unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

MESTRADO

Estabilidade e Controle de Sistemas Não-Liminares com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Maurílio Fábio Rodrigues Catharino

1210001522

Ilha Solteira - SP

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

Universidade Estadual Paulista – UNESP
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – FEIS
Departamento de Engenharia Elétrica – DEE
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Estabilidade e Controle de Sistemas Não-Lineares com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista – UNESP, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Maurílio Fábio Rodrigues Catharino
Engenheiro Eletricista – FEIS/UNESP

Orientador: **Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira** – FEIS/UNESP

Ilha Solteira-SP, Abril de 2004

BCpIS - FEIS - UNESP

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP-Ilha Solteira

Catharino, Maurílio Fábio Rodrigues

C361e Estabilidade e controle de sistemas não-lineares com modelos Fuzzy Takagi-Sugeno / Maurílio Fábio Rodrigues Catharino. – Ilha Solteira : [s.n], 2004

92 p.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2004

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Bibliografia: p. 90-92

1. Controle automático. 2. Sistemas difusos. 3. Estabilidade. 4. Teoria do controle não-linear.

Estabilidade e Controle de Sistemas Não-Lineares com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Maurilio Fábio Rodrigues Catharino

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA - CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

COMISSÃO EXAMINADORA:

1210001522

Prof. Dr. Aparecido Augusto de Carvalho
Coordenador do Programa de Pós–Graduação em Engenharia Elétrica

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira – orientador

Prof. Dr. Hilton Cleber Pietrobom

Prof. Dr. Edvaldo Assunção

Proc. 063/04-UPD 15

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"
SERVIÇO TÉC. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO

DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
14.09.04	30.09.04
REGISTRADO POR	TOMBO
Aiza	Te. 1522
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Doação Autor R$10,00	C361e

Ilha Solteira-SP, abril de 2004

Ce sys 226509
sys 56565
30405009

BCnIS - FEIS - UNESP

Dedico aos meus pais Antonio e Olga, cujo exemplo de honestidade e trabalho tem sido um norteador para a minha vida.

BCpIS - FEIS - UNESP



Agradecimentos

Agradeço a Deus, fonte de vida e sabedoria infinita.

Aos meus pais Antonio e Olga e aos meus irmãos, por tudo que eles representam para mim e que, mesmo à distância, têm me apoiado em todos os momentos.

Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pela orientação, ajuda e incentivo, pela paciência e também pelo valor de seus conselhos e ensinamentos humanos.

Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pelas suas dicas de organização, apoio e pelos conselhos sempre manifestado.

Aos professores, funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica e da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, aos amigos do grupo de pesquisa em controle e à todos os outros, cujos nomes não citarei, pelo motivo já consagrado do possível esquecimento de alguns, e também a todos que direta ou indiretamente, consciente ou inconscientemente, contribuíram para a concretização deste trabalho, sintam-se contemplados pelos meus sinceros agradecimentos impregnados com a mais pura honestidade.

Finalmente, à CAPES, pelo apoio financeiro.



"A atividade da engenharia, enquanto permanecer atividade, pode levar a criatividade do homem a seu grau máximo; mas, assim que o construtor pára de construir e se entrincheira nas coisas que fez, as energias criativas se congelam, e o palácio se transforma em tumba."

Marshall Berman

"A vitalidade é demonstrada não apenas pela persistência, mas pela capacidade de começar de novo."

F. Scott Fitzgerald

unesp

Resumo

São apresentadas condições adicionais de estabilidade complementando métodos existentes na literatura. É apresentado também um estudo comparativo das condições para a estabilidade de sistemas dinâmicos não-lineares, contínuos e discretos no tempo, descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Análises teóricas e simulações confrontam métodos recentes de estabilidade propostos na literatura. Estas análises validam métodos existentes, fornecendo assim resultados significativos descritos pelos critérios de estabilidade visando problemas de projetos de sistemas de controle. Simulações digitais ilustram este fato. Para isso sistemas não-lineares são representados pelos modelos fuzzy propostos por Takagi-Sugeno. Adicionalmente, as análises de estabilidade e problemas de projetos de sistemas de controle são descritos como a solução de Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, Linear Matrix Inequalities (LMIs)), que podem ser resolvidos eficientemente por técnicas de programação convexa. As técnicas de projeto também permitem a especificação da resposta transitória através da taxa de decaimento e a especificação de restrições nos sinais de controle e nas saídas. O projeto e a simulação do controle de um pêndulo invertido ilustram a aplicação de condições relaxadas de estabilidade para sistemas não-lineares.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Abstract

Additional conditions for the study of the stability of nonlinear systems are presented, given by fuzzy models, complementing existent methods in the literature. It is also described a comparative study, with theoretical analysis and digital simulations of the conditions for the quadratic stability of nonlinear continuous and discrete-time dynamic systems, described by fuzzy models Takagi-Sugeno, available in the literature. Additionally, the analysis of stability and problems of design of control systems are described as the solution of LMIs (Linear Matrix Inequalities), that can be efficiently solved by convex programming techniques. The design methods also allow the specification of the decay rate, constraints on control input and output, also described by LMIs. Finally, one of the proposed methods system is applied in the control of an inverted pendulum.

Lista de Figuras

2.1 Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TSK. 7

3.1 Exemplo de um conjunto de 4 regras fuzzy: $\alpha_1(z_1(t)), \alpha_2(z_1(t)), \alpha_3(z_1(t)), \alpha_4(z_1(t)) \in [0,1]$ e $\alpha_1(z_1(t)) + \alpha_2(z_1(t)) + \alpha_3(z_1(t)) + \alpha_4(z_1(t)) = 1$. 14

4.1 (2 Modelos) Área factível do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("o") e área factível do método proposto em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por ("·"). 38

4.2 (3 Modelos) Área factível do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("o") e área factível do método proposto em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por ("·"). 38

4.3 (2 Modelos) Área factível do método proposto em Xiaodong e Qingling (2003), Teorema 10, indicada por ("o") e área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por ("·"). 40

4.4 (3 Modelos) Área factível do método proposto em Xiaodong e Qingling (2003), Teorema 10, indicada por ("o") e área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por ("·"). 40

4.5 (2 Modelos) Área factível do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("o") e área factível do método proposto em Teixeira et al (2000), Teorema 1, indicada por ("·"). 41

4.6 (3 Modelos) Área factível do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("o") e área factível do método proposto em Teixeira et al (2000), Teorema 1, indicada por ("·"). 41

4.7 (3 Modelos) Área factível do método descrito em Teixeira et al (2000), Teorema 1, indicada por ("o") e área factível do método proposto no Teorema 22, indicada por ("·"). 44

4.8 (3 Modelos) Área factível do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("o") e área factível do método no Teorema 22, indicada por ("·"). . 44

unesp

4.9 (3 Modelos) Área factível do Teorema 5, descrito em Tuan et al (2001) indicada por ("o") e área factível do método proposto no Teorema 23, indicada por ("·"). 46

4.10 (3 Modelos) Área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por ("o") e área factível do método proposto no Teorema 23, indicada por ("·"). 46

4.11 (2 Modelos) Área factível total do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("o") e área factível total do método proposto no Teorema 13 desta dissertação, indicada por ("·"). 47

4.12 (2 Modelos) Área factível total do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por ("o") e área factível total do método proposto nos Teoremas 13, 17 e 18, descritos na Seção 3.2 indicada por ("·"). 47

4.13 Relação de factibilidade entre os teoremas em questão, com base nas análises numéricas realizadas (r=2 modelos). 47

4.14 Relação de factibilidade entre os teoremas em questão, com base nas análises numéricas realizadas ($r > 2$ modelos). 47

4.15 (2 Modelos) Área factível do método proposto na Seção 3.2, Teorema 11 e em Teixeira et al. (2000), indicada por ("o") e área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 8, indicada por ("·"). 50

4.16 (3 Modelos) Área factível do método proposto na Seção 3.2 (caso discreto do Teorema 5), Teorema 11 indicada por ("o") e área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 8, indicada por ("·"). 50

4.17 (2 Modelos) Área factível do Teorema 12 (caso discreto proposto na Seção 3.2 e baseado em Xiaodong e Qingling (2003)) indicada por ("o") e área factível do método proposto em Teixeira et al. (2003), Teorema 8, indicada por ("·"). 54

4.18 (3 Modelos) Área factível do Teorema 12 (caso discreto proposto na Seção 3.2 e baseado em Xiaodong e Qingling (2003)) indicada por ("o") e área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 8, indicada por ("·"). 54

4.19 (2 Modelos) Área factível do método proposto no Teorema 11 (caso discreto do teorema descrito em Tuan et al., 2001), indicada por ("o") e área factível do método apresentado em Teixeira et al. (2000), indicada por ("·"). 55

4.20 (3 Modelos) Área factível do método apresentado no Teorema 11 (caso discreto do teorema descrito em Tuan et al., 2001), indicada por ("o") e área factível do método proposto em Teixeira et al. (2000), Teorema 2, indicada por ("·") e . . . 55

4.21 (3 Modelos) Área factível do método descrito em Teixeira et al. (2000), Teorema 1, indicada por ("o") e área factível do método proposto no Teorema 27, indicada por ("·"). 59

4.22 (3 Modelos) Área factível do método apresentado no Teorema 11 (caso discreto do Teorema 5), indicada por ("∘") e área factível do método proposto no Teorema 27, indicada por ("·"). 59

4.23 (3 Modelos) Área factível total do Teorema 11 (caso discreto do teorema proposto em Tuan et al (2001)) indicada por ("∘") e área factível total do método proposto nesta dissertação, Teorema 28, indicada por ("·"). 60

4.24 (3 Modelos) Área factível total do método proposto em Teixeira et al. (2003), Teorema 8, indicada por ("∘") e área factível total do método proposto nesta dissertação, Teorema 28, indicada por ("·"). 60

4.25 Relação de factibilidade entre os teoremas em questão, com base nas análises numéricas realizadas. (r=2 modelos). 61

4.26 Relação de factibilidade entre os teoremas em questão, com base nas análises numéricas realizadas ($r > 2$ modelos). 61

5.1 Pêndulo invertido sobre um carro. 68

5.2 Funções de pertinência para as regras 1 e 2 da planta. 70

5.3 Respostas de $x_1(t)$ e $u(t)$ para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$ e considerando-se os casos: apenas estabilidade (linha tracejada); apenas taxa de decaimento (linha contínua); taxa de decaimento e restrição na entrada (linha pontilhada). . 72

5.4 Respostas de $x_3(t)$ e $u(t)$ para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$ e considerando-se os casos: estabilidade e restrição na entrada (linha tracejada); estabilidade, restrição na entrada e restrição na saída (linha contínua). 74

Sumário

1 Introdução 1

2 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno 4

3 Reguladores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno 12

3.1 Condições para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy 13

3.2 Condições Adicionais para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy 21

4 Análise Comparativa dos Critérios de Estabilidade 32

4.1 Sistemas Fuzzy Contínuos (SFC) 32

4.1.1 Caso 1: Teorema 5 e Teorema 6 32

4.1.2 Caso 2: Teorema 10 e Teorema 6 39

4.1.3 Caso 3: Teorema 1 e Teorema 5 40

4.1.4 Caso 4: Teoremas da Seção 3.2 e Teorema 5 46

4.2 Sistemas Fuzzy Discretos (SFD) 48

4.2.1 Caso 1: Teorema 8 e Teorema 11 48

4.2.2 Caso 2: Teorema 12 e Teorema 8 50

4.2.3 Caso 3: Teorema 2 e Teorema 11 54

5 Projeto de Reguladores Fuzzy com LMIs 62

5.1 Taxa de Decaimento 64

5.2 Restrição da Entrada 66

5.3 Restrição da Saída 67

5.4 Exemplos de Aplicação 68

6 Conclusões **75**

A Demonstração do Lema 7 **76**

B Demonstração do Teorema 11 **77**

C Demonstração do Teorema 12 **81**

D Restrição nos Vetores de Entrada e Saída da Planta **83**

D.1 Restrição no Vetor de Entrada 83

D.2 Restrição no Vetor de Saída 86

E Complemento de Schur **88**

Referências Bibliográficas **89**

Capítulo 1

Introdução

O controle de sistemas não-lineares é um assunto que tem despertado grande interesse dos pesquisadores. Técnicas de controle clássicas (controladores proporcionais, PD, PID) são baseados em modelos linearizados dos sistemas físicos, o que representa perda de informações, que muitas vezes são importantes para o funcionamento da planta com altos níveis de exigência de desempenho. Atualmente a utilização do denominado controle inteligente utilizando a teoria de sistemas nebulosos (mais conhecido como sistemas fuzzy) tem aberto uma nova perspectiva no tratamento de sistemas não-lineares e no projeto de seus controladores (Takagi e Sugeno, 1985). Muitos outros trabalhos foram desenvolvidos seguindo essa linha de pesquisa na tentativa de desenvolver um controle mais versátil e robusto. Com isso, o controle com lógica fuzzy tem despertado um crescente interesse na comunidade científica nos últimos anos. A teoria sobre sistemas fuzzy teve início em 1965, com Lofti A. Zadeh (Zadeh, 1965). Na década de 60, esta teoria foi aceita por parte e rejeitada por um outro grupo de pesquisadores, que alegavam que o princípio de "fuzzificação" era contra os princípios da base científica (Wang, 1997). Na década de 70 foram obtidos avanços significativos na área, por exemplo, o método de controle proposto por Mandani e Assilian (Mandani e Assilian, 1975). Esta metodologia foi aplicada com sucesso, em 1978, por Holmblad e Ostergaard (Wang, 1997), no controle de um processo de produção de cimento; esta é considerada a primeira aplicação em escala industrial dos controladores fuzzy. Na década de 80 os engenheiros japoneses, contrariamente aos engenheiros dos Estados Unidos, rapidamente verificaram que os controladores fuzzy eram facilmente projetados e propiciavam um excelente desempenho em muitas aplicações. Em 1985, Takagi e Sugeno propuseram os modelos fuzzy, agora conhecidos como Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno (Takagi e Sugeno, 1985), que serão abordados com profundidade nas próximas seções. Nesta década sugiram várias aplicações práticas dos controladores fuzzy, por exemplo, em metrôs, robôs, carros (motor, transmissão, freio, suspensão, etc.), máquinas de lavar roupas, fábricas de cimento e outros. Na década de 90, ocorreu o primeiro congresso na área de fuzzy, patrocinado pelo IEEE e cresceu de forma significativa o número de pesquisadores na área. Atualmente a literatura especializada mostra que a importância dos sistemas fuzzy é reconhecida por grande parte da comunidade científica da área de controle e os resultados disponíveis permitem, em vários casos, a análise de estabilidade, resposta transitória e robustez dos controladores projetados. Na nossa opinião, os bons

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

resultados da análise teórica no estudo do comportamento de sistemas de controle fuzzy, utilizando ferramentas disponíveis sobre os sistemas dinâmicos não-lineares, por exemplo as funções de Lyapunov, são as principais motivações para o crescimento das pesquisas sérias na área.

Normalmente, o primeiro passo no projeto de um sistema de controle é a construção de um "modelo verdadeiro", ou melhor, um "modelo de simulação" do sistema dinâmico que será controlado. Este modelo será utilizado nas simulações para verificar o desempenho do regulador projetado e deve incluir todas as características relevantes do processo. Geralmente, o modelo de simulação é muito complicado para o projeto de sistemas de controle. Assim, necessita-se de um modelo simplificado, denominado "modelo de projeto", vide Friedland (1996) para maiores detalhes. O modelo de projeto deve capturar as características essenciais do processo. A técnica mais comum para a obtenção de um modelo de projeto para plantas não-lineares é sem dúvida a linearização da planta em um ponto de operação de interesse. Com este método o modelo de projeto é em geral um sistema linear invariante no tempo e o projeto de reguladores é relativamente simples em muitos casos. Entretanto, este modelo de projeto descreve bem a dinâmica do sistema somente em uma certa vizinhança em torno do ponto de operação no qual o sistema foi linearizado. Assim, nos casos onde o sistema pode operar em regiões distantes do ponto de operação, este modelo de projeto não é, em geral, adequado. Neste caso deve-se adotar um modelo de projeto mais sofisticado, que considere adicionalmente a dinâmica da planta em regiões distantes do ponto de operação mencionado. Uma possível solução para este problema é a representação da planta não-linear por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) ou Takagi-Sugeno-Kang (T-S-K) (Takagi e Sugeno, 1985), (Sugeno e Kang, 1988). A idéia destes modelos consiste da descrição aproximada de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos lineares invariantes no tempo locais, que descrevem aproximadamente o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Desta forma, pode-se interpretar a técnica tradicional de linearização em apenas um ponto de operação como um caso particular dos modelos fuzzy T-S-K, consistindo apenas de um modelo local. Esta classe de modelos de projeto permite que o engenheiro utilize o seu conhecimento sobre o sistema que vai ser controlado, na definição do número dos modelos locais e dos pontos ou regiões nas quais estes modelos locais serão definidos.

O modelo global do sistema é obtido através da combinação fuzzy destes modelos lineares locais. A idéia é que para cada modelo linear local seja projetado um controle de realimentação linear. O regulador global resultante, que é em geral não-linear, é uma combinação fuzzy de cada regulador linear individual.

Mais significativamente, problemas como as análises de estabilidade e o projeto de controle são reduzidos a problemas descritos por LMIs (Linear Matrix Inequalities) (Boyd et al., 1994). Numericamente, as soluções de LMIs, quando existem, podem ser obtidas muito eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas, disponíveis na literatura de programação matemática (Boyd et al., 1994). Desta forma, a solução encontrada para tais problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar soluções para o problema original.

Durante a última década o controle fuzzy tem atraído grande atenção e muitas aplicações têm sido feitas, por exemplo, no projeto de novos sistemas de controle para automóveis (Will



et al., 1997), controle de elevadores de alta velocidade (Tanaka, Nishimura e Wang, 1998), na detecção e isolamento de falhas (Ichtev et al., 2001) e no controle de helicópteros (Kadmiry e Driankov, 2001; Tanaka et al., 2001). É uma das mais úteis aproximações para se utilizar o conhecimento qualitativo de um sistema para projetar um regulador, mas muitas questões permanecem para discussões adicionais.

A análise da estabilidade de sistemas de controle fuzzy é um dos tópicos mais importantes em sistemas de controle fuzzy. É possível projetar teoricamente um regulador fuzzy se for disponível um bom critério para a análise da estabilidade adequado a estes sistemas. Recentemente muitos esforços têm sido feitos nesta área (Tanaka e Sugeno, 1992; Tanaka, Ikeda e Wang, 1998; Teixeira e Żak, 1999; Teixeira et al., 2000; Kim e Lee, 2000; Teixeira et al., 2001; Tuan et al., 2001; Teixeira et al., 2003; Xiaodong e Qingling, 2003).

Este trabalho trata em sua maior parte, de um estudo comparativo sobre questões recentes de estabilidade e projeto de reguladores fuzzy. São apresentadas análises e comparações de métodos existentes e de métodos propostos, para a estabilidade de sistemas fuzzy utilizando o método direto de Lyapunov. São propostas condições adicionais para análise de estabilidade de sistemas não-lineares e resultados que flexibilizam condições disponíveis na literatura.

Métodos de projeto baseados em LMIs para reguladores fuzzy são construídos usando a Compensação Distribuída Paralela (CDP) (Tanaka e Sugeno, 1992; Wang et al., 1996) e as condições para estabilidade. Exemplos de projeto para sistemas não-lineares demonstram a utilidade das condições de estabilidade e os métodos de projeto baseados em LMIs.

O Capítulo 2 apresenta o modelo fuzzy proposto por Takagi-Sugeno. O Capítulo 3 introduz o regulador fuzzy e suas questões de estabilidade utilizando o modelo fuzzy Takagi-Sugeno. São apresentadas também condições adicionais de estabilidade propostas e condições que complementam métodos existentes. No Capítulo 4 são descritas comparações dos métodos, realizadas análises teóricas e simulações digitais, comparando resultados fornecidos pelos métodos tratados, enfocando somente a estabilidade do sistema. No Capítulo 5 é abordado o projeto descrito por LMIs, de condições propostas nesta dissertação para o projeto de reguladores fuzzy. É apresentado também um exemplo de aplicação utilizando o modelo do pêndulo invertido na forma contínua. No Capítulo 6 são discutidos resultados propostos e estudos comparativos realizados.

Neste trabalho, $\mathbf{M}^T$ é a transposta da matriz $\mathbf{M}$, $\mathbf{S} > 0$ ($\mathbf{S} \geq 0$) significa que $\mathbf{S}$ é uma matriz positiva definida (semidefinida), $\mathbf{S} > \mathbf{T}$ ($\mathbf{S} \geq \mathbf{T}$) expressa que $\mathbf{S} - \mathbf{T} > 0$ ($\mathbf{S} - \mathbf{T} \geq 0$), e $\mathbf{W} = 0$ quer dizer que $\mathbf{W}$ é uma matriz nula, isto é, seus elementos são todos iguais a zero. Considere também a seguinte notação, para $r = 3$, $\sum_{i<j}^{r}$ significa:

$$\sum_{i<j}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{3} a_{ij} \Leftrightarrow a_{12} + a_{13} + a_{23}.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Capítulo 2

Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno

No método de projeto proposto, uma dada planta não-linear é representada pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno (Takagi e Sugeno, 1985). Este método de modelagem fuzzy é simples. As dinâmicas do sistema são capturadas por um conjunto de implicações fuzzy (regras) que caracterizam relações locais no espaço de estados. A principal característica de um modelo Takagi-Sugeno é a descrição das dinâmicas locais de cada implicação fuzzy por um modelo de sistema linear. O modelo fuzzy global do sistema é obtido pela combinação fuzzy dos modelos do sistema linear.

Especificamente, o sistema fuzzy Takagi-Sugeno é descrito pelas regras fuzzy SE-ENTÃO, que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema.

A descrição local da planta dinâmica a ser controlada está disponível nos termos dos modelos lineares locais, sendo conveniente mencionar que na descrição do Sistema Fuzzy Discreto a notação $\mathbf{x}(t+1)$ e $\mathbf{x}(t)$ representa respectivamente os sinais amostrados $\mathbf{x}(KT+T)$ e $\mathbf{x}(KT)$, sendo T o período de amostragem. Esta notação foi empregada em Tanaka, Ikeda e Wang (1998) por motivo de simplicidade. Portanto tem-se os seguintes modelos lineares locais:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t); \end{aligned}$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t); \end{aligned}$$

sendo $i = 1, 2, \ldots, r$ (r é o número de modelos lineares), o vetor estado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, o vetor entrada $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, o vetor saída $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{q\times n}$. A informação acima é então fundida com as regras SE-ENTÃO disponíveis, onde a i-ésima regra têm a forma:

unesp

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned} \textit{Regra } i \quad : \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \ldots \text{ E } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t); \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned} \textit{Regra } i \quad : \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \ldots \text{ E } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \text{ENTÃO} \begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t). \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Tem-se que $\mathcal{M}_j^i$, j=1,2,...,p é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t), \ldots, z_p(t)$ são as variáveis premissas. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ a função de pertinência do conjunto fuzzy $\mathcal{M}_j^i$, e seja

$$w^i(\mathbf{z}(t)) = \prod_{j=1}^{p} \mu_j^i(z_j(t)), \quad \mathbf{z}(t) = [z_1(t)\ z_2(t)\ \ldots\ z_p(t)]^T.$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i = 1, 2, \ldots, r$,

$$w^i(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \ \text{ e } \ \sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t)) > 0.$$

Uma escolha para a obtenção de um modelo fuzzy Takagi-Sugeno para sistemas não-lineares é adotar $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{x}(t)$ o vetor de estado do sistema não-linear. Um exemplo na Seção 5.4 ilustra esta idéia.

Defina

$$\mathbf{a} = [\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \ldots\ \ \alpha_r]^T.$$

Desta forma, dado um par $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ e, usando um método de inferência padrão fuzzy (fuzzificador "singleton"), o sistema fuzzy resultante é tido como a média ponderada dos modelos locais, e é dado por:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t))}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_i\right)\mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{B}_i\right)\mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{u}(t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

O sistema não forçado ($\mathbf{u}(t) = 0$) é definido como segue:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

A saída para ambos os casos, forçado e não forçado, é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))\mathbf{C}_i\mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{C}_i\mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t))}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_i\right)\mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{B}_i\right)\mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{u}(t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

O sistema não forçado é definido como segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

A saída para ambos os casos, forçado e não forçado, é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))\mathbf{C}_i\mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{C}_i\mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Para $i = 1, 2, \ldots, r$,

$$\alpha_i(\mathbf{z}(t)) = \frac{w^i(\mathbf{z}(t))}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))}.$$



Note que, para $i = 1, 2, \ldots, r$,

$$\alpha_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t)) = 1. \tag{2.8}$$

Os modelos fuzzy Takagi-Sugeno têm sido úteis na descrição exata ou aproximada de sistemas não-lineares. Na Seção 5.4 este fato é ilustrado no controle de um pêndulo invertido. É bem conhecido que sistemas fuzzy aditivos $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, como o modelo fuzzy TSK, podem aproximar uniformemente qualquer função contínua $\mathbf{f} : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em um domínio compacto (fechado limitado) $\mathbf{U}$ (Kosko, 1997). No caso do modelo fuzzy TSK, quanto maior o número de modelos locais, melhor será a aderência do modelo à equação diferencial não-linear da planta.

O exemplo abaixo ilustra a aproximação obtida pelos modelos fuzzy TSK.

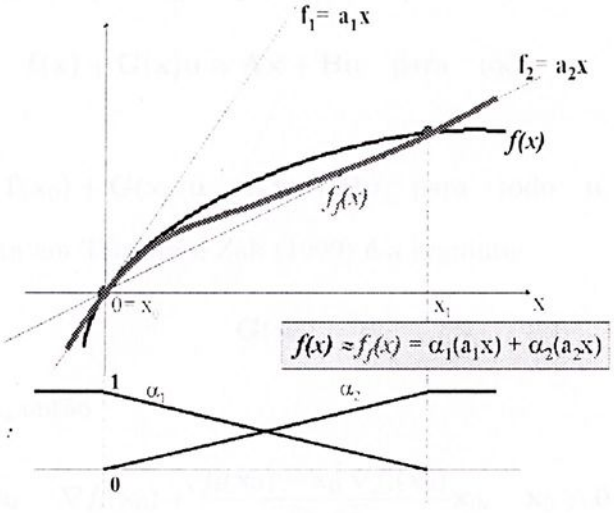


Figura 2.1: Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TSK.

Exemplo 1 - Aproximação utilizando Modelos TSK: Considere a função não-linear $f(x)$ descrita na Figura 2.1. Note que esta função pode ser aproximada, para $x \approx x_0 = 0$, por $f_1(x) = a_1 x$, que é a reta tangente desta curva em $x = 0$. Uma aproximação linear para esta função, para $x \approx x_1$, é $f_2(x) = a_2 x$; observe que esta segunda aproximação linear não é tão boa quanto a primeira aproximação linear, pois $f_2(x)$ não corresponde à reta tangente de $f(x)$ em $x = x_1$. Adotando-se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais, e as funções $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definidas na Figura 2.1 (observe que $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ são positivas e que $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$), um modelo fuzzy TSK para $f(x)$ seria $f_f(x) = \alpha_1(x) f_1(x) + \alpha_2(x) f_2(x)$, como ilustrado na Figura 2.1. Pode-se observar que para $x \approx x_0$, então $\alpha_1 \approx 1$, $\alpha_2 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_1(x)$ e para $x \approx x_1$, então $\alpha_2 \approx 1$, $\alpha_1 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_2(x)$. Finalmente, verifique que $f_f(x)$ proporciona uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ (linearização em torno de um ponto de operação) ou $f_2(x)$, por exemplo para $x_0 \leq x \leq x_1$. Obviamente, se aumentarmos o número de modelos locais, a aproximação torna-se melhor. Esse exemplo simples mostra o potencial dos modelos fuzzy TSK, no tratamento de funções e/ou de sistemas não-lineares.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Considere a planta descrita pelas seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}. \tag{2.9}$$

Um modelo de projeto para esta planta, com modelos fuzzy de Takagi-Sugeno, tendo em vista (2.8), é o seguinte:

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}. \tag{2.10}$$

Suponha que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é o único ponto de equilíbrio deste sistema, isto é, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Então, um modelo local linear para a operação em $\mathbf{x} \approx \mathbf{0}$ pode obtido através da linearização por série de Taylor em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Agora, surge o problema da obtenção de um modelo local linear que represente aproximadamente a planta descrita em (2.9), em $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_0$, sendo que $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Em Teixeira e Żak (1999) foi utilizado o seguinte paradigma para a obtenção deste modelo local:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \approx \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \text{para todo} \quad \mathbf{u}, \tag{2.11}$$

para $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_0$, e

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \text{para todo} \quad \mathbf{u}. \tag{2.12}$$

A solução ótima, descrita em Teixeira e Żak (1999) é a seguinte:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{B} \tag{2.13}$$

e se $\mathbf{a}_i^T$ é a linha i de $\mathbf{A}$, então

$$\mathbf{a}_i = \nabla f_i(\mathbf{x}_0) + \frac{f_i(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0^T \nabla f_i(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}_0\|^2}\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}, \tag{2.14}$$

sendo que nesta fórmula, $\|\mathbf{x}_0\|^2 = \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0$.

É interessante observar que os modelos locais ótimos, em pontos diferentes do ponto de equilíbrio, não podem ser obtidos através da linearização por série de Taylor no ponto considerado. A fórmula apresentada em (2.14) mostra que a aproximação ótima é a soma de dois termos, enquanto que a linearização por Taylor, desprezando-se os termos constantes, forneceria apenas o primeiro termo da fórmula, que é o gradiente da função $f_i(\mathbf{x})$ no ponto considerado. Finalmente, é oportuno mencionar que a fórmula (2.14) tem sido bem aceita pela comunidade científica, pela facilidade que ela oferece na obtenção dos modelos locais, e já está sendo utilizada com sucesso. Pode ser citado como exemplo, por Zheng, no projeto de um controlador PI robusto para uma turbina termoelétrica (Zheng et al., 2001), por Bergsten, no projeto de observadores fuzzy (Bergsten et al., 2002), por Cao e Frank, no controle de um processo químico com atraso de transporte (Cao e Frank, 2000), por Kim, no controle de um pêndulo invertido, utilizando sistemas fuzzy Singleton (Kim, 2001) e também por Machado (2003) na modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno. Esta fórmula também tem sido empregada em sistemas não-lineares que não utilizam modelos fuzzy como em Guo et al. (2000), para rastreamento de órbitas de sistemas caóticos.



É possível modelar exatamente certas classes de sistemas não-lineares com modelos fuzzy TSK utilizando-se o método descrito em Taniguchi et al. (2001). Neste método de construção, os modelos locais são obtidos em função da região de operação. Os modelos correspondem aos valores máximos e mínimos das funções não-lineares do sistema. Desta forma o número de modelos está diretamente relacionado ao número de funções não-lineares. Esta técnica de construção permite modelar uma grande variedade de sistemas que estejam no intervalo de operação. Portanto, na construção dos modelos não são consideradas particularidades do comportamento das funções não-lineares, mas apenas seus valores extremos. Neste método, para a determinação dos modelos locais, foi considerada a seguinte classe de sistemas não-lineares:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(\mathbf{x}(t))u_k(t) \tag{2.15}$$

sendo que $i = 1, 2, \ldots, r$, r é o número de regras, n e m denotam, respectivamente, o número de estados e entradas e $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ e $g_{ik}(\mathbf{x}(t))$ são funções de $\mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ldots x_n(t)]^T$.

Para obter a forma generalizada deste método, considere as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} a_{ij1} &\equiv \max_{\mathbf{x}(t)}\{\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))\}, \\ a_{ij2} &\equiv \min_{\mathbf{x}(t)}\{\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))\}, \\ b_{ik1} &\equiv \max_{\mathbf{x}(t)}\{g_{ik}(\mathbf{x}(t))\}, \\ b_{ik2} &\equiv \min_{\mathbf{x}(t)}\{g_{ik}(\mathbf{x}(t))\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Logo, para representar o sistema verdadeiro com a forma generalizada são necessários 2^s modelos locais, sendo s o número de não-linearidades existentes no sistema (Taniguchi et al., 2001). O exemplo abaixo apresenta detalhes sobre este fato.

Exemplo 2 - Modelagem exata com modelos TSK: Considere por exemplo a função $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sendo que, de (2.16), $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) \in [a_{ij2}, a_{ij1}]$ e que $a_{ij2} \neq a_{ij1}$ (isto é, $a_{ij1} > a_{ij2}$).

Neste exemplo será mostrado que $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ pode ser representada, de forma exata, por um modelo fuzzy TSK, considerando apenas dois modelos locais: a_{ij1} e a_{ij2}. Ou seja, será provado que existem $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))$ e $\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))$ tais que

$$\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) = \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))a_{ij2}, \tag{2.17}$$

$$\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) = 1, \quad \text{com} \tag{2.18}$$

$$\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) \geq 0. \tag{2.19}$$

Efetuando a substituição de (2.18) em (2.17), então,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) &= \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + (1 - \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)))a_{ij2} \\ &= (a_{ij1} - a_{ij2})\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + a_{ij2}. \end{aligned}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Logo, considerando que $a_{ij1} > a_{ij2}$, segue que

$$\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}}. \tag{2.20}$$

Como $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) \in [a_{ij2}, a_{ij1}]$ e $a_{ij1} - a_{ij2} > 0$, então note que de (2.20), $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) = 0$ para $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) = a_{ij2}$, $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) = 1$ para $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) = a_{ij1}$, e $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \in (0,1)$ para $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) \in (a_{ij2}, a_{ij1})$. Desta forma $0 \leq \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \leq 1$ e assim, note que

$$\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) = 1 - \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \tag{2.21}$$

também satisfaz a relação $0 \leq \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) \leq 1$. Desta forma, $\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))$ e $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))$ satisfazem as equações (2.17) e (2.19), que correspondem à representação exata de $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ através dos modelos fuzzy TSK.

Considere agora, sem perda de generalidade, por exemplo, que em (2.15):

$$\dot{x}_i(t) = \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))x_j(t) + g_{ij}(\mathbf{x}(t))u(t). \tag{2.22}$$

Tendo em vista que de (2.16), $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) \in [a_{ij2}, a_{ij1}]$ e $g_{ij}(\mathbf{x}(t)) \in [b_{ij2}, b_{ij1}]$, então, usando os passos descritos acima para a função $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$, é possível obter $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))$, $\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))$, $\xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))$ e $\xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))$ tais que:

$$\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) = \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))a_{ij2}, \tag{2.23}$$

$$g_{ij}(\mathbf{x}(t)) = \xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))b_{ij1} + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))b_{ij2}, \quad \text{com} \tag{2.24}$$

$$\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) = 1, \quad \xi_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t)) = 1 \quad \text{e} \tag{2.25}$$

$$\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad \xi_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad \text{e} \quad \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t)) \geq 0. \tag{2.26}$$

Substituindo (2.23) e (2.24) em (2.22) e considerando (2.25) e (2.26), note que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= (\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))a_{ij2})x_j(t) + (\xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))b_{ij1} + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))b_{ij2})u(t) \\ &= (\xi_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t)))(\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))a_{ij2})x_j(t) \\ &\quad +(\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)))(\xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))b_{ij1} + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))b_{ij2})u(t). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Agora, defina

$$\begin{aligned} \alpha_1(\mathbf{x}(t)) &= \xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)), \quad \alpha_2(\mathbf{x}(t)) = \xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)), \\ \alpha_3(\mathbf{x}(t)) &= \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)), \quad \alpha_4(\mathbf{x}(t)) = \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Então, note que, de (2.25), (2.26) e (2.28),

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i(\mathbf{x}(t)) = (\xi_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t)))(\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))) = 1, \tag{2.29}$$

$$\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad i = 1,2,3,4, \tag{2.30}$$



e de (2.27) e (2.28)

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) = &[\alpha_1(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \alpha_2(\mathbf{x}(t))a_{ij2} + \alpha_3(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \alpha_4(\mathbf{x}(t))a_{ij2}]\, x_j(t) \\ &+ [\alpha_1(\mathbf{x}(t))b_{ij1} + \alpha_2(\mathbf{x}(t))b_{ij2} + \alpha_3(\mathbf{x}(t))b_{ij1} + \alpha_4(\mathbf{x}(t))b_{ij2}]\, u(t).\end{aligned} \tag{2.31}$$

Finalmente, observe que (2.29), (2.30) e (2.31) permitem um descrição exata de (2.22) através dos modelos TSK. Note que em (2.31), os quatro modelos locais relacionados com $\alpha_1(\mathbf{x}(t))$, $\alpha_2(\mathbf{x}(t))$, $\alpha_3(\mathbf{x}(t))$ e $\alpha_4(\mathbf{x}(t))$, correspondem a todas combinações possíveis de (a_{ij1}, a_{ij2}) e (b_{ij1}, b_{ij2}), que são os vértices do politopo.

No exemplo citado anteriormente, extraído de Machado (2003), foi possível modelar exatamente o sistema não-linear com duas funções não-lineares utilizando quatro modelos locais. Segundo este método, se o sistema apresentar s funções não-lineares, serão necessários 2^s modelos locais para a sua representação exata através de modelos TSK.

O método ilustrado neste exemplo, descrito em Taniguchi et al. (2001), valoriza os modelos fuzzy TSK, pois mostra que é possível modelar exatamente uma grande classe de sistemas não-lineares com modelos *fuzzy* TSK, com um número finito de modelos locais. Entretanto, neste método será necessário um número maior de modelos locais à medida que o número de não-linearidades cresce.

Capítulo 3

Reguladores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Utilizou-se o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CDP) para projetar reguladores fuzzy para estabilizar sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy. A idéia é projetar um compensador para cada regra do modelo fuzzy. Para cada regra, são utilizadas técnicas de projeto de controle linear. O regulador fuzzy global resultante, que é em geral não-linear, é uma combinação fuzzy de cada regulador linear individual. A CDP oferece um procedimento de projeto do regulador para o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, onde cada regra de controle é projetada a partir da correspondente regra de um modelo Takagi-Sugeno da planta. O regulador fuzzy projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo fuzzy nas partes premissas. Para os modelos fuzzy (2.1) e (2.2), sendo $i = 1, 2, \ldots, r$, os reguladores fuzzy via CDP possuem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \textit{Regra } i \quad : \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \ldots \text{ E } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \text{ENTÃO } \mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}_i \mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Portanto, de forma análoga à efetuada na obtenção de (2.3), o regulador fuzzy é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))\mathbf{F}_i\mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{F}_i\mathbf{x}(t) \\ &= -\mathbf{F}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

O objetivo do projeto do regulador fuzzy é determinar os ganhos de realimentação locais $\mathbf{F}_i$ nas partes conseqüentes. Para a lei de controle (3.2), as equações (2.3) e (2.6) são dadas por (3.3) e (3.4) respectivamente (Tanaka, Ikeda e Wang, 1998), tendo em vista (2.8):

unesp

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j\}\mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\mathbf{G}_{ii}\mathbf{x}(t) + 2\sum_{i<j}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\left\{\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right\}\mathbf{x}(t); \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j\}\mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\mathbf{G}_{ii}\mathbf{x}(t) + 2\sum_{i<j}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\left\{\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right\}\mathbf{x}(t), \qquad (3.4)\end{aligned}$$

sendo

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j.$$

3.1 Condições para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy

As condições suficientes para a estabilidade de sistemas fuzzy contínuos e discretos no tempo são derivadas usando funções Lyapunov quadráticas do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ (Tanaka e Sugeno, 1992; Pietrobom, 1999; Teixeira et al., 2000; Kim e Lee, 2000; Tuan et al., 2001; Teixeira et al., 2003; Xiaodong e Qingling, 2003). Os principais resultados estão descritos abaixo.

Lema 1 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema fuzzy contínuo descrito por (2.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$ *tal que*

$$\mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i < \mathbf{0},$$

para $i = 1, 2, \ldots, r$*; isto é, para todos os subsistemas.*

Prova: Segue diretamente da aplicação da função de Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$.

Lema 2 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema fuzzy discreto descrito por (2.7) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$ *tal que*

$$\mathbf{A}_i^T\mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{P} < \mathbf{0},$$

para $i = 1, 2, \ldots, r$*; isto é, para todos os subsistemas.*

Prova: Vide Tanaka e Sugeno (1992).

Para a apresentação dos resultados para a estabilidade do sistema forçado, será utilizada a definição de número de regras ativas: os sistemas fuzzy (3.3) e (3.4) possuem r regras e para

um certo $z(t) = z_0$ o número de regras ativas é igual ao número de termos $\alpha_1(z_0), \ldots, \alpha_r(z_0)$ não nulos. Por exemplo, na Figura 3.1 as regras ativas para $z_1(t) \leq a$, $z_1(t) \in (a, b)$, $z_1(t) = b$, $z_1(t) \in (b, c)$, $z_1(t) = c$, $z_1(t) \in (c, d)$, $z_1(t) \geq d$ são respectivamente as regras 1, 1 e 2, 2, 2 e 3, 3, 3 e 4, 4. Assim o número de regras ativas é menor ou igual a dois.

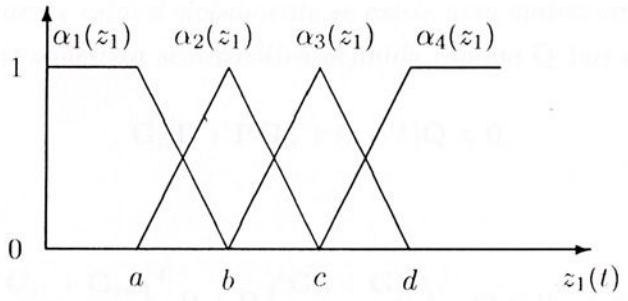


Figura 3.1: Exemplo de um conjunto de 4 regras fuzzy: $\alpha_1(z_1(t))$, $\alpha_2(z_1(t))$, $\alpha_3(z_1(t))$, $\alpha_4(z_1(t)) \in [0, 1]$ e $\alpha_1(z_1(t)) + \alpha_2(z_1(t)) + \alpha_3(z_1(t)) + \alpha_4(z_1(t)) = 1$.

Observe que na Figura 3.1, $\alpha_1(z_1(t))\alpha_3(z_1(t)) = \alpha_1(z_1(t))\alpha_4(z_1(t)) = \alpha_2(z_1(t))\alpha_4(z_1(t)) = 0$, $\forall\ z_1(t) \in \mathbb{R}$. A existência deste fato foi explorada no estudo da estabilidade, como será visto nos Lemas 3-6 e Teoremas 1 e 2.

Lema 3 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$ *tal que*

$$\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii} < \mathbf{0},$$

para todo $i = 1, \ldots, r$ *e*

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right) \leq \mathbf{0}, \quad i < j,$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$ *excetuando-se os pares* (i, j) *tais que* $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = \mathbf{0}$, $\forall\ \mathbf{z}(t)$.

Prova: Segue diretamente do Lema 1.

Lema 4 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$ *tal que*

$$\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P}\mathbf{G}_{ii} - \mathbf{P} < \mathbf{0},$$

para todo $i = 1, \ldots, r$ *e*

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right) - \mathbf{P} \leq \mathbf{0}, \quad i < j,$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$ *excetuando-se os pares* (i, j) *tais que* $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = \mathbf{0}$, $\forall\ \mathbf{z}(t)$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Prova: Segue diretamente do Lema 2.

Essas condições para estabilidade, em geral, são conservativas. Foram propostas em Tanaka, Ikeda e Wang (1998) condições mais relaxadas do que as descritas anteriormente.

Lema 5 *Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s, sendo $1 < s \leq r$. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ e uma matriz simétrica semipositiva definida comum $\mathbf{Q}$ tais que*

$$\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii} + (s-1)\mathbf{Q} < \mathbf{0}, \tag{3.5}$$

para todo $i = 1, \ldots, r$ e

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right) - \mathbf{Q} \leq \mathbf{0}, \quad i < j, \tag{3.6}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$, $\forall\ \mathbf{z}(t)$.

Prova: Vide Tanaka, Ikeda e Wang (1998).

Observação 1 *Observe que as condições do Lema 5 são iguais às do Lema 3, adicionando-se a matriz $\mathbf{Q} \geq 0$. Note que (3.6) foi relaxada com relação à respectiva condição no Lema 3.*

Lema 6 *Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s, sendo $1 < s \leq r$. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ e uma matriz simétrica semipositiva definida comum $\mathbf{Q}$ tais que*

$$\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P}\mathbf{G}_{ii} - \mathbf{P} + (s-1)\mathbf{Q} < \mathbf{0}, \tag{3.7}$$

para todo $i = 1, \ldots, r$ e

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right) - \mathbf{P} - \mathbf{Q} \leq \mathbf{0}, \quad i < j, \tag{3.8}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$, $\forall\ \mathbf{z}(t)$.

Prova: Vide Tanaka, Ikeda e Wang (1998).

Observação 2 *A Observação 1 também se aplica aos Lemas 4 e 6. Em Tanaka, Ikeda e Wang (1998) foram apresentados exemplos que mostram que os resultados dos Lemas 5 e 6 fornecem condições mais gerais ou iguais do que os descritos nos Lemas 3 e 4, respectivamente.*

Recentemente esses resultados para a estabilidade descritos nos Lemas 5 e 6 foram flexibilizados, como mostram os teoremas a seguir.

unesp

Teorema 1 *Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s, sendo $1 < s \leq r$. Considere $i, j = 1, \ldots, r$, sendo $i < j$ e defina*

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii}, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right) \quad e \tag{3.10}$$

$$\mathbf{Qt}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}, \ \textit{se} \ \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \ \forall \ \mathbf{z}(t), \\ \\ \mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q} + \mathbf{P}_{ij}, \ \textit{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.11}$$

Então, o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$, uma matriz simétrica positiva semidefinida comum $\mathbf{Q}$ e matrizes semidefinidas positivas $\mathbf{P}_{ij}$ tais que

$$\mathbf{Qt} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 + (s-1)\mathbf{Q} & \mathbf{Qt}_{12} & \cdots & \mathbf{Qt}_{1r} \\ \mathbf{Qt}_{12} & \mathbf{Q}_2 + (s-1)\mathbf{Q} & \cdots & \mathbf{Qt}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Qt}_{1r} & \mathbf{Qt}_{2r} & \cdots & \mathbf{Q}_r + (s-1)\mathbf{Q} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.12}$$

Prova: Vide Pietrobom (1999) ou Teixeira et al. (2000).

Corolário 1 *Se $r = s$, então pode-se adotar $\mathbf{Q} = 0$ nas condições do Teorema 1.*

Prova: Segue diretamente do Teorema 1.

Teorema 2 *Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s, sendo $1 < s \leq r$. Considere $i, j = 1, \ldots, r$, sendo $i < j$ e defina*

$$\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{G}_{ii} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} = \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{F}_i}{2}, \tag{3.14}$$

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ij} & \mathbf{W}_{ij}^T \\ \mathbf{W}_{ij} & \mathbf{S}_{ij} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{N}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} - (s-1)\mathbf{Y} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ii}^T \\ \mathbf{M}_{ii}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad e \tag{3.16}$$

$$\mathbf{N}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}, \ \textit{se} \ \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \ \forall \ \mathbf{z}(t), \\ \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{Y} - \mathbf{R}_{ij} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T - \mathbf{W}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} - \mathbf{W}_{ij} & \mathbf{X} - \mathbf{S}_{ij} \end{bmatrix}, \ \textit{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.17}$$

Então, o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, *uma matriz simétrica positiva semidefinida comum* $\mathbf{Y}$ *e matrizes semidefinidas positivas* $\mathbf{T}_{ij}$ *tais que*

$$\mathbf{Nt} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} & \dots & \mathbf{N}_{1r} \\ \mathbf{N}_{12} & \mathbf{N}_{22} & \dots & \mathbf{N}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}_{1r} & \mathbf{N}_{2r} & \dots & \mathbf{N}_{rr} \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \tag{3.18}$$

Prova: Vide Pietrobom (1999) ou Teixeira et al. (2000).

Corolário 2 *Se* $r = s$*, então pode-se adotar* $\mathbf{Y} = 0$ *nas condições do Teorema 2.*

Prova: Segue diretamente do Teorema 2.

A seguir são descritas as condições para a estabilidade propostas em Kim e Lee (2000). Conforme poderá ser observado nos capítulos posteriores, estas condições apresentam os mesmos resultados em termos de factibilidade (nos exemplos estudados), comparado com o teorema descrito em Teixeira et al. (2000).

Teorema 3 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica* $\mathbf{P}$ *e matrizes simétricas* $\mathbf{X}_{ij}$ *tais que*

$$\mathbf{P} > \mathbf{0} \tag{3.19}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}_{ii} + \mathbf{X}_{ii} < \mathbf{0}, \quad (i = 1, \dots, r) \tag{3.20}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{ij}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}_{ij} + \mathbf{X}_{ij} \leq \mathbf{0}, \quad (1 \leq i < j \leq r) \tag{3.21}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} & \dots & \mathbf{X}_{1r} \\ \mathbf{X}_{12} & \mathbf{X}_{22} & \dots & \mathbf{X}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}_{1r} & \mathbf{X}_{2r} & \dots & \mathbf{X}_{rr} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \tag{3.22}$$

sendo $\mathbf{\Lambda}_{ii} \equiv \mathbf{G}_{ii}$, $i = 1, \dots, r$, $\mathbf{\Lambda}_{ij} \equiv ((\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})/2)$.

Prova: Vide Kim e Lee (2000).

Teorema 4 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica* $\mathbf{P}$ *e matrizes simétricas* $\mathbf{X}_{ij}$ *tais que*

$$\mathbf{P} > \mathbf{0} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{ii}^T\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}_{ii} - \mathbf{P} + \mathbf{X}_{ii} < \mathbf{0}, \quad (i = 1, \dots, r) \tag{3.24}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{ij}^T\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}_{ij} - \mathbf{P} + \mathbf{X}_{ij} \leq \mathbf{0}, \quad (1 \leq i < j \leq r) \tag{3.25}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} & \dots & \mathbf{X}_{1r} \\ \mathbf{X}_{12} & \mathbf{X}_{22} & \dots & \mathbf{X}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}_{1r} & \mathbf{X}_{2r} & \dots & \mathbf{X}_{rr} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \tag{3.26}$$

unesp

sendo $\mathbf{\Lambda}_{ii} \equiv \mathbf{G}_{ii}$, $i = 1, \ldots, r$, $\mathbf{\Lambda}_{ij} \equiv ((\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})/2)$.

Prova: Vide Kim e Lee (2000).

Em Teixeira et al. (2000) e em Kim e Lee (2000), foi demonstrado teoricamente e exemplificado através de simulações digitais, que os Teoremas 1, 3 e Teoremas 2, 4 apresentam condições mais relaxadas do que as apresentadas nos Lemas 5 e 6, respectivamente.

Em Tuan et al. (2001) foi demonstrado teoricamente e também exemplificado através de exemplos numéricos, que o Teorema 5 oferece melhores resultados, além de ser mais eficiente computacionalmente, apresentando assim condições menos conservativas do que as descritas em Tanaka, Ikeda e Wang (1998).

Teorema 5 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$ *e matrizes simétricas* $\mathbf{Qs}_{ij}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}(\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii}) & \mathbf{Qs}_{ij} \\ \mathbf{Qs}_{ij} & \frac{1}{r-1}(\mathbf{G}_{jj}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{jj}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (1 \leq i < j \leq r) \tag{3.27}$$

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right) - \mathbf{Qs}_{ij} \leq \mathbf{0}. \tag{3.28}$$

Prova: Vide Tuan et al. (2001).

Os resultados para a estabilidade descritos nos Teoremas 1, 3 e 2, 4 foram flexibilizados. Em Teixeira et al. (2001) ou Teixeira et al. (2003) foi demonstrado teoricamente e exemplificado através de simulações digitais, que os Teoremas 6 e 8 apresentam condições mais relaxadas que as apresentadas em Kim e Lee (2000) e em Teixeira et al. (2000).

Teorema 6 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existem matrizes simétricas* $\mathbf{P}$, $\mathbf{T}_{ijh}$, $\mathbf{R}_{ij}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{ijh}$ *tais que*

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_{ijh} \geq \mathbf{0}, \quad (i, j, h = 1, \ldots, r, \quad i < j) \tag{3.29}$$

$$\mathbf{Qt}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Z}_{1h} & \mathbf{Qn}_{12h} & \cdots & \mathbf{Qn}_{1rh} \\ \mathbf{Qn}_{21h} & \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Z}_{2h} & \cdots & \mathbf{Qn}_{2rh} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Qn}_{r1h} & \mathbf{Qn}_{r2h} & \cdots & \mathbf{Q}_r - \mathbf{Z}_{rh} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (h = 1, \ldots, r) \tag{3.30}$$

sendo que, para $i, j, h = 1, \ldots, r$,

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii}, \tag{3.31}$$

unesp

$$\mathbf{Z}_{jh} = \begin{cases} \mathbf{R}_{jh}, \ se \ j < h, \\ \mathbf{R}_{hj}, \ se \ j > h, \\ \mathbf{0}, \ se \ h = j, \end{cases} \tag{3.32}$$

$$\mathbf{Qn}_{ijh} = \begin{cases} \mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{T}_{ijh} + (\mathbf{S}_{ijh} - \mathbf{S}_{ijh}^T) + \frac{1}{2}\mathbf{W}_{ijh}, \ se \ i < j, \\ \mathbf{Q}_{ji} + \mathbf{T}_{jih} + (\mathbf{S}_{jih}^T - \mathbf{S}_{jih}) + \frac{1}{2}\mathbf{W}_{jih}, \ se \ i > j, \end{cases} \tag{3.33}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right), \tag{3.34}$$

$$\mathbf{W}_{lkh} = \begin{cases} \mathbf{R}_{lk}, \ se \ l = h \ ou \ k = h, \\ \\ \mathbf{0}, \ se \ l \neq h \ e \ k \neq h. \end{cases} \tag{3.35}$$

Prova: Vide Avellar (2001) ou Teixeira et al. (2003).

Teorema 7 *Se as condições do Teorema 3 são satisfeitas, então as condições do Teorema 6 também serão.*

Prova: Vide Teixeira et al. (2003).

Teorema 8 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existem matrizes simétricas* $\mathbf{X}$, $\mathbf{T}_{ijh}$, $\mathbf{R}_{ij}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{ijh}$ *tais que*

$$\mathbf{X} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_{ijh} \geq \mathbf{0}, \quad (i, j, h = 1, \ldots, r, \quad i < j) \tag{3.36}$$

$$\mathbf{Nt}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} - \mathbf{Z}_{1h} & \mathbf{N}_{12h} & \cdots & \mathbf{N}_{1rh} \\ \\ \mathbf{N}_{21h} & \mathbf{N}_{22} - \mathbf{Z}_{2h} & \cdots & \mathbf{N}_{2rh} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}_{r1h} & \mathbf{N}_{r2h} & \cdots & \mathbf{N}_{rr} - \mathbf{Z}_{rh} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (h = 1, \ldots, r) \tag{3.37}$$

sendo que, para $i, j, h = 1, \ldots, r$,

$$\mathbf{N}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

$$\mathbf{Z}_{jh} = \begin{cases} \mathbf{R}_{jh}, \ se \ j < h, \\ \mathbf{R}_{hj}, \ se \ j > h, \\ \mathbf{0}, \ se \ h = j, \end{cases} \tag{3.39}$$

$$\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{G}_{ii} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i, \tag{3.40}$$

$$\mathbf{N}_{ijh} = \begin{cases} \mathbf{N}_{ij} - \mathbf{T}_{ijh} + \left(\mathbf{S}_{ijh} - \mathbf{S}_{ijh}^T\right) + \frac{1}{2}\mathbf{W}_{ijh}, \ se \ i < j, \\ \\ \mathbf{N}_{ji} - \mathbf{T}_{jih} + \left(\mathbf{S}_{jih}^T - \mathbf{S}_{jih}\right) + \frac{1}{2}\mathbf{W}_{jih}, \ se \ i > j, \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} = \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{F}_i}{2}, \tag{3.42}$$

$$\mathbf{W}_{lkh} = \begin{cases} \mathbf{R}_{lk}, \ se \ l = h \ ou \ k = h, \\ \\ \mathbf{0}, \ se \ l \neq h \ e \ k \neq h. \end{cases} \tag{3.43}$$

Prova: Vide Teixeira et al. (2003).

Teorema 9 *Se as condições do Teorema 4 são satisfeitas, então as condições do Teorema 8 também serão.*

Prova: Vide Teixeira et al. (2003).

O Teorema a seguir, apresentado recentemente na literatura, generaliza as condições descritas no Teorema 3 (Kim e Lee, 2000).

Teorema 10 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existem matrizes simétricas* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Y}_{ii}$ *e matrizes* $\mathbf{Y}_{ij}$ *tais que*

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \tag{3.44}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}_{ii} + \mathbf{Y}_{ii} < \mathbf{0}, \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{3.45}$$

$$2\mathbf{\Lambda}_{ij}^T\mathbf{P} + 2\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}_{ij} + \mathbf{Y}_{ij} + \mathbf{Y}_{ij}^T \leq \mathbf{0}, \quad (1 \leq i < j \leq r) \tag{3.46}$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \ldots & \mathbf{Y}_{1r} \\ \mathbf{Y}_{12}^T & \mathbf{Y}_{22} & \ldots & \mathbf{Y}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{1r}^T & \mathbf{Y}_{2r}^T & \ldots & \mathbf{Y}_{rr} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \tag{3.47}$$

sendo $\mathbf{\Lambda}_{ii} \equiv \mathbf{G}_{ii}$, $i = 1, \ldots, r$, $\mathbf{\Lambda}_{ij} \equiv ((\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})/2)$.

Prova: Vide Xiaodong e Qingling (2003).

3.2 Condições Adicionais para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy

Nesta seção são descritas condições adicionais de estabilidade. São apresentadas contribuições que complementam teoremas existentes na literatura atual (Tuan et al., 2001; Xiaodong e Qingling, 2003) e casos que generalizam condições recentes disponíveis na literatura (Tuan et al., 2001). Estas generalizações fornecem resultados que, em termos de áreas de factibilidade, mostraram-se no máximo iguais às respectivas áreas dos métodos descritos nos Teoremas 6 e 7. A seguir é proposto o caso discreto das condições tratadas no Teorema 5 (Tuan et al., 2001), utilizando-se as mesmas idéias do caso contínuo, agora para o discreto.

Considere o Lema a seguir:

Lema 7 *Dada uma matriz simétrica* $\mathbf{P}_a \in \mathbb{R}^{2\times 2}$*:*

$$\mathbf{P}_a = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad p_{ij} \in \mathbb{R}$$

tem-se

$$\mathbf{x}^T\mathbf{P}_a\mathbf{x} < \mathbf{0}, \quad \forall x_i \geq 0, \quad \mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2]^T \neq 0, \tag{3.48}$$

se e somente se, existe $q_{12} \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{bmatrix} p_{11} & q_{12} \\ q_{12} & p_{22} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad e \quad p_{12} - q_{12} \leq 0. \tag{3.49}$$

Prova: Vide Tuan et al. (2001) ou Apêndice A.

Para a obtenção do Teorema 11, utilizou-se o complemento de Schur, como efetuado na obtenção dos Teoremas 2 e 8, respectivamente em Teixeira et al. (2000) e em Teixeira et al. (2003). Estas condições são propostas nesta dissertação e não foram apresentadas em Tuan et al. (2001).

Teorema 11 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ *e matrizes simétricas* $\mathbf{Z}_{ij}$*, tais que*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{ii}) & \mathbf{Z}_{ij} \\ \mathbf{Z}_{ij} & \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{jj}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (1 \leq i < j \leq r) \tag{3.50}$$

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{3.51}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $i < j$, *excetuando-se os pares* (i, j) *tais que* $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$, $\forall\, \mathbf{z}(t)$,

unesp

sendo que

$$\mathbf{N}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ii}^T \\ \mathbf{M}_{ii}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \tag{3.52}$$

$$\mathbf{N}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \tag{3.53}$$

$$\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{G}_{ii} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i, \tag{3.54}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} = \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{F}_i}{2}. \tag{3.55}$$

Prova: Vide Apêndice B.

Como apresentado anteriormente, o Teorema 10 proposto por Xiaodong e Qingling (2003) é uma generalização das condições descritas por Kim e Lee (2000), sendo que este último apresentou o caso contínuo e discreto. Agora, é proposto aqui o caso discreto das condições descritas no Teorema 10, ou seja, apresentando a generalização do caso discreto de Kim e Lee (2000). Este teorema é proposto utilizando-se das mesmas idéias destes autores e comparado com condições recentes propostas na literatura.

Teorema 12 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existem matrizes simétricas* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Y}_{ii}$ *e matrizes* $\mathbf{Y}_{ij}$ *tais que*

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \tag{3.56}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{ii}^T\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}_{ii} - \mathbf{P} + \mathbf{Y}_{ii} < \mathbf{0}, \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{3.57}$$

$$2\mathbf{\Lambda}_{ij}^T\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}_{ij} - 2\mathbf{P} + \mathbf{Y}_{ij} + \mathbf{Y}_{ij}^T \leq \mathbf{0}, \quad (1 \leq i < j \leq r) \tag{3.58}$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \ldots & \mathbf{Y}_{1r} \\ \mathbf{Y}_{12}^T & \mathbf{Y}_{22} & \ldots & \mathbf{Y}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{1r}^T & \mathbf{Y}_{2r}^T & \ldots & \mathbf{Y}_{rr} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \tag{3.59}$$

sendo $\mathbf{\Lambda}_{ii} \equiv \mathbf{G}_{ii}$, $i = 1, \ldots, r$, $\mathbf{\Lambda}_{ij} \equiv ((\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})/2)$.

Prova: Vide Apêndice C.

Os Teoremas 13 e 14 apresentam condições para os sistemas contínuos e discretos no tempo. O ponto chave destas condições explora o teorema apresentado em Tuan et al. (2001) e o emprego adequado das matrizes anti-simétricas (Teixeira et al., 2003).

O teorema a seguir utiliza as propriedades das matrizes anti-simétricas de modo similar ao efetuado no Teorema 6 (Teixeira et al., 2003).

Uma matriz quadrada $\mathbf{S}$ é anti-simétrica se $\mathbf{S} = -\mathbf{S}^T$, isto é, para $\forall\, i, j \quad \mathbf{S}_{ij} = -\mathbf{S}_{ji}$ (Slotine e Li, 1991). Esta matriz anti-simétrica associada com uma função quadrática é sempre igual a zero, não causando assim influência no estudo da positividade da função, ou seja, $\forall\, \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x} = 0$. Uma forma geral para as matrizes anti-simétricas $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a seguinte: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_a - \mathbf{S}_a^T$, para $\mathbf{S}_a \in \mathbb{R}^{n\times n}$ arbitrárias.

A seguir descreve-se a condição adicional de estabilidade.

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Teorema 13 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$, *matrizes simétricas* $\mathbf{Qs}_{ij}$, *e matrizes* $\mathbf{S}_{ij}$ *tais que*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{Qs}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Qs}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{jj} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.60}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Qs}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{3.61}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $i < j$, *excetuando-se os pares* (i, j) *tais que* $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$, $\forall\, \mathbf{z}(t)$, *sendo que*

$$\mathbf{Q}_{ii} = \mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii} \quad e \tag{3.62}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right). \tag{3.63}$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, sendo que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$. Então, com a equação (3.3) obtém-se

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\left((\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j)^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j)\right)\mathbf{x}(t).$$

Note que a equação acima pode ser reescrita na forma (Tuan et al., 2001):

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i<j}^{r} \mathbf{x}^T(t)\Bigg[&\frac{1}{r-1}\alpha_i^2(\mathbf{z}(t))(\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii}) + \frac{1}{r-1}\alpha_j^2(\mathbf{z}(t))(\mathbf{G}_{jj}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{jj}) \\ &+2\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\left(\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)\right)\Bigg]\mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Das definições (3.62) e (3.63) e adotando-se por simplicidade de notação, $\alpha_i(\mathbf{z}(t)) = \alpha_i$, tem-se

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i<j}^{r} \mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}\alpha_i^2\mathbf{Q}_{ii} + \frac{1}{r-1}\alpha_j^2\mathbf{Q}_{jj} + 2\alpha_i\alpha_j\mathbf{Q}_{ij}\right)\mathbf{x}(t)$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i<j}^{r} \mathbf{x}^T(t)|\alpha_i\mathbf{I} \quad \alpha_j\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{Q}_{ij} \\ \mathbf{Q}_{ij} & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i\mathbf{I} \\ \alpha_j\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\
&= \sum_{i<j}^{r} \mathbf{x}^T(t)|\alpha_i\mathbf{I} \quad \alpha_j\mathbf{I}|\mathbf{Qt}_{ij}|\alpha_i\mathbf{I} \quad \alpha_j\mathbf{I}|^T\mathbf{x}(t) \\
&= \sum_{i<j}^{r} |\alpha_i\mathbf{x}^T(t) \quad \alpha_j\mathbf{x}^T(t)|\, \mathbf{Qt}_{ij}\, |\alpha_i\mathbf{x}^T(t) \quad \alpha_j\mathbf{x}^T(t)|^T \\
&= \sum_{i<j}^{r} |\alpha_i \quad \alpha_j| \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}^T(t) \end{bmatrix} \mathbf{Qt}_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i<j}^{r} |\alpha_i \quad \alpha_j|\, \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x})\, |\alpha_i \quad \alpha_j|^T.
\end{aligned}
$$

Para que $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ quando $\mathbf{x}(t) \neq 0$, então é suficiente que, para $i, j = 1, \ldots, r \quad (i < j)$, $[\alpha_i \ \alpha_j]\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x})[\alpha_i \ \alpha_j]^T < \mathbf{0}$. Pelo Lema 7 (Tuan et al., 2001), esta condição é satisfeita se existirem matrizes simétricas $\mathbf{Qs}_{ij}$ tais que:

$$
\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}(\mathbf{Q}_{ii})\right)\mathbf{x}(t) & \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Qs}_{ij}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Qs}_{ij}\mathbf{x}(t) & \mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}(\mathbf{Q}_{jj})\right)\mathbf{x}(t) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad e \tag{3.64}
$$

$$
\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_{ij}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Qs}_{ij}\mathbf{x}(t) \leq \mathbf{0}. \tag{3.65}
$$

Para $i, j = 1, \ldots, r \quad (i < j)$, inserindo-se as matrizes anti-simétricas em (3.64) e, tendo em vista que $\mathbf{x}^T(\mathbf{S}_a - \mathbf{S}_a^T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, qualquer que seja $\mathbf{S}_a$, note que:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{ii}\right)\mathbf{x}(t) & \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Qs}_{ij}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Qs}_{ij}\mathbf{x}(t) & \mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{jj}\right)\mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{ii}\right)\mathbf{x}(t) & \mathbf{x}^T(t)\left[\mathbf{Qs}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T)\right]\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t)\left[\mathbf{Qs}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij})\right]\mathbf{x}(t) & \mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{jj}\right)\mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{Qs}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Qs}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Logo, para que $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ quando $\mathbf{x}(t) \neq 0$, é suficiente que (3.60) e (3.61) sejam satisfeitas.

As condições adicionais de estabilidade foram comparadas com as condições existentes, con-

forme será observado nas análises teóricas a seguir e simulações descritas no Capítulo 4.

Teorema 14 *Se as condições do Teorema 5 são satisfeitas, então as condições do Teorema 13 também serão.*

Prova: A condição adicional anterior coincide com o descrito no Teorema 5 (Tuan et al., 2001), quando $\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{0}$ na equação (3.60), para $i, j = 1, \ldots, r \ \ (i < j)$.

Para $r > 3$, as LMIs ficarão divididas em matrizes $2n \times 2n$, aos pares $i < j$. Esta divisão (Tuan et al., 2001) torna este teorema conservativo em relação à outras condições recentes de estabilidade, como exemplo em comparação com Teixeira et al. (2003), ou seja, ele perde em generalidade diante de métodos que analisam o problema globalmente. O Capítulo 4 mostra análises teóricas e propõe um método de análise em matrizes $2n \times 2n$ flexibilizado, ou melhor, um método que faz uma análise em pares $i < j$, como realizado em Tuan et al. (2001) e que obtém os mesmos resultados comparado com métodos de análise global.

O caso $r = 2$ tem sido o mais abordado nos exemplos de análise de estabilidade e aplicação de sistemas de controle com modelos TSK, por exemplo em Cao et al. (1997), Tanaka, Ikeda e Wang (1998), Ma et al. (1998), Teixeira e Żak (1999), Kim e Lee (2000), Xiaodong e Qingling (2003) e Teixeira et al. (2003). Poderá ser observado nesta dissertação que exemplos de análise de estabilidade utilizando 3 modelos ($r = 3$) serão úteis na análise comparativa dos métodos.

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Para resolver o problema de estabilidade para o caso discreto utiliza-se o complemento de Schur (Boyd et al., 1994) da seguinte forma: o sistema forçado para esse caso é estável se

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BF})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BF}) - \mathbf{P} < 0.$$

Multiplicando-se a desigualdade à esquerda e à direita por $\mathbf{P}^{-1}$, como descrito em Wang et al. (1996), e definindo-se uma nova variável $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T = \mathbf{P}^{-1}$, pode-se reescrever a equação anterior como

$$\mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{BF})^T \mathbf{X}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{BF}) \mathbf{X} - \mathbf{X} < 0.$$

Aplicando o complemento de Schur (Boyd et al., 1994),(Apêndice E), tendo em vista que $\mathbf{X} > 0$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{BF})^T \\ (\mathbf{A} - \mathbf{BF})\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0.$$

A seguir descreve-se condições adicionais para a estabilidade de sistemas discretos no tempo, análogas às descritas no Teorema 13 desta dissertação.

Teorema 15 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida*

comum $\mathbf{X}$, *matrizes simétricas* $\mathbf{Ds}_{ij}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{ij}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{ii}) & \mathbf{Ds}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Ds}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{jj}) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad e, \tag{3.66}$$

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Ds}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{3.67}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $i < j$, *excetuando-se os pares* (i, j) *tais que* $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$, $\forall\, \mathbf{z}(t)$, *tais que*

$$\mathbf{N}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \tag{3.68}$$

$$\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{G}_{ii} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i, \tag{3.69}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} = \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{F}_i}{2}. \tag{3.70}$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, onde $\mathbf{P} > 0$. Tem-se que

$$\begin{aligned} \triangle V(\mathbf{x}(t)) &= V(\mathbf{x}(t+1)) - V(\mathbf{x}(t)) \\ &= \mathbf{x}^T(t)\left[|\mathbf{A}(\mathbf{a}) - \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{F}(\mathbf{a})|^T\mathbf{P}|\mathbf{A}(\mathbf{a}) - \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{F}(\mathbf{a})| - \mathbf{P}\right]\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Para obter $\triangle V(\mathbf{x}(t)) < 0$, é necessário que

$$|\mathbf{A}(\mathbf{a}) - \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{F}(\mathbf{a})|^T\mathbf{P}|\mathbf{A}(\mathbf{a}) - \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{F}(\mathbf{a})| - \mathbf{P} < 0.$$

Aplicando o complemento de Schur na expressão acima, obtém-se:

$$\mathbf{T}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\,|\mathbf{A}(\mathbf{a}) - \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{F}(\mathbf{a})|^T \\ |\mathbf{A}(\mathbf{a}) - \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{F}(\mathbf{a})|\,\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0,$$

sendo

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1},\ \ \mathbf{A}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_i,\ \ \mathbf{B}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{B}_i \ \text{ e } \ \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{F}_i.$$

Tendo em vista (3.69) e (3.70), a expressão de $\mathbf{T}(\mathbf{a})$ acima pode ser reescrita como (Tuan et al., 2001):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{a}) = \sum_{i<j}^{r}\Bigg[&\frac{1}{r-1}\alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ii}^T \\ \mathbf{M}_{ii}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} + \frac{1}{r-1}\alpha_j^2(\mathbf{z}(t))\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{jj}^T \\ \mathbf{M}_{jj}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} + \\ &+2\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix}\Bigg] > \mathbf{0}. \end{aligned}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Agora, aplica-se os mesmos procedimentos da demonstração do Teorema 13 para completar a prova.

Desta forma, para que $\triangle V(\mathbf{x}(t)) < 0$ sendo $\mathbf{x}(t) \neq 0$, é suficiente que (3.66) e (3.67) sejam satisfeitas, o que conclui a prova.

Teorema 16 *Se as condições do Teorema 11 são satisfeitas, então as condições do Teorema 15 também serão.*

Prova: Similar à prova do Teorema 14.

No Capítulo 4 serão discutidas e apresentadas generalizações destas condições para $r > 2$.

Na seqüencia são propostos dois critérios adicionais de estabilidade, descrevendo resultados compatíveis com métodos atuais de estabilidade descritos na literatura, como em Teixeira et al. (2003).

Considere o lema a seguir:

Lema 8 *Sejam* $\mathbf{R}$ *e* $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *matrizes arbitrárias. Então,*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= -(\mathbf{x}^T\mathbf{R}^T - \mathbf{x}^T\mathbf{R}^T)[\mathbf{R} \quad -\mathbf{R}][\mathbf{x}^T \quad \mathbf{x}^T]^T + [\mathbf{x}^T(\mathbf{S}-\mathbf{S}^T) \quad \mathbf{x}^T(\mathbf{S}-\mathbf{S}^T)][\mathbf{x}^T \quad \mathbf{x}^T]^T \\
&= [\mathbf{x}^T \ \mathbf{x}^T]\left\{-\begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \\ -\mathbf{R}^T \end{bmatrix}[\mathbf{R} \ -\mathbf{R}] + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{S}-\mathbf{S}^T \\ \mathbf{S}^T-\mathbf{S} & 0 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \\
&= [\mathbf{x}^T \ \mathbf{x}^T]\left\{\begin{bmatrix} -\mathbf{R}^T\mathbf{R} & \mathbf{R}^T\mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T\mathbf{R} & -\mathbf{R}^T\mathbf{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{S}-\mathbf{S}^T \\ \mathbf{S}^T-\mathbf{S} & 0 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \\
&= [\mathbf{x}^T \ \mathbf{x}^T]\begin{bmatrix} -\mathbf{Z} & \mathbf{Z}+\mathbf{S}-\mathbf{S}^T \\ \mathbf{Z}+\mathbf{S}^T-\mathbf{S} & -\mathbf{Z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}, \quad \textit{sendo} \quad \mathbf{Z} = \mathbf{R}^T\mathbf{R} \geq \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{3.71}
$$

Agora, descreve-se a condição de estabilidade utilizando-se o resultado descrito no Lema 8.

Teorema 17 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existem matrizes simétricas* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Z}_i$, *e matrizes* $\mathbf{Z}_{ij}$, $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{S}_{ij}$ *tais que*

$$
\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{Z}_i \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Z}_{ij} \geq \mathbf{0}, \quad (i, j = 1, \ldots, r, \quad i < j) \tag{3.72}
$$

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \ldots & \mathbf{E}_{1r} \\ \mathbf{E}_{12}^T & \mathbf{E}_{22} & \ldots & \mathbf{E}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}_{1r}^T & \mathbf{E}_{2r}^T & \ldots & \mathbf{E}_{rr} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.73}
$$

sendo que, para $i, j = 1, \ldots, r$ $(i < j)$,

$$
\mathbf{E}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii} - \mathbf{Z}_i & \mathbf{Z}_i + (\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_i^T) \\ \mathbf{Z}_i + (\mathbf{S}_i^T - \mathbf{S}_i) & -\mathbf{Z}_i \end{bmatrix}, \tag{3.74}
$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{Z}_{ij}}{2} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}+\mathbf{Z}_{ij}+(\mathbf{S}_{ij}-\mathbf{S}_{ij}^T)}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}+\mathbf{Z}_{ij}^T+(\mathbf{S}_{ij}^T-\mathbf{S}_{ij})}{2} & -\frac{\mathbf{Z}_{ij}}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.75}$$

$$\mathbf{Q}_{ii} = \mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii}, \tag{3.76}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \left(\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right). \tag{3.77}$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, sendo que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$. Da equação (3.3) obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\left((\mathbf{A}_i-\mathbf{B}_i\mathbf{F}_j)^T\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{A}_i-\mathbf{B}_i\mathbf{F}_j)\right)\mathbf{x}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\left(\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{G}_{ii}\right)\mathbf{x}(t) \\
&\quad + \sum_{i<j}^{r}2\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\left(\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right)\right)\mathbf{x}(t).
\end{aligned}$$

Das condições (3.76) e (3.77) tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_{ii}\mathbf{x}(t) + \sum_{i<j}^{r}2\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_{ij}\mathbf{x}(t) \\
&= [\mathbf{x}^T(t)\ \mathbf{x}^T(t)\ \ldots\ \mathbf{x}^T(t)] \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^2\mathbf{Q}_{11} & \alpha_1\alpha_2\mathbf{Q}_{12} & \ldots & \alpha_1\alpha_r\mathbf{Q}_{1r} \\ \alpha_1\alpha_2\mathbf{Q}_{12} & \alpha_2^2\mathbf{Q}_{22} & \ldots & \alpha_2\alpha_r\mathbf{Q}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1\alpha_r\mathbf{Q}_{1r} & \alpha_2\alpha_r\mathbf{Q}_{2r} & \ldots & \alpha_r^2\mathbf{Q}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \\
&= [\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_1^2\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \alpha_1\alpha_2\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{12}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{12}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_1\alpha_r\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{1r}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{1r}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right. \\
&\quad + \alpha_1\alpha_2\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{12}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{12}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \alpha_2^2\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_2\alpha_r\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{2r}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{2r}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&\quad + \ldots \\
&\quad \left. + \alpha_1\alpha_r\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{1r}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{1r}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \alpha_2\alpha_r\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{2r}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{2r}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_r^2\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i^2\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]^T + 2\sum_{i<j}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i\alpha_j\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

De (3.78), utilizando-se do Lema 8, equação (3.71), obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{i=1}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i^2\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right\}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]^T + 2\sum_{i<j}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i\alpha_j\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2}\\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix}\\
&= \sum_{i=1}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i^2\left[\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{Z}_i & \mathbf{Z}_i + (\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_i^T)\\ \mathbf{Z}_i + (\mathbf{S}_i^T - \mathbf{S}_i) & -\mathbf{Z}_i\end{bmatrix}\right]\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix}\\
&+2\sum_{i<j}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i\alpha_j\left[\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2}\\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} & \mathbf{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{\mathbf{Z}_{ij}}{2} & \frac{\mathbf{Z}_{ij}+(\mathbf{S}_{ij}-\mathbf{S}_{ij}^T)}{2}\\ \frac{\mathbf{Z}_{ij}^T+(\mathbf{S}_{ij}^T-\mathbf{S}_{ij})}{2} & -\frac{\mathbf{Z}_{ij}}{2}\end{bmatrix}\right]\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Das equações (3.74) e (3.75), tem-se

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i^2\left|\mathbf{E}_{ii}\right|\right\}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]^T + 2\sum_{i<j}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i\alpha_j\left|\mathbf{E}_{ij}\right|\right\}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]^T.$$

Logo, para que $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ sendo $\mathbf{x}(t) \neq 0$, é suficiente que (3.73) seja satisfeita.

Resultados análogos ao descrito no Teorema 17 podem ser obtidos para o caso discreto.

No Capítulo 4 são comparados os resultados destes critérios de análise de estabilidade com condições atuais disponíveis na literatura.

Outras condições são propostas, com resultados compatíveis aos publicados recentemente na literatura.

Considere a forma quadrática a seguir, sendo $\mathbf{Z}_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2\\ \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_1-\mathbf{Z}_2-\mathbf{Z}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{3.79}$$

Pode-se agora descrever a seguinte condição de estabilidade:

Teorema 18 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existem matrizes simétricas* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Z}_i$, $\mathbf{T}_i$ *e matrizes* $\mathbf{T}_{ij}$, $\mathbf{Z}_{i1}$, $\mathbf{Z}_{i2}$, $\mathbf{Z}_{ij}$, $\mathbf{Z}_{ij1}$, $\mathbf{Z}_{ij2}$ *tais que*

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_i \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_{ij} + \mathbf{T}_{ij}^T \geq \mathbf{0}, \quad (i,j = 1,\ldots,r, \quad i<j) \tag{3.80}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \ldots & \mathbf{E}_{1r}\\ \mathbf{E}_{12}^T & \mathbf{E}_{22} & \ldots & \mathbf{E}_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{E}_{1r}^T & \mathbf{E}_{2r}^T & \ldots & \mathbf{E}_{rr}\end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.81}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

sendo que, para $i, j = 1, \ldots, r \quad (i < j)$,

$$\mathbf{E}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii} + \mathbf{Z}_i & \mathbf{Z}_{i1} + \mathbf{T}_i \\ \mathbf{Z}_{i2} + \mathbf{T}_i & -\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_{i1} - \mathbf{Z}_{i2} \end{bmatrix}, \tag{3.82}$$

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{ij} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} + \mathbf{Z}_{ij1} \\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} + \mathbf{Z}_{ij2} & -\mathbf{Z}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij1} - \mathbf{Z}_{ij2} \end{bmatrix} + \mathbf{T}_{ij}, \tag{3.83}$$

$$\mathbf{Q}_{ii} = \mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii}, \tag{3.84}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right), \tag{3.85}$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, sendo que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$. Da equação (3.3) obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_{ii}\mathbf{x}(t) + \sum_{i<j}^{r} 2\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_{ij}\mathbf{x}(t) \\
&= [\mathbf{x}^T(t)\ \mathbf{x}^T(t)\ \ldots\ \mathbf{x}^T(t)| \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^2\mathbf{Q}_{11} & \alpha_1\alpha_2\mathbf{Q}_{12} & \ldots & \alpha_1\alpha_r\mathbf{Q}_{1r} \\ \alpha_1\alpha_2\mathbf{Q}_{12} & \alpha_2^2\mathbf{Q}_{22} & \ldots & \alpha_2\alpha_r\mathbf{Q}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1\alpha_r\mathbf{Q}_{1r} & \alpha_2\alpha_r\mathbf{Q}_{2r} & \ldots & \alpha_r^2\mathbf{Q}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \\
&= [\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_1^2\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \alpha_1\alpha_2\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{12}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{12}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_1\alpha_r\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{1r}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{1r}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right. \\
&\quad + \alpha_1\alpha_2\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{12}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{12}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \alpha_2^2\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_2\alpha_r\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{2r}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{2r}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&\quad + \ldots \\
&\quad \left. + \alpha_1\alpha_r\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{1r}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{1r}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \alpha_2\alpha_r\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{2r}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{2r}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_r^2\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i^2\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]^T + 2\sum_{i<j}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i\alpha_j\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Considerando-se (3.80), então

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{i=1}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i^2\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]^T + 2\sum_{i<j}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i\alpha_j\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \\
&\leq \sum_{i=1}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i^2\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}_i \\ \mathbf{T}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]^T
\end{aligned}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$+2\sum_{i<j}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i\alpha_j\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2}\\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix}. \tag{3.86}$$

Somando-se as equações (3.79) e (3.86), obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{i=1}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i^2\left[\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{T}_i\\ \mathbf{T}_i & \mathbf{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_i & \mathbf{Z}_{i1}\\ \mathbf{Z}_{i2} & -\mathbf{Z}_i-\mathbf{Z}_{i1}-\mathbf{Z}_{i2}\end{bmatrix}\right]\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix}\\
&\quad+\sum_{i<j}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i\alpha_j\left[\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2}\\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} & \mathbf{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_{ij} & \mathbf{Z}_{ij1}\\ \mathbf{Z}_{ij2} & -\mathbf{Z}_{ij}-\mathbf{Z}_{ij1}-\mathbf{Z}_{ij2}\end{bmatrix}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2}\\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} & \mathbf{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_{ij} & \mathbf{Z}_{ij1}\\ \mathbf{Z}_{ij2} & -\mathbf{Z}_{ij}-\mathbf{Z}_{ij1}-\mathbf{Z}_{ij2}\end{bmatrix}^T\right]\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix}\\
&\leq \sum_{i=1}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i^2\left[\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{T}_i\\ \mathbf{T}_i & \mathbf{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_i & \mathbf{Z}_{i1}\\ \mathbf{Z}_{i2} & -\mathbf{Z}_i-\mathbf{Z}_{i1}-\mathbf{Z}_{i2}\end{bmatrix}\right]\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix}\\
&\quad+\sum_{i<j}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i\alpha_j\left[\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2}\\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} & \mathbf{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_{ij} & \mathbf{Z}_{ij1}\\ \mathbf{Z}_{ij2} & -\mathbf{Z}_{ij}-\mathbf{Z}_{ij1}-\mathbf{Z}_{ij2}\end{bmatrix}+\mathbf{T}_{ij}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2}\\ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{2} & \mathbf{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_{ij} & \mathbf{Z}_{ij1}\\ \mathbf{Z}_{ij2} & -\mathbf{Z}_{ij}-\mathbf{Z}_{ij1}-\mathbf{Z}_{ij2}\end{bmatrix}^T+\mathbf{T}_{ij}^T\right]\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Das equações (3.82) e (3.83), tem-se

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i^2\left|\mathbf{E}_{ii}\right|\right\}|\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]^T+\sum_{i<j}^{r}[\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]\left\{\alpha_i\alpha_j\left[\mathbf{E}_{ij}+\mathbf{E}_{ij}^T\right]\right\}|\mathbf{x}^T\ \mathbf{x}^T]^T.$$

Portanto, para que $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ sendo $\mathbf{x}(t) \neq 0$, é suficiente que (3.81) seja satisfeita.

Nos exemplos numéricos que serão descritos no Capítulo 4, os novos critérios de estabilidade propostos nos Teoremas 17 e 18 apresentaram as mesmas regiões de factibilidade obtidas com as condições do Teorema 6, abordados em Teixeira et al. (2003).

Capítulo 4

Análise Comparativa dos Critérios de Estabilidade

4.1 Sistemas Fuzzy Contínuos (SFC)

A análise da estabilidade de sistemas fuzzy TSK tem sido tratada por vários pesquisadores na literatura atual e muitos critérios foram apresentados para esta análise, como em Tanaka, Ikeda e Wang (1998), Teixeira et al. (2000), Kim e Lee (2000), Tuan et al. (2001), Teixeira et al. (2003) e Xiaodong e Qingling (2003). A seguir são apresentadas análises comparativas destes critérios de estabilidade recentes publicados na literatura, para o caso contínuo, sendo descritas provas teóricas e também simulações que validam os métodos em questão.

Conforme visto na Seção 3.1, em Teixeira et al. (2003) foram apresentadas condições mais gerais que as descritas em Tanaka, Ikeda e Wang (1998), Kim e Lee (2000) e Teixeira et al. (2000). A seguir são apresentadas comparações entre condições recentes publicadas na literatura e também com condições propostas nesta dissertação.

4.1.1 Caso 1: Teorema 5 e Teorema 6

Teorema 19 *Se o Teorema 5 (teorema apresentado em Tuan et al. (2001)) é satisfeito, então o Teorema 6 (teorema proposto em Teixeira et al. (2003)) também será.*

Prova: Inicialmente, considere as condições do Teorema 5 para $r = 2$:

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} (\mathbf{G}_{11}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{11}) & \tilde{\mathbf{Q}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & (\mathbf{G}_{22}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \tilde{\mathbf{Q}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad e \tag{4.1}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{12}+\mathbf{G}_{21}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{12}+\mathbf{G}_{21}}{2}\right) - \tilde{\mathbf{Q}}_{12} = \mathbf{Q}_{12} - \tilde{\mathbf{Q}}_{12} \leq \mathbf{0}. \tag{4.2}$$

Da condição (4.2), defina $\mathbf{T}_{ij}$:

$$-\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{Q}_{ij} - \tilde{\mathbf{Q}}_{ij} \leq \mathbf{0}. \tag{4.3}$$

Então

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{ij} = \mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{T}_{ij}. \tag{4.4}$$

Assim, substituindo (4.4) em (4.1) tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12}+\mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}+\mathbf{T}_{12} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.5}$$

sendo que $\mathbf{T}_{12} \geq \mathbf{0}$.

Portanto, observe que nesta situação o Teorema 6 é satisfeito, para $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{W}_{12h} = \mathbf{S}_{12h} = \mathbf{0}$, $h = 1, 2$.

Agora, considere para $r = 3$. Então do Teorema 5, existem $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ e $\tilde{\mathbf{Q}}_{ij}$, tais que:

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii}) & \tilde{\mathbf{Q}}_{ij} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{ij} & \frac{1}{2}(\mathbf{G}_{jj}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{jj}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{ii} & \tilde{\mathbf{Q}}_{ij} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{ij} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{jj} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad e \tag{4.6}$$

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right) - \tilde{\mathbf{Q}}_{ij} = \mathbf{Q}_{ij} - \tilde{\mathbf{Q}}_{ij} \leq \mathbf{0}. \tag{4.7}$$

para $(i, j) = (1, 2), (1, 3)$ e $(2, 3)$.

Logo, existe um δ suficientemente pequeno e positivo tal que:

$$\mathbf{J}_{ij} + \delta\mathbf{I} < \mathbf{0}, \tag{4.8}$$

para $(i, j) = (1, 2), (1, 3)$ e $(2, 3)$.

Assim, note que, considerando (4.6) e (4.7), então

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \tilde{\mathbf{Q}}_{13} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \mathbf{Q}_{22} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{13} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{11} & \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Q}}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{13} & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{22} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{11} + \delta\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{22} + \delta\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2\delta\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{11} + \delta\mathbf{I} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Q}}_{13} \\ \mathbf{0} & -2\delta\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{13} & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{33} + \delta\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$+\begin{bmatrix} -2\delta\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{22}+\delta\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{33}+\delta\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.9}$$

pois, considerando a expressão (4.8), cada uma das três matrizes à esquerda da desigualdade em (4.9) é negativa definida.

Da mesma forma do caso anterior, defina

$$-\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{Q}_{ij} - \tilde{\mathbf{Q}}_{ij} \leq \mathbf{0}. \tag{4.10}$$

Então

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{ij} = \mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{T}_{ij}. \tag{4.11}$$

Substituindo (4.11) em (4.9) tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12}+\mathbf{T}_{12} & \mathbf{Q}_{13}+\mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{Q}_{12}+\mathbf{T}_{12} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23}+\mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{Q}_{13}+\mathbf{T}_{13} & \mathbf{Q}_{23}+\mathbf{T}_{23} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.12}$$

sendo $\mathbf{T}_{ij} \geq \mathbf{0}$ para $(i,j) = (1,2),(1,3)$ *e* $(2,3)$.

Logo, como no caso anterior, o Teorema 6 é satisfeito, para $\mathbf{Z}_{jh} = \mathbf{W}_{ijh} = \mathbf{S}_{ijh} = \mathbf{0}$, $i,j,h = 1,2,3$, $(i<j)$, concluindo assim a prova para $r=3$.

Agora, para um caso geral $(r>3)$, podemos utilizar a seguinte decomposição:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \tilde{\mathbf{Q}}_{13} & \cdots & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_{1r} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \mathbf{Q}_{22} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} & \cdots & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_{2r} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{13} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} & \mathbf{Q}_{33} & \cdots & \cdots & \tilde{\mathbf{Q}}_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{1r} & \tilde{\mathbf{Q}}_{2r} & \tilde{\mathbf{Q}}_{3r} & \cdots & \cdots & \mathbf{Q}_{rr} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{11} & \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{r-1}\tilde{\mathbf{Q}}_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{r-1}\tilde{\mathbf{Q}}_{1r} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{rr} \end{bmatrix}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{22} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{22} & 0 & \dots & 0 & \tilde{\mathbf{Q}}_{2r} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{Q}}_{2r} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{rr} \end{bmatrix}$$

$$+\dots$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{r-1} & \tilde{\mathbf{Q}}_{1,r-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{Q}}_{1,r-1} & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{rr} \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Observe que o lado direito da igualdade é composto pela soma de

$$(r-1) + (r-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{r(r-1)}{2}$$

matrizes, sendo que, para cada $i = 1, 2, \dots, r$, a matriz $\mathbf{Q}_{ii}$ aparece em $r-1$ dessas matrizes. Dessa forma, para cada $i = 1, 2, \dots, r$, existem

$$\frac{r(r-1)}{2} - (r-1) = \frac{(r-1)(r-2)}{2}$$

matrizes que não dependem de $\mathbf{Q}_{ii}$. Logo, se somarmos δI a cada matriz $\mathbf{Q}_{ii}$ que aparece à direita da igualdade em (4.13), então devemos subtrair

$$\frac{\delta(r-1)}{|(r-1)(r-2)/2|} = \frac{2\delta}{r-2}$$

de cada elemento (i,i) das matrizes que não dependem de $\mathbf{Q}_{ii}$, de tal forma a não alterar a igualdade, ou seja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \tilde{\mathbf{Q}}_{13} & \dots & \dots & \tilde{\mathbf{Q}}_{1r} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \mathbf{Q}_{22} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} & \dots & \dots & \tilde{\mathbf{Q}}_{2r} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{13} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} & \mathbf{Q}_{33} & \dots & \dots & \tilde{\mathbf{Q}}_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{1r} & \tilde{\mathbf{Q}}_{2r} & \tilde{\mathbf{Q}}_{3r} & \dots & \dots & \mathbf{Q}_{rr} \end{bmatrix} =$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{11}+\delta\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{Q}}_{12} & 0 & \dots & 0 \\
\tilde{\mathbf{Q}}_{12} & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{22}+\delta\mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)}
\end{bmatrix} + \dots
$$

$$
+ \begin{bmatrix}
\frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{11}+\delta\mathbf{I} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{r-1}\tilde{\mathbf{Q}}_{1r} \\
0 & \frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)} & 0 \\
\frac{1}{r-1}\tilde{\mathbf{Q}}_{1r} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{rr}+\delta\mathbf{I}
\end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix}
\frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{22}+\delta\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \tilde{\mathbf{Q}}_{23} & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{33}+\delta\mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)}
\end{bmatrix} + \dots
$$

$$
+ \begin{bmatrix}
\frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{22}+\delta\mathbf{I} & 0 & \dots & 0 & \tilde{\mathbf{Q}}_{2r} \\
0 & 0 & \frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)} & 0 \\
0 & \tilde{\mathbf{Q}}_{2r} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{rr}+\delta\mathbf{I}
\end{bmatrix}
$$

$$
+ \dots
$$

$$
+ \begin{bmatrix}
\frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & \frac{-2\delta\mathbf{I}}{(r-2)} & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{r-1}+\delta\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{Q}}_{1,r-1} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{Q}}_{1,r-1} & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{rr}+\delta\mathbf{I}
\end{bmatrix}. \tag{4.14}
$$

Considerando que $\delta > 0$ e satisfaz (4.8), então cada matriz da soma à direita da igualdade de (4.14) é negativa definida.

Para completar a prova, de (4.11), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12}+\mathbf{T}_{12} & \mathbf{Q}_{13}+\mathbf{T}_{13} & \dots & \mathbf{Q}_{1r}+\mathbf{T}_{1r} \\ \mathbf{Q}_{12}+\mathbf{T}_{12} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23}+\mathbf{T}_{23} & \dots & \mathbf{Q}_{2r}+\mathbf{T}_{2r} \\ \mathbf{Q}_{13}+\mathbf{T}_{13} & \mathbf{Q}_{23}+\mathbf{T}_{23} & \mathbf{Q}_{33} & \dots & \mathbf{Q}_{3r}+\mathbf{T}_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{1r}+\mathbf{T}_{1r} & \mathbf{Q}_{2r}+\mathbf{T}_{2r} & \mathbf{Q}_{3r}+\mathbf{T}_{3r} & \dots & \mathbf{Q}_{rr} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.15}$$

sendo $\mathbf{T}_{ij} \geq \mathbf{0}$ para $(i,j) = 1,\dots,r \ \ (i<j)$.

Logo, o Teorema 6 é satisfeito, para $\mathbf{Z}_{jh} = \mathbf{W}_{ijh} = \mathbf{S}_{ijh} = \mathbf{0},\ i,j,h = 1,\dots,r,\ (i<j)$, concluindo assim a prova para r qualquer.

A seguir são apresentados os modelos utilizados na obtenção dos resultados e comparações no decorrer deste capítulo para o caso contínuo.

Exemplo 1 (2 Modelos):

Para o exemplo abaixo, os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, para cada valor de a e b, são determinados selecionando-se |-2 -2| como autovalores para os dois modelos locais na CDP.

Considere o SFC sendo r=2:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, as expressões para $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ são:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 6 & -6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7+a}{b} & \frac{13}{b} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2 (3 Modelos):

Conforme o exemplo anterior, os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ para cada valor de a e b, são determinados selecionando-se |-2 -2| como autovalores para os três modelos locais.

Considere o SFC sendo r=3:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, as expressões para $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ são:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 6 & -6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7+a}{b} & \frac{15}{b} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

O Matlab (versão 5.3), com o "LMI Control Toolbox" (Gahinet et al., 1995), foi o software utilizado na verificação das regiões de factibilidade para cada método analisado (problemas de programação semi-definida).

As Figuras 4.1 e 4.2 comparam as áreas de factibilidade dos dois métodos tratados neste caso, para 2 e 3 modelos, respectivamente.

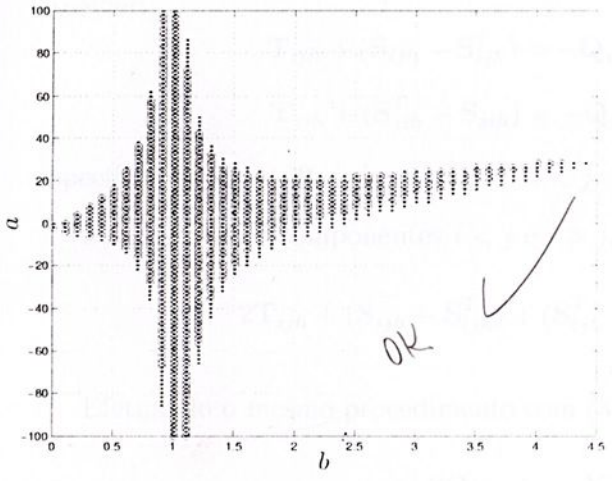


Figura 4.1: (2 Modelos) Área factível do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("o") e área factível do método proposto em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por ("·").

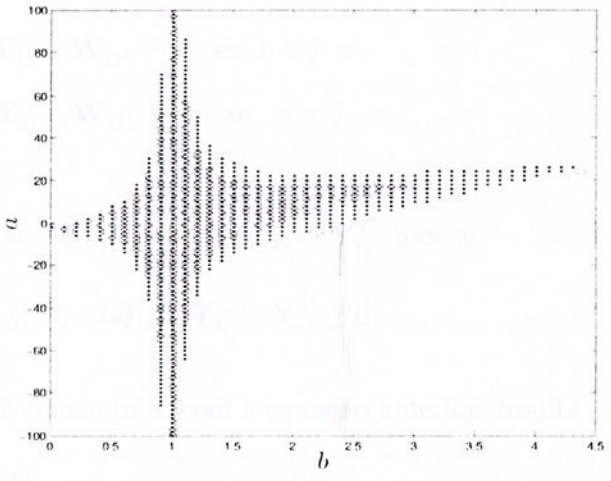


Figura 4.2: (3 Modelos) Área factível do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("o") e área factível do método proposto em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por ("·").

Observando as Figuras 4.1 e 4.2, pode-se notar que o método proposto em Teixeira et al. (2003) foi superior ao descrito em Tuan et al. (2001). Esta melhoria ocorreu principalmente com três modelos locais. Uma justificativa para estes resultados é a estrutura do método descrito em Tuan et al. (2001), que considera análises de pares dois a dois, enquanto que em Teixeira et al. (2003) o problema é analisado globalmente.

Como já apresentado nesta dissertação em seções anteriores, em Xiaodong e Qingling (2003) foram propostas condições mais relaxadas de estabilidade comparado com as condições descritas em Kim e Lee (2000). O segundo caso apresenta a comparação destas condições com as apresentadas em Teixeira et al. (2003).

4.1.2 Caso 2: Teorema 10 e Teorema 6

Teorema 20 *Se as condições do Teorema 10 (Xiaodong e Qingling, 2003) são satisfeitas, então as condições do Teorema 6 (Teixeira et al., 2003) também serão.*

Prova: Das condições do Teorema 10 e as definições descritas pelas equações (3.31) e (3.34), tem-se

$$\mathbf{Q}_i + \mathbf{Y}_{ii} < \mathbf{0} \quad e$$

$$2\mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Y}_{ij} + \mathbf{Y}_{ij}^T \leq \mathbf{0},$$

sendo que $\mathbf{Y}_{ji} = \mathbf{Y}_{ij}^T$, para $i, j = 1, \ldots, r, \quad i < j$.

Então, como $\mathbf{T}_{ijh} \geq \mathbf{0}$ e simétrica, para $i, j = 1, \ldots, r$ $(i < j)$, note que em (3.33) pode-se escolher:

$$\mathbf{T}_{ijh} + (\mathbf{S}_{ijh} - \mathbf{S}_{ijh}^T) = -\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Y}_{ij}, \quad \mathbf{W}_{ijh} = \mathbf{0} \quad se \quad i < j \quad e$$

$$\mathbf{T}_{jih} + (\mathbf{S}_{jih}^T - \mathbf{S}_{jih}) = -\mathbf{Q}_{ji} - \mathbf{Y}_{ji}, \quad \mathbf{W}_{jih} = \mathbf{0} \quad se \quad i > j,$$

especificando $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{0}$, $i, j = 1, \ldots, r, \quad i < j$.

Somando-se os componentes $i < j$ e $i > j$, e considerando-se que $\mathbf{Y}_{ji} = \mathbf{Y}_{ij}^T$, tem-se:

$$2\mathbf{T}_{ijh} + (\mathbf{S}_{ijh} - \mathbf{S}_{ijh}^T) + (\mathbf{S}_{ijh}^T - \mathbf{S}_{ijh}) = -2\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{Y}_{ij}^T \geq \mathbf{0}.$$

Efetuando o mesmo procedimento com (3.33) e somando-se com a equação anterior, resulta

$$2\mathbf{Qn}_{ijh} = -\mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{Y}_{ij}^T, \quad ou \quad seja,$$

$$\mathbf{Qn}_{ijh} = -\mathbf{Y}_{ij}, \quad se \quad i < j \quad e$$

$$\mathbf{Qn}_{jih} = -\mathbf{Y}_{ji}, \quad se \quad i > j,$$

sendo $i, j, h = 1, \ldots, r$ $(i < j)$.

Portanto, considerando que $\mathbf{Z}_{jh} = \mathbf{0}, \quad j, h = 1, \ldots, r$, pois $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{0}$, $i, j = 1, \ldots, r, \quad i < j$, de (3.22), (3.30) e $\mathbf{Q}_i < -\mathbf{Y}_{ii}, \quad i = 1, \ldots, r$, tem-se que

$$\mathbf{Qt}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & -\mathbf{Y}_{12}^T & \ldots & -\mathbf{Y}_{1r}^T \\ -\mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Q}_2 & \ldots & -\mathbf{Y}_{2r}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{Y}_{1r} & -\mathbf{Y}_{2r} & \ldots & \mathbf{Q}_r \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} -\mathbf{Y}_{11} & -\mathbf{Y}_{12}^T & \ldots & -\mathbf{Y}_{1r}^T \\ -\mathbf{Y}_{12} & -\mathbf{Y}_{22} & \ldots & -\mathbf{Y}_{2r}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{Y}_{1r} & -\mathbf{Y}_{2r} & \ldots & -\mathbf{Y}_{rr} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad h = 1, \ldots, r.$$

As Figuras 4.3 e 4.4 comparam as áreas de factibilidade para os dos dois métodos descritos.

Na prova do Teorema 20, adotou-se $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{0}, \quad i < j, \quad i, j, h = 1, \ldots, r$, desta forma, teoricamente pode-se dizer que o Teorema 6 apresenta uma generalidade maior que o teorema apresentado em Xiaodong e Qingling (2003), embora não pôde ser observado nos resultados descritos nas Figuras 4.3 e 4.4, a superioridade do método apresentado em Teixeira et al. (2003).

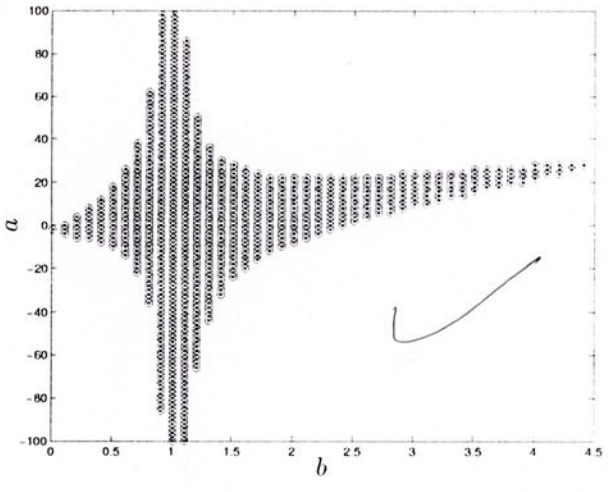


Figura 4.3: (2 Modelos) Área factível do método proposto em Xiaodong e Qingling (2003), Teorema 10, indicada por ("o") e área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por (".").

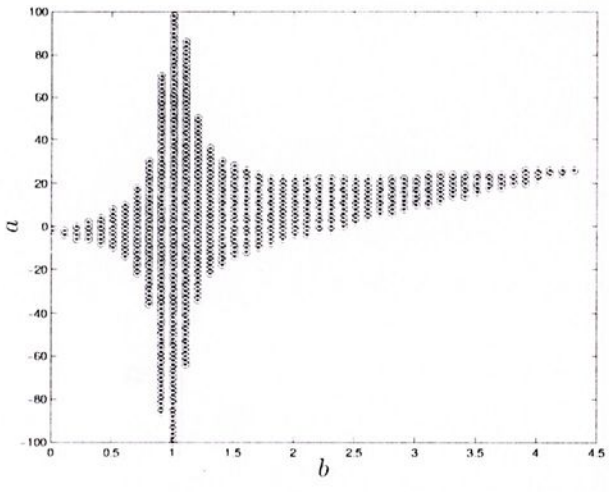


Figura 4.4: (3 Modelos) Área factível do método proposto em Xiaodong e Qingling (2003), Teorema 10, indicada por ("o") e área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por (".").

4.1.3 Caso 3: Teorema 1 e Teorema 5

Teorema 21 *Para r=2, se as condições do Teorema 1 (Teixeira et al., 2000) forem satisfeitas, então as condições do Teorema 5 (Tuan et al., 2001) também serão.*

Prova: Seguem-se as idéias descritas anteriormente. Considere as condições descrita pela equação (3.12) para r=2:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_{12} + \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12} + \mathbf{P}_{12} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{4.16}$$

Seja $\mathbf{Qt}_{12} = \mathbf{Q}_{12} + \mathbf{P}_{12}$, $\mathbf{P}_{12} \geq \mathbf{0}$, então $\mathbf{Qt}_{12} \geq \mathbf{Q}_{12}$. Portanto, se as condições acima forem satisfeitas, a equação a seguir (Tuan et al., 2001) se mantém, concluindo assim a prova:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Qt}_{12} \\ \mathbf{Qt}_{12} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.17}$$

$$\mathbf{Q}_{12} \leq \mathbf{Qt}_{12}. \tag{4.18}$$

Nas Figuras 4.5 e 4.6 observa-se a comparação dos dois casos através da análise de factibilidade, para os dois exemplos abordados.

É observado na Figura 4.5, que neste exemplo abordado, para $r = 2$ modelos, os dois métodos fornecem os mesmos resultados em termos de suas áreas factíveis, já que apresentam a mesma estrutura, como mostrado nas análises teóricas.

Para $r > 2$, verifica-se que o Teorema 5 (Tuan et al., 2001) é conservativo em relação ao Teorema 1 (Teixeira et al., 2000), como pode ser observado nos resultados apresentados pela Figura 4.6. O motivo desse fato, como destacado anteriormente, foi a divisão efetuada pelo

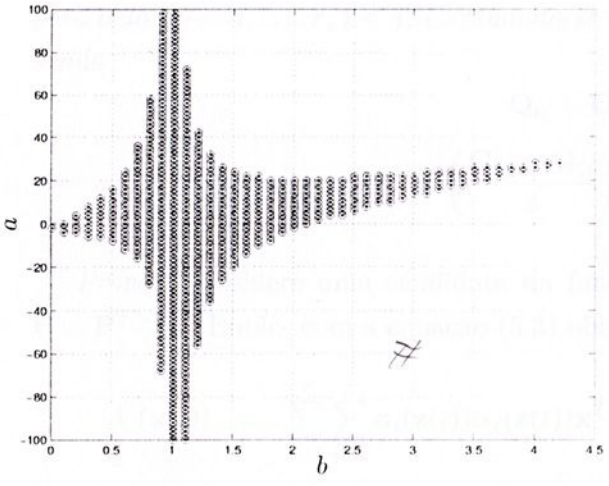


Figura 4.5: (2 Modelos) Área factível do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("o") e área factível do método proposto em Teixeira et al (2000), Teorema 1, indicada por ("·").

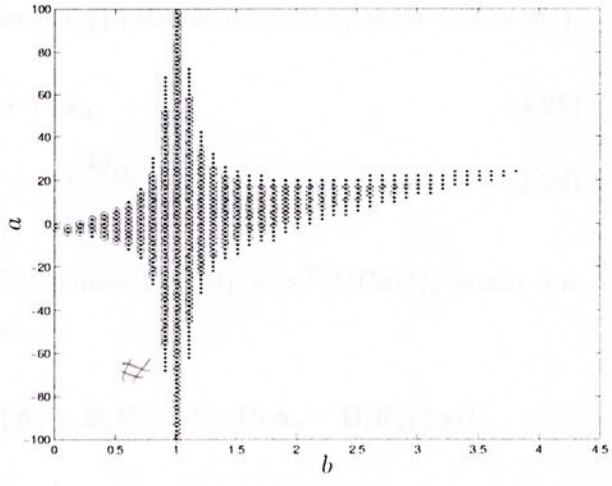


Figura 4.6: (3 Modelos) Área factível do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("o") e área factível do método proposto em Teixeira et al (2000), Teorema 1, indicada por ("·").

método descrito em Tuan et al. (2001), cujas condições exigem que cada matriz $2n \times 2n$ seja negativa definida, similar ao caso 1, na Seção 4.1.2.

A idéia a seguir foi proposta a fim de flexibilizar a LMI acima, de forma que, nas divisões em matrizes $2n \times 2n$ apresentado por Tuan et al. (2001) não impliquem em LMIs conservativas, ou seja, mantenham a generalidade apresentada pelo Teorema 5 para $i, j = 1, \ldots\ r$ $(r > 2)$.

Teorema 22 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existir uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$ *e matrizes simétricas* $\mathbf{Q}_{ii}^{ij}$, $\mathbf{Qs}_{ij}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii}^{ij} & \mathbf{Qs}_{ij} \\ \mathbf{Qs}_{ij} & \mathbf{Q}_{jj}^{ij} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i, j = 1, \ldots, r-1, \quad i < j) \quad e \tag{4.19}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Qs}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{4.20}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii} - \sum\limits_{\substack{k<j \\ k=i}}^{r-1} \mathbf{Q}_{ii}^{kj} - \sum\limits_{\substack{k<j \\ j=i}}^{r-1} \mathbf{Q}_{ii}^{kj} & \mathbf{Qs}_{ir} \\ \mathbf{Qs}_{ir} & \mathbf{Q}_{rr}^{ir} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i = 1, \ldots, r-2) \tag{4.21}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Qs}_{ir} \leq \mathbf{0}, \tag{4.22}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{r-1,r-1} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{Q}_{r-1,r-1}^{k,r-1} & \mathbf{Qs}_{r-1,r} \\ \mathbf{Qs}_{r-1,r} & \mathbf{Q}_{rr} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{Q}_{rr}^{k,r} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.23}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Qs}_{r-1,r} \leq \mathbf{0}, \tag{4.24}$$

unesp

para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $i < j$, *excetuando-se os pares* (i, j) *tais que* $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$, $\forall\, \mathbf{z}(t)$, *sendo*

$$\mathbf{Q}_{ii} = \mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii}, \tag{4.25}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right). \tag{4.26}$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, sendo que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$. Então, com a equação (3.3) obtém-se

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\left((\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j)^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j)\right)\mathbf{x}(t).$$

Note que, em Tuan et al. (2001) a equação acima foi reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i<j}^{r} \mathbf{x}^T(t)\Bigg[&\frac{1}{r-1}\alpha_i^2(\mathbf{z}(t))(\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii}) + \frac{1}{r-1}\alpha_j^2(\mathbf{z}(t))(\mathbf{G}_{jj}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{jj}) \\ &+2\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\left(\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)\right)\Bigg]\mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Das condições (4.25) e (4.26) e adotando-se $\alpha_i(\mathbf{z}(t)) = \alpha_i$, então

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{i<j}^{r} \mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}\alpha_i^2\mathbf{Q}_{ii} + \frac{1}{r-1}\alpha_j^2\mathbf{Q}_{jj} + 2\alpha_i\alpha_j\mathbf{Q}_{ij}\right)\mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{i<j}^{r} \mathbf{x}^T(t)|\alpha_i\mathbf{I} \;\; \alpha_j\mathbf{I}|\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{Q}_{ij} \\ \mathbf{Q}_{ij} & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{jj}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i\mathbf{I} \\ \alpha_j\mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t).\end{aligned} \tag{4.27}$$

Por simplicidade, considere o caso em que $r = 3$. Então das condições acima, tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = &\;\mathbf{x}^T(t)|\alpha_1\mathbf{I} \;\; \alpha_2\mathbf{I}|\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_2\mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \\ &+\mathbf{x}^T(t)|\alpha_1\mathbf{I} \;\; \alpha_3\mathbf{I}|\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{13} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \\ &+\mathbf{x}^T(t)|\alpha_2\mathbf{I} \;\; \alpha_3\mathbf{I}|\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{13} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Ao invés de dividirmos os termos $\mathbf{Q}_{ii}$ e $\mathbf{Q}_{jj}$ por $(r-1)$, como efetuado em (Tuan et al., 2001),



pode-se utilizar de matrizes simétricas $\mathbf{Q}_{ii}^{ij}$ e $\mathbf{Q}_{jj}^{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, r, \quad i < j$, tais que

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}^T(t)|\alpha_1\mathbf{I} \quad \alpha_2\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{12} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{22}^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_2\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \\
&+ \mathbf{x}^T(t)|\alpha_1\mathbf{I} \quad \alpha_3\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{11}^{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{13} & \mathbf{Q}_{33}^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\
&+ \mathbf{x}^T(t)|\alpha_2\mathbf{I} \quad \alpha_3\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{22} - \mathbf{Q}_{22}^{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{13} & \mathbf{Q}_{33} - \mathbf{Q}_{33}^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Seguindo-se a mesma idéia para um r genérico e considerando-se $\Gamma_{ii} = \sum_{\substack{k<j \\ k=i}}^{r-1} \mathbf{Q}_{ii}^{kj} + \sum_{\substack{k<j \\ j=i}}^{r-1} \mathbf{Q}_{ii}^{kj}$, os procedimentos acima podem ser descritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \Bigg[& |\alpha_1\mathbf{I} \quad \alpha_2\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{12} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{22}^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_2\mathbf{I} \end{bmatrix} + |\alpha_1\mathbf{I} \quad \alpha_3\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{13} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{13} & \mathbf{Q}_{33}^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} + \ldots \\
& + \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{1,r-1} & \mathbf{Q}_{1,r-1} \\ \mathbf{Q}_{1,r-1} & \mathbf{Q}_{r-1,r-1}^{1,r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} - \sum_{k=2}^{r-1} \mathbf{Q}_{11}^{1,k} & \mathbf{Q}_{1,r} \\ \mathbf{Q}_{1,r} & \mathbf{Q}_{rr}^{1,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \\
& + |\alpha_2\mathbf{I} \quad \alpha_3\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{22}^{23} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{Q}_{23} & \mathbf{Q}_{33}^{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} + |\alpha_2\mathbf{I} \quad \alpha_4\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{22}^{24} & \mathbf{Q}_{24} \\ \mathbf{Q}_{24} & \mathbf{Q}_{44}^{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_4\mathbf{I} \end{bmatrix} + \ldots \\
& + \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{22}^{2,r-1} & \mathbf{Q}_{2,r-1} \\ \mathbf{Q}_{2,r-1} & \mathbf{Q}_{r-1,r-1}^{2,r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{22} - \Gamma_{22} & \mathbf{Q}_{2,r} \\ \mathbf{Q}_{2,r} & \mathbf{Q}_{rr}^{2,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \\
& \vdots \\
& + \begin{bmatrix} \alpha_{r-2}\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{r-2,r-2}^{r-2,r-1} & \mathbf{Q}_{r-2,r-1} \\ \mathbf{Q}_{r-2,r-1} & \mathbf{Q}_{r-1,r-1}^{r-2,r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{r-2}\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{r-2}\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{r-2,r-2} - \Gamma_{r-2,r-2} & \mathbf{Q}_{r-2,r} \\ \mathbf{Q}_{r-2,r} & \mathbf{Q}_{rr}^{r-2,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{r-2}\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \alpha_{r-1}\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{r-1,r-1} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{Q}_{r-1,r-1}^{k,r-1} & \mathbf{Q}_{r-1,r} \\ \mathbf{Q}_{r-1,r} & \mathbf{Q}_{rr} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{Q}_{rr}^{k,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{r-1}\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \Bigg] \mathbf{x}(t).
\end{aligned}$$

Ou seja, para um caso geral, tem-se

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i<j}^{r-1} \mathbf{x}^T(t)|\alpha_i\mathbf{I} \quad \alpha_j\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii}^{ij} & \mathbf{Q}_{ij} \\ \mathbf{Q}_{ij} & \mathbf{Q}_{jj}^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i\mathbf{I} \\ \alpha_j\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$



$$+ \sum_{i=1}^{r-2} \mathbf{x}^T(t)[\alpha_i \mathbf{I} \quad \alpha_r \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii} - \sum\limits_{\substack{k<j \\ k=i}}^{r-1} \mathbf{Q}_{ii}^{kj} - \sum\limits_{\substack{k<j \\ j=i}}^{r-1} \mathbf{Q}_{ii}^{kj} & \mathbf{Q}_{ir} \\ \mathbf{Q}_{ir} & \mathbf{Q}_{rr}^{ir} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \mathbf{I} \\ \alpha_r \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$+ \mathbf{x}^T(t)[\alpha_{r-1} \mathbf{I} \quad \alpha_r \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{r-1,r-1} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{Q}_{r-1,r-1}^{k,r-1} & \mathbf{Q}_{r-1,r} \\ \mathbf{Q}_{r-1,r} & \mathbf{Q}_{rr} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{Q}_{rr}^{k,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{r-1} \mathbf{I} \\ \alpha_r \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \tag{4.29}$$

Utilizando-se o Lema 7, as matrizes $2n \times 2n$ definida em (4.29) têm a forma descrita em (4.19)-(4.24), respectivamente. Logo, se cada umas destas matrizes $2n \times 2n$ forem negativa definida, então $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ para $\mathbf{x}(t) \neq 0$, o que conclui a prova.

As Figuras 4.7 e 4.8 mostram as áreas factíveis comparando o método proposto neste teorema com o proposto em Teixeira et al. (2000) e Tuan et al. (2001).

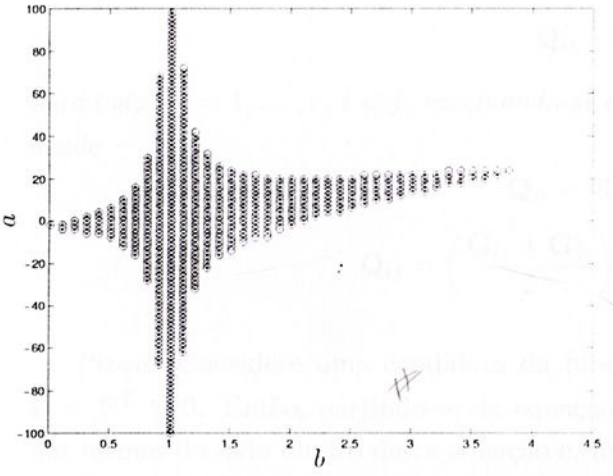


Figura 4.7: (3 Modelos) Área factível do método descrito em Teixeira et al (2000), Teorema 1, indicada por ("o") e área factível do método proposto no Teorema 22, indicada por (".").

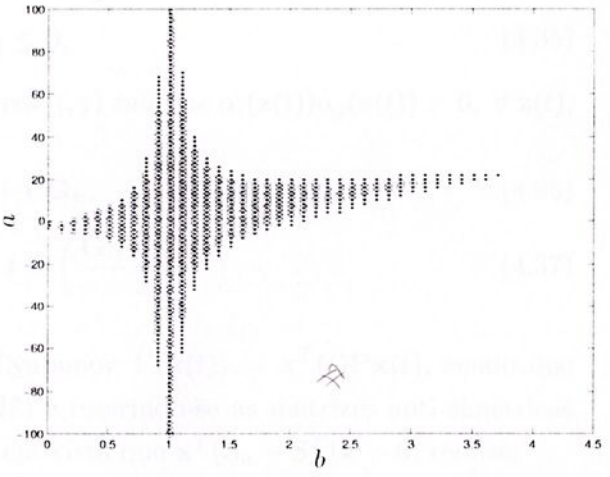


Figura 4.8: (3 Modelos) Área factível do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("o") e área factível do método no Teorema 22, indicada por (".").

É observado na Figura 4.7 que o método descrito faz com que a análise de estabilidade possa ser realizada separadamente em matrizes $2n \times 2n$ sem perda de generalidade para os métodos de análise global.

A seguir emprega-se o mesmo raciocínio do teorema anterior, utilizando-se agora as propriedades das matrizes anti-simétricas, como proposto pelo Teorema 13 (Seção 3.2), flexibilizando-se o problema de análise da estabilidade na obtenção da solução das LMIs.

Teorema 23 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida*

comum $\mathbf{P}$ *e matrizes simétricas* $\mathbf{Q}_{ii}^{ij}$, $\mathbf{Qs}_{ij}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii}^{ij} & \mathbf{Qs}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Qs}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \mathbf{Q}_{jj}^{ij} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i,j = 1,\ldots,r-1, \quad i<j) \quad e \tag{4.30}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Qs}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{4.31}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ii} - \sum_{\substack{k<j \\ k=i}}^{r-1} \mathbf{Q}_{ii}^{kj} - \sum_{\substack{k<j \\ j=i}}^{r-1} \mathbf{Q}_{ii}^{kj} & \mathbf{Qs}_{ir} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Qs}_{ir} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \mathbf{Q}_{rr}^{ir} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i = 1,\ldots,r-2) \tag{4.32}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Qs}_{ir} \leq \mathbf{0}, \tag{4.33}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{r-1,r-1} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{Q}_{r-1,r-1}^{k,r-1} & \mathbf{Qs}_{r-1,r} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Qs}_{r-1,r} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \mathbf{Q}_{rr} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{Q}_{rr}^{k,r} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i = r-1, \ j = r) \tag{4.34}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Qs}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{4.35}$$

para todo $i,j = 1,\ldots,r$, $i<j$, *excetuando-se os pares* (i,j) *tais que* $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$, $\forall\, \mathbf{z}(t)$, *sendo*

$$\mathbf{Q}_{ii} = \mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii}, \tag{4.36}$$

$$\therefore \mathbf{Q}_{ij} = \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right). \tag{4.37}$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, sendo que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$. Então, partindo-se da equação (4.28) e inserindo-se as matrizes anti-simétricas nos termos do lado direito desta equação e, tendo em vista que $\mathbf{x}^T(\mathbf{S}_a - \mathbf{S}_a^T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) \;=\; & \mathbf{x}^T(t)|\alpha_1\mathbf{I} \;\; \alpha_2\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{12} & \mathbf{Q}_{12} + (\mathbf{S}_{12} - \mathbf{S}_{12}^T) \\ \mathbf{Q}_{12} + (\mathbf{S}_{12}^T - \mathbf{S}_{12}) & \mathbf{Q}_{22}^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_2\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ & + \mathbf{x}^T(t)|\alpha_1\mathbf{I} \;\; \alpha_3\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{11}^{12} & \mathbf{Q}_{13} + (\mathbf{S}_{13} - \mathbf{S}_{13}^T) \\ \mathbf{Q}_{13} + (\mathbf{S}_{13}^T - \mathbf{S}_{13}) & \mathbf{Q}_{33}^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ & + \mathbf{x}^T(t)|\alpha_2\mathbf{I} \;\; \alpha_3\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{22} - \mathbf{Q}_{22}^{12} & \mathbf{Q}_{23} + (\mathbf{S}_{23} - \mathbf{S}_{23}^T) \\ \mathbf{Q}_{23} + (\mathbf{S}_{23}^T - \mathbf{S}_{23}) & \mathbf{Q}_{33} - \mathbf{Q}_{33}^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Agora, para um caso geral, segue o mesmo procedimento descrito na equação (4.29).

Portanto, se o conjunto de matrizes $2n \times 2n$ definidas em (4.30)-(4.35) forem satisfeitas, então $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ para $\mathbf{x}(t) \neq 0$, concluindo a prova.

As Figuras 4.9 e 4.10 comparam através das áreas de factibilidade, para os exemplos abor-



dados, o método proposto neste teorema com os descritos nos Teoremas 5 (Tuan et al., 2001) e 6 (Teixeira et al., 2003), respectivamente.

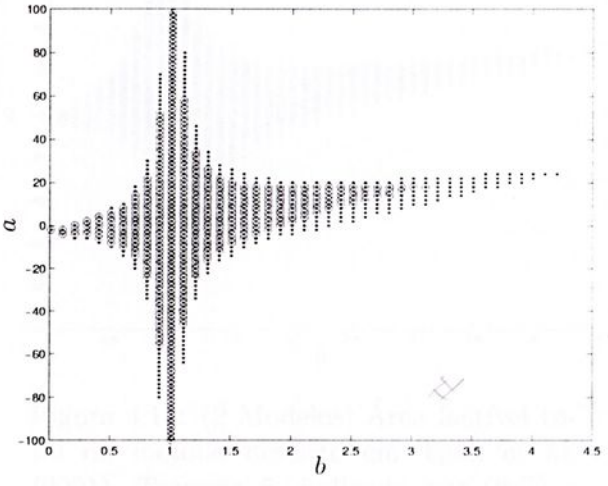


Figura 4.9: (3 Modelos) Área factível do Teorema 5, descrito em Tuan et al (2001) indicada por ("∘") e área factível do método proposto no Teorema 23, indicada por ("·").

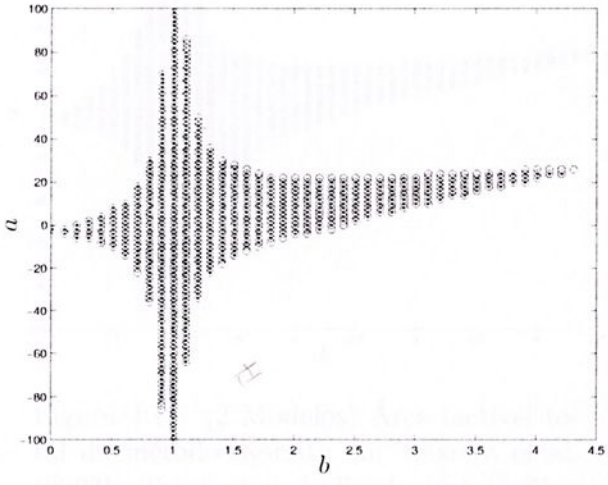


Figura 4.10: (3 Modelos) Área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por ("∘") e área factível do método proposto no Teorema 23, indicada por ("·").

O método proposto neste teorema é uma generalização dos resultados propostos em Tuan et al. (2001), porém podemos dizer que em termos de área de factibilidade, os resultados deste teorema são no máximo iguais aos dos descritos em Teixeira et al. (2003).

Na avaliação dos critérios de estabilidade, a maioria dos artigos têm explorado exemplos de simulação utilizando 2 modelos. Exemplos de simulação utilizando 3 modelos foram úteis nos testes comparativos utilizados, na tentativa de utilizar-se de meios para a avaliação de estabilidade dos métodos descritos.

É observado nesta seção que é possível efetuar uma análise de estabilidade separadamente, em pares $i < j$, como efetuado no Teorema 23, fornecendo, nos exemplos estudados, os mesmos resultados obtidos pelos métodos recentes de estabilidade que utilizam-se de uma análise global. Neste caso são válidos os comentários descritos na Observação 4 (Apêndice B).

4.1.4 Caso 4: Teoremas da Seção 3.2 e Teorema 5

As Figuras 4.11 e 4.12 comparam os critérios de estabilidade propostos nos Teoremas 13, 17 e 18, descritos na Seção 3.2, com o proposto em Tuan et al. (2001) e em Teixeira et al. (2003).

As Figuras 4.13 e 4.14 ilustram a abrangência em termos de factibilidade dos métodos tratados no caso contínuo, para $r = 2$ e $r > 2$ modelos, respectivamente.

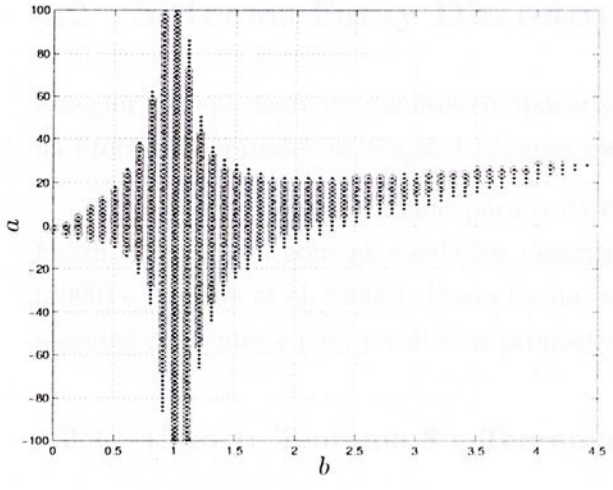


Figura 4.11: (2 Modelos) Área factível total do método descrito em Tuan et al. (2001), Teorema 5, indicada por ("∘") e área factível total do método proposto no Teorema 13 desta dissertação, indicada por ("·").

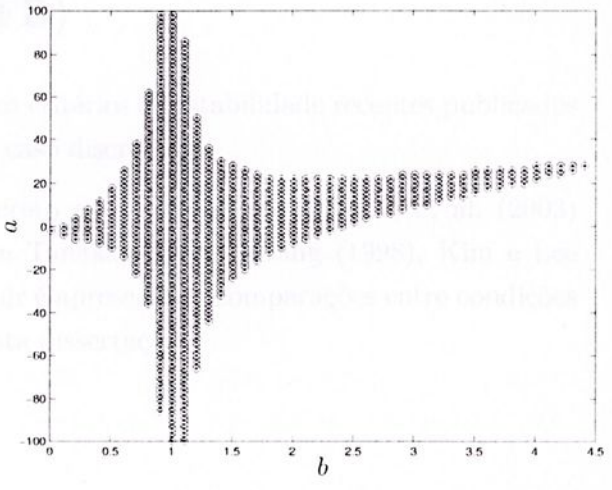


Figura 4.12: (2 Modelos) Área factível total do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 6, indicada por ("∘") e área factível total do método proposto nos Teoremas 13, 17 e 18, descritos na Seção 3.2 indicada por ("·").

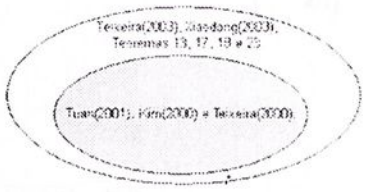


Figura 4.13: Relação de factibilidade entre os teoremas em questão, com base nas análises numéricas realizadas (r=2 modelos).



Figura 4.14: Relação de factibilidade entre os teoremas em questão, com base nas análises numéricas realizadas ($r > 2$ modelos).

Observação 3 *Como pôde ser observado em tópicos anteriores, para $r > 2$ modelos, o método proposto por Tuan et al. (2001) perde em generalidade para as condições descritas em Teixeira et al. (2000) e em Kim e Lee (2000).*

Comparou-se para o caso contínuo os principais métodos para a análise de estabilidade propostos na literatura atual, apresentando também novos critérios para o estudo da estabilidade complementando métodos recentes. Os principais critérios propostos mostraram-se, em termos de área de factibilidade, iguais aos descritos em Teixeira et al. (2003), com base em análises numéricas realizadas.

4.2 Sistemas Fuzzy Discretos (SFD)

A seguir são apresentadas análises comparativas dos critérios de estabilidade recentes publicados na literatura, tratados na Seção 4.1, agora para o caso discreto.

As condições de estabilidade para o caso discreto apresentadas em Teixeira et al. (2003) foram comparadas com as condições descritas em Tanaka, Ikeda e Wang (1998), Kim e Lee (2000) e Teixeira et al. (2000). Desta forma, a seguir é apresentada comparações entre condições recentes existentes e com resultados propostos nesta dissertação.

4.2.1 Caso 1: Teorema 8 e Teorema 11

Teorema 24 *Se o Teorema 11 (teorema proposto na Seção 3.2) for satisfeito, então o Teorema 8 (teorema proposto em Teixeira et al. (2003)) também será.*

Prova: Das condições do Teorema 11, para $r = 2$ tem-se:

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{bmatrix} (-\mathbf{N}_{ii}) & \mathbf{Z}_{ij} \\ \mathbf{Z}_{ij} & (-\mathbf{N}_{jj}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (1 \leq i < j \leq r) \tag{4.38}$$

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij} \leq \mathbf{0}. \tag{4.39}$$

De (4.39), defina

$$-\mathbf{T}_{ij} = -\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij} \leq \mathbf{0}. \tag{4.40}$$

Assim

$$\mathbf{Z}_{ij} = -\mathbf{N}_{ij} + \mathbf{T}_{ij}. \tag{4.41}$$

Substituindo (4.41) em (4.38)

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{11} & -\mathbf{N}_{12} + \mathbf{T}_{12} \\ -\mathbf{N}_{12} + \mathbf{T}_{12} & -\mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.42}$$

sendo que $\mathbf{T}_{12} \geq \mathbf{0}$.

Portanto, nesta situação o Teorema 8 é satisfeito, para $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{W}_{12h} = \mathbf{S}_{12h} = \mathbf{0},\ h = 1, 2$.

Agora para $r = 3$, do Teorema 11, existem $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T$ e matrizes simétricas $\mathbf{Z}_{ij}$, tais que:

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{ii}) & \mathbf{Z}_{ij} \\ \mathbf{Z}_{ij} & \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{jj}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (1 \leq i < j \leq r) \ \ e \tag{4.43}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{4.44}$$

para $(i,j) = (1,2), (1,3)$ e $(2,3)$.

Para completar a prova, seguem-se os mesmos procedimentos adotados no caso contínuo, Teorema 20.

A seguir são apresentados os modelos utilizados nas simulações, agora para o caso discreto.

Exemplo 3 (2 Modelos):

Para o exemplo a seguir, os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, para cada valor de a e b, são determinados selecionando-se [1/2 1/2] como autovalores para os dois modelos locais na CDP.

Considere o SFD sendo r=2:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 0.65 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, as expressões de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ para o caso discreto são:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{-39}{4} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{-0.35+a}{b} & \frac{-9.98}{b} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 4 (3 Modelos):

Da mesma forma que o exemplo anterior, os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ para cada valor de a e b, são determinados selecionando-se [1/2 1/2] como autovalores para os três modelos locais.

Considere o SFD sendo r=3:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 0.65 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, as expressões para $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ são:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{-39}{4} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{-0.35+a}{b} & \frac{-9.98}{b} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_3 &= \begin{bmatrix} 0.5 & -9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

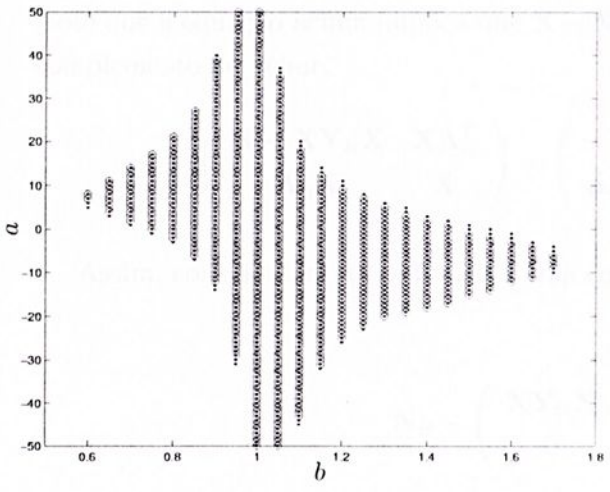


Figura 4.15: (2 Modelos) Área factível do método proposto na Seção 3.2, Teorema 11 e em Teixeira et al. (2000), indicada por ("○") e área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 8, indicada por ("·").

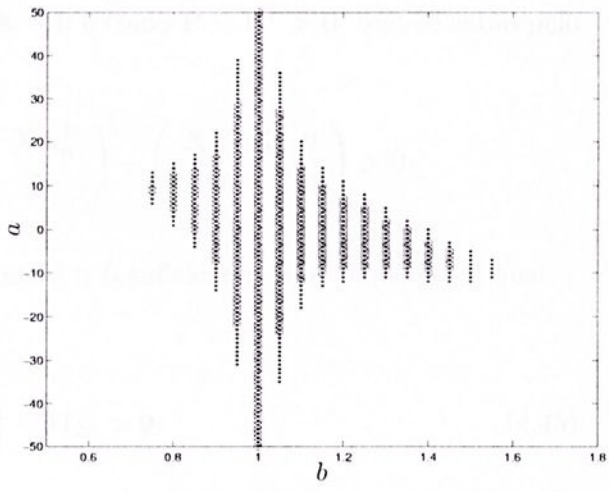


Figura 4.16: (3 Modelos) Área factível do método proposto na Seção 3.2 (caso discreto do Teorema 5), Teorema 11 indicada por ("○") e área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 8, indicada por ("·").

As Figuras 4.15 e 4.16 comparam as áreas de factibilidade dos dois métodos para 2 e 3 modelos, respectivamente.

Como no caso contínuo, o Teorema 11 obtido usando o complemento de Schur, apresenta os mesmos resultados de estabilidade comparado com os critérios apresentados em Teixeira et al. (2000), e conservativo em relação às condições descritas em Teixeira et al. (2003).

O segundo caso apresenta a comparação entre as condições apresentadas em Teixeira et al. (2003) e o caso discreto do método apresentando em Xiaodong e Qingling (2003), proposto na Seção 3.2, Teorema 12.

É conveniente mencionar que o caso descrito não foi abordado em Xiaodong e Qingling (2003) e que o Teorema 11 apresenta este método, seguindo-se os mesmos procedimentos adotados na obtenção do caso discreto de Kim e Lee (2000), para efeito de comparação dos resultados da análise de estabilidade.

4.2.2 Caso 2: Teorema 12 e Teorema 8

Teorema 25 *Se as condições do Teorema 12 (caso discreto do teorema apresentando em Xiaodong e Qingling (2003)) são satisfeitas, então as condições do Teorema 8 também serão.*

Prova: Assuma que (3.56)-(3.59) são satisfeitas. De (3.57), definindo-se $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e multiplicando (3.57) por $\mathbf{X}$ pela esquerda e pela direita, então

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}_{ii}^{T}\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}_{ii}\mathbf{X} - \mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{Y}_{ii}\mathbf{X} < \mathbf{0},$$

$$\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{Y}_{ii}\mathbf{X} - \mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}_{ii}^{T}\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}_{ii}\mathbf{X} > \mathbf{0}.$$

unesp

Note que a equação acima implica que $\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{Y}_{ii}\mathbf{X} > \mathbf{0}$ e como $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$, tem-se então pelo complemento de Schur:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{Y}_{ii}\mathbf{X} & \mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}_{ii}^T \\ \boldsymbol{\Lambda}_{ii}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}_{ii}^T \\ \boldsymbol{\Lambda}_{ii}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}\mathbf{Y}_{ii}\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} > \mathbf{0}.$$

Assim, considerando (3.38), existe uma constante $\delta > 0$ suficientemente pequena tal que

$$\mathbf{N}_{ii} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}\mathbf{Y}_{ii}\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \delta\,\mathbf{I}_{2n} > \mathbf{0}. \tag{4.45}$$

De (3.58), para todo $\epsilon > 0$, então

$$2\boldsymbol{\Lambda}_{ij}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}_{ij} - 2\mathbf{P} + \mathbf{Y}_{ij} + \mathbf{Y}_{ij}^T - 2\epsilon\,\mathbf{I}_n < \mathbf{0}.$$

Logo, analogamente ao desenvolvimento efetuado com a equação (4.45), tem-se, considerando (3.38),

$$2\mathbf{N}_{ij} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{ij} + \mathbf{Y}_{ij}^T - 2\epsilon\,\mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} > \mathbf{0}. \tag{4.46}$$

Agora, escolha em (3.41) $\mathbf{W}_{ijh} = \mathbf{0}$ se $i < j$ e $\mathbf{W}_{jih} = \mathbf{0}$ se $i > j$, especificando-se $\mathbf{R}_{ijh} = \mathbf{0}$, $i, j, h = 1, \ldots, r,\ \ i < j$. Assim, de (3.41),

$$\mathbf{N}_{ijh} = \begin{cases} \mathbf{N}_{ij} - \mathbf{T}_{ijh} + (\mathbf{S}_{ijh} - \mathbf{S}_{ijh}^T), & se\ \ i < j, \\ \mathbf{N}_{ji} - \mathbf{T}_{jih} + (\mathbf{S}_{jih}^T - \mathbf{S}_{jih}), & se\ \ i > j, \end{cases} \tag{4.47}$$

para $i, j, h = 1, \ldots, r$.

Agora, como $\mathbf{T}_{ijh} = \mathbf{T}_{ijh}^T \geq \mathbf{0}$, então considerando (4.46), defina

$$\mathbf{T}_{ijh} - (\mathbf{S}_{ijh} - \mathbf{S}_{ijh}^T) = \mathbf{N}_{ij} - \begin{bmatrix} \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{ij} - \epsilon\,\mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \ se\ \ i < j, \tag{4.48}$$

$$\mathbf{T}_{jih} - (\mathbf{S}_{jih}^T - \mathbf{S}_{jih}) = \mathbf{N}_{ji} - \begin{bmatrix} \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{ji} - \epsilon\,\mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \ se\ \ i > j, \tag{4.49}$$

para $i, j, h = 1, \ldots, r$.

Somando-se os componentes $i < j$ e $i > j$ na expressão anterior e sendo $\mathbf{Y}_{ji} = \mathbf{Y}_{ij}^T$, tem-se

$$2\mathbf{T}_{ijh} - (\mathbf{S}_{ijh} - \mathbf{S}_{ijh}^T) - (\mathbf{S}_{ijh}^T - \mathbf{S}_{ijh}) = 2\mathbf{N}_{ij} - \begin{bmatrix} \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{ij} + \mathbf{Y}_{ij}^T - 2\epsilon\,\mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para $i, j, h = 1, \ldots, r$.

BCpIS - FEIS • UNESP

Logo, resulta

$$\mathbf{N}_{ijh} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}\,(\mathbf{Y}_{ij} - \epsilon\,\mathbf{I}_n)\,\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad se \;\; i < j, \tag{4.50}$$

$$\mathbf{N}_{jih} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}\,(\mathbf{Y}_{ji} - \epsilon\,\mathbf{I}_n)\,\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad se \;\; i > j, \tag{4.51}$$

para $i, j, h = 1, \ldots, r$.

Considerando (4.45), (4.50) e (4.51) então a matriz $\mathbf{Nt}_n$ definida em (3.37) satisfaz:

$$\mathbf{Nt}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12h} & \ldots & \mathbf{N}_{1rh} \\ \mathbf{N}_{21h} & \mathbf{N}_{22} & \ldots & \mathbf{N}_{2rh} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}_{r1h} & \mathbf{N}_{r2h} & \ldots & \mathbf{N}_{rr} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \begin{bmatrix} \mathbf{X}\,(\mathbf{Y}_{12} - \epsilon\,\mathbf{I}_n)\,\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \ldots & \begin{bmatrix} \mathbf{X}\,(\mathbf{Y}_{1r} - \epsilon\,\mathbf{I}_n)\,\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{12}^T - \epsilon\,\mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{N}_{22} & \ldots & \begin{bmatrix} \mathbf{X}\,(\mathbf{Y}_{2r} - \epsilon\,\mathbf{I}_n)\,\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{1r}^T - \epsilon\,\mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{2r}^T - \epsilon\,\mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \ldots & \mathbf{N}_{rr} \end{bmatrix}$$

$$\geq \begin{bmatrix} \delta\,\mathbf{I}_{2n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \delta\,\mathbf{I}_{2n} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \delta\,\mathbf{I}_{2n} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{Y}_{11}\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{X}\,(\mathbf{Y}_{12} - \epsilon\,\mathbf{I}_n)\,\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \ldots & \begin{bmatrix} \mathbf{X}\,(\mathbf{Y}_{1r} - \epsilon\,\mathbf{I}_n)\,\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{12}^T - \epsilon\,\mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{Y}_{22}\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \ldots & \begin{bmatrix} \mathbf{X}\,(\mathbf{Y}_{2r} - \epsilon\,\mathbf{I}_n)\,\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{1r}^T - \epsilon\,\mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{2r}^T - \epsilon\,\mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \ldots & \begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{Y}_{rr}\mathbf{X} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$= \begin{bmatrix} \delta \mathbf{I}_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta \mathbf{I}_{2n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta \mathbf{I}_{2n} \end{bmatrix} + \mathbf{Xs}$$

sendo $\mathbf{Xs} \geq 0$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Pois, para $\mathbf{V}_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $i = 1, \dots, 2r$,

$$[\mathbf{V}_1^T \ \mathbf{V}_2^T \ \dots \ \mathbf{V}_{2r}^T] \, \mathbf{Xs} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{2r} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2r} \sum_{j=1}^{2r} \mathbf{V}_i^T \, \mathbf{Xs} \, \mathbf{V}_j$$

$$= [\mathbf{V}_1^T \ \mathbf{V}_3^T \ \dots \ \mathbf{V}_{2r-1}^T]$$
$$\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{Y}_{11}\mathbf{X} & \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{12} - \epsilon \mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & \dots & \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{1r} - \epsilon \mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{12}^T - \epsilon \mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{Y}_{22}\mathbf{X} & \dots & \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{2r} - \epsilon \mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{1r}^T - \epsilon \mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & \mathbf{X}\left(\mathbf{Y}_{2r}^T - \epsilon \mathbf{I}_n\right)\mathbf{X} & \dots & \mathbf{X}\mathbf{Y}_{rr}\mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{2r-1} \end{bmatrix}$$

$$= [\mathbf{V}_1^T \ \mathbf{V}_3^T \ \dots \ \mathbf{V}_{2r-1}^T]$$
$$\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X} \end{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{Y}} + \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon & \dots & 0 \\ -\epsilon & 0 & \dots & -\epsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\epsilon & -\epsilon & \dots & -\epsilon \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{2r-1} \end{bmatrix} > \mathbf{0},$$

para $\forall \ [\mathbf{V}_1^T \ \mathbf{V}_3^T \ \dots \ \mathbf{V}_{2r-1}^T] \neq \mathbf{0}$, pois de (3.59), $\tilde{\mathbf{Y}} > \mathbf{0}$ e $\epsilon > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno.

As Figuras 4.17 e 4.18 mostram as áreas factíveis comparando os dois métodos citados.

Em Xiaodong e Qingling (2003) não foram descritas análises de estabilidade para sistemas não-lineares discreto no tempo, como efetuado por exemplo em Tanaka, Ikeda e Wang (1998), Teixeira et al. (2000), Kim e Lee (2000) e em Teixeira et al. (2003). Estes resultados mostram que o caso discreto utilizando-se as idéias destes autores tornou-se conservativo perante resultados recentes de análise de estabilidade, como pode ser observado na análise teórica tratada e nos resultados de factibilidade mostrado pelas Figuras 4.17 e 4.18.

No próximo caso, inicialmente faz-se uma breve descrição da comparação das condições descritas em Tuan et al. (2001) e em Teixeira et al. (2000) e, em seguida, propõe condições mais relaxadas de estabilidade baseadas nestes teoremas e as compara com condições atuais.

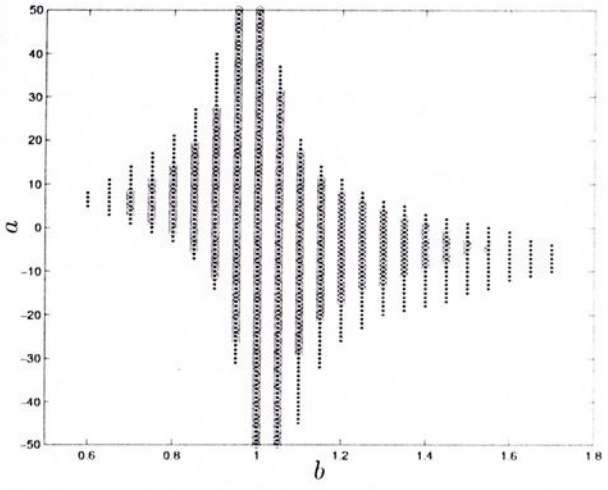


Figura 4.17: (2 Modelos) Área factível do Teorema 12 (caso discreto proposto na Seção 3.2 e baseado em Xiaodong e Qingling (2003)) indicada por ("o") e área factível do método proposto em Teixeira et al. (2003), Teorema 8, indicada por (".").

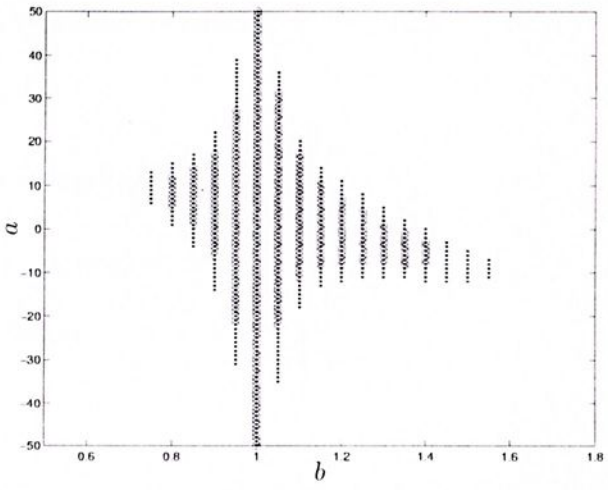


Figura 4.18: (3 Modelos) Área factível do Teorema 12 (caso discreto proposto na Seção 3.2 e baseado em Xiaodong e Qingling (2003)) indicada por ("o") e área factível do método descrito em Teixeira et al. (2003), Teorema 8, indicada por (".").

4.2.3 Caso 3: Teorema 2 e Teorema 11

Teorema 26 *Para r=2, se as condições do Teorema 2 (teorema apresentado em Teixeira et al. (2000)) são satisfeitas, então as condições do Teorema 11 (teorema proposto na Seção 3.2) também serão.*

Prova: É similar à prova do caso contínuo, Teorema 21.

Nas Figuras 4.19 e 4.20 observa-se os resultados da análise de estabilidade comparando os dois métodos.

Como tratado anteriormente, para $r = 2$, os dois critérios fornecem os mesmos resultados.

O Teorema proposto a seguir utilizará a mesma idéia descrita no caso contínuo a fim de flexibilizar as LMIs na divisão em matrizes $2n \times 2n$, relaxando o método proposto na Seção 3.2, Teorema 11, teorema este que foi proposto seguindo-se as idéias descritas em Tuan et al. (2001).

O próximo teorema flexibiliza os resultados mostradas na Figura 4.20, Teorema 11.

Teorema 27 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$ *e matrizes simétricas* $\mathbf{N}_{ii}^{ij}$, $\mathbf{Z}_{ij}$, *tais que*

$$\mathbf{X} > \mathbf{0}, \tag{4.52}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{ii}^{ij} & \mathbf{Z}_{ij} \\ \mathbf{Z}_{ij} & \mathbf{N}_{jj}^{ij} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i, j = 1, \ldots, r-1, \quad i < j) \quad e \tag{4.53}$$

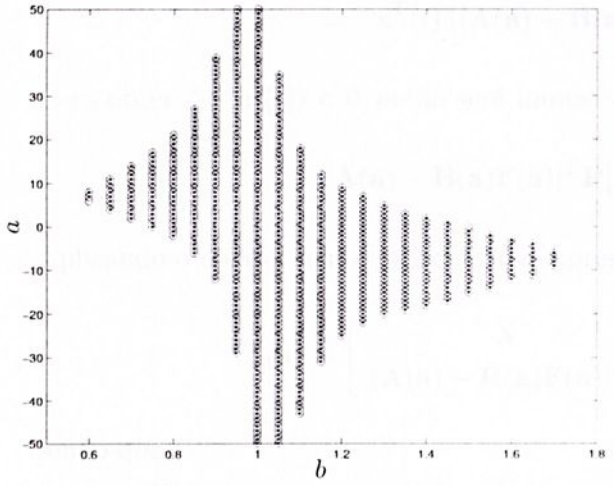


Figura 4.19: (2 Modelos) Área factível do método proposto no Teorema 11 (caso discreto do teorema descrito em Tuan et al., 2001), indicada por ("∘") e área factível do método apresentado em Teixeira et al. (2000), indicada por ("·").

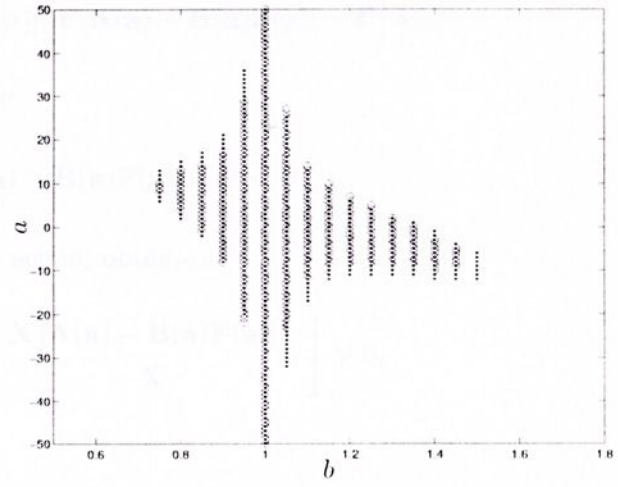


Figura 4.20: (3 Modelos) Área factível do método apresentado no Teorema 11 (caso discreto do teorema descrito em Tuan et al., 2001), indicada por ("∘") e área factível do método proposto em Teixeira et al. (2000), Teorema 2, indicada por ("·") e

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{4.54}$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{ii} - \sum_{\substack{k<j \\ k=i}}^{r-1} \mathbf{N}_{ii}^{kj} - \sum_{\substack{k<j \\ j=i}}^{r-1} \mathbf{N}_{ii}^{kj} & \mathbf{Z}_{ir} \\ \vdots & \\ \mathbf{Z}_{ir} & \mathbf{N}_{rr}^{ir} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i = 1, \ldots, r-2) \tag{4.55}$$

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ir} \leq \mathbf{0}, \tag{4.56}$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{r-1,r-1} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{N}_{r-1,r-1}^{k,r-1} & \mathbf{Z}_{r-1,r} \\ \mathbf{Z}_{r-1,r} & -\mathbf{N}_{rr} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{N}_{rr}^{k,r} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.57}$$

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{r-1,r} \leq \mathbf{0}, \tag{4.58}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $(i < j)$, *excetuando-se os pares* (i, j) *tais que* $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$, $\forall\, \mathbf{z}(t)$, *sendo*

$$\mathbf{N}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \tag{4.59}$$

$$\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{G}_{ii} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i, \tag{4.60}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} = \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{F}_i}{2}. \tag{4.61}$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{P} > 0$. Tem-se que

$$\triangle V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}(t+1)) - V(\mathbf{x}(t))$$

$$= \mathbf{x}^T(t)\left[[\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}]^T\mathbf{P}[\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}] - \mathbf{P}\right]\mathbf{x}(t).$$

Para obter $\triangle V(\mathbf{x}(t)) < 0$, então será imposto que

$$[\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}]^T\mathbf{P}[\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}] - \mathbf{P} < 0.$$

Aplicando o complemento de Schur na expressão acima, obtém-se:

$$\mathbf{T(a)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\,[\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}]^T \\ [\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}]\,\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0,$$

sendo que

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1},\ \ \mathbf{A(a)} = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_i,\ \ \mathbf{B(a)} = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{B}_i \ \text{ e } \ \mathbf{F(a)} = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{F}_i.$$

Tendo em vista (4.59)-(4.61), a expressão de $\mathbf{T(a)}$ anterior pode ser reescrita na forma (Tuan et al., 2001):

$$\begin{aligned}
\mathbf{T(a)} &= \sum_{i<j}^{r}\left[\frac{1}{r-1}\alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ii}^T \\ \mathbf{M}_{ii}\mathbf{X} & \mathbf{X}\end{bmatrix} + \frac{1}{r-1}\alpha_j^2(\mathbf{z}(t))\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{jj}^T \\ \mathbf{M}_{jj}\mathbf{X} & \mathbf{X}\end{bmatrix}\right. \\
&\quad \left. +2\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X}\end{bmatrix}\right] \\
\mathbf{x}^T(t)\mathbf{T(a)}\mathbf{x}(t) &= \sum_{i<j}^{r}\mathbf{x}^T(t)|\alpha_i\mathbf{I}\ \ \alpha_j\mathbf{I}|\begin{bmatrix}\frac{1}{r-1}\mathbf{N}_{ii} & \mathbf{N}_{ij} \\ \mathbf{N}_{ij} & \frac{1}{r-1}\mathbf{N}_{jj}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i\mathbf{I} \\ \alpha_j\mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \qquad (4.62) \\
&= \sum_{i<j}^{r}\mathbf{x}^T(t)|\alpha_i\mathbf{I}\ \ \alpha_j\mathbf{I}|\mathbf{N}\mathbf{t}_{ij}|\alpha_i\mathbf{I}\ \ \alpha_j\mathbf{I}|^T\mathbf{x}(t) \\
&= \sum_{i<j}^{r}|\alpha_i\mathbf{x}^T(t)\ \ \alpha_j\mathbf{x}^T(t)|\,\mathbf{N}\mathbf{t}_{ij}\,|\alpha_i\mathbf{x}^T(t)\ \ \alpha_j\mathbf{x}^T(t)|^T \\
&= \sum_{i<j}^{r}[\alpha_i\ \ \alpha_j]\begin{bmatrix}\mathbf{x}^T(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}^T(t)\end{bmatrix}\mathbf{N}\mathbf{t}_{ij}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i \\ \alpha_j\end{bmatrix} \\
&= \sum_{i<j}^{r}[\alpha_i\ \ \alpha_j]\,\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x})\,[\alpha_i\ \ \alpha_j]^T.
\end{aligned}$$

Para que $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{T(a)}\mathbf{x}(t) > 0$, sendo $\mathbf{x}(t) \neq 0$, uma condição suficiente para $i, j = 1, \ldots, r,\ \ i < j$ é que $[\alpha_i\mathbf{I}\ \ \alpha_j\mathbf{I}](-\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x}))[\alpha_i\mathbf{I}\ \ \alpha_j\mathbf{I}]^T < \mathbf{0}$. Portanto, aplicando o Lema 7 (Tuan et al., 2001), tem-se

$$\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}\mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{ii})\right)\mathbf{x}(t) & \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Z}_{ij}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Z}_{ij}\mathbf{x}(t) & \mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{jj})\right)\mathbf{x}(t)\end{bmatrix} < \mathbf{0} \ \ e \qquad (4.63)$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$\mathbf{x}^T(t)(-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij})\mathbf{x}(t) \leq \mathbf{0}. \tag{4.64}$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{ii}) & \mathbf{Z}_{ij} \\ \mathbf{Z}_{ij} & \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{jj}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^T(t)(-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij})\mathbf{x}(t) \leq \mathbf{0}.$$

Por simplicidade, da equação (4.62) considere o caso para $r = 3$. Então das condições acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{T}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}^T(t)|\alpha_1\mathbf{I} \quad \alpha_2\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12} & \frac{1}{2}\mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_2\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ &+ \mathbf{x}^T(t)|\alpha_1\mathbf{I} \quad \alpha_3\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{13} \\ \mathbf{N}_{13} & \frac{1}{2}\mathbf{N}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ &+ \mathbf{x}^T(t)|\alpha_2\mathbf{I} \quad \alpha_3\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{N}_{22} & \mathbf{N}_{23} \\ \mathbf{N}_{23} & \frac{1}{2}\mathbf{N}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Ao invés de dividir os termos $\mathbf{N}_{ii}$ e $\mathbf{N}_{jj}$ por $(r-1)$, pode-se utilizar matrizes simétricas $\mathbf{N}_{ii}^{ij}$ e $\mathbf{N}_{jj}^{ij}$, tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{T}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}^T(t)|\alpha_1\mathbf{I} \quad \alpha_2\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}^{12} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12} & \mathbf{N}_{22}^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_2\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ &+ \mathbf{x}^T(t)|\alpha_1\mathbf{I} \quad \alpha_3\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{11}^{12} & \mathbf{N}_{13} \\ \mathbf{N}_{13} & \mathbf{N}_{33}^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ &+ \mathbf{x}^T(t)|\alpha_2\mathbf{I} \quad \alpha_3\mathbf{I}| \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{22}^{12} & \mathbf{N}_{23} \\ \mathbf{N}_{23} & \mathbf{N}_{33} - \mathbf{N}_{33}^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Seguindo-se a mesma idéia do caso contínuo, para um r genérico e considerando $\Gamma_{ii} =$

$\sum_{\substack{k<j \\ k=i}}^{r-1} \mathbf{N}_{ii}^{kj} + \sum_{\substack{k<j \\ j=i}}^{r-1} \mathbf{N}_{ii}^{kj}$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^T(t)\mathbf{T}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t) \Bigg[& [\alpha_1\mathbf{I} \quad \alpha_2\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}^{12} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12} & \mathbf{N}_{22}^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_2\mathbf{I} \end{bmatrix} + [\alpha_1\mathbf{I} \quad \alpha_3\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}^{13} & \mathbf{N}_{13} \\ \mathbf{N}_{13} & \mathbf{N}_{33}^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} + \cdots \\
& + \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}^{1,r-1} & \mathbf{N}_{1,r-1} \\ \mathbf{N}_{1,r-1} & \mathbf{N}_{r-1,r-1}^{1,r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} - \sum_{k=2}^{r-1} \mathbf{N}_{11}^{1,k} & \mathbf{N}_{1,r} \\ \mathbf{N}_{1,r} & \mathbf{N}_{rr}^{1,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \\
& + [\alpha_2\mathbf{I} \quad \alpha_3\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{22}^{23} & \mathbf{N}_{23} \\ \mathbf{N}_{23} & \mathbf{N}_{33}^{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_3\mathbf{I} \end{bmatrix} + [\alpha_2\mathbf{I} \quad \alpha_4\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{24}^{24} & \mathbf{N}_{24} \\ \mathbf{N}_{24} & \mathbf{N}_{44}^{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_4\mathbf{I} \end{bmatrix} + \cdots \\
& + \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{22}^{2,r-1} & \mathbf{N}_{2,r-1} \\ \mathbf{N}_{2,r-1} & \mathbf{N}_{r-1,r-1}^{2,r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{22} - \Gamma_{22} & \mathbf{N}_{2,r} \\ \mathbf{N}_{2,r} & \mathbf{N}_{rr}^{2,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \\
& \vdots \\
& + \begin{bmatrix} \alpha_{r-2}\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{r-2,r-2}^{r-2,r-1} & \mathbf{N}_{r-2,r-1} \\ \mathbf{N}_{r-2,r-1} & \mathbf{N}_{r-1,r-1}^{r-2,r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{r-2}\mathbf{I} \\ \alpha_{r-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{r-2}\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{r-2,r-2} - \Gamma_{r-2,r-2} & \mathbf{N}_{r-2,r} \\ \mathbf{N}_{r-2,r} & \mathbf{N}_{rr}^{r-2,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{r-2}\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \alpha_{r-1}\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{r-1,r-1} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{N}_{r-1}^{k,r-1} & \mathbf{N}_{r-1,r} \\ \mathbf{N}_{r-1,r} & \mathbf{N}_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} \mathbf{N}_{rr}^{k,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{r-1}\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \Bigg] \mathbf{x}(t).
\end{aligned}
$$

Portanto, para um caso geral, (4.62) é descrita por três LMIs, da forma:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^T(t)\mathbf{T}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t) = & \sum_{i<j}^{r-1} \mathbf{x}^T(t) [\alpha_i\mathbf{I} \quad \alpha_j\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{ii}^{ij} & \mathbf{N}_{ij} \\ \mathbf{N}_{ij} & \mathbf{N}_{jj}^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i\mathbf{I} \\ \alpha_j\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\
& + \sum_{i=1}^{r-2} \mathbf{x}^T(t) [\alpha_i\mathbf{I} \quad \alpha_r\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{ii} - \sum_{\substack{k<j \\ k=i}}^{r-1} \mathbf{N}_{ii}^{kj} - \sum_{\substack{k<j \\ j=i}}^{r-1} \mathbf{N}_{ii}^{kj} & \mathbf{N}_{ir} \\ \mathbf{N}_{ir} & \mathbf{N}_{rr}^{ir} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\
& + \mathbf{x}^T(t) [\alpha_{r-1}\mathbf{I} \quad \alpha_r\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{r-1,r-1} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{N}_{r-1}^{k,r-1} & \mathbf{N}_{r-1,r} \\ \mathbf{N}_{r-1,r} & \mathbf{N}_{rr} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{N}_{rr}^{k,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{r-1}\mathbf{I} \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

Do Lema 7, conforme (4.63) e (4.64), das matrizes $2n \times 2n$ definida em (4.65), para que $\Delta V(\mathbf{x}(t)) < 0$, é suficiente que (4.52)-(4.58) sejam satisfeitas, concluindo a prova.

Nas Figuras 4.21 e 4.22 observa-se a comparação das áreas factíveis do teorema acima com o teorema proposto em Teixeira et al. (2000) e Tuan et al. (2001), respectivamente.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

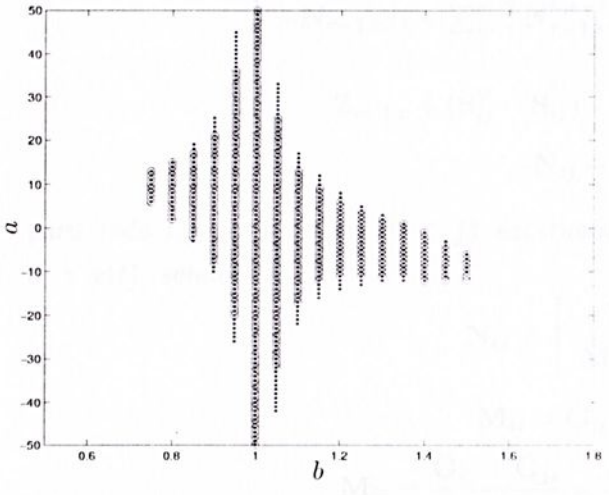


Figura 4.21: (3 Modelos) Área factível do método descrito em Teixeira et al. (2000), Teorema 1, indicada por ("○") e área factível do método proposto no Teorema 27, indicada por ("·").

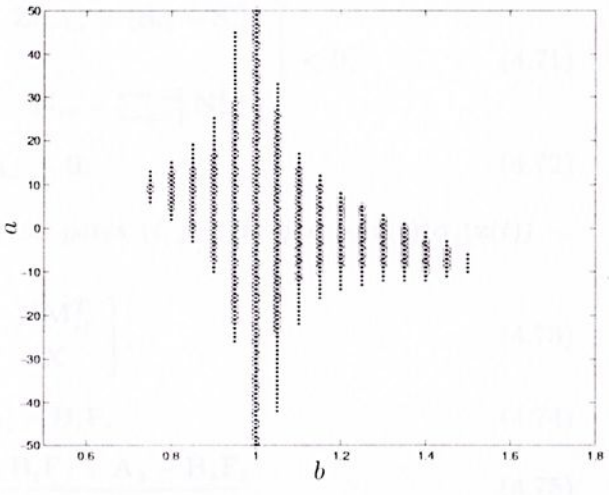


Figura 4.22: (3 Modelos) Área factível do método apresentado no Teorema 11 (caso discreto do Teorema 5), indicada por ("○") e área factível do método proposto no Teorema 27, indicada por ("·").

Pode ser verificado através das Figuras 4.21 e 4.22 que o Teorema 27 é uma generalização do Teorema 11 proposto na Seção 3.2, agora para o caso discreto, sendo $r > 3$.

A seguir é descrito a idéia do Teorema 27, utilizando as propriedades das matrizes anti-simétricas, como efetuado no Teorema 14 (Teorema proposto na seção 3.2) flexibilizando estes resultados na solução das LMIs.

Teorema 28 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$ *e matrizes simétricas* $\mathbf{N}_{ii}^{ij}$, $\mathbf{Z}_{ij}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{ij}$ *tais que*

$$\mathbf{X} > \mathbf{0}, \tag{4.66}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{ii}^{ij} & \mathbf{Z}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Z}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \mathbf{N}_{jj}^{ij} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i, j = 1, \ldots, r-1, \quad i < j) \quad e \tag{4.67}$$

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{4.68}$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{ii} - \sum_{\substack{k<j \\ k=i}}^{r-1} \mathbf{N}_{ii}^{kj} - \sum_{\substack{k<j \\ j=i}}^{r-1} \mathbf{N}_{ii}^{kj} & \mathbf{Z}_{ir} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Z}_{ir} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \mathbf{N}_{rr}^{ir} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i = 1, \ldots, r-2) \tag{4.69}$$

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ir} \leq \mathbf{0}, \tag{4.70}$$

unesp

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{r-1,r-1} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{N}_{r-1,r-1}^{k,r-1} & \mathbf{Z}_{r-1,r} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Z}_{r-1,r} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & -\mathbf{N}_{rr} - \sum_{k=1}^{r-2} \mathbf{N}_{rr}^{k,r} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.71}$$

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{r-1,r} \leq \mathbf{0}, \tag{4.72}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $(i < j)$ *excetuando-se os pares* (i, j) *tais que* $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$, $\forall\, \mathbf{z}(t)$, *sendo*

$$\mathbf{N}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \tag{4.73}$$

$$\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{G}_{ii} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i, \tag{4.74}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} = \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{F}_i}{2}. \tag{4.75}$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{P} > 0$. Partindo-se da prova do Teorema 27, segue os mesmos procedimentos adotados no caso contínuo (Teorema 23).

As Figuras 4.23 e 4.24 mostram as áreas factíveis comparando o método proposto neste teorema com o proposto na Seção 3.2 (caso discreto do teorema descrito em Tuan et al. (2001)) e com as condições apresentadas em Teixeira et al. (2003).

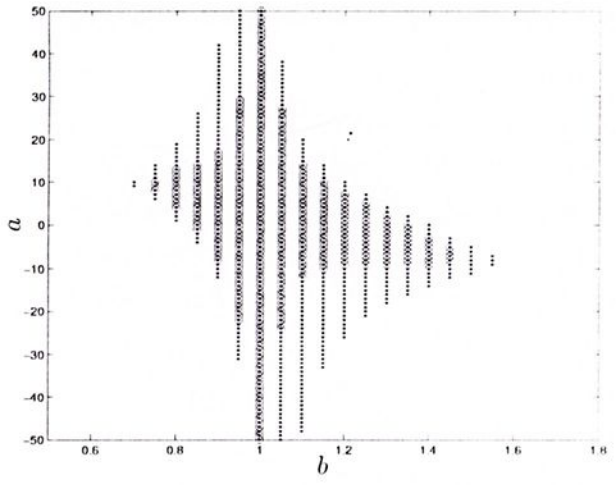


Figura 4.23: (3 Modelos) Área factível total do Teorema 11 (caso discreto do teorema proposto em Tuan et al (2001)) indicada por ("o") e área factível total do método proposto nesta dissertação, Teorema 28, indicada por (".").

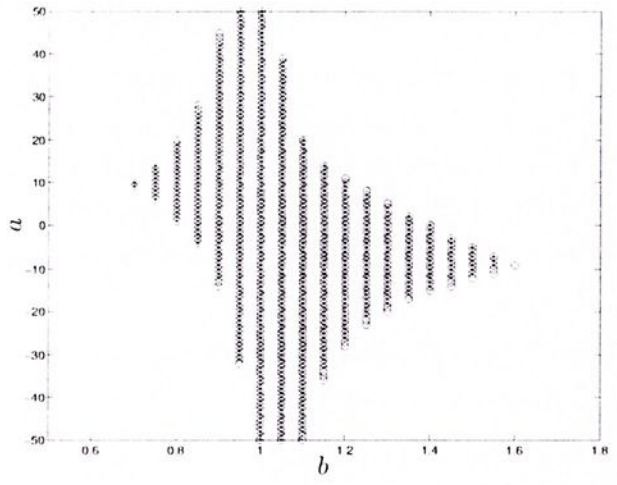


Figura 4.24: (3 Modelos) Área factível total do método proposto em Teixeira et al. (2003), Teorema 8, indicada por ("o") e área factível total do método proposto nesta dissertação, Teorema 28, indicada por (".").

O método proposto neste teorema é uma generalização das condições apresentadas em Tuan et al. (2001), porém pode-se verificar através das simulações anteriores que, em termos da análise de estabilidade, este método apresenta resultados no máximo iguais aos descritos em Teixeira et al. (2003). Assim, é possível também no caso discreto, efetuar uma análise de estabilidade em pares $i < j$, obtendo os mesmos resultados que os métodos de análise global, podendo assim utilizar-se neste caso dos comentários descritos na Observação 4 (Apêndice B).

As Figuras 4.25 e 4.26 ilustram a abrangência obtida em termos de factibilidade, nos exemplos abordados, dos principais métodos tratados para o caso discreto, considerando $r = 2$ e $r > 2$ modelos.

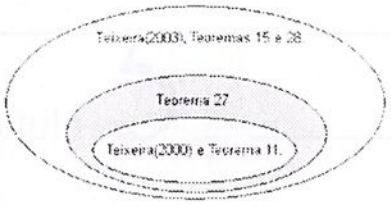


Figura 4.25: Relação de factibilidade entre os teoremas em questão, com base nas análises numéricas realizadas. (r=2 modelos).

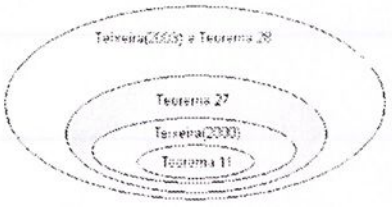


Figura 4.26: Relação de factibilidade entre os teoremas em questão, com base nas análises numéricas realizadas ($r > 2$ modelos).

Portanto, comparou-se para o caso discreto os principais métodos para a análise de estabilidade propostos na literatura, apresentando também novos critérios para o estudo da estabilidade complementando métodos atuais. Estes critérios mostraram-se, em termos de área de factibilidade, no máximo iguais aos descritos em Teixeira et al. (2003), tendo como base principal as análises numéricas realizadas.

Capítulo 5

Projeto de Reguladores Fuzzy com LMIs

A análise de estabilidade para sistemas não-lineares descritos pelos modelos fuzzy de Takagi-Sugeno, consiste em encontrar condições mais relaxadas que possam contribuir na obtenção de melhores resultados para o problema do projeto de controladores, atendendo todas as restrições impostas. Muitos procedimentos são desenvolvidos para encontrar uma solução adequada tal que satisfaça as condições de projeto, através de métodos iterativos. Uma importante ferramenta matemática para o estudo de sistemas descritos em espaço de estados é o uso de desigualdades matriciais lineares LMIs (do Inglês Linear Matrix Inequalities) (Boyd et al., 1994).

Problemas como as análises de estabilidade e o projeto de controle são reduzidos a problemas descritos por LMIs (Linear Matrix Inequalities) (Boyd et al., 1994). Numericamente, as soluções de LMIs, quando existem, podem ser obtidas muito eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas, disponíveis na literatura de programação matemática (Boyd et al., 1994). Desta forma, a solução encontrada para tais problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar soluções para o problema original.

As técnicas de projeto usando LMIs também permitem a especificação da resposta transitória através da taxa de decaimento e a especificação de restrições nos sinais de controle e nas saídas.

Como visto no Capítulo 4, para $r = 2$, os Teoremas 13 e 15 apresentam áreas factíveis iguais aos melhores métodos estudados nesta dissertação.

Portanto, para as condições de estabilidade tratadas no Teorema 13, para sistemas contínuos e no Teorema 15, para sistemas discretos no tempo, o problema de projeto para determinar os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_i$, para $i = 1, \ldots, r$, pode ser definido por meio de LMIs, da forma apresentada a seguir. Para os demais teoremas, seguem-se os mesmos procedimentos.

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Encontre matrizes simétricas $\mathbf{X}$, $\mathbf{Qs}_{ij}$, *e matrizes* $\mathbf{S}_{ij}$ *e* $\mathbf{M}_i$, para todos os pares $i, j, \quad i < j$, *satisfazendo*

$$\mathbf{X} > \mathbf{0}, \tag{5.1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}\mathbf{C}_{ii} & \mathbf{Qs}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Qs}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \frac{1}{r-1}\mathbf{C}_{jj} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i,j = 1,\ldots,r, \quad i < j), \tag{5.2}$$

$$\mathbf{C}_{ij} - \mathbf{Qs}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{5.3}$$

sendo que, para $i,j = 1,\ldots,r, \quad i < j,$

$$\mathbf{C}_{ii} = \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_i^T,$$

$$\mathbf{C}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_i^T + \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_j^T\right).$$

As condições acima são LMIs, com relação às variáveis $\mathbf{X}$, $\mathbf{Qs}_{ij}$ e $\mathbf{S}_{ij}$ e são obtidas diretamente do Teorema 13.

Se existe solução, os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_i$ e uma matriz $\mathbf{P}$ comum, podem ser obtidas da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1},$$

a partir das soluções $\mathbf{X}$ e $\mathbf{M}_i$.

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Encontre matrizes simétricas $\mathbf{X}$, $\mathbf{Ds}_{ij}$, *e matrizes* $\mathbf{S}_{ij}$ *e* $\mathbf{M}_i$, *satisfazendo*

$$\mathbf{X} > \mathbf{0}, \tag{5.4}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{r-1}\mathbf{V}_{ii} & \mathbf{Ds}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Ds}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & -\frac{1}{r-1}\mathbf{V}_{jj} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i,j = 1,\ldots,r, \quad i < j), \tag{5.5}$$

$$-\mathbf{V}_{ij} - \mathbf{Ds}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{5.6}$$

sendo que, para $i,j = 1,\ldots,r, \quad i < j,$

$$\mathbf{V}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_i^T \\ \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i & \mathbf{X} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_i^T + \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_j^T\right) \\ \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i\right) & \mathbf{X} \end{bmatrix}.$$

As condições acima seguem diretamente do Teorema 15.

Se existe solução, os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_i$ e uma $\mathbf{P}$ comum podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}, \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1},$$



a partir das soluções $\mathbf{X}$ e $\mathbf{M}_i$.

5.1 Taxa de Decaimento

É importante considerar não somente a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado, tais como velocidade de resposta, restrições da entrada e da saída. A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento, isto é, o maior expoente Lyapunov.

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Do Teorema 13, para uma candidata a função de Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ então $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ para $\mathbf{x}(t) \neq 0$, se (3.60) e (3.61) mantém, sendo dada em (3.62) e (3.63). Agora, utilizando-se a condição da equação (2.8) tem-se que

$$\mathbf{P} = [\alpha_1\mathbf{I} \ \alpha_2\mathbf{I} \ \ldots \ \alpha_r\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} & \ldots & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} & \ldots & \mathbf{P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} & \ldots & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_2\mathbf{I} \\ \vdots \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Logo, a condição que $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\gamma V(\mathbf{x}(t))$ (Tanaka, Ikeda e Wang, 1998), sendo γ uma constante positiva, para toda trajetória é satisfeita se

$$\sum_{i<j}^{r} [\alpha_i\mathbf{I} \ \alpha_j\mathbf{I}] \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{ii} & \mathbf{Q}\mathbf{s}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Q}\mathbf{s}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \frac{1}{r-1}\mathbf{Q}_{jj} \end{bmatrix} + 2\gamma \begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}\mathbf{P} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \frac{1}{r-1}\mathbf{P} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \alpha_i\mathbf{I} \\ \alpha_j\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (i, j = 1, \ldots, r, \ i < j) \tag{5.7}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}(\mathbf{Q}_{ii} + 2\gamma\mathbf{P}) & \mathbf{Q}\mathbf{s}_{ij} + 2\gamma\mathbf{P} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Q}\mathbf{s}_{ij} + 2\gamma\mathbf{P} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \frac{1}{r-1}(\mathbf{Q}_{jj} + 2\gamma\mathbf{P}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i, j = 1, \ldots, r, \ i < j) \quad e$$

$$\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q}\mathbf{s}_{ij} \leq \mathbf{0}.$$

Portanto, o maior limite inferior para a taxa de decaimento que pode ser encontrado usando uma função Lyapunov quadrática é obtido resolvendo-se o seguinte problema de minimização dos autovalores generalizado (GEVP) (Boyd et al., 1994) em $\mathbf{P}$ e γ:

Maximize γ e encontre matrizes simétricas $\mathbf{X}$, $\mathbf{Q}\mathbf{s}_{ij}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{ij}$ *e* $\mathbf{M}_i$, *sujeito a*

$$\mathbf{X} > \mathbf{0}, \tag{5.8}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}\mathbf{C}'_{ii} & \mathbf{Qs}_{ij} + 2\gamma\mathbf{X} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Qs}_{ij} + 2\gamma\mathbf{X} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \frac{1}{r-1}\mathbf{C}'_{jj} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (i < j), \tag{5.9}$$

$$\mathbf{C}'_{ij} - \mathbf{Qs}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{5.10}$$

sendo que, para $i, j = 1, \ldots, r, \ i < j,$

$$\mathbf{C}'_{ii} = \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_i^T + 2\gamma\mathbf{X},$$

$$\mathbf{C}'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_i^T + \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_j^T\right).$$

Novamente, os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_i$, uma $\mathbf{P}$ comum podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}, \ \ \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1},$$

a partir das soluções $\mathbf{X}$ e $\mathbf{M}_i$.

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

De forma análoga ao realizado acima, a condição que $\triangle V(\mathbf{x}(t)) \leq (\gamma^2 - 1)V(\mathbf{x}(t))$ (Tanaka, Ikeda e Wang, 1998) para toda trajetória é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{r-1}\mathbf{V}'_{ii} & \mathbf{V}'_{ij} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{V}'_{ij} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & -\frac{1}{r-1}\mathbf{V}'_{jj} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \tag{5.11}$$

sendo

$$\mathbf{V}'_{ii} = \begin{bmatrix} \gamma^2\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ii}^T \\ \mathbf{M}_{ii}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{V}'_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma^2\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix},$$

sendo $\gamma < 1$. Portanto, obtém-se o seguinte problema de minimização dos autovalores generalizado (GEVP) (Boyd et al., 1994) em $\mathbf{P}$ e β sendo $\beta = \gamma^2$:

Minimize β *e encontre matrizes simétricas* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Ds}_{ij}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{ij}$ *e* $\mathbf{M}_i$, *sujeito a*

$$\mathbf{X} > \mathbf{0}, \quad (i, j = 1, \ldots, r, \ \ i < j) \tag{5.12}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{r-1}\mathbf{V}''_{ii} & \mathbf{Ds}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^T) \\ \mathbf{Ds}_{ij} + (\mathbf{S}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & -\frac{1}{r-1}\mathbf{V}''_{jj} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{5.13}$$

$$-\mathbf{V}''_{ij} - \mathbf{Ds}_{ij} \leq \mathbf{0},$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

sendo que, para $i, j = 1, \ldots, r,\ i < j$,

$$\mathbf{V}''_{ii} = \begin{bmatrix} \beta\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_i^T \\ \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i & \mathbf{X} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}''_{ij} = \begin{bmatrix} \beta\mathbf{X} & \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_i^T + \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_j^T\right) \\ \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i\right) & \mathbf{X} \end{bmatrix}.$$

Como no caso anterior, os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_i$ e uma $\mathbf{P}$ comum podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}, \text{ e } \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1},$$

a partir das soluções $\mathbf{X}$ e $\mathbf{M}_i$.

Deve ser notado que $0 \leq \beta < 1$.

5.2 Restrição da Entrada

Assuma que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida. A restrição $\| u(t) \|_2 \leq \mu$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.14}$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T \\ \mathbf{M}_i & \mu^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.15}$$

se mantém (Boyd et al., 1994; Tanaka, Ikeda e Wang, 1998)(Apêndice D), sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i\mathbf{X}$.

Um problema de projeto de reguladores fuzzy estáveis satisfazendo a restrição da entrada pode ser definido como segue:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Encontre matrizes simétricas $\mathbf{X}$, $\mathbf{Qs}_{ij}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{ij}$ *e* $\mathbf{M}_i$, *satisfazendo* (5.1), (5.2), (5.3), (5.14) *e* (5.15).

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Encontre matrizes simétricas $\mathbf{X}$, $\mathbf{Ds}_{ij}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{ij}$ *e* $\mathbf{M}_i$, *satisfazendo* (5.4), (5.5), (5.6), (5.14) *e* (5.15).

5.3 Restrição da Saída

Assuma que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida. A restrição $\| y(t) \|_2 \leq \lambda$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.16}$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{C}_i^T \\ \mathbf{C}_i\mathbf{X} & \lambda^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.17}$$

se mantém (Boyd et al., 1994; Tanaka, Ikeda e Wang, 1998)(Apêndice D) sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$.

Um problema de projeto de reguladores fuzzy estáveis satisfazendo a restrição da saída pode ser definido como segue:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Encontre matrizes simétricas $\mathbf{X}$, $\mathbf{Qs}_{ij}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{ij}$ *e* $\mathbf{M}_i$, *satisfazendo* (5.1), (5.2), (5.3), (5.16) *e* (5.17).

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Encontre matrizes simétricas $\mathbf{X}$, $\mathbf{Ds}_{ij}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{ij}$ *e* $\mathbf{M}_i$, *satisfazendo* (5.4), (5.5), (5.6), (5.16) *e* (5.17).

5.4 Exemplos de Aplicação

Considere o problema do equilíbrio e balanço de um pêndulo invertido sobre um carro, conforme ilustrado na Fig. 5.1. As equações de movimento para o pêndulo invertido, conforme descrito em Ma et al. (1998), são

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1.0}{[(M+m)(J+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_1]}[-f_1(M+m)x_2 - m^2l^2x_2^2\ (\text{sen}\ x_1)\cos x_1 \\
&\quad + f_0mlx_4\cos x_1 + (M+m)mgl\ \text{sen}\ x_1 - ml(\cos x_1)u] \qquad (5.18) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{1.0}{[(M+m)(J+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_1]}[f_1mlx_2\cos x_1 + (J+ml^2)mlx_2^2\ \text{sen}\ x_1 \\
&\quad - f_0(J+ml^2)x_4 - m^2gl^2\ (\text{sen}\ x_1)\cos x_1 + (J+ml^2)u]
\end{aligned}$$

sendo que x_1 é o ângulo (rad) do pêndulo com relação ao eixo vertical, x_2 é a velocidade angular (rad/s), x_3 é o deslocamento (m) do carro, e x_4 é a velocidade (m/s) do carro, g=9.8 m/s^2 é a aceleração da gravidade, m é a massa (kg) do pêndulo, M é a massa (kg) do carro, f_0 é o coeficiente de atrito (N/m/s) do carro, f_1 é o coeficiente de atrito (N/rad/s) do pêndulo, l é o comprimento (m) do centro de massa da haste até a sua base, J é o momento de inércia (kgm^2) do pêndulo em torno do seu centro de massa, e u é a força (N) aplicada no carro. Tem-se que, conforme descrito em Ma et al. (1998), M=1.3282 kg, m=0.22 kg, f_0=22.915 N/m/s, f_1=0.007056 N/rad/s, l=0.304 m, J=0.004963 kgm^2.

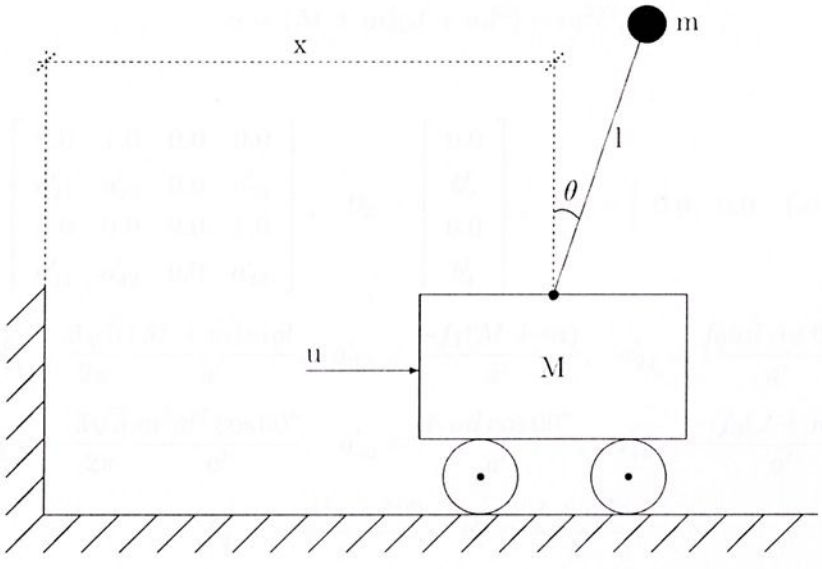


Figura 5.1: Pêndulo invertido sobre um carro.

Para projetar o regulador fuzzy deve-se ter um modelo fuzzy que represente as dinâmicas da planta não-linear. Portanto, primeiro representa-se o sistema pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno.

Aqui o modelo global do sistema foi obtido através da combinação fuzzy de dois modelos lineares locais. Desta forma aproximou-se o sistema através das seguintes duas regras do modelo fuzzy, como efetuado em Ma et al. (1998):

$$\begin{aligned} \textit{Regra 1 da Planta} \quad &: \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de 0,} \\ &\text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t). \end{cases} \\ \textit{Regra 2 da Planta} \quad &: \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de } \pm\pi/3, \\ &\text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t). \end{cases} \end{aligned}$$

sendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ a_{21} & a_{22} & 0.0 & a_{24} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ a_{41} & a_{42} & 0.0 & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ b_2 \\ 0.0 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$a_{21} = \frac{(M+m)mgl}{a}, \quad a_{22} = \frac{-f_1(M+m)}{a}, \quad a_{24} = \frac{f_0 ml}{a},$$

$$a_{41} = \frac{-m^2gl^2}{a}, \quad a_{42} = \frac{f_1 ml}{a}, \quad a_{44} = \frac{-f_0(J+ml^2)}{a},$$

$$b_2 = \frac{-ml}{a}, \quad b_4 = \frac{J+ml^2}{a},$$

$$a = (M+m)(J+ml^2) - m^2l^2,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0.0 & a'_{24} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ a'_{41} & a'_{42} & 0.0 & a'_{44} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ b'_2 \\ 0.0 \\ b'_4 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$a'_{21} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\frac{(M+m)mgl}{a'}, \quad a'_{22} = \frac{-f_1(M+m)}{a'}, \quad a'_{24} = \frac{f_0 ml\cos 60^\circ}{a'},$$

$$a'_{41} = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\frac{m^2gl^2\cos 60^\circ}{a'}, \quad a'_{42} = \frac{f_1 ml\cos 60^\circ}{a'}, \quad a'_{44} = \frac{-f_0(J+ml^2)}{a'},$$

$$b'_2 = \frac{-ml\cos 60^\circ}{a'}, \quad b'_4 = \frac{J+ml^2}{a'},$$

$$a' = (M+m)(J+ml^2) - m^2l^2(\cos 60^\circ)^2.$$

Como visto anteriormente, um procedimento metódico para a determinação dos modelos lineares locais foi apresentado em Teixeira e Żak (1999).

As funções de pertinência para as regras 1 e 2 da planta são:

$$\alpha_1(x_1(t)) = \left\{1.0 - \frac{1.0}{1.0 + e^{-7.0[x_1(t)-\pi/6]}}\right\}\left\{\frac{1.0}{1.0 + e^{-7.0[x_1(t)+\pi/6]}}\right\}$$

e

$$\alpha_2(x_1(t)) = 1 - \alpha_1(x_1(t))$$

e suas respectivas curvas estão ilustradas na Fig. 5.2.

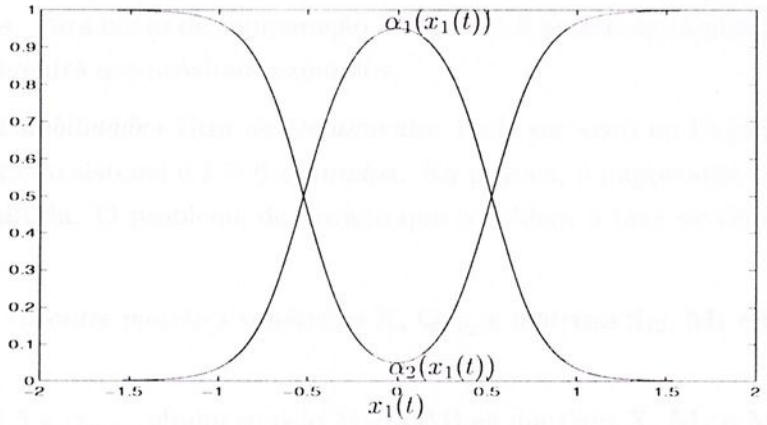


Figura 5.2: Funções de pertinência para as regras 1 e 2 da planta.

A lei de controle resultante é

Regra 1 *do regulador* : SE $x_1(t)$ está em torno de 0,
ENTÃO $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}_1\mathbf{x}(t)$.

Regra 2 *do regulador* : SE $x_1(t)$ está em torno de $\pm\,\pi/3$,
ENTÃO $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}_2\mathbf{x}(t)$.

Todas simulações apresentadas nos próximos exemplos empregaram o modelo não-linear do pêndulo descrito em (5.18) e foram elaboradas no software MATLAB.

Exemplo 3 - Estabilidade: Primeiro projetou-se um regulador fuzzy estável considerando-se a taxa de decaimento nula, utilizando-se os resultados descritos na Seção 3.2, Teorema 13. O problema de projeto do sistema fuzzy contínuo é definido como segue:

Encontre matrizes simétricas $\mathbf{X}$, $\mathbf{Qs}_{12}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{12}$, $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a* (5.1), (5.2) *e* (5.3).

O software MATLAB com o "LMI Control toolbox" forneceu as matrizes $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ que solucionam as LMIs acima. A solução obtida foi:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -528.1449 & -26.0483 & -35.5901 & -97.8646 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -813.2902 & -160.6602 & -54.8255 & -138.2795 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 471.6670 & 96.3106 & 33.2226 & 69.8935 \\ 96.3106 & 20.3494 & 6.8737 & 14.7348 \\ 33.2226 & 6.8737 & 2.6908 & 5.1072 \\ 69.8935 & 14.7348 & 5.1072 & 11.1132 \end{bmatrix} > 0.$$

Para ilustrar a validade da lei de controle projetada, que visou apenas a estabilidade, foi feita a simulação digital do sistema original (5.18) com a lei de controle (3.2) para $r = 2$, empregando F_1 e F_2 projetados acima, utilizando o Teorema 13. A Figura 5.3 apresenta os resultados obtidos. Para efeito de comparação a Figura 5.3 apresenta também outros resultados de simulações referentes aos próximos exemplos.

Exemplo 4 - Estabilidade + Taxa de Decaimento: Pode ser visto no Exemplo 3 que o tempo de estabelecimento do sistema é $t \cong 6$ *segundos*. Na prática, é importante considerar o tempo da resposta transitória. O problema de projeto que considera a taxa de decaimento é definido como segue:

Maximize γ *e encontre matrizes simétricas* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Qs}_{12}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{12}$, $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a* (5.8), (5.9) e (5.10)

Quando $\gamma = 1.5 < \gamma_{max}$, obtém-se pelo MATLAB as matrizes $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ que solucionam as LMIs acima. Foram obtidos os seguintes resultados:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -1151.4 & -227.3 & -344.4 & -307.1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -2023.0 & -400.6 & -607.2 & -523.9 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 137.9771 & 27.5436 & 42.4255 & 34.8301 \\ 27.5436 & 5.5188 & 8.4731 & 6.9605 \\ 42.4255 & 8.4731 & 13.3660 & 10.8123 \\ 34.8301 & 6.9605 & 10.8123 & 8.8555 \end{bmatrix} > 0.$$

As linhas contínuas na Figura 5.3 mostram as respostas de $x_1(t)$ e $u(t)$, sendo que o tempo de estabelecimento é $t \cong 2.6$ *segundos*. O regulador projetado diminuiu o tempo de estabelecimento do sistema, mas exigiu uma alta amplitude da entrada de controle.

Neste exemplo não foi utilizado $\gamma_{max} = 2.03$ pois os ganhos de realimentação obtidos neste caso praticamente não são implementáveis.

Exemplo 5 - Estabilidade + Taxa de Decaimento + Restrição na Entrada de Controle: Pode ser visto no Exemplo 4 que $max_t \parallel u(t) \parallel_2 = 1904.2$. Na prática existe uma limitação da entrada. É importante considerar não somente a taxa de decaimento mas também a restrição na entrada de controle. O problema de projeto que considera a taxa de decaimento e a restrição na entrada de controle é definido como segue:

Maximize γ *e encontre matrizes* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Qs}_{12}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{12}$, $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a (5.8), (5.9), (5.10), (5.14) e (5.15), com* $\mu = 200$ *e* $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

Note que 0.96 rad corresponde a 55°.

Quando $\gamma = \gamma_{max} = 0.49$, a solução obtida foi:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -93.9985 & -18.3830 & -7.2023 & -32.6293 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -157.6878 & -32.0374 & -11.8713 & -39.1556 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.0784 & 0.2236 & 0.1314 & 0.2116 \\ 0.2236 & 0.0465 & 0.0267 & 0.0431 \\ 0.1314 & 0.0267 & 0.0368 & 0.0322 \\ 0.2116 & 0.0431 & 0.0322 & 0.0513 \end{bmatrix} > 0.$$

A linha pontilhada na Figura 5.3 mostra a resposta $x_1(t)$ e $u(t)$, onde o tempo para estabilizar o sistema é $t \cong 4.8$ *segundos*. O regulador projetado também realizou a restrição da entrada pois $max_t \parallel u(t) \parallel_2 = 148.61 < \mu$.

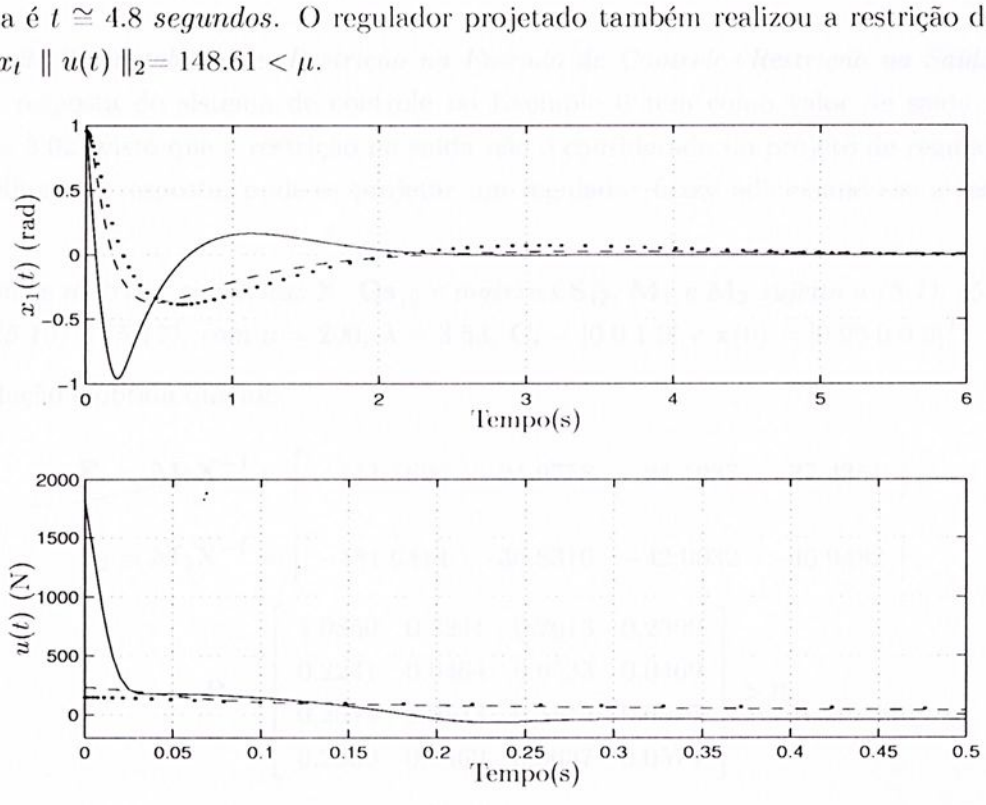


Figura 5.3: Respostas de $x_1(t)$ e $u(t)$ para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$ e considerando-se os casos: apenas estabilidade (linha tracejada); apenas taxa de decaimento (linha contínua); taxa de decaimento e restrição na entrada (linha pontilhada).

Exemplo 6 - Estabilidade + Restrição na Entrada de Controle: Também é possível projetar um regulador fuzzy estável satisfazendo a restrição da entrada, para a restrição da entrada $\mu = 200$ e $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

Encontre matrizes simétricas $\mathbf{X}$, $\mathbf{Qs}_{12}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{12}$, $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a (5.1), (5.2), (5.3), (5.14) e (5.15), com* $\mu = 200$ *e* $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

A solução é obtida quando

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -111.1696 & -21.9758 & -24.1937 & -37.4351 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -159.8422 & -32.7010 & -0.0011 & -38.1330 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8722 & 0.1787 & 0.0000 & 0.1912 \\ 0.1787 & 0.0367 & 0.0000 & 0.0388 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.1912 & 0.0388 & 0.0000 & 0.0477 \end{bmatrix} > 0.$$

A linha tracejada na Figura 5.4 mostra a resposta de $x_3(t)$ e $u(t)$. Pode ser determinado que $max_t \parallel u(t) \parallel_2 = 151.63 < \mu$.

A variável $x_3(t)$ possui um tempo de estabelecimento muito superior a 15 segundos. Esse tempo não é mostrado na Figura 5.4, sendo mostrado na figura apenas o valor máximo que $x_3(t)$ atinge.

Exemplo 7 - Estabilidade + Restrição na Entrada de Controle + Restrição na Saída de Controle: A resposta do sistema de controle no Exemplo 6 tem como valor de saída ($max_t \parallel x_3(t) \parallel_2 = 3.02$) visto que a restrição na saída não é considerada no projeto de regulador fuzzy. Para melhorar a resposta, pode-se projetar um regulador fuzzy adicionando-se a restrição na saída.

Encontre matrizes simétricas $\mathbf{X}$, $\mathbf{Qs}_{12}$ *e matrizes* $\mathbf{S}_{12}$, $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a (5.1), (5.2), (5.3), (5.14), (5.15) e (5.17), com* $\mu = 200$, $\lambda = 3.53$, $\mathbf{C}_i = [0\ 0\ 1\ 0]$ *e* $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

A solução é obtida quando

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -111.1696 & -21.9758 & -24.1937 & -37.4351 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -181.6414 & -36.8316 & -42.0032 & -46.9482 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.0850 & 0.2241 & 0.2613 & 0.2300 \\ 0.2241 & 0.0464 & 0.0533 & 0.0469 \\ 0.2613 & 0.0533 & 0.1514 & 0.0637 \\ 0.2300 & 0.0469 & 0.0637 & 0.0574 \end{bmatrix} > 0.$$

A linha contínua na Figura 5.4 mostra a resposta de $x_3(t)$ e $u(t)$. A resposta do sistema de controle satisfaz as restrições $max_t \parallel u(t) \parallel_2 = 171.31 < \mu$ e $max_t \parallel x_3(t) \parallel_2 = 1.86 < \lambda$.



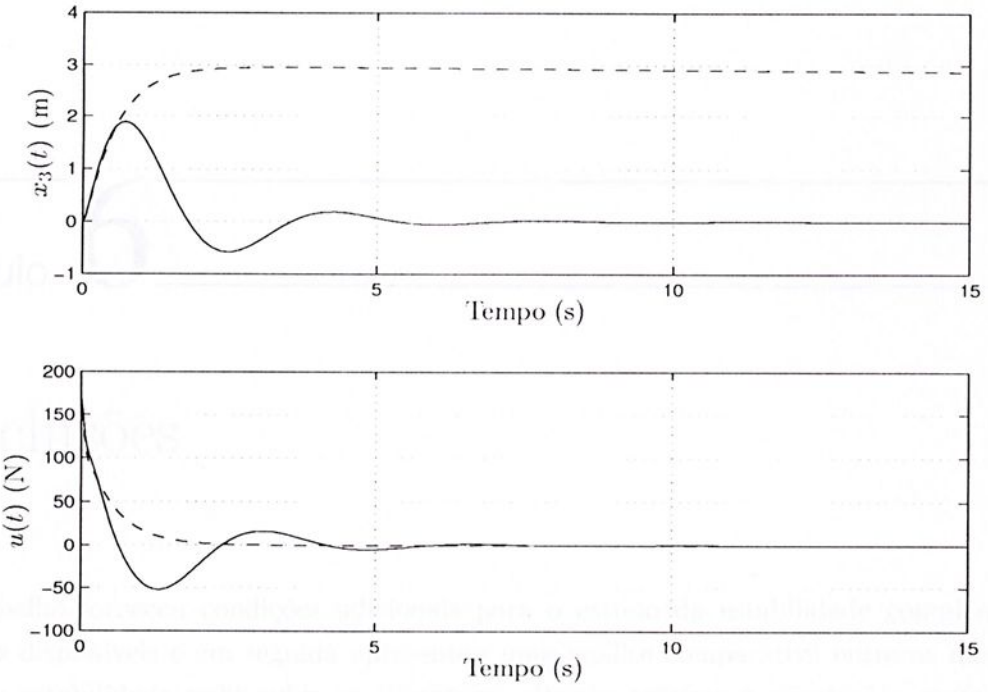


Figura 5.4: Respostas de $x_3(t)$ e $u(t)$ para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$ e considerando-se os casos: estabilidade e restrição na entrada (linha tracejada); estabilidade, restrição na entrada e restrição na saída (linha contínua).

Os resultados das simulações dos exemplos acima atestam o bom desempenho dos sistemas de controle projetados.

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho forneceu condições adicionais para o estudo da estabilidade complementando condições disponíveis e em seguida apresentou uma análise comparativa entre os métodos recentes de estabilidade publicados na literatura. Provas teóricas e simulações confrontam os métodos existentes, propondo idéias de generalizações para condições que se apresentam como conservativas. As condições tratadas são adequadas ao projeto de controladores para sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Os resultados apresentados permitem uma descrição direta em termos de LMIs (Teixeira e Assunção, 2001) e desta forma, podem ser facilmente resolvidas com softwares que solucionam problemas de programação semi-definida, que apresentam característica polinomial de convergência (Boyd et al., 1994). Análises teóricas e simulações digitais, utilizando um número maior de modelos, compararam condições para o estudo da estabilidade e projeto de reguladores para plantas não-lineares descritas por modelos fuzzy TSK (Takagi-Sugeno-Kang), baseados em LMI (Linear Matrix Inequalities), propostas nesta dissertação com as apresentadas em Tanaka, Ikeda e Wang (1998), Kim e Lee (2000), Teixeira et al. (2000), Tuan et al. (2001), Xiaodong e Qingling (2003) e Teixeira et al. (2003). Foi demonstrado que o método descrito em Teixeira et al. (2003) apresenta desempenho superior ou pelo menos igual aos outros métodos existentes e também aos propostos nesta dissertação. Foram apresentadas novas condições de estabilidade, sendo exploradas várias idéias de flexibilização das LMIs e os resultados obtidos mostraram-se, no máximo, igual aos descritos em Teixeira et al. (2003). Nos projetos de reguladores fuzzy é possível especificar também, além da estabilidade, a taxa de decaimento, restrições na entrada e na saída. É mostrado um exemplo de projeto, ou seja o controle de um pêndulo invertido na forma contínua utilizando condições recentes de estabilidade.

Trabalhos futuros possíveis podem investigar a inclusão de outras restrições no projeto, como por exemplo a rejeição de distúrbios e robustez (Tanaka, Nishimura e Wang, 1998) e sistemas com atraso no tempo (Cao e Frank, 2000), para a obtenção de condições mais relaxadas em termos de LMIs e a aplicação dos resultados de estabilidade existentes em situações práticas.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Apêndice A

Demonstração do Lema 7

O Lema 7, apresentado em Tuan et al. (2001) mostra que, dada uma matriz simétrica $\mathbf{P}_a \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\mathbf{P}_a = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad p_{ij} \in \mathbb{R},$$

tem-se;

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P}_a \mathbf{x} < \mathbf{0}, \quad \forall\, x_i \geq 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \neq 0, \tag{A.1}$$

se e somente se, existe $q_{12} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{bmatrix} p_{11} & q_{12} \\ q_{12} & p_{22} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad e \quad p_{12} - q_{12} \leq 0. \tag{A.2}$$

Prova: Prova-se que $(A.1) \Leftrightarrow (A.2)$. Já que a implicação $(A.2) \Rightarrow (A.1)$ é direta, é necessário então provar somente a implicação inversa. Nota-se que $p_{11} < 0$ e $p_{22} < 0$. Se $p_{12} \leq 0$ em (A.1), (A.2) também será satisfeita, para $q_{12} = 0$. Por outro lado, quando $p_{12} > 0$ e considerando $x_2 = 1$, em (A.1) tem-se

$$p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1 + p_{22} < 0 \tag{A.3}$$

$$\Leftrightarrow \max\left[p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1 + p_{22}\right] = \frac{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}{p_{11}} \leq 0 \tag{A.4}$$

$$\Rightarrow p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0, \tag{A.5}$$

e implica que, para $q_{12} = p_{12}$, (A.2) é satisfeita, pois $p_{11} < 0$ e,

$$det\left|\begin{bmatrix} p_{11} & q_{12} \\ q_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\right| = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0. \tag{A.6}$$

Logo, $(A.1) \Rightarrow (A.2)$.

Apêndice B

Demonstração do Teorema 11

O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ e matrizes simétricas $\mathbf{Z}_{ij}$, tais que

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{ii}) & \mathbf{Z}_{ij} \\ \mathbf{Z}_{ij} & \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{jj}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (1 \leq i < j \leq r) \tag{B.1}$$

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij} \leq \mathbf{0}, \tag{B.2}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $i < j$, excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$, $\forall\, \mathbf{z}(t)$, tais que

$$\mathbf{N}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ii}^T \\ \mathbf{M}_{ii}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \tag{B.3}$$

$$\mathbf{N}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \tag{B.4}$$

$$\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{G}_{ii} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i, \tag{B.5}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} = \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{F}_i}{2}. \tag{B.6}$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, onde $\mathbf{P} > 0$. Tem-se que

$$\triangle V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}(t+1)) - V(\mathbf{x}(t))$$

$$= \mathbf{x}^T(t)\left[|\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}|^T\mathbf{P}|\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}| - \mathbf{P}\right]\mathbf{x}(t).$$

Para obter $\triangle V(\mathbf{x}(t)) < 0$, é necessário que

$$|\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}|^T\mathbf{P}|\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}| - \mathbf{P} < 0.$$

Multiplicando a expressão anterior por $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, à esquerda e à direita e aplicando o complemento de Schur (Apêndice E), obtém-se:

$$\mathbf{T(a)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\,|\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}|^T \\ |\mathbf{A(a)} - \mathbf{B(a)F(a)}|\,\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0,$$

sendo

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1},\ \ \mathbf{A(a)} = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_i,\ \ \mathbf{B(a)} = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{B}_i \ \text{ e } \ \mathbf{F(a)} = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{F}_i.$$

Desenvolvendo-se a expressão anterior e tendo em vista (B.3)-(B.6), $\mathbf{T}(\alpha)$ pode ser reescrita na forma (Tuan et al., 2001):

$$\begin{aligned}\mathbf{T(a)} \;=\; & \sum_{i<j}^{r}\left[\frac{1}{r-1}\alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ii}^T \\ \mathbf{M}_{ii}\mathbf{X} & \mathbf{X}\end{bmatrix} + \frac{1}{r-1}\alpha_j^2(\mathbf{z}(t))\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{jj}^T \\ \mathbf{M}_{jj}\mathbf{X} & \mathbf{X}\end{bmatrix} + \right. \\ & \left. +2\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X}\end{bmatrix}\right] > \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{T(a)}\mathbf{x}(t) &= \sum_{i<j}^{r}\mathbf{x}^T(t)\left[\frac{1}{r-1}\alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\,|\mathbf{N}_{ii}| + \frac{1}{r-1}\alpha_j^2(\mathbf{z}(t))\,|\mathbf{N}_{jj}| + 2\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\,|\mathbf{N}_{ij}|\right]\mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{i<j}^{r}\mathbf{x}^T(t)|\alpha_i\mathbf{I}\ \ \alpha_j\mathbf{I}|\begin{bmatrix}\frac{1}{r-1}\mathbf{N}_{ii} & \mathbf{N}_{ij} \\ \mathbf{N}_{ij} & \frac{1}{r-1}\mathbf{N}_{jj}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i\mathbf{I} \\ \alpha_j\mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{i<j}^{r}\mathbf{x}^T(t)|\alpha_i\mathbf{I}\ \ \alpha_j\mathbf{I}|\mathbf{N}\mathbf{t}_{ij}|\alpha_i\mathbf{I}\ \ \alpha_j\mathbf{I}|^T\mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{i<j}^{r}|\alpha_i\mathbf{x}^T(t)\ \ \alpha_j\mathbf{x}^T(t)|\,\mathbf{N}\mathbf{t}_{ij}\,|\alpha_i\mathbf{x}^T(t)\ \ \alpha_j\mathbf{x}^T(t)|^T \\ &= \sum_{i<j}^{r}|\alpha_i\ \ \alpha_j|\begin{bmatrix}\mathbf{x}^T(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}^T(t)\end{bmatrix}\mathbf{N}\mathbf{t}_{ij}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i \\ \alpha_j\end{bmatrix} \\ &= \sum_{i<j}^{r}|\alpha_i\ \ \alpha_j|\,\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x})\,|\alpha_i\ \ \alpha_j|^T.\end{aligned}$$

Para que $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{T(a)}\mathbf{x}(t) > 0$, sendo $\mathbf{x}(t) \neq 0$, uma condição suficiente para $i, j = 1, \ldots, r,\ \ i <$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

j é que $[\alpha_i \mathbf{I} \ \alpha_j \mathbf{I}](-\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x}))[\alpha_i \mathbf{I} \ \alpha_j \mathbf{I}]^T < \mathbf{0}$. Portanto, aplicando o Lema 7 (Tuan et al., 2001), tem-se

$$\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{t}_{ij}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{ii})\right)\mathbf{x}(t) & \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Z}_{ij}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Z}_{ij}\mathbf{x}(t) & \mathbf{x}^T(t)\left(\frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{jj})\right)\mathbf{x}(t) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad e$$

$$\mathbf{x}^T(t)(-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij})\mathbf{x}(t) \leq \mathbf{0}.$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{ii}) & \mathbf{Z}_{ij} \\ \mathbf{Z}_{ij} & \frac{1}{r-1}(-\mathbf{N}_{jj}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \quad e$$

$$\mathbf{x}^T(t)(-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij})\mathbf{x}(t) \leq \mathbf{0}.$$

Logo, para que $\triangle V(\mathbf{x}(t)) < 0$ quando $\mathbf{x}(t) \neq 0$, é suficiente que (B.1) e (B.2) sejam satisfeitas.

Observação 4 *Os Teoremas 6, 8, 10 e 12 tratam do caso em que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$, para todo $t \geq 0$. A Figura 3.1 apresenta uma situação no qual esta hipótese não ocorre. Considere por exemplo, $\alpha_i(\mathbf{z}(t))$, $i = 1, 2, 3, 4$ descritas na Figura 3.1, sendo $r = 4$. O sistema controlado discreto descrito em (3.4), utilizando-se o Teorema 11 para cada região da Figura 3.1, para $i, j = 1, \ldots, r$, $i < j$ e considerando uma matriz comum $\mathbf{P}$, obtém-se as seguintes LMIs para o sistema tornar-se assintoticamente estável globalmente:*

Caso 1: Para $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) \neq 0$,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(-\mathbf{N}_{ii}) & \mathbf{Z}_{ij} \\ \mathbf{Z}_{ij} & \frac{1}{3}(-\mathbf{N}_{jj}) \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$-\mathbf{N}_{ij} - \mathbf{Z}_{ij} \leq \mathbf{0},$$

sendo $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 4)$.

Caso 2: Para $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(-\mathbf{N}_{ii}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(-\mathbf{N}_{jj}) \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

sendo $(i, j) = (1, 3), (1, 4), (2, 4)$.

Note que no Caso 2, para $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$, não será necessária a verificação das LMIs,



pois os termos não-nulos já foram checados no Caso 1.

Assim, se as LMIs descritas no Caso 1 forem factíveis, (3.4) é assintoticamente estável globalmente.

Portanto, utilizando-se do Teorema 11 o problema ficou dividido em várias LMIs, para todos os pares $i < j$, cada uma relacionada com uma região, com a possibilidade de ser analisada separadamente, sem a necessidade de verificação das LMIs para o caso em que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0$ e portanto, diminuindo o esforço computacional à medida que o número de modelos cresce.

Apêndice C

Demonstração do Teorema 12

O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existem matrizes simétricas $\mathbf{P}$, $\mathbf{Y}_{ii}$ e matrizes $\mathbf{Y}_{ij}$ tais que

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \tag{C.1}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{ii}^T \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}_{ii} - \mathbf{P} + \mathbf{Y}_{ii} < \mathbf{0}, \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{C.2}$$

$$2\mathbf{\Lambda}_{ij}^T \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}_{ij} - 2\mathbf{P} + \mathbf{Y}_{ij} + \mathbf{Y}_{ij}^T \leq \mathbf{0}, \quad (1 \leq i < j \leq r) \tag{C.3}$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^T & \mathbf{Y}_{12} & \ldots & \mathbf{Y}_{1r} \\ \mathbf{Y}_{12}^T & \mathbf{Y}_{22} & \ldots & \mathbf{Y}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{1r}^T & \mathbf{Y}_{2r}^T & \ldots & \mathbf{Y}_{rr} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \tag{C.4}$$

sendo $\mathbf{\Lambda}_{ii} \equiv \mathbf{G}_{ii}$, $i = 1, \ldots, r$, $\mathbf{\Lambda}_{ij} \equiv ((\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})/2)$.

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{P} > 0$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
\triangle V(\mathbf{x}(t)) &= V(\mathbf{x}(t+1)) - V(\mathbf{x}(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\alpha_k(\mathbf{z}(t))\alpha_l(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\left[\mathbf{G}_{ij}^T\mathbf{P}\mathbf{G}_{kl} - \mathbf{P}\right]\mathbf{x}(t) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\alpha_k(\mathbf{z}(t)) \\
&\quad .\alpha_l(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\left[(\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})^T\mathbf{P}(\mathbf{G}_{kl} + \mathbf{G}_{lk}) - 4\mathbf{P}\right]\mathbf{x}(t) \\
&\leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\left[(\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})^T\mathbf{P}(\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}) - 4\mathbf{P}\right]\mathbf{x}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\left[\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right) - \mathbf{P}\right]\mathbf{x}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\left[\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P}\mathbf{G}_{ii} - \mathbf{P}\right]\mathbf{x}(t)
\end{aligned}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$
\begin{aligned}
&+2\sum_{i<j}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\left[\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right)-\mathbf{P}\right]\mathbf{x}(t)\\
\leq\ & -\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Y}_{ii}\mathbf{x}(t)-\sum_{i<j}^{r}\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{Y}_{ij}+\mathbf{Y}_{ij}^T)\mathbf{x}(t)\\
=\ & -\begin{bmatrix}\alpha_1(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\\ \alpha_2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\\ \vdots\\ \alpha_r(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12}^T & \dots & \mathbf{Y}_{1r}^T\\ \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{22} & \dots & \mathbf{Y}_{2r}^T\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{Y}_{1r} & \mathbf{Y}_{2r} & \dots & \mathbf{Y}_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\\ \alpha_2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\\ \vdots\\ \alpha_r(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\end{bmatrix}\\
=\ & \begin{bmatrix}\alpha_1(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\\ \alpha_2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\\ \vdots\\ \alpha_r(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\end{bmatrix}^T(-\tilde{\mathbf{Y}})\begin{bmatrix}\alpha_1(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\\ \alpha_2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\\ \vdots\\ \alpha_r(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t)\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Assim, se (C.4) mantém, então $\triangle V(\mathbf{x}(t)) < 0$, para $\mathbf{x}(t) \neq 0$, concluindo a prova.

Apêndice D

Restrição nos Vetores de Entrada e Saída da Planta

D.1 Restrição no Vetor de Entrada

Admita que um SLIT possua a seguinte representação em variáveis de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{D.1}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ a saída do sistema ($p \geq m$), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz característica do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada do sistema e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída do sistema.

O problema da restrição no vetor de entrada u consiste em especificar LMI, de modo a assegurar que:

$$\max_{t \geq 0} ||u|| \leq \mu_o,$$

sendo μ_o uma especificação considerada no projeto do controlador. Para a lei de controle $u = Kx$, tem-se:

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

Considera-se, então, uma candidata a função de Lyapunov na forma quadrática $V(x) = x^T Px$, na qual P é uma matriz real simétrica definida positiva. A derivada desta função em relação ao tempo, ao longo de qualquer trajetória, é descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} \\ &= x^T(A + BK)^T Px + x^T P(A + BK)x \\ &= x^T(A^T P + K^T B^T P)x + x^T(PA + PBK)x \\ &= x^T(PA + A^T P + PBK + K^T B^T P)x \end{aligned}$$

$$= x^T PP^{-1}(PA + A^T P + PBK + K^T B^T P)P^{-1}Px$$
$$= x^T P(AP^{-1} + P^{-1}A^T + BKP^{-1} + P^{-1}K^T B^T)Px. \quad \text{(D.2)}$$

Definindo-se $X = P^{-1}$ e $F = KP^{-1} = KX$, tem-se:

$$\dot{V}(x) = x^T P(AX + XA^T + BF + F^T B^T)Px$$

Como $V(x)$ foi escolhida sendo definida positiva, para que se tenha estabilidade assintótica, é suficiente que $\dot{V}(x)$ seja definida negativa. Logo,

$$AX + XA^T + BF + F^T B^T < 0$$

Então, as condições para a estabilidade são a existência de X e F, tais que:

$$AX + XA^T + BF + F^T B^T < 0 \text{ e } X = X^T > 0, \quad \text{(D.3)}$$

que são LMI em X e F.

Quando uma determinada condição inicial $x(0)$ é conhecida, é possível encontrar um limite superior para a norma euclidiana da entrada de controle u (Boyd et al., 1994). Considera-se, inicialmente, que $X = X^T > 0$ satisfaça:

$$x(0)^T X^{-1} x(0) < 1 \quad \text{(D.4)}$$

Esta condição não restringe a solução de (D.3), pois limita apenas a norma de X^{-1} e (D.3) não impõe outras restrições à matriz X.

Segundo VanAntwerp e Braatz (2000), a idéia básica do complemento de Schur diz que a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad \text{(D.5)}$$

sendo que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ têm uma dependência afim de x, é equivalente a:

$$R(x) > 0 \text{ e } Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0,$$

isto é, este conjunto de inequações não-lineares pode ser representado através da LMI (D.5).

O Apêndice E mostra a demonstração do complemento de Schur.

Logo, pelo complemento de Schur, (D.4) possui a seguinte equivalência:

$$1 - x(0)^T X^{-1} x(0) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} > 0 \quad \text{(D.6)}$$



Como $K = FX^{-1}$ e definindo-se $z = X^{-\frac{1}{2}}x$, tem-se:

$$\begin{aligned}\max_{t\geq 0}\|u\|_2 &= \max_{t\geq 0}\|Kx\|_2 \\ &= \max_{t\geq 0}\|FX^{-1}x\|_2 \\ &= \max_{t\geq 0}\|FX^{-1}X^{\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}x\|_2 \\ &= \max_{t\geq 0}\|FX^{-\frac{1}{2}}z\|_2. \end{aligned} \tag{D.7}$$

De $(D.4)$, tem-se:

$$\begin{aligned}\|z(0)\|_2^2 &= \|X^{-\frac{1}{2}}x(0)\|_2^2 \\ &= x(0)^T X^{-\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}x(0) \\ &= x(0)^T X^{-1}x(0) \leq 1. \end{aligned} \tag{D.8}$$

Como para $V(x) = x^T X^{-1}x$, $\dot{V}(x) < 0$, para $x \neq 0$, então $(D.8)$ é satisfeita para todo x, $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|z\|_2^2 &= \|X^{-\frac{1}{2}}x\|_2^2 \\ &= x^T X^{-\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}x \\ &= x^T X^{-1}x \leq 1 \end{aligned} \tag{D.9}$$

De $(D.7)$ e $(D.8)$,

$$\begin{aligned}\max_{t\geq 0}\|FX^{-\frac{1}{2}}z\|_2 &= \max_{t\geq 0}\sqrt{z^T X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}}z} \\ &= \sqrt{\lambda_{max}(X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}})z^T z} \\ &= \sqrt{\lambda_{max}(X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}})}. \end{aligned} \tag{D.10}$$

Assim,

$$\max_{t\geq 0}\|FX^{-\frac{1}{2}}z\|_2^2 < \mu_0^2 \Rightarrow \lambda_{max}(X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}}) < \mu_0^2.$$

Esta condição é equivalente a:

$$X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}} - \mu_0^2 I < 0, \tag{D.11}$$

pois:

$$z^T(X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}} - \mu_0^2 I)z \leq z^T z(\lambda_{max}(X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}}) - \mu_0^2).$$



Multiplicando-se $(D.11)$, em ambos os lados, por $X^{\frac{1}{2}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} & X^{\frac{1}{2}}(X^{-\frac{1}{2}}F^TFX^{-\frac{1}{2}})X^{\frac{1}{2}} - X^{\frac{1}{2}}\mu_o^2IX^{\frac{1}{2}} < 0, \\ & F^TF - \mu_o X < 0, \\ & \mu_o^2 X - F^TF > 0, \\ & X - F^T(\mu_o^{-2}I)F > 0. \end{aligned} \tag{D.12}$$

Logo, pelo complemento de Schur, $(D.12)$ possui a seguinte equivalência:

$$-X^{-\frac{1}{2}}F^TFX^{-\frac{1}{2}} + \mu_o^2 I > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & F^T \\ F & \mu_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{D.13}$$

Portanto, as LMI $(D.6)$ e $(D.13)$ solucionam o problema.

D.2 Restrição no Vetor de Saída

O problema da restrição no vetor de saída y consiste em especificar LMI, de modo a assegurar que:

$$\max_{t\geq 0} ||y|| \leq \xi_o,$$

sendo ξ_o uma especificação considerada no projeto do controlador.

A análise a seguir é semelhante àquela efetuada no estudo da restrição no vetor de entrada. Para isso, considera-se, novamente, o SLIT descrito em (D.1). Como $x = X^{\frac{1}{2}}z$, tem-se:

$$\begin{aligned} \max_{t\geq 0} \|y\|_2^2 &= \max_{t\geq 0} \|Cx\|_2^2 \\ &= \max_{t\geq 0} \|CX^{\frac{1}{2}}z\|_2^2 \\ &= \max_{t\geq 0} \sqrt{z^TX^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}}z} \\ &= \sqrt{\lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}}z^Tz)} \\ &= \sqrt{\lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}})}. \end{aligned} \tag{D.14}$$

Portanto, analogamente ao desenvolvimento realizado anteriormente em $(D.11)$, $(D.12)$ e $(D.13)$, tem-se que

$$\max \|CX^{\frac{1}{2}}z\|_2^2 < \xi_0^2 \Rightarrow \lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}}) < \xi_0^2.$$

Esta condição é equivalente a

$$X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}} - \xi_0^2 I < 0, \tag{D.15}$$



pois,

$$z^T(X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}} - \xi_0^2 I)z \leq z^T z(\lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}}C^TC - \xi^2 X^{\frac{1}{2}}) - \xi_0^2).$$

Multiplicando-se $(D.15)$, em ambos os lados, por $X^{\frac{1}{2}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} &XC^TCX - \xi_0^2 X < 0, \\ &\xi_0^2 X - XC^TCX > 0, \\ &X - XC^T(\xi_0^{-2} I)CX > 0. \end{aligned} \tag{D.16}$$

Logo, pelo complemento de Schur, $(D.16)$ possui a seguinte equivalência:

$$-X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}} + \xi_0^2 I > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & XC^T \\ CX & \xi_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{D.17}$$

Portanto, as LMI $(D.6)$ e $(D.17)$ solucionam o problema.

Apêndice E

Complemento de Schur

A idéia básica do complemento de Schur (VanAntwerp e Braatz, 2000) diz que a LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0,$$

sendo que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ têm uma dependência afim de x, é equivalente a:

$$R(x) > 0 \text{ e } Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0.$$

($\Rightarrow$) Suponha que:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \tag{E.1}$$

e defina:

$$F(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \tag{E.2}$$

Então

$$F(u,v) > 0, \ \forall [u,v] \neq 0 \tag{E.3}$$

Considere, inicialmente, $u = 0$. Então:

$$F(0,v) = v^T R(x) v > 0, \ \forall v \neq 0 \Rightarrow R(x) > 0.$$

Adote, agora,

$$v = -R(x)^{-1}S(x)^T u, \text{ com } u \neq 0.$$

Então,

$$F(u,v) = u^T(Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T)u > 0, \ \forall u \neq 0$$

$$\Rightarrow Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0.$$

($\Leftarrow$) Suponha que:

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0, \;\; R(x) > 0. \tag{E.4}$$

Fixando-se u e otimizando-se em termos de v $F(u,v)$ definido em (E.2), obtém-se:

$$\nabla_v F^T = 2R(x)v + 2S(x)^T u = 0 \tag{E.5}$$

Desde que $R(x) > 0$, de (E.5), segue que:

$$v = -R(x)^{-1}S(x)^T u. \tag{E.6}$$

Substituindo (E.6) em (E.2), então:

$$F(u) = u^T(Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T)u.$$

Desde que $(Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T) > 0$, o mínimo de $F(u)$ ocorre para $u = 0$, que também implica que $v = 0$. Então, o mínimo de $F(u,v)$ ocorre em $(0,0)$ e é igual a zero. Portanto, $F(u,v) > 0$, $\forall |u,v| \neq 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0.$$

Referências Bibliográficas

Avellar, R. G. (2001). *Condições relaxadas para a estabilidade e controle de sistemas não-lineares com modelos fuzzy e LMI*, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, Ilha Solteira-SP. Dissertação de Mestrado.

Bergsten, P., Palm, R. e Driankov, D. (2002). Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics* **32**(1): 114–121.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in systems and control theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.

Cao, S. G., Rees, N. W. e Feng, G. (1997). Lyapunov-like stability theorems for discrete-time fuzzy control systems , *International Journal of Systems Science* **28**(3): 297–308.

Cao, Y. Y. e Frank, P. M. (2000). Analisis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **8**(2): 200–211.

Friedland, B. (1996). *Advanced control systems design*, Prentice-Hall, New Jersey 07632.

Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. e Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox - For use with Matlab*, The Math Works, Inc.

Guo, S., Shieh, L., Chen, G. e Lin, C. (2000). Effective chaotic orbit tracker: A prediction-based digital redesign approach, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I Fundamental Theory and Application* **47**(11): 1557–1570.

Ichtev, A., Hellendoorn, J. e Babuska, R. (2001). Fault detection and isolation using multiple Takagi-Sugeno fuzzy model, pp. 1498–1502.

Kadmiry, B. e Driankov, D. (2001). Fuzzy control of an autonomous helicopter, pp. 2792–2802.

Kim, E. e Lee, H. (2000). New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **8**(5): 523–534.

Kosko, B. (1997). *Fuzzy Egineering*, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice-Hall, USA.

unesp

Ma, X. J., Sun, Z. Q. e He, Y. Y. (1998). Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(1): 41–51.

Machado, E. R. M. D. (2003). *Modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno*, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, Ilha Solteira-SP. Tese de Doutorado.

Pietrobom, H. C. (1999). *Controle de sistemas não-lineares baseados em LMI utilizando modelos fuzzy*, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, Ilha Solteira-SP. Dissertação de Mestrado.

Slotine, J. J. E. e Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*, Prentice Hall, New Jersey-USA.

Sugeno, M. e Kang, G. T. (1988). Structure identification of fuzzy model , *Fuzzy Sets and Systems* **28**: 15–33.

Takagi, T. e Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **15**(1): 116–132.

Tanaka, K., Ikeda, T. e Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(2): 250–265.

Tanaka, K., Nishimura, M. e Wang, H. O. (1998). Multi-objective fuzzy control of high rise/high speed elevators using LMIs, *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia, PA, pp. 3450–3454.

Tanaka, K., Ohtake, H. é Hori, T. (2001). Stable control for R/C helicopter, pp. 2792–2802.

Tanaka, K. e Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems, *Fuzzy Sets and Systems* **45**(2): 135–156.

Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohatake, H. e Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(4): 525–537.

Teixeira, M. C. M. e Assunção, E. (2001). Controle automático de sistemas não lineares com modelos fuzzy de Takagi-Sugeno, *Aplicações em Dinâmica e Controle - Aplicon'2001* pp. 481–500.

Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Avellar, R. (2003). On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**(5): 613–623.

Teixeira, M. C. M., Avellar, R. e Assunção, E. (2001). On relaxed LMI-based design for fuzzy controllers, *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Fuzzy Systems* pp. 704–707.

Teixeira, M. C. M., Pietrobom, H. C. e Assunção, E. (2000). Novos resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e LMI , *Controle & Automação* **11**(1): 37–48.



Teixeira, M. C. M. e Żak, S. H. (1999). Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models , *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(2): 133–142.

Tuan, H. D., Apkarian, P., Narikiyo, T. e Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(2): 324–332.

VanAntwerp, J. e Braatz, R. (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities, *Journal of Process Control* **10**(22): 363–385.

Wang, H. O., Tanaka, K. e Griffin, M. F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **4**(1): 14–23.

Will, A. B., Teixeira, M. C. M. e Żak, S. H. (1997). Four whell steering control systems design using fuzzy models, *Sixth IEEE Conference on Control Applications*, Hartford CT USA, pp. 73–78.

Xiaodong, L. e Qingling, Z. (2003). New approaches to H ∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI, *Automatica* (39): 1571–1582.

Zheng, F., Wang, Q., Lee, T. e Huang, X. (2001). Robust PI controller design of nonlinear systems via fuzzy modeling approach, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part A: Systems and Humans* **31**(6): 666–675.

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dee.feis.unesp.br

