerado uma faixa de estudo do número de Darcy de 10^{-5} a 10^{-9} .

Na Figura 5.15 estão mostrados os perfis de função corrente e de temperaturas em função do número de Darcy para $Ri = 0,001$ em $\tau = 15$. Observa-se que não houve diferença significativa dos campos de função corrente e temperaturas na faixa do número de Darcy considerada.

Na Figura 5.16 estão mostradas as variações da temperatura de mistura no tanque com o tempo para os números de Darcy considerados e para $Ri = 0,001$. Nota-se que na faixa considerada para o número de Darcy não houve mudanças significativas na temperatura de mistura no tanque com o tempo.

Na Figura 5.17 estão mostrados os perfis de função corrente e as isotermas em função do número de Darcy para $Ri = 0,1$ em $\tau = 20$. Novamente observa-se que não houve diferença significativa nos campos de função corrente e temperaturas na faixa do número de Darcy considerada.

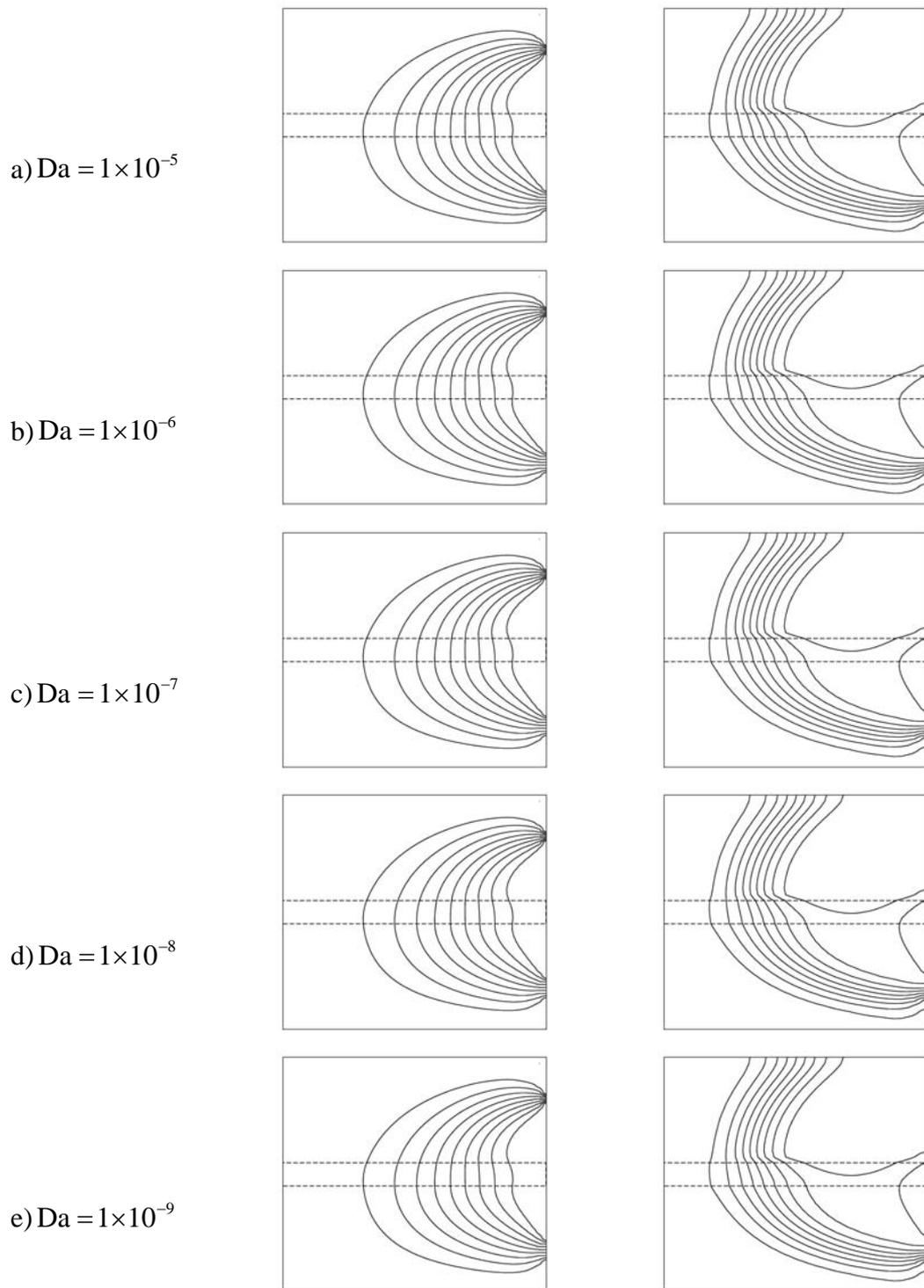


Figura 5.15 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função do número de Darcy:

$$Ri = 0,001 \text{ em } \tau = 15; \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

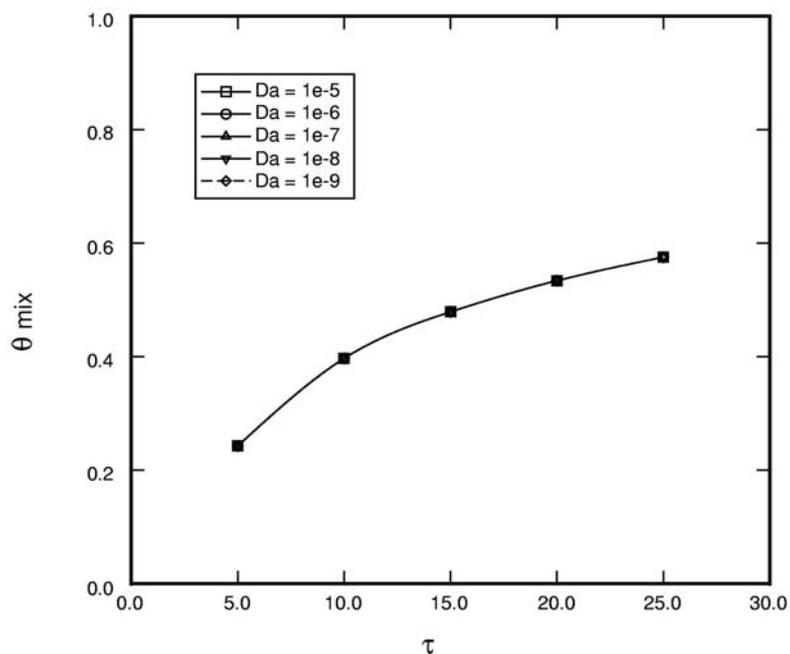


Figura 5.16 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função do número de Darcy ($Ri = 0,001$).

Por último, na Figura 5.18 estão mostrados os perfis de função corrente e de temperaturas em função do número de Darcy para $Ri = 0,1$ em $\tau = 10$. Nota-se também que não houve diferença significativa dos campos de função corrente e temperaturas na faixa do número de Darcy considerada.

Na Figura 5.19 estão mostradas as variações da temperatura de mistura no tanque com o tempo para os números de Darcy considerados e $Ri = 0,1$. Nota-se novamente que na faixa considerada para o número de Darcy não houve mudanças significativas na temperatura de mistura no tanque com o tempo.

Na Figura 5.20 estão mostradas as variações da temperatura de mistura no tanque em função do tempo para os números de Darcy considerados e $Ri = 10$. Nota-se mais uma vez que na faixa considerada para o número de Darcy não houve mudanças significativas na temperatura de mistura no tanque com o tempo.

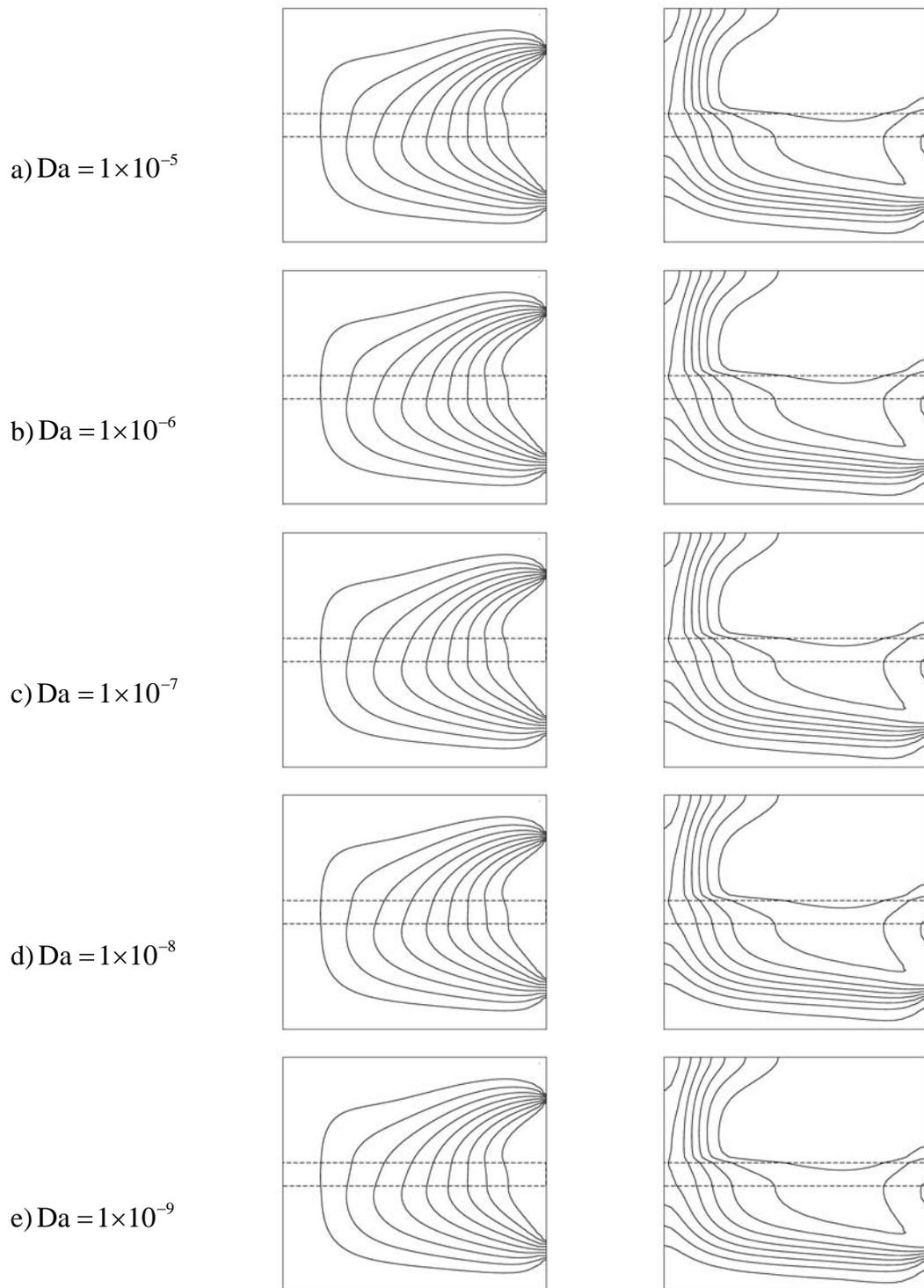


Figura 5.17 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função do número de Darcy:

$$Ri = 0,1 \text{ em } \tau = 20; \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

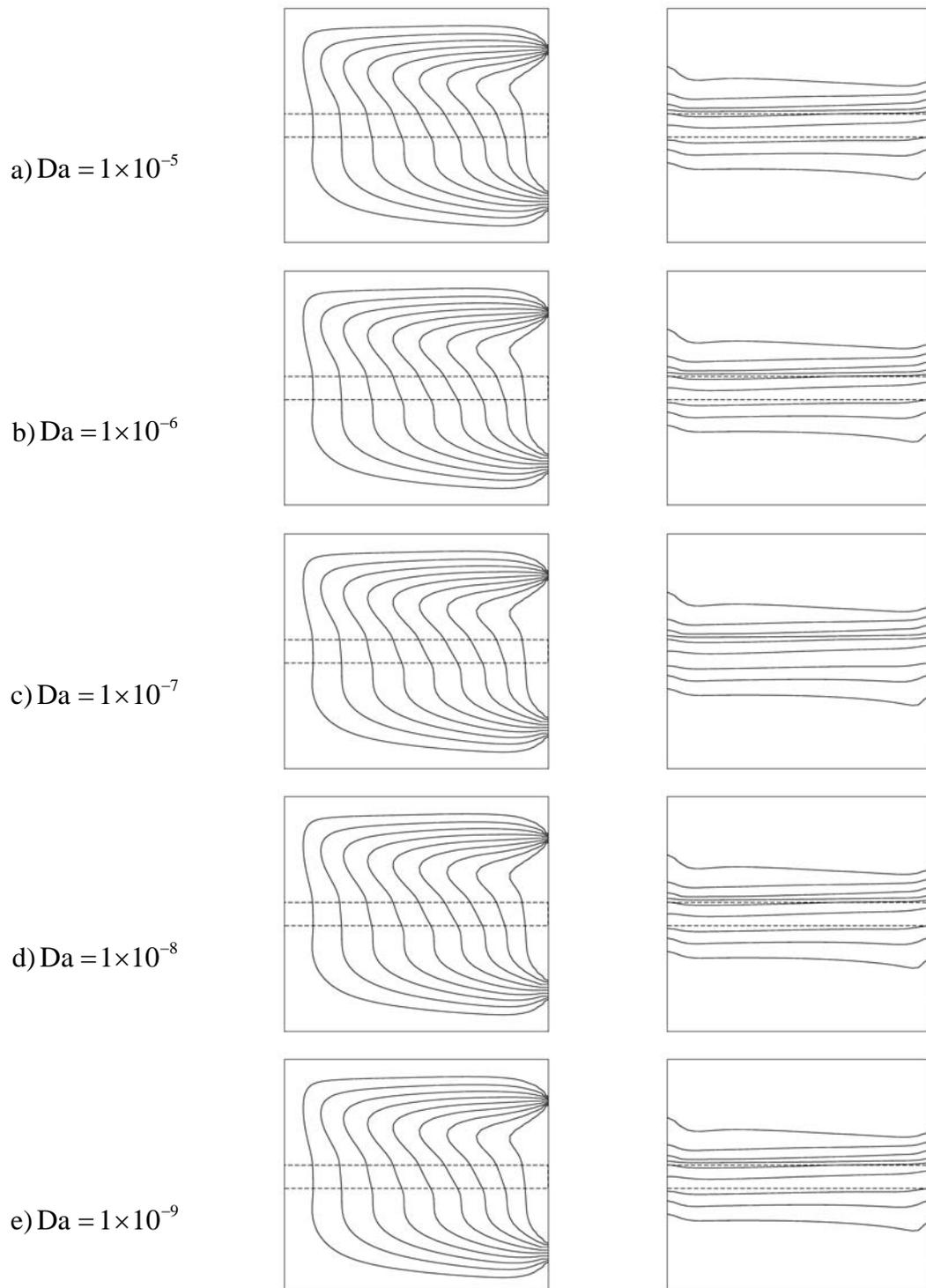


Figura 5.18 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função do número de Darcy:

$Ri = 10$ em $\tau = 10$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$.

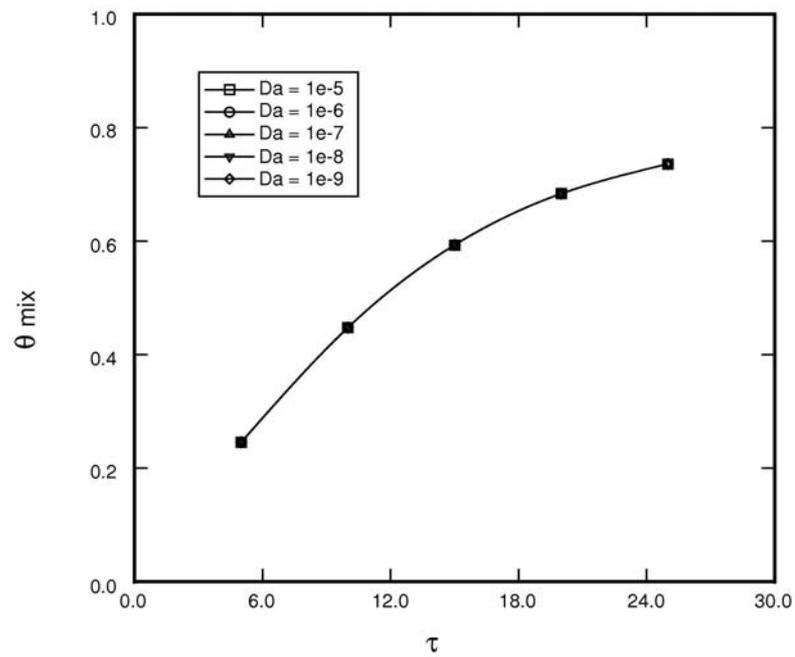


Figura 5.19 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função do número de Darcy ($Ri = 0,1$).

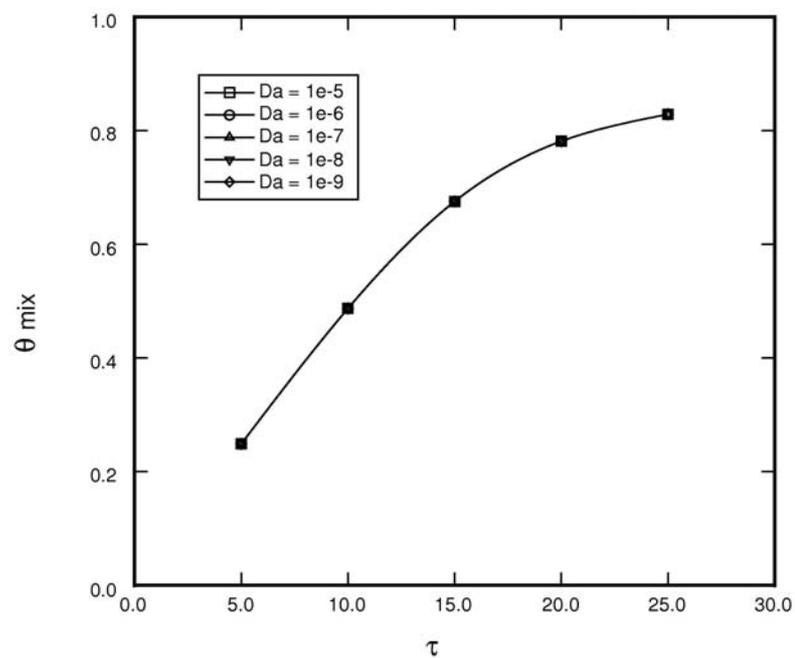


Figura 5.20 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função do número de Darcy ($Ri = 10$).

Pode-se afirmar então que na faixa do número de Darcy considerada, ou seja, de 10^{-5} a 10^{-9} e na situação física em análise, não há influência significativa da permeabilidade do meio poroso nos campos de função corrente e temperaturas. Logo, pode-se afirmar também não existir diferenças significativas na formação da estratificação térmica e no percentual de carregamento útil no tanque na faixa do número de Darcy considerada.

Deve ser mencionado que se na simulação numérica for utilizado um meio poroso com maiores valores de permeabilidade, a formulação original de Darcy torna-se inválida, pois um aumento da permeabilidade implica num aumento da velocidade de escoamento no meio poroso. Embora os procedimentos para os cálculos numéricos permaneçam os mesmos, são necessárias modificações na formulação original de Darcy. Nesse caso, o escoamento pode ser modelado matematicamente pela formulação Darcy-Brinkman-Forchheimer, onde estão presentes os efeitos de inércia e efeitos viscosos.

5.3 – Espessura do meio poroso

Na análise da espessura do meio poroso, o mesmo foi considerado horizontal e localizado no centro do armazenador, $D = 0,5$. Além disso, foram consideradas três espessuras do meio poroso, $S = 0,1, 0,2$ e $0,3$.

Na Figura 5.21 estão mostrados os campos de função corrente e temperaturas em função da espessura do meio poroso para $Ri = 0,001$ em $\tau = 20$. No instante considerado predominam os efeitos de inércia e as isothermas estão em desenvolvimento. Nota-se que o aumento da espessura do meio poroso provoca uma melhoria na estratificação térmica. Entretanto, com o aumento da espessura do meio poroso verifica-se também uma diminuição da quantidade de calor armazenado num mesmo instante de tempo. Nesse caso o meio poroso está atuando novamente como uma barreira à propagação de calor.

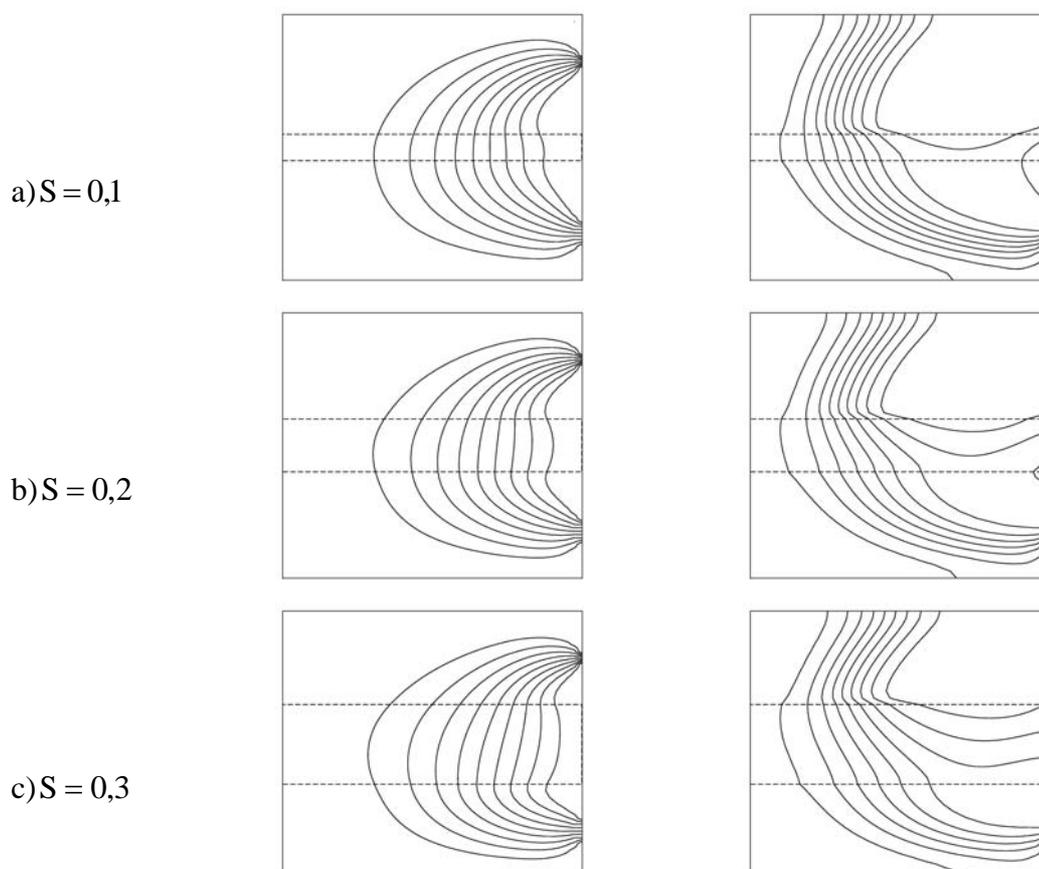


Figura 5.21 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da espessura do meio poroso:

$$Ri = 0,001 \text{ em } \tau = 20; \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

Na Figura 5.22 estão mostradas as variações da temperatura de mistura no tanque com o tempo e com as espessuras do meio poroso para $Ri = 0,001$. Nota-se que o aumento da espessura do meio poroso provoca uma diminuição da temperatura de mistura no tanque. Isso ocorre porque o meio poroso atua como uma barreira à propagação de calor, levando a uma menor disponibilidade do tanque em fornecer água a temperaturas mais elevadas.

Na Figura 5.23 estão mostrados os percentuais de carregamento útil do tanque com o tempo para as espessuras dos meios porosos consideradas e $Ri = 0,001$. Nota-se que o aumento da espessura do meio poroso provoca uma diminuição do percentual de carregamento útil no tanque.

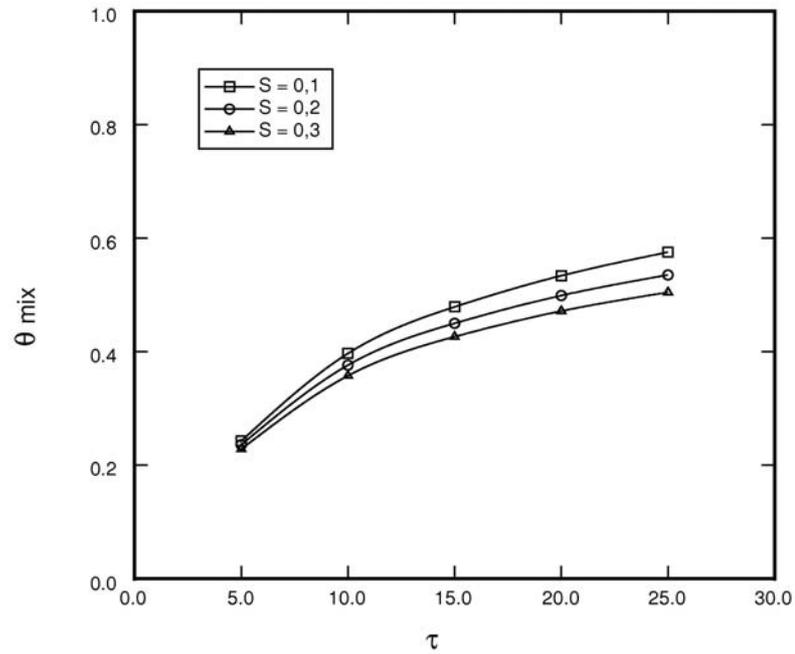


Figura 5.22 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 0,001$).

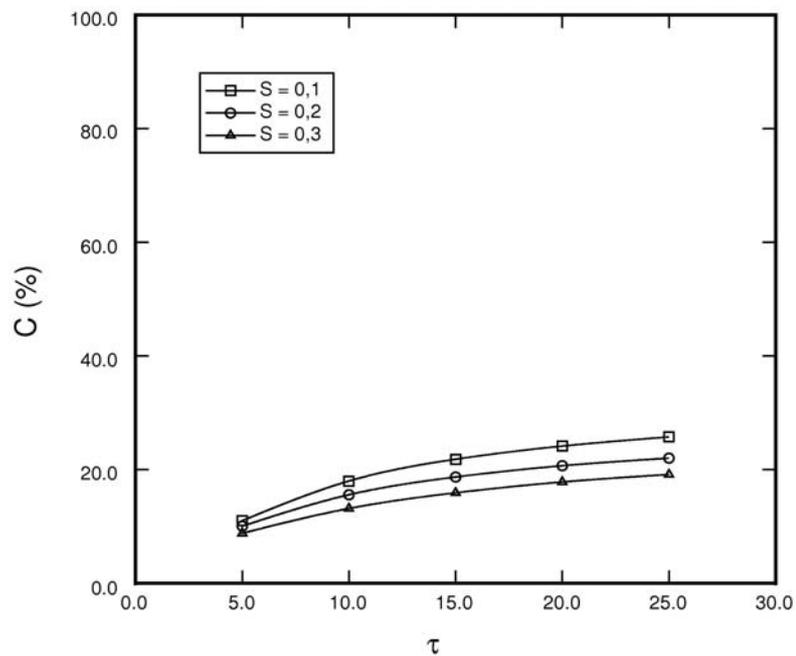


Figura 5.23 – Variação do percentual de carregamento útil do tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 0,001$).

Assim, para $Ri = 0,001$ observa-se que o aumento da espessura do meio poroso reduz a eficiência térmica e o percentual de carregamento útil no armazenador. Entretanto, com o aumento da espessura do meio poroso nota-se uma melhoria na estratificação térmica.

Na Figura 5.24 estão mostrados os campos de função corrente e temperaturas em função da espessura do meio poroso para $Ri = 0,1$ em $\tau = 20$. No instante considerado começam a surgir os efeitos de empuxo, com as isotermas apresentando comportamento de camadas. Nota-se que o aumento da espessura do meio poroso provoca uma melhoria da estratificação térmica e também uma diminuição da região de temperaturas mais elevadas no interior do armazenador

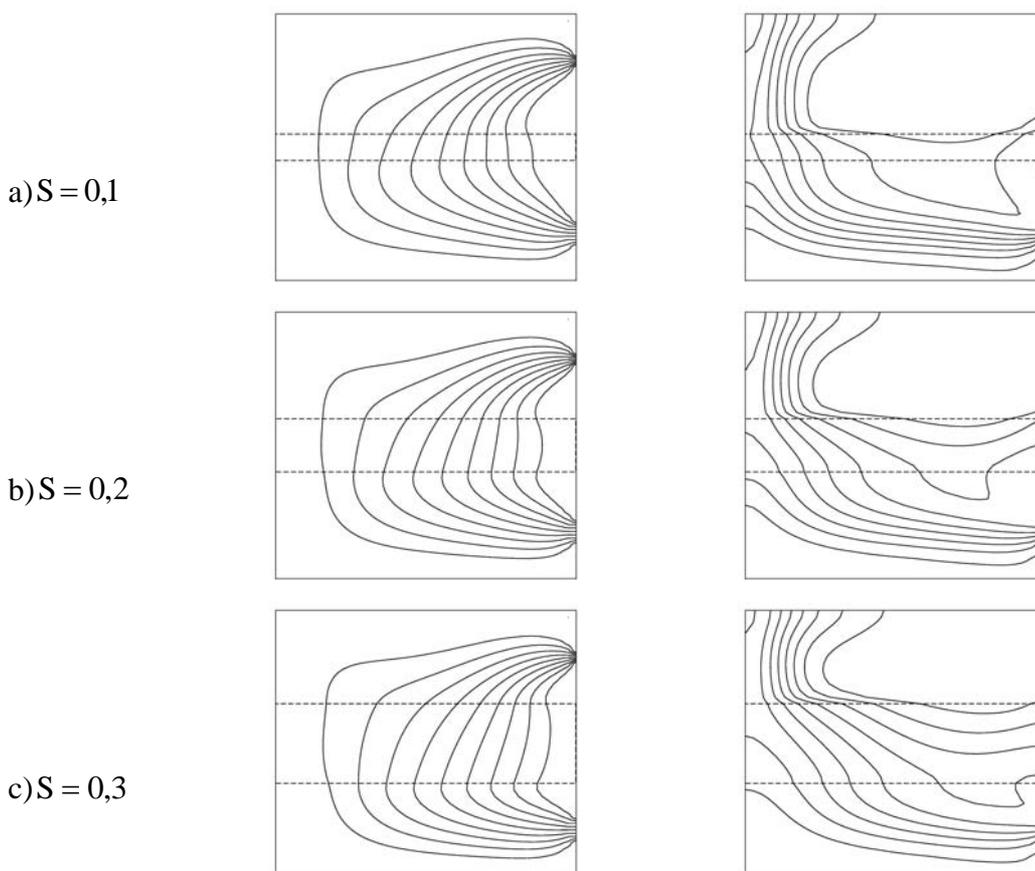


Figura 5.24 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da espessura do meio poroso:

$$Ri = 0,1 \text{ em } \tau = 20; \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

Na Figura 5.25 estão mostradas as variações da temperatura de mistura no tanque com o tempo e com as espessuras dos meios porosos para $Ri = 0,1$. Nota-se que o aumento da espessura do meio poroso provoca uma diminuição da temperatura de mistura no tanque, pois o meio poroso age como uma barreira à propagação de calor.

Na Figura 5.26 estão mostrados os percentuais de carregamento do tanque com o tempo e com a espessura do meio poroso para $Ri = 0,1$. Nota-se que o aumento da espessura do meio poroso provoca uma diminuição do percentual de carregamento útil no tanque.

Assim, para $Ri = 0,1$ nota-se que o aumento da espessura do meio poroso reduz a eficiência térmica e o percentual de carregamento útil no armazenador. Entretanto, nota-se melhoria na estratificação térmica com o aumento da espessura do meio poroso.

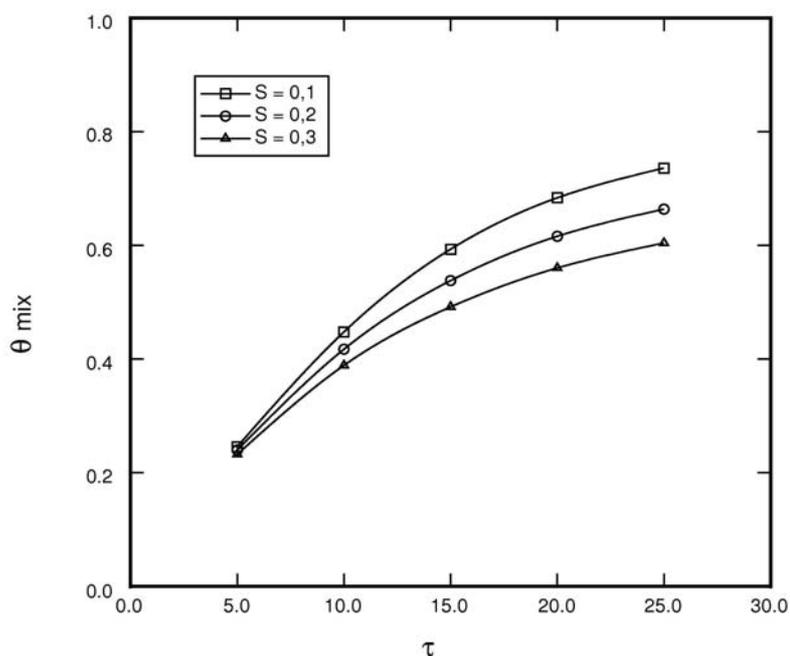


Figura 5.25 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 0,1$).

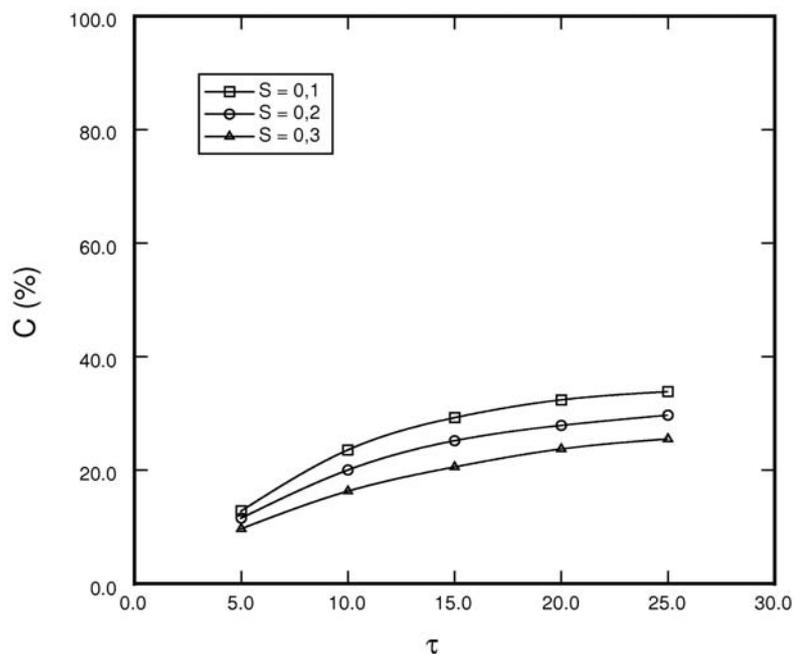


Figura 5.26 – Variação do percentual de carregamento útil do tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 0,1$).

Na Figura 5.27 estão mostrados os campos de função corrente e temperaturas em função da espessura do meio poroso para $Ri = 10$ em $\tau = 20$. Nesse caso, a estratificação térmica forma-se naturalmente devido ao regime de convecção natural, e o meio poroso, independentemente das espessuras consideradas, não mostrou ter influência significativa na melhoria da estratificação térmica do fluido armazenado.

Na Figura 5.28 estão mostradas as variações das temperaturas de mistura no tanque com o tempo para as espessuras dos meios porosos consideradas e para $Ri = 10$. Pode ser visto novamente que um aumento na espessura do meio poroso provoca uma diminuição da temperatura de mistura no tanque num mesmo instante de carregamento.

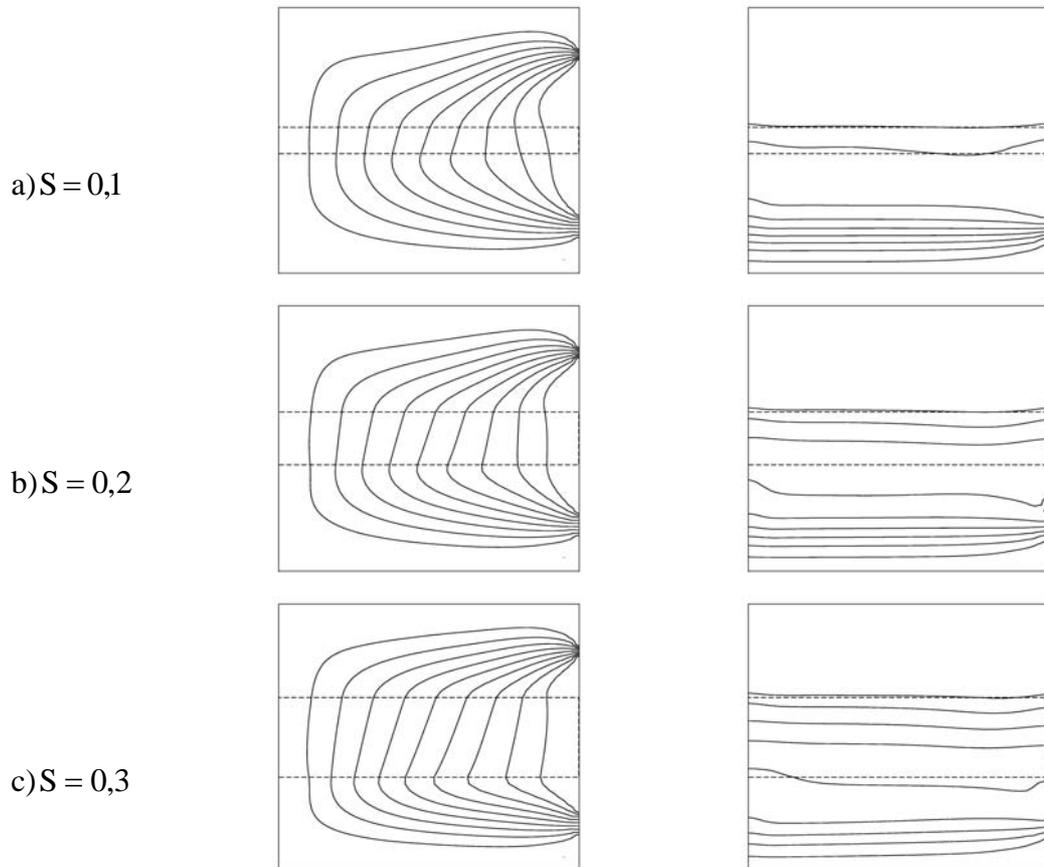


Figura 5.27 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da espessura do meio poroso:

$$Ri = 10 \text{ em } \tau = 20; \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

Por último, na Figura 5.29 estão mostrados os percentuais de carregamento útil do tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso para $Ri = 10$. Nota-se que nas espessuras consideradas, ocorre um aumento da porcentagem de carregamento útil aproximadamente até $\tau = 15$. Após isso não há um aumento significativo da porcentagem de carregamento útil do tanque.

Assim, para $Ri = 10$ observa-se que um aumento da espessura do meio poroso não tem influência significativa na formação da estratificação térmica. Entretanto, verifica-se diminuição da eficiência térmica do tanque, pois há redução da temperatura de mistura da água, além de ser prejudicial ao processo de carregamento do armazenador.

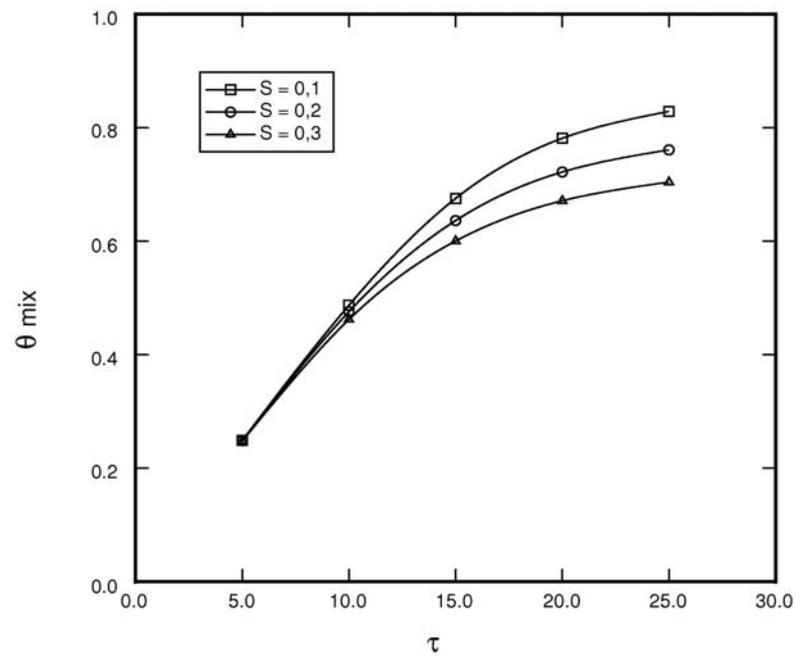


Figura 5.28 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 10$).

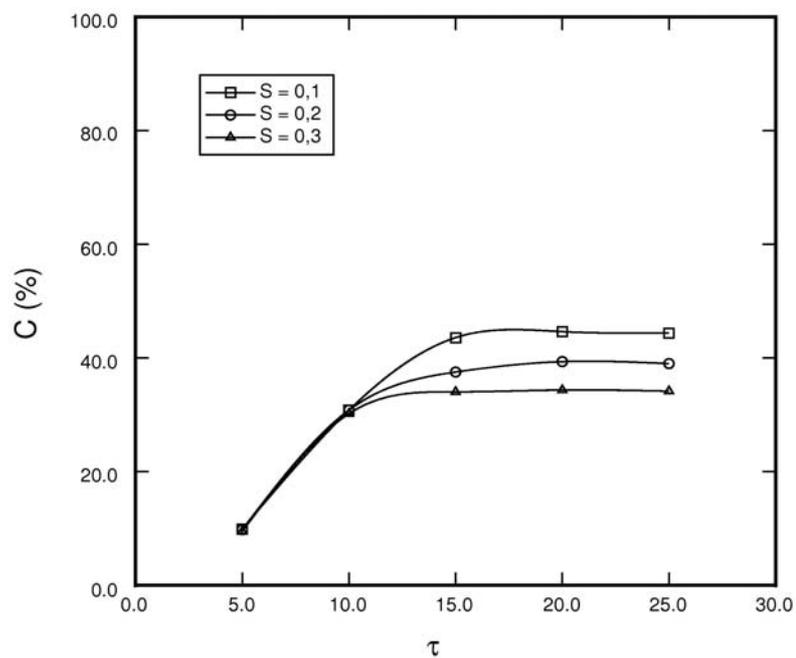


Figura 5.29 – Variação do percentual de carregamento útil do tanque com o tempo em função da espessura do meio poroso ($Ri = 10$).

5.4 – Posição do meio poroso

A posição do meio poroso está relacionada com a porcentagem de carregamento útil e com a eficiência térmica do armazenador. Um meio poroso localizado próximo à tomada de entrada do tanque pode favorecer o processo de estratificação térmica do fluido, mas pode ser prejudicial ao carregamento do tanque. Assim, foi feito um estudo da posição do meio poroso considerando sua localização nas alturas $D = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ e $0,7$. Essa localização corresponde à linha de centro do meio poroso. Foram consideradas as espessuras $S = 0,1$ e $0,2$ e números de Richardson iguais a $0,01$ e 1 .

N Figura 5.30 estão mostrados os campos de função corrente e temperaturas em função da posição do meio poroso para $Ri = 0,01$ e $S = 0,1$ em $\tau = 20$. Nota-se que os perfis de função corrente não apresentam mudanças significativas entre si, com predominância dos efeitos de inércia. As isothermas estão em desenvolvimento no instante considerado, mas observa-se a formação de estratificação térmica na região ocupada pelo meio poroso. Isso pode ser visualizado em todas posições consideradas. Entretanto, com a variação da posição do meio poroso verticalmente da metade inferior para a metade superior do tanque, nota-se uma diminuição da região de temperaturas mais elevadas. Assim, pode-se dizer que o meio poroso serviu como uma barreira à propagação de calor.

Na Figura 5.31 estão mostradas as variações das temperaturas de mistura no tanque com o tempo e com a posição do meio poroso para $Ri = 0,01$ e $S = 0,1$. Nota-se que a temperatura de mistura no tanque aumenta conforme se desloca o meio poroso verticalmente para baixo. Assim, o tanque armazenador com um meio poroso localizado na sua metade inferior apresentam maior eficiência do que um tanque armazenador com um meio poroso localizado na sua metade superior.

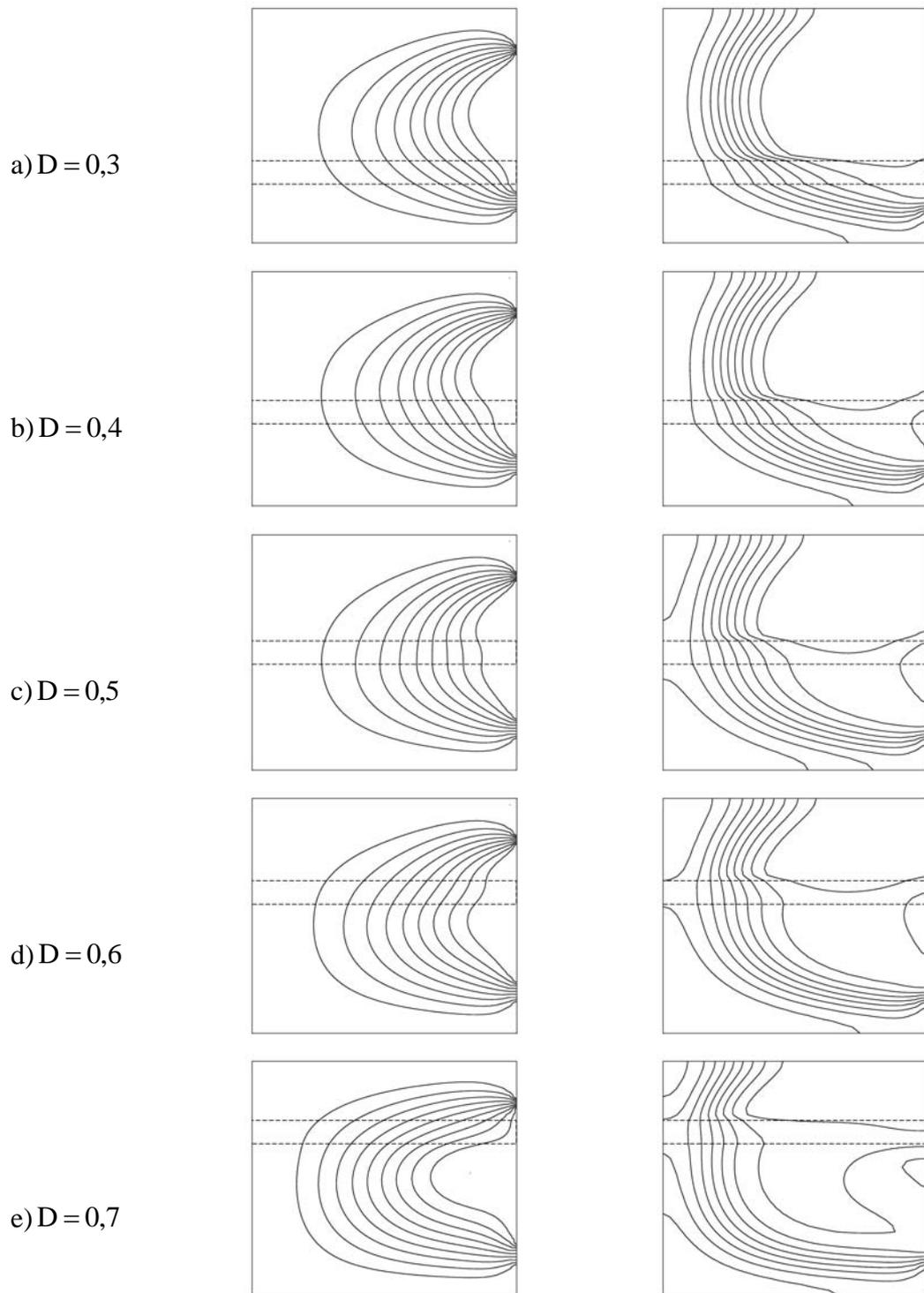


Figura 5.30 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da posição do meio poroso:

$$Ri = 0,01 \text{ em } \tau = 20 \text{ e } S = 0,1; \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

Na Figura 5.32 estão mostrados os percentuais de carregamento útil do tanque com o tempo e com as posições do meio poroso para $Ri = 0,01$ e $S = 0,1$. Nota-se novamente um aumento do percentual de carregamento útil do tanque conforme se desloca o meio poroso verticalmente para baixo. Assim, o tanque armazenador com um meio poroso localizado na sua metade inferior apresenta maior porcentagem de carregamento útil que um tanque armazenador com um meio poroso localizado na sua metade superior.

Logo, para $Ri = 0,01$ e $S = 0,1$, observa-se que o meio poroso localizado na metade inferior do armazenador térmico auxilia na formação da estratificação térmica, além de melhorar sua eficiência térmica e também propiciar uma maior porcentagem de carregamento útil de água.

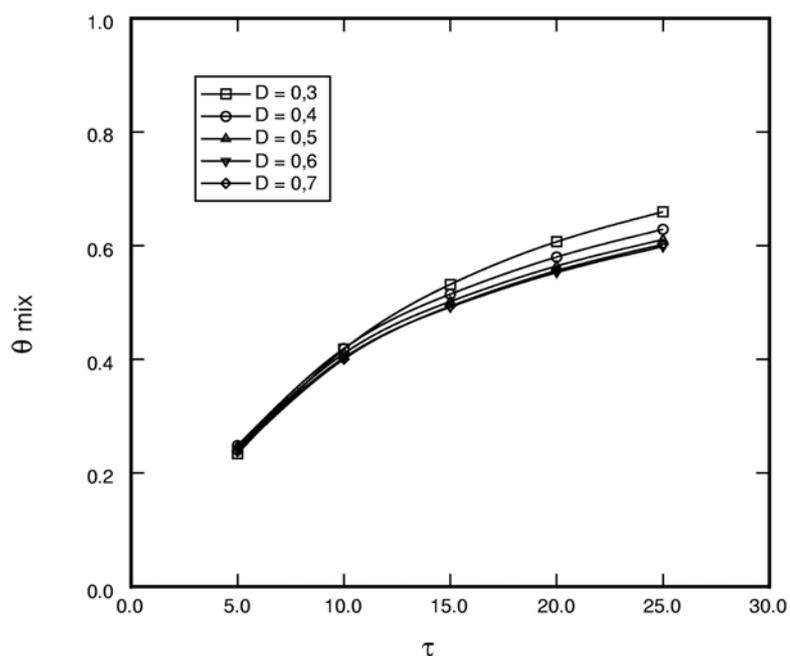


Figura 5.31 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 0,01$ e $S = 0,1$).

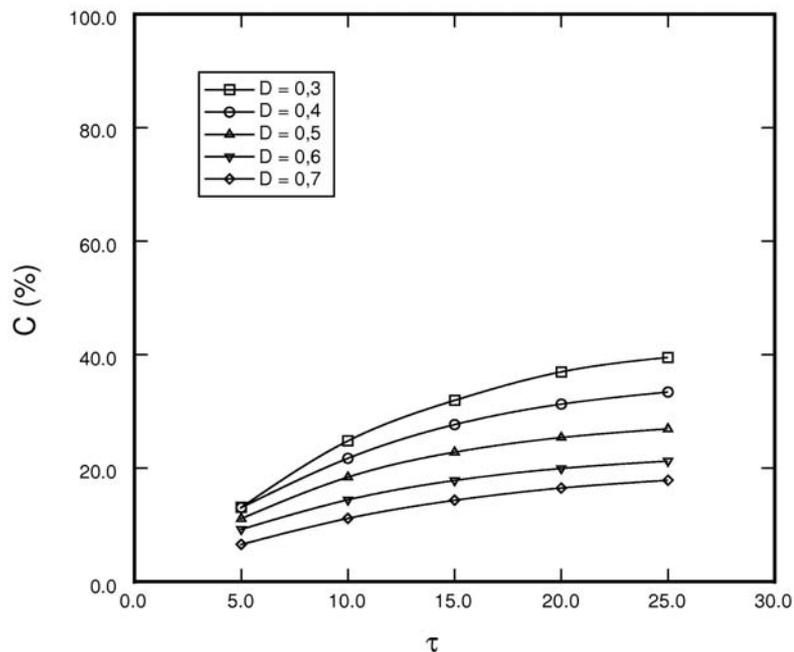


Figura 5.32 – Variação do percentual de carregamento útil do tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 0,01$ e $S = 0,1$).

Na Figura 5.33 estão mostrados os campos de função corrente e temperaturas em função da posição do meio poroso para $Ri = 1$ e $S = 0,1$ em $\tau = 20$. Novamente os perfis de função corrente não apresentam mudanças significativas de um caso para outro. As isothermas apresentam características de estratificação térmica no instante considerado e não se observa efeito significativo do meio poroso na formação da estratificação térmica. Com a movimentação do meio poroso verticalmente de baixo para cima, ocorre uma diminuição da região de temperaturas mais elevadas, com o meio poroso atuando como uma barreira à propagação de calor.

Na Figura 5.34 estão mostradas as variações das temperaturas de mistura no tanque em função do tempo e com a posição do meio poroso para $Ri = 1$ e $S = 0,1$. Nota-se que a temperatura de mistura no tanque aumenta conforme se desloca o meio poroso verticalmente para baixo. Assim, num armazenador com um meio poroso localizado na sua metade inferior apresenta maior eficiência que um tanque armazenador com um meio poroso localizado na sua metade superior.

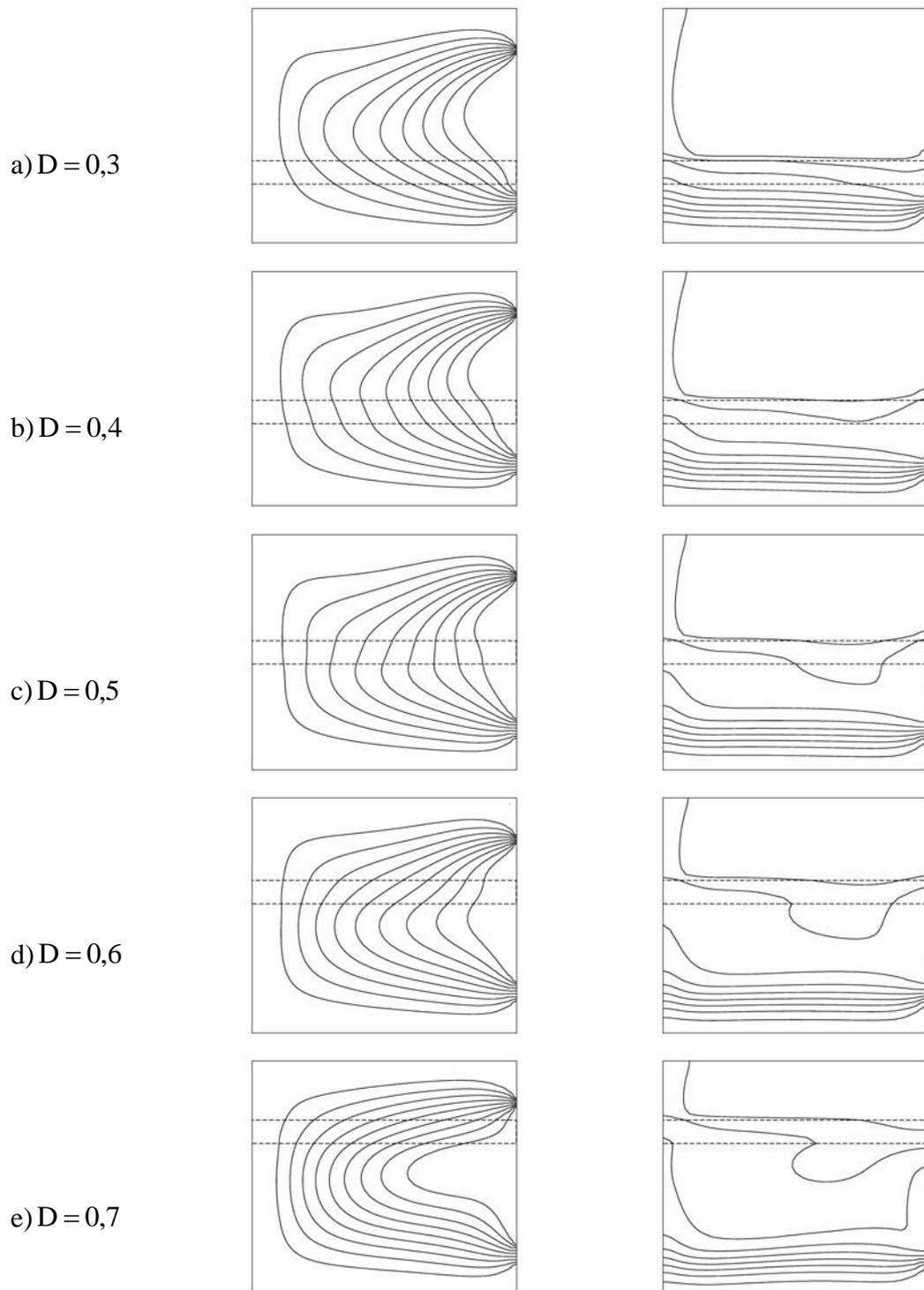


Figura 5.33 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da posição do meio poroso:

$Ri = 1$ em $\tau = 20$ e $S = 0,1$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$.

Logo, para $Ri = 1$ e $S = 0,1$, nota-se mais uma vez que um meio poroso localizado na metade inferior do armazenador térmico auxilia na formação da estratificação térmica, além de melhorar sua eficiência térmica e também propiciar uma maior porcentagem de carregamento útil de água.

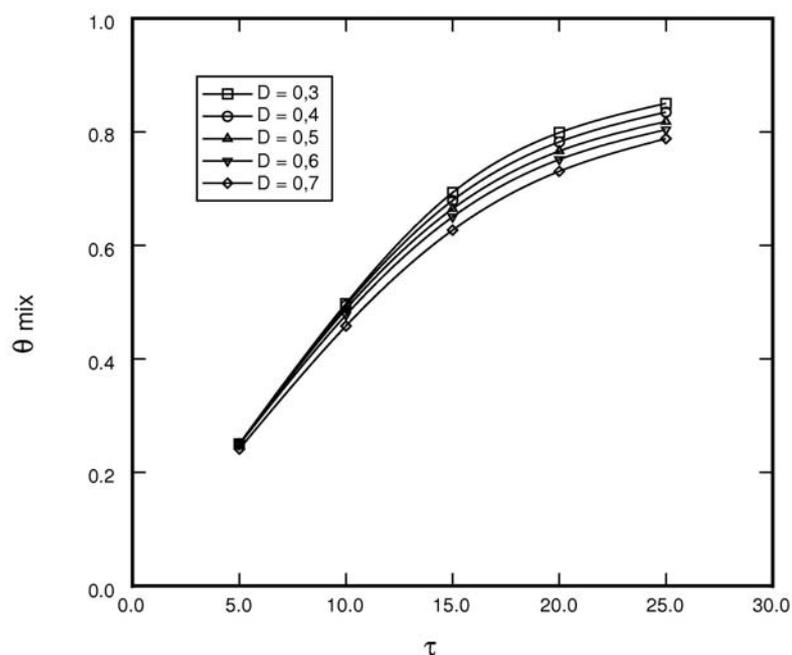


Figura 5.34 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 1$ e $S = 0,1$).

Na Figura 5.35 estão mostrados os campos de função corrente e temperaturas em função da posição do meio poroso para $Ri = 0,01$ e $S = 0,2$ em $\tau = 20$. Nesse caso percebeu-se uma mudança significativa nos perfis de função corrente nos últimos dois casos, ocorrendo uma recirculação nos perfis de função corrente da Figura 5.35d e uma retração do escoamento na Figura 5.35e. As isothermas estão em desenvolvimento e percebe-se a formação de estratificação térmica na posição ocupada pelo meio poroso, com exceção da Figura 5.35e. Entretanto, com a variação da posição do meio poroso da metade inferior para a metade superior do tanque ocorre uma diminuição da região de temperaturas mais elevadas no interior do tanque.

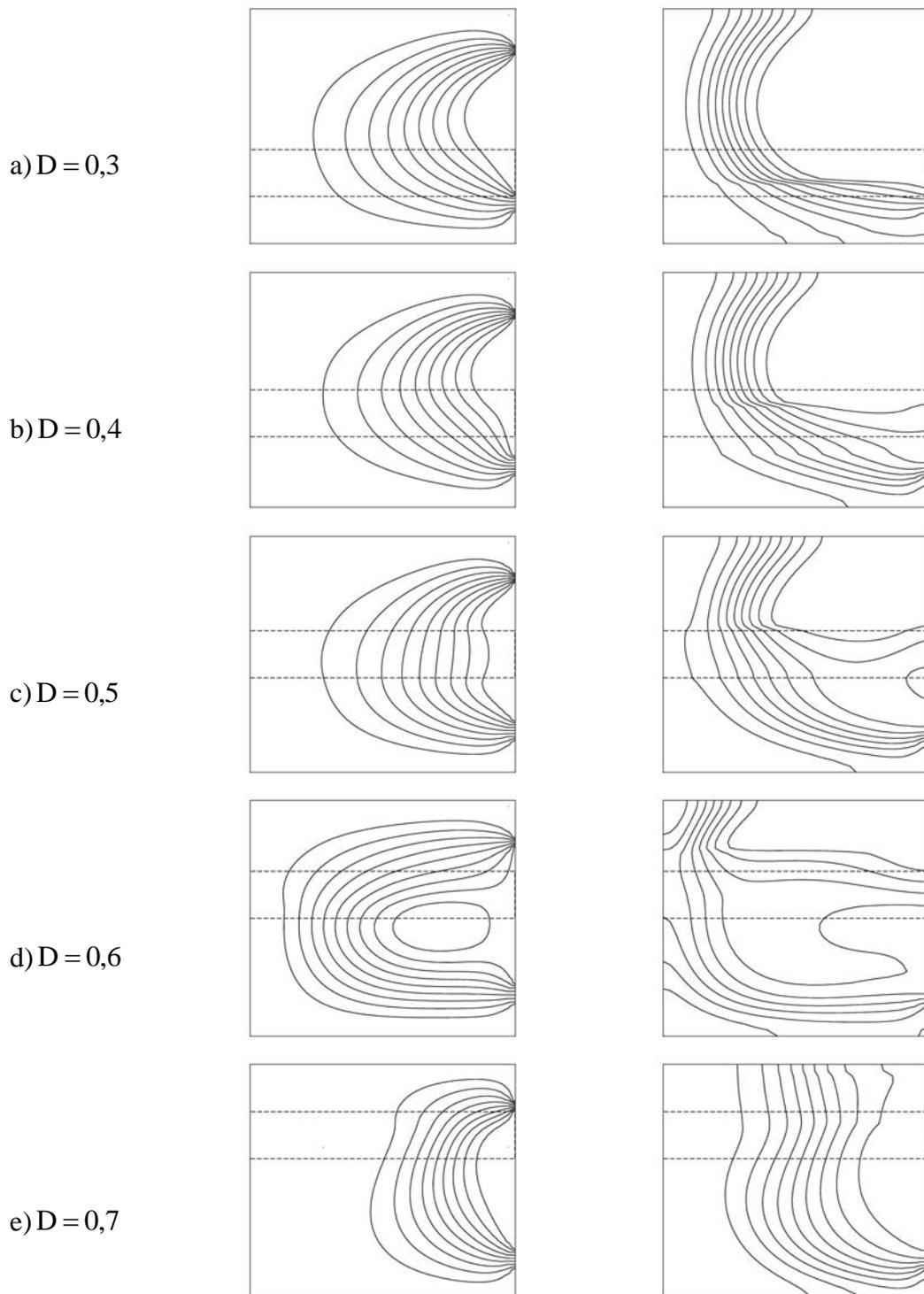


Figura 5.35 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da posição do meio poroso:

$Ri = 0,01$ em $\tau = 20$ e $S = 0,2$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$.

Na Figura 5.36 estão mostradas as variações da temperatura de mistura no tanque com o tempo e com a posição do meio poroso para $Ri = 0,01$ e $S = 0,2$. Novamente nota-se que a temperatura de mistura no tanque aumenta conforme se desloca o meio poroso verticalmente para baixo. Logo, o tanque armazenador com um meio poroso localizado na sua metade inferior apresenta maior eficiência que um tanque armazenador com um meio poroso localizado na sua metade superior.

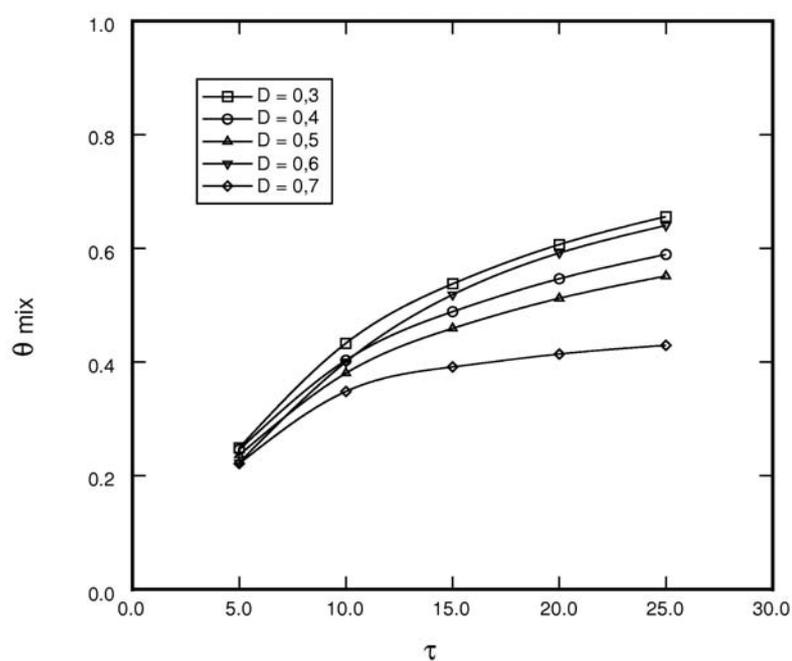


Figura 5.36 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 0,01$ e $S = 0,2$).

Assim, para $Ri = 0,01$ e $S = 0,2$, pode-se dizer que o meio poroso localizado na metade inferior do armazenador térmico auxilia na formação da estratificação térmica, além de melhorar a eficiência térmica do tanque armazenador e também proporcionar uma maior porcentagem de carregamento útil.

Finalmente, na Figura 5.37 estão mostrados os campos de função corrente e temperaturas em função da posição do meio poroso para $Ri = 1$ e $S = 0,2$ em $\tau = 20$. Nesse caso notou-se novamente uma mudança significativa nos perfis de função corrente nos últimos dois casos, ocorrendo uma recirculação nos perfis de função corrente da Figura 5.37d e um alongamento do escoamento na Figura 5.37e, características dos efeitos do empuxo. As isothermas apresentam características de estratificação térmica no instante considerado. Nesse caso, não foi observado efeito significativo do meio poroso na formação da estratificação térmica, pois esta ocorre naturalmente em regime de convecção natural. Nesse caso, entretanto, com o deslocamento do meio poroso verticalmente da metade inferior para a metade superior do tanque ocorreu uma degradação da estratificação térmica, como pode ser visto nas Figuras 5.37d e 5.37e. Além disso, ocorreu uma diminuição da região ocupada pela água com temperaturas mais elevadas, com o meio poroso atuando como uma barreira à propagação de calor.

Na Figura 5.38 estão mostradas as variações da temperatura de mistura no tanque com o tempo e com a posição do meio poroso para $Ri = 1$ e $S = 0,2$. Novamente nota-se que a temperatura de mistura no tanque aumenta conforme se desloca o meio poroso verticalmente para baixo. Assim, o tanque armazenador com um meio poroso localizado na sua metade inferior apresenta maior eficiência que um tanque armazenador com um meio poroso localizado na sua metade superior.

Na Figura 5.39 estão mostrados os percentuais de carregamento do tanque com o tempo e com as posições do meio poroso para $Ri = 1$ e $S = 0,2$. Igualmente aos casos anteriores, nota-se que a capacidade de carregamento útil aumenta conforme se desloca o meio poroso verticalmente para baixo. Assim, o tanque armazenador com um meio poroso localizado na sua metade inferior apresenta maior porcentagem de carregamento útil que um tanque armazenador com um meio poroso localizado na sua metade superior.

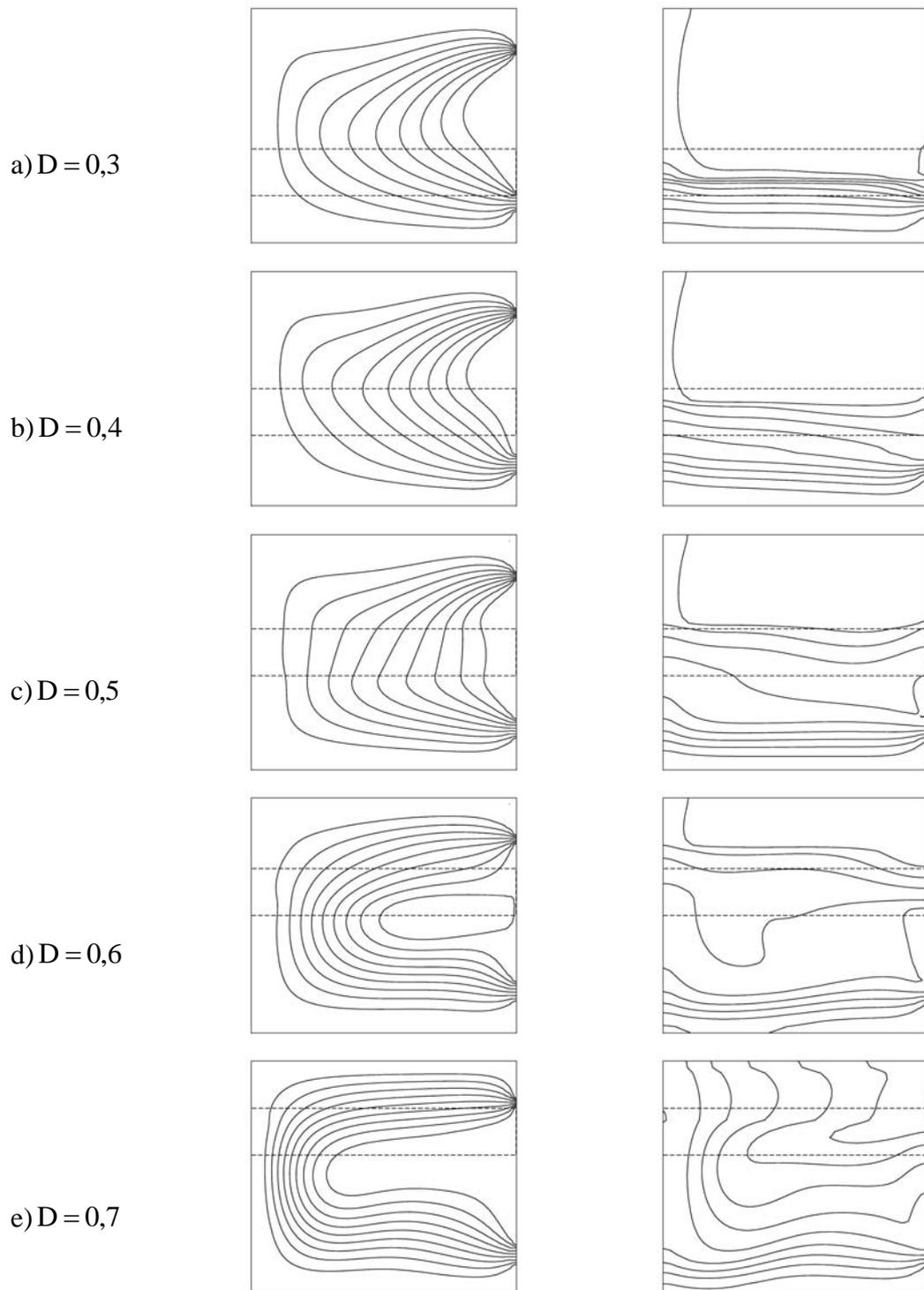


Figura 5.37 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função da posição do meio poroso:

$Ri = 1$ em $\tau = 20$ e $S = 0,2$; $\Delta\Psi = 0,005$ e $\Delta\theta = 0,1$.

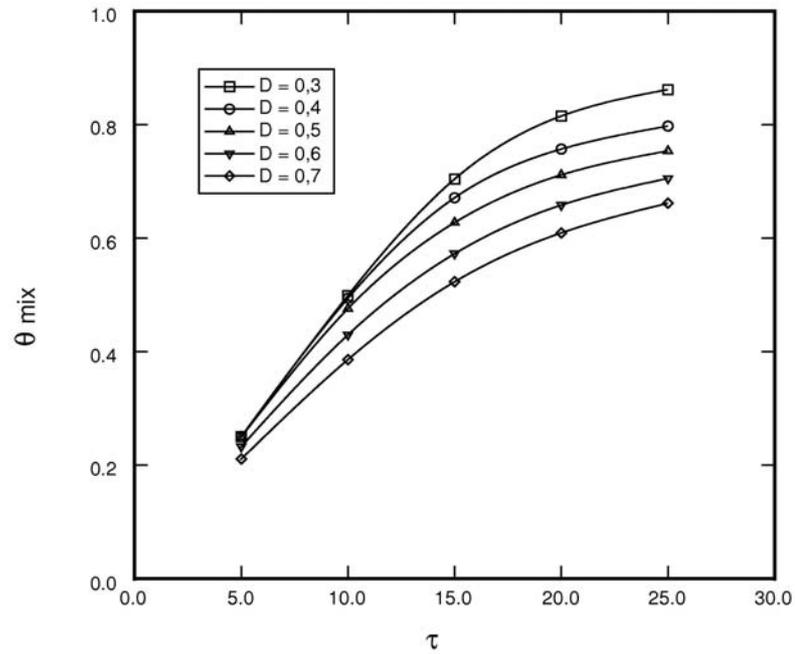


Figura 5.38 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 1$ e $S = 0,2$).

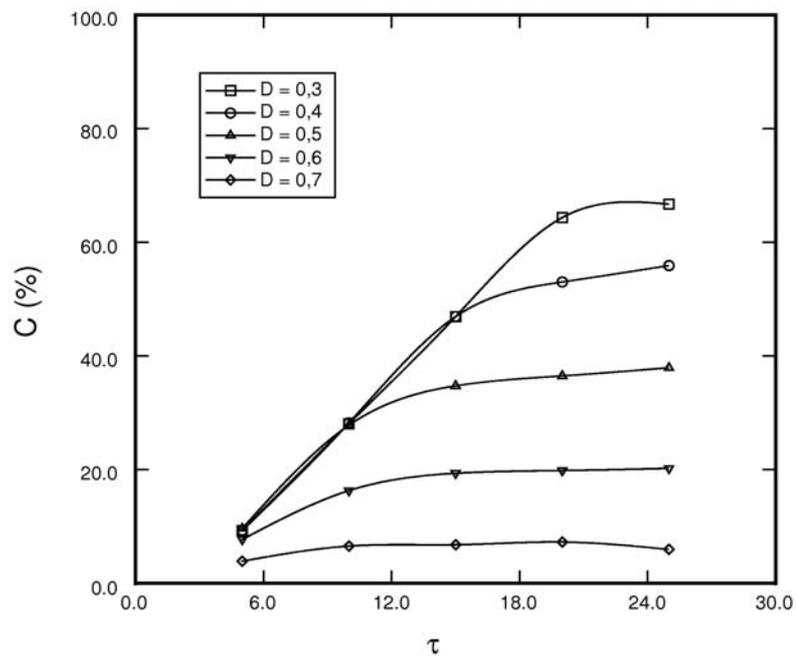


Figura 5.39 – Variação do percentual de carregamento útil do tanque com o tempo em função da posição do meio poroso ($Ri = 1$ e $S = 0,2$).

Logo, para $Ri = 1$ e $S = 0,2$ pode-se dizer que um meio poroso localizado na metade inferior do armazenador térmico auxilia na formação da estratificação térmica, além de melhorar sua eficiência térmica e também propiciar uma maior porcentagem de carregamento útil.

5.5 – Perda de calor

Se perda de calor através das paredes do tanque for considerada, sua magnitude é proporcional ao número de Biot. Um número de Biot maior que zero representa perda de calor convectiva do fluido armazenado no tanque para o meio ambiente, ao passo que um número de Biot nulo representa um tanque perfeitamente isolado do meio ambiente. No presente estudo foram considerados números de Biot iguais a 0; 0,1; 1 e 10 e foi considerado que somente a superfície lateral esquerda do armazenador pode trocar calor com o meio ambiente.

Na Figura 5.40 estão mostrados os campos de função corrente e temperaturas em função da variação do número de Biot na superfície vertical esquerda do armazenador para $Ri = 10$ em $\tau = 15$. Conforme se aumenta o número de Biot, o gradiente de temperaturas nessa superfície torna-se mais acentuado devido a perda de calor convectiva da água para o meio ambiente. Além disso, os gradientes de velocidades nessa fronteira crescem rapidamente. No campo do campo de temperaturas fica evidente que a região ocupada pela água a maiores temperaturas torna-se menor conforme se aumenta o número de Biot. Em outras palavras, a água com maiores temperaturas armazenada na seção superior do tanque perde energia térmica ao ambiente com o aumento do número de Biot. Assim, pode-se concluir que perda de calor pelo tanque armazenador degrada a estratificação térmica.

Na Figura 5.41 estão mostradas as variações da temperatura de mistura da água com tempo para os números de Biot considerados. Pode ser visto que a temperatura de mistura apresenta maiores valores com a diminuição do número de Biot. Pode-se dizer então que um tanque bem isolado termicamente é

mais eficiente do que um tanque mal isolado termicamente, pois aquele oferece energia térmica a maiores temperaturas. Um fluido de trabalho com perda de calor por convecção mais elevada, ou seja, com $Bi \geq 1$, pode levar a uma redução significativa da temperatura de mistura no tanque, reduzindo sua eficiência.

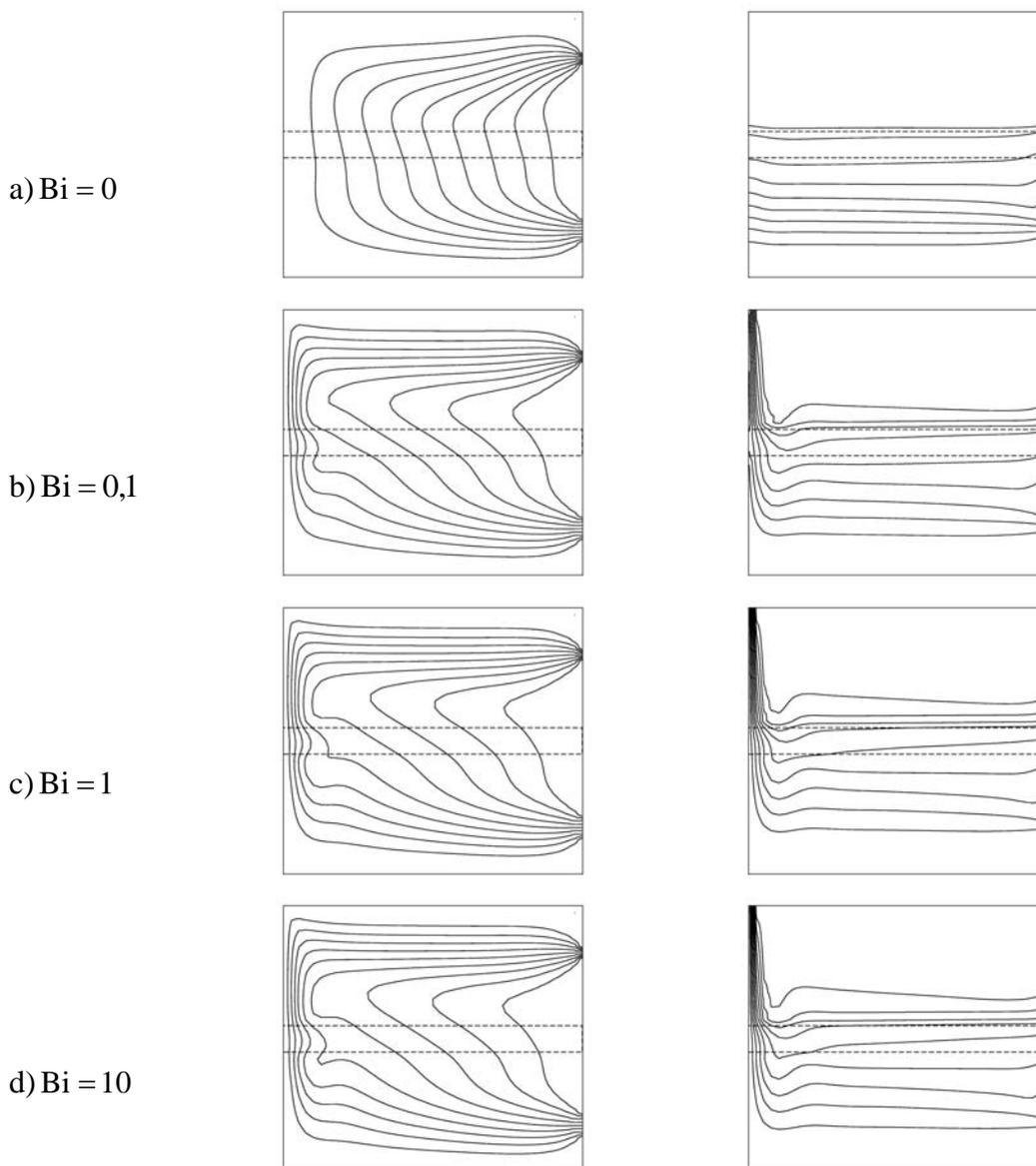


Figura 5.40 – Campos de função corrente e temperaturas respectivamente em função do número de Biot:

$$Ri = 10 \text{ em } \tau = 15 ; \Delta\Psi = 0,005 \text{ e } \Delta\theta = 0,1.$$

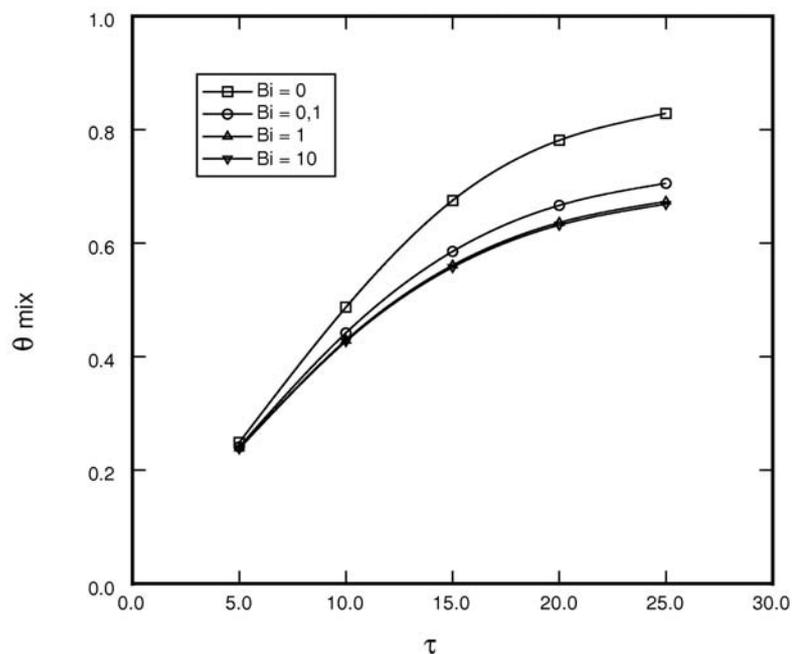


Figura 5.41 – Variação da temperatura de mistura no tanque com o tempo em função do número de Biot ($Ri = 10$).

Na Figura 5.42 estão mostrados os percentuais de carregamento útil no tanque armazenador com o tempo para os números de Biot considerados. Nota-se um aumento do percentual de carregamento útil conforme se diminui o número de Biot. Ou seja, num mesmo instante de tempo, um tanque bem isolado termicamente apresenta maior percentual de carregamento útil que um tanque com perda de calor pelas suas superfícies, pois nesse caso a água cede energia térmica ao meio ambiente.

Assim, pode-se dizer que o aumento do número de Biot causa redução da eficiência térmica do tanque armazenador, além de prejudicar a formação da estratificação térmica e reduzir o percentual de carregamento útil do tanque, o que já havia sido mostrado também por Yee e Lai (2001).

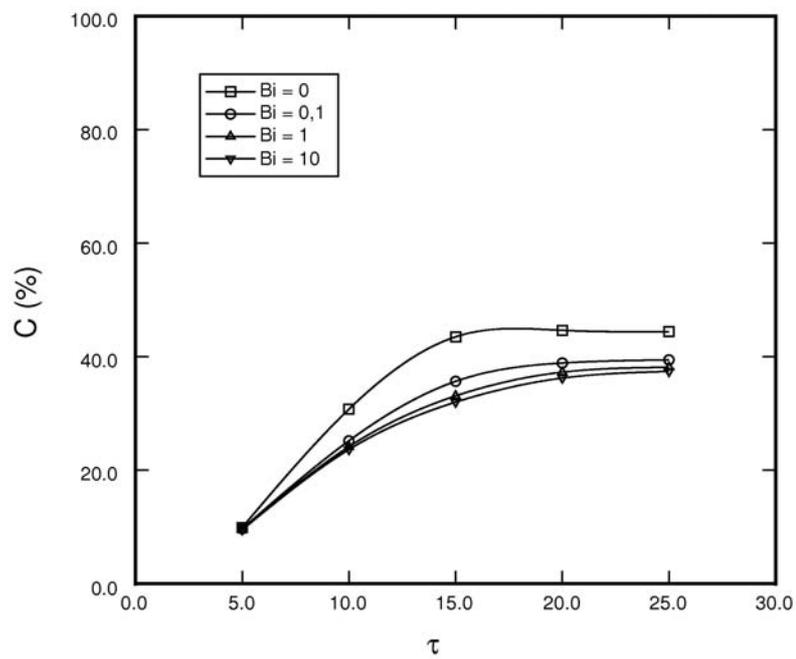


Figura 5.42 – Variação do percentual de carregamento útil do tanque com o tempo em função do número de Biot ($Ri = 10$).

Capítulo 6

Conclusões e extensões futuras

Foi desenvolvido um modelo matemático para estudar os efeitos dos diversos parâmetros de projeto de um meio poroso posicionado no interior de um tanque de armazenamento de líquido com estratificação. O modelo matemático foi desenvolvido através das equações de Navier-Stokes para o escoamento no meio livre e pela formulação original de Darcy para o escoamento no meio poroso. A solução numérica do conjunto de equações diferenciais parciais não lineares foi obtida através do método dos elementos finitos.

Os resultados obtidos confirmaram algumas observações já apresentadas por outros autores, além de fornecer um pacote com parâmetros de projeto para a barreira de níquel poroso quando esta é utilizada com o objetivo de melhorar a estratificação térmica de armazenadores de líquido.

Assim, para o fenômeno em estudo, através dos resultados obtidos, pôde-se concluir que:

1. A presença do meio poroso auxiliou a formação da estratificação térmica. No entanto, ocorreu um retardamento do processo de carregamento do tanque em todos os casos considerados.

2. Foi observado que no tanque com meio poroso o percentual de carregamento útil de água é menor do que o percentual de carregamento de água no tanque sem meio poroso.

3. O número de Richardson mede a influência das forças de inércia e forças de empuxo no escoamento no interior do tanque. Para $Ri > 1$, a estratificação térmica ocorre naturalmente, e a eficiência do tanque armazenador e seu percentual de carregamento útil são favorecidos.

4. A inclusão do material poroso de níquel favoreceu a formação da estratificação térmica em regime de convecção forçada, ou seja, para $Ri < 1$. Para regime de convecção natural, no entanto, não verificou-se influência significativa do meio poroso na formação da estratificação térmica, pois a mesma ocorre naturalmente nesse caso. Além disso, verificou-se uma redução da eficiência térmica do armazenador para $Ri \geq 1$ e também uma redução do percentual de carregamento útil do tanque em todos os casos considerados.

5. Na faixa do número de Darcy considerada, ou seja, de 10^{-5} a 10^{-9} , não verificou-se influência significativa da permeabilidade do meio poroso no desenvolvimento dos campos de função corrente e temperaturas. Logo, pode-se afirmar também não existir diferenças significativas na formação da estratificação térmica do fluido armazenado e no percentual de carregamento útil do tanque.

6. Na faixa do número de Richardson analisada, ou seja, de 0,001 a 10, notou-se que o aumento da espessura do material poroso de níquel reduziu a eficiência térmica do armazenador e também seu percentual de carregamento útil. Entretanto, com o aumento da espessura do meio poroso notou-se uma melhoria na formação da estratificação térmica do fluido de trabalho.

7. O meio poroso localizado na metade inferior do armazenador térmico auxiliou na formação da estratificação térmica, além de melhorar a eficiência térmica do armazenador e também propiciar uma maior porcentagem de carregamento útil.

8. Com o aumento do número de Biot, há uma redução da eficiência térmica do tanque armazenador, além de prejudicar a formação da estratificação térmica e reduzir o percentual de carregamento útil no tanque.

Com relação ao modelo numérico, concluiu-se que:

1. O modelo numérico desenvolvido através do método dos elementos finitos mostrou-se eficiente na solução do problema em análise.

2. O código computacional desenvolvido em ambiente de programação C mostrou-se robusto na obtenção de soluções numéricas, podendo ser utilizado para a caracterização e análise de outros problemas de mesma natureza.

3. O modelo numérico respondeu adequadamente ao problema físico apresentado, visto o comportamento adequado dos parâmetros adimensionais analisados, traduzindo uma boa confiança no código computacional desenvolvido.

Além disso, como extensão do trabalho desenvolvido, os seguintes itens podem ser analisados:

1. A variação da posição e tamanho das tomadas de entrada e saída do fluido de trabalho e sua relação com a posição do meio poroso e com a eficiência térmica do tanque armazenador.

2. A utilização de outros valores do número de Reynolds, verificando sua relação com a formação da estratificação térmica, eficiência térmica do tanque e seu percentual de carregamento útil.

3. A utilização de outras relações de aspecto do armazenador, verificando sua relação com a posição do meio poroso e com a eficiência térmica do armazenador.

4. A utilização de outros materiais como meio poroso, verificando sua influência na formação da estratificação térmica, na eficiência térmica do tanque e no seu percentual de carregamento útil.

5. A utilização de condição de contorno de fluxo de calor na tomada de entrada do fluido de trabalho, levando a uma melhor representação física do fenômeno em estudo.

6. O estudo do descarregamento do armazenador e sua relação com o meio poroso.

7. A montagem de um aparato experimental para validar o código computacional e os resultados numéricos obtidos.

Referências bibliográficas

ADAMS, D. E.; DAVIDSON, J. H. Tank stratification with a flexible manifold. **Proceedings of Solar '93**, Washington DC, 1993.

AL-NAJEM N. M.; EL-REFACE, M. M. A numerical study for the prediction of turbulent mixing factor in thermal storage tanks. **Applied Thermal Engineering**, v. 17, n. 12, p. 1173-1181, 1997.

ALIZADEH, S. An experimental and numerical study of thermal stratification in a horizontal cylindrical solar storage tank. **Solar Energy**, v. 66, n. 6, p. 409-421, 1999.

ANDERSON, D. A.; TANNEHILL, J. C.; PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**. London: Taylor & Francis, 1984.

ANGIRASA, D. Mixed convection in a vented enclosure with an isothermal vertical surface. **Fluid Dynamics Research**, v. 26, p. 219-233, 2000.

BADICHE, X.; FOREST, S.; GUIBERT, T; BIENVENU, Y; BARTOUT, D.; IENNY, P.; CROSET, M.; BERNET, H. Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams: application of the mechanics of cellular solids and of porous material. **Materials Science & Engineering**, v. A289, p. 276-288, 2000.

BANHART, J. Manufacture, characterization and application of cellular metal and metal foams. **Progress in Materials Science**, v. 46, p. 559-632, 2001.

BEAVERS, G. S.; JOSEPH, D. D. Boundary conditions at a naturally permeable wall. **J. Fluid Mech.**, v. 30, p. 197-207, 1967.

BEJAN, A. **Convection Heat Transfer**. New York: Wiley, 1984.

BERKEL, J. V.; RINDT, C. C.; STEENHOVEN, A. A. V. Thermoclyne dynamics in a thermally stratified store. **Int. J. Heat Mass Transfer**, n. 45, p. 343-356, 2002.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Transport Phenomena**. New York: Wiley, 1960.

BOUHDJAR, A.; HARHAD, A. Numerical analysis of transiente mixed convection flow in storage tank: influence of fluid properties and aspect ratios on stratification. **Renewable Energy**, v. 25, p. 555-567, 2002.

CABELLI, A. Storage tanks – A numerical experiment. **Solar Energy**, v. 19, p. 45-54, 1977.

CARROCI, L. R. **Análise teórica e experimental de um armazenador de calor sensível estratificado**. 1987. 123 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1987.

CHAN, A. M. C.; SMEREKA, P. S.; GIUSTI D. A numerical study of transient mixed convection flows in a thermal storake tank. **Journal of Solar Energy Engineering**, v. 105, p. 246-253, 1983.

CRESESB. **Centro de Referência para Energia Solar e Eólica Sérgio de Salvo Brito**. Disponível em <www.cresesb.cepel.br/tutorial/solar/apstenergiasolar.htm> Acesso em: 28 nov. 2003.

DHATT, G.; TOUZOT, G.; **The finite element method displayed**. New York: Wiley, 1984.

EAMES, P. C.; NORTON, B. The effect of tank geometry on thermally stratified sensible heat storage subject to low Reynolds number flows. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 41, n. 14, p. 2131-2142, 1998.

GUO, K. L.; WU, S. T. Numerical study of flow and temperature stratifications in a liquid storage tank. **Journal of Solar Energy Engineering**, v. 107, p. 15-20, 1985.

HAHNE, E.; CHEN, Y. Numerical study of flow and heat transfer characteristics in hot water stores. **Solar Energy**, v. 64, n. 1, p. 9-18, 1998.

HOLLANDS, K. T. G.; LIGHTSTONE, M. F. A review of low-flow, stratified-tank solar water heating systems. **Solar Energy**, v. 43, n. 2, p. 97-105, 1989.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P., **Fundamentos de transferência de calor e massa**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1998.

ISMAIL, K. A. R.; LEAL, J. F. B.; ZANARDI, M. A. A two dimensional model for liquid storage tanks. **Heat Transfer**, v. 96, pp. 473-482, 1996.

LEAL, J. F. B. **Estudo Numérico e Experimental de Fenômeno de Estratificação Térmica em Armazenamento de Calor e Frio**. 1999. 88 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

LEAL, J. F. B.; ISMAIL, K. A. R. A numerical and experimental study on thermally stratified cold and hot water storage tanks. **Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Heat and Mass Transfer**, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

LOEHRKE, R. I.; HOLZER, J. C.; GARI, H. N.; SHARP, M. K. Stratification enhancement in liquid thermal storage tanks. **J. Energy**, v. 3, p. 129-130, 1979.

MEHLING, H.; CABEZA, L. F.; HIPPELI, S.; HIEBLER, S. PCM-module to improve hot water heat stores with stratification. **Renewable Energy**, v. 28, p. 699-711, 2003.

NELSON, J. E. B.; BALAKRISHNAN, A. R.; MURTHY, S. S. Parametric studies on thermally stratified chilled water storage systems. **Applied Thermal Engineering**, v. 19, p. 89-115, 1999.

PADILHA, A. **Estocagem por estratificação térmica de líquido em reservatório**. 1982. 127 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1982.

ROSEN, M. A. The exergy of stratified thermal energy storages. **Solar Energy**, v. 71, n. 3, p. 173-185, 2001.

SCALON, V. L. **Estudo de mudança de fase em geometria plana aletada incluindo os efeitos convectivos**. 1998. 128 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

SHAH, L. J.; FURBO, S. Entrance effects in solar storage tanks. **Solar Energy**, in press, 2003.

SHIN, M. S.; KIM, H. S.; JANG, D. S.; LEE, S. N.; LEE, Y. S.; YOON, H. G. Numerical and experimental study on the design of a stratified thermal storage system. **Applied Thermal Engineering**, v. 24, p. 17-27, 2004.

SPALL, R. E. A numerical study of transient mixed convection in cylindrical thermal storage tanks. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 41, n. 13, p. 2003-2001, 1998.

VAHL DAVIS, G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. **Int. J. Num. Meth. Fluids**, v. 3, p. 249-264, 1983.

YEE, C. K.; LAI, F. C. Effects of a porous manifold on thermal stratification in a liquid storage tank. **Solar Energy**, v. 71, n. 4, p. 241-254, 2001.

ZACHÁR, A.; FARKAS, I.; SZLIVKA, F. Numerical analyses of the impact of plates for thermal stratification inside a storage tank with upper and lower inlet flows. **Solar Energy**, v. 74, p. 287-302, 2003.

ZHANG, Y.; FAGHRI, A. Heat transfer enhancement in latent heat thermal energy storage system by using the internally finned tube. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 39, n. 15, p. 3165-3173, 1996.

Bibliografia complementar

ABADALLA, M.; AL-AMIRI. Analysis of momentum and energy transfer in a lid-driven cavity filled with a porous medium. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 43, p. 3513-3527, 2000.

ALAZMI, B.; VAFAI, K. Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 44, p. 1735-1749, 2001.

ANGIRADA, D.; PETERSON, G. P. Natural convection heat transfer from an isothermal vertical surface to a fluid saturated thermally stratified porous medium. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 40, n. 18, p. 4329-4335, 1997

ASSAN, A. E., **Método dos elementos finitos – Primeiros passos**. Campinas: Editora da Unicamp, 2003.

BECKERMANN, C.; RAMADHYANI, S.; VISKANTA, R. Natural convection flow and heat transfer between a fluid layer and a porous layer inside a rectangular enclosure. **Journal of Heat Transfer**, v. 109, p. 363-370, 1987.

CALDIMI, V. V.; MAHAJAN, R. L. Mixed convection over a heated horizontal surface in a partial enclosure. **Int. J. Heat and Fluid Flow**, v. 19, p. 358-367, 1998.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis**. New York: Wiley, 1989.

FOX, R. W.; MCDONALD A. T.; **Introdução à mecânica dos fluidos**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S.A., 1981.

FUKAI, J.; KANOU, M.; KODAMA, Y.; MIYATAKE, O. Thermal conductivity enhancement of energy storage media using carbon fibers. **Energy Conversion & Management**, v. 41, p. 1543-1556, 2000.

HOMAN, K. O.; SOO, S. L. Model of the transient stratified flow into a chilled-water storage tank. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 40, n. 18, p. 4367-4377, 1997.

HOW, S. P.; HSU, T. H. Transient mixed convection in a partially divided enclosure. **Computers Math. Applic**, v. 36, n. 8, p. 95-115, 1998.

ISMAIL, K. A. R.; LEAL, J. F. B. Models of liquid storage tanks. **Energy**, v. 22, n. 8, p. 805-815, 1997.

KHANAFER, K.; VAFAI, K.; LIGHTSTONE, M. Mixed convection heat transfer in two-dimensional open-ended enclosures. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 45, p. 5171-5190, 2002.

LIN, W.; ARMFIELD, S. W. Natural convection cooling of rectangular and cylindrical containers. **Int. J. Heat and Fluid Flow**, v. 22, p. 72-81, 2001.

MOHAMAD, A. A.; VISKANTA, R.; Flow and heat transfer in a lid-driven cavity filled with a stably stratified fluid. **Appl. Math. Modelling**, v. 19, p. 465-472, 1995.

NAJAM, M. EL ALAMI, M.; HASNAOUI, M.; AMAHMID, A. Numerical study of mixed convection in a “T” form cavity submitted to constant heat flux and ventilated from below with a vertical jet. **C. R. Mecanique**, v. 330, p. 461-467, 2002.

PATANKAR, S. V., **Numerical heat transfer and fluid flow**. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

PHANIKUMAR, M. S.; MAHAJAN, R. L. Non-Darcy natural convection in high porosity metal foams. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 45, p. 3781-3793, 2002.

PRASAD, A. K.; KOSEFF, J. R. Combined forced and natural convection heat transfer in a deep lid-driven cavity flow. **Int. J. Heat and Fluid Flow**, v. 17, p. 460-467, 1996.

REES, D. A. S.; LAGE, J. L. The effect of thermal stratification on natural convection in a vertical porous insulation layer. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 40, n. 1, p. 111-121, 1997.

SCHLICHTING, H., **Boundary-Layer Theory**. New York: McGraw-Hill, 1954.

SPOTZ, W. F. Accuracy and performance of numerical wall boundary conditions for steady, 2D, incompressible streamfunction vorticity. **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, v. 28, p. 737-757, 1998.

VAFAI, K.; THIYAGARAJA, R. Analysis of flow and heat transfer at the interface region of a porous medium. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 30, n. 7, p. 1391-1405, 1987.

VAHL DAVIS, G.; JONES, I. P. Natural convection in a square cavity: a comparison exercise. **Int. J. Num. Meth. Fluids**, v. 3, p. 227-248, 1983.

YOO, H.; KIM, C. J.; KIM, C. W. Approximate analytical solutions for stratified thermal storage under variable inlet temperature. **Solar Energy**, v. 66, n. 1, p. 47-56, 1999.

Apêndice A

Equações do problema

A.1 – Equações para o meio livre

A modelagem matemática do escoamento e transferência de calor no meio livre foi realizada através das equações da conservação da massa, quantidade de movimento e conservação da energia em um sistema cartesiano bidimensional para um fluido incompressível e newtoniano.

1. Equação da conservação da massa

Conforme Bird, Stewart e Lightfoot (1960), a equação da conservação da massa em um sistema cartesiano retangular e bidimensional pode ser representada pela equação A.1, dada por:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)}_2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde os números subscritos representam:

1 – taxa de aumento da massa por unidade de volume.

2 – taxa líquida de adição de massa por unidade de volume por convecção.

Por estar se trabalhando com um fluido incompressível, sua densidade ρ não varia com o tempo nem com as coordenadas espaciais. Com isso, o primeiro termo do lado esquerdo da equação A.1 se anula e a densidade pode ser retirada das derivadas parciais do segundo termo. Após simplificação, a equação da conservação da massa pode ser reescrita, equação A.2, dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Define-se convenientemente a função corrente ψ , equação A.3, dada por:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{A.3})$$

e a vorticidade, equação A.4, dada por:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A.4})$$

Substituindo as definições das componentes de velocidade u e v , equação A.3, na equação A.4 e rearranjando, obtém-se a equação da função corrente, equação A.5, dada por:

$$\omega = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.5})$$

Nota-se que a equação da conservação da massa é satisfeita matematicamente com a utilização da formulação de vorticidade e função corrente.

2. Equações da quantidade de movimento

Conforme Bird, Stewart e Lightfoot (1960), as equações da quantidade de movimento para um fluido incompressível e newtoniano em um sistema cartesiano retangular e bidimensional com ρ e μ constantes podem ser representadas pelas equações A.6 e A.7, dadas por:

- Coordenada x :

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_1 = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_2 + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}_3 + \underbrace{\rho g_x}_4 \quad (\text{A.6})$$

- Coordenada y :

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_5 = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_6 + \underbrace{\rho g_y \beta (T - T_0)}_7 + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)}_8 \quad (\text{A.7})$$

onde os números subscritos representam:

1, 5 – taxa de aumento do momento por unidade de volume.

4 – força externa sobre o fluido por unidade de volume (tipicamente a força gravitacional).

2, 3, 6, 8 – taxa de adição de momento via transporte molecular por unidade de volume.

7 – força externa sobre o fluido por unidade de volume (aproximação de Boussinesq)

Como na situação física em análise a força gravitacional age somente na direção y , o termo representado em 4 pode ser desprezado e g_y pode ser escrito somente como g . Após simplificação, as equações da quantidade de movimento podem ser reescritas, equações A.8 e A.9, dadas por:

- componente x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.8})$$

- componente y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g\beta(T - T_0) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.9})$$

A equação da vorticidade é obtida através da diferenciação da equação A.8 com relação à y e diferenciação da equação A.9 com relação à x , com posterior subtração das mesmas. Diferenciando a equação A.8 com relação à y obtém-se a equação A.10, dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + \nu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \quad (\text{A.10})$$

Diferenciando a equação A.9 com relação à x obtém-se a equação A.11, dada por:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (\text{A.11})$$

Subtraindo a equação A.11 da equação A.10 e rearranjando, obtêm-se a equação A.12, dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ = v \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Substituindo na equação A.12 a definição matemática de vorticidade, equação A.4, a equação da continuidade, equação A.2, e as definições matemáticas das componentes de velocidade u e v , equação A.3, obtêm-se a equação da vorticidade, equação A.13, dada por:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = g\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.13})$$

3. Equação da conservação da energia

Conforme Bird, Stewart e Lightfoot (1960), a equação da conservação da energia para um fluido incompressível e Newtoniano em um sistema cartesiano retangular e bidimensional com μ , ρ e k constantes pode ser representada pela equação A.14, dada por:

$$\underbrace{\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_1 = k \underbrace{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)}_2 + 2\mu \underbrace{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]}_3 + \mu \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}_4 \quad (\text{A.14})$$

onde os números subscritos representam:

- 1 – taxa de aumento da energia térmica por unidade de volume.
- 2 – fluxo térmico por unidade de volume

3 – fluxo de momento viscoso por unidade de volume.

Desprezando a dissipação viscosa do fluido representada em 3, e substituindo as definições das componentes de velocidade u e v , equação A.3, na equação A.14 e rearranjando, obtém-se a equação da conservação da energia, equação A.15, dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.15})$$

4. Equações finais dimensionais para o meio livre

As equações dimensionais para o meio livre, conforme modelagem matemática mostrada acima, são dadas por:

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = g\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

que são as equações 3.1, 3.2 e 3.3 mostradas no Capítulo 3.

A.2 – Equações para o meio poroso

A modelagem matemática do escoamento e transferência de calor no meio poroso foi realizada através das equações de escoamento de Darcy e equação da conservação da energia em um sistema cartesiano e bidimensional

para um fluido incompressível e newtoniano em equilíbrio térmico com a matriz porosa.

1. Equações de escoamento de Darcy

Conforme Bejan (1984), as equações de escoamento de Darcy para um fluido incompressível e Newtoniano em equilíbrio térmico com a matriz porosa, num sistema cartesiano retangular bidimensional, admitindo K , μ e ρ constantes podem ser representadas pelas equações A.16 e A.17, dadas por:

$$u = -\frac{K}{\mu} \left(\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_1 + \underbrace{\rho g_x}_2 \right) \quad (\text{A.16})$$

$$v = -\frac{K}{\mu} \left(\underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_3 + \underbrace{\rho g_y}_4 \right) \quad (\text{A.17})$$

onde os números subscritos representam:

1, 3 – taxa de adição de momento via transporte molecular por unidade de volume.

2, 4 – força externa sobre o fluido por unidade de volume (tipicamente a força gravitacional).

Como na situação física em análise a força gravitacional age somente na direção y , o termo representado por 2 pode ser desprezado e g_y pode ser escrito somente como g . Após simplificação, as equações de Darcy podem ser reescritas, equações A.18 e A.19, dadas por:

$$u = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{A.18})$$

$$v = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \right) \quad (\text{A.19})$$

A equação da função corrente é obtida através da diferenciação da equação A.18 com relação à y e diferenciação da equação A.19 com relação à x , com posterior subtração das mesmas. Diferenciando a equação A.18 com relação à y , obtém-se a equação A.20, dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \quad (\text{A.20})$$

Diferenciando a equação A.19 com relação à x , obtém-se a equação A.21, dada por:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + g \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (\text{A.21})$$

Subtraindo as equações A.20 e A.21 e rearranjando, obtém-se a equação A.22, dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Kg}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (\text{A.22})$$

Substituindo a definição de função corrente, equação A.3, na equação A.22 e rearranjando, obtém-se a equação A.23, dada por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{Kg}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (\text{A.23})$$

Inserindo a aproximação de Boussinesq na equação A.23 e rearranjando, obtém-se a equação da função corrente em um meio poroso, equação A.24, dada por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{Kg\beta\rho}{\mu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{A.24})$$

2. Equação da conservação da energia

Conforme Bejan (1984), a equação da conservação da energia para um fluido incompressível e Newtoniano em equilíbrio térmico com a matriz porosa, num sistema cartesiano retangular bidimensional, com μ , ρ e k_{mp} constantes pode ser representada pela equação A.25, dada por:

$$\underbrace{\rho C_p \left(\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_1 = \underbrace{k_{mp} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)}_2 + \underbrace{2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]}_3 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{A.25})$$

onde os números subscritos representam:

- 1 – taxa de aumento da energia térmica por unidade de volume.
- 2 – fluxo térmico por unidade de volume
- 3 – fluxo de momento viscoso por unidade de volume.

Na equação acima σ é a relação entre as capacidades térmicas da matriz porosa e do fluido e k_{mp} é a condutividade térmica do meio poroso, equações A.26 e A.27, definidas respectivamente como:

$$\sigma = \frac{\phi(\rho C_p)_f + (1-\phi)(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \quad (\text{A.26})$$

e

$$k_{mp} = \phi k_f + (1-\phi)k_s \quad (\text{A.27})$$

onde ϕ é a porosidade do meio poroso e os subscritos f e s denotam fluido e sólido respectivamente.

Desprezando a dissipação viscosa do fluido e substituindo as definições das componentes de velocidade u e v , equação A.3, na equação A.25 e rearranjando, obtém-se a equação da conservação da energia no meio poroso, equação A.28, dada por:

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_{mp}}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.28})$$

3. Equações finais dimensionais para o meio poroso

As equações dimensionais para o meio poroso, conforme modelagem matemática mostrada acima são dadas por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{Kg\beta\rho}{\mu} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_{mp}}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

que são as equações 3.7 e 3.8 mostradas no Capítulo 3.

A.3 – Equação para a temperatura de mistura

A equação para a temperatura de mistura é representada pela equação A.29, dada por:

$$T_{mix} = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} T dV_e \quad (\text{A.29})$$

Admitindo que o armazenador térmico possui largura L , altura H e profundidade P , a equação A.29 pode ser reescrita, equação A.30, dada por:

$$T_{mix} = \frac{1}{LHP} \int_0^L \int_0^H TP dy dx \quad (\text{A.30})$$

Simplificando a equação A.30 obtém-se a equação A.31, dada por:

$$T_{mix} = \frac{1}{LH} \int_0^L \int_0^H T dy dx \quad (\text{A.31})$$

que é a equação para a temperatura de mistura dimensional.

Apêndice B

Adimensionalização das equações

B.1 – Adimensionalização das equações para o meio livre

As equações na forma dimensional para o escoamento no meio livre foram apresentadas no Capítulo 3, dadas por:

$$\omega = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = g\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Para a adimensionalização das equações acima se utilizam as seguintes variáveis adimensionais:

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \tau = \frac{tu_0}{H}, \quad \Psi = \frac{\psi}{u_0 H}, \quad \Omega = \frac{\omega H}{u_0}$$

1. Equação da função corrente

A equação da função corrente na forma dimensional, equação B.1, é dada por:

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.1})$$

Substituindo os adimensionais indicados anteriormente na equação B.1, obtém-se a equação B.2, dada por:

$$\frac{\Omega u_0}{H} = - \left[\frac{\partial^2 (\Psi u_0 H)}{\partial (XH)^2} + \frac{\partial^2 (\Psi u_0 H)}{\partial (YH)^2} \right] \quad (\text{B.2})$$

Após rearranjo, a equação B.2 torna-se a equação B.3, dada por:

$$\frac{u_0}{H} \Omega = - \frac{u_0 H}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.3})$$

Após simplificação da equação B.3, obtém-se a equação da função corrente na forma adimensional, equação B.4, dada por:

$$\Omega = - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.4})$$

2. Equação da vorticidade

A equação da vorticidade na forma dimensional, equação B.5, é dada por:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = g\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.5})$$

Substituindo os adimensionais indicados anteriormente na equação B.5, obtém-se a equação B.6, dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{u_0 \Omega}{H} \right)}{\partial \left(\frac{H\tau}{u_0} \right)} + \frac{\partial(\Psi u_0 H)}{\partial(YH)} \frac{\partial \left(\frac{u_0 \Omega}{H} \right)}{\partial(XH)} - \frac{\partial(\Psi u_0 H)}{\partial(XH)} \frac{\partial \left(\frac{u_0 \Omega}{H} \right)}{\partial(YH)} \\ = g\beta \frac{\partial(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial(XH)} + \nu \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{u_0 \Omega}{H} \right)}{\partial(XH)^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{u_0 \Omega}{H} \right)}{\partial(YH)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Após rearranjo, a equação B.6 torna-se a equação B.7, dada por:

$$\frac{u_0^2}{H^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{u_0^2}{H^2} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{u_0^2}{H^2} \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{g\beta}{H} (T_1 - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\nu u_0}{H^3} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.7})$$

Multiplicando ambos os lados da equação B.7 por H^2/u_0^2 e simplificando, obtém-se a equação B.8, dada por:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{g\beta H^2}{Hu_0^2} (T_1 - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\nu}{Hu_0} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.8})$$

Multiplicando e dividindo o primeiro termo do lado direito da equação B.8 por $\nu^2 H$ e rearranjando, obtém-se a equação B.9, dada por:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{g\beta H^3 (T_1 - T_0)}{\nu^2} \frac{\nu^2}{H^2 u_0^2} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\nu}{Hu_0} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.9})$$

Substituindo os números de Reynolds e Grashof na equação B.9, obtém-se a equação da quantidade de movimento na forma adimensional, equação B.10, dada por:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.10})$$

A relação Gr/Re^2 é usualmente conhecida como número de Richardson, representado por Ri, que é um adimensional que mede a importância relativa entre convecção natural e convecção forçada. No desenvolvimento do trabalho, as duas representações são utilizadas.

3. Equação da energia

A equação da energia na forma dimensional, equação B.11, é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.11})$$

Substituindo os adimensionais indicados anteriormente na equação B.11, obtém-se a equação B.12, dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial\left(\frac{H\tau}{u_0}\right)} + \frac{\partial(\Psi u_0 H)}{\partial(YH)} \frac{\partial(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial(XH)} - \frac{\partial(\Psi u_0 H)}{\partial(XH)} \frac{\partial(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial(YH)} \\ = \frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{\partial^2(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial(XH)^2} + \frac{\partial^2(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial(YH)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Após rearranjo, a equação B.12 torna-se a equação B.13, dada por:

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{H}(T_1 - T_0) \frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{\partial\Psi}{\partial Y} \frac{u_0}{H}(T_1 - T_0) \frac{\partial\theta}{\partial X} - \frac{\partial\Psi}{\partial X} \frac{u_0}{H}(T_1 - T_0) \frac{\partial\theta}{\partial Y} \\ = \frac{k(T_1 - T_0)}{\rho C_p H^2} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Multiplicando ambos os lados da equação B.13 por $H/u_0(T_1 - T_0)$ e simplificando, obtém-se a equação B.14, dada por:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{\partial\Psi}{\partial Y} \frac{\partial\theta}{\partial X} - \frac{\partial\Psi}{\partial X} \frac{\partial\theta}{\partial Y} = \frac{k}{u_0 \rho C_p H} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.14})$$

Multiplicando e dividindo o lado direito da equação B.14 por ν obtém-se a equação B.15, dada por:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{\partial\Psi}{\partial Y} \frac{\partial\theta}{\partial X} - \frac{\partial\Psi}{\partial X} \frac{\partial\theta}{\partial Y} = \frac{k\nu}{u_0 \rho C_p H \nu} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.15})$$

Substituindo os números de Reynolds e Prandtl na equação B.15, obtém-se a equação da energia na forma adimensional, equação B.16, dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.16})$$

4. Equações adimensionais para o meio livre

As equações na forma adimensional para o escoamento no meio livre, conforme adimensionalização mostrada anteriormente, são dadas por:

$$\Omega = - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right)$$

que são as equações 3.4, 3.5 e 3.6 mostradas no Capítulo 3.

B.2 – Adimensionalização das equações para o meio poroso

As equações na forma dimensional para o escoamento no meio poroso foram apresentadas no Capítulo 3, dadas por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \frac{K g \beta \rho}{\mu} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_{mp}}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Para a adimensionalização das equações acima se utilizam as seguintes variáveis adimensionais:

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \tau = \frac{tu_0}{H}, \quad \Psi = \frac{\psi}{u_0 H}$$

1. Equação de escoamento de Darcy

A equação de escoamento de Darcy na forma dimensional, equação B.17, é dada por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \frac{Kg\beta\rho}{\mu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{B.17})$$

Substituindo os adimensionais mostrados anteriormente na equação B.17, obtém-se a equação B.18, dada por:

$$\frac{\partial^2 (\Psi u_0 H)}{\partial (XH)^2} + \frac{\partial^2 (\Psi u_0 H)}{\partial (YH)^2} = - \frac{Kg\beta\rho}{\mu} \frac{\partial (\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial (XH)} \quad (\text{B.18})$$

Substituindo a viscosidade dinâmica $\mu = \rho\nu$ e rearranjando, a equação B.18 torna-se a equação B.19, dada por:

$$\frac{u_0}{H} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{u_0}{H} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = - \frac{Kg\beta(T_1 - T_0)}{\nu H} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (\text{B.19})$$

Multiplicando ambos os lados da equação B.19 por H/u_0 ,

multiplicando o lado direito por $H^2\nu\alpha_{mp}/H^2\nu\alpha$, onde $\alpha_{mp} = k_{mp}/\rho C_p$ e simplificando, obtém-se a equação B.20, dada por:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2} = -\frac{g\beta(T_1-T_0)H^3}{\nu\alpha} \frac{K}{H^2} \frac{\nu}{u_0H} \frac{k_{mp}}{\rho\nu C_p} \frac{\partial\theta}{\partial X} \quad (\text{B.20})$$

Substituindo os adimensionais de Darcy, Rayleigh, Reynolds e Prandtl do meio poroso na equação B.20, obtém-se a equação da função corrente na forma adimensional, equação B.21, dada por:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2} = -\frac{\text{RaDa}}{\text{RePr}'} \frac{\partial\theta}{\partial X} \quad (\text{B.21})$$

2. Equação da energia

A equação da energia na forma dimensional é dada por:

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_{mp}}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.22})$$

Substituindo os adimensionais mostrados anteriormente na equação B.22 obtém-se a equação B.23, dada por:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial\left(\frac{H\tau}{u_0}\right)} + \frac{\partial(\Psi u_0 H)}{\partial(YH)} \frac{\partial(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial(XH)} - \frac{\partial(\Psi u_0 H)}{\partial(XH)} \frac{\partial(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial(YH)} \\ = \frac{k_{mp}}{\rho C_p} \left[\frac{\partial^2(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial(XH)^2} + \frac{\partial^2(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial(YH)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Rearranjando a equação B.23 obtém-se a equação B.24, dada por:

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{H} (T_1 - T_0) \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{u_0}{H} (T_1 - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{u_0}{H} (T_1 - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\ = \frac{k_{mp} (T_1 - T_0)}{\rho C_p H^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Multiplicando ambos os membros da equação B.24 por $H/u_0(T_1 - T_0)$ e simplificando obtém-se a equação B.25, dada por:

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{k_{mp}}{u_0 \rho C_p H} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.25})$$

Multiplicando e dividindo o lado direito da equação B.25 por ν obtém-se a equação B.26, dada por:

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{k_{mp} \nu}{u_0 \rho C_p H \nu} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.26})$$

Substituindo os números de Reynolds e Prandtl do meio poroso na equação B.26 obtém-se a equação da energia adimensional, equação B.27, dada por:

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}'} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.27})$$

3. Equações dimensionais para o meio poroso

As equações na forma adimensional para o meio poroso, conforme adimensionalização mostrada anteriormente, são dadas por:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\frac{\text{RaDa}}{\text{RePr}'} \frac{\partial \theta}{\partial X}$$

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{RePr}'} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right)$$

que são as equações 3.11 e 3.12 mostradas no Capítulo 4.

B.3 – Adimensionalização das condições de contorno

A condição inicial é representada na forma dimensional pela equação B.28, dada por:

$$0 < x < L, \quad 0 < y < H, \quad \psi = \omega = T - T_0 = 0 \quad (\text{B.28})$$

Substituindo os adimensionais mostrados anteriormente na equação B.28, obtém-se a equação B.29, dada por:

$$\frac{0}{H} < \frac{x}{H} < \frac{L}{H}, \quad \frac{0}{H} < \frac{y}{H} < \frac{H}{H}, \quad \Psi u_0 H = \frac{\Omega u_0}{H} = \theta(T_1 - T_0) = 0 \quad (\text{B.29})$$

Rearranjando a equação B.29, obtém-se a expressão para as condições iniciais na forma adimensional, equação B.30, dada por:

$$0 < X < a_r, \quad 0 < Y < 1, \quad \Psi = \Omega = \theta = 0 \quad (\text{B.30})$$

As condições de contorno na tomada de entrada podem ser escritas na forma dimensional pela equação B.31, dada por:

$$\psi_t = u y_t, \quad T_t = T_1, \quad \omega_t = 0 \quad (\text{B.31})$$

Substituindo na equação B.31 os adimensionais mostrados anteriormente, obtêm-se a equação B.32, dada por:

$$\Psi_t u_0 H = U u_0 Y_t H, \quad \theta_t = \frac{T_1 - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \frac{\Omega_t u_0}{H} = 0 \quad (\text{B.32})$$

Rearranjando a equação B.32, obtêm-se a expressão para as condições de contorno na entrada na forma adimensional, equação B.33, dada por:

$$\Psi_t = Y_t, \quad \theta_t = 1, \quad \Omega_t = 0 \quad (\text{B.33})$$

As condições de contorno na tomada de saída do fluido são representadas na forma dimensional pela equação B.34, dada por:

$$\frac{\partial \psi_o}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_o}{\partial x} = 0, \quad \omega_o = 0 \quad (\text{B.34})$$

Substituindo na equação B.34 os adimensionais mostrados anteriormente, obtêm-se a equação B.35, dada por:

$$\frac{\partial(\Psi_o u_0 H)}{\partial(XH)} = 0, \quad \frac{\partial(\theta_o T_1 - \theta_o T_0 + T_0)}{\partial(XH)} = 0, \quad \frac{\Omega_o u_0}{H} = 0 \quad (\text{B.35})$$

Rearranjando a equação B.35, obtêm-se a equação para as condições de contorno na saída na forma adimensional, equação B.36, dada por:

$$\frac{\partial \Psi_o}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \theta_o}{\partial X} = 0, \quad \Omega_o = 0 \quad (\text{B.36})$$

A condição de fronteira adiabática é representada na forma dimensional pela equação B.37, dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.37})$$

Substituindo os adimensionais mostrados anteriormente na equação B.37, obtém-se a equação B.38, dada por:

$$\frac{\partial(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial(xH)} = 0, \quad \frac{\partial(\theta T_1 - \theta T_0 + T_0)}{\partial(yH)} = 0 \quad (\text{B.38})$$

Rearranjando a equação B.38, obtém-se a expressão para a condição de fronteira adiabática na forma adimensional, representada pela equação B.39, dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (\text{B.39})$$

A condição de perda de calor por convecção é representada matematicamente na sua forma dimensional através da equação B.40, dada por:

$$-k_w \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_0) \quad (\text{B.40})$$

Substituindo os adimensionais mostrados anteriormente na equação B.40, obtém-se a equação B.41, dada por:

$$-k_w \frac{\partial(\theta T_1 - \theta T_0)}{\partial(XH)} = h(T_1 - T_0) \quad (\text{B.41})$$

Rearranjando a equação B.41 obtém-se a equação B.42, dada por:

$$-\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{hH}{k_w} \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad (\text{B.42})$$

Substituindo as definições matemáticas de Bi e θ na equação B.42, obtém-se a expressão para a condição de perda de calor por convecção na forma adimensional, equação B.43, dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = -\text{Bi} \theta \quad (\text{B.43})$$

A condição de contorno para o cálculo da vorticidade nas fronteiras sólidas é representada na sua forma dimensional pela equação B.44, dada por:

$$\omega_w = 2 \frac{\Psi_{w+1} - \Psi_w}{\Delta n^2} \quad (\text{B.44})$$

Substituindo os dimensionais mostrados anteriormente na equação B.44 obtém-se a equação B.45, dada por:

$$\frac{\Omega_w u_0}{H} = 2 \frac{\Psi_{w+1} u_0 H - \Psi_w u_0 H}{\Delta (NH)^2} \quad (\text{B.45})$$

Rearranjando a equação B.45, obtém-se a equação B.46, dada por:

$$\Omega_w \frac{u_0}{H} = 2 \frac{u_0 H}{H^2} \left(\frac{\Psi_{w+1} - \Psi_w}{\Delta N^2} \right) \quad (\text{B.46})$$

Após simplificação da equação B.46, obtém-se a expressão na forma adimensional para o cálculo da vorticidade nas fronteiras sólidas, equação B.47, dada por:

$$\Omega_w = 2 \frac{\Psi_{w+1} - \Psi_w}{\Delta N^2} \quad (\text{B.47})$$

B.4 – Adimensionalização da temperatura de mistura

A equação para a temperatura na forma dimensional, equação B.48, é dada por:

$$T_{mix} = \frac{1}{LH} \int_0^L \int_0^H T dx dy \quad (\text{B.48})$$

Substituindo os adimensionais mostrados anteriormente na equação B.48, obtém-se a equação B.49, dada por:

$$\theta_{mix}(T_1 - T_0) + T_0 = \frac{1}{LH} \int_0^L \int_0^H [\theta(T_1 - T_0) + T_0] dY dX H \quad (\text{B.49})$$

Separando as integrais da equação B.49 obtém-se a equação B.50, dada por:

$$\theta_{mix}(T_1 - T_0) + T_0 = \frac{H}{L} \left[\int_0^1 \int_0^1 \theta(T_1 - T_0) dY dX + \int_0^1 \int_0^1 T_0 dY dX \right] \quad (\text{B.50})$$

Simplificando a equação B.50 obtém-se a equação B.51, dada por:

$$\theta_{mix}(T_1 - T_0) + T_0 = \frac{H}{L}(T_1 - T_0) \int_0^1 \int_0^1 \theta dY dX + \frac{H}{L} T_0 a_r \quad (\text{B.51})$$

Substituindo a definição matemática de a_r e simplificando novamente a equação B.51, obtém-se a expressão para a temperatura de mistura na forma adimensional, equação B.52, dada por:

$$\theta_{mix} = \frac{1}{a_r} \int_0^1 \int_0^1 \theta dY dX \quad (\text{B.52})$$