



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Análise de Estabilidade de Escoamento em Tubo do Fluido Oldroyd-B

Renan Manuel Pighini da Silva

Orientador: Prof^a. Dr^a. Analice Costacurta Brandi

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, setembro de 2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Análise de Estabilidade de Escoamento em Tubo do Fluido Oldroyd-B

Renan Manuel Pighini da Silva

Orientador: Prof^a. Dr^a. Analice Costacurta Brandi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, setembro de 2024

S586a	<p>Silva, Renan Manuel Pighini da</p> <p>Análise de Estabilidade de Escoamento em Tubo do Fluido Oldroyd-B / Renan Manuel Pighini da Silva. -- Presidente Prudente, 2024</p> <p>80 p.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente</p> <p>Orientador: Analice Costacurta Brandi</p> <p>1. Escoamento em Tubo. 2. Fluido Oldroyd-B. 3. Ondas de Tollmien-Schlichting. 4. Teoria de Estabilidade Linear. I. Título.</p>
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.


CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: **Análise de Estabilidade de Escoamento em Tubo do Fluido Oldroyd-B**

AUTOR: RENAN MANUEL PIGHINI DA SILVA

ORIENTADORA: ANALICE COSTACURTA BRANDI

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **ANALICE COSTACURTA BRANDI**
Data: 30/08/2024 17:24:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. ANALICE COSTACURTA BRANDI (Participação Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente - FCT/Unesp

Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR (Participação Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente - FCT/Unesp

Prof. Dr. MÁRCIO TEIXEIRA DE MENDONÇA (Participação Virtual)
Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial / Instituto de Aeronáutica e Espaço - Divisão de Propulsão Aeronáutica

Presidente Prudente, 30 de agosto de 2024

“Dedico esta obra aos meus amados irmãos Demetrius Pighini da Silva (in memoriam), Marcus Vinicius Gomes da Silva (in memoriam) e Valdeci Manoel da Silva Junior (in memoriam).”

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me ter dado forças para realizar este sonho. À minha mãe, Márcia de Fátima Pighini, e à minha avó, Carmita Pighini, meu reconhecimento pelo apoio irrestrito aos meus sonhos e por toda a ajuda ao longo do mestrado. A elas, meu eterno agradecimento.

À minha orientadora, Prof.^a Dr.^a Analice Costacurta Brandi, expresse minha sincera gratidão pela paciência e atenção que me foram dedicadas durante este período, esforçando-se para que eu me tornasse um excelente aluno e professor.

Ao Professor Dr. Leandro Franco de Souza, do ICMC-USP, pela colaboração no desenvolvimento do código desta dissertação e suas sugestões valiosas. Em especial, aos seus alunos Laison Furlan e Rafael Sterza, que foram sempre muito solícitos.

Aos professores doutores Márcio Teixeira de Mendonça, do Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) do Ministério da Defesa, e Irineu Palhares, do Departamento de Matemática e Computação da FCT-Presidente Prudente, por terem aceitado o convite para participar da banca de qualificação, e principalmente, por todas as contribuições que foram dadas.

Aos professores Vanessa Botta (Álgebra Linear Aplicada), Gilcilene Sanches (Análise Numérica), Wallace Casaca (Álgebra Linear Numérica), Marcos Pimenta (Análise Real) e Pedro Toniol (Equações Diferenciais Ordinárias), por todos os ensinamentos durante as disciplinas no decorrer do mestrado. Não obstante, não poderia deixar de mencionar aqui a disciplina "Métodos Computacionais para Equações Diferenciais", ministrada pela minha orientadora. Foi nessa disciplina que me interessei pela área de fluidos e, mais ainda, pelas Equações Diferenciais. A todos, meu muito obrigado!

Cumprimento todos os amigos que fiz em Prudente, nas pessoas de Raul Villalba Salazar, Eduardo Fornazieri e Fernando (Pinóquio). A todos vocês, obrigado pelos momentos de estudo, lazer e companheirismo. Os momentos na salinha da pós jamais serão esquecidos. Nem os meninos dos tempos passados que lá passaram estudando e nos aconselhando. A todos, meu abraço fraterno!

Do perdido tempo, do passado tempo, agradeço também pela torcida emocionada quando embarquei neste projeto/sonho aos meus amigos de São Carlos e da eterna Federal (UFSCar): Mateus Pafume e Daniel Batista. Da velha Itumbiara, o saudoso padre Géster de Souza Cabral, amigo de longa data, desde os tempos da escola fundamental.

Por fim, agradeço à Universidade Virtual do Estado de São Paulo (UNIVESP) pelo apoio financeiro e pela oportunidade de ser tutor em vários cursos e orientador de TCC de uma dezena de alunos no curso de Engenharia de Computação. Meu agradecimento também ao Centro de Matemática Aplicada à Indústria (CeMEAI), financiado pela FAPESP (Número do Processo 2013/07375-0).

Resumo

Na Dinâmica dos Fluidos, muitos escoamentos importantes envolvem fluidos viscoelásticos, e determinar se esses escoamentos acontecem em regime laminar ou turbulento é essencial. A interação entre forças inerciais e elásticas exerce uma influência significativa na hidrodinâmica desses fluidos, mas o efeito da elasticidade sobre a estabilidade dos escoamentos ainda não foi completamente resolvida. O presente trabalho investiga instabilidades que se propagam como ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento axisimétrico de Hagen-Poiseuille, incompressível, utilizando o fluido viscoelástico modelado por Oldroyd-B. A análise da estabilidade desses escoamentos viscoelásticos é realizada em resposta a perturbações não estacionárias, utilizando a técnica da Teoria de Estabilidade Linear. Diversas simulações numéricas foram realizadas variando os parâmetros adimensionais do escoamento no tubo para o fluido modelado por Oldroyd-B, com o intuito de avaliar as curvas neutras e as taxas de amplificação.

Palavras-Chave: *Escoamento em Tubo, Fluido Oldroyd-B, Ondas de Tollmien-Schlichting, Teoria de Estabilidade Linear.*

Abstract

In Fluid Dynamics, many significant flows involve viscoelastic fluids, and determining whether these flows occur in laminar or turbulent regimes is essential. The interaction between inertial and elastic forces exerts a substantial influence on the hydrodynamics of these fluids; however, the effect of elasticity on flow stability has not yet been fully resolved. The present work investigates instabilities that propagate as Tollmien-Schlichting waves in the axisymmetric, incompressible Hagen-Poiseuille flow, utilizing the viscoelastic fluid modeled by Oldroyd-B. The stability analysis of these viscoelastic flows is conducted in response to non-stationary perturbations, employing the technique of Linear Stability Theory. Several numerical simulations were carried out, varying the dimensionless parameters of the flow in a pipe for the fluid modeled by Oldroyd-B, with the aim of evaluating the neutral stability curves and the amplification rates.

Keywords: *Pipe Flow, Oldroyd-B Fluid, Tollmien-Schlichting waves, Linear Stability Theory.*

Lista de Figuras

4.1.1	Figura retirada de [8]	63
4.1.2	Espectro de autovalores para os parâmetros $\alpha = 1$, $m = 1$, $Re = 3000$ e $N = 60$.	64
4.1.3	Espectro de autovalores para os parâmetros $\alpha = 1$, $m = 1$, $Re = 5000$ e $N = 60$.	64
4.1.4	Espectro de autovalores para os valores de $m = 0$ e $m = 1$.	65
4.1.5	Espectro de autovalores para os valores de $\alpha = 0.25$, $m = 2$, $Re = 2000$ e $N = 60$.	65
4.1.6	Espectro de autovalores para os parâmetros $\alpha = 1$, $m = 1$, $Re = 3000$ e $N = 32$.	66
4.2.1	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.1$ e $Wi = 30, 40, 50, 65$ e 80 .	67
4.2.2	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.2$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .	68
4.2.3	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.3$ e $Wi = 30, 40, 50, 65, 80$ e 100 .	68
4.2.4	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.5$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .	69
4.2.5	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.65$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .	69
4.2.6	Curvas neutras para os valores de $Wi = 30$ e $\beta = 0.1, 0.3, 0.5$ e 0.65 .	70
4.2.7	Curvas neutras para os valores de $Wi = 40$ e $\beta = 0.3, 0.5, 0.65$ e 0.7 .	71
4.2.8	Curvas neutras para os valores de $Wi = 50$ e $\beta = 0.3, 0.5$ e 0.65 .	71
4.2.9	Curvas neutras para os valores de $Wi = 65$ e $\beta = 0.3, 0.5, 0.65$ e 0.9 .	72
4.2.10	Curvas neutras para os valores de $Wi = 80$ e $\beta = 0.3, 0.65$ e 0.9 .	73
4.2.11	Curvas neutras para os valores de $Wi = 100$ e $\beta = 0.3, 0.65$ e 0.9 .	73
4.3.1	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0$ e $Wi = 40, 60$ e 100 .	74
4.3.2	Curvas neutras para diferentes valores de Wi , conforme Wan <i>et al.</i> [29].	75

Lista de Tabelas

3.2.1 Classificação de instabilidades.	61
--	----

Índice de Notações

- \mathbf{C} - tensor conformação
- \mathbf{D} - tensor taxa de deformação
- \mathbf{I} - tensor identidade
- \mathbf{T} - tensor extra-tensão
- $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ - derivada convectiva
- \mathbf{u} - vetor velocidade
- $\hat{\mathbf{C}}$ - tensor conformação no escoamento base
- L - escala característica de comprimento
- Re - número de Reynolds
- $\hat{\mathbf{T}}$ - tensor extra-tensão no escoamento base
- U - escala característica de velocidade
- W - componente de velocidade do escoamento base
- Wi - número de Weissenberg
- c - velocidade de fase da onda
- c_i - fator de amplificação temporal
- c_r - velocidade de fase da onda
- i - unidade imaginária, $\sqrt{-1}$
- p - pressão
- t - tempo
- u - velocidade na direção longitudinal do escoamento
- v - velocidade na direção normal do escoamento
- w - velocidade na direção transversal do escoamento
- $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{C}}$ - componente do escoamento base perturbado
- $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{C}}$ - amplitude e fase das perturbações

- α - número de onda na direção transversal ao escoamento
- α, α_r - número de onda
- α_i - taxa de amplificação espacial
- β - constante que controla a contribuição do solvente
- η - coordenada adimensional associada ao escoamento base
- η_0 - viscosidade dinâmica total do fluido
- η_p - viscosidade do polímero
- η_s - viscosidade dinâmica do solvente
- λ - tempo de relaxação do fluido
- λ_c - comprimento de onda
- σ - tensor tensão total
- τ - tensor simétrico das tensões
- ω - frequência de propagação de ondas
- ω, ω_r - frequência da perturbação
- ω_i - taxa de amplificação temporal

Sumário

Resumo	7
Abstract	9
Lista de Figuras	11
Lista de Tabelas	13
Índice de Notações	15
Sumário	17
1 Introdução	19
2 Formulação Matemática	23
2.1 Equações Governantes	23
2.2 Modelos Newtoniano e Não-Newtoniano	23
2.3 Modelo Oldroyd-B	27
2.4 Adimensionalização	28
2.5 Teoria de Estabilidade Linear	32
2.6 Tensor Conformação	54
2.7 Escoamento Base	58
3 Formulação Numérica	59
3.1 Método Numérico	59
3.2 Análise de Instabilidades	61
4 Resultados	63
4.1 Verificação do Código	63
4.2 Análise de Estabilidade utilizando LST	66
4.3 Verificação do Código LST para o fluido Upper Convected Maxwell (UCM)	73
5 Conclusão	77
Referências	79

Introdução

A dinâmica de fluidos computacional abrange um grande número de aplicações industriais em setores como química, alimentícia, aeronáutica e petrolífera, enfrentando desafios significativos no tratamento de escoamentos de fluidos não-Newtonianos [11]. Esses fluidos, que se deformam continuamente quando submetidos a uma tensão de cisalhamento, podem ser classificados em categoria como Newtoniano e não-Newtoniano, sendo estes últimos caracterizados pela ausência de uma relação linear entre a tensão cisalhante e a taxa de deformação.

Dentre os fluidos não-Newtonianos, destacam-se os viscoelásticos, uma classe de fluidos que combina características de líquidos viscosos e propriedades elásticas. Ao contrário dos fluidos Newtonianos, nos quais a viscosidade dinâmica mantém uma relação linear com a taxa de deformação, os viscoelásticos apresentam um comportamento mais complexo. Exemplos comuns de materiais viscoelásticos incluem tinta, sangue, ketchup, mel, maionese, polímero fundido, solução de polímero, suspensão, shampoo e amido de milho. Entre os principais modelos viscoelásticos não lineares encontrados na literatura podem ser citados os modelos diferenciais [1], [3] e [16].

Ao explorar a interação complexa entre as propriedades viscoelásticas dos fluidos e a estabilidade do escoamento em tubos, este estudo visa não apenas avançar o conhecimento científico, mas também fornecer ferramentas práticas para a otimização de processos industriais. O entendimento aprofundado desses fenômenos contribui para o desenvolvimento de soluções mais eficazes e eficientes em uma variedade de aplicações, impactando positivamente a indústria e a pesquisa científica.

O escoamento em tubos é uma área fundamental da dinâmica de fluidos, marcada por uma tradição e contínua evolução na pesquisa. O grande desafio está na transição desse escoamento para a turbulência em condições do mundo real. Esse aspecto levou ao desenvolvimento do número de Reynolds, um parâmetro essencial para entender o comportamento do escoamento. Embora a teoria clássica da estabilidade linear indique que o escoamento de Hagen-Poiseuille permanece estável [10], [22], o início da transição para a turbulência demanda investigações mais aprofundadas [25].

Segundo Schmid e Henningson [26] o escoamento laminar em tubos para fluido Newtoniano é conhecido por se manter estável para qualquer número de Reynolds. Garg *et al.* [14] foram os primeiros a identificar a ocorrência de instabilidade linear em fluidos viscoelásticos modelados por Oldroyd-B. Essa descoberta incentiva a aplicação da análise de estabilidade linear ao escoamento em tubo para o fluido modelado por Oldroyd-B, revelando informações importantes sobre o comportamento das perturbações do escoamento, incluindo seu potencial de crescimento ou decaimento ao longo do eixo do tubo.

Para compreender o início da convecção natural, é possível realizar uma análise chamada de análise de estabilidade. Primeiramente, é fundamental determinar a solução estacionária do problema, também conhecida como solução base. Com essa solução base conhecida, é possível avançar na investigação do início da convecção das ondas de Tollmien-Schlichting.

Na Mecânica dos fluidos, as ondas de Tollmien-Schlichting representam um tipo de onda simples que marca a primeira fase da instabilidade linear observada em um fluxo laminar, conduzindo à transição para um estado turbulento. Esse fenômeno foi identificado por Ludwig Prandtl e analisado por seus alunos Walter Tollmien e Hermann Schlichting.

De acordo com Chandrasekhar [7] a instabilidade é definida como a incapacidade de um sistema físico específico de manter seu estado quando submetido a pequenas perturbações. Nesse contexto, a teoria da análise de estabilidade linear busca entender sob quais condições as instabilidades começam a crescer ou decair, levando em conta que esse sistema é afetado por perturbações lineares. Por meio das equações linearizadas que descrevem a perturbação, é possível investigar o comportamento dessas flutuações, seja no domínio do tempo ou do espaço. Historicamente, essa análise é comumente realizada por meio de uma abordagem modal.

Historicamente, a análise da instabilidade de escoamentos decorrente de perturbações de baixa amplitude tem sido realizada através da abordagem modal. Essa abordagem pressupõe que uma perturbação pode ser representada como uma combinação de ondas. No contexto de um caso genérico, a solução base é considerada dependente de apenas uma direção espacial, apresentando homogeneidade na outra direção espacial e também ao longo do tempo.

Segundo Mendonça *et al.* [21], a análise local por modos normais abrange tanto escoamentos paralelos quanto aqueles que apresentam variações suaves em uma determinada direção. O conceito de “local” em relação às instabilidades se refere ao fato de que a instabilidade analisada está associada ao perfil de velocidade local ou ao campo de velocidade do escoamento como um todo (global) [17]. Além disso, a análise local por modos normais resulta no diagrama de estabilidade [21].

No contexto específico sobre o estudo da Teoria de Estabilidade Linear do escoamento em tubos para o fluido modelado por Oldroyd-B, a compreensão dessas propriedades viscoelásticas é essencial. Logo, a teoria de estabilidade linear fornece uma estrutura analítica para avaliar a estabilidade de escoamentos viscoelásticos, considerando as equações de Navier-Stokes. O fluido modelado por Oldroyd-B é um modelo viscoelástico que descreve o comportamento de fluidos não-Newtonianos e possui propriedades intrigantes a serem analisadas. A estabilidade linear do escoamento em um tubo refere-se à análise sobre a ocorrência de flutuações e instabilidades no escoamento. O estudo envolve a análise das equações de Navier-Stokes para o escoamento do fluido em um tubo, considerando pequenas perturbações.

A análise de estabilidade linear do fluido modelado por Oldroyd-B no escoamento em tubo permite entender como o escoamento é afetado por perturbações e como essas perturbações podem crescer ou diminuir ao longo do escoamento. Isso é particularmente relevante para a otimização do projeto de tubos e sistemas de transporte de fluidos que envolvem o uso desse tipo de fluido. Além disso, o estudo de estabilidade também ajuda a compreender melhor o comportamento viscoelástico do fluido modelado por Oldroyd-B, contribuindo para o desenvolvimento de novos modelos e técnicas de análise.

Assim, este trabalho busca encontrar diagramas de curvas neutras para escoamentos viscoelásticos em tubo do fluido modelado por Oldroyd-B. O diagrama de estabilidade indica que há um valor específico do número de Reynolds abaixo do qual perturbações de todas as frequências permanecem estáveis. Vale ressaltar que esse ponto não representa o

momento em que ocorre a transição para o escoamento turbulento, mas sim o local onde as perturbações começam a se amplificar [21].

Segundo Schmid e Henningson [26] a transição de escoamento laminar para turbulento refere-se ao processo pelo qual um escoamento laminar se torna turbulento. Em qualquer tipo de escoamento, essa transição pode ser entendida como resultado do crescimento de perturbações introduzidas no fluxo por diversas fontes. O comportamento físico da instabilidade que se desenvolve a partir de uma perturbação depende do tipo de escoamento em questão. Pequenas perturbações têm a capacidade de afetar os escoamentos laminares devido a diferentes fatores, como vibrações na estrutura, rugosidade da superfície, ruídos, turbulência externa e outras razões. Caso não sejam dissipadas, essas perturbações podem impactar o regime do escoamento, ocasionando uma transição, embora isso não implique necessariamente na mudança para um regime turbulento [27].

Assim, os diagramas de estabilidade são fundamentais para a compreensão da transição laminar-turbulenta nesse contexto complexo e desafiador. Essa abordagem visa não apenas avançar o conhecimento científico, mas também proporcionar ferramentas eficientes para a simulação e análise de escoamentos incompressíveis de fluidos viscoelásticos, com potenciais impactos positivos nas áreas industrial e científica. Além disso, a literatura atual é escassa e, muitas vezes, não permite inferir de forma aprofundada sobre o comportamento das curvas neutras para o escoamento em tubo, para o fluido modelado por Oldroyd-B. Diante do exposto, a relevância deste trabalho se justifica por contribuir com resultados atuais científicos em um campo inovador.

Neste contexto, o principal objetivo deste trabalho é analisar a transição para a turbulência no escoamento de Hagen-Poiseuille, incompressível, de um fluido viscoelástico modelado por Oldroyd-B. Para isso, a investigação é realizada através da análise temporal da convecção de ondas de Tollmien-Schlichting, utilizando a técnica de Teoria de Estabilidade Linear, gerando curvas de estabilidade neutra para cada conjunto de parâmetros adimensionais do modelo de fluido Oldroyd-B.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: As equações governantes de um fluido Newtoniano e não-Newtoniano são apresentadas para escoamentos tridimensionais, incompressíveis e isotérmicos. A equação constitutiva do tipo Oldroyd-B é utilizada para representar o comportamento viscoelástico do fluido. Além disso, a dedução das equações para as amplitudes das perturbações é apresentada utilizando a Teoria de Estabilidade Linear. No final deste capítulo são apresentados o escoamento base para as duas formulações dos tensores extra-tensão e conformação, respectivamente.
- Capítulo 3: É descrito o método numérico utilizado para resolver as equações governantes obtidas através da aplicação da Teoria de Estabilidade Linear.
- Capítulo 4: Os resultados numéricos obtidos são apresentados utilizando a Teoria de Estabilidade Linear, como a verificação da implementação das equações de estabilidade utilizando resultados já verificados presentes na literatura para o modelo Oldroyd-B. Além disso, são apresentadas as curvas neutras para os fluidos modelados por Oldroyd-B e UCM.
- Capítulo 5: As conclusões do trabalho são apresentadas juntamente com as perspectivas de continuidade da pesquisa.

Formulação Matemática

Neste capítulo são apresentadas as equações que modelam fluidos incompressíveis e isotérmicos para fluidos Newtoniano e não-Newtoniano. Em particular, a equação constitutiva apresentada no texto é o modelo Oldroyd-B. Além disso, essas equações são apresentadas na forma dimensional e adimensional.

2.1 Equações Governantes

Para modelar escoamentos de fluidos incompressíveis e isotérmicos são utilizadas as equações da continuidade e da quantidade de movimento, que são dadas, respectivamente, por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.1.2)$$

onde \mathbf{u} é o vetor velocidade, t é o tempo, ρ é a densidade do fluido e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão total, dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad (2.1.3)$$

onde p é a pressão, \mathbf{I} é o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor simétrico das tensões. Que por sua vez, pode ser determinado via modelo constitutivo do fluido. No caso tridimensional, em coordenadas cilíndricas, $\mathbf{u} = [u_r, u_\theta, u_z]^T$ representa as velocidades nas direções r (radial), θ (azimutal) e z (axial), respectivamente. Além disso, o tensor das tensões é definido por

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^{rr} & \tau^{r\theta} & \tau^{rz} \\ \tau^{\theta r} & \tau^{\theta\theta} & \tau^{\theta z} \\ \tau^{zr} & \tau^{z\theta} & \tau^{zz} \end{bmatrix}.$$

2.2 Modelos Newtoniano e Não-Newtoniano

Os fluidos apresentam diferentes particularidades que estão ligadas às suas propriedades físicas. Essas características estão diretamente relacionadas com o comportamento do fluido.

O tensor das tensões simétricas é linearmente proporcional ao tensor taxa de deformação em modelos de fluidos Newtonianos. Isso pode ser expresso como

$$\tau = 2\eta_s \mathbf{D}, \quad (2.2.1)$$

onde η_s é a viscosidade dinâmica e \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação, que é dado por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right). \quad (2.2.2)$$

No caso tridimensional e em coordenadas cilíndricas, a equação (2.2.2) é escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & 2 \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, substituindo a equação (2.2.1) em (2.1.3) é possível calcular o divergente da equação da quantidade de movimento dada na equação (2.1.2), que é dado por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma &= \nabla \cdot (\tau - p\mathbf{I}) = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & 2 \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \\ &\quad - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso, tem-se que

$$\nabla \cdot \sigma = \eta_s \left[2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right].$$

Agora, reescrevendo $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$, tem-se que

$$\eta_s \left[2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right].$$

E, utilizando a equação da continuidade, que é dada por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial p}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \frac{\partial p}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Logo, em coordenadas cilíndricas, as equações da continuidade (2.1.1) e da quantidade de movimento (2.1.2) para um fluido Newtoniano, tornam-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right], \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], \quad (2.2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]. \quad (2.2.6) \end{aligned}$$

Fluidos não-Newtonianos são caracterizados pela ausência de linearidade entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento, o que significa que a viscosidade dinâmica não é constante. Em vez de apresentar uma relação linear, a tensão pode ser proporcional à deformação elevada a um expoente ou pode ser descrita por meio de uma relação que envolve outros fatores além da deformação.

No contexto do modelo de fluido não-Newtoniano, para um fluido viscoelástico, o tensor de tensões é determinado pela combinação das contribuições viscosas (Newtonianas) e elásticas (não-Newtonianas). Ou seja,

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T}, \quad (2.2.7)$$

onde η_s representa a viscosidade do solvente Newtoniano, \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação definido em (2.2.2) e \mathbf{T} é o tensor extra-tensão (simétrico) que representa a contribuição não-Newtoniana (polimérica), dado por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{rr} & T^{r\theta} & T^{rz} \\ T^{\theta r} & T^{\theta\theta} & T^{\theta z} \\ T^{zr} & T^{z\theta} & T^{zz} \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte, calculando o divergente do tensor tensão total (2.1.3) para um fluido não-Newtoniano, tem-se que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{T} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & 2 \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{rr} & T^{r\theta} & T^{rz} \\ T^{\theta r} & T^{\theta\theta} & T^{\theta z} \\ T^{zr} & T^{z\theta} & T^{zz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rT^{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zr}}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 T^{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{z\theta}}{\partial z} - \frac{T^{\theta r} - T^{r\theta}}{r} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (rT^{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, em coordenadas cilíndricas as equações da continuidade (2.1.1) e da quantidade de movimento (2.1.2) para um fluido não-Newtoniano, tornam-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] &+ \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial (rT^{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zr}}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r}, & \quad (2.2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] &+ \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 T^{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{z\theta}}{\partial z}, & \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] &+ \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial (r T^{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z}. & \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

2.3 Modelo Oldroyd-B

No presente trabalho, utiliza-se a equação constitutiva do modelo Oldroyd-B [3], que é uma equação reológica usada para descrever o comportamento físico de um fluido, e é caracterizada por

$$\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (2.3.1)$$

em que η_p é o coeficiente de viscosidade polimérica, λ é o tempo de relaxação do fluido e $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ é a derivada convectiva, dada pela seguinte expressão:

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}, \quad (2.3.2)$$

onde $\frac{D\mathbf{T}}{Dt}$ é a derivada material de \mathbf{T} , que por sua vez, pode ser expressa por

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}). \quad (2.3.3)$$

Assim, substituindo (2.3.2), (2.3.3) em (2.3.1) tem-se

$$\mathbf{T} + \lambda \left[\frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] = 2\eta_p \mathbf{D},$$

$$\mathbf{T} + \lambda \left[\frac{D\mathbf{T}}{Dt} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] = 2\eta_p \mathbf{D}.$$

As equações dos tensores não-Newtonianos para o modelo Oldroyd-B são obtidas após algumas manipulações algébricas, e são dadas por

$$\begin{aligned} T^{rr} + \lambda \left[\frac{\partial T^{rr}}{\partial t} + \frac{\partial (u_r T^{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta T^{rr})}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z T^{rr})}{\partial z} - \frac{2}{r} u_\theta T^{r\theta} - 2T^{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \right. \\ \left. - \frac{2}{r} T^{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - 2T^{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = 2\eta_p \frac{\partial u_r}{\partial r}, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned}
T^{r\theta} + \lambda \left[\frac{\partial T^{r\theta}}{\partial t} + \frac{\partial(u_r T^{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta T^{r\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z T^{r\theta})}{\partial z} + \frac{1}{r} u_\theta T^{rr} - \frac{2}{r} u_\theta T^{\theta\theta} + \right. \\
\left. - T^{rr} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - T^{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - T^{rz} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - T^{\theta z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \\
= \eta_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad (2.3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{rz} + \lambda \left[\frac{\partial T^{rz}}{\partial t} + \frac{\partial(u_r T^{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta T^{rz})}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z T^{rz})}{\partial z} - \frac{2}{r} u_\theta T^{\theta z} - T^{rr} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \right. \\
\left. - T^{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - T^{rz} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - T^{zz} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = \\
= \eta_p \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (2.3.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{\theta\theta} + \lambda \left[\frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial t} + \frac{\partial(u_r T^{\theta\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta T^{\theta\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z T^{\theta\theta})}{\partial z} + \frac{2}{r} u_\theta T^{r\theta} - 2T^{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \right. \\
\left. - 2T^{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right) - 2T^{\theta z} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = \\
= 2\eta_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), \quad (2.3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{\theta z} + \lambda \left[\frac{\partial T^{\theta z}}{\partial t} + \frac{\partial(u_r T^{\theta z})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta T^{\theta z})}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z T^{\theta z})}{\partial z} + \frac{1}{r} u_\theta T^{rz} - T^{\theta r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \right. \\
\left. - T^{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - T^{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \right) - T^{rz} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - T^{zz} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = \\
= \eta_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad (2.3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{zz} + \lambda \left[\frac{\partial T^{zz}}{\partial t} + \frac{\partial(u_r T^{zz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta T^{zz})}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z T^{zz})}{\partial z} - 2T^{rz} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \right. \\
\left. - 2T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - 2T^{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 2\eta_p \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2.3.9)
\end{aligned}$$

2.4 Adimensionalização

Na dinâmica dos fluidos computacional é comum utilizar formas adimensionais das equações de conservação para demonstrar os efeitos físicos, formular modelos independentes do sistema de unidades, limitar os valores das variáveis e parâmetros e, principalmente, obter situações geometricamente similares [6]. Nesse tratamento, surgem constantes adimensionais conhecidas na literatura, como o número de Reynolds, o número de Weissenberg, a constante β , entre outros.

As variáveis adimensionais (com o sobrescrito *) são definidas em termos dos parâmetros adotados: o comprimento L , a velocidade U e a densidade ρ , então

$$\mathbf{r}^* = \frac{r}{L}, \quad \theta = \theta^*, \quad \mathbf{z}^* = \frac{z}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{u_r}{U}, \quad \mathbf{v}^* = \frac{u_\theta}{U}, \quad \mathbf{w}^* = \frac{u_z}{U},$$

$$\mathbf{t}^* = \frac{tU}{L}, \quad \mathbf{p}^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho U^2}. \quad (2.4.1)$$

Quando são aplicadas as mudanças de variáveis (2.4.1) nas equações governantes, surgem os números adimensionais, como são mostrados a seguir

- Número de Reynolds (Re) : Representa a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas do escoamento [6] e é definido por

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta_0}, \quad (2.4.2)$$

onde η_0 é a viscosidade dinâmica total do fluido, dada por $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, sendo que η_s é a viscosidade do solvente e η_p a viscosidade do polímero.

- Número de Weissenberg (Wi) : Para um fluido viscoelástico, é a razão entre uma escala de tempo característica do fluido e uma escala de tempo do escoamento [20]

$$Wi = \frac{\lambda U}{L}. \quad (2.4.3)$$

- Constante β : A constante $\beta \in (0, 1)$ é uma quantidade que controla a contribuição do solvente Newtoniano, dada por

$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_p}. \quad (2.4.4)$$

A obtenção das equações de conservação e dos tensores não-Newtonianos em sua forma adimensional é alcançada por meio da substituição das variáveis adimensionais 2.4.1.

Para obter a equação da continuidade em sua forma adimensional, tem-se as seguintes manipulações:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial(Lr^*Uu^*)}{\partial(Lr^*)} + \frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial(Uv^*)}{\partial\theta^*} + \frac{\partial(Uw^*)}{\partial(Lz^*)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{U}{L} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial\theta^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = 0.$$

Como L é o comprimento do tubo, então, $L \neq 0$. Além disso, U é a velocidade no interior do tubo, logo, $U \neq 0$. Portanto, tem-se que $\frac{U}{L} \neq 0$. Assim, a equação da continuidade pode ser escrita como

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial\theta^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0. \quad (2.4.5)$$

Agora, para obter a equação de quantidade de movimento na direção radial, em sua forma adimensional, realiza-se as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] &+ \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial(rT^{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zr}}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r}, & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial(Uu^*)}{\partial(\frac{L}{U}t^*)} + \frac{\partial(Uu^*Uu^*)}{\partial(Lr^*)} + \frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial(Uv^*Uu^*)}{\partial\theta^*} - \frac{(Uv^*)^2}{(Lr^*)} + \frac{\partial(Uw^*Uu^*)}{\partial(Lz^*)} \right] &= -\frac{\partial(\rho U^2 p^*)}{\partial(Lr^*)} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial(Lr^*)} \left(\frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial(Lr^*Uu^*)}{\partial(Lr^*)} \right) + \frac{1}{(Lr^*)^2} \frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(\theta^*)^2} + \frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(Lz^*)^2} - \frac{2}{(Lr^*)^2} \frac{\partial(Uv^*)}{\partial\theta^*} \right] &+ \\ + \frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial(Lr^*\rho U^2 T^*)^{rr}}{\partial(Lr^*)} + \frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial(\rho U^2 T^*)^{\theta r}}{\partial\theta^*} + \frac{\partial(\rho U^2 T^*)^{zr}}{\partial(Lz^*)} - \frac{(\rho U^2 T^*)^{\theta\theta}}{(Lr^*)}. & \end{aligned}$$

Por conseguinte, dividindo ambos os lados da equação pelo termo $\frac{\rho U^2}{L}$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^*u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(v^*u^*)}{\partial\theta^*} - \frac{(v^*)^2}{r^*} + \frac{\partial(w^*u^*)}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \\ + \frac{\eta_s}{\rho UL} \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*u^*)}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial^2(u^*)}{\partial(\theta^*)^2} + \frac{\partial^2(u^*)}{\partial(z^*)^2} - \frac{2}{(r^*)^2} \frac{\partial(v^*)}{\partial\theta^*} \right] &+ \\ + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*T^{*rr})}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^{*\theta r}}{\partial\theta^*} + \frac{\partial T^{*zr}}{\partial z^*} - \frac{T^{*\theta\theta}}{r^*}. & \end{aligned}$$

Note que resta apenas o termo $\frac{\eta_s}{\rho UL}$. Neste contexto, procede-se com manipulações algébricas a fim de reescrevê-lo em termos dos parâmetros adimensionais Re e β . Logo, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\eta_s}{\rho UL} &= \frac{\eta_0 - \eta_p}{\rho UL} = \frac{\eta_0}{\rho UL} - \frac{\eta_p}{\rho UL} = \frac{1}{Re} - \frac{\eta_p}{\rho UL} = \frac{1}{Re} - \frac{\eta_p \eta_0}{\eta_0 \rho UL} = \\ &= \frac{1}{Re} - \frac{(\eta_0 - \eta_s)\eta_0}{\eta_0 \rho UL} = \frac{1}{Re} - \left(\frac{\eta_0^2}{\eta_0 \rho UL} - \frac{\eta_s \eta_0}{\eta_0 \rho UL} \right) = \frac{1}{Re} - \left(\frac{1}{Re} - \beta \frac{1}{Re} \right) = \frac{\beta}{Re}. \end{aligned}$$

Observe que a notação (*) nas variáveis adimensionais é omitida por simplicidade, uma vez que as constantes adimensionais indicam que a equação está em sua forma adimensional. Assim, a equação de quantidade de movimento na direção radial (r) em sua forma adimensional é expressa por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] &+ \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial r T^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zr}}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r}. & \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

De maneira análoga, é obtida a equação de quantidade de movimento na direção azimutal (θ) e na direção axial (z), nas formas adimensionais, respectivamente

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T^{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{z\theta}}{\partial z}, \tag{2.4.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rw)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial(r T^{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z}. \tag{2.4.8}
\end{aligned}$$

Agora, para adimensionalizar as equações dos tensores não-Newtonianos, realiza-se as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned}
& T^{rr} + \lambda \left[\frac{\partial T^{rr}}{\partial t} + \frac{\partial(u_r T^{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta T^{rr})}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z T^{rr})}{\partial z} - \frac{2}{r} u_\theta T^{r\theta} - 2T^{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \right. \\
& \left. - \frac{2}{r} T^{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - 2T^{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = 2\eta_p \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\
& \Rightarrow \rho U^2 T^{rr} + \lambda \left[\frac{\partial(\rho U^2 T^{*rr})}{\partial(\frac{U}{L} t^*)} + \frac{\partial(\rho U^2 U u^* T^{*rr})}{\partial(L r^*)} + \frac{1}{(L r^*)} \frac{\partial(\rho U^2 U v^* T^{*rr})}{\partial \theta^*} + \right. \\
& + \frac{\partial(\rho U^2 w^* T^{*rr})}{\partial(L z^*)} - \frac{2}{(L r^*)} \rho U^2 U v^* T^{*r\theta} - 2T^{*rr} \rho U^2 \frac{\partial(U u^*)}{\partial(L r^*)} - \frac{2}{r} T^{*r\theta} \rho U^2 \frac{\partial U v^*}{\partial \theta^*} + \\
& \left. - 2T^{*rz} \rho U^2 \frac{\partial(U u^*)}{\partial(L z^*)} \right] = 2\eta_p \frac{\partial(U u^*)}{\partial(L r^*)}.
\end{aligned}$$

Logo, dividindo ambos os lados da equação pelo termo ρU^2 , tem-se

$$\begin{aligned}
& T^{*rr} + \frac{\lambda U}{L} \left[\frac{\partial T^{*rr}}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* T^{*rr})}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(v^* T^{*rr})}{\partial \theta^*} + \frac{\partial(w^* T^{*rr})}{\partial z^*} - \frac{2}{r^*} v^* T^{*r\theta} - 2T^{*rr} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \right. \\
& \left. - \frac{2}{r^*} T^{*r\theta} \frac{\partial v^*}{\partial \theta^*} - 2T^{*rz} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right] = 2 \frac{\eta_p}{\rho U L} \frac{\partial u^*}{\partial r^*}.
\end{aligned}$$

Note que resta apenas o termo $\frac{\eta_p}{\rho U L}$. Neste contexto, procede-se com manipulações algébricas a fim de reescrevê-lo em termos dos parâmetros adimensionais Re , Wi e β . Logo, tem-se que

$$\frac{\eta_p}{\rho U L} = \frac{\eta_0 - \eta_s}{\rho U L} = \frac{\frac{1}{\eta_0}(\eta_0 - \eta_s)}{\frac{1}{\eta_0} \rho U L} = \frac{1 - \frac{\eta_s}{\eta_0}}{\eta_0 \rho U L} = \frac{1 - \frac{\eta_s}{\eta_0}}{\frac{\rho U L}{\eta_0}} = \frac{1 - \beta}{Re}.$$

Substituindo na equação anterior, obtém-se a equação do tensor T^{rr} adimensionalizada:

$$\begin{aligned}
& T^{rr} + Wi \left[\frac{\partial T^{rr}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{rr}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{rr}}{\partial z} - \frac{2v}{r} T^{r\theta} + \right. \\
& \left. - 2T^{rr} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r} T^{r\theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} - 2T^{rz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{2.4.9}
\end{aligned}$$

De maneira análoga, as equações dos tensores $T^{r\theta}$, T^{rz} , $T^{\theta\theta}$, $T^{\theta z}$ e T^{zz} são obtidas, nas formas adimensionais, respectivamente

$$\begin{aligned} T^{r\theta} + Wi \left[\frac{\partial T^{r\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial z} + \frac{v}{r} T^{rr} - \frac{2v}{r} T^{\theta\theta} + \right. \\ \left. - T^{rr} \frac{\partial v}{\partial r} - T^{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - T^{rz} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - T^{\theta z} \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \\ = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

$$\begin{aligned} T^{rz} + Wi \left[\frac{\partial T^{rz}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{rz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{rz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{rz}}{\partial z} - \frac{2v}{r} T^{\theta z} - T^{rr} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\ \left. - T^{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - T^{rz} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - T^{zz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \\ = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

$$\begin{aligned} T^{\theta\theta} + Wi \left[\frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2v}{r} T^{r\theta} - 2T^{r\theta} \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \\ \left. - 2T^{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r} \right) - 2T^{\theta z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \\ = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right), \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

$$\begin{aligned} T^{\theta z} + Wi \left[\frac{\partial T^{\theta z}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial z} + \frac{v}{r} T^{rz} - T^{\theta r} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\ \left. - T^{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - T^{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) - T^{rz} \frac{\partial v}{\partial r} - T^{zz} \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \\ = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

$$\begin{aligned} T^{zz} + Wi \left[\frac{\partial T^{zz}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{zz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{zz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{zz}}{\partial z} - 2T^{rz} \frac{\partial w}{\partial z} + \right. \\ \left. - 2T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - 2T^{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

As equações (2.4.5) – (2.4.8) e (2.4.9) – (2.4.14) modelam um escoamento tridimensional, incompressível e isotérmico, para um fluido viscoelástico do modelo Oldroyd-B.

2.5 Teoria de Estabilidade Linear

Nesta seção, é discutida uma abordagem para investigar a estabilidade linear de escoamentos de fluidos viscoelásticos, por meio da utilização da equação constitutiva Oldroyd-B.

A análise de estabilidade linear realizada neste trabalho levou em consideração que o escoamento base é axissimétrico e paralelo na direção z , ou seja,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = W(r), \quad p = P(z), \quad T = \hat{T}(r).$$

Dado que o escoamento instantâneo pode ser dividido em um escoamento principal (base) e um escoamento perturbado, as variáveis dependentes podem ser decompostas da seguinte maneira [11]

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z, t) &= \tilde{u}(r, \theta, z, t), \\ v(r, \theta, z, t) &= \tilde{v}(r, \theta, z, t), \\ w(r, \theta, z, t) &= W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t), \\ p(r, \theta, z, t) &= P(z) + \tilde{p}(r, \theta, z, t), \\ T(r, \theta, z, t) &= \hat{T}(r) + \tilde{T}(r, \theta, z, t). \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

A partir da substituição dessas variáveis decompostas nas equações de Navier-Stokes e dos tensores não-Newtonianos, podem ser obtidas as equações para as perturbações [21]. É importante ressaltar que, de acordo com a hipótese estabelecida, o escoamento principal (base) é uma solução das equações de Navier-Stokes, o que significa que as perturbações também devem atender a esse sistema de equações.

Continuidade:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow &\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = 0, \\ \Rightarrow &\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \underbrace{\frac{\partial W(r)}{\partial z}}_{=0} + \frac{\partial(\tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0. \tag{2.5.2}$$

Equação da quantidade de movimento na direção radial (r):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial r T^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zr}}{\partial z} - \frac{T^{\theta \theta}}{r}. \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) nessa equação, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} - \frac{(\tilde{v}(r, \theta, z, t))^2}{r} + \\
& + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = - \frac{\partial(P(r, \theta) + \tilde{p}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} \right] + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\hat{T}^{rr}(r) + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\hat{T}^{\theta r}(r) + \tilde{T}^{\theta r}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\
& + \frac{\partial(\hat{T}^{zr}(r) + \tilde{T}^{zr}(r, \theta, z, t))}{\partial z} - \frac{(\hat{T}^{\theta\theta}(r) + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t))}{r}.
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{v}(r, \theta, z, t) \frac{\partial\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} - \frac{(\tilde{v}(r, \theta, z, t))^2}{r} + \\
& + \frac{1}{r} \tilde{v}(r, \theta, z, t) \frac{\partial\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} + W \frac{\partial\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial z} + \tilde{w}(r, \theta, z, t) \frac{\partial\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial\tilde{p}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} \right] + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial r \hat{T}^{rr}(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta r}(r)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta r}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{T}^{zr}(r)}{\partial z} + \\
& + \frac{\partial \tilde{T}^{zr}(r, \theta, z, t)}{\partial z} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}(r)}{r} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t)}{r}.
\end{aligned}$$

Sendo o escoamento base uma solução das equações de Navier-Stokes, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{v} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}^2}{r} + W \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} = - \frac{\partial\tilde{p}}{\partial r} + \\
& + \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial \theta} \right) + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zr}}{\partial z} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}}{r}.
\end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento em r perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + W \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} + \left[- \frac{\tilde{v}^2}{r} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{v} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} \right] = - \frac{\partial\tilde{p}}{\partial r} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial \theta} \right) + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zr}}{\partial z} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}}{r}. \tag{2.5.3}
\end{aligned}$$

Equação da quantidade de movimento na direção azimutal (θ):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T^{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{z\theta}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) nessa equação, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\ & + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}(r, \theta, z, t)\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} + \\ & + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(P(r, \theta) + \tilde{p}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} \right] + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2(\hat{T}^{r\theta}(r) + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\hat{T}^{\theta\theta}(r) + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\partial(\hat{T}^{z\theta} + \tilde{T}^{z\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial z}. \end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\ & + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}(r, \theta, z, t)\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} + \\ & + W \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \tilde{w}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{p}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} \right] + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2(\hat{T}^{r\theta}(r)))}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2(\tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)))}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial(\hat{T}^{\theta\theta}(r))}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\partial(\hat{T}^{z\theta}(r))}{\partial z} + \frac{\partial(\tilde{T}^{z\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial z}. \end{aligned}$$

Sendo o escoamento base uma solução das equações de Navier-Stokes, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{r} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \\ + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right] + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{z\theta}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento em θ perturbada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{r} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \\ + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right] + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{z\theta}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Equação da quantidade de movimento na direção axial (z):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rw)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial (rT^{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) nessa equação, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\ & + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = \\ & = -\frac{\partial P(r, \theta) + \tilde{p}(r, \theta, z, t)}{\partial z} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z^2} \right] + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{T}^{rz}(r) + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\hat{T}^{\theta z}(r) + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\ & \quad + \frac{\partial (\hat{T}^{zz}(r) + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t))}{\partial z}. \end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial W(r)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \\
& + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial W(r)}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} + W \frac{\partial W(r)}{\partial z} + W \frac{\partial \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial z} + \\
& + W \frac{\partial \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial z} + \tilde{w}(r, \theta, z, t) \frac{\partial \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{p}(r, \theta, z, t)}{\partial z} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r W(r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W(r)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2 W(r)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial r \hat{T}^{rz}(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \\
& \quad + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}(r)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{T}^{zz}(r)}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t)}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Sendo o escoamento base uma solução das equações de Navier-Stokes, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + W \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{w}}{\partial r} \right) + \right. \\
\left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento em z perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + W \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \\
+ \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{w}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) + \\
+ \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z}. \tag{2.5.5}
\end{aligned}$$

Os termos entre colchetes das equações (2.5.3), (2.5.4) e (2.5.5) são os termos não lineares. E, segundo Schlichting [24] como as amplitudes das perturbações são pequenas, pode-se desprezar os termos não lineares dessas equações. Portanto, o sistema simplificado é dado por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \tag{2.5.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right) + \\
+ \frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zr}}{\partial z} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r}, \tag{2.5.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) + \\
+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta \theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{z\theta}}{\partial z}, \tag{2.5.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + W \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{w}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{rr} :

$$\begin{aligned} T^{rr} + Wi \left[\frac{\partial T^{rr}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{rr}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{rr}}{\partial z} - \frac{2v}{r} T^{r\theta} + \right. \\ \left. - 2T^{rr} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r} T^{r\theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} - 2T^{rz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial r}. \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.9), tem-se

$$\begin{aligned} (\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t)) + Wi \left[\frac{\partial(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \right. \\ + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \\ - \frac{2\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)) - 2(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \\ \left. - \frac{2}{r} (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial \tilde{v}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} - 2(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial z} \right] = \\ = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial r}. \end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial z} + \right. \\ + W \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} (\hat{T}^{r\theta}) - \frac{2\tilde{v}}{r} (\tilde{T}^{r\theta}) - 2\hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - 2\tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \\ \left. - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right] = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}. \end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação T^{rr} perturbada é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{rr} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\ - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{r\theta} - 2\tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{r} \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right] \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{r\theta}$:

$$\begin{aligned} T^{r\theta} + Wi \left[\frac{\partial T^{r\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial z} + \frac{v}{r} T^{rr} - \frac{2v}{r} T^{\theta\theta} + \right. \\ \left. - T^{rr} \frac{\partial v}{\partial r} - T^{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - T^{rz} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - T^{\theta z} \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \\ = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.10), tem-se

$$\begin{aligned} (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)) + Wi \left[\frac{\partial(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \right. \\ \left. + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} (\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t)) - \frac{2\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} (\hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t)) + \right. \\ \left. - (\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} - \frac{(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t))}{r} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \right. \\ \left. - (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)) \frac{\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{r} - (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}) \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \right. \\ \left. - (\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} - \frac{(\hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t))}{r} \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \right. \\ \left. - (\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \right] = \\ = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} + \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + W \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial z} + W \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} - \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{rr} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} - \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}}{r} \hat{T}^{r\theta} - \frac{\tilde{u}}{r} \tilde{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial W(r)}{\partial z} - \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial W(r)}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right] = \\ = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação $T^{r\theta}$ perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{r\theta} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} - \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} + \right. \\
\left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}}{r} \hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial W}{\partial z} + \right. \\
\left. - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} - \frac{\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{rr} - \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}}{r} \tilde{T}^{r\theta} - \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right] \right) = \\
= \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right). \quad (2.5.11)
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{rz} :

$$\begin{aligned}
T^{rz} + Wi \left[\frac{\partial T^{rz}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{rz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{rz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{rz}}{\partial z} - \frac{2v}{r} T^{\theta z} - T^{rr} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\
\left. - T^{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - T^{rz} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - T^{zz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \\
= \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.11), tem-se

$$\begin{aligned}
(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t)) + Wi \left[\frac{\partial(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \right. \\
\left. + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \right. \\
\left. - \frac{2\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} (\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t)) - (\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \right. \\
\left. - (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)) \frac{1}{r} \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \right. \\
\left. - (\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t)) \left(\frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) - (\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t)) \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \right. \\
\left. - (\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \right] = \\
= \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right).
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial \theta} + \right. \\
& + W \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{\theta z} - \hat{T}^{rr} \frac{\partial W(r)}{\partial r} + \\
& - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial W(r)}{\partial r} - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial W(r)}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial W(r)}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} + \\
& - \frac{\tilde{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial W(r)}{\partial z} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial W(r)}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \\
& \left. - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \tilde{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right] = \\
& = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial W(r)}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right).
\end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação T^{rz} perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{rz} + Wi \left(\frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta z} + \right. \\
& - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial W}{\partial r} - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \\
& \left. - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{zz}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} + \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{\theta z} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right] \right) = \\
& = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial W(r)}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right). \quad (2.5.12)
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta\theta}$:

$$\begin{aligned}
& T^{\theta\theta} + Wi \left[\frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2v}{r} T^{r\theta} - 2T^{r\theta} \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \\
& \left. - 2T^{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r} \right) - 2T^{\theta z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \\
& = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.12), tem-se

$$\begin{aligned}
& (\hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t)) + Wi \left[\frac{\partial(\hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \right. \\
& + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial(\hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \\
& + \frac{2\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)) - 2(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \\
& - 2(\hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t)) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{r} \right) + \\
& \left. - 2(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{\partial z} \right] = \\
& = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{r} \right).
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta} + Wi \left[\frac{\partial\hat{T}^{\theta\theta}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial\hat{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial\hat{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial\hat{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \right. \\
& + W \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial\hat{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} + \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{r\theta} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - 2\tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial \theta} + \\
& \left. - \frac{2\tilde{u}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{2\tilde{u}}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} - 2\hat{T}^{\theta z} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial z} \right] = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}}{r} \right).
\end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação $T^{\theta\theta}$ perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{\theta\theta} + Wi \left(\frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{r\theta} - 2\tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} + \right. \\
& - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{2\tilde{u}}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} - 2\tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial\tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{r\theta} - 2\tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} + \right. \\
& \left. \left. - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} - 2\tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial z} \right] \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}}{r} \right). \quad (2.5.13)
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta z}$:

$$\begin{aligned}
& T^{\theta z} + Wi \left[\frac{\partial T^{\theta z}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial z} + \frac{v}{r} T^{rz} - T^{\theta r} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\
& \left. - T^{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - T^{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) - T^{rz} \frac{\partial v}{\partial r} - T^{zz} \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \\
& = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.13), tem-se

$$\begin{aligned}
& (\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t)) + Wi \left[\frac{\partial(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \right. \\
& \quad + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \\
& \quad + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} (\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t)) - (\hat{T}^{\theta r} + \tilde{T}^{\theta r}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& \quad - (\hat{T}^{\theta \theta} + \tilde{T}^{\theta \theta}(r, \theta, z, t)) \frac{1}{r} \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} - (\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t)) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \frac{\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{r} \right) - (\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& \quad \left. - (\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \right] = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial z} + \right. \\
& \quad + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rz} + \frac{\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{rz} - \hat{T}^{\theta r} \frac{\partial W}{\partial r} - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial W}{\partial r} - \hat{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \\
& \quad - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\hat{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial z} + \\
& \quad \left. - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \tilde{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right] = \\
& \quad = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação $T^{\theta z}$ perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{\theta z} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rz} - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\
& \quad - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \\
& \quad \left. - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{rz} - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \tilde{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \tilde{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right] \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right). \quad (2.5.14)
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{zz} :

$$\begin{aligned}
& T^{zz} + Wi \left[\frac{\partial T^{zz}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{zz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{zz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{zz}}{\partial z} - 2T^{rz} \frac{\partial w}{\partial z} + \right. \\
& \quad \left. - 2T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - 2T^{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.14), tem-se

$$\begin{aligned}
& (\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t)) + Wi \left[\frac{\partial(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \right. \\
& \quad + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \\
& \quad - 2(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \\
& \quad - 2(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t)) \frac{1}{r} \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\
& \quad \left. - 2(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \right] = \\
& \quad = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial z} + W \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} + \right. \\
& \quad + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \\
& \quad \left. - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right] = \\
& \quad = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação T^{zz} perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{zz} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \right. \\
& \quad - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial \theta} + \right. \\
& \quad \left. \left. - \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right] \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}. \quad (2.5.15)
\end{aligned}$$

Os termos entre colchetes das equações (2.5.10), (2.5.11), (2.5.12), (2.5.13), (2.5.14) e (2.5.15) são os termos não lineares. E, segundo Schlichting [24] como as amplitudes das perturbações são pequenas, pode-se desprezar os termos não lineares dessas equações. Desta forma, as equações dos tensores não-Newtonianos perturbadas podem ser escritas por:

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{rr} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}, \quad (2.5.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{r\theta} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial z} - \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}}{r} \hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial W}{\partial z} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right), \quad (2.5.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{rz} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta z} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\ \left. - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right), \quad (2.5.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\theta\theta} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \right. \\ \left. - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{2\tilde{u}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} - 2\hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) = \frac{2(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}}{r} \right), \quad (2.5.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\theta z} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rz} - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right), \quad (2.5.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{zz} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \right. \\ \left. - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}. \quad (2.5.21) \end{aligned}$$

As condições de contorno adotadas para o problema do escoamento de Hagen-Poiseuille são dadas por

$$r = 1 : \quad \tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = 0.$$

Estas condições de contorno correspondem à condição de não escorregamento na parede (no-slip).

Além disso, segundo Georgievskii [15] a fim de evitar a formação de vórtices no eixo do tubo, deve-se impor as seguintes condições:

$$r = 0 : \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} = 0, \quad \tilde{v} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} = 0.$$

As equações resultantes (2.5.6)-(2.5.8) e (2.5.16)-(2.5.21) são lineares e os coeficientes das equações não dependem de t , θ e z , então as soluções podem ser buscadas através do método de separação de variáveis, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r, \theta, z, t) &= \bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}, \\ \tilde{v}(r, \theta, z, t) &= \bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}, \\ \tilde{w}(r, \theta, z, t) &= \bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}, \\ \tilde{p}(r, \theta, z, t) &= \bar{p}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}, \\ \tilde{T}(r, \theta, z, t) &= \bar{T}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}.\end{aligned}\tag{2.5.22}$$

Quando o valor de i é igual a $\sqrt{-1}$, pode-se observar que as perturbações se propagam como ondas com frequência ω , comprimento de onda $\lambda_c = \frac{2\pi}{\alpha}$, e velocidade de onda $c = \frac{\omega}{\alpha}$. Além disso, $m \in \mathbf{R}$, α é o número de onda na direção z e as amplitudes e fases das perturbações são representadas por \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , \bar{p} e \bar{T} [11]. Ao somar um número complexo com o seu complexo conjugado, obtém-se o valor da variável apenas no domínio real.

Na prática, resolve-se as equações perturbadas complexas para encontrar os valores de α , θ , ω e \bar{w} , por isso, o complexo conjugado é desprezado ao substituir as variáveis (2.5.22) nas equações perturbadas. Ao substituir as variáveis nas equações de Navier-Stokes perturbadas, obtém-se um novo sistema de equações, onde as derivadas parciais são simplificadas para derivadas ordinárias, pois os termos das equações passam a depender apenas de uma variável.

Equação da Continuidade perturbada:

Da equação da continuidade (2.5.6), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial z} &= 0. \\ \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} [\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}] + \frac{\partial}{\partial z} [\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}] &= 0, \\ \Rightarrow \left[\left(\frac{\bar{u}(r)}{r} + \frac{d\bar{u}(r)}{dr} \right) e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)} \right] + \left[i\frac{m}{r}\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)} \right] + \left[i\alpha\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)} \right] &= 0, \\ \Rightarrow e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)} \left[\left(\frac{\bar{u}(r)}{r} + \frac{d\bar{u}(r)}{dr} \right) + i\frac{m}{r}\bar{v}(r) + i\alpha\bar{w}(r) \right] &= 0, \\ \left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \bar{u}(r) + i\frac{m}{r}\bar{v}(r) + i\alpha\bar{w}(r) &= 0.\end{aligned}$$

Equação da Quantidade de Movimento na direção r perturbada:

Da equação da quantidade de movimento na direção r perturbada (2.5.7), resulta

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + W \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) = \\
= & -\frac{\partial}{\partial r} (\bar{p}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \right) + \right. \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \\
& \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\bar{T}^{rr}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{T}^{\theta r}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{T}^{rz}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{\bar{T}^{\theta\theta}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}}{r}.
\end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento na direção r é dada por

$$\begin{aligned}
-i\omega\bar{u} + i\alpha W\bar{u} + \frac{d\bar{p}}{dr} = & \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{u}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{d^2\bar{u}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2}\bar{u} - \alpha^2\bar{u} + 2i\frac{m}{r^2}\bar{v} \right) + \\
& + \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{rr} + i\frac{m}{r}\bar{T}^{r\theta} + i\alpha\bar{T}^{rz} - \frac{\bar{T}^{\theta\theta}}{r}.
\end{aligned}$$

Equação da Quantidade de Movimento na direção θ perturbada:

Da equação da quantidade de movimento na direção θ perturbada (2.5.8), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) + \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{z\theta}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + W \frac{\partial}{\partial z} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) = \\
= & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{p}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \right) + \right. \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \\
& \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} (\bar{T}^{r\theta}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{T}^{\theta\theta}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{T}^{z\theta}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}).
\end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento na direção θ é dada por

$$\begin{aligned}
-i\omega\bar{v} + i\frac{m}{r}\bar{p} + i\alpha W\bar{v} = & \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{v}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{v}}{dr} + \frac{d^2\bar{v}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2}\bar{v} - \alpha^2\bar{v} + 2i\frac{m}{r^2}\bar{u} \right) + \\
& + \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{r\theta} + i\frac{m}{r}\bar{T}^{\theta\theta} + i\alpha\bar{T}^{\theta z}.
\end{aligned}$$

Equação da Quantidade de Movimento na direção z perturbada:

Da equação da quantidade de movimento na direção z perturbada (2.5.9), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + W \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = & -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{w}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z}. \\ & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) + W \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) + \\ & + W \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) = -\frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{T}^{\theta z}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{T}^{zz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}). \end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento na direção z é dada por

$$\begin{aligned} -i\omega \bar{w} + W' \bar{u} + i\alpha W \bar{w} + i\alpha \bar{p} = & \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2 \bar{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{w}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \bar{w} - \alpha^2 \bar{w} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{rz} + i \frac{m}{r} \bar{T}^{\theta z} + i\alpha \bar{T}^{zz}. \end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{rr} perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano T^{rr} perturbada (2.5.16), tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{rr} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\ \left. - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} (\bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) + \right. \\ & + (\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{(\bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial \theta} + \\ & + W \frac{\partial}{\partial z} (\bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) + (\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial z} \\ & - \frac{2(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{\partial (\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{\partial r} + \\ & \left. - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial (\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial (\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{\partial z} \right) = \\ & = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial (\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{\partial r}. \end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano T^{rr} é dada por

$$\bar{T}^{rr} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{rr} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{rr}}{dr} + i\alpha W \bar{T}^{rr} - \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} i m \bar{v} + \right. \\ \left. - 2\hat{T}^{rz} i \alpha \bar{u} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{u}}{dr}.$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{r\theta}$ perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano T^{rr} perturbada (2.5.17), tem-se

$$\tilde{T}^{r\theta} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial z} - \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}}{r} \hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial W}{\partial z} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right).$$

$$\begin{aligned} & \bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\ & + \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + \\ & + W \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial z} + \\ & - \frac{(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{2(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \hat{T}^{\theta\theta} + \\ & - \hat{T}^{rr} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) - \frac{(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + \\ & - \frac{(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) + \\ & - \hat{T}^{rz} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) + \\ & - \left(\bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) \Big) = \\ & = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) + \frac{(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) \right). \end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano $T^{r\theta}$ é dada por

$$\bar{T}^{r\theta} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{r\theta} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{r\theta}}{dr} + i\alpha W \bar{T}^{r\theta} - \frac{\bar{v}}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{\theta\theta} - \hat{T}^{rr} \frac{d\bar{v}}{dr} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\bar{u}}{r} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{r\theta} \frac{d\bar{u}}{dr} - \hat{T}^{rz} i \alpha \bar{v} + \hat{T}^{\theta\theta} i \frac{m}{r} \bar{u} - i \alpha \hat{T}^{\theta z} \bar{w} \right) = \\ = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(-i \frac{m}{r} \bar{u} + \frac{\bar{v}}{r} - i \alpha \bar{v} \right).$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{rz} perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano T^{rz} perturbada (2.5.18), tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{rz} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta z} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\ \left. - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{T}^{rz}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} (\bar{T}^{rz}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \right. \\ \left. + (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{(\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)})}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + W \frac{\partial}{\partial z} (\bar{T}^{rz}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} + \right. \\ \left. - \frac{2(\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)})}{r} \hat{T}^{\theta z} - (\bar{T}^{rr}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) - \frac{(\bar{T}^{r\theta}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)})}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \right. \\ \left. - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) - (\bar{T}^{rz}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial W}{\partial z} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rz} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) - \hat{T}^{rz} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \right. \\ \left. - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) - \hat{T}^{zz} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \right) = \\ = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \frac{\partial}{\partial r} (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \right). \end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano T^{rz} é dada por

$$\begin{aligned} \bar{T}^{rz} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{rz} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{rz}}{dr} + i\alpha W \bar{T}^{rz} - \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{\theta z} - \bar{T}^{rr} \frac{dW}{dr} - \hat{T}^{rr} \frac{dW}{dr} + \right. \\ \left. - \frac{\bar{T}^{r\theta}}{r} i m W - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \bar{w} i m - \bar{T}^{rz} i \alpha W - \hat{T}^{rz} i \alpha \bar{w} - \hat{T}^{rz} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} i m \bar{u} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{zz} i \alpha \bar{u} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(i \alpha \bar{u} + \frac{d\bar{w}}{dr} \right). \end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta\theta}$ perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta\theta}$ perturbada (2.5.19), tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\theta\theta} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \right. \\ \left. - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{2\tilde{u}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} - 2\hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) = \frac{2(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}}{r} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{T}^{\theta\theta}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)} + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} (\bar{T}^{\theta\theta}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \right. \\
& + (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{(\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)})}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \\
& + W \frac{\partial}{\partial z} (\bar{T}^{\theta\theta}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \\
& + \frac{2(\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)})}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \\
& - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)} - \frac{2(\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)})}{r} \hat{T}^{\theta\theta} + \\
& \left. - 2\hat{T}^{\theta z} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \right) = \frac{2(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \right. \\
& \left. + \frac{(\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)})}{r} \right).
\end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta\theta}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{\theta\theta} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{\theta\theta} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{\theta\theta}}{dr} + iW\alpha \bar{T}^{\theta\theta} + \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{2mi}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \bar{u} + \right. \\
\left. - 2i\alpha \hat{T}^{\theta z} \bar{v} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{im}{r} \bar{v} + \frac{\bar{u}}{r} \right).
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta z}$ perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta z}$ perturbada (2.5.20), tem-se

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{\theta z} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rz} - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\
- \hat{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \\
\left. - \hat{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{T}^{\theta z}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} (\bar{T}^{\theta z}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \right. \\
& + (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial r} + \frac{(\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)})}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \\
& + W \frac{\partial}{\partial z} (\bar{T}^{\theta z}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial z} + \\
& + \frac{(\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)})}{r} \hat{T}^{rz} - (\bar{T}^{\theta r}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial W}{\partial r} + \\
& - \hat{T}^{\theta r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) - \frac{(\bar{T}^{\theta \theta}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)})}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \\
& - \frac{\hat{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \\
& - (\bar{T}^{\theta z}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \\
& - \hat{T}^{\theta z} \frac{(\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)})}{r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \\
& \left. - \hat{T}^{zz} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \right).
\end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta z}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{\theta z} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{\theta z} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{\theta z}}{dr} + iW\alpha \bar{T}^{\theta z} + \frac{\bar{v}}{r} \hat{T}^{rz} - \bar{T}^{\theta r} \frac{dW}{dr} - \hat{T}^{\theta r} \frac{d\bar{w}}{dr} + \right. \\
\left. -im\bar{w} \frac{\hat{T}^{\theta \theta}}{r} - im\bar{v} \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} - i\alpha \bar{w} \hat{T}^{\theta z} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \bar{u} - \hat{T}^{rz} \frac{d\bar{v}}{dr} - \hat{T}^{zz} i\alpha \bar{v} \right) = \\
= \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} im\bar{v} + i\alpha \bar{v} \right).
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{zz} perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano T^{zz} perturbada (2.5.21), tem-se

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{zz} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \right. \\
\left. - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{T}^{zz}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} (\bar{T}^{zz}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \right. \\
& \quad \left. + (\bar{u}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{(\bar{v}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \hat{T}^{zz}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \right. \\
& \quad \left. + W \frac{\partial}{\partial z} (\bar{T}^{zz}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial z} + \right. \\
& \quad \left. - 2(\bar{T}^{rz}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{r} (\bar{T}^{\theta z}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) + \right. \\
& \quad \left. - 2(\bar{T}^{zz}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}) \right) = \\
& \quad = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}(r)e^{i(m\theta+\alpha z-\omega t)}).
\end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano T^{zz} é dada por

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{zz} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{zz} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{zz}}{dr} - 2i\alpha \hat{T}^{rz} \bar{w} + Wi\alpha \bar{T}^{zz} - 2i\alpha \hat{T}^{zz} \bar{w} \right) = \\
= 2 \frac{(1-\beta)}{Re} (i\alpha \bar{w}).
\end{aligned}$$

Portanto, um novo sistema de equações é formado após essas substituições. Logo,

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \bar{u}(r) + i \frac{m}{r} \bar{v}(r) + i\alpha \bar{w}(r) = 0, \quad (2.5.23)$$

$$\begin{aligned}
-i\omega \bar{u} + i\alpha W \bar{u} + \frac{d\bar{p}}{dr} = \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{u}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{d^2\bar{u}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} \bar{u} - \alpha^2 \bar{u} + 2i \frac{m}{r^2} \bar{v} \right) + \\
+ \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{rr} + i \frac{m}{r} \bar{T}^{r\theta} + i\alpha \bar{T}^{rz} - \frac{\bar{T}^{\theta\theta}}{r}, \quad (2.5.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-i\omega \bar{v} + i \frac{m}{r} \bar{p} + i\alpha W \bar{v} = \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{v}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{v}}{dr} + \frac{d^2\bar{v}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} \bar{v} - \alpha^2 \bar{v} + 2i \frac{m}{r^2} \bar{u} \right) + \\
+ \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{r\theta} + i \frac{m}{r} \bar{T}^{\theta\theta} + i\alpha \bar{T}^{\theta z}, \quad (2.5.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-i\omega \bar{w} + W' \bar{u} + i\alpha W \bar{w} + i\alpha \bar{p} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2\bar{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{w}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \bar{w} - \alpha^2 \bar{w} \right) + \\
+ \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{rz} + i \frac{m}{r} \bar{T}^{\theta z} + i\alpha \bar{T}^{zz}, \quad (2.5.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{rr} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{rr} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{rr}}{dr} + i\alpha W \bar{T}^{rr} - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} i m \bar{v} + \right. \\
\left. - 2\hat{T}^{rz} i\alpha \bar{u} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{u}}{dr}, \quad (2.5.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{r\theta} + Wi \left(-i\omega\bar{T}^{r\theta} + \bar{u}\frac{d\hat{T}^{r\theta}}{dr} + i\alpha W\bar{T}^{r\theta} - \frac{\bar{v}}{r}\hat{T}^{rr} - \frac{2}{r}\bar{v}\hat{T}^{\theta\theta} - \hat{T}^{rr}\frac{d\bar{v}}{dr} - \hat{T}^{r\theta}\frac{\bar{u}}{r} + \right. \\
\left. -\hat{T}^{r\theta}\frac{d\bar{u}}{dr} - \hat{T}^{rz}i\alpha\bar{v} + \hat{T}^{\theta\theta}i\frac{m}{r}\bar{u} - i\alpha\hat{T}^{\theta z}\bar{w} \right) = \\
= \frac{(1-\beta)}{Re} \left(-i\frac{m}{r}\bar{u} + \frac{\bar{v}}{r} - i\alpha\bar{v} \right), \quad (2.5.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{rz} + Wi \left(-i\omega\bar{T}^{rz} + \bar{u}\frac{d\hat{T}^{rz}}{dr} + i\alpha W\bar{T}^{rz} - \frac{2}{r}\bar{v}\hat{T}^{\theta z} - \bar{T}^{rr}\frac{dW}{dr} - \hat{T}^{rr}\frac{dW}{dr} + \right. \\
\left. -\frac{\bar{T}^{r\theta}}{r}imW - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r}\bar{w}im - \bar{T}^{rz}i\alpha W - \hat{T}^{rz}i\alpha\bar{w} - \hat{T}^{rz}\frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r}im\bar{u} + \right. \\
\left. -\hat{T}^{zz}i\alpha\bar{u} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(i\alpha\bar{u} + \frac{d\bar{w}}{dr} \right), \quad (2.5.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{\theta\theta} + Wi \left(-i\omega\bar{T}^{\theta\theta} + \bar{u}\frac{d\hat{T}^{\theta\theta}}{dr} + iW\alpha\bar{T}^{\theta\theta} + \frac{2}{r}\bar{v}\hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta}\frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{2mi}{r}\hat{T}^{\theta\theta}\bar{u} + \right. \\
\left. -2i\alpha\hat{T}^{\theta z}\bar{v} \right) = 2\frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{im}{r}\bar{v} + \frac{\bar{u}}{r} \right), \quad (2.5.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{\theta z} + Wi \left(-i\omega\bar{T}^{\theta z} + \bar{u}\frac{d\hat{T}^{\theta z}}{dr} + iW\alpha\bar{T}^{\theta z} + \frac{\bar{v}}{r}\hat{T}^{rz} - \bar{T}^{\theta r}\frac{dW}{dr} - \hat{T}^{\theta r}\frac{d\bar{w}}{dr} + \right. \\
\left. -im\bar{w}\frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} - im\bar{v}\frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} - i\alpha\bar{w}\hat{T}^{\theta z} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r}\bar{u} - \hat{T}^{rz}\frac{d\bar{v}}{dr} - \hat{T}^{zz}i\alpha\bar{v} \right) = \\
= \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r}im\bar{v} + i\alpha\bar{v} \right), \quad (2.5.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{zz} + Wi \left(-i\omega\bar{T}^{zz} + \bar{u}\frac{d\hat{T}^{zz}}{dr} - 2i\alpha\hat{T}^{rz}\bar{w} + Wi\alpha\bar{T}^{zz} - 2i\alpha\hat{T}^{zz}\bar{w} \right) = \\
= 2\frac{(1-\beta)}{Re} (i\alpha\bar{w}). \quad (2.5.32)
\end{aligned}$$

A decomposição em modo normal consiste em realizar uma análise dos modos de perturbação, levando em consideração que as amplitudes presentes nas equações (2.5.23)–(2.5.32) são funções apenas de r . Isso permite considerar os modos nas variáveis θ , z e t .

2.6 Tensor Conformação

O estudo realizado por Hulsén [18] destaca a relevância de impor restrições ao tensor extra-tensão para garantir a boa condição numérica do sistema de equações. Essas restrições são essenciais para evitar o surgimento de instabilidades não lineares devido a erros de aproximação [19].

Uma forma de descrever os modelos viscoelásticos é utilizando o tensor conformação que é dado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(r, \theta, z, t) = \begin{bmatrix} C^{rr} & C^{r\theta} & C^{rz} \\ C^{\theta r} & C^{\theta\theta} & C^{\theta z} \\ C^{zr} & C^{z\theta} & C^{zz} \end{bmatrix},$$

onde este tensor é simétrico e definido positivo. Hulsen [18] demonstrou que essas características são preservadas ao longo da evolução temporal da equação constitutiva quando este for inicializado dessa maneira. Em suma, Hulsen [18] define que o tensor é simétrico e definido positivo por

$$\mathbf{C} - \mathbf{I} = \frac{\lambda}{\eta_p} \mathbf{T}. \quad (2.6.1)$$

Adimensionalizando (2.6.1), tem-se

$$\frac{\lambda}{\eta_p} \mathbf{T} = \frac{\lambda}{\eta_p} \rho U^2 \mathbf{T}^*.$$

Note que $\frac{\lambda}{\eta_p} \rho U^2 = \frac{ReWi}{1-\beta}$. Logo, \mathbf{C} pode ser escrito como

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \frac{ReWi}{1-\beta} \mathbf{T}.$$

Agora, considerando $\xi = \frac{ReWi}{1-\beta}$, pode-se escrever o tensor conformação \mathbf{C} em função da contribuição polimérica \mathbf{T} da seguinte maneira:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I}. \quad (2.6.2)$$

E, ainda, a contribuição polimérica \mathbf{T} em função do tensor conformação \mathbf{C}

$$\mathbf{T} = \xi(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (2.6.3)$$

No presente trabalho, é adotado o fluido Oldroyd-B, o que implica na obtenção da equação constitutiva do tensor conformação \mathbf{C} a partir da equação constitutiva (2.3.1). Assim,

$$\mathbf{T} + \lambda \left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] = 2\eta_p \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right).$$

Adimensionalizando esta equação de forma análoga a adimensionalização das componentes desse tensor na seção 2.4, tem-se que

$$\mathbf{T} + Wi \left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Wi} \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right).$$

Como $\xi = \frac{1-\beta}{WiRe}$. Logo,

$$\frac{1}{Wi} \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} = \xi \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{W_i} \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{uT}) = (\nabla \mathbf{u}) [\mathbf{T} + \xi \mathbf{I}] + [\mathbf{T} + \xi \mathbf{I}] (\nabla \mathbf{u})^T.$$

Agora, substituindo $\mathbf{T} = \xi (\mathbf{C} - \mathbf{I})$, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{W_i} \xi (\mathbf{C} - \mathbf{I}) + \frac{\partial(\xi (\mathbf{C} - \mathbf{I}))}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \xi (\mathbf{C} - \mathbf{I})) = \\ & = (\nabla \mathbf{u}) [\xi (\mathbf{C} - \mathbf{I}) + \xi \mathbf{I}] + [\xi (\mathbf{C} - \mathbf{I}) + \xi \mathbf{I}] (\nabla \mathbf{u})^T \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{\xi}{W_i} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) + \xi \frac{\partial((\mathbf{C} - \mathbf{I}))}{\partial t} + \xi \nabla \cdot (\mathbf{u} (\mathbf{C} - \mathbf{I})) = \\ & = (\nabla \mathbf{u}) \xi \mathbf{C} + \xi \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u})^T. \end{aligned}$$

Dividindo a expressão acima por ξ , tem-se

$$\frac{1}{W_i} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{uC}) = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{C} + \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u})^T.$$

Além disso, como alguns termos são nulos, segue que a equação constitutiva do tensor conformação é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{uC}) - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{C} - \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u})^T = \frac{1}{W_i} (\mathbf{I} - \mathbf{C}). \quad (2.6.4)$$

Substituindo a equação (2.6.2) na equação constitutiva do tensor conformação (2.6.4) obtém-se a equação constitutiva do modelo Oldroyd-B:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I} \right) \right) - (\nabla \mathbf{u}) \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I} \right) + \\ & - \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I} \right) (\nabla \mathbf{u})^T = \frac{1}{W_i} \left(\mathbf{I} - \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I} \right) \right). \end{aligned}$$

Fazendo algumas manipulações algébricas e multiplicando a expressão acima por ξ , obtém-se a equação do modelo constitutivo Oldroyd-B, dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{uT}) - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{T} - \mathbf{T} (\nabla \mathbf{u})^T = \xi \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) - \frac{1}{W_i} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\xi \mathbf{D} - \frac{1}{W_i} [\mathbf{I} - \mathbf{T}]. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Além disso, a equação constitutiva do tensor conformação pode ser escrita como

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{uC}) = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{C} + \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u})^T + \frac{1}{W_i} P(\mathbf{C}), \quad (2.6.6)$$

onde $P(\mathbf{C}) = (\mathbf{I} - \mathbf{C})$, em particular, para o modelo Oldroyd-B. Detalhes sobre o tensor conformação podem ser vistos em [5] e [23].

Assim, as equações da continuidade, quantidade de movimento e equações dos tensores conformação do modelo Oldroyd-B são dadas por

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr}\right) \bar{u}(r) + i\frac{m}{r}\bar{v}(r) + i\alpha\bar{w}(r) = 0, \quad (2.6.7)$$

$$\begin{aligned} -i\omega\bar{u} + i\alpha W\bar{u} + \frac{d\bar{p}}{dr} &= \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{u}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{d^2\bar{u}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2}\bar{u} - \alpha^2\bar{u} + 2i\frac{m}{r^2}\bar{v} \right) + \\ &+ \frac{1-\beta}{ReWi} \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr}\right) \bar{C}^{rr} + i\frac{m}{r}\bar{C}^{r\theta} + i\alpha\bar{C}^{rz} - \frac{\bar{C}^{\theta\theta}}{r} \right], \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

$$\begin{aligned} -i\omega\bar{v} + i\frac{m}{r}\bar{p} + i\alpha W\bar{v} &= \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{v}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{v}}{dr} + \frac{d^2\bar{v}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2}\bar{v} - \alpha^2\bar{v} + 2i\frac{m}{r^2}\bar{u} \right) + \\ &+ \frac{1-\beta}{ReWi} \left[\left(\frac{2}{r} + \frac{d}{dr}\right) \bar{C}^{r\theta} + i\frac{m}{r}\bar{C}^{\theta\theta} + i\alpha\bar{C}^{\theta z} \right], \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

$$\begin{aligned} -i\omega\bar{w} + W'\bar{u} + i\alpha W\bar{w} + i\alpha\bar{p} &= \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2\bar{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{w}}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\bar{w} - \alpha^2\bar{w} \right) + \\ &+ \frac{1-\beta}{ReWi} \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr}\right) \bar{C}^{rz} + i\frac{m}{r}\bar{C}^{\theta z} + i\alpha\bar{C}^{zz} \right], \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

$$-i\omega\bar{C}^{rr} = 2 \left(\frac{d}{dr} + iWiW'\alpha \right) \bar{u} - \left(iW\alpha + \frac{1}{Wi} \right) \bar{C}^{rr}, \quad (2.6.11)$$

$$-i\omega\bar{C}^{r\theta} = i\frac{1}{r}m\bar{u} + \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} + iWiW'\alpha \right) \bar{v} - \left(iW\alpha + \frac{1}{Wi} \right) \bar{C}^{r\theta}, \quad (2.6.12)$$

$$\begin{aligned} -i\omega\bar{C}^{rz} &= \left\{ WiW' \frac{d}{dr} - Wi \frac{d^2W}{dr^2} + i \left[1 + 2Wi^2W'^2 \right] \alpha \right\} \bar{u} + \\ &+ \left(\frac{d}{dr} + iWiW\alpha \right) \bar{w} + W'\bar{C}^{rr} - \left(iW\alpha + \frac{1}{Wi} \right) \bar{C}^{rz}, \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

$$-i\omega\bar{C}^{\theta\theta} = \frac{2}{r}\bar{u} + i\frac{2}{r}m\bar{u} - \left(iW\alpha + \frac{1}{Wi} \right) \bar{C}^{\theta\theta}, \quad (2.6.14)$$

$$\begin{aligned} -i\omega\bar{C}^{\theta z} &= \left\{ WiW' \frac{d}{dr} - \frac{Wi}{r}W' + i \left[1 + 2(Wi)^2(W')^2 \right] \alpha \right\} \bar{v} + i\frac{1}{r}m\bar{w} + \\ &+ W'\bar{C}^{r\theta}, \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

$$\begin{aligned} -i\omega\bar{C}^{zz} &= -4(Wi)^2W'W''\bar{u} + 2 \left\{ WiW' \frac{d}{dr} + i \left[1 + 2(Wi)^2(W')^2 \right] \alpha \right\} \bar{w} + \\ &+ 2W'\bar{C}^{rz} - \left(iW\alpha + \frac{1}{Wi} \right) \bar{C}^{zz}. \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

2.7 Escoamento Base

O escoamento base é conhecido como laminar e totalmente desenvolvido. Para calcular o escoamento no tubo, primeiramente assume-se que todas as variáveis são dependentes apenas do eixo r , com exceção para a pressão cujo gradiente é constante da direção z . O domínio na direção r é compreendido entre $[0, 1]$. De acordo com Batchelor [2] o perfil de velocidade é dado por

$$W(r) = 1 - r^2.$$

Ainda, o escoamento base do modelo constitutivo Oldroyd-B via a formulação do tensor extra-tensão em um tubo segundo Chaudhary *et al.* [8], é dado por

$$\bar{T} = \frac{(1 - \beta)}{Re} \begin{bmatrix} 0 & 0 & W' \\ 0 & 0 & 0 \\ W' & 0 & 2Wi(W')^2 \end{bmatrix}.$$

Além disso, o escoamento base do modelo constitutivo Oldroyd-B via a formulação do tensor conformação em um tubo segundo Petrucci Orefice *et al.* [23], é dado por

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & WiW' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2Wi^2(W')^2 \end{bmatrix}.$$

Vale ressaltar que, neste trabalho, assume-se $m = 0$ na equação (2.5.22), ou seja, a perturbação é considerada axissimétrica. Isso se deve ao fato de que Garg *et al.* [14] foram os primeiros a relatar a instabilidade do fluido viscoelástico modelado por Oldroyd-B em um tubo. Além disso, o tensor conformação foi utilizado na implementação do código LST exposto no próximo capítulo.

Formulação Numérica

Neste capítulo, são apresentados os métodos numéricos utilizados para obter as soluções das equações governantes, através da formulação da Teoria de Estabilidade Linear. De acordo com Schmid e Henningson [26] essa teoria tem como objetivo investigar se uma pequena perturbação adicionada a um escoamento laminar irá se intensificar ou diminuir. Perturbações que se intensificam são frequentemente o precursor de uma transição para o movimento turbulento do fluido. Para isso, as equações que regem o problema são simplificadas considerando um escoamento base laminar estacionário, assumindo uma solução modal, e analisando as taxas de amplificação e as velocidades de fase resultantes do problema de autovalor.

3.1 Método Numérico

Um código Linear Stability Theory (LST) 2D foi implementado e utilizado para analisar a estabilidade temporal do escoamento em um tubo para o fluido viscoelástico modelado por Oldroyd-B. A análise temporal visa determinar a estabilidade de uma perturbação dada a frequência angular real ω . Ao buscar os autovalores deste sistema, é obtido um espectro de autovalores no qual é buscado o autovalor mais estável, que indica se os dados são estáveis ou instáveis com base no valor da parte imaginária de ω . Inicialmente, é realizada uma limpeza para remover todos os modos espúrios e, em seguida, busca-se o valor imaginário mínimo dentro do espectro obtido.

O método da matriz consiste em reescrever o sistema de equações para o modelo viscoelástico Oldroyd-B, a partir das equações (2.5.23) – (2.5.32) ou (2.6.7) – (2.6.16) e resolver o problema de autovalor associado com a análise de estabilidade. Utilizando a técnica de Teoria de Estabilidade Linear, a abordagem numérica pode ser conduzida através da obtenção das matrizes utilizadas na análise de estabilidade.

Primeiramente, Id é uma matriz identidade $m \times n$ e $zero$ também representa uma matriz $m \times n$. O termo $1i$ representa a unidade imaginária de um número complexo que pode ser expresso desta forma no MATLAB. A matriz é composta por blocos, onde cada bloco é representado pelo número de modos de Chebyshev ao quadrado. Em particular, mais detalhes sobre os modos de Chebyshev, pode ser encontrado em [30].

Sendo assim, é preciso escrever as equações (2.5.23) – (2.5.32) ou as equações (2.6.7) – (2.6.16) em formato matricial para encontrar as matrizes L e F , lembrando que, é possível resolver o problema de análise de estabilidade encontrando o autovalor ω_i para a análise temporal, utilizando um método (direto ou iterativo) para calcular o autovalor. Além disso, detalhes sobre o método da matriz pode ser encontrado em [13].

Logo, reescrevendo o sistema de equações na forma matricial como

$$LV = \omega FV,$$

onde para o autovetor V , tem-se

$$V = [\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w} \quad \bar{p} \quad \bar{C}^{rr} \quad \bar{C}^{r\theta} \quad \bar{C}^{rz} \quad \bar{C}^{\theta\theta} \quad \bar{C}^{\theta z} \quad \bar{C}^{zz}].$$

- Análise Temporal

$$\begin{aligned} L[\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w} \quad \bar{p} \quad \bar{C}^{rr} \quad \bar{C}^{r\theta} \quad \bar{C}^{rz} \quad \bar{C}^{\theta\theta} \quad \bar{C}^{\theta z} \quad \bar{C}^{zz}]^T &= \\ = \omega F[\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w} \quad \bar{p} \quad \bar{C}^{rr} \quad \bar{C}^{r\theta} \quad \bar{C}^{rz} \quad \bar{C}^{\theta\theta} \quad \bar{C}^{\theta z} \quad \bar{C}^{zz}]^T. \end{aligned}$$

- Análise Espacial

$$\begin{aligned} L[\bar{u} \quad \alpha\bar{u} \quad \bar{v} \quad \alpha\bar{v} \quad \bar{w} \quad \alpha\bar{w} \quad \bar{p} \quad \bar{C}^{rr} \quad \bar{C}^{r\theta} \quad \bar{C}^{rz} \quad \bar{C}^{\theta\theta} \quad \bar{C}^{\theta z} \quad \bar{C}^{zz}]^T &= \\ = \alpha F[\bar{u} \quad \alpha\bar{u} \quad \bar{v} \quad \alpha\bar{v} \quad \bar{w} \quad \alpha\bar{w} \quad \bar{p} \quad \bar{C}^{rr} \quad \bar{C}^{r\theta} \quad \bar{C}^{rz} \quad \bar{C}^{\theta\theta} \quad \bar{C}^{\theta z} \quad \bar{C}^{zz}]^T. \end{aligned}$$

No presente trabalho, optou-se por realizar somente a análise de estabilidade temporal do escoamento do fluido Oldroyd-B no tubo. Logo, tem-se

$$\begin{aligned} common &= -1i * \alpha * W + be/Re * (D2 + r * D1 - r^2 - \alpha^2 * Id); \\ commonw &= -1i * \alpha * W + be/Re * (D2 + r * D1 - \alpha^2 * Id); \\ v &= 1i * alpha * Id; \\ vv &= 2i/Re * m * r2; \\ vvv &= -4 * Wi^2 * dWdr * d2Wdr2; \\ b &= 1i * Wi * dWdr * alpha; \\ va &= -(1i * \alpha * W + 1/Wi * Id); \\ var &= (1 - be)/Re; \\ varr &= 2 * (D1 + 1i * Wi * dWdr * \alpha); \\ varz &= Wi * dWdr * D1 - Wi * d^2Wdr^2 + 1i * (Id + 2 * Wi^2 * dWdr^2) * \alpha; \\ vazz &= 2 * (Wi * dWdr * D1 + 1i * (Id + 2 * Wi^2 * dWdr^2) * \alpha). \end{aligned}$$

A matriz L é dada por

$$\begin{bmatrix} D1 + r & v & v & zero & zero & zero & zero \\ common & zero & -D1 & var * (D1 + r) & var * v & -var * (r) & zero \\ -dWdr & commonw & -v & zero & var * (D1 + r) & zero & var * v \\ varr & zero & zero & va & zero & zero & zero \\ varz & D1 + b & zero & dWdr & va & zero & zero \\ 2 * r & zero & zero & zero & zero & va & zero \\ vvv & vazz & zero & zero & 2 * dWdr & zero & va \end{bmatrix}.$$

Enquanto que, a matriz F é dada por

$$\begin{bmatrix} \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} \\ -1i * Id & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} \\ \text{zero} & -1i * Id & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} \\ \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & -1i * Id & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} \\ \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & -1i * Id & \text{zero} & \text{zero} \\ \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & -1i * Id & \text{zero} \\ \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & -1i * Id \end{bmatrix}.$$

3.2 Análise de Instabilidades

No Capítulo 2, na formulação apresentada, quando o componente do número de onda α é um número complexo, representado por $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, com β e a frequência ω sendo reais, essa formulação é conhecida como análise espacial.

Porém, quando os elementos do número de onda são números reais e a frequência $\omega = \omega_r + i\omega_i$ é um número complexo, é chamada de análise temporal. A parte real ω_r representa a frequência da perturbação, enquanto a parte imaginária ω_i representa a taxa de amplificação. As perturbações analisadas neste trabalho são não-estacionárias e se propagam como ondas de Tollmien-Schlichting. Dessa forma, a Tabela 3.2.1 apresenta a classificação das instabilidades segundo Mendonça *et al.* [21].

Tabela 3.2.1: Classificação de instabilidades.

Tipo de Análise	Taxa de Amplificação	Amplitude	Classificação
Análise Temporal	$\omega_i < 0$	Decresce	Estável
	$\omega_i = 0$	Constante	Neutro
	$\omega_i > 0$	Cresce	Instável
Análise Espacial	$\alpha_i < 0$	Cresce	Instável
	$\alpha_i = 0$	Constante	Neutro
	$\alpha_i > 0$	Decresce	Estável

Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos para a análise da estabilidade temporal de escoamento de Hagen-Poiseuille para um fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B. Em particular, a investigação é feita através da análise de ondas de Tollmien-Schlichting. Os resultados dessa análise de estabilidade estão apresentados em três subseções, na primeira subseção é realizada a verificação do código LST 2D, na segunda são apresentados alguns resultados da análise da estabilidade linear temporal para o modelo Oldroyd-B e na última subseção é apresentada a verificação do código LST 2D para o fluido modelado por Upper Convected Maxwell (UCM).

4.1 Verificação do Código

Nesta seção é realizada a verificação do código LST 2D implementado para o problema do escoamento de Hagen-Poiseuille incompressível e isotérmico, utilizando o modelo de fluido viscoelástico Oldroyd-B. A verificação foi realizada comparando o código desenvolvido neste trabalho com os resultados da literatura de Schmid e Henningson [25, 26] para o caso de escoamento Newtoniano.

A Figura 4.1.1 ilustra o domínio do escoamento do tubo, sendo R o raio do tubo. Um sistema de coordenadas cilíndricas é utilizado com r, θ e z denotando as direções radial, azimutal e axial, respectivamente.

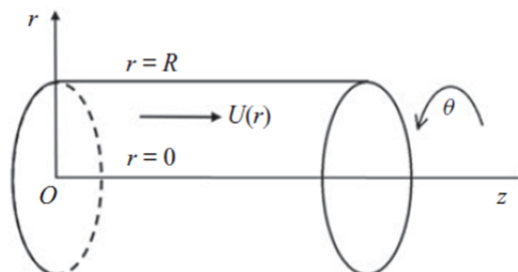
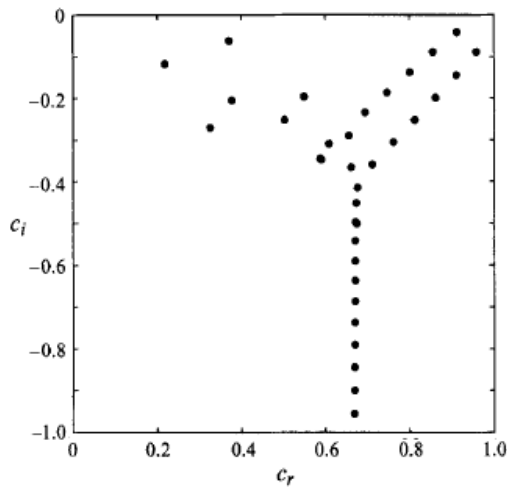


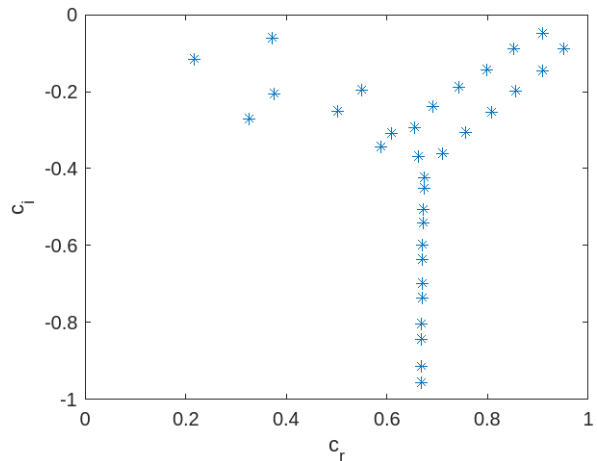
Figura 4.1.1: Figura retirada de [8]

Para a verificação do código LST 2D temporal utilizando o modelo Oldroyd-B foram analisados resultados para diferentes valores da constante α , m e do número de Reynolds (Re), nas equações (2.5.23) – (2.5.32) ou nas equações (2.6.7) – (2.6.16), onde N é o número de modos de Chebyshev, e comparados com os resultados obtidos na literatura [25, 26].

A partir do espectro de autovalores apresentados nas Figuras 4.1.2 e 4.1.3, observa-se uma concordância próxima entre o espectro de autovalores obtido em Schmid e Henningson [25] e Schmid e Henningson [26] para o modelo viscoelástico Oldroyd-B. Sendo assim, a verificação realizada é um indicativo de que o código implementado está apto a simular e analisar a estabilidade de escoamentos tridimensionais com o modelo Oldroyd-B.

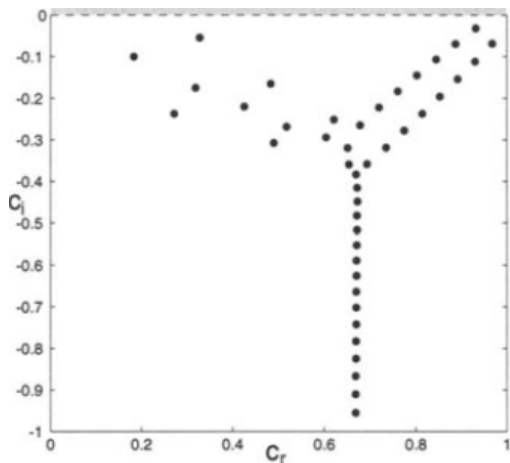


(a) Schmid e Henningson [25].

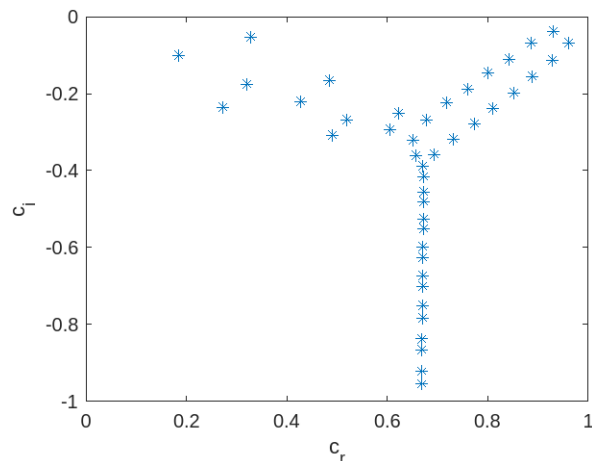


(b) Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.1.2: Espectro de autovalores para os parâmetros $\alpha = 1$, $m = 1$, $Re = 3000$ e $N = 60$.



(a) Schmid e Henningson [26].



(b) Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.1.3: Espectro de autovalores para os parâmetros $\alpha = 1$, $m = 1$, $Re = 5000$ e $N = 60$.

A Figura 4.1.4 exibe diferentes espectros de autovalores para valores de $m = 0$ e $m = 1$, enquanto que, a Figura 4.1.5 apresenta o espectro de autovalores para $m = 2$.

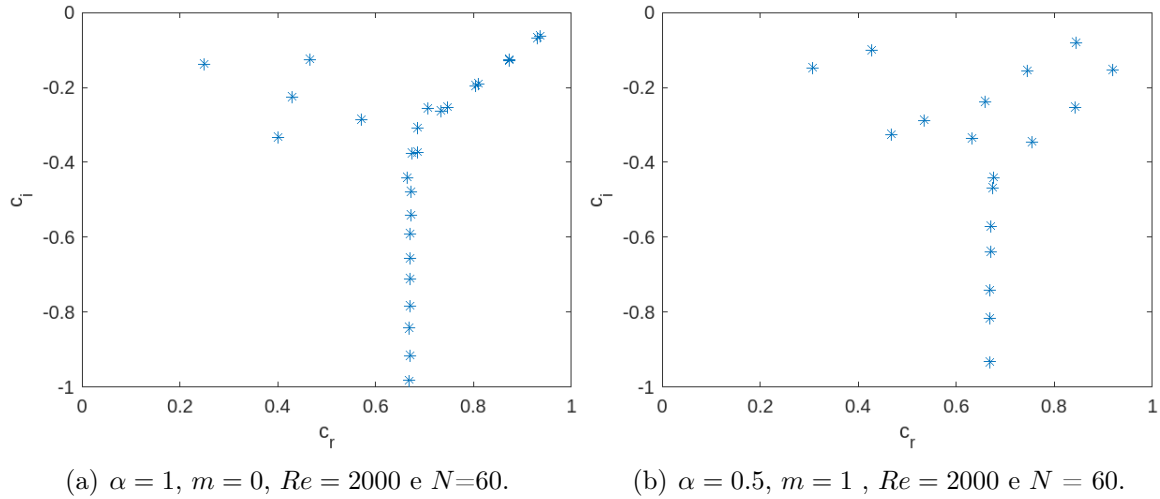


Figura 4.1.4: Espectro de autovalores para os valores de $m = 0$ e $m = 1$.

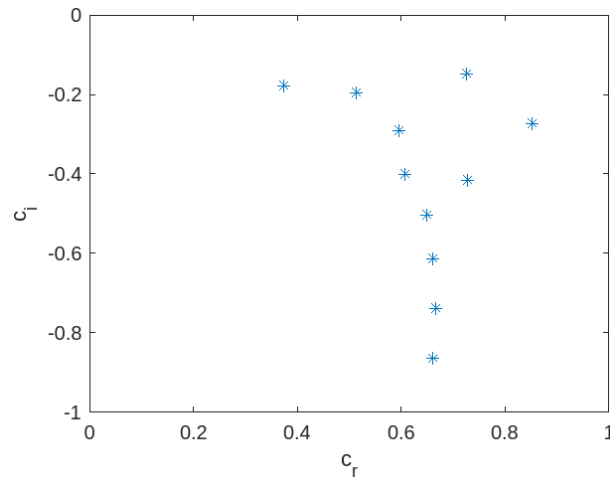


Figura 4.1.5: Espectro de autovalores para os valores de $\alpha = 0.25, m = 2, Re = 2000$ e $N = 60$.

Vale destacar que dependendo do número de modos de Chebyshev utilizados na simulação numérica podem ocorrer erros ao calcular os autovalores. Não obstante, resultando em autovalores errôneos. Erros esses que podem ser de truncamento ou de arredondamento. Por conseguinte, isso afetará o espectro de autovalores de maneira distinta. Na Figura 4.1.6 exemplifica-se o comportamento do erro de truncamento para $N = 32$.

Mais informações sobre os erros de arredondamento e truncamento envolvidos no cálculo do espectro de autovalores para o escoamento em tubo encontra-se em Schmid e Henningson [25].

Diante dos resultados obtidos via simulações numéricas acredita-se que o código implementado é confiável a simular e analisar a estabilidade de escoamentos tridimensionais em tubo com o modelo Oldroyd-B.

Ainda mais, além dos valores de número de Reynolds apresentados acima, pode-se concluir que mesmo para valores de Reynolds altos obtém-se modos estáveis, corroborando assim com a literatura atual. Pois, segundo Schmid e Henningson [26], o escoamento de Hagen-Poiseuille em tubo é estável para qualquer número de Reynolds.

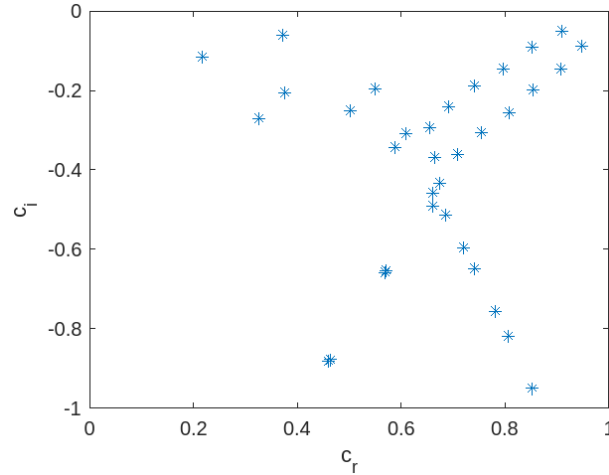


Figura 4.1.6: Espectro de autovalores para os parâmetros $\alpha = 1$, $m = 1$, $Re = 3000$ e $N = 32$.

4.2 Análise de Estabilidade utilizando LST

Esta seção trata da estabilidade temporal do escoamento de Hagen-Poiseuille viscoelástico através do código LST 2D. Nesta análise considera-se ω complexo e α real, conforme a Tabela 3.2.1. Diversas simulações numéricas foram realizadas com o intuito de avaliar as curvas de estabilidade neutra, variando os parâmetros adimensionais para o escoamento em tubo do fluido Oldroyd-B. A análise temporal foi conduzida elaborando curvas de estabilidade para cada conjunto de parâmetros adimensionais. Os parâmetros investigados são o número de Reynolds (Re), o número de Weissenberg (Wi) e a contribuição polimérica do solvente β .

Cada simulação numérica permitiu a determinação de um diagrama de estabilidade neutra, onde os valores de ω_i são iguais a zero. Esses diagramas são apresentados com o número de Reynolds no eixo x e a frequência da perturbação α no eixo y , apresentando um formato característico de “banana”. Conforme mencionado por Chaudhary *et al.*[9], as curvas neutras são loop fechadas, com as taxas de amplificação menores do que zero ($\omega_i < 0$), ou seja, região estável, localizadas fora da curva neutra, e as taxas de amplificação maiores do que zero ($\omega_i > 0$), região instável, no interior da curva neutra.

Diversas simulações numéricas foram realizadas para encontrar os valores de ω_i para diferentes valores de Reynolds e frequência α , resultando em um diagrama de estabilidade para cada conjunto de parâmetros.

Para investigar a influência do número de Weissenberg (Wi) na análise da estabilidade do escoamento de Hagen-Poiseuille do fluido Oldroyd-B, foram realizadas simulações numéricas considerando diferentes valores do número de Reynolds, cinco diferentes valores de β : $\beta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.65$ e diferentes valores de Weissenberg variando de $Wi = 30$ a $Wi = 100$.

Utilizando o código LST 2D temporal, via tensor conformação, para o modelo Oldroyd-B, foram geradas curvas de estabilidade neutra para cada caso, conforme mostram as Figuras 4.2.1 – 4.3.1. Observa-se nessas figuras a comparação das curvas neutras do modelo Oldroyd-B, analisando as regiões de instabilidade, já que não há modos instáveis para o escoamento de Hagen-Poiseuille [26]. Portanto, não é possível apresentar comparações das curvas neutras do fluido viscoelástico com a curva neutra do fluido Newtoniano, como é apresentada na análise de estabilidade linear para o escoamento de Poiseuille [13].

Na Figura 4.2.1 são apresentadas curvas de estabilidade neutra para cinco diferentes valores de Wi : $Wi = 30, 40, 50, 65$ e 80 , mantendo-se fixo o valor de $\beta = 0.1$. Inicialmente, percebe-se que as curvas neutras possuem uma forma ligeiramente diferente das demais discutidas neste estudo. No trabalho de Wan *et al.* [29] foi observado esse padrão de curvas fechadas para $\beta = 0$, correspondente ao modelo de fluido UCM (Upper Convected Maxwell). O autor menciona a presença de duas curvas fechadas para cada valor de Wi nesse contexto. No entanto, não há menção ao comportamento das curvas neutras quando $\beta = 0.1$ na literatura até o presente momento.

Além disso, observando a Figura 4.2.1 para o referido $\beta = 0.1$, apenas a curva de $Wi = 30$ apresenta uma única região de instabilidade. Para $Wi = 40$ tem-se uma região de instabilidade de formato similar as demais curvas para $Wi = 30, 50, 65$ e 80 . No entanto, diferente das demais curvas, quando $Wi = 40$ tem-se mais seis pequenas curvas fechadas, ilustrando seis regiões de instabilidade.

Não obstante, as curvas de estabilidade neutra para $Wi = 50, 65$ e 80 apresentam regiões de instabilidades bem “definidas”, ou seja, nota-se uma primeira região de instabilidade bem próxima uma das outras. Por conseguinte, nota-se também uma segunda região de instabilidade um pouco mais afastada uma da outra, observando uma maior região de instabilidade.

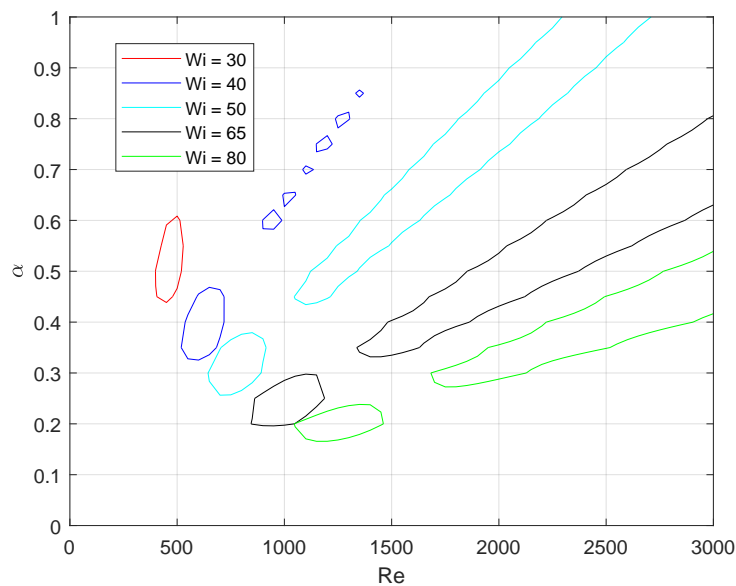


Figura 4.2.1: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.1$ e $Wi = 30, 40, 50, 65$ e 80 .

Seguindo a mesma ideia, para o valor fixo de $\beta = 0.2$ e considerando quatro diferentes valores de Wi : $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , as curvas de estabilidade neutra estão apresentadas na Figura 4.2.2. Nesta figura nota-se que as curvas neutras referentes aos valores de $Wi = 40, 50$ e 65 são bem definidas, e conforme o número de Wi aumenta, mais as curvas vão ficando mais próximas, para maiores valores de Re crítico. Por conseguinte, as regiões de instabilidade tendem a aumentar a partir de $Wi = 65$. Além disso, nota-se uma discrepância na curva para $Wi = 30$, pois, quanto menor o Wi , menos instável é o escoamento, pois a região instável diminui bastante. Porém, ao longo da curva neutra observa-se um diminuição da região de instabilidade acentuada.

Observando a Figura 4.2.3, para um valor de $\beta = 0.3$ fixo, e considerando seis diferentes valores de Wi : $Wi = 30, 40, 50, 65, 80$ e 100 , as curvas de estabilidade neutra são bem

definidas, e conforme o número de Wi aumenta, mais o ramo superior da curva neutra se aproxima do ramo inferior ficando mais próximas, para maiores valores de Re crítico.

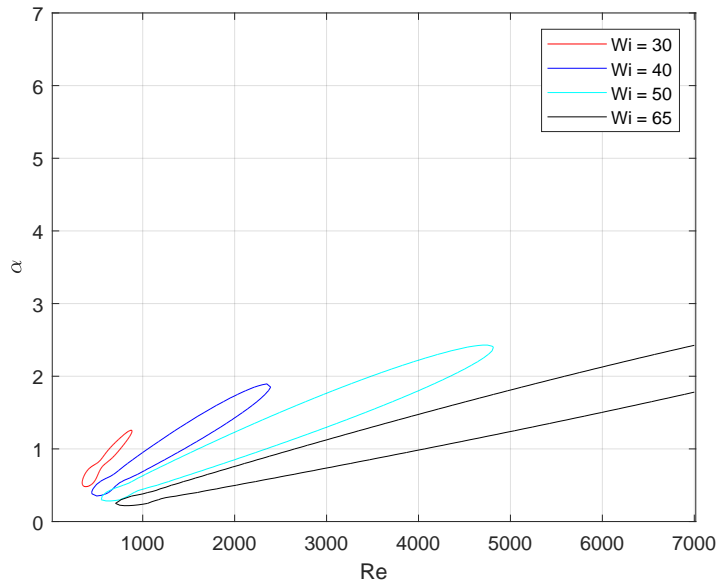


Figura 4.2.2: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.2$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .

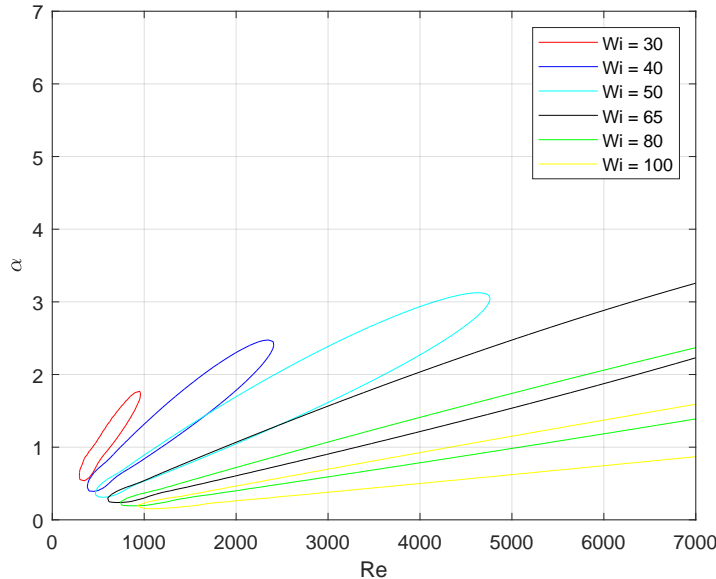


Figura 4.2.3: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.3$ e $Wi = 30, 40, 50, 65, 80$ e 100 .

A Figura 4.2.4 apresenta o comportamento das curvas de estabilidade neutra para os valores de $\beta = 0.5$ fixo e quatro diferentes valores de $Wi = 30, 40, 50$ e 65 . Novamente, nota-se regiões de instabilidade bem definidas. No entanto, percebe-se, um aumento da região de instabilidade para cada curva. Além disso, à medida que o número de Re crítico diminui, as curvas tendem a se deslocar para esquerda. Por conseguinte, diferente da Figura 4.2.3, quando por exemplo $Wi = 65$, a curva é fechada antes do número de Re atingir 7000. E, ainda, o mesmo comportamento se verifica nas curvas para os demais valores de Wi .

Aumentando o valor da constante β , deixando o fluido mais próximo do fluido Newtoniano, considerando agora o valor fixo de $\beta = 0.65$ e quatro diferentes valores de $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , as curvas de estabilidade neutra estão apresentadas na Figura 4.2.5. Como nas figuras anteriores, observa-se regiões de instabilidade bem definidas. No entanto, diferente do que foi apresentado nas Figuras 4.2.3 e 4.2.4, à medida que o número de Re crítico diminui, as curvas neutras deslocam-se abruptamente para à esquerda, ou seja, o escoamento torna-se instável mais a montante quando se pensa na instabilidade temporal. Além disso, o crescimento de perturbações começam mais cedo. Por conseguinte, a sobreposição das curvas tornou-se mais evidente.

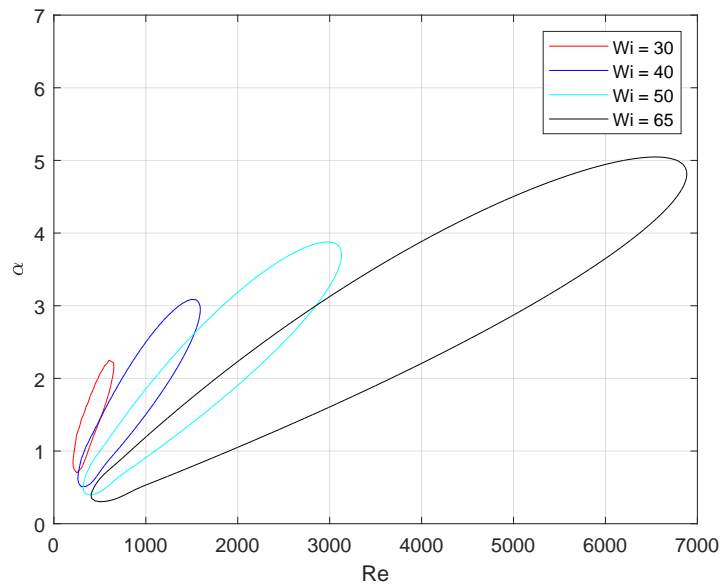


Figura 4.2.4: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.5$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .

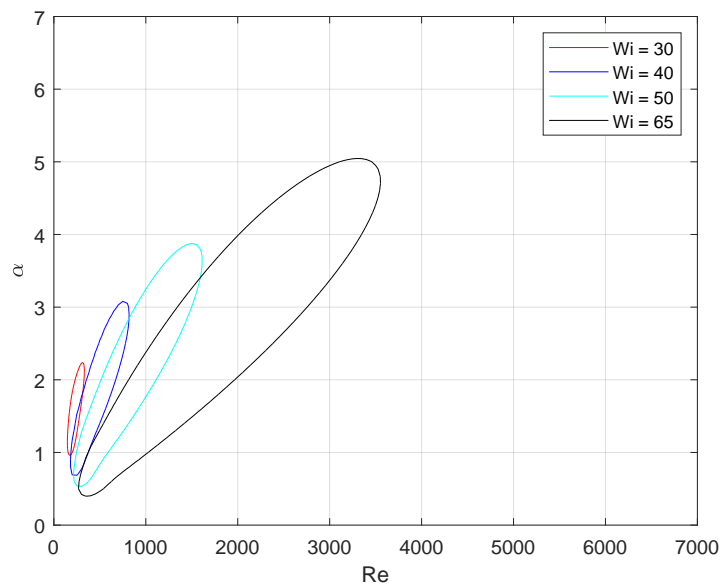


Figura 4.2.5: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.65$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .

Ainda, observando a Figura 4.2.5, para $\beta = 0.65$ fixo, a região de instabilidade para cada curva começa a diminuir, à medida que Re diminui. Isso sugere que à medida que a contribuição do solvente β tende para o fluido Newtoniano ($\beta = 1$), ou seja, $\eta_s = \eta_p$, as regiões de instabilidade tendem a diminuir, até que não se verifiquem. Novamente, corroborando com a literatura de que não existe curva neutra para o fluido Newtoniano, uma vez que todos os modos são estáveis para o escoamento do fluido Newtoniano no tubo, para qualquer número de Reynolds [26].

Além disso, vale ressaltar que esse gráfico é similar ao apresentado por Chaudhary *et al.* [8], comprovando que o método da Matriz é robusto e eficiente para o estudo da análise de estabilidade linear.

Ainda com relação à análise de estabilidade linear temporal para o problema do escoamento de Hagen-Poiseuille utilizando o fluido Oldroyd-B foi verificada a influência da contribuição do solvente β , ou seja, a razão entre a viscosidade do solvente (η_s) pela viscosidade do polímero (η_p) nas simulações numéricas. Nessas simulações foram considerados diferentes valores de Reynolds e β , e seis diferentes valores de Weissenberg: $Wi = 30, 40, 50, 65, 80, 100$. As Figuras 4.2.6 – 4.2.11 mostram os resultados obtidos para as curvas de estabilidade neutra, utilizando os parâmetros mencionados acima.

Na Figura 4.2.6 são apresentadas curvas de estabilidade neutra para quatro diferentes valores de β : $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.65$, mantendo-se fixo o valor de $Wi = 30$. Observa que as curvas neutras para $\beta = 0.3, 0.5$ e 0.65 são bastante similares no formato e, por conseguinte, na região de instabilidade. Outro fator interessante é que quanto menor o valor de β , a região de instabilidade tornou-se cada vez menor, à medida que Re crítico diminui, para $\beta = 0.3, 0.5$ e 65 .

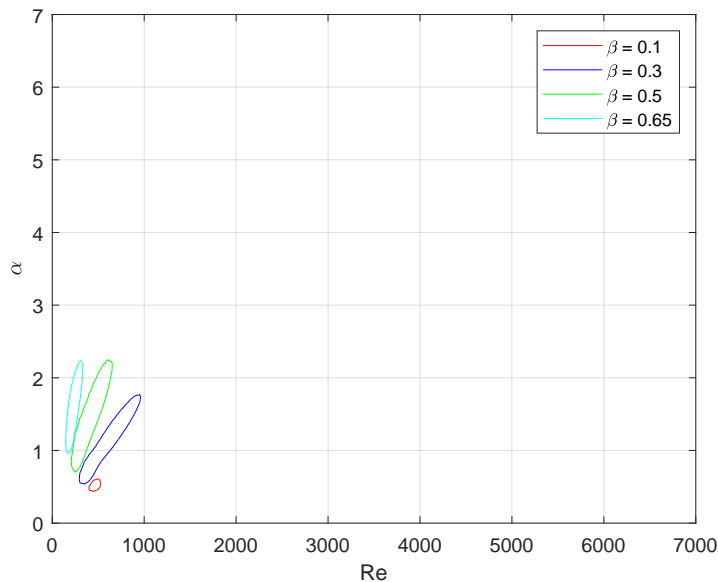


Figura 4.2.6: Curvas neutras para os valores de $Wi = 30$ e $\beta = 0.1, 0.3, 0.5$ e 0.65 .

Seguindo o mesmo raciocínio da análise anterior, a Figura 4.2.7 apresenta as curvas de estabilidade neutra para $Wi = 40$ e quatro diferentes valores de β : $\beta = 0.3, 0.5, 0.65, 0.7$. Novamente, nota-se que as curvas neutras apresentam formas bem definidas e regiões de instabilidade muito similares. Observa-se que para $\beta = 0.5$, a região de instabilidade é maior, comparada com os demais valores de β . Além disso, para $\beta = 0.65$ e $\beta = 0.7$, há uma sobreposição das curvas fechadas, além de uma leve diminuição da região de instabilidade.

Adicionalmente, para $Wi = 40$, nota-se que conforme a contribuição do solvente β diminui é necessário um valor maior de Re crítico para o fechamento da curva e delimitação da região de instabilidade.

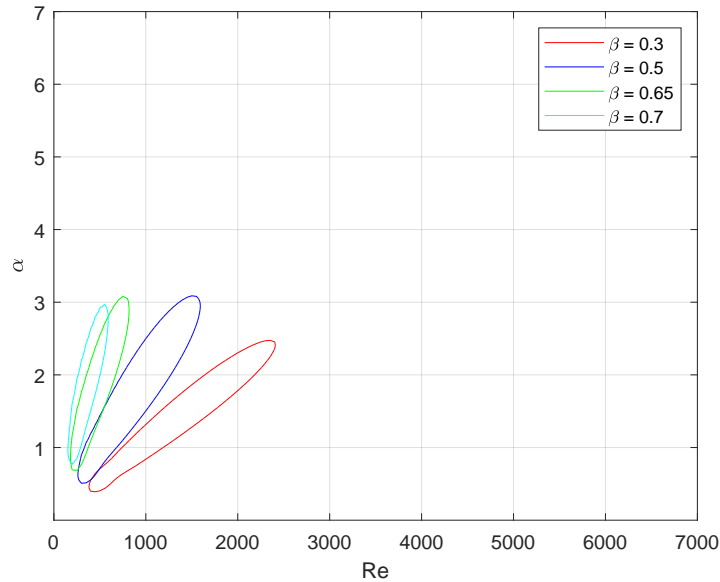


Figura 4.2.7: Curvas neutras para os valores de $Wi = 40$ e $\beta = 0.3, 0.5, 0.65$ e 0.7 .

Na Figura 4.2.8 são apresentadas curvas de estabilidade neutra para três diferentes valores de $\beta = 0.3, 0.5, 0.65$, mantendo-se fixo o valor $Wi = 50$. Observa-se claramente nesta figura a influência da contribuição do solvente β na região de instabilidade. Conforme o valor de β diminui, ou seja, com o aumento da viscosidade polimérica, as curvas se deslocam para a direita, exigindo maiores valores de Re crítico, e apresentando uma maior região de instabilidade. Além disso, a Figura 4.2.8 confirma o conceito de que a contribuição do solvente no fluido é um fator importante para a análise de estabilidade linear.

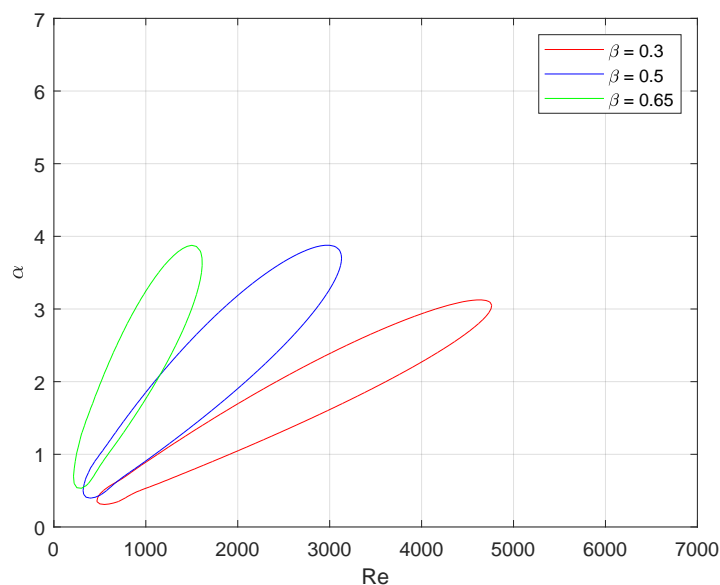


Figura 4.2.8: Curvas neutras para os valores de $Wi = 50$ e $\beta = 0.3, 0.5$ e 0.65 .

Aumentando o valor do número de Wi , agora considerando o valor fixo de $Wi = 65$ e quatro diferentes valores de β : $\beta = 0.3, 0.5, 0.65, 0.9$, a Figura 4.2.9 apresenta as curvas de estabilidade neutra para os parâmetros mencionados acima. Nota-se que a área da região de instabilidade varia significativamente com o valor de β , evidenciando a influência da contribuição do solvente na Teoria de Estabilidade Linear.

E, ainda, observa-se que a região de instabilidade é maior para $\beta = 0.3$, sugerindo que o sistema é mais instável para esta razão entre viscosidades. Enquanto que, para $\beta = 0.9$ a região de instabilidade é menor. Além disso, conforme o valor de β aumenta, a região de instabilidade torna-se cada vez menor e, conseqüentemente, o valor de Re crítico também diminui consideravelmente.

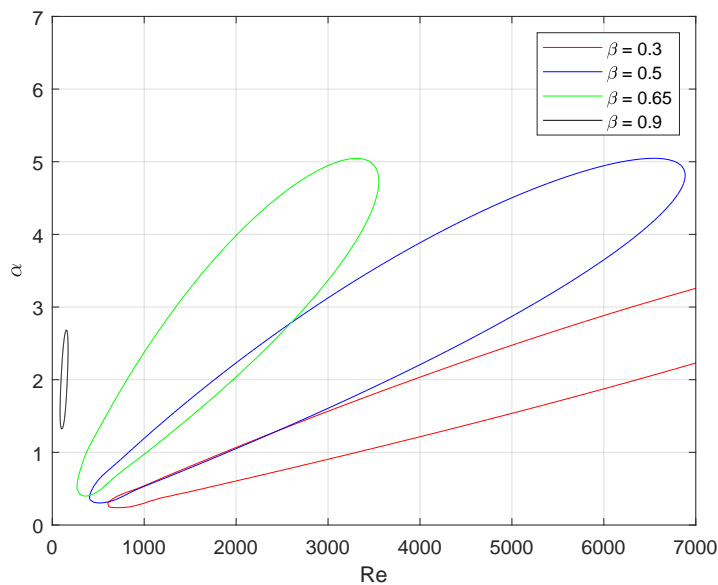


Figura 4.2.9: Curvas neutras para os valores de $Wi = 65$ e $\beta = 0.3, 0.5, 0.65$ e 0.9 .

Na Figura 4.2.10 pode-se observar mais atentamente a influência da contribuição do solvente β mesmo para valores altos de Wi . Considerando os parâmetros de $Wi = 80$ fixo e três diferentes valores de β : $\beta = 0.3, 0.65, 0.9$, observa-se que conforme o valor de β diminui, as curvas neutras se deslocam para a direita, exigindo maiores valores do número de Re crítico, e apresentando uma maior região de instabilidade. Isso significa que, para um determinado conjunto de valores de α e Wi , um valor menor de β (razão entre a viscosidade do solvente pela viscosidade do polímero) requer um número de Re crítico maior para o fechamento da curva, ou seja, uma maior região de instabilidade.

É importante considerar que o valor de Wi pode ter um impacto significativo no formato das curvas neutras e na área da região de instabilidade. Considerando agora um maior valor para o número de Weissenberg, $Wi = 100$ fixo e três diferentes valores de β : $\beta = 0.3, 0.65, 0.9$, as curvas de estabilidade neutra podem ser vistas na Figura 4.2.11. Nota-se que, diferente da Figura 4.2.10 em que a área da região de instabilidade é maior para menores valores de α e β .

Observando a Figura 4.2.11 nota-se que conforme o valor de α diminui, as curvas se deslocam para a direita, exigindo maiores valores de Re crítico. Por conseguinte, quando o valor de β diminui, a região de instabilidade aumenta conforme o número de Re aumenta. Logo, nota-se a influência significativa dos parâmetros β , Wi e Re na forma e variação das curvas de estabilidade neutra temporal. E, não obstante, sua importância para a análise de estabilidade linear.

Vale ressaltar a dificuldade em comparar os resultados obtidos neste trabalho com resultados da literatura, visto que pouco se encontrou sobre curvas de estabilidade neutra temporal para o escoamento no tubo, utilizando o fluido modelado por Oldroyd-B.

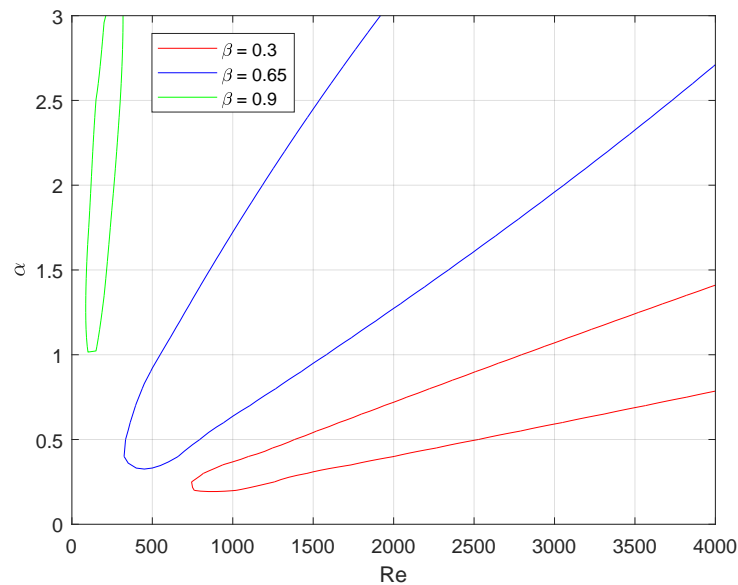


Figura 4.2.10: Curvas neutras para os valores de $Wi = 80$ e $\beta = 0.3, 0.65$ e 0.9 .

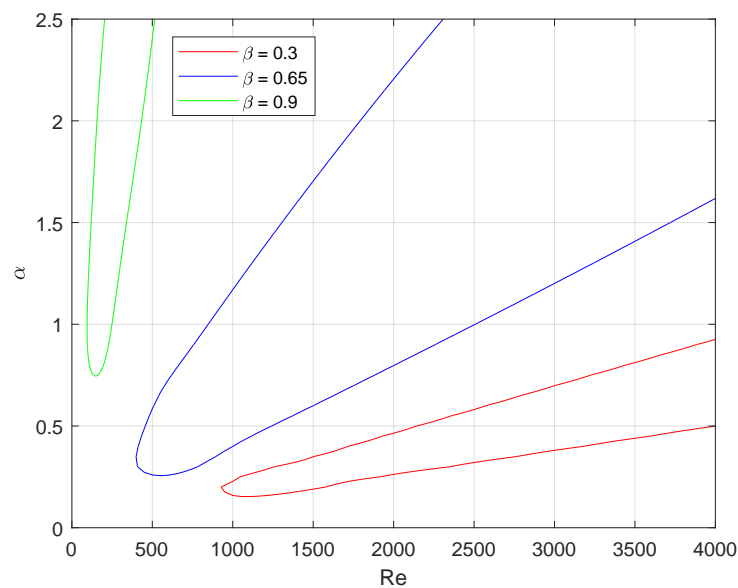


Figura 4.2.11: Curvas neutras para os valores de $Wi = 100$ e $\beta = 0.3, 0.65$ e 0.9 .

4.3 Verificação do Código LST para o fluido Upper Convected Maxwell (UCM)

Com intuito de mostrar maior robustez do código LST 2D desenvolvido para o estudo do escoamento no tubo, para o fluido modelado por Oldroyd-B utilizado neste trabalho, apresenta-se um resultado para o escoamento no tubo, utilizando o modelo viscoelástico convectivo superior de Maxwell (Upper Convected Maxwell, UCM).

Garg *et al.* [14] também foram os primeiros a relatar a instabilidade no escoamento em tubo, para o fluido UCM. Para investigar a estabilidade no escoamento de tubo, com a variação do número de Wi , três curvas neutras são exibidas a fim de confirmar que o código LST 2D também é eficiente para a análise de estabilidade linear, utilizando outros modelos de fluidos viscoelásticos, em particular, o modelo UCM. As mesmas equações que modelam o fluido Oldroyd-B, apresentadas no Capítulo 2, são utilizadas nas simulações numéricas, no entanto, impõe-se $\beta = 0$, que caracteriza o fluido UCM.

Na Figura 4.3.1 são apresentadas curvas de estabilidade neutra para três diferentes valores de Wi : $Wi = 40, 60, 100$, mantendo-se fixo o valor de $\beta = 0$. Observa-se que as curvas neutras também estão na forma de laços fechados, porém em formas mais complexas com vários laços [12]. Para maiores valores do número de Wi , a instabilidade é limitada em uma faixa muito estreita de baixos números de onda, cobrindo uma ampla gama de Re , e ainda, o laço se move em direção a menores valores de Re e número de onda alto, conforme Wi diminui. Os resultados desta figura estão em concordância com os resultados apresentados no trabalho de Wan *et al.* [29], utilizando os mesmos valores de Wi , conforme mostra a Figura 4.3.2.

Ainda, na Figura 4.3.1, observa-se que a elasticidade do polímero (caracterizada por Wi) desempenha um papel de extrema importância na região de instabilidade para o escoamento no tubo, utilizando o fluido UCM.

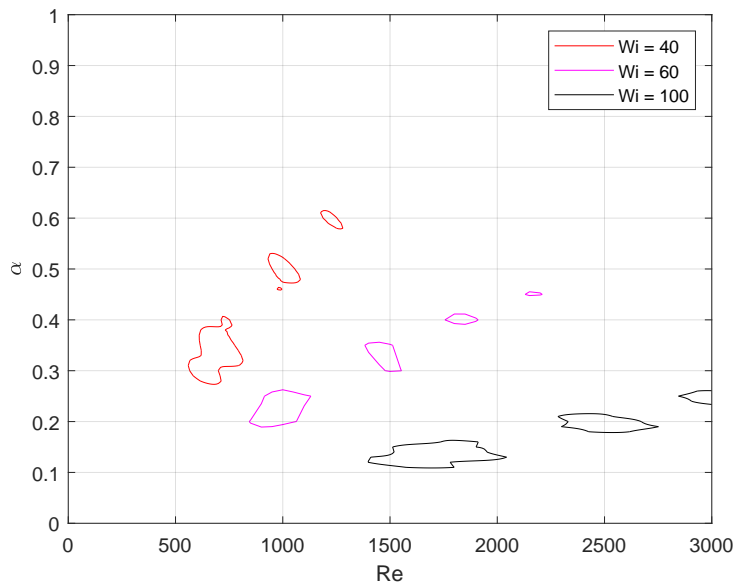


Figura 4.3.1: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0$ e $Wi = 40, 60$ e 100 .

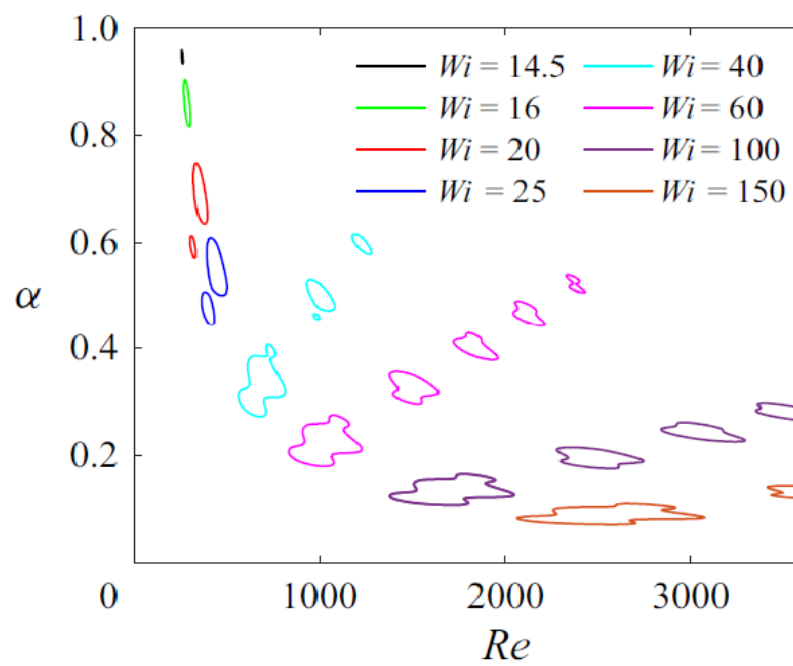


Figura 4.3.2: Curvas neutras para diferentes valores de Wi , conforme Wan *et al.* [29].

Conclusão

No presente trabalho foram apresentadas as equações que modelam escoamentos incompressíveis, isotérmicos, tridimensionais para um fluido não-Newtoniano do tipo viscoelástico, utilizando a equação constitutiva do modelo linear Oldroyd-B. Em seguida, foi investigada a convecção das ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento no tubo, com o objetivo de analisar a estabilidade desse escoamento.

As equações que modelam escoamentos para um fluido não-Newtoniano do tipo viscoelástico foram apresentadas em suas formas tridimensionais e adimensionais, porém só foram analisadas perturbações bidimensionais. Mas, o código (LST) poderia ter sido desenvolvido em 3D. Neste trabalho foi utilizada somente a análise temporal para investigar a estabilidade de escoamentos de fluidos viscoelásticos, utilizando a Teoria de Estabilidade Linear, através das curvas neutras de estabilidade. Diversas simulações numéricas foram realizadas a fim de testar diferentes parâmetros adimensionais do modelo Oldroyd-B.

As curvas neutras de estabilidade no plano (Re, α) foram avaliadas através das perturbações não estacionárias para diferentes valores de parâmetros adimensionais do modelo. Além disso, a influência dos parâmetros adimensionais presentes no modelo Oldroyd-B, tais como β , Re e Wi foram estudados, considerando os valores de Reynolds como $Re = 1000$ a $Re = 7000$ e número de onda $\alpha = 0$ a $\alpha = 7$. Logo, pode-se ver que a elasticidade do polímero, dada pelo número de Weissenberg (Wi), desempenha um papel importante na estabilidade do escoamento. Foram considerados seis diferentes valores de Weissenberg, a saber $Wi = 30, 40, 50, 65, 80$ e 100 , e diferentes valores de β .

Os resultados numéricos mostraram que conforme o valor de Wi aumenta, há um deslocamento da curva neutra para a direita, indicando que o escoamento fica instável para valores maiores do número de Reynolds crítico.

A influência da contribuição do solvente β no fluido também foi estudada para analisar a estabilidade do escoamento de Hagen-Poiseuille do fluido Oldroyd-B. Foram realizadas simulações numéricas considerando sete diferentes valores de β , tais como $\beta = 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.65, 0.7, 0.9$. Os resultados mostraram que para pequenos valores de Wi e de β o escoamento se torna estável. Aumentando Wi , mesmo para β pequeno o escoamento é mais instável.

Portanto, $\beta = \eta_s/\eta_p$ não é o único critério para assumir que o número β se aproximando do fluido Newtoniano o escoamento torna-se estável. Ou seja, não é só uma questão de viscosidade mas também de tempo característico do fluido.

Os resultados numéricos obtidos pela análise de estabilidade, utilizando a Teoria de Estabilidade Linear, demonstraram-se satisfatórios e de extrema relevância, uma vez que é escassa literatura disponível sobre o comportamento das curvas neutras de estabilidade para o escoamento de Hagen-Poiseuille para o fluido Oldroyd-B.

Sendo assim, a principal contribuição científica deste trabalho disponibiliza resultados atuais a partir de uma ferramenta numérica na verificação da estabilidade de escoamentos em tubos utilizando o fluido Oldroyd-B. A relevância deste estudo se estende ao aceite de um artigo à XIV Escola de Primavera de Transição e Turbulência – 2024, explicitando os principais resultados obtidos. Além de ser uma referência para o estudo do comportamento das curvas neutras do fluido Oldroyd-B para o escoamento em tubo, no qual a literatura é escassa sobre este assunto.

Com o objetivo de dar continuidade à pesquisa, propõe-se o estudo e a análise da estabilidade de perturbações tridimensionais em tubos para outros modelos de fluidos viscoelásticos, expandindo o conhecimento nesta área e abrindo caminho para novas descobertas e aplicações.

Referências

- [1] M. A. Alves, P. J. Oliveira, F. T. Pinho. Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 110(1):45–75, 2003.
- [2] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] E. Brasseur, M. M. Fyrillas, G. C. Georgiou, M. J. Crochet. The time-dependent extrudate-swell problem of an Oldroyd-B fluid with slip along the wall. *Journal of Rheology*, 42(3):549–566, 1998.
- [4] R. E. S. Bretas. *Reologia de Polímeros Fundidos*. Editora da UFSCar, 2005.
- [5] B. L. Carreira. Aplicação da transformação núcleo-conformação na estabilidade de escoamentos de fluidos viscoelásticos. Master's thesis, FCT-UNESP, Presidente Prudente, 2020.
- [6] Y. Cengel, J. Cimbala. *Ebook: Fluid Mechanics Fundamentals and Applications (si units)*. McGraw Hill, 2013.
- [7] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Courier Corporation, 2013.
- [8] I. Chaudhary, P. Garg, G. Subramanian, V. Shankar. Linear instability of viscoelastic pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 908:A11, February 2021.
- [9] I. Chaudhary, P. Garg, V. Shankar, G. Subramanian. Elasto-inertial wall mode instabilities in viscoelastic plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 881:119–163, 2019.
- [10] P. G. Drazin, W. H. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2004.
- [11] L. F. Souza, A. C. Brandi, M. T. Mendonça. *Estabilidade de Escoamentos de Fluidos não-Newtonianos*, volume 10. ABCM, São José dos Campos, 2016.
- [12] K. Fujimura, R. E. Kelly. Degenerate bifurcation in stably stratified plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 331:261–282, 1997.
- [13] L. J. S. Furlan. *Linear stability theory applied to three-dimensional viscoelastic fluid flows*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2022.
- [14] P. Garg, I. Chaudhary, M. Khalid, V. Shankar, G. Subramanian. Viscoelastic pipe flow is linearly unstable. *Physical Review Letters*, 121(2):024502, 2018.

- [15] D. Georgievskii. A generalized analysis of perturbation patterns for the Poiseuille flow in a tube. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 70:86–91, 07 2015.
- [16] E. S. Gervazoni. Análise de estabilidade linear de escoamentos bidimensionais do fluido Oldroyd-B. Master’s thesis, FCT-UNESP, Presidente Prudente, 2016.
- [17] P. Huerre, P. Monkewitz. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22(1):473–537, 1990.
- [18] M. A. Hulsen. Some properties and analytical expressions for plane flow of Leonov and Giesekus models. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 30(1):85–92, 1988.
- [19] M. A. Hulsen. A sufficient condition for a positive definite configuration tensor in differential models. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 38(1):93–100, 1990.
- [20] M. A. Martins. Análise da qualidade de tensões obtidas na simulação de escoamentos de fluidos viscoelásticos usando a formulação log-conformação. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.
- [21] M. T. Mendonça, M. A. F. Medeiros. Estabilidade de Escoamentos Laminares: Teoria linear. *ABCM, Uberlândia*, 2000.
- [22] A. Meseguer, L. Trefethen. Linearized pipe flow to Reynolds number 10^7 . *Journal of Computational Physics*, 186(1):178–197, 2003.
- [23] A. P. Orefice, G. Coppola, L. de Luca. Linear stability analysis of pipe Poiseuille flow for an Oldroyd-B fluid. In *APS Division of Fluid Dynamics Meeting Abstracts*, pages M30–009, 2013.
- [24] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, 1979.
- [25] P. J. Schmid, D. S. Henningson. Optimal energy density growth in hagen–poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 277:197–225, 1994.
- [26] P. J. Schmid, D. S. Henningson. *Stability and Transition in Shear Flows*. New York: Springer, 2001.
- [27] L. F. Souza, M. T. Mendonça, M. A. F. Medeiros. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar–turbulent transition studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48(5):565–582, 2005.
- [28] M. Wadiah. On linear three-dimensional stability of pipe Poiseuille flow. In V. V. Kozlov, editor, *Laminar-Turbulent Transition*, pages 207–213. Springer Berlin Heidelberg, 1985.
- [29] D. Wan, G. Sun, M. Zhang. Subcritical and supercritical bifurcations in axisymmetric viscoelastic pipe flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 929:A16, 2021.
- [30] A. J. Weideman, S. C. Reddy. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 26(4):465–519, 2000.