

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Engenharia de Bauru

Fernando de Haro Moraes

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM
ISOLADOR DE VIBRAÇÕES INERCIAL - INERTER**

Bauru - SP

2018

Fernando de Haro Moraes

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM ISOLADOR DE VIBRAÇÕES INERCIAL - INERTER

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica na Área de Projeto Mecânico, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Paulo J. Paupitz Gonçalves
Co-orientador: Prof. Dr. Marcos Silveira

Bauru - SP
2018



M827a Moraes, Fernando de Haro
 Análise do comportamento dinâmico de um isolador de
 vibrações inercial-Inerter / Fernando de Haro Moraes. --
 Bauru, 2019
 99 p. : il.

 Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista
 (Unesp), Faculdade de Engenharia, Bauru
 Orientador: Paulo José Paupitz Gonçalves
 Coorientador: Marcos Silveira

 1. Isolador de vibração inercial. 2. Não-linearidade
 geométrica. 3. Inerter. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da
Faculdade de Engenharia, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE FERNANDO DE HARO MORAES, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 18 dias do mês de dezembro do ano de 2018, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro do DTI / FEB / BAURU, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. JOAO ANTONIO PEREIRA do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, Prof. Dr. ANGELO MARCELO TUSSET do(a) Departamento de Matemática / Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR , Prof. Dr. FABRICIO CESAR LOBATO DE ALMEIDA do(a) Departamento de Engenharia de Biossistemas / Faculdade de Ciências e Engenharia de Tupã - UNESP, Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da TESE DE DOUTORADO de FERNANDO DE HARO MORAES, intitulada **ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM ISOLADOR DE VIBRAÇÕES INERCIAL - INERTER** . Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: Aprovado . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES



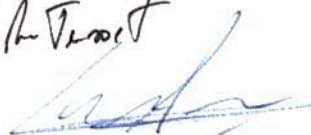
Prof. Dr. JOAO ANTONIO PEREIRA



Prof. Dr. ANGELO MARCELO TUSSET



Prof. Dr. FABRICIO CESAR LOBATO DE ALMEIDA



Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO



À minha família, em especial aos meus pais Rui e Elisabete, aos meus irmãos Daniel e Carolina e a minha esposa Luciana, filha Beatriz e família, por todo amor, apoio, confiança e incentivo em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEB-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- A Deus, por ter me dado força e saúde para chegar até aqui;
- Aos meus pais Rui e Elisabete e aos meus irmãos Daniel e Carolina pelo carinho, apoio e incentivo;
- A minha esposa Luciana e filha Beatriz pelo amor, apoio, confiança e incentivo em todos os momentos;
- A minha sogra Vera, sogro Luiz, cunhada Giovana e madrinha Mariana por ficar e cuidar da Beatriz nos momentos de aperto;
- Ao Prof. Dr. Paulo J. Paupitz Gonçalves, por todo ensinamento, incentivo, confiança e orientação;
- Ao Prof. Dr. Marcos Silveira, pela co-orientação, acompanhamento nas bancas examinadoras, sugestões e incentivo;
- Aos meus amigos e colegas do laboratório que de forma direta ou indiretamente me ajudaram, em especial ao Júlio César M. Fernandes, Willian M. Kuhnert, Douglas R. Santo, Danilo Barros. A. Silva e Daniel Martins pela ajuda e o trabalho feito em conjunto.

*“A alegria que se tem em pensar e aprender faz-nos
pensar e aprender ainda mais.”*

Aristóteles

RESUMO

Esta tese de doutorado apresenta o comportamento de um dispositivo mecânico chamado *Inerter*. O mecanismo considerado é linear, possui dois terminais de fixação e uma cremalheira conectada a um volante de inércia. Uma força é desenvolvida sempre que houver um movimento relativo e aceleração entre seus dois terminais. A força do *Inerter* é proporcional à aceleração relativa entre seus terminais multiplicada pela inertância. A inertância é um parâmetro do *Inerter* a qual está relacionada ao momento de inércia e a relação de engrenamento do volante de inércia e cremalheira. A principal vantagem do sistema isolador de vibração com o dispositivo *Inerter* é que o sistema apresenta alta capacidade de isolamento de vibração na frequência da anti-ressonância, a qual é possível de ser escolhida e ajustada para uma determinada frequência desejada alterando-se a inertância. O principal objetivo desta tese é analisar um sistema isolador de vibração acoplado a um dispositivo *Inerter* em um arranjo linear e em um arranjo geométrico não linear. Foi observado que o arranjo geométrico não linear do dispositivo *Inerter* promove benefícios em relação ao arranjo linear em termos de redução da magnitude de transmissibilidade.

Palavras-chave: *Inerter*; Isolamento de vibração; Não-linearidade geométrica.

ABSTRACT

This doctoral thesis presents the behavior of a mechanical device called Inerter. The mechanism considered is linear, has two fixing terminals and a rack connected to an inertia flywheel. A force is developed whenever there is a relative movement and an acceleration between its two terminals. The Inerter force is proportional to the relative acceleration between its terminals multiplied by the inertance. The inertance is a parameter of the *Inerter* which is related to the moment of inertia and the gear ratio of the flywheel and rack. The main advantage of the vibration isolator system with the Inerter device is that the system has high vibration isolation capacity at the anti-resonance frequency which can be chosen and adjusted for a desired frequency changing the inertance. The main objective of this thesis is to analyze a vibration isolation system coupled to an Inerter device in a linear arrangement and in a nonlinear geometric arrangement. It was observed that the non-linear geometric arrangement of the Inerter device promotes benefits over the linear arrangement in terms of reduction of the transmissibility magnitude.

Keywords: Inerter; Vibration isolation; Geometrical nonlinearity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Dispositivo <i>Inerter</i> com cremalheira e pinhão.	24
Figura 2	Dispositivo <i>Inerter</i> com fuso de esferas.	25
Figura 3	Redes de Analogia Mecânico Elétrica.	25
Figura 4	Sistema absorvedor de vibração do tipo massa sintonizada e <i>Inerter</i> (Renault 2006).	26
Figura 5	Dispositivo <i>Inerter</i> de Goodwin.	27
Figura 6	Dispositivo <i>Inerter</i> de Flannelly.	28
Figura 7	Dispositivo <i>Inerter</i> hidráulico de Wang, Hong e Lin (2011).	28
Figura 8	Dispositivo <i>Inerter</i> hidráulico de Liu, Xu e Ji (2012).	29
Figura 9	Isolador não linear estudado por Carrella et al. (2012).	31
Figura 10	Modelo massa-mola-amortecedor.	34
Figura 11	Magnitude da transmissibilidade de deslocamento do modelo massa-mola e massa-mola-amortecedor.	35
Figura 12	Dispositivo <i>Inerter</i>	36
Figura 13	Sistema linear massa-mola-amortecedor- <i>Inerter</i>	36
Figura 14	Magnitude da transmissibilidade de deslocamento do modelo linear massa-mola- <i>Inerter</i>	38
Figura 15	Resposta em Frequência do modelo massa-mola e do modelo linear massa-mola- <i>Inerter</i>	39
Figura 16	Modelo 3 - Sistema linear massa-mola-amortecedor-acoplamento elástico <i>Inerter</i>	40
Figura 17	Rigidez dinâmica do paralelo entre b e c_z	41
Figura 18	Rigidez dinâmica da série entre k_z e D_0	41
Figura 19	Rigidez dinâmica do paralelo entre k_p , c_p e D_1	41

Figura 20	Modelo 4 - Sistema isolador de vibrações massa-mola-amortecedor- <i>Inerter</i> com atrito Coulomb.	43
Figura 21	(a) Desenho do dispositivo <i>Inerter</i> experimental e (b) Vista Isométrica.	46
Figura 22	Aparato experimental do sistema isolador de vibrações massa-mola- <i>Inerter</i>	47
Figura 23	Aparato experimental massa-mola.	49
Figura 24	Comparação da resposta experimental e o modelo massa-mola.	50
Figura 25	Aparato experimental massa-mola-amortecedor- <i>Inerter</i>	51
Figura 26	Comparação da resposta em frequência do aparato experimental massa- mola- <i>Inerter</i> , Modelo 3 e Modelo 4.	53
Figura 27	Comparação entre o aparato experimental massa-mola- <i>Inerter</i> e o massa- mola.	54
Figura 28	Aparato experimental massa-mola- <i>Inerter</i> e discos utilizados para va- riar a massa do volante de inércia.	55
Figura 29	Variação da massa do volante de inércia.	56
Figura 30	Resultados experimentais da variação da inertância do aparato experi- mental massa-mola- <i>Inerter</i>	57
Figura 31	Representação do sistema massa-mola-amortecedor com o <i>Inerter</i> em posição horizontal - arranjo geométrico não linear - Modelo 5.	60
Figura 32	Representação das forças no <i>Inerter</i> horizontal.	60
Figura 33	Curvas <i>Backbone</i> da Frequência de oscilação Ω em função de H com $\mu = 0.3$. Equação do Movimento Exata (Linha Azul); Aproximação de Baixa Amplitude (Linha vermelha tracejada); Aproximação de Alta Amplitude (Linha traço ponto). Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear.	66
Figura 34	Trajatórias no plano de fase para a equação exata, aproximação <i>BA</i> e aproximação <i>AA</i> com condições iniciais $(h_0, h'_0) = (5, 0)$. Conside- rando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear.	67

Figura 35	Trajétórias no plano de fase para a equação exata, aproximação <i>BA</i> e aproximação <i>AA</i> com condições iniciais $(h_0, h'_0) = (2, 0)$. Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear.	68
Figura 36	Trajétórias no plano de fase para a equação exata, aproximação <i>BA</i> e aproximação <i>AA</i> com condições iniciais $(h_0, h'_0) = (0.1, 0)$. Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear.	68
Figura 37	Magnitude da transmissibilidade relativa em função da frequência variando a razão de inércia $\mu = 0.1, 0.2, 0.3$, com $\xi = 0.01$ e $\hat{X}_0 = 0.1$. Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear - aproximação <i>BA</i>	70
Figura 38	Magnitude relativa da transmissibilidade em função da frequência e algumas definições de suas características, com $\hat{X}_0 = 0.1$, $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$. Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear - aproximação <i>BA</i>	71
Figura 39	Comparação das magnitudes de deslocamento absoluto com excitação de base, entre o sistema linear massa-mola-amortecedor (linha vermelha), o sistema linear massa-mola-amortecedor- <i>Inerter</i> (linha tracejada preta) e o sistema proposto com <i>Inerter</i> em arranjo não linear considerando a aproximação de baixa amplitude (linha grossa azul), com $\hat{X}_0 = 0.3$	74
Figura 40	Comparação das magnitudes de deslocamento absoluto com excitação de base, entre o sistema linear massa-mola-amortecedor (linha vermelha), o sistema linear massa-mola-amortecedor- <i>Inerter</i> (linha tracejada preta) e o sistema proposto com <i>Inerter</i> em arranjo não linear considerando a aproximação de baixa amplitude (linha grossa azul), com $\hat{X}_0 = 0.6$	75
Figura 41	Comparação da transmissibilidade relativa considerando o modelo com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear e a equação do movimento exata.	77

Figura 42	Comparação da magnitude absoluta de transmissibilidade considerando a equação do movimento exata do sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear, com o sistema linear massa-mola-amortecedor e o sistema linear massa-mola-amortecedor- <i>Inerter</i> , com $X_0 = 0.3$, $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$	78
Figura 43	Comparação da magnitude absoluta de transmissibilidade considerando a equação do movimento exata do sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear, com o sistema linear massa-mola-amortecedor e o sistema linear massa-mola-amortecedor- <i>Inerter</i> , com $X_0 = 0.6$, $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$	78
Figura 44	Deslocamento relativo e região de estabilidade obtida pelo método do Balanço Harmônico, com $\hat{X}_0 = 0.1$, $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$. Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear - aproximação <i>BA</i>	80
Figura 45	Deslocamento relativo e região de estabilidade obtida pelo método do Balanço Harmônico, com $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$. Foram utilizados dois valores de deslocamento de base $\hat{X}_0 = 0.05, 0.025$. Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear - equação exata.	81
Figura 46	Bifurcação - Magnitude relativa de transmissibilidade $ H/\hat{X}_0 $ para diferentes valores de deslocamento de base (X_0), considerando integração numérica, com $\mu = 0.3$ e $\xi = 0.02$. Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear - equação exata.	84
Figura 47	Bifurcação - Magnitude da transmissibilidade relativa ($ H/\hat{X}_0 $) obtido por varredura de frequência. Os resultados foram obtidos através da integração numérica, para $X_0 = 0.1$, $\mu = 0.3$ e $\xi = 0.01$. O detalhe mostra o intervalo de frequência com soluções co-existent. Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear - equação exata.	85
Figura 48	(a) Histórico no tempo e (b) Plano de Fase no Estado-Estacionário para a frequência de excitação $\Omega = 0.91$ com $h_0 = 0$ e $h'_0 = -4.0$. Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear - equação exata.	86

Figura 49	(a) Histórico no tempo e (b) Plano de Fase no Estado-Estacionário para a frequência de excitação $\Omega = 0.91$ com $h_0 = 2$ e $h'_0 = -4.0$. Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear - equação exata.	86
Figura 50	(a) Bacias de atração para $\Omega = 0.91$, $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$ e $\hat{X}_0 = 0.1$, onde a área amarela representa o ciclo limite de alta amplitude e a área escura representa o ciclo limite de pequena amplitude; (b) região de <i>zoom</i> . Considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear - equação exata.	87
Figura 51	Efeito da razão de inércia (μ) na bacia de atração (a,b,c,d,e,f). A última figura no canto inferior direito mostra a relação entre os ciclos-limite de baixa e alta amplitude em função da razão de inércia, considerando o sistema com <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear - equação exata.	88

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Tabela da inertância experimental.	48
Tabela 2	Tabela da variação da inertância experimental.	55
Tabela 3	Resultados experimentais relativos à variação da massa do volante de inércia; frequência e magnitude da transmissibilidade na ressonância e anti-ressonância.	57
Tabela 4	Resultados experimentais da variação da massa do volante de inércia, frequência e magnitude da transmissibilidade do ponto de cruzamento das curvas do aparato experimental massa-mola- <i>Inerter</i> e o massa-mola.	58

LISTA DE ABREVIACOES E SIGLAS

AA	Alta Amplitude
BA	Baixa Amplitude
DAQ	Sistema de Aquisição de Dados
DAQassistant	Assistente de Aquisição de Dados
HSLDS	Alta Rigidez Esttica Baixa Rigidez Dinâmica
J-Damper	Nomenclatura utilizada na Fórmula 1 para denominar o dispositivo <i>Inerter</i>
RMS	Raiz do Valor Quadrático Médio

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

Símbolo	Descrição
a	Comprimento (diagonal) entre os terminais do <i>Inerter</i>
A	Parâmetro pequeno não nulo que compõe o parâmetro de perturbação associado ao termo senoidal
b	Inertância
B	Parâmetro pequeno não nulo que compõe o parâmetro de perturbação associado ao termo cossenoidal
c	Coefficiente de amortecimento
c_p	Coefficiente de amortecimento referente à guia linear
c_z	Coefficiente de amortecimento referente à cremalheira
c_q	Coefficiente de amortecimento referente ao atrito viscoso
D_0	Rigidez Dinâmica do paralelo entre b e c
D_1	Rigidez Dinâmica da série entre k_z e D_0
D_2	Rigidez Dinâmica do paralelo entre k_p , c_p e D_1
e	Parâmetro pequeno de perturbação
f_b	Força do <i>Inerter</i>
F_b	Força do <i>Inerter</i> experimental
g	gravidade
h	Deslocamento relativo normalizado do <i>Inerter</i> não-linear
H	Deslocamento relativo
h_0	Condição inicial de deslocamento
h'_0	Condição inicial de velocidade
H_a	Magnitude da frequência do salto para cima
I	Momento de inércia
I_e	Momento de inércia do eixo do <i>Inerter</i> experimental
I_t	Momento de inércia total do <i>Inerter</i> experimental
I_v	Momento de inércia do volante de inércia do <i>Inerter</i> experimental
j	Unidade imaginária
k	Coefficiente de rigidez da mola
k_p	Coefficiente de rigidez da mola entre a base e a massa movida
k_z	Coefficiente de rigidez do acoplamento da cremalheira
k_q	Coefficiente de rigidez da mola principal
L	Comprimento (horizontal) entre os terminais do <i>Inerter</i>

Letras Latinas

Símbolo	Descrição
m	Massa
m_I	Massa do patins de deslizamento
m_{II}	Massa do <i>Inerter</i>
r	Raio do volante de inércia experimental
r_e	Raio da engrenagem do <i>Inerter</i> experimental
t	Tempo
T	Transmissibilidade de deslocamento absoluto
$T_{\Omega \rightarrow \infty}$	Transmissibilidade quando a razão de frequências tende ao infinito
T_q	Torque aplicado na engrenagem acoplada ao volante de inércia
u	Solução da equação diferencial eq. 62
U	Amplitude utilizada no Método da Perturbação
x	Deslocamento
X	Amplitude
x_0	Deslocamento da base do sistema
X_0	Amplitude da base do sistema
\hat{X}_0	Deslocamento da base normalisado
y	Deslocamento horizontal do <i>Inerter</i> não-linear
z	Deslocamento vertical relativo entre os terminais do <i>Inerter</i> não-linear

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras gregas

Símbolo	Descrição
α	Relação de engrenamento do <i>Inerter</i> experimental
Δ	Fator de decomposição vertical da força do <i>Inerter</i>
θ	Ângulo entre a componente horizontal e o eixo de aplicação de força do <i>Inerter</i>
$\dot{\theta}_e$	Velocidade angular do <i>Inerter</i> experimental
$\ddot{\theta}_e$	Aceleração angular do <i>Inerter</i> experimental
μ	Razão de inércia
μ_q	Coefficiente de atrito Coulomb
ξ	Coefficiente de amortecimento
τ	Tempo adimensional
ϕ	Fase da transmissibilidade relativa
ω	Frequência de excitação
ω_n	Frequência natural do sistema
Ω	Razão de Frequência
Ω_a	Frequência do salto para cima
Ω_b	Frequência do salto para baixo
$\Omega_{T \rightarrow 0}$	Frequência de excitação quando a transmissibilidade tende a zero
$\Omega_{T \rightarrow \infty}$	Frequência de excitação quando a transmissibilidade tende ao infinito

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Motivações	19
1.2	Objetivos	21
1.3	Descrição da tese	22
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1	Isoladores Inerciais	23
3	ISOLADOR DE VIBRAÇÕES COM <i>INERTER</i> EM ARRANJO GEOMÉTRICO LINEAR - MODELAGEM MATEMÁTICA	33
3.1	Modelo 1 - Sistema linear massa-mola-amortecedor	34
3.2	Modelo 2 - Sistema linear massa-mola-amortecedor- <i>Inerter</i>	36
3.2.1	Transmissibilidade em função da Frequência	37
3.2.2	Comparação dos sistemas lineares massa-mola e massa-mola- <i>Inerter</i>	39
3.3	Modelo 3 - Sistema linear massa-mola-amortecedor-acoplamento elástico <i>Inerter</i>	40
3.4	Modelo 4 - Sistema não linear massa-mola-amortecedor- <i>Inerter</i> -atrito Coulomb	43
3.5	Modelagem matemática da Inertância	44
4	ISOLADOR DE VIBRAÇÕES COM <i>INERTER</i> EM ARRANJO GEOMÉTRICO LINEAR - EXPERIMENTAL	46
4.1	Aparato experimental massa-mola- <i>Inerter</i>	46
4.2	Materiais e Métodos	47
4.3	Cálculo da Inertância - experimental	48
4.4	Validação experimental do modelo massa-mola	49
4.5	Validação experimental do modelo massa-mola- <i>Inerter</i>	51

4.6	Comparação dos aparatos experimentais massa-mola e massa-mola- <i>Inerter</i>	54
4.7	Resposta em frequência da variação da inertância	55
5	ISOLADOR DE VIBRAÇÕES COM <i>INERTER</i> EM ARRANJO GEOMÉTRICO NÃO LINEAR	59
5.1	Modelo 5 - Sistema massa-mola-amortecedor- <i>Inerter</i> em arranjo geométrico não linear	60
5.1.1	Equações aproximadas para amplitudes altas e baixas	63
5.2	Solução através do Método do Balanço Harmônico de Primeira Ordem	64
5.2.1	Curvas <i>Backbone</i> de Resposta à Vibração Livre	65
5.2.2	Movimento Livre não amortecido - Plano de Fase	67
5.2.3	Resposta em Frequência - Equação do Movimento Aproximada para Baixa Amplitude	69
5.2.4	Resultados obtidos usando o Método do Balanço Harmônico - Equação do Movimento Aproximada para Baixa Amplitude	70
5.2.5	Deslocamento Absoluto	73
5.2.6	Resultados obtidos usando o Método do Balanço Harmônico - Equação do Movimento Exata	76
5.3	Estabilidade da Resposta Periódica	79
5.3.1	Estabilidade da Resposta Periódica - Equação do Movimento aproximada para Baixa Amplitude	79
5.3.2	Estabilidade da Resposta Periódica - Equação do Movimento Exata	81
5.4	Análise Numérica - Equação do Movimento Exata	83
5.4.1	Evolução das bacias de atração - Equação do Movimento Exata	85
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
6.1	Conclusões	89
6.2	Trabalhos realizados	91

6.3	Trabalhos futuros	92
	REFERÊNCIAS	93
	APÊNDICE A - Termos Polinomiais	97
	APÊNDICE B - Termos Polinomiais - Estabilidade	98
B.1	Transmissibilidade absoluta do Sistema Linear	98

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo introdutório são apresentadas as motivações deste trabalho, a importância dos mecanismos do tipo *Inerter* assim como as descrições dos capítulos e dos apêndices que compõem esta tese.

1.1 Motivações

A maioria das máquinas, dispositivos mecânicos, apresentam algum tipo de vibração. Muitas vezes as vibrações são inerentes aos dispositivos considerados. É possível citar inúmeras fontes de vibrações mecânicas presentes em motores a combustão com o movimento alternativo dos cilindros, abertura e fechamento de válvulas, motores elétricos com suas bobinas acionando e desacionando, o contato entre o pneu se deslocando em um pavimento rugoso, o atrito entre uma fuselagem de um veículo em movimento e o ar, dispositivos vibradores como compactadores de solo, martelos de impacto, vibrações oriundas do engrenamento dos dentes de engrenagens, fenômenos naturais como assentamentos de terra, terremotos, ventos, entre outros. As vibrações mecânicas podem causar efeitos indesejáveis tanto para o homem (náuseas, dores musculares, lesões) quanto para os sistemas mecânicos (oscilações com deslocamentos excessivos, esforços acima dos projetados) até atingir a falha ou fratura. Visando realizar a redução dessas vibrações pode ser adicionado um absorvedor de vibração ao sistema do tipo *Inerter*.

O *Inerter* é um dispositivo mecânico, linear, o qual possui dois terminais de fixação e uma cremalheira conectada a um volante de inércia. Uma força é desenvolvida sempre que houver um movimento relativo e aceleração entre seus dois terminais. A força do *Inerter* é proporcional à aceleração relativa entre seus terminais multiplicada pela inertância. A inertância é um parâmetro do *Inerter* a qual está relacionada ao momento de inércia e a relação de engrenamento do volante de inércia e cremalheira.

O *Inerter* possui grande potencial de aplicação como absorvedor dinâmico de vibrações podendo substituir os sistemas absorvedores de vibrações de massa sintonizada presente em prédios de elevada altura (100 andares, 350 metros) (GONZALEZ-BUELGA et al., 2017), (WANG et al., 2007), (LAZAR; NEILD; WAGG, 2014), (DOMENICO; RICCIARDI, 2018); em variados tipos de suspensões passivas de veículos automotores, carros de alta performance (SMITH, 2003, 2008), (CHEN et al., 2009), caminhões (ZHANG; HU, 2014), motocicletas, trens (WANG et al., 2009), (JIANG et al., 2012); em isoladores de vibração do montante

de motores (USHIJIMA; TAKANO; KOJIMA, 1988), (YU; NAGANATHAN; DUKKIPATI, 2001); em dispositivos de acoplamentos e barreiras de frenagem de trens e em dispositivos *decks* de ancoragem de grandes navios (LAGIEWKA; DOBRY, 2003); no trem de pouso de aviões (LIU; CHEN; TIAN, 2015), (XIN; YUANCE; MICHAEL, 2015), no sistema de direção de motocicletas de alta performance (EVANGELOU et al., 2004), no sistema de rotores e pás de helicópteros, na estabilização da rotação de motores (FLANNELLY, 1969), no sistema de segurança anti-queda de elevadores prediais, entre outras diversas aplicações encontradas na literatura.

Apesar do dispositivo *Inerter* ter sido referenciado a partir de Goodwin (1967), Flannelly (1969), o dispositivo possui aplicações atuais como as apresentadas por Lazarek, Brzeski e Perlikowski (2018) os quais propuseram um dispositivo *Inerter* com inertância variável através de um dispositivo com transmissão continuamente variável (CVT), Alujević et al. (2018) analisou o *Inerter* atuando de maneira ativa acoplado em paralelo a um sistema isolador massa-mola-amortecedor, Ge e Wang (2018) criaram um dispositivo *Inerter* com fuso de esferas e a relação de engrenamento foi realizada através de engrenagens planetárias.

Os sistemas lineares isoladores de vibração com *Inerter* (massa-mola-amortecedor-*Inerter*), apresentam alta capacidade de isolamento de vibração na anti-ressonância, a qual é possível de ser escolhida e ajustada para uma determinada frequência desejada (SMITH, 2002a), mas em alta frequência, por outro lado, como desvantagem, esses sistema apresentam maior transmissibilidade que os sistemas de isolamento massa-mola-amortecedor. Visando obter algum tipo de melhoria de isolamento na região de alta frequência foi considerado realizar a análise de um sistema isolador de vibração massa-mola-amortecedor com *Inerter* em arranjo geométrico não linear baseado na geometria dos dispositivos com o conceito de mecanismo do tipo *snap-through* o qual fornece as condições HSLDS (CARRELLA; BRENNAN; WATERS, 2007), (SHAW et al., 2013), (AVRAMOV; GENDELMAN, 2009), (LIU; JING, 2016), (HAO; CAO; WIERCIGROCH, 2017), utilizando uma configuração aproximada à de Tang e Brennan (2013), mas utilizando o dispositivo *Inerter*. Esse tipo de não linearidade geométrica aplicada ao dispositivo *Inerter* foi pouco explorada de maneira que não há literatura prévia apresentando o comportamento da transmissibilidade do sistema com essas configurações.

1.2 **Objetivos**

O objetivo desta tese é analisar o comportamento dinâmico de um sistema isolador de vibrações utilizando o dispositivo *Inerter* em arranjo geométrico linear e em arranjo geométrico não linear. Deste modo, os principais objetivos desta tese de doutorado podem ser resumidos entre os seguintes tópicos:

- Realizar a construção do aparato experimental e a análise do modelo do sistema com um grau de liberdade massa-mola-*Inerter* em arranjo geométrico linear, assim como validar o modelo proposto. Comparar a resposta em frequência do aparato experimental massa-mola em relação ao aparato experimental massa-mola-*Inerter*. Realizar experimentalmente a variação da inertância relacionada à massa do volante de inércia.
- Analisar os efeitos não lineares do sistema massa-mola-amortecedor-*Inerter* em arranjo geométrico não linear em termos de isolamento de vibração e comparar com o sistema massa-mola-amortecedor-*Inerter* em arranjo geométrico linear. Realizar a modelagem matemática do sistema massa-mola-amortecedor-*Inerter* em arranjo geométrico não linear, incluído a equação do movimento, bem como as aproximações da equação de movimento para baixa e alta amplitude.

1.3 Descrição da tese

Esta tese de doutorado é apresentada em seis capítulos e dois apêndices. Os capítulos abrangem os seguintes conteúdos:

O capítulo 1 apresenta a introdução sobre o dispositivo *Inerter*, as motivações, os objetivos, assim como as descrições dos capítulos e dos apêndices que compõem esta tese.

O capítulo 2 apresenta a revisão da literatura para situar o problema no "estado da arte" e os vários tipos de dispositivo *Inerter* (mecânico, pneumático, hidráulico, com alavancas), desde os modelos mais simples, até os mais complexos, assim como exemplos de aplicações e as contribuições de cada trabalho citado.

O capítulo 3 apresenta a modelagem matemática de quatro modelos isoladores de vibrações em arranjo geométrico linear: o Modelo 1, é um sistema isolador de vibrações do tipo massa-mola-amortecedor; o Modelo 2, é sistema isolador de vibrações do tipo massa-mola-amortecedor-*Inerter*; o modelo 3, é um modelo mais aprimorado que o Modelo 2, no qual considera-se a dissipação de energia como amortecimento viscoso e a fixação da cremalheira do *Inerter* como um acoplamento com rigidez elevada; o Modelo 4, também é um modelo mais aprimorado que o Modelo 2, no qual considera-se a dissipação de energia como atrito Coulomb. São apresentadas as equações do movimento e as respostas em frequência dos modelos: Modelo 1, Modelo 2, Modelo 3. É apresentada a equação do movimento do Modelo 4, a curva de magnitude de transmissibilidade desse modelo foi solucionada através de métodos de integração numérica. No final deste capítulo é apresentada a modelagem matemática da inertância.

O capítulo 4 apresenta a análise experimental do sistema de um grau de liberdade com *Inerter*. O experimento tem como objetivo validar o Modelo 3 e Modelo 4 em relação ao aparato experimental e as considerações adotadas, assim como realizar a comparação entre o aparato experimental massa-mola e o sistema massa-mola-*Inerter* e também realizar o experimento relativo à variação da Inertância associada à massa do Volante de Inércia.

O capítulo 5 apresenta a análise dos efeitos não lineares do sistema massa-mola-amortecedor-*Inerter* em arranjo geométrico não linear em termos de isolamento de vibração, Modelo 5, e é comparado com o sistema linear massa-mola-amortecedor-*Inerter*, Modelo 2. A análise compreende a solução da equação do movimento exata, bem como as aproximações da equação de movimento para baixa e alta amplitude. Nesse capítulo, é utilizado o método do Balanço Harmônico para obter as soluções das equações não lineares. A análise numérica complementa a investigação.

O capítulo 6 apresenta as conclusões e as intenções de trabalhos futuros.

Em seguida, é apresentada a lista das referências bibliográficas e por último os apêndices.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta a revisão da literatura para situar o problema no estado da arte e os vários tipos de dispositivo *Inerter* (mecânico, pneumático, hidráulico, com alavancas), desde os modelos mais simples, até os mais complexos, assim como exemplos de aplicações e as contribuições de cada trabalho citado.

2.1 Isoladores Inerciais

Tradicionalmente, o isolamento das vibrações mecânicas é realizado com um elemento elástico, geralmente uma mola, isolada ou associada a um amortecedor e uma massa inerente ao sistema.

A mola possui uma elasticidade de acordo com seu material e formato construtivo, responde elasticamente pelo menos em um intervalo de solicitação e é capaz de armazenar energia elástica potencial. A mola opõe-se a força que a ela está aplicada. Elas podem ser linear (obedece a Lei de Hooke) ou caso contrário, não linear.

O amortecedor é um elemento mecânico o qual dissipa a energia do sistema elástico. A energia é consumida por atrito entre as peças móveis do sistema e ou pelo atrito interno entre as peças e o fluido do sistema, havendo uma dissipação de energia mecânica sob forma de calor e ou som. Os tipos mais comuns do elemento mecânico amortecedor são: amortecedores viscosos; amortecedores de atrito seco e os amortecedores estruturais ou histeréticos, sendo que existem outros tipos.

Muitas vezes é possível reduzir, mas não eliminar as forças dinâmicas que causam vibrações (CRAIG; KURDILA, 2006). Dessa maneira existem vários métodos utilizados para efetuar o controle das vibrações como: realizar o controle das frequências naturais do sistema e evitar que coincidam com a frequência de excitação do sistema; controlar a resposta do sistema inserindo um mecanismo amortecedor ou dissipador de energia; diminuir a transmissibilidade de forças de excitação nas partes da máquina utilizando isoladores de vibração; reduzir a resposta do sistema adicionando um absorvedor de vibração.

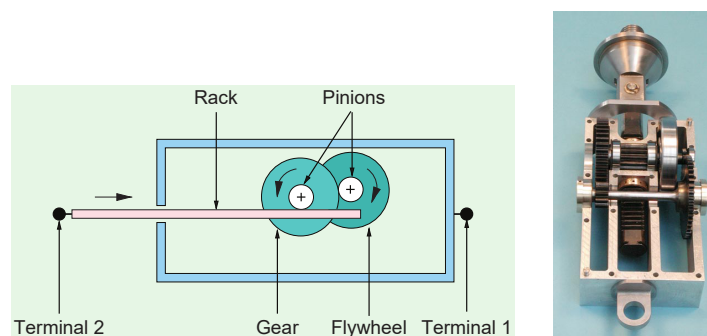
Dentre os sistemas absorvedores dinâmicos de vibrações amortecidos pode ser citado o sistema absorvedor de vibração sintonizado, o qual, tem como característica um grau de liberdade e a configuração em paralelo de molas e amortecedores, conectados a uma massa numa de suas extremidades e a estrutura na outra. Esse tipo de amortecedor tem aplicação em prédios de elevada altura como o instalado no edifício Taipei 101. Esse dispositivo é projetado de maneira

que as frequências naturais do sistema fiquem distante da frequência de excitação. O sistema absorvedor de vibração sintonizado do Taipei 101 possui uma enorme esfera de metal com cerca de 660 toneladas de massa, molas e amortecedores que permitem o edifício resistir aos efeitos dinâmicos do vento e evitar deslocamentos excessivos que possam comprometer a sua integridade estrutural, (fonte: <https://www.engenhariacivil.com/amortecedor-massa-sintonizada-taipei-101>).

A palavra *Inerter* possui origem na língua Inglesa e não possui uma tradução para a língua Portuguesa. Por outro lado a palavra Inerte possui significado na língua Portuguesa: sem atividade ou movimento próprio; desprovido de movimento; aquele que não reage; imóvel; inanimado. Assim sendo uma tradução mais adequada para essa palavra na língua Portuguesa seria "Inerciador" com o significado: dispositivo mecânico que possui dois terminais de fixação e uma cremalheira conectada a um volante de inércia, possui um parâmetro característico chamado inertância. A inertância, em linguagem popular, está relacionada às forças de inércia do dispositivo.

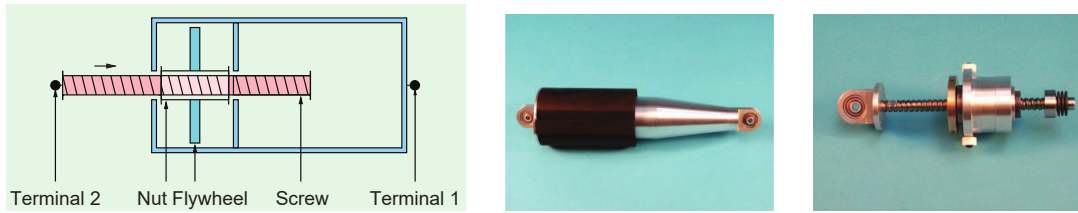
Em 2002, Smith (2002a) mencionou pela primeira vez o conceito do *Inerter*. O mecanismo considerado é linear, possui dois terminais de fixação e uma cremalheira acoplada a um volante de inércia, cuja massa e amortecimento são desprezíveis. Uma força é desenvolvida sempre que houver um movimento relativo entre seus dois terminais. A força do *Inerter* é proporcional aceleração relativa entre seus terminais multiplicada pela inertância, Smith (2003, 2008), Chen et al. (2009), figuras 1 e 2.

Figura 1 - Dispositivo *Inerter* com cremalheira e pinhão.



Fonte: Smith (2003), Copyright © 2003, IEEE

Figura 2 - Dispositivo *Inerter* com fuso de esferas.



Fonte: Chen et al. (2009), Copyright © 2009, IEEE

O *Inerter* possibilitou a representação completa de seu análogo elétrico, o capacitor (figura 3) . Antes do surgimento do *Inerter*, para realizar a analogia, considerava-se que o capacitor possuía um de seus dois terminais aterrados para que pudesse ser representado por um elemento de massa, o qual considerava-se que possuía apenas um terminal de fixação no seu centro de massa. O *Inerter* possui dois terminais de fixação assim como o capacitor completando a rede de analogia entre os elementos elétrico e mecânicos Smith (2002b).

Figura 3 - Redes de Analogia Mecânico Elétrica.

Mechanical	Electrical	Mechanical	Electrical
<p>spring</p>	<p>inductor</p>	<p>$Y(s) = \frac{k}{s}$</p> <p>$\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$ spring</p>	<p>$Y(s) = \frac{1}{Ls}$</p> <p>$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(v_2 - v_1)$ inductor</p>
<p>mass</p>	<p>capacitor</p>	<p>$Y(s) = bs$</p> <p>$F = b \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$ inerter</p>	<p>$Y(s) = Cs$</p> <p>$i = C \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$ capacitor</p>
<p>damper</p>	<p>resistor</p>	<p>$Y(s) = c$</p> <p>$F = c(v_2 - v_1)$ damper</p>	<p>$Y(s) = \frac{1}{R}$</p> <p>$i = \frac{1}{R}(v_2 - v_1)$ resistor</p>

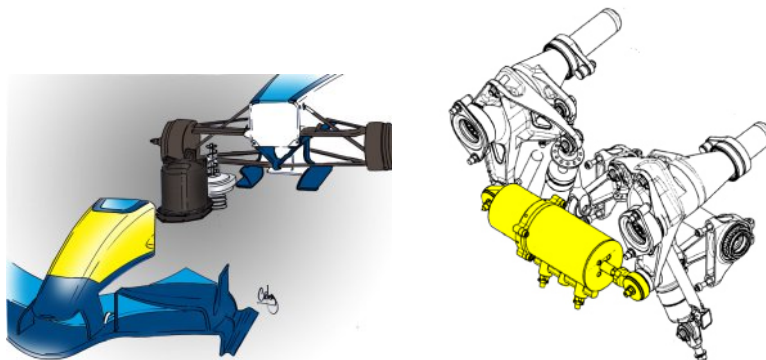
Fonte: Smith (2003), Copyright © 2003, IEEE

O sistema absorvedor de vibração do tipo massa sintonizada, necessariamente associa as forças de inércia do dispositivo à massa suspensa de uma esfera ou de uma massa concentrada, enquanto o *Inerter* associa as forças de inércia do dispositivo ao momento de inércia de rotação de um disco, volante de inércia e uma relação de engrenamento. Assim um dispositivo *Inerter* com fuso de esfera, figura 2 com massa total de 1 kg apresenta um valor de inertância ajustável de 60 kg a 240 kg (CHEN et al., 2009).

A massa é um componente do sistema associada a inércia e pode ganhar ou perder energia cinética conforme sua velocidade aumente ou diminua. O *Inerter* pode ser considerado um dispositivo que adiciona forças de inércia ao sistema. Em 2005, o *Inerter* foi utilizado na suspensão de carros de corrida de Fórmula 1, com o nome de J-Damper, substituindo o sistema

absorvedor de vibração do tipo massa sintonizada (figura 4) . O *Inerter*, possui dimensões e peso menores que os dos amortecedores de massa convencionais, possibilitando um conjunto de suspensão mais leve, compacto e eficiente (CHEN et al., 2009).

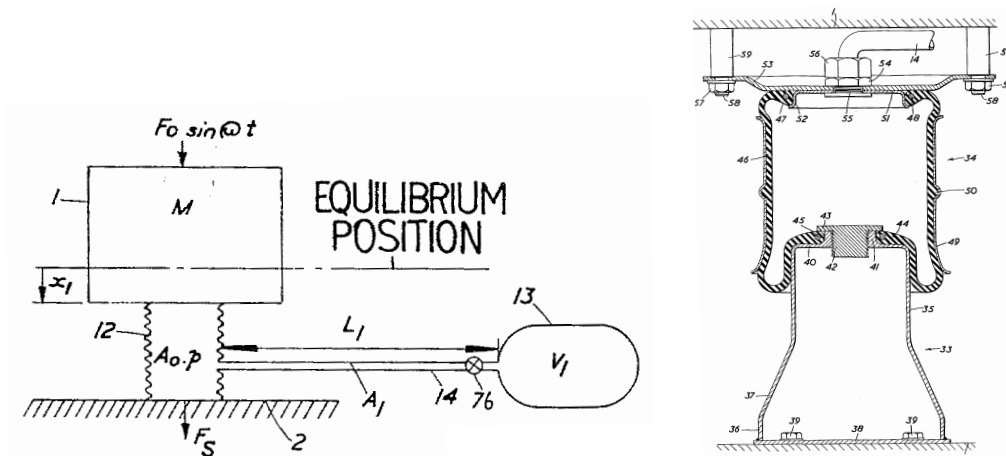
Figura 4 - Sistema absorvedor de vibração do tipo massa sintonizada e *Inerter* (Renault 2006).



Fonte: Copyright / Craig Scarborough

Apesar do nome *Inerter* ter surgido em 2002 com Smith, há vários dispositivos que possuem comportamento semelhante que surgiram antes dessa data, assim como o dispositivo pneumático referenciado por Goodwin (1967), o mecanismo de massas e alavancas de Flannelly (1969) ou o mecanismo hidráulico estudado por Ushijima, Takano e Kojima (1988), os montantes hidráulicos de motores de Ushijima, Takano e Kojima (1988), Yu, Naganathan e Dukkipati (2001).

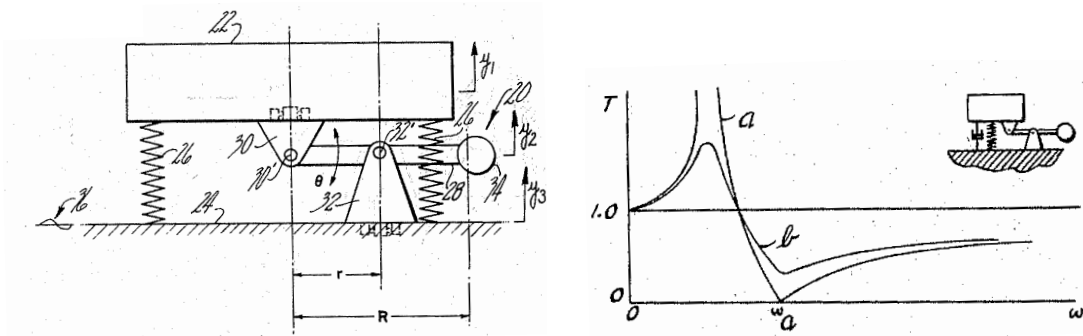
A figura 5 apresenta o mecanismo proposto por Goodwin (1967) , o qual consiste em um fole flexível, sem rigidez, o qual suporta o corpo suspenso a ser isolado. O fole flexível comunica-se com uma câmara rígida através de dutos metálicos rígidos . O mecanismo é constituído pelo fole flexível, dutos e câmara rígida, sendo um sistema fechado e preenchido totalmente com um fluido gasoso. Cada fluido possui uma determinada propriedade; o fluido armazenado dentro do sistema pneumático possui como parâmetros a densidade específica, o módulo volumétrico, e o coeficiente de viscosidade do fluido.

Figura 5 - Dispositivo *Inerter* de Goodwin.

Fonte: Goodwin (1967)

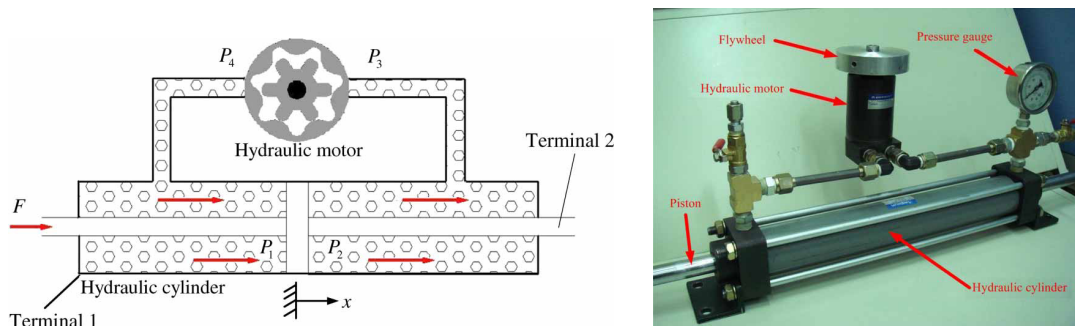
O dispositivo de Flannelly (1969) refere-se a um isolador de vibração passivo em que as forças da mola são contrabalançadas pelas forças de inércia de uma alavanca com uma massa concentrada em uma de suas extremidades e produz um alto grau de isolamento em certas frequências de vibração e baixa deflexão estática. O dispositivo consiste em uma massa móvel acoplada a uma alavanca com uma massa fixa em uma de suas extremidades e um sistema de mola e amortecedor posicionados entre o corpo a ser isolado e a base ou suporte da estrutura, figura (6). Esse isolador de vibração possui a capacidade de reduzir a transmissibilidade do sistema a valores muito pequenos, quase nulos, em uma frequência sintonizada desejada.

Yilmaz e Kikuchi (2006) trabalharam em um modelo semelhante ao de Flannelly com alavancas e massas com a finalidade de projetar um isolador de vibração passivo rígido e leve que tem um comportamento de banda-de-parada (*stop-band*) em baixas frequências. Eles analisaram modelos com um e dois graus de liberdade e concluíram que a assimetria nos termos inerciais forçados gerados pelas massas alavancadas resultou em isolador de vibração que tem duas frequências anti-ressonância em sua banda-de-parada e que o efeito inercial foi benéfico para a obtenção do isolamento da vibração.

Figura 6 - Dispositivo *Inerter* de Flannelly.

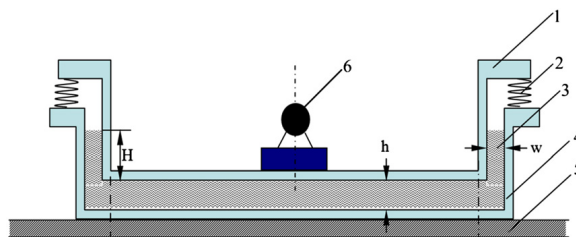
Fonte: Flannelly (1969)

Wang, Hong e Lin (2011) desenvolveram um mecanismo *Inerter* utilizando elementos hidráulicos como: pistão com haste passante; motor hidráulico de engrenagens e realizou uma análise experimental. O experimento considerou os efeitos do atrito, amortecimento e compressão do fluido hidráulico, assim como realizaram a modelagem matemática detalhada do cálculo da inertância, figura (7).

Figura 7 - Dispositivo *Inerter* hidráulico de Wang, Hong e Lin (2011).

Fonte: Wang, Hong e Lin (2011), Copyright © 2011, © SAGE Publications

Na pesquisa realizada por Liu, Xu e Ji (2012) desenvolveram um sistema de isolamento de vibração do tipo flutuante sobre um fluido baseado no mecanismo anti-ressonância. O sistema isola quase que por completo as vibrações em qualquer frequência específica, quando a frequência de anti-ressonância do sistema isolador de vibração flutuante é sintonizada com a frequência desejada, ajustando-se a massa adicionada de fluido circulante do reservatório de fluido. Onde 1 é o corpo flutuante, 2 são as molas, 3 é o fluido, 4 é o recipiente do fluido, 5 é a base rígida e 6 é a massa isolada, figura (8).

Figura 8 - Dispositivo *Inerter* hidráulico de Liu, Xu e Ji (2012).

Fonte: Liu, Xu e Ji (2012), Copyright © 2012 Elsevier Ltd.

O dispositivo *Inerter* possui várias possibilidades de aplicações, sendo que, Ushijima, Takano e Kojima (1988), Yu, Naganathan e Dukkipati (2001) realizaram estudos considerando o *Inerter* aplicado em isoladores de vibrações em montantes hidráulicos de motores; Smith e Wang (2002), Smith (2002b, 2003) desenvolveram, aplicaram e experimentaram o *Inerter* em suspensões passivas e ativas de veículos automotores; Shen et al. (2016) estudaram um modelo de um quarto de carro com dois graus de liberdade onde foi utilizado um algoritmo genético de otimização em que as simulações no domínio da frequência confirmaram a eficácia desse dispositivo no sistema de amortecimento, principalmente na frequência pré-determinada (sintonizada) de vibração do corpo do veículo, foram realizados testes experimentais com um *Inerter* com fuso de esferas que comprovou os resultados da simulação numérica; Evangelou et al. (2004) realizaram o estudo voltado a estabilização do sistema de direção de motocicletas de alto desempenho; Zhang e Hu (2014) investigaram o uso do *Inerter* aplicado a suspensão de caminhões pesados com arranjo paralelo entre a mola, o amortecedor e o *Inerter* em um modelo de meio caminhão com sete graus de liberdade onde melhorou significativamente o conforto, a dirigibilidade e a carga aplicada sobre os pneus; Liu, Chen e Tian (2015), Xin, Yuance e Michael (2015) analisaram-o no trem de pouso de aeronaves com a função de evitar o efeito vibratório auto-oscilante "shimmy"; Lagiewka e Dobry (2003) desenvolveram um mecanismo para ser aplicado em para-choques veiculares, mecanismos de frenagem de navios, trens, assim como na maioria dos tipos de suspensões mecânicas passivas; Wang et al. (2009), Jiang et al. (2012) exploraram o *Inerter* aplicado a sistemas de suspensão de trem melhorando o seu desempenho relativo ao conforto lateral e vertical comparado a suspensão convencional; Gonzalez-Buelga et al. (2017) realizaram o estudo voltado a engenharia civil, propuseram a substituição do sistema absorvedor de vibração do tipo massa sintonizada de edifícios de elevada altitude por um dispositivo *Inerter* com o benefício da redução de massa do sistema isolador; Giaralis e Petrini (2017), Asai e Watanabe (2017) e Wang et al. (2007) investigaram os benefícios da utilização do *Inerter* em prédios onde que os resultados das simulações foram considerados efetivos na redução das vibrações dos terremotos e do trânsito; Domenico e Ricciardi (2018) e Lazar, Neild e Wagg (2014) também pesquisaram o *Inerter* voltado a isolamento de vibrações de estruturas da engenharia civil sujeitas a excitação de base onde os resultados numéricos apresentaram con-

siderável redução das vibrações sendo um potencial substituto aos sistemas absorvedores de vibração do tipo massa sintonizada.

Elementos dispostos de maneira geometricamente não lineares foram citados em trabalhos anteriores considerando o conceito de mecanismo do tipo *snap-through* o qual fornece as condições HSLDS (*High Static Low Dynamic Stiffness*) (Alta rigidez estática, baixa rigidez dinâmica)(CARRELLA; BRENNAN; WATERS, 2007), (SHAW et al., 2013), (AVRAMOV; GENDELMAN, 2009), (LIU; JING, 2016; HAO; CAO; WIERCIGROCH, 2017). Tang e Brennan (2013) estudaram as características de transmissibilidade de vibrações em amortecedores viscosos com arranjos geométricos.

Os principais efeitos não lineares do sistema isolador com o dispositivo *Inerter* são as folgas de acoplamentos e engrenamentos, o atrito entre as partes móveis, a elasticidade dos materiais e as não linearidades geométricas da disposição dos elementos do que compões o sistema. A folga pode ocorrer entre os componentes do mecanismo, tal como o engrenamento dos dentes das engrenagens, no engrenamento do pinhão e cremalheira, entre os terminais de fixação. O atrito pode ocorrer entre as guias da cremalheira e a bucha de fixação da carcaça, durante o engrenamento dos dentes das engrenagens, nas buchas do sistema do *Inerter* com massas e alavancas. A elasticidade é referente ao material utilizado na fabricação dos eixos do *Inerter*, braços de alavancas, fluido de trabalho referente ao *Inerter* pneumático. A não linearidade geométrica ocorre devido aos ângulos de trabalhos envolvidos em sistemas de suspensões em que o dispositivo encontra-se posicionado em uma orientação não paralela aos elementos do sistema de suspensão, mola e amortecedor.

Papageorgiou e Smith (2005), Papageorgiou, Houghton e Smith (2009) realizaram testes experimentais com um dispositivo *Inerter* de fuso de esferas onde utilizou um atuador do tipo carneiro hidráulico com o deslocamento controlado em um sistema de ciclo fechado. Foi proposta uma metodologia com uma rede de amortecedores a serem acoplados em série com o *Inerter* para que ao realizar os testes não surgissem fenômenos não lineares e nem instabilidades. Os testes obtiveram respostas aceitáveis as quais se aproximaram do *Inerter* ideal.

Gonzalez-Buelga et al. (2017) analisou um sistema absorvedor com um dispositivo *Inerter* sintonizado numericamente e experimentalmente voltado a aplicação em engenharia civil visando a comparação ao sistema absorvedor de massa sintonizada. Foi experimentado um dispositivo *Inerter* associado a mola e amortecedor onde as forças e os deslocamentos eram atualizados em tempo real o que possibilitou a otimização dos parâmetros experimentais. Foi experimentada também, a adição de uma não linearidade referente ao atrito seco. Os resultados experimentais mostraram que com a escolha adequada dos parâmetros do dispositivo *Inerter* real, seu comportamento aproxima-se do ideal.

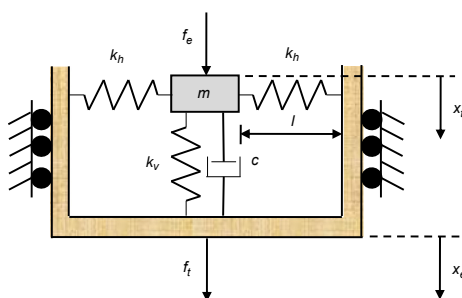
Zhang, Chen e Huang (2014), Nordin, Galic' e Gutman (1997) pesquisaram sobre a influência da folga no acoplamento entre a estrutura e o *Inerter* a qual pode causar a mudança

impulsiva no momento de inércia sendo a principal causa de efeitos não lineares nesses dispositivos. Foi modelado e simulado o mecanismo de impacto que ocorre entre a folga e a carga aplicada ao sistema. Os resultados apresentaram uma orientação sobre os critérios de tolerância relativo a folgas no sistema.

Wang e Su (2008), Wang et al. (2009) apresentam a análise e o experimento sobre as propriedades não lineares presentes no *Inerter* e sua influência no controle de suspensão de veículos. Foram considerados três modelos experimentais: mola-amortecedor; mola-amortecedor-*Inerter* e mola em paralelo com *Inerter*-amortecedor. Foi utilizado um *Inerter* de fuso de esferas e considerou-se o efeito do atrito, folga e elasticidade no sistema. Como resultado, foi possível afirmar que o *Inerter* de fuso de esferas apresentou o efeito não linear referente ao atrito e elasticidade. Concluiu-se que os benefícios gerados pelo *Inerter* são pouco afetados pelos efeitos não lineares. No geral o desempenho de suspensões com um *Inerter* não linear ainda é melhor do que as suspensões tradicionais.

Considerando a revisão bibliográfica realizada, esta tese apresenta a análise de um sistema isolador de vibrações, referenciado a partir de Goodwin (1967), Flannelly (1969) até Domenico e Ricciardi (2018), considerando os dispositivos experimentais de Smith (2002a) utilizados como base para o desenvolvimento do dispositivo experimental *Inerter*. A tese apresenta também um sistema isolador de vibrações com *Inerter* em disposição geométrica não linear, baseado na geometria dos dispositivos com o conceito de mecanismo do tipo *snap-through* o qual fornece as condições HSLDS (CARRELLA; BRENNAN; WATERS, 2007), (SHAW et al., 2013), (AVRAMOV; GENDELMAN, 2009), (TANG; BRENNAN, 2013), (LIU; JING, 2016), (HAO; CAO; WIERCIGROCH, 2017), utilizando uma configuração aproximada à de Carrella et al. (2012), mas utilizando o dispositivo *Inerter*.

Figura 9 - Isolador não linear estudado por Carrella et al. (2012).



Fonte: Carrella et al. (2012), Copyright © 2012 Elsevier Ltd.

O intuito de utilizar esse tipo de arranjo geométrico não linear do dispositivo *Inerter* é o de verificar a magnitude de transmissibilidade de deslocamento desse sistema isolador e compará-lo ao sistema isolador linear com *Inerter* para identificar em quais regiões os isoladores possuem melhor ou pior isolamento. Esse tipo de não linearidade geométrica aplicada ao dispositivo

Inerter foi pouco explorada de maneira que não há literatura prévia com o comportamento da magnitude relativa de transmissibilidade. Assim, o que se propõe nesta tese é analisar quais são as contribuições de utilizar o dispositivo *Inerter* em arranjo geométrico não linear visando o isolamento de vibrações.

3 ISOLADOR DE VIBRAÇÕES COM *INERTER* EM ARRANJO GEOMÉTRICO LINEAR - MODELAGEM MATEMÁTICA

Este capítulo apresenta a modelagem matemática de quatro modelos isoladores de vibrações em arranjo geométrico linear. Para efeito de comparação, os modelos foram nomeados:

O Modelo 1, é um sistema isolador de vibrações do tipo massa-mola-amortecedor, o qual é utilizado para realizar a comparação referente à isolamento de vibração com os modelos com *Inerter*.

O Modelo 2, é sistema isolador de vibrações do tipo massa-mola-amortecedor-*Inerter* o qual é utilizado para caracterizar a curva característica de transmissibilidade do dispositivo *Inerter* e compará-lo ao Modelo 1.

O Modelo 3, é um modelo mais aprimorado que o Modelo 2 visando a validação do aparato experimental, no qual considera-se a dissipação de energia como amortecimento viscoso e a fixação da cremalheira do *Inerter* como um acoplamento com rigidez elevada.

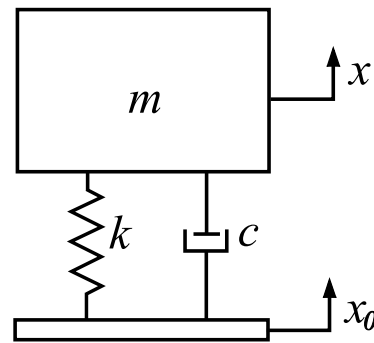
O Modelo 4, também é um modelo mais aprimorado que o Modelo 2 visando a validação do aparato experimental, no qual considera-se a dissipação de energia como atrito Coulomb.

A equação de transmissibilidade apresenta importantes características do comportamento desse dispositivo, como as regiões de ressonância, anti-ressonância e resposta em alta frequência. São apresentadas as equações do movimento e as respostas em frequência dos modelos: Modelo 1, Modelo 2, Modelo 3. É apresentada a equação do movimento do Modelo 4, a curva de magnitude de transmissibilidade desse modelo foi solucionada através de métodos de integração numérica. No final deste capítulo é apresentada a modelagem matemática da inércia.

3.1 Modelo 1 - Sistema linear massa-mola-amortecedor

Esta seção apresenta o modelo de um oscilador linear de um grau de liberdade com excitação pela base massa-mola-amortecedor linear, onde m é a massa, k é a rigidez da mola e c é o coeficiente de amortecimento, figura 10. Esse sistema é utilizado para realizar a comparação do sistema com *Inerter*.

Figura 10 - Modelo massa-mola-amortecedor.



Fonte: Autor

De acordo com a Segunda Lei de Newton, o equilíbrio de forças pode ser escrito como, equação 1, sendo x o deslocamento da massa suspensa e x_0 o deslocamento da base. O ponto indica a derivada em relação ao tempo:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\dot{x}_0(t) + kx_0(t) \quad (1)$$

Considerando que o sistema é excitado harmonicamente, pode se escrever $x(t) = Xe^{j\omega t}$ e $x_0(t) = X_0e^{j\omega t}$ em função da frequência. Assim, substituindo na equação 1 obtém-se:

$$(-m\omega^2 + cj\omega + k)X = (k + j\omega c)X_0 \quad (2)$$

Assim, obtém-se a função transferência de deslocamento do sistema, a qual é representada pela razão da amplitude de deslocamento da massa suspensa X e a amplitude de deslocamento da base móvel X_0 , equação 3:

$$T = \frac{X}{X_0} = \frac{j\omega c + k}{-\omega^2 m + j\omega c + k} \quad (3)$$

Dividindo-se o denominador e o numerador da equação 3 por k , substituindo $c = 2\xi m\omega_n$, e considerando que a razão de frequência é $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$, obtém-se a função transferência de deslocamento do sistema (adimensional), equação 4:

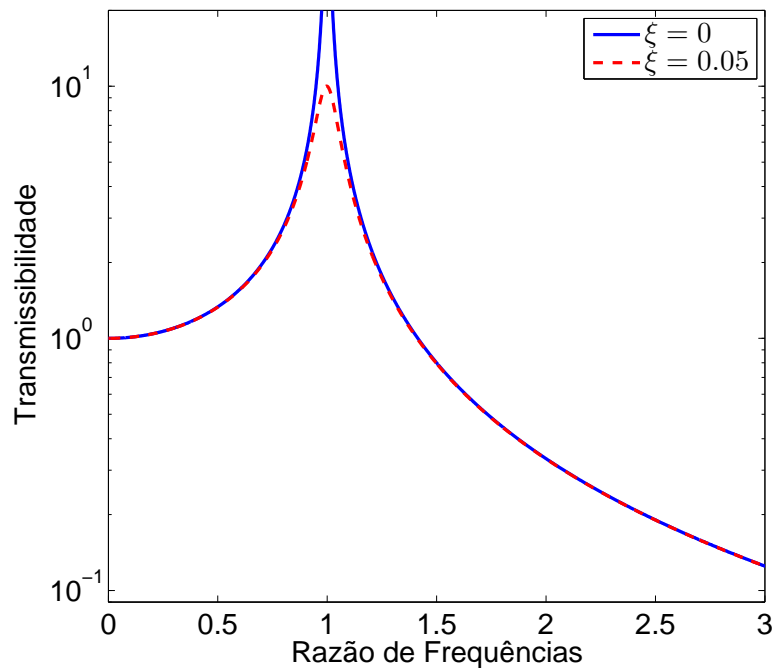
$$T = \frac{X}{X_0} = \frac{2j\Omega\xi + 1}{-\Omega^2 + 2j\Omega\xi + 1} \quad (4)$$

A magnitude da transmissibilidade de deslocamento adimensional do sistema é obtida através do módulo da função complexa da equação 4:

$$|T| = \left| \frac{X}{X_0} \right| = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}} \quad (5)$$

A figura 11 mostra a magnitude da transmissibilidade de deslocamento do modelo massa-mola e massa-mola-amortecedor considerando os valores normalizados $\omega_n = 1,0$; $k = 1,0$; $m = 1,0$; $\xi = 0$ e $\xi = 0,05$.

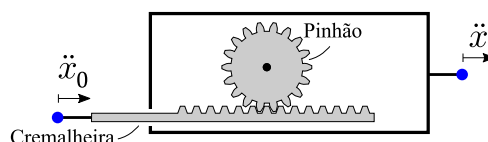
Figura 11 - Magnitude da transmissibilidade de deslocamento do modelo massa-mola e massa-mola-amortecedor.



3.2 Modelo 2 - Sistema linear massa-mola-amortecedor-Inerter

Esta seção apresenta um sistema isolador de vibrações linear massa-mola-amortecedor-Inerter. O dispositivo *Inerter* considerado é mostrado na figura 12.

Figura 12 - Dispositivo *Inerter*.



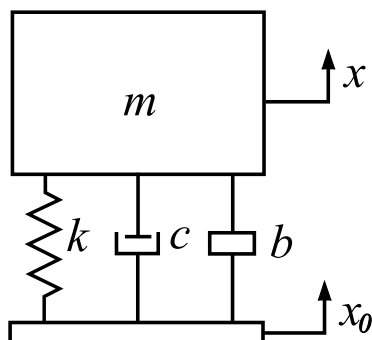
Fonte: Autor

O *Inerter* é sensível a aceleração assim, a equação que descreve a força desse dispositivo é mostrada na equação 6, onde b é inércia do *Inerter*, sendo x o deslocamento da massa suspensa e x_0 o deslocamento da base. O ponto indica a derivada em relação ao tempo:

$$f_b = b(\ddot{x} - \ddot{x}_0) \quad (6)$$

O sistema isolador de vibrações linear massa-mola-amortecedor-Inerter é mostrado na figura 13, onde m é a massa, k é a rigidez da mola e c é o coeficiente de amortecimento. Esse sistema é linear e será comparado com o sistema massa-mola-amortecedor.

Figura 13 - Sistema linear massa-mola-amortecedor-Inerter.



Fonte: Autor

De acordo com a Segunda Lei de Newton, o equilíbrio de forças pode ser escrito como, equação 7:

$$m\ddot{x}(t) + b\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = b\ddot{x}_0(t) + c\dot{x}_0(t) + kx_0(t) \quad (7)$$

Considerando que o sistema é excitado harmonicamente, pode se escrever $x(t) = Xe^{j\omega t}$ e $x_0(t) = X_0e^{j\omega t}$ em função da frequência. Assim, substituindo na equação 8 obtém-se:

$$(-\omega^2(m+b) + j\omega c + k)X = (-\omega^2 b + j\omega c + k)X_0 \quad (8)$$

A função transferência do sistema é escrita como:

$$T = \frac{X}{X_0} = \frac{-\omega^2 b + j\omega c + k}{-\omega^2(m+b) + j\omega c + k} \quad (9)$$

Dividindo-se o denominador e o numerador da equação 9 por k , substituindo $c = 2\xi m\omega_n$, considerando que a razão de frequência é $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$, a razão de inércia é $\mu = \frac{b}{m}$ obtém-se a função transferência do sistema adimensional, equação 10:

$$T = \frac{X}{X_0} = \frac{-\Omega^2 \mu + 2j\Omega\xi + 1}{-\Omega^2(1+\mu) + 2j\Omega\xi + 1} \quad (10)$$

A magnitude da transmissibilidade de deslocamento do sistema é obtida através do módulo da função complexa da equação 10:

$$|T| = \left| \frac{X}{X_0} \right| = \sqrt{\frac{(1 - \mu\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - (1 + \mu)\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}} \quad (11)$$

3.2.1 Transmissibilidade em função da Frequência

Considerando a equação 10 de transmissibilidade do sistema com *Inerter* não amortecido ($\xi = 0$), resume-se a equação 12:

$$T = \frac{-\Omega^2 \mu + 1}{-\Omega^2(1 + \mu) + 1} \quad (12)$$

Quando a frequência de excitação aumenta tendendo ao infinito, $\Omega \rightarrow \infty$, a equação da transmissibilidade resume-se a:

$$T_{\Omega \rightarrow \infty} = \frac{\mu}{1 + \mu} \quad (13)$$

Quando a Transmissibilidade tende a zero, $T \rightarrow 0$, a equação 12, torna-se:

$$0 = \frac{-\Omega^2 \mu + 1}{-\Omega^2(1 + \mu) + 1} \quad (14)$$

A equação 15 estabelece o valor da frequência da anti-ressonância para o sistema sem amortecimento, com inerter.

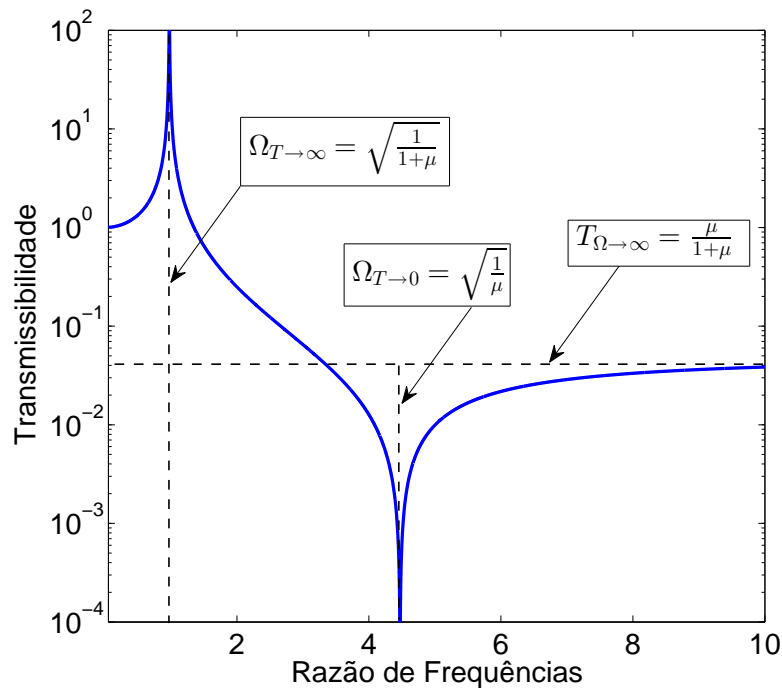
$$\Omega_{T \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \quad (15)$$

Para que a transmissibilidade tenda ao infinito, $T \rightarrow \infty$, o denominador da equação da transmissibilidade deverá tender a zero, assim, para que isso ocorra, $-\Omega^2(1 + \mu) + 1 = 0$, equação 16. A equação 16 estabelece o valor da ressonância para o sistema sem amortecimento, com inerter.

$$\Omega_{T \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{1}{1 + \mu}} \quad (16)$$

A figura 14 mostra a curva característica do modelo linear massa-mola-Inerter, magnitude de transmissibilidade de deslocamento em relação à razão de frequência. Onde a ressonância desse sistema ocorre em $\Omega_{T \rightarrow \infty}$, a anti-ressonância ocorre em $\Omega_{T \rightarrow 0}$ e a transmissibilidade do sistema para altas frequências é representada por $T_{\Omega \rightarrow \infty}$. Foram considerados os valores normalizados $\omega_n = 1,0$; $k = 1,0$; $b = 0,05$ e $m = 1,0$.

Figura 14 - Magnitude da transmissibilidade de deslocamento do modelo linear massa-mola-Inerter.

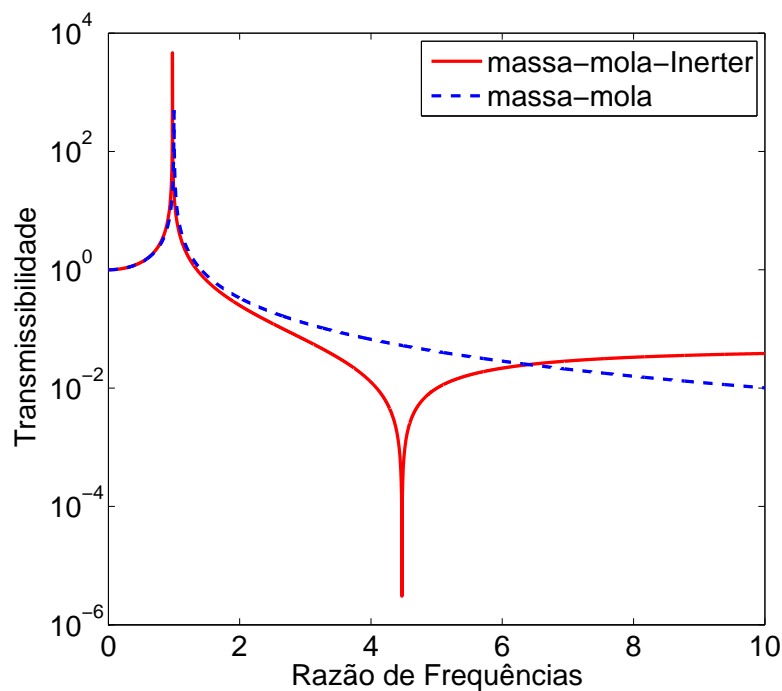


Fonte: Autor

3.2.2 Comparação dos sistemas lineares massa-mola e massa-mola-*Inerter*

A figura 15 apresenta a transmissibilidade do modelo massa-mola e do modelo linear massa-mola-*Inerter*. O sistema linear massa-mola-*Inerter* apresentou a diminuição da frequência de ressonância do sistema para o valor $\Omega_{T \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{1}{1+\mu}}$ em relação ao modelo massa-mola o qual possui a frequência de ressonância igual a natural na frequência adimensional $\omega_{n-massa-mola} = 1$. O sistema com *Inerter* possui uma anti-ressonância no valor $\Omega_{T \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{1}{\mu}}$ logo após sua ressonância. A transmissibilidade em alta frequência do sistema com *Inerter* tende à assíntota descrita por $T_{\Omega \rightarrow \infty} = \frac{\mu}{1+\mu}$ onde esse valor de transmissibilidade é maior que o do modelo massa-mola a qual tende a zero em alta frequência.

Figura 15 - Resposta em Frequência do modelo massa-mola e do modelo linear massa-mola-*Inerter*.

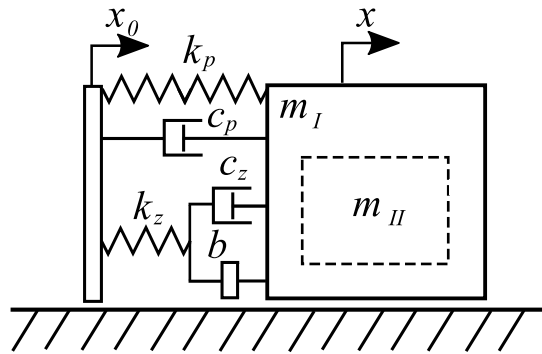


Fonte: Autor

3.3 Modelo 3 - Sistema linear massa-mola-amortecedor-acoplamento elástico *Inerter*

O sistema considerado está ilustrado na figura 16, o qual consiste em um modelo linear massa-mola-*Inerter* sujeito a excitação de base, montado em disposição horizontal, com uma extremidade acoplada à base móvel e a outra extremidade acoplada à massa. O atrito existente entre a guia linear e os patins de deslizamento, assim como o atrito existente entre a cremalheira e as paredes do *Inerter* foram considerados como amortecimento viscoso. Considerou-se que existe uma rigidez elevada entre o acoplamento da cremalheira e a base de excitação. O amortecimento viscoso, neste modelo, representa o atrito viscoso, o qual ocorre entre um sólido (base e laterais da cremalheira) e um fluido viscoso (um óleo lubrificante) interposto entre as peças móveis do sistema mecânico (paredes do *Inerter*).

Figura 16 - Modelo 3 - Sistema linear massa-mola-amortecedor-acoplamento elástico *Inerter*.

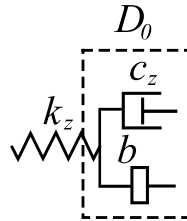


Fonte: Autor

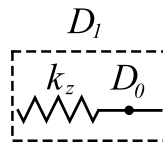
Onde $m = m_I + m_{II}$ é a massa total movida, m_I é a massa do patins de deslizamento, m_{II} é a massa do *Inerter*, k_p é o coeficiente de rigidez da mola e c_p é o coeficiente de amortecimento viscoso que representa as perdas de energia entre o patins deslizante e a guia linear; k_z é o coeficiente rigidez da mola posicionada entre a base móvel e a extremidade da cremalheira, c_z é o coeficiente de amortecimento viscoso entre a cremalheira e as paredes do *Inerter* e b é o coeficiente de proporcionalidade do dispositivo *Inerter*, inércia.

Será utilizado o Método da Impedância Mecânica para obter a função transferência do sistema, onde, considera-se a rigidez dinâmica da massa como $D_m = -\omega^2 m$, a rigidez dinâmica da mola como $D_k = k$, a rigidez dinâmica do amortecedor viscoso como $D_c = j\omega c$ e a rigidez dinâmica da inércia como $D_i = -\omega^2 b$. Inicia-se a obtenção da equação da função de transferência solucionando o equacionamento dos elementos mecânicos dispostos em paralelo, mostrado na figura 17, como a inércia b e o amortecimento viscoso c_z , onde a rigidez dinâmica resultante será a soma: $D_0 = j\omega c - \omega^2 b$.

Em sequência, resolve se o equacionamento dos elementos mecânicos dispostos em série da figura 17, mostrado na figura 18, a rigidez dinâmica da mola k_z e a rigidez dinâmica D_0 realizando a razão do produto pela soma, mostrado na equação 17:

Figura 17 - Rigidez dinâmica do paralelo entre b e c_z .

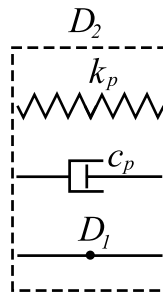
Fonte: Autor

Figura 18 - Rigidez dinâmica da série entre k_z e D_0 .

Fonte: Autor

$$D_1 = \frac{k_z D_0}{k_z + D_0} \quad (17)$$

A seguir, resolve-se as o equacionamento dos elementos mecânicos e rigidez dinâmica dispostos em paralelo, D_3 , mostrada na figura 19, referentes à rigidez dinâmica da mola k_p , do amortecedor c_p e a rigidez dinâmica D_1 . A equação da rigidez dinâmica do sistema pode ser escrita como, equação

Figura 19 - Rigidez dinâmica do paralelo entre k_p , c_p e D_1 .

Fonte: Autor

A equação da rigidez dinâmica do sistema pode ser escrita como:

$$-\omega^2 m X + D_1 (X - X_0) + j\omega c_p (X - X_0) + k_p (X - X_0) = 0 \quad (18)$$

Assim, a função transferência do sistema é mostrada na equação 20.

$$T = \frac{X}{X_0} = \frac{k_p + j\omega c_p + \left(\frac{(-\omega^2 b + j\omega c_z) k_c}{k_c - \omega^2 b + j\omega c_z} \right)}{-\omega^2 m + k_p + j\omega c_p + \left(\frac{(-\omega^2 b + j\omega c_z) k_c}{k_c - \omega^2 b + j\omega c_z} \right)} \quad (19)$$

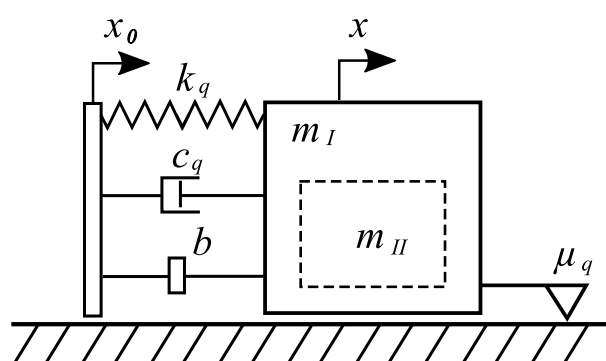
A magnitude da transmissibilidade de deslocamento do sistema do Modelo 3 é obtida através do módulo da função complexa da equação 20 e é mostrada na figura 26. A figura 26 mostra a comparação da magnitude de transmissibilidades do Modelo 3, Modelo 4 e do aparato experimental.

$$|T| = \left| \frac{X}{X_0} \right| = \left| \frac{k_p + j\omega c_p + \left(\frac{(-\omega^2 b + j\omega c_z)k_z}{k_z - \omega^2 b + j\omega c_z} \right)}{-\omega^2 m + k_p + j\omega c_p + \left(\frac{(-\omega^2 b + j\omega c_z)k_z}{k_z - \omega^2 b + j\omega c_z} \right)} \right| \quad (20)$$

3.4 Modelo 4 - Sistema não linear massa-mola-amortecedor-*Inerter*-atrito Coulomb

O modelo considerado está ilustrado na figura 20, o qual consiste em um modelo massa-mola-amortecedor-*Inerter* sujeito a excitação de base, montado em disposição horizontal, com uma extremidade acoplada à base móvel e a outra extremidade acoplada à massa. Foi considerado o atrito Coulomb entre a guia linear e o patins de deslizamento assim como o amortecimento viscoso entre a cremalheira e as paredes do *Inerter*. O atrito Coulomb torna a equação do movimento não linear.

Figura 20 - Modelo 4 - Sistema isolador de vibrações massa-mola-amortecedor-*Inerter* com atrito Coulomb.



Fonte: Autor

Onde $m = m_I + m_{II}$ é a massa total movida, m_I é a massa do patins de deslizamento e do suporte do *Inerter*, m_{II} é a massa do *Inerter*; k_q é o coeficiente de rigidez da mola e c_q é o coeficiente de amortecimento viscoso entre a cremalheira e as paredes e base de seu suporte; μ_q é o coeficiente de atrito entre a guia linear e a base de deslizamento, g é a gravidade e b é a inércia do dispositivo *Inerter*.

O equilíbrio de forças dinâmico desse modelo é dado pela equação 21:

$$m\ddot{x} = -k_q(x - x_0) - c_q(\dot{x} - \dot{x}_0) - b(\ddot{x} - \ddot{x}_0) - \mu_q m_q g \text{sign}(\dot{x}_0) \quad (21)$$

Considerando que a magnitude de transmissibilidade é dada pelo $|T| = |X/X_0|$, é mostrada na figura 26. A figura 26 mostra a comparação da magnitude de transmissibilidade do Modelo 3, Modelo 4 e do aparato experimental. A curva de magnitude de transmissibilidade do Modelo 4 foi solucionada através de métodos de integração numérica.

3.5 Modelagem matemática da Inertância

Esta seção apresenta a modelagem matemática da constante de proporcionalidade do *Inerter*, a inertância, b . A relação entre ângulo e deslocamento linear α entre a medida angular e a circunferência da engrenagem de raio r_e é dada pela equação 22.

$$\alpha = \frac{2\pi}{2\pi r_e} \quad (22)$$

Considerando que a velocidade linear da cremalheira é \dot{x} e a velocidade angular do volante de inércia é $\dot{\theta}_e$, a relação de velocidades é dada pela equação 23.

$$\dot{\theta}_e = \alpha \dot{x} \quad (23)$$

Derivando a equação 23, obtém-se:

$$\ddot{\theta}_e = \alpha \ddot{x} \quad (24)$$

No caso ideal, não há perda de energia na transmissão de potência, assim a potência na entrada, é igual a potência na saída do mecanismo, equação 25. Onde F_b é a força linear aplicada ao terminal da cremalheira e $T_q = I\ddot{\theta}_e$ é o torque aplicado na engrenagem acoplada ao volante de inércia o qual possui o momento de inércia I .

$$F_b \dot{x} = T_q \dot{\theta}_e \quad (25)$$

Substituindo a equação 23 e 24 na equação 25, obtém-se:

$$F_b = T_q \frac{(I\ddot{\theta}_e)\dot{\theta}_e}{\dot{x}} = I(\alpha^2)\dot{x} = b\dot{x} \quad (26)$$

Assim, a equação da inertância ideal de um sistema com cremalheira e um volante de inércia é dada por:

$$b = I(\alpha^2) \quad (27)$$

A inertância pode ser alterada variando o momento de inércia I do volante de inércia ou a relação α . O dispositivo *Inerter* geralmente possui menor peso do que os isoladores de vibração de massa sintonizada porque considera o momento de inércia do volante de inércia multiplicado por uma relação de engrenamento multiplicadora elevada ao quadrado, gerando um momento

de inércia muito superior ao da massa do próprio volante de inércia, enquanto os isoladores de vibração de massa sintonizada consideram o momento de inércia da massa concentrada de seu dispositivo.

4 ISOLADOR DE VIBRAÇÕES COM *INERTER* EM ARRANJO GEOMÉTRICO LINEAR - EXPERIMENTAL

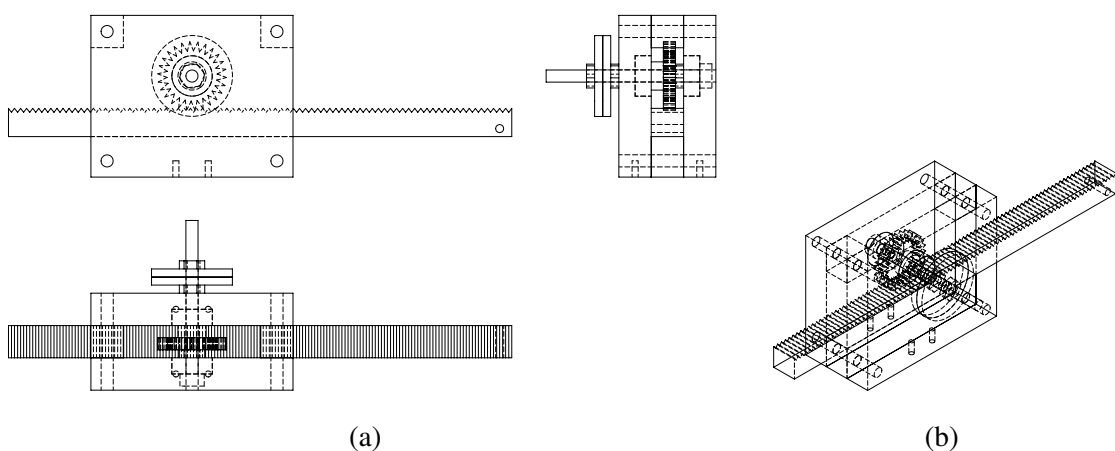
4.1 Aparato experimental massa-mola-*Inerter*

Neste capítulo, foi considerado um sistema isolador de vibrações massa-mola-*Inerter*, nomeado aparato experimental massa-mola-*Inerter*. O dispositivo *Inerter* considerado é do tipo mecânico com cremalheira e volante de inércia. O sistema é de um grau de liberdade e excitado através de um *Shaker* (excitador eletro-mecânico).

O experimento tem como objetivo validar o Modelo 3 e Modelo 4 em relação ao aparato experimental e as considerações adotadas, assim como realizar a comparação entre o aparato experimental massa-mola e o sistema massa-mola-*Inerter* e também realizar o experimento relativo à variação da Inertância associada à massa do Volante de Inércia.

O *Inerter* é um dispositivo que ainda não está disponível no mercado, tendo sua aplicação e uso restrita à poucos seguimentos conhecedores desse mecanismo. Para realizar os experimentos com esse tipo de mecanismo, foi necessário construí-lo (figura 21-a e figura 21-b). O desenvolvimento do aparato experimental iniciou-se adotando dimensões do dispositivo *Inerter* compatíveis com o sistema de excitação e aquisição de dados disponíveis no laboratório. Foram considerados o tipo de aplicação de força, a amplitude e a frequência do *Shaker* assim como a massa e sensibilidade dos acelerômetros.

Figura 21 - (a) Desenho do dispositivo *Inerter* experimental e (b) Vista Isométrica.



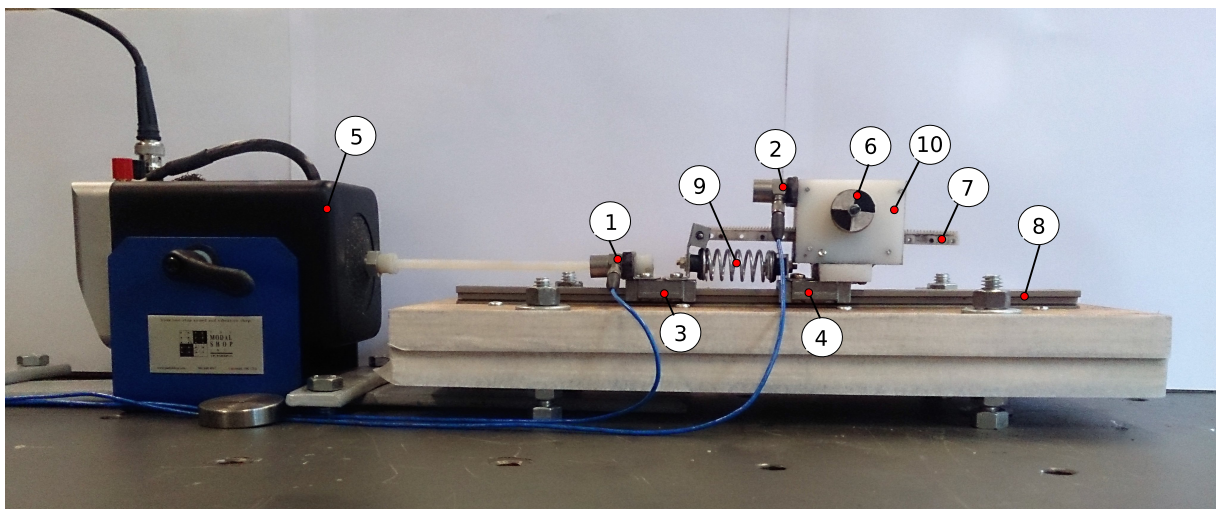
Fonte: Autor

4.2 Materiais e Métodos

Foi realizada a aquisição de dados no experimento utilizando dois acelerômetros (Modelo ICP 352C33) (item-1 e item-2), um módulo da *National Instruments*, (Modelo NI USB-4431, 24-Bit 102.4 KS/s) acoplado a um computador com o *Software LabVIEW 2013* . Foi utilizado um *Shaker* da marca *THE MODAL SHOP INC* modelo K2007E01 (item-5).

Na figura 22 um acelerômetro (item-1) foi fixado no primeiro patins (item-3), o qual foi acoplado ao *Shaker* (item-5) através de um fuso roscado de *nylon* e o outro foi fixado no segundo patins (item-4). O primeiro e o segundo patins deslizam sobre uma guia linear (item-8). O patins (item-3) é conectado ao patins (item-4) através de um mola $k = 1962,0$ N/m. (item-9) e uma cremalheira (item-7). O dispositivo *Inerter* é composto pelos elementos volante de inércia (item-6), cremalheira (item-7) e corpo do *Inerter* (item-10).

Figura 22 - Aparato experimental do sistema isolador de vibrações massa-mola-*Inerter*.



Fonte: Autor

Associado ao módulo de aquisição de sinais, foi utilizado o programa *LabVIEW-2013*. Foi utilizado o assistente de configuração *DAQassistant* (Assistente de aquisição de dados) com a configuração com o sinal de entrada no intervalo de -5 g a 5 g; sensibilidade de 100 mVolts/g; com taxa de aquisição de 1000 Hz.

No diagrama de blocos, no bloco da Resposta em Frequência, foi utilizada a configuração da média RMS; com a janela *Hanning*. O canal 1 realiza a aquisição de dados da fonte de excitação e o canal 2 realiza a aquisição de dados da resposta do sistema e são exportados os sinais de Magnitude e Fase.

O sinal da excitação foi gerado no programa *Audacity* com a função *Chirp*. A frequência foi variada de 1 a 200 Hz, com amplitude de 30 mV, com duração de 3 minutos e interpolação linear.

4.3 Cálculo da Inertância - experimental

O volante de inércia experimental, nesse experimento, pode ser composto por até quatro discos metálicos. Nesta seção será considerado que o volante de inércia é composto por um disco. O raio r_e da engrenagem é 7,5 mm. A massa medida de cada disco é 4,9 g e $raio_d$ é 10 mm. Assim o cálculo do momento de inércia do volante de inércia é dado por $I_v = mr_d^2$.

$$I_v = \frac{1}{2}mr_d^2 = 2,45 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2 \quad (28)$$

A inertância experimental para o volante de inércia com um disco é calculada segundo a equação $b = I(\alpha^2)$, onde

$$b = I_v(\alpha^2) = (2,45 \cdot 10^{-7}) \cdot \left(\frac{2\pi}{2\pi \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}} \right)^2 = 4,35 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad (29)$$

É necessário adicionar a inertância do eixo à inertância do volante de inércia. A inertância do eixo foi calculada de maneira análoga à inertância do disco, assim, $I_e = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$. Assim, a inertância total $I_t = I_v + I_e$, portanto $I_t = 5,45 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ foram calculadas as inertâncias para os volantes de inércia compostos por dois, três e quatro discos mostrado na tabela 1.

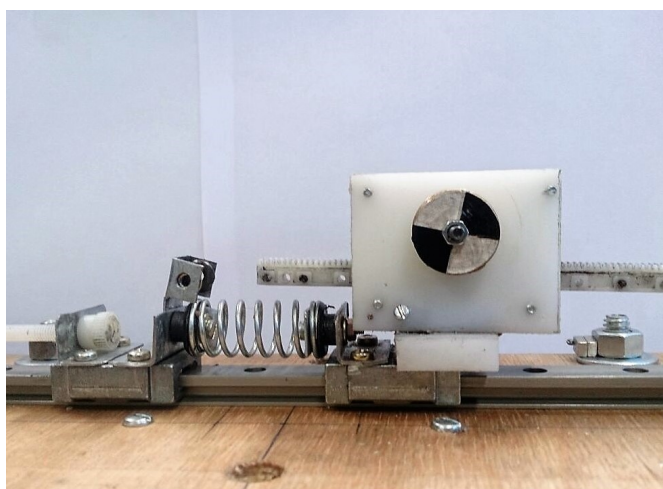
Tabela 1 - Tabela da inertância experimental.

Número de discos do volante de inércia	Inertância [kg]
1	$5,45 \cdot 10^{-3}$
2	$10,80 \cdot 10^{-3}$
3	$15,15 \cdot 10^{-3}$
4	$19,50 \cdot 10^{-3}$

4.4 Validação experimental do modelo massa-mola

Esta seção apresenta a resposta em frequência do aparato experimental massa-mola. O aparato experimental massa-mola é o mesmo do aparato experimental massa-mola-*Inerter* (figura 25), com a diferença que a cremalheira do dispositivo *Inerter* foi desconectada do patins (item-3), (figura 23). A cremalheira e o volante de inércia foram fixados de maneira que atuassem como massa do sistema, com a finalidade de manter a massa do sistema constante.

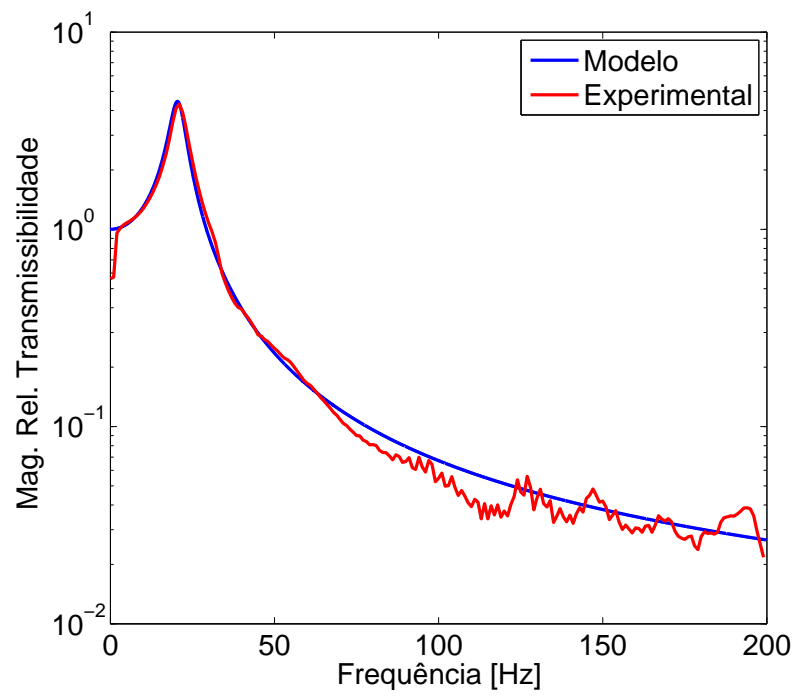
Figura 23 - Aparato experimental massa-mola.



Fonte: Autor

A figura 24 mostra a comparação entre a resposta em frequência do aparato experimental massa-mola e a resposta em frequência do Modelo 1. O aparato experimental possui massa $123,5 \cdot 10^{-3}$ kg e a rigidez da mola 1962 N/m. O modelo 1, que representa um sistema massa-mola-amortecedor, o coeficiente de amortecimento viscoso foi considerando $c_p = 3,0$ Ns/m, representando as perdas de energia do sistema. O pico de ressonância do aparato experimental massa-mola ocorreu na frequência 21 Hz e o modelo apresentou frequência natural amortecida de 20 Hz, $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$, apresentando a diferença de aproximadamente 5%. A resposta experimental da magnitude relativa de transmissibilidade apresentou uma diferença máxima de aproximadamente 24% para frequências acima de 81 Hz, apesar dessas variações, a resposta do modelo encontra-se muito próxima da experimental. Dessa maneira validou-se o aparato experimental massa-mola em relação ao modelo.

Figura 24 - Comparação da resposta experimental e o modelo massa-mola.

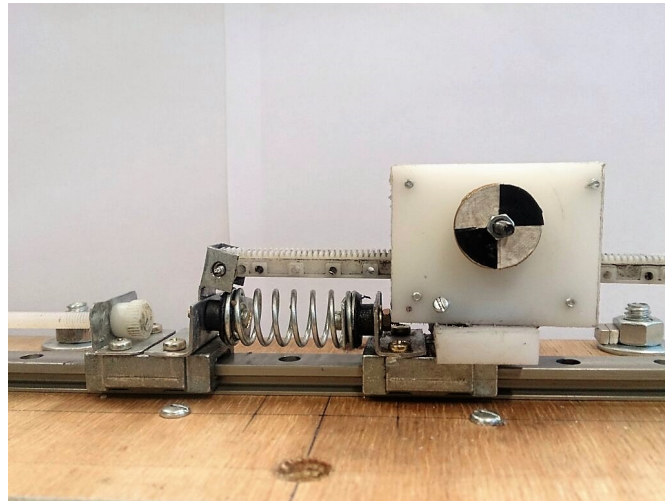


Fonte: Autor

4.5 Validação experimental do modelo massa-mola-*Inerter*

Esta seção apresenta a resposta em frequência do aparato experimental massa-mola-*Inerter* mostrado na figura 25.

Figura 25 - Aparato experimental massa-mola-amortecedor-*Inerter*.



Fonte: Autor

Para obter a resposta em frequência (Magnitude relativa de transmissibilidade) do modelo referente ao aparato experimental com atrito Coulomb (figura 20) foi utilizada integração numérica com o método explícito de Runge-Kutta-Fehlberg (4,5), onde foi variado o parâmetro frequência, com a excitação do tipo: $x_0 = A \cos(\omega t)$.

A figura 26 mostra a comparação entre a resposta em frequência do Modelo 3, Modelo 4 e a o aparato experimental massa-mola-*Inerter*.

O aparato experimental possui massa de $112,7 \cdot 10^{-3}$ kg, inércia de $19,50 \cdot 10^{-3}$ kg referente ao volante de inércia composto por quatro discos, rigidez da mola 1962 N/m e coeficiente de atrito Coulomb da guia linear 0,2 (dado do fabricante).

Para realizar a validação do Modelo 3, foram considerados os seguintes valores: massa movida $m = 110,0 \cdot 10^{-3}$ kg, inércia $b = 17,30 \cdot 10^{-3}$ kg, coeficiente de rigidez da mola 1962 N/m, coeficiente de rigidez do acoplamento de cremalheira 40000 N/m e coeficiente de amortecimento viscoso $c = 0,07$ Ns/m entre a cremalheira e as paredes do *Inerter*.

Para realizar a validação do Modelo 4, foram considerados os seguintes valores : massa movida $m = 115,0 \cdot 10^{-3}$ kg, inércia $b = 18,40 \cdot 10^{-3}$ kg, coeficiente de rigidez da mola 1962 N/m, coeficiente de atrito $\mu_p = 0,004$, coeficiente de amortecimento viscoso $c = 0,06$ Ns/m.

O pico de ressonância do aparato experimental linear massa-mola-*Inerter* ocorreu na frequência 20 Hz, a do Modelo 3 foi de aproximadamente 20 Hz e a do Modelo 4 foi de aproximadamente 19 Hz apresentando a diferença entre as frequências aproximadamente de 5%.

Onde a equação que define a frequência de ressonância do modelo ideal, sem perdas de energia é $\omega_r \cong \sqrt{\frac{k}{(m+b)}}$.

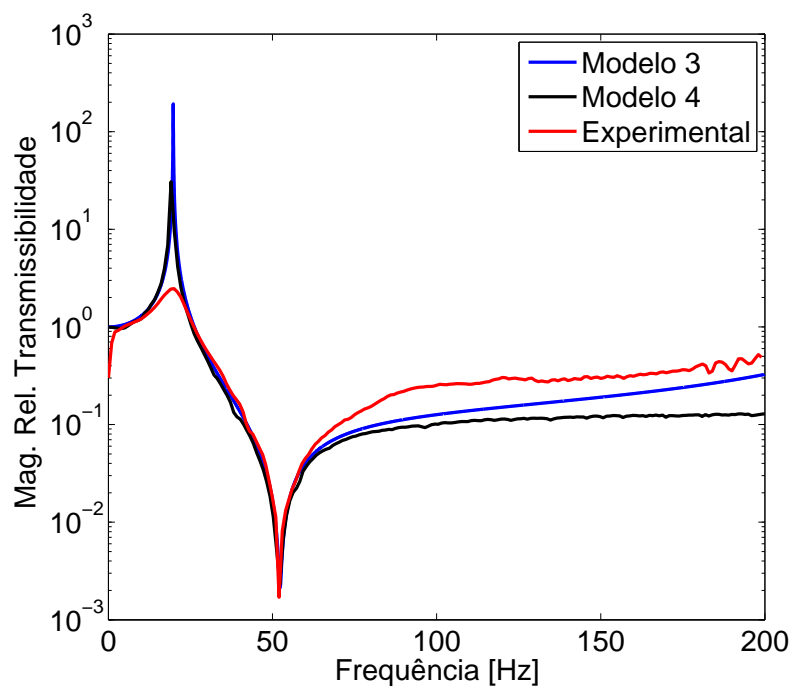
Na frequência de ressonância, a magnitude relativa de transmissibilidade apresentou o valor próximo de 78 vezes maior do que o experimental para o Modelo 3 e 12 vezes maior para o Modelo 4. Nessa região os modelos não são adequados para validar o pico da magnitude relativa de transmissibilidade, já a base da curva aproximou-se muito do valor experimental. A causa mais provável para essa diferença de valores da magnitude relativa de transmissibilidade, é a existência de outro tipo de atrito no experimento, o qual interfere de maneira não linear na resposta do sistema.

A frequência da anti-ressonância do modelo ideal é $\omega_a \cong \sqrt{\frac{k}{b}}$, no modelo experimental, ela ocorreu em 52 Hz sendo que a frequência do Modelo 3 e Modelo 4 foram aproximadamente a mesma, assim como a magnitude relativa da transmissibilidade.

A resposta experimental da magnitude relativa da transmissibilidade apresentou a diferença máxima de aproximadamente 50% para o Modelo 3 e 69% para o Modelo 4 para o intervalo de frequências entre 88 à 200 Hz e diferença mínima de respectivamente de aproximadamente 19% e 58%, nesse intervalo, as assíntotas do aparato experimental e do Modelo 4 seguem praticamente paralelas.

Dessa maneira conclui-se que o Modelo 3 apresenta resultados que aproximam se mais da resposta em frequência do aparato experimental do que o Modelo 4, com exceção da magnitude relativa de transmissibilidade na ressonância. Assim validam-se ambos os modelos, Modelo 3 e Modelo 4, com exceção do pico da magnitude relativa de transmissibilidade na ressonância, onde a causa mais provável é a existência de outro tipo de atrito no experimento (atrito assimétrico devido a folgas e momentos de inércia atuantes no mecanismo), o qual interfere de maneira não linear na resposta do sistema.

Figura 26 - Comparação da resposta em frequência do aparato experimental massa-mola-Inerter, Modelo 3 e Modelo 4.

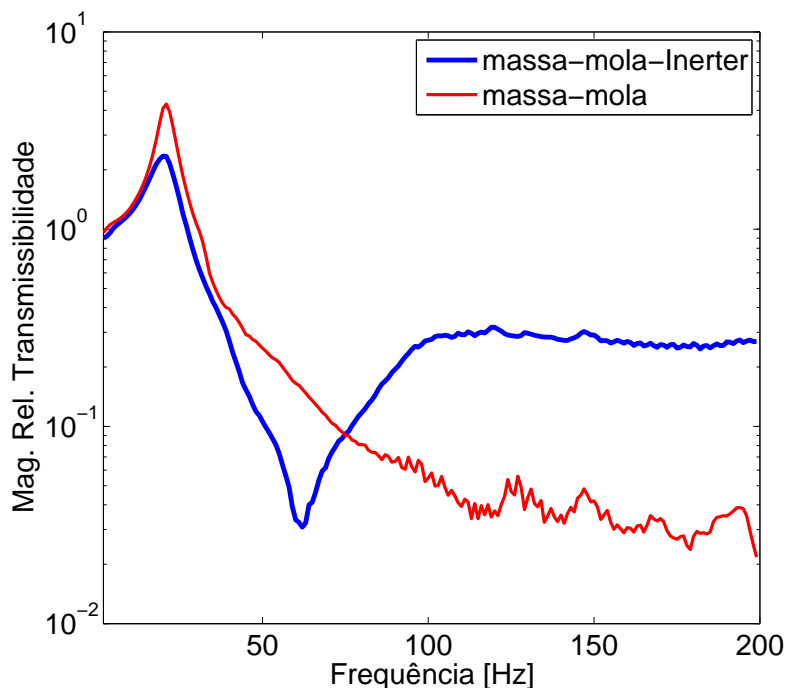


Fonte: Autor

4.6 Comparação dos aparatos experimentais massa-mola e massa-mola-*Inerter*

A figura 27 mostra a comparação entre a resposta em frequência do aparato experimental massa-mola-*Inerter* e o aparato experimental massa-mola. Nesse experimento o volante de inércia é composto por dois discos.

Figura 27 - Comparação entre o aparato experimental massa-mola-*Inerter* e o massa-mola.



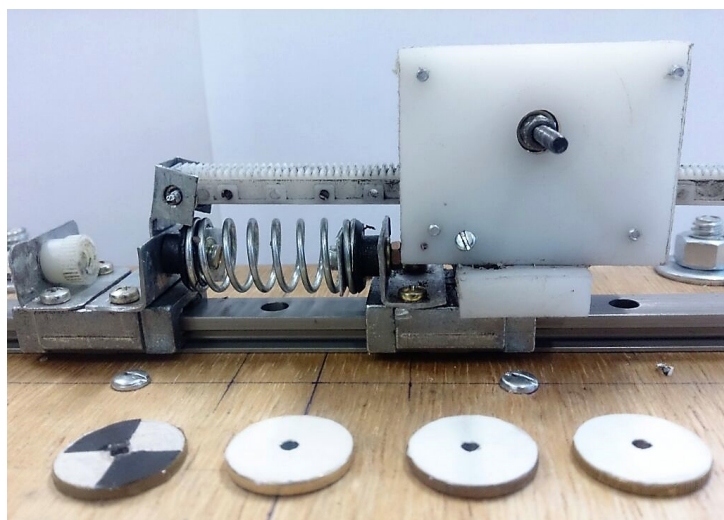
Fonte: Autor

A frequência de ressonância do aparato experimental massa-mola-*Inerter* e do massa-mola é 21 Hz, onde a magnitude relativa de transmissibilidade massa-mola foi de aproximadamente 45% maior que a do massa-mola-*Inerter*. A anti-ressonância do aparato experimental massa-mola-*Inerter* ocorreu na frequência próxima de 62 Hz com a magnitude relativa de transmissibilidade aproximadamente 80% menor que a do massa-mola na mesma frequência. As curvas de transmissibilidade se cruzam na frequência aproximada de 75 Hz onde os dois aparatos experimentais apresentam a mesma transmissibilidade. Esse ponto determina a frequência a partir da qual o aparato experimental massa-mola-*Inerter* apresenta transmissibilidade superior ao do massa-mola. O aparato experimental massa-mola-*Inerter* apresenta menor magnitude relativa de transmissibilidade que o massa-mola no intervalo de frequências aproximado entre 21 Hz e 75 Hz.

4.7 Resposta em frequência da variação da inércia

Neste experimento foi realizada a variação da inércia. A massa do volante de inércia foi variada adicionando discos ao mesmo, como o mostrado nas figuras 28 e 29. Foram realizadas quatro medições. A primeira medição foi realizada com um disco, a segunda com dois, a terceira com três e a quarta com quatro discos, conforme a tabela 2.

Figura 28 - Aparato experimental massa-mola-*Inerter* e discos utilizados para variar a massa do volante de inércia.



Fonte: Autor

Tabela 2 - Tabela da variação da inércia experimental.

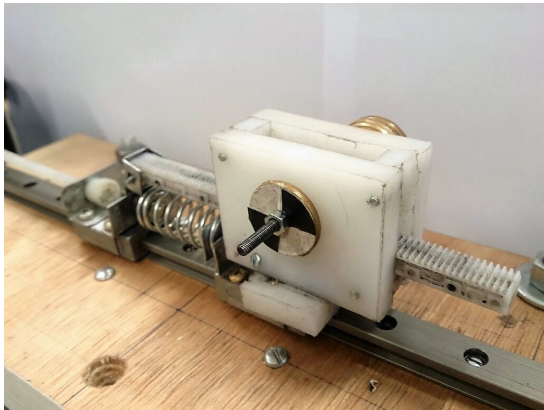
Número de discos do volante de inércia	Inércia [kg]
1	$5,45 \cdot 10^{-3}$
2	$10,80 \cdot 10^{-3}$
3	$15,15 \cdot 10^{-3}$
4	$19,50 \cdot 10^{-3}$

A figura 30 mostra a resposta em frequência das quatro variações da inércia. Para efeito de comparação, foi adicionada a essa figura a curva da transmissibilidade do aparato experimental massa-mola.

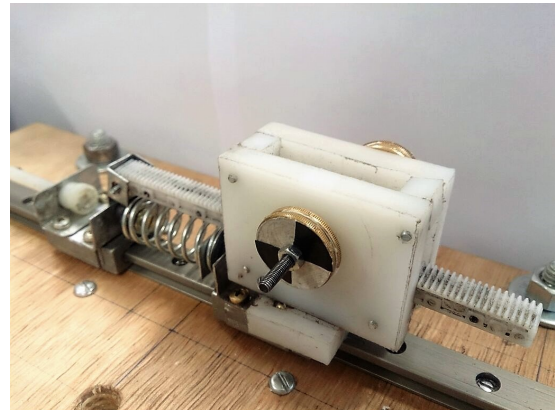
A tabela 3 mostra os valores experimentais da frequência de ressonância, anti-ressonância, magnitude relativa de transmissibilidade, assim como a tabela 4 mostra os valores experimentais da frequência e magnitude relativa de transmissibilidade onde ocorre o cruzamento entre as curvas do aparato experimental massa-mola-*Inerter* e o massa-mola.

O aumento da inércia causou a diminuição da magnitude relativa de transmissibilidade e da frequência da anti-ressonância, por outro lado, causou o aumento da magnitude relativa de

Figura 29 - Variação da massa do volante de inércia.



(a) um disco



(b) dois discos



(c) três discos

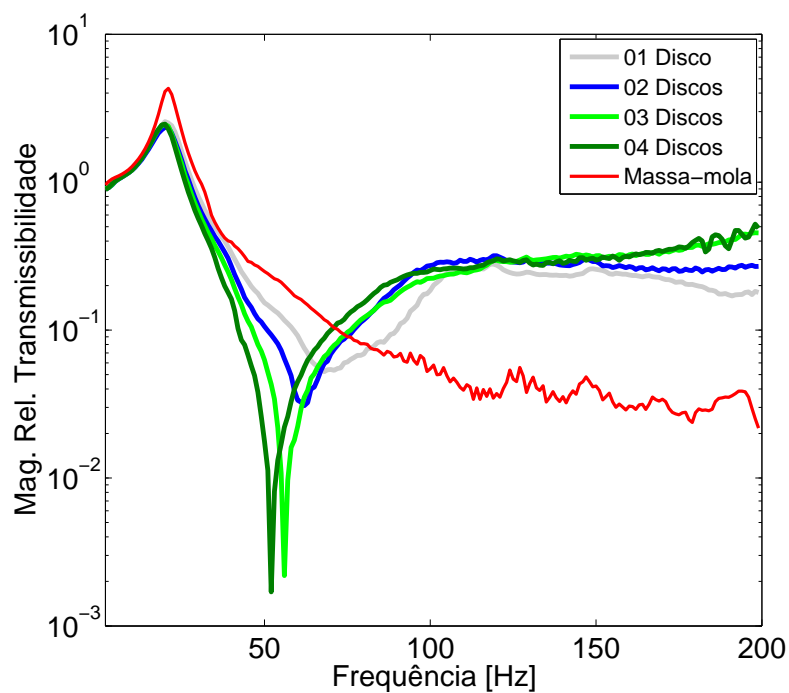


(d) quatro discos

Fonte: Autor

transmissibilidade em alta frequência (acima de aproximadamente 150 Hz). O aparato experimental massa-mola-*Inerter* apresentou melhor isolamento de vibração do que o massa-mola no intervalo de frequências aproximado entre 20 à 82 Hz e na região da anti-ressonância, o aparato massa-mola-*Inerter* com quatro discos no volante de inércia apresentou a capacidade de reduzir em aproximadamente até 99% a magnitude relativa de transmissibilidade do massa-mola. No intervalo de frequências acima de aproximadamente 82 Hz o aparato experimental massa-mola-*Inerter* apresentou menor isolamento de vibração que o massa-mola.

Figura 30 - Resultados experimentais da variação da inércia do aparato experimental massa-mola-*Inerter*.



Fonte: Autor

Tabela 3 - Resultados experimentais relativos à variação da massa do volante de inércia; frequência e magnitude da transmissibilidade na ressonância e anti-ressonância.

	Frequência de ressonância	Magnitude da transmissibilidade na ressonância	Frequência da anti-ressonância	Magnitude da transmissibilidade na anti-ressonância
01 Disco	20 Hz	2,57	69 Hz	0,054
02 Discos	20 Hz	2,35	62 Hz	0,031
03 Discos	20 Hz	2,45	56 Hz	0,002
04 Discos	20 Hz	2,47	52 Hz	0,002

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Tabela 4 - Resultados experimentais da variação da massa do volante de inércia, frequência e magnitude da transmissibilidade do ponto de cruzamento das curvas do aparato experimental massa-mola-*Inerter* e o massa-mola.

	Frequência do ponto de cruzamento das curvas do aparato experimental massa-mola- <i>Inerter</i> e o massa-mola	Magnitude da transmissibilidade do ponto de cruzamento das curvas do aparato experimental massa-mola- <i>Inerter</i> e o massa-mola	Magnitude da transmissibilidade para a frequência de 200 Hz
01 Disco	82 Hz	0,075	0,18
02 Discos	75 Hz	0,092	0,27
03 Discos	74 Hz	0,093	0,45
04 Discos	71 Hz	0,104	0,49

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

5 ISOLADOR DE VIBRAÇÕES COM *INERTER* EM ARRANJO GEOMÉTRICO NÃO LINEAR

Neste capítulo, são investigados os efeitos não lineares da disposição geométrica do *Inerter*, Modelo 5, em termos de isolamento de vibração e comparados com o arranjo massa-mola-amortecedor, Modelo 1, e o modelo linear massa-mola-amortecedor-*Inerter*, Modelo 2. A análise compreende a solução da equação do movimento exata, bem como as aproximações da equação do movimento para baixa e alta amplitude. Foi utilizado o método do Balanço Harmônico para obter as soluções das equações não lineares. A análise numérica é utilizada para complementar a investigação. A comparação com isoladores de vibração linear massa-mola-amortecedor, Modelo 1, e o linear massa-mola-amortecedor-*Inerter*, Modelo 2, mostra possíveis benefícios para regimes de alta frequência. Os efeitos da não-linearidade geométrica desaparecem quando a amplitude do movimento é grande.

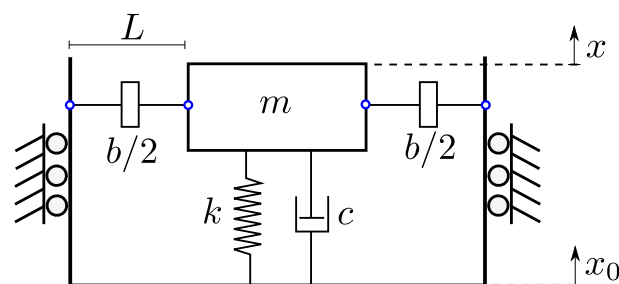
O capítulo está organizado em seções, a seção 5.1 apresenta a modelagem matemática, incluindo a equação do movimento exata, bem como as aproximações da equação de movimento para baixa e alta amplitude. Na seção 5.2, utiliza-se o método do Balanço Harmônico para obter as soluções das equações não lineares, é mostrado a resposta livre e a resposta em frequência. Na seção 5.3 estabilidade da resposta periódica para o deslocamento relativo e absoluto. Na Seção 5.4, é realizada uma análise numérica detalhada considerando a equação do movimento exata, que ilustra a sensibilidade dos parâmetros no domínio do tempo, planos de fase e bacias de atração.

5.1 Modelo 5 - Sistema massa-mola-amortecedor-Inerter em arranjo geométrico não linear

Elementos dispostos de maneira geometricamente não lineares como o mecanismo do tipo *snap-through* são utilizados para absorver e isolar vibrações mecânicas em sistemas de engenharia. Essa configuração fornece a condição HSLDS, alta rigidez estática para que o sistema não apresente grandes deslocamentos com a carga estática e baixa rigidez dinâmica, assim, a frequência natural do sistema é a menor possível resultando em uma região de isolamento maior (CARRELLA; BRENNAN; WATERS, 2007), (CARRELLA et al., 2012), (SHAW et al., 2013), (TANG; BRENNAN, 2013), (AVRAMOV; GENDELMAN, 2009), (HAO; CAO; WIERCIGROCH, 2017). O sistema massa-mola-amortecedor com *Inerter* em arranjo geometricamente não linear foi baseado nos modelos utilizados para representar os mecanismos do tipo *snap-through*, assim como a análise da dinâmica do sistema.

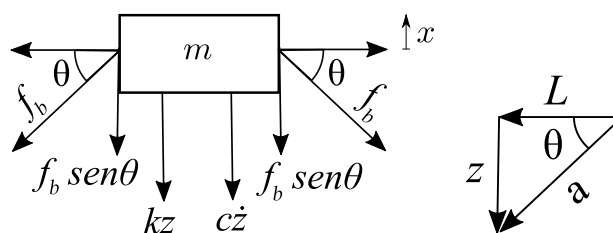
O sistema massa-mola-amortecedor com *Inerter* em arranjo geometricamente não linear, Modelo 5, está ilustrado na figura 31, o qual consiste em um modelo massa-mola-amortecedor sujeito a excitação de base, onde é adicionado um *Inerter* montado em disposição horizontal no lado direito e outro no lado esquerdo da massa suspensa, cada um com uma extremidade acoplada à base móvel e a outra extremidade acoplada à massa. Nesta análise, a massa é restrita para se mover apenas na direção vertical e as forças horizontais que atuam sobre a massa não são consideradas. Para comparação, é considerado o arranjo linear massa-mola-amortecedor-*Inerter* em uma configuração vertical mostrado no capítulo 3 na figura 13.

Figura 31 - Representação do sistema massa-mola-amortecedor com o *Inerter* em posição horizontal - arranjo geométrico não linear - Modelo 5.



Fonte: Autor

Figura 32 - Representação das forças no *Inerter* horizontal.



Fonte: Autor

A equação de movimento para o sistema apresentado da figura 31 é obtida em termos de deslocamento relativo $z = x - x_0$, com o equilíbrio de força dinâmico dado por:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - c(\dot{x} - \dot{x}_0) - 2f_b \text{sen}(\theta) \quad (30)$$

$$m\ddot{x} = -kz - c\dot{z} - 2f_b \text{sen}(\theta) \quad (31)$$

Onde m é a massa concentrada, k é a rigidez da mola, c é o coeficiente de amortecimento viscoso e f_b é a força do *Inerter* produzida ao longo de seu eixo. Os pontos sobre as variáveis $(\ddot{x}, \dot{x}, \ddot{z}, \dot{z})$ representam a diferenciação em relação ao tempo t .

O termo $\text{sen}(\theta)$ representa o fator de decomposição vertical da força do *Inerter* que atua sobre a massa m .

$$\text{sen}(\theta) = \frac{z}{\sqrt{L^2 + z^2}} \quad (32)$$

Assume-se que na posição de equilíbrio ($x = 0$), o *Inerter* está disposto horizontalmente assim, quando a massa m movimentar-se para cima e para baixo, o dispositivo *Inerter* apresenta o deslocamento relativo entre seus terminais (Δ), equação 33, figura 32.

$$\Delta = \sqrt{L^2 + z^2} - L \quad (33)$$

A aceleração relativa entre os terminais do *Inerter* ($\ddot{\Delta}$) é obtida pela diferenciação equação 33 duas vezes em relação ao tempo.

$$\ddot{\Delta} = \frac{(z\ddot{z} + \dot{z}^2)L^2 + z^3\ddot{z}}{(L^2 + z^2)^{3/2}} \quad (34)$$

A força do *Inerter* é dada multiplicando a inertância b pela aceleração relativa entre seus terminais:

$$f_b = \frac{b}{2}\ddot{\Delta} \quad (35)$$

Substituindo a equação 34 na equação 35, obtém-se:

$$m\ddot{x} = -kz - c\dot{z} - b\ddot{\Delta} \frac{z}{\sqrt{L^2 + z^2}} \quad (36)$$

Subtraindo o termo $m\ddot{x}_0$ nos dois lados da equação 36:

$$m\ddot{z} = -m\ddot{x}_0 - kz - c\dot{z} - b\ddot{\Delta} \frac{z}{\sqrt{L^2 + z^2}}, \quad (37)$$

Substituindo equação 32, 35 e 34 na equação 37, obtém-se a equação do movimento:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{x}_0 - b \left(\frac{(z\ddot{z} + \dot{z}^2)L^2 + z^3\ddot{z}}{(L^2 + z^2)^{3/2}} \right) \left(\frac{z}{\sqrt{L^2 + z^2}} \right) \quad (38)$$

Divide-se a equação 38 por m e obtém-se a equação do movimento:

$$\left(1 + \mu \frac{z^2 L^2 + z^4}{(L^2 + z^2)^2} \right) \ddot{z} + 2\xi \omega_0 \dot{z} + \left(\omega_0^2 + \mu \frac{\dot{z}^2 L^2}{(L^2 + z^2)^2} \right) z = -\ddot{x}_0 \quad (39)$$

Onde $\mu = b/m$ é a razão de inércia (adimensional), $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural e $c = 2\xi m \omega_0$ é o fator de amortecimento. Os dois últimos parâmetros estão relacionados ao sistema de um grau de liberdade massa-mola-amortecedor, usado por conveniência da análise (note que ω_0 e ξ não são a frequência natural e o fator de amortecimento dos sistemas da figura 31).

Considerando o tempo adimensional $\tau = \omega_0 t$, de modo que $\dot{z} = \omega_0 z'$, com $z' = dz/d\tau$, e também considerando que o sistema está sujeito à excitação harmônica de base é da forma $x_0 = X_0 \cos(\omega t)$, $\ddot{x}_0 = -\omega^2 X_0 \cos(\omega t)$, onde ω é a frequência de excitação, equação 39 é reescrita como:

$$\left(1 + \mu \frac{z^2 L^2 + z^4}{(L^2 + z^2)^2} \right) z'' + 2\xi z' + \left(1 + \mu \frac{z'^2 L^2}{(L^2 + z^2)^2} \right) z = \Omega^2 X_0 \cos(\Omega \tau) \quad (40)$$

Onde $\Omega = \omega/\omega_0$ é a razão de frequência. A forma final da equação de movimento é obtida dividindo-se a equação 40 pelo comprimento L , resultando na equação exata do sistema:

$$\left(1 + \mu \frac{h^2}{(1 + h^2)} \right) h'' + 2\xi h' + \left(1 + \mu \frac{h'^2}{(1 + h^2)^2} \right) h = \Omega^2 \hat{X}_0 \cos(\Omega \tau) \quad (41)$$

Onde $h = z/L$ é o deslocamento relativo normalizado e $\hat{X}_0 = X_0/L$ é o deslocamento da base normalizado.

5.1.1 Equações aproximadas para amplitudes altas e baixas

Analisando a equação 41, para um valor de $\mu > 0$, é possível obter duas aproximações limitantes. A primeira aproximação é obtida considerando valores baixos do deslocamento relativo h , de modo que os termos do denominador possam ser aproximados como $1 + h^2 \approx 1$, fornecendo a equação 42, a qual será referida como *BA*, (*Baixa Amplitude*), aproximação de baixa amplitude.

$$(1 + \mu h^2) h'' + 2\xi h' + (1 + \mu h^2) h = \Omega^2 \hat{X}_0 \cos(\Omega\tau) \quad (42)$$

Essa equação ainda é não-linear, onde a não-linearidade influencia as forças de inércia e as forças elásticas. O termo $(1 + \mu h^2)h$ não tem um efeito significativo na dinâmica do sistema quando a massa está em seu deslocamento máximo ou perto da posição de equilíbrio, porque o deslocamento e a velocidade tem 90° de defasagem. Consequentemente, quando o deslocamento é máximo, a velocidade é zero e vice-versa. Uma observação interessante é que, com exceção de um termo de rigidez não-linear, este sistema possui equação semelhante à que define o modo único de uma viga engastada uniforme com uma massa concentrada intermediária e inércia de rotação descrito pelo (HAMDAN; DADO, 1997) e (MARINCA; HERISANU, 2012).

A segunda aproximação ocorre quando h é grande. Nessa situação, o termo $1 + h^2 \approx h^2$, assim, a equação do movimento é considerada linear. A equação 43 será referida como *AA*, (*Alta Amplitude*), aproximação de alta amplitude.

$$(1 + \mu) h'' + 2\xi h' + h = \Omega^2 \hat{X}_0 \cos(\Omega\tau) \quad (43)$$

Essa equação representa o caso de um sistema linear de uma massa suspensa pela combinação dos elementos mola-amortecedor-*Inerter* em configuração paralela (figura 13). Esse é um resultado interessante que mostra que a não-linearidade do sistema desaparece para grandes deslocamentos relativos.

5.2 Solução através do Método do Balanço Harmônico de Primeira Ordem

Nesta seção são analisadas a Equação do Movimento Exata (equação 41) e as Equações Aproximadas de Baixa Amplitude (equação 42) e de Alta Amplitude (equação 43). Foi utilizado o Método do Balanço Harmônico para obter a solução das equações não lineares.

O Balanço Harmônico é um método de aproximação utilizado para calcular soluções periódicas de equações diferenciais ordinárias (ODEs) (KRACK, 2018). Esse método pode ser utilizado na análise de sistemas não lineares, incluindo estruturas, fluidos, circuitos elétricos, a dinâmica de sistemas que podem ser modelados por ODEs. Esse método supera várias vezes o desempenho da integração numérica em termos de eficiência computacional. Poucos métodos são usados para sistemas com fortes não linearidades, dentre eles, pode ser citado o Método do Balanço Harmônico (MBH), (NAYFEH; BALACHANDRAN, 2008; NAYFEH, 1973). Segundo Meirovitch (2010), o MBH é um método aproximado que tem como principal característica a simplicidade em sua aplicação. Este método também é chamado de método de linearização harmônica, e difere do método de linearização por não substituir a função não linear por uma série de Taylor. Este método permite gerar soluções periódicas aproximadas a partir de uma série de Fourier truncada. O MBH consiste na aproximação dos deslocamentos na fase permanente através da combinação de harmônicos, tal como dado pela expressão, equação 44:

$$u(t) = \sum_{n=0}^N [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] \quad (44)$$

Onde $u(t)$ é o vetor de deslocamento, A_n e B_n são os vetores das componentes das amplitudes modais no n -ésimo harmônico e N é o número de harmônicos usados na aproximação.

Considerando primeiramente a equação exata (equação 41), a qual pode ser modificada multiplicando os lados esquerdo e direito pelo termo $(1 + h^2)^2$, dessa maneira, eliminando os termos racionais, é possível escrever:

$$((1 + h^2)^2 + \mu h^2(1 + h^2)) h'' + 2\xi h'(1 + h^2)^2 + \left((1 + h^2)^2 + \mu h'^2 \right) h = \Omega^2 \hat{X}_0 \cos(\Omega \tau) (1 + h^2)^2 \quad (45)$$

Nesse formato, a equação 45 é usada na seguinte seção, juntamente com a equação 42 e a equação 43 para obter as expressões para a frequência oscilatória em função da amplitude de deslocamento.

5.2.1 Curvas *Backbone* de Resposta à Vibração Livre

A primeira investigação é realizada considerando o caso de movimento livre ($\dot{X}_0 = 0$). Supondo que a resposta pode ser escrita como uma função harmônica da forma $h(\tau) = H \cos(\Phi)$, onde $\Phi = \Omega\tau + \phi$. Calculando a primeira e segunda derivadas dessa expressão e substituindo os respectivos termos na Equação do Movimento Exata (equação 45), permite a obtenção de uma equação em termos de multiplicações de seno e cosseno, e as suas harmônicas de ordem mais elevada.

$$C_1 \cos(\Phi) + S_1 \sin(\Phi) + C_3 \cos(3\Phi) + S_3 \sin(3\Phi) + C_5 \cos(5\Phi) + S_5 \sin(5\Phi) = 0 \quad (46)$$

Ao desconsiderar as harmônicas de ordem superior, existem duas equações que são fatores de $\cos(\Phi)$ e $\sin(\Phi)$. Resolvendo a equação do co-seno ($C_1 = 0$) para Ω resulta na expressão para a frequência de oscilação em função do deslocamento relativo H , escrita como

$$\Omega = \left(\frac{5H^4 + 12H^2 + 8}{(5\mu + 5)H^4 + (4\mu + 12)H^2 + 8} \right)^{1/2} \quad (47)$$

Realizando um procedimento semelhante para a Equação do Movimento aproximada para Baixa Amplitude (equação 42), a frequência de oscilação em função do deslocamento H é dada por:

$$\Omega = \left(\frac{2}{2 + \mu H^2} \right)^{1/2} \quad (48)$$

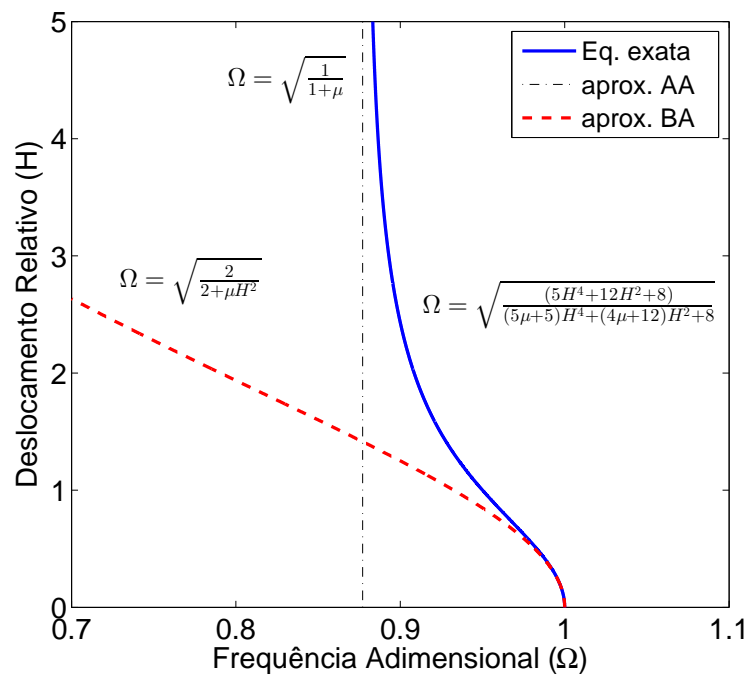
O último caso é para a Equação do Movimento aproximada para Alta Amplitude (equação 43), a qual é linear e tem uma frequência fixa, dada por:

$$\Omega = \left(\frac{1}{1 + \mu} \right)^{1/2} \quad (49)$$

As equações 47, 48 e 49 descrevem a frequência de oscilação em função da amplitude, conhecidas como curvas *Backbone*. Estas curvas foram plotadas para um intervalo de amplitudes de deslocamento e são mostradas na figura 33.

Como o visto na figura 33, as equações 47 e 48 adequam-se bem aos pequenos valores de deslocamento (menor que um). Para maiores valores de deslocamento, a equação 47 aproxima-se da equação 49, o que confirma as proposições adotadas na seção 5.1.1.

Figura 33 - Curvas *Backbone* da Frequência de oscilação Ω em função de H com $\mu = 0.3$.
 Equação do Movimento Exata (Linha Azul); Aproximação de Baixa Amplitude (Linha vermelha tracejada); Aproximação de Alta Amplitude (Linha traço ponto).
 Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear.

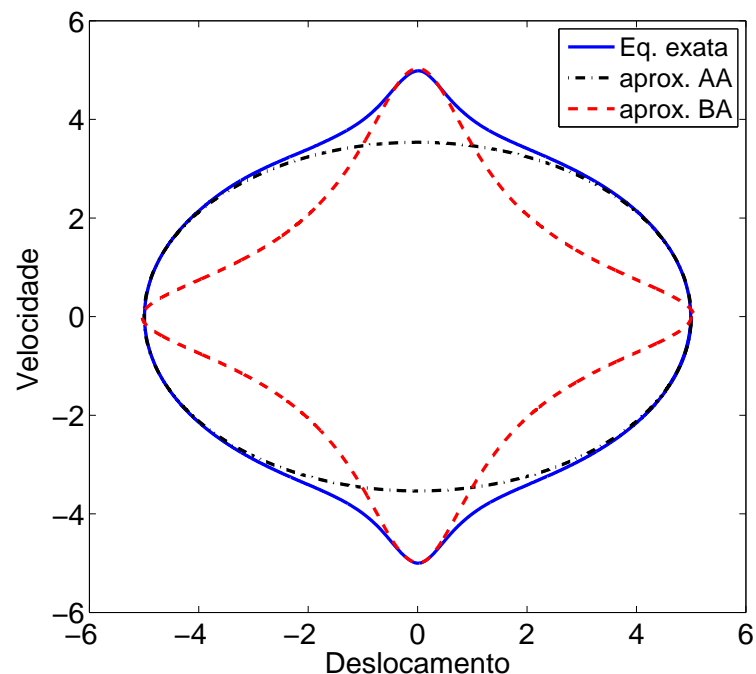


Fonte: Autor

5.2.2 Movimento Livre não amortecido - Plano de Fase

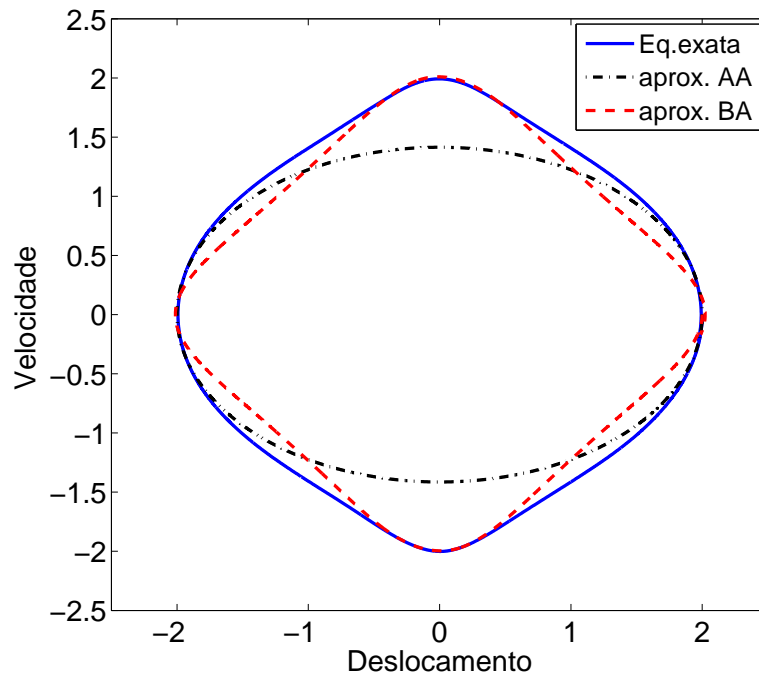
O plano de fase (deslocamento / velocidade) também ajuda a entender o comportamento descrito pelas equações 39, 42 e 43. Para isso, o elemento de amortecimento viscoso foi desconsiderado, as simulações numéricas consideraram condições iniciais e movimento livre. Os resultados são mostrados nas figuras 34, 35 e 36 para três diferentes condições iniciais, figura 34 $(h_0, h'_0) = (5, 0)$, figura 35 $(h_0, h'_0) = (2, 0)$, figura 36 $(h_0, h'_0) = (0.1, 0)$. Os resultados apresentados na figura 34 consideraram grande o deslocamento, e é possível notar a diferença entre as trajetórias no plano de fase obtido pela equação exata e a aproximação BA quando o deslocamento está distante do zero. Em contraste, a equação exata e a equação AA adequam-se bem, menos para valores de deslocamento que estejam próximo de zero. Ao reduzir a amplitude do deslocamento inicial, as trajetórias no plano de fase fornecidas pela equação exata são aproximadas dos resultados definidos pela aproximação BA, como o mostrado na sequência de figuras 35 e 36. A solução de baixa amplitude também atinge a amplitude máxima correta devido às condições iniciais dadas ao sistema.

Figura 34 - Trajetórias no plano de fase para a equação exata, aproximação BA e aproximação AA com condições iniciais $(h_0, h'_0) = (5, 0)$. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear.



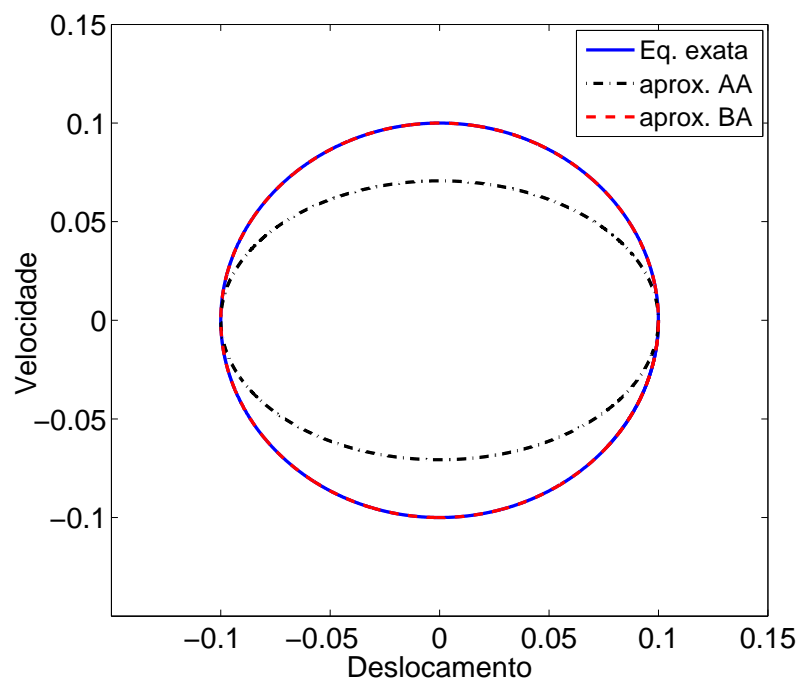
Fonte: Autor

Figura 35 - Trajetórias no plano de fase para a equação exata, aproximação *BA* e aproximação *AA* com condições iniciais $(h_0, h'_0) = (2, 0)$. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear.



Fonte: Autor

Figura 36 - Trajetórias no plano de fase para a equação exata, aproximação *BA* e aproximação *AA* com condições iniciais $(h_0, h'_0) = (0.1, 0)$. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear.



Fonte: Autor

5.2.3 Resposta em Frequência - Equação do Movimento Aproximada para Baixa Amplitude

A proposta desta seção é descrever o comportamento do sistema em relação à excitação harmônica. A análise inicial é descrita usando a aproximação *BA*. Normalmente, neste tipo de análise, a excitação é da forma $\Omega^2 \hat{X}_0 \cos(\Omega\tau)$ descrita na equação 42, assume-se que o movimento é da forma $h(\tau) = H \cos \Phi$, com $\Phi = \Omega\tau + \phi$. Substituindo esta expressão na equação 41 e mantendo apenas os termos de frequência fundamentais em cosseno e seno, obtém-se:

$$\left(1 - \Omega^2 \left(1 + \frac{\mu H^2}{2}\right)\right) H \cos(\Omega\tau + \phi) - 2\xi \Omega H \sin(\Omega\tau + \phi) = \Omega^2 \hat{X}_0 \cos(\Omega\tau) \quad (50)$$

Expandindo as funções trigonométricas, de modo que os termos do lado direito e esquerdo são balanceados, a equação 50 é dividida em duas equações em termos de seno e cosseno, como

$$\left(1 - \Omega^2 \left(1 + \frac{\mu H^2}{2}\right)\right) H = \Omega^2 \hat{X}_0 \cos(\phi) \quad (51)$$

$$-2\xi \Omega H = \Omega^2 \hat{X}_0 \sin(\phi) \quad (52)$$

No caso de movimento livre ($\hat{X}_0 = 0$), usando a equação 51 e resolvendo ela para Ω , é possível obter a curva *Backbone* para a frequência de ressonância em função da amplitude do deslocamento relativo (H). A resposta à excitação harmônica de base é obtida somando o quadrado das equações 51 e 52, que resulta em uma equação polinomial em termos de H

$$\frac{\mu^2 \Omega^4}{4} H^6 + \mu \Omega^2 (\Omega^2 - 1) H^4 + (4\xi^2 \Omega^2 + (1 - \Omega^2)^2) H^2 - \Omega^4 \hat{X}_0^2 = 0 \quad (53)$$

ou em termos de Ω ,

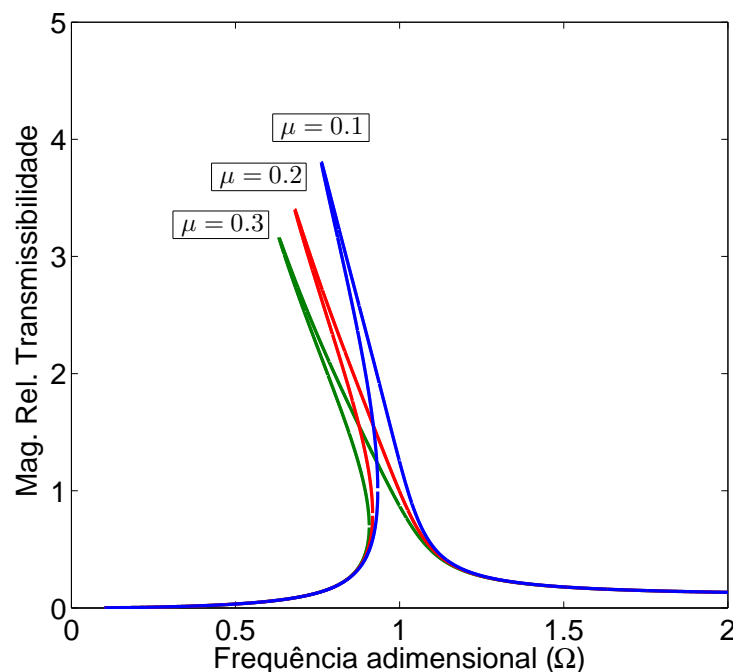
$$\left(H^2 \left(1 + \frac{\mu H^2}{2}\right)^2 - \hat{X}_0^2\right) \Omega^4 + \left(-2H^2 \left(1 + \frac{\mu H^2}{2}\right) + 4\xi^2 + H^2\right) \Omega^2 + H^2 = 0 \quad (54)$$

A equação 53 é uma equação do sexto grau em H , mas pode ser convertida em uma equação cúbica, possibilitando obter as três raízes que podem ser de interesse. Da mesma forma, a equação 54 é uma equação bi-quadrática em Ω e pode ser resolvida para obter as raízes de interesse.

5.2.4 Resultados obtidos usando o Método do Balanço Harmônico - Equação do Movimento Aproximada para Baixa Amplitude

A magnitude de H foi obtida resolvendo a equação polinomial (equação 53) para valores de Ω , usando $\xi = 0.1$ e $\hat{X}_0 = 0.1$. Três valores de razão de inércia μ foram comparados e são mostrados na figura 37. Esta figura ilustra efeito semelhante a uma mola do tipo *softening* (amolecedora), em que a frequência de ressonância é reduzida com o aumento da amplitude do movimento, sendo que, essa redução deve-se à influência da razão de inércia.

Figura 37 - Magnitude da transmissibilidade relativa em função da frequência variando a razão de inércia $\mu = 0.1, 0.2, 0.3$, com $\xi = 0.01$ e $\hat{X}_0 = 0.1$. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear - aproximação BA.



Fonte: Autor

O comportamento detalhado da transmissibilidade relativa é mostrado na figura 38. As assíntotas de baixa e alta frequência são iguais às assíntotas do sistema linear. A curva *Backbone* é calculada usando a equação 48.

Essa figura corresponde a um diagrama de bifurcação onde a linha sólida azul corresponde a um movimento periódico estável e a parte interna da curva (linha tracejada vermelha) representa um movimento periódico instável.

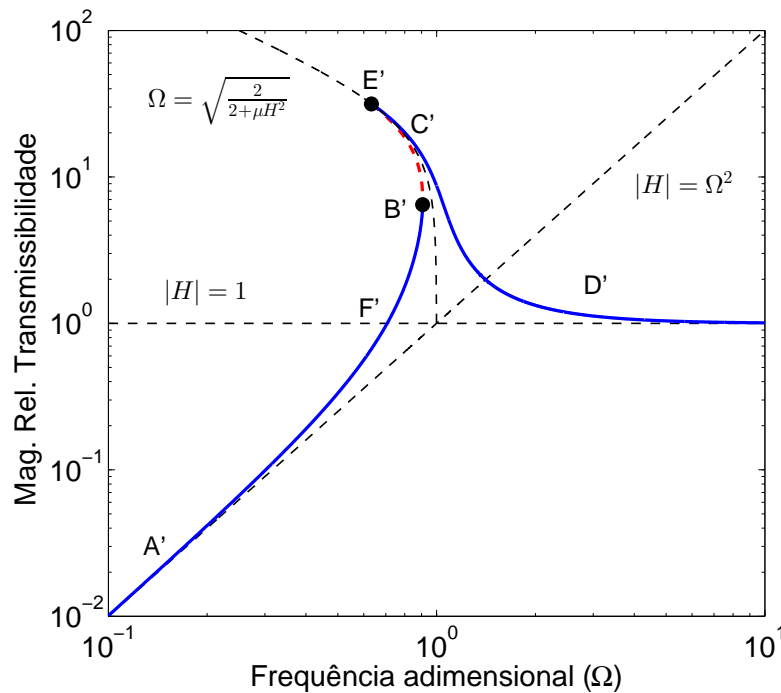
O parâmetro de controle Ω é gradativamente aumentado iniciado em A' , seguindo a curva $A'F'B'$ até atingir um valor crítico $\Omega_{B'}$. Em $\Omega = \Omega_{B'}$ ocorre uma bifurcação do tipo Sela-nó, identificada como Bifurcação B' . Em B' , o valor da Magnitude relativa da transmissibilidade sofre uma descontinuidade, sendo chamado de bifurcação descontínua ou catastrófica onde ocorre

um salto para cima, do ramo estável A'F'B', para o outro ramo estável E'C'D'. Assim que o valor de Ω continua a ser aumentado acima do valor de B' e a magnitude da transmissibilidade relativa segue a curva C'D'.

Se iniciar a diminuição gradativa do parâmetro de controle Ω a partir de D', e seguindo a curva D'C'E' até atingir o valor crítico $\Omega_{E'}$, localmente no ponto E', ocorre uma bifurcação do tipo Sela-nó, identificada como Bifurcação E' onde o valor da Magnitude relativa da transmissibilidade sofre uma outra descontinuidade e ocorre um salto para baixo, partindo do ponto E' para o ponto F'. Diminuindo o valor de Ω abaixo do valor de F' a magnitude da transmissibilidade relativa segue a curva F'A'.

Para $\Omega < \Omega_{E'}$ e $\Omega > \Omega_{B'}$, a figura 38 apresenta apenas um ponto de estabilidade. No intervalo $\Omega_{E'} < \Omega < \Omega_{B'}$, a figura 38 apresenta dois ramos de estabilidade coexistindo. Este intervalo é chamado de intervalo de biestabilidade.

Figura 38 - Magnitude relativa da transmissibilidade em função da frequência e algumas definições de suas características, com $\hat{X}_0 = 0.1$, $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear - aproximação BA.



Fonte: Autor

Os dois pontos pretos B' e E' são, respectivamente, onde ocorre as bifurcações e são chamados de pontos de tangentes verticais ou pontos limites. A frequência onde ocorre a bifurcação B' pode ser obtida a partir das soluções da equação 54, fazendo $d\Omega/dH = 0$ e resolvendo para $\Omega_{B'}$, para obter

$$\Omega_{B'} = \frac{2^{1/2} \mu^{1/3} \hat{X}_0^{1/6}}{\left(3\mu \hat{X}_0 + 2\mu^{2/3} \hat{X}_0^{1/3}\right)^{1/2}} \quad (55)$$

A respectiva magnitude relativa da bifurcação B' é dada por

$$|H_{B'}| = \left(\frac{\hat{X}_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (56)$$

Obter uma expressão para a frequência onde ocorre a bifurcação E' parece ser mais difícil usando a mesma estratégia, uma vez que essa produz uma expressão analítica relativamente longa. Assim, a partir das soluções da equação 53 foi obtida uma aproximação, fazendo $dH/d\Omega = 0$

$$\Omega_{E'} = \frac{1}{\hat{X}_0} \sqrt{\frac{2\xi}{\mu} \left(\sqrt{2\mu} \hat{X}_0 - 2\xi\right)} \quad (57)$$

A equação 57 não é exatamente a parte da resposta em frequência onde a inclinação é vertical (90 graus), em vez disso, ela corresponde ao pico de ressonância em que a inclinação é zero. A respectiva magnitude para a frequência onde ocorre a bifurcação E' é também uma longa expressão analítica que depende do valor do amortecimento e, por razões práticas, não é apresentada aqui. No entanto, ela pode ser obtida substituindo a expressão para $\Omega_{E'}$ na solução da equação 53.

5.2.5 Deslocamento Absoluto

Até agora, a análise da transmissibilidade baseou-se no estudo do deslocamento relativo, mas na prática, é interessante considerar a transmissibilidade do deslocamento absoluto. A transmissibilidade do deslocamento absoluto pode ser calculada considerando a magnitude e a fase da transmissibilidade relativa, dada por

$$X = \sqrt{H^2 + \hat{X}_0^2 + 2H\hat{X}_0 \cos(\phi)} \quad (58)$$

$$\phi = \text{atan} \left(-\frac{4\xi\Omega}{2 - \Omega^2(2 + \mu H^2)} \right) \quad (59)$$

Usando a equação 58, o deslocamento absoluto foi representado graficamente nas figuras 39 e 40 e comparado com dois outros sistemas lineares. Nessas figuras, a linha vermelha fina corresponde à transmissibilidade do deslocamento absoluto do sistema linear massa-mola-amortecedor; a linha tracejada preta, representa a transmissibilidade do deslocamento do sistema linear massa-mola-amortecedor-*Inerter* (mostrado na figura 32) e a linha azul grossa representa os resultados obtidos usando a equação 58, referente ao sistema massa-mola amortecedor-*Inerter* em arranjo geométrico não linear. A transmissibilidade dos sistemas lineares é dada no Apêndice B.1.

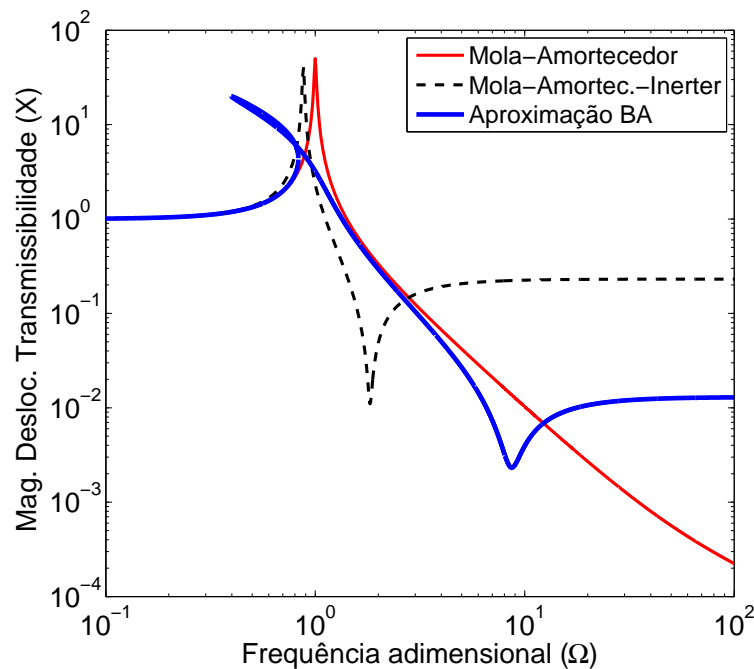
A figura 39 apresenta a comparação das magnitudes de deslocamento absoluto com excitação de base para o sistema linear massa-mola-amortecedor, o sistema linear massa-mola-amortecedor-*Inerter* e o sistema proposto com *Inerter* em arranjo não linear, considerando $\xi = 0.01$, $\mu = 0.3$ e $\hat{X}_0 = 0.3$.

Ambos os sistemas, tanto o com arranjo geométrico não linear e o linear, apresentaram aproximadamente as mesmas magnitudes relativas de transmissibilidade na região da anti-ressonância.

Ambos os sistemas com *Inerter* apresentaram vantagem de isolamento em relação ao modelo massa-mola-amortecedor na anti-ressonância. Sendo que o sistema linear com *Inerter* isolou aproximadamente 42% a mais que o modelo massa-mola-amortecedor na frequência adimensional da anti-ressonância aproximada $\Omega = 2$.

Em alta frequência, em frequências acima de aproximadamente $\Omega = 100$, o modelo com arranjo geométrico não linear apresentou como vantagem, aproximadamente 22% a mais de isolamento da magnitude do deslocamento de transmissibilidade do que o sistema linear com o *Inerter*.

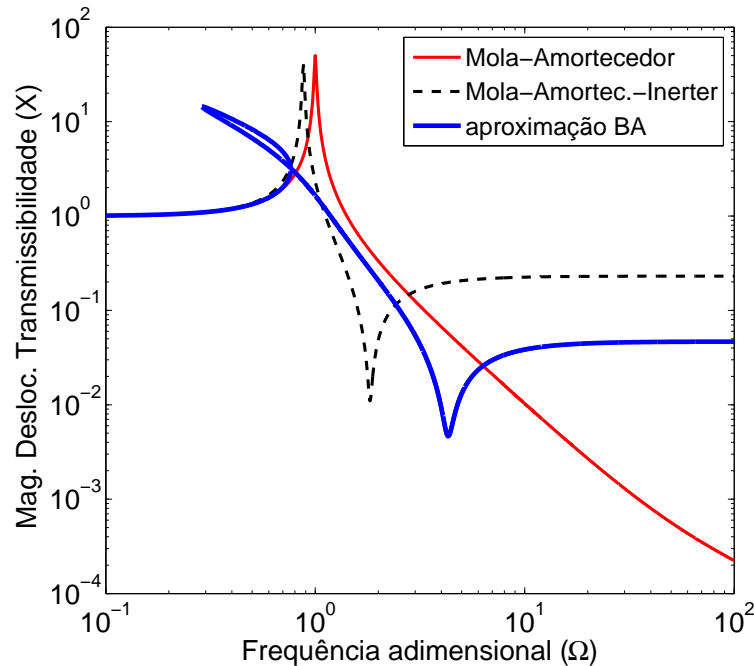
Figura 39 - Comparação das magnitudes de deslocamento absoluto com excitação de base, entre o sistema linear massa-mola-amortecedor (linha vermelha), o sistema linear massa-mola-amortecedor-*Inerter* (linha tracejada preta) e o sistema proposto com *Inerter* em arranjo não linear considerando a aproximação de baixa amplitude (linha grossa azul), com $\hat{X}_0 = 0.3$.



Fonte: Autor

A figura 40 apresenta a comparação das magnitudes de deslocamento absoluto com excitação de base para o sistema linear massa-mola-amortecedor, o sistema linear massa-mola-amortecedor-*Inerter* e o sistema proposto com *Inerter* em arranjo não linear, considerando $\xi = 0.01$, $\mu = 0.3$ e $\hat{X}_0 = 0.6$. Com o aumento da amplitude de deslocamento adimensional da excitação de $\hat{X}_0 = 0,3$ para $\hat{X}_0 = 0,6$, a frequência adimensional da anti-ressonância do modelo com *Inerter* em arranjo geométrico não linear diminui, deslocou-se para a esquerda de $\Omega = 9$ para aproximadamente $\Omega = 4$.

Figura 40 - Comparação das magnitudes de deslocamento absoluto com excitação de base, entre o sistema linear massa-mola-amortecedor (linha vermelha), o sistema linear massa-mola-amortecedor-*Inerter* (linha tracejada preta) e o sistema proposto com *Inerter* em arranjo não linear considerando a aproximação de baixa amplitude (linha grossa azul), com $\hat{X}_0 = 0.6$.



Fonte: Autor

A diferença entre as figuras 39 e 40 é a amplitude do deslocamento da base \hat{X}_0 . As figuras 39 e 40 mostram a resposta em frequência, comparando o sistema proposto com *Inerter* em arranjo não linear com o sistema linear massa-mola-amortecedor e o sistema linear massa-mola-amortecedor com *Inerter* em uma configuração vertical.

Apesar de serem mostrados os picos de ressonância nas figuras 39 e 40 a aproximação de baixa amplitude não deve ser utilizada para representar a transmissibilidade de deslocamento no intervalo de frequência próximo a ressonância ou para valores de amplitude de Deslocamento Relativo (H) maiores que aproximadamente 1, como o mostrado na curva Backbone na figura 33. Na frequência de ressonância a amplitude do deslocamento é alta, assim, a aproximação de baixa amplitude apresenta uma resposta que diverge da equação do movimento exata.

A anti-ressonância na resposta em frequência é uma característica dos isoladores que possuem um elemento do tipo *Inerter*. A assíntota de alta frequência é uma desvantagem desse elemento. Para o sistema em estudo, com o *Inerter* em posição horizontal, a anti-ressonância é deslocada para uma frequência mais alta, e a principal vantagem do arranjo geométrico não linear é que a resposta em altas frequências é reduzida para amplitudes mais baixas.

5.2.6 Resultados obtidos usando o Método do Balanço Harmônico - Equação do Movimento Exata

Até então, a transmissibilidade do sistema descrito pela equação aproximada poderia ser obtida usando o método do Balanço Harmônico, resultando em expressões analíticas como as descritas pelas equações 51 e 52. Ao considerar a equação do movimento exata descrita pela equação 45, torna-se difícil obter expressões analíticas que definem a transmissibilidade em função de frequência. Para resolver essa questão, o procedimento para obter a função de transmissibilidade para o sistema exato também foi desenvolvido considerando que $h(\tau) = H \cos(\Phi)$. Substituindo esse termo na equação 45, resulta na expressão em termos dos multiplicadores $\cos(\Omega\tau)$ e $\sin(\Omega\tau)$ e harmônicas de ordem superior. Desconsiderando as harmônicas de ordem superior, resulta-se no conjunto de equações não lineares:

$$P_1 \cos(\phi) + P_2 \sin(\phi) + P_3 \cos(2\phi) = 0 \quad (60)$$

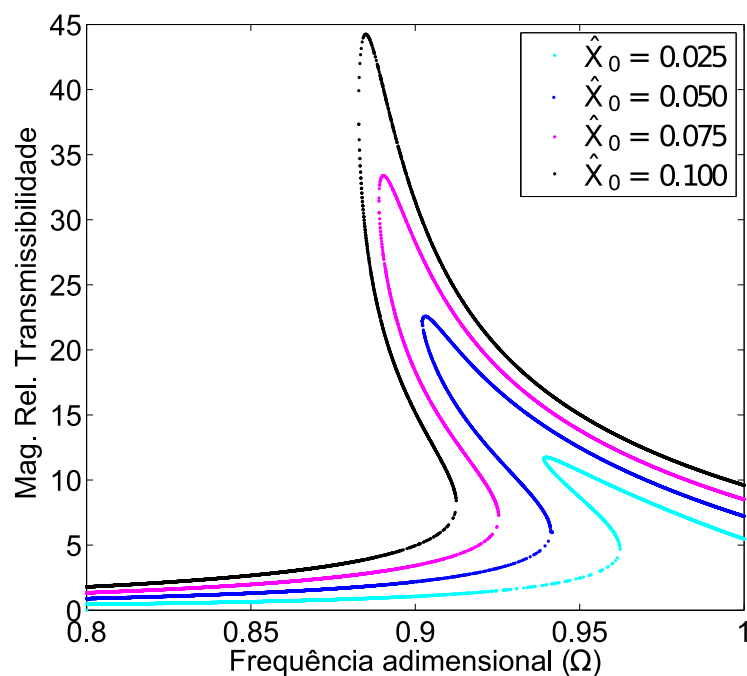
$$P_2 \cos(\phi) - P_1 \sin(\phi) - P_3 \sin(2\phi) = 0 \quad (61)$$

Na qual os termos P_1, P_2, P_3 são funções de H e são descritas no Apêndice A. A equação 60 e 61 pode ser resolvida numericamente com as incógnitas H e ϕ para cada frequência. Ao resolver as equações 60 e 61 numericamente, há a necessidade de uma suposição inicial para H e ϕ . Para alguns intervalos de frequência, pode existir mais de uma solução, o que torna necessário resolver essas equações para diferentes suposições iniciais. Essas equações foram resolvidas usando a biblioteca *Python-Scipy* (JONES et al., 2001–) e a função *fsolve*, que consiste em uma modificação do Método Híbrido de Powell para encontrar as raízes das N-equações não lineares. A figura 41 mostra a transmissibilidade relativa obtida usando este procedimento para diferentes valores de deslocamento da base \hat{X}_0 . Os valores dos deslocamentos de base foram adotados, onde, $\hat{X}_0 = 0.025, 0.05, 0.075, 0.1$ e os respectivos picos de ressonância movem-se do lado direito para o lado esquerdo à medida que o deslocamento da base aumenta. Esse comportamento é semelhante à linha que define a curva *Backbone* definida na equação 47 e mostrada na figura 33.

As figuras 42 e 43 mostram uma comparação da transmissibilidade para o sistema proposto com o *Inerter* em arranjo geométrico não linear considerando a equação exata do movimento e comparando-o com o sistema linear massa-mola-amortecedor e o sistema linear massa-mola-amortecedor e *Inerter*. A diferença entre as figuras 42 and 43 é a amplitude do deslocamento da base \hat{X}_0 , respectivamente, $\hat{X}_0 = 0.3$ e $\hat{X}_0 = 0.6$.

Na figura 42 é possível observar que a transmissibilidade do sistema proposto possui algumas vantagens para intervalos de frequência específicos em relação aos outros dois sistemas. Ambos os sistemas com *Inerter* apresentaram aproximadamente a mesma magnitude relativa

Figura 41 - Comparação da transmissibilidade relativa considerando o modelo com *Inerter* em arranjo geométrico não linear e a equação do movimento exata.



de transmissibilidade na região da anti-ressonância.

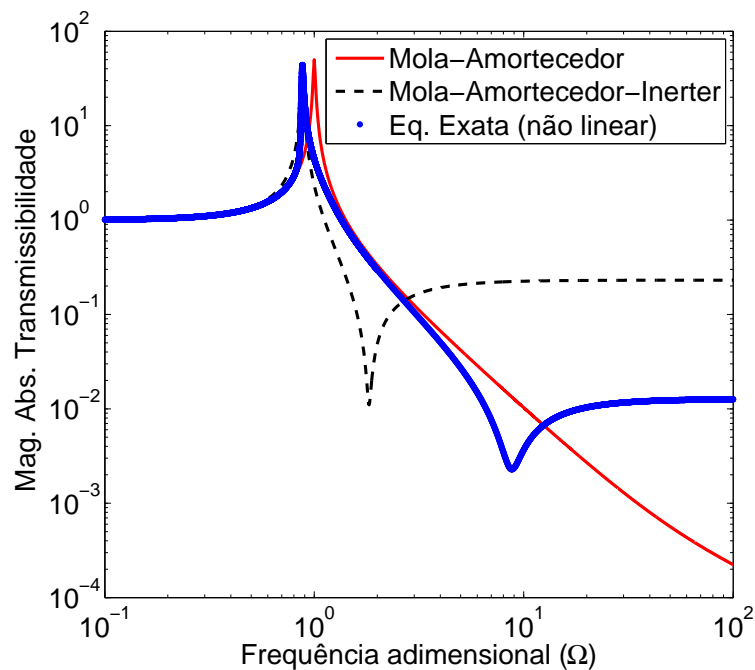
Ambos os sistemas com *Inerter* apresentaram vantagem de isolamento em relação ao modelo massa-mola-amortecedor na anti-ressonância. Sendo que o sistema linear com *Inerter* isolou aproximadamente 36% a mais que o modelo massa-mola-amortecedor na frequência adimensional da anti-ressonância aproximada $\Omega = 2$.

Em alta frequência, acima de aproximadamente $\Omega = 100$, o modelo com arranjo geométrico não linear apresentou como vantagem, 22% a mais de isolamento da magnitude do deslocamento de transmissibilidade do que o sistema linear com o *Inerter*.

A magnitude absoluta de transmissibilidade em alta frequência do sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear apresenta benefícios, aproximadamente 22% a mais de isolamento do que o sistema linear massa-mola-amortecedor-*Inerter*. Os resultados apresentados na figura 43 apresentam um comportamento semelhante ao da figura 42, com uma ligeira alteração na frequência da anti-ressonância, a qual diminuiu, deslocou-se para a esquerda.

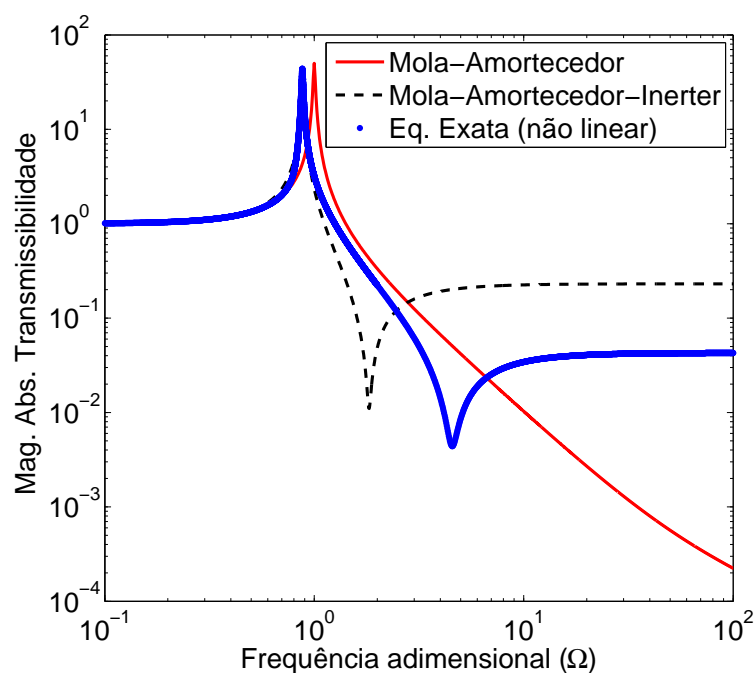
Os resultados dessas figuras mostram que há vantagens em usar o *Inerter* em configurações horizontais, arranjo geométrico não linear, dependendo da amplitude da excitação de base e da faixa de frequência de interesse, principalmente quando se deseja diminuir a magnitude absoluta de transmissibilidade em alta frequência.

Figura 42 - Comparação da magnitude absoluta de transmissibilidade considerando a equação do movimento exata do sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear, com o sistema linear massa-mola-amortecedor e o sistema linear massa-mola-amortecedor-*Inerter*, com $X_0 = 0.3$, $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$.



Fonte: Autor

Figura 43 - Comparação da magnitude absoluta de transmissibilidade considerando a equação do movimento exata do sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear, com o sistema linear massa-mola-amortecedor e o sistema linear massa-mola-amortecedor-*Inerter*, com $X_0 = 0.6$, $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$.



Fonte: Autor

5.3 Estabilidade da Resposta Periódica

5.3.1 Estabilidade da Resposta Periódica - Equação do Movimento aproximada para Baixa Amplitude

As condições que levam a saltos na resposta em frequência são definidas pelas frequências onde ocorrem as bifurcações (bifurcação I' e a bifurcação J' na figura 44) e são importantes na análise de sistemas não lineares, uma vez que estas condições produzem comportamentos indesejados em isoladores de vibrações. Os saltos de um ramo estável para outro causam vibrações com grandes amplitudes de deslocamento podendo causar falhas mecânicas ou estruturais do mecanismo isolador, manutenção frequente e dispendiosa ou até mesmo danos e desconfortos para o homem. A análise das regiões de instabilidade pode ser obtida considerando a perturbação na resposta periódica, definida por

$$h(\tau) = u(\tau) + e(\tau) = U \cos(\Omega\tau) + e(\tau) \quad (62)$$

Onde u é uma solução da equação diferencial e e é um pequeno parâmetro de perturbação. Substituindo a equação 62 para o caso de movimento livre na equação 42 fornece

$$\left(1 + \mu(u + e)^2\right)(u'' + e'') + 2\xi(u' + e') + \left(1 + \mu(u' + e')^2\right)(u + e) = 0 \quad (63)$$

Expandindo a equação 63, e lembrando que $u(\tau)$ é uma solução

$$(1 + \mu u^2)u'' + 2\xi u' + (1 + \mu u'^2)u = 0 \quad (64)$$

Substituindo a equação 64 na equação 63, resulta em

$$(1 + \mu u^2)e'' + \mu(2ue + e^2)(u'' + e'') + 2\xi e' + (1 + \mu u'^2)e + \mu(2u'e' + e'^2)(u + e) = 0 \quad (65)$$

Assumindo que $e(\tau) = \mathbf{A} \sin(\Omega\tau) + \mathbf{B} \cos(\Omega\tau)$ e, desde que e é um parâmetro pequeno, os termos de ordem superior podem ser desprezados ($\mathbf{A}^2, \mathbf{B}^2, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{AB}^2, \dots$), possibilitando reescrever a equação 65 como

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - \Omega^2 \left(1 + \frac{3}{2}\mu U^2\right)\right) \mathbf{A} + 2\xi \Omega \mathbf{B} \right] \cos(\Omega\tau) + \\ & \left[\left(1 - \Omega^2 \left(1 + \frac{1}{2}\mu U^2\right)\right) \mathbf{B} - 2\xi \Omega \mathbf{A} \right] \sin(\Omega\tau) = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

Os parâmetros \mathbf{A} e \mathbf{B} são pequenos, mas não nulos, portanto, a equação 66 pode ser reorganizada em duas equações em termos de termos seno e co-seno e colocada sob a forma de matriz,

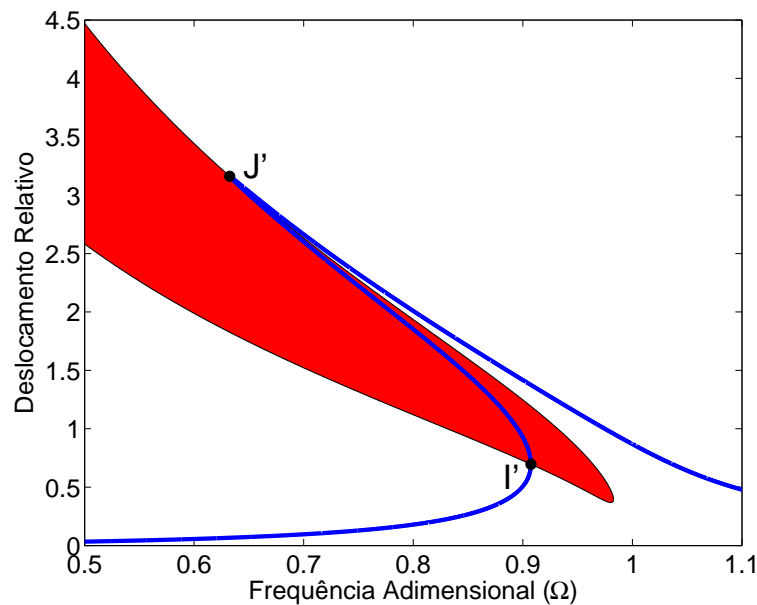
$$\begin{bmatrix} 1 - \Omega^2 (1 + \frac{3}{2}\mu U^2) & 2\xi\Omega \\ -2\xi\Omega & 1 - \Omega^2 (1 + \frac{1}{2}\mu U^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Para não-zero \mathbf{A} e \mathbf{B} , o determinante da equação 67 fornece a equação que define as regiões de instabilidade

$$\frac{3\mu^2\Omega^4}{4}U^4 - 2\mu\Omega^2(1 - \Omega^2)U^2 + 4\xi^2\Omega^2 + (1 - \Omega^2)^2 = 0 \quad (68)$$

Entre as quatro soluções da equação 68 em termos de U , duas são de interesse, e podem ser plotadas em função da frequência mostrada na figura 44. As áreas vermelhas definem as regiões onde o sistema está sujeito a saltos (região instável).

Figura 44 - Deslocamento relativo e região de estabilidade obtida pelo método do Balanço Harmônico, com $\hat{X}_0 = 0.1$, $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear - aproximação *BA*.



Fonte: Autor

5.3.2 Estabilidade da Resposta Periódica - Equação do Movimento Exata

Realizando um procedimento similar para o modelo exato, o equivalente da equação 68 é dado por

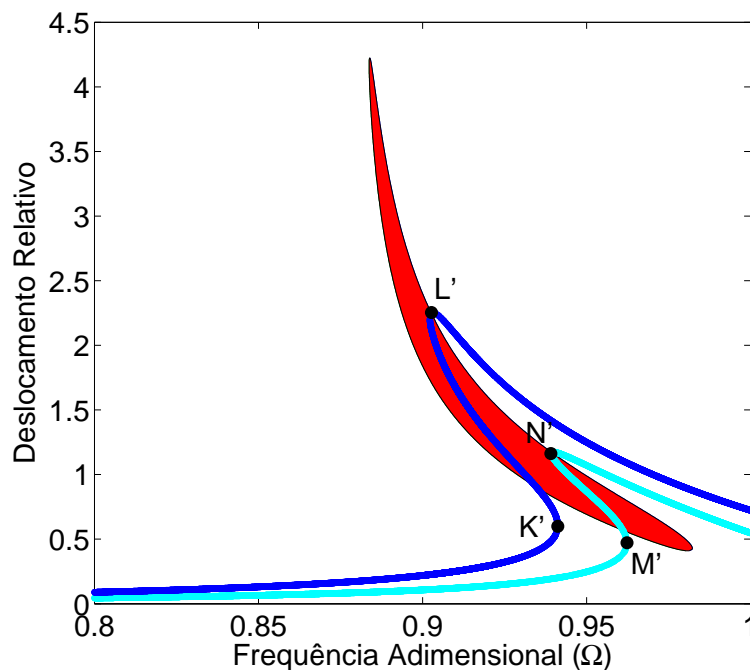
$$T_8 U^8 + T_6 U^6 + T_4 U^4 + T_2 U^2 + T_0 = 0 \quad (69)$$

Essa equação também pode ser escrita como uma função de Ω como

$$W_4 \Omega^4 + W_2 \Omega^2 + W_0 = 0 \quad (70)$$

E os termos T_i e W_i são dados no Apêndice B. Resolver qualquer uma das equações 69 ou 70 permite obter a região de instabilidade da resposta periódica. No caso da equação exata do sistema, as regiões de instabilidade são plotadas na figura 45

Figura 45 - Deslocamento relativo e região de estabilidade obtida pelo método do Balanço Harmônico, com $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$. Foram utilizados dois valores de deslocamento de base $\hat{X}_0 = 0.05, 0.025$. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear - equação exata.



Fonte: Autor

É possível observar na figura 45, as regiões de instabilidade que diferem dos resultados mostrados na figura 44. Para grandes valores de deslocamento de base, as curvas não atravessam as regiões vermelhas e o sistema não apresenta saltos. No caso das duas curvas mostradas nesta figura, as frequências onde ocorrem a bifurcação L' e a bifurcação N' coincidem com a parte

superior da região de instabilidade. As frequências onde ocorrem a bifurcação K' e a bifurcação M' não são coincidentes, principalmente devido às aproximações descritas na seção 4.

5.4 Análise Numérica - Equação do Movimento Exata

Nas seções anteriores, foi utilizado o método do Balanço Harmônico para obter as soluções das equações não lineares e foi considerada a equação do movimento exata, assim como as equações do movimento aproximadas para alta e baixa amplitude. Nesta seção, uma análise detalhada é realizada usando integração numérica considerando a Equação do Movimento Exata. O método de integração numérica escolhido foi o método explícito de Runge-Kutta-Fehlberg (4,5). Em alguns casos, foi usada a computação paralela usando o módulo de multiprocessamento (MCKERNS et al., 2012). Foi utilizada a equação do movimento exata, sem aproximações, que pode ser escrita como:

$$\left(1 + \mu \frac{h^2}{(1+h^2)}\right) h'' + 2\xi h' + \left(1 + \mu \frac{h'^2}{(1+h^2)^2}\right) h = \Omega^2 \hat{X}_0 \cos(\Omega\tau) \quad (71)$$

A escolha usual das variáveis de estado como $q_1 = h$ e $q_2 = h'$, e as equações de estado são dadas por:

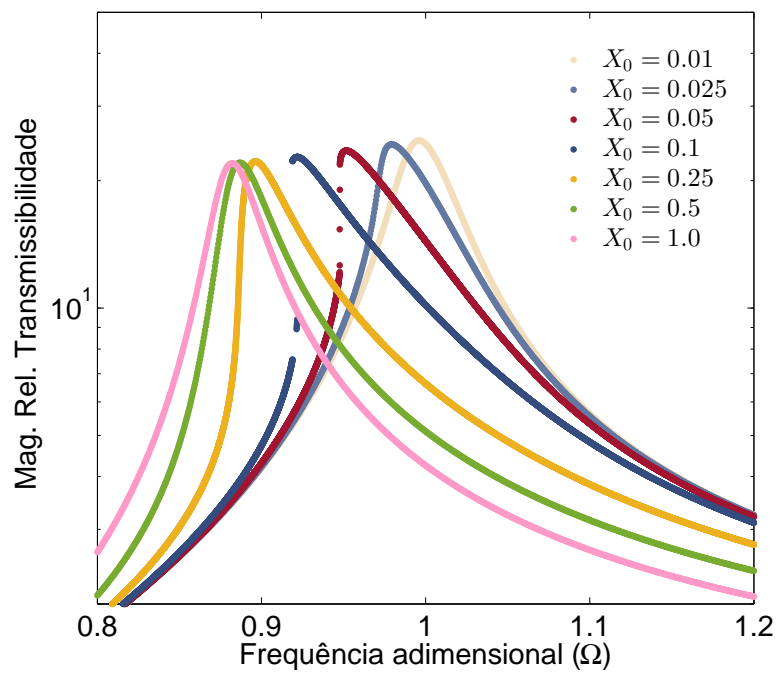
$$q_1' = q_2 \quad (72)$$

$$q_2' = - \left(1 + \mu \frac{h^2}{(1+h^2)}\right)^{-1} \left(2\xi h' + \left(1 + \mu \frac{h'^2}{(1+h^2)^2}\right) h - \Omega^2 \hat{X}_0 \cos(\Omega\tau)\right) \quad (73)$$

A primeira investigação foi realizada pela integração das equações 72 e 73 na faixa de frequência $\Omega = [0.8, 1.2]$ usando pequenos passos incrementais na frequência. A integração numérica foi realizada com o sistema inicialmente em repouso e com intervalo de tempo $\tau = 2000$. Apenas um pequeno intervalo no final de cada histórico no tempo foi considerado com a finalidade de evitar a influência do comportamento transitório. Este procedimento foi repetido para diferentes valores de deslocamento da base \hat{X}_0 e é mostrado na figura 46.

É possível observar na figura 46 que aumentando a amplitude do movimento da base, desloca o pico de ressonância para a esquerda no eixo da frequência. Existem valores de deslocamento da base que produzem descontinuidades na resposta em frequência, bifurcações, por exemplo, quando $\hat{X}_0 = 0.1$. Ao aumentar ainda mais o deslocamento da base, as descontinuidades tendem a desaparecer e o pico de ressonância tende a um valor fixo que está de acordo com o descrito nas seções anteriores.

Figura 46 - Bifurcação - Magnitude relativa de transmissibilidade $|H/\hat{X}_0|$ para diferentes valores de deslocamento de base (X_0), considerando integração numérica, com $\mu = 0.3$ e $\xi = 0.02$. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear - equação exata.

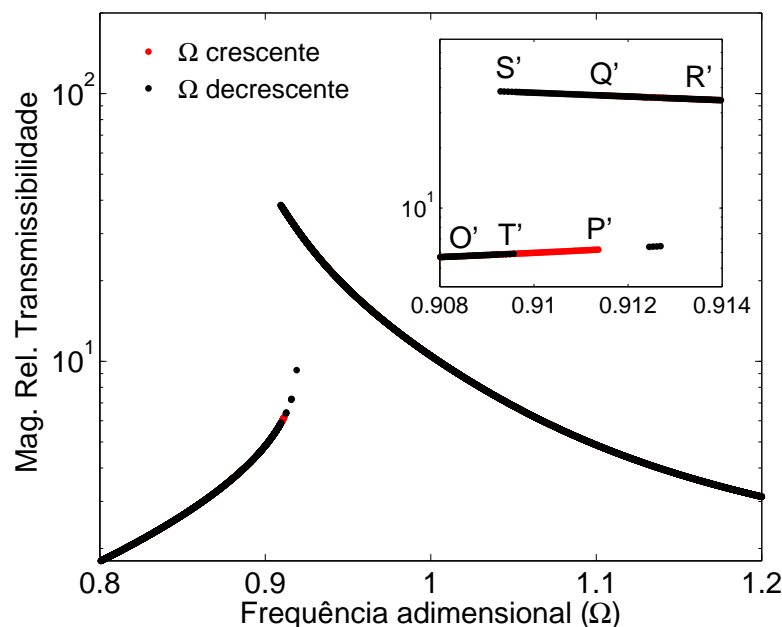


Fonte: Autor

5.4.1 Evolução das bacias de atração - Equação do Movimento Exata

Na seção anterior, foi mostrado que há um intervalo de frequência adimensional Ω onde dois ramos de estabilidade coexistem. Nesta seção, para $\Omega < \Omega_{S'}$, a figura 47 apresenta apenas o ramo de estabilidade O'T'P' (baixa amplitude) e para $\Omega > \Omega_{P'}$, apresenta apenas o ramo de estabilidade S'Q'R' (alta amplitude).

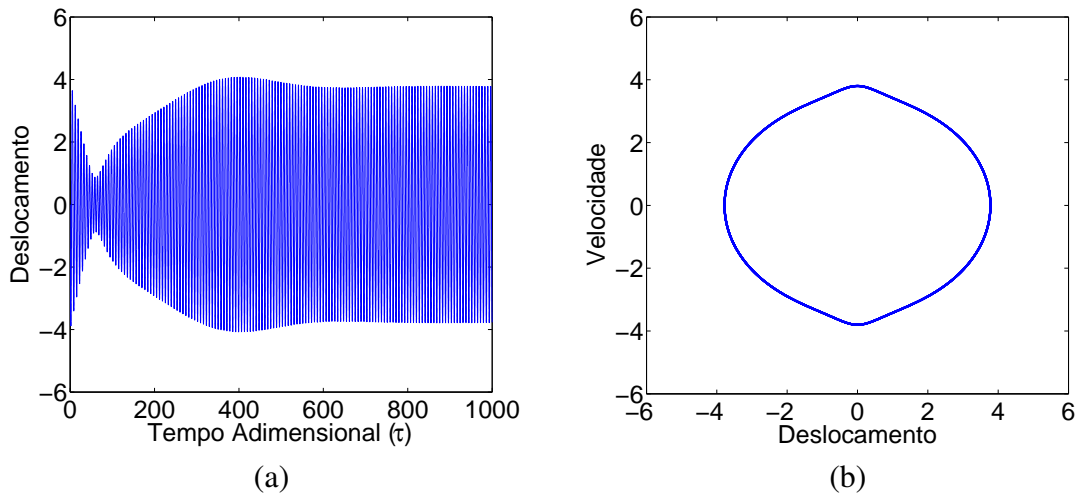
Figura 47 - Bifurcação - Magnitude da transmissibilidade relativa ($|H/\hat{X}_0|$) obtido por varredura de frequência. Os resultados foram obtidos através da integração numérica, para $X_0 = 0.1$, $\mu = 0.3$ e $\xi = 0.01$. O detalhe mostra o intervalo de frequência com soluções co-existent. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear - equação exata.



Fonte: Autor

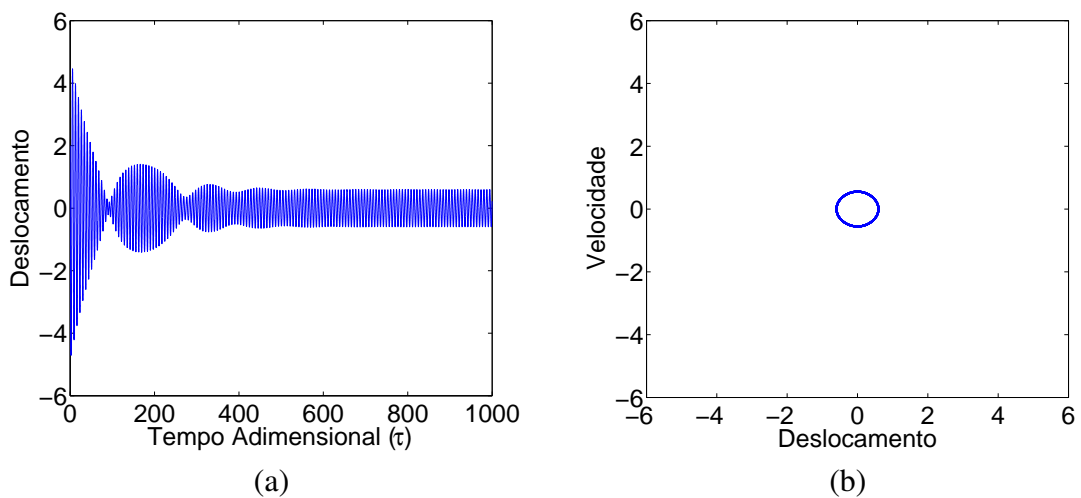
No intervalo $\Omega_{S'} < \Omega < \Omega_{P'}$, chamado de intervalo de biestabilidade, apresenta os dois ramos de estabilidade coexistindo, e diferentes, sendo que nesse intervalo de análise o sistema possui um ciclo-limite de alta amplitude (figura 48) e o outro ciclo-limite de baixa amplitude (figura 49) que ocorrem na frequência adimensional $\Omega = 0.91$, ambos de período-1. Nessa frequência adimensional, $\Omega = 0.91$, as condições iniciais de deslocamento e velocidade determinam se o sistema se estabilizará em um ciclo de alta ou de baixa amplitude.

Figura 48 - (a) Histórico no tempo e (b) Plano de Fase no Estado-Estacionário para a frequência de excitação $\Omega = 0.91$ com $h_0 = 0$ e $h'_0 = -4.0$. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear - equação exata.



Fonte: Autor

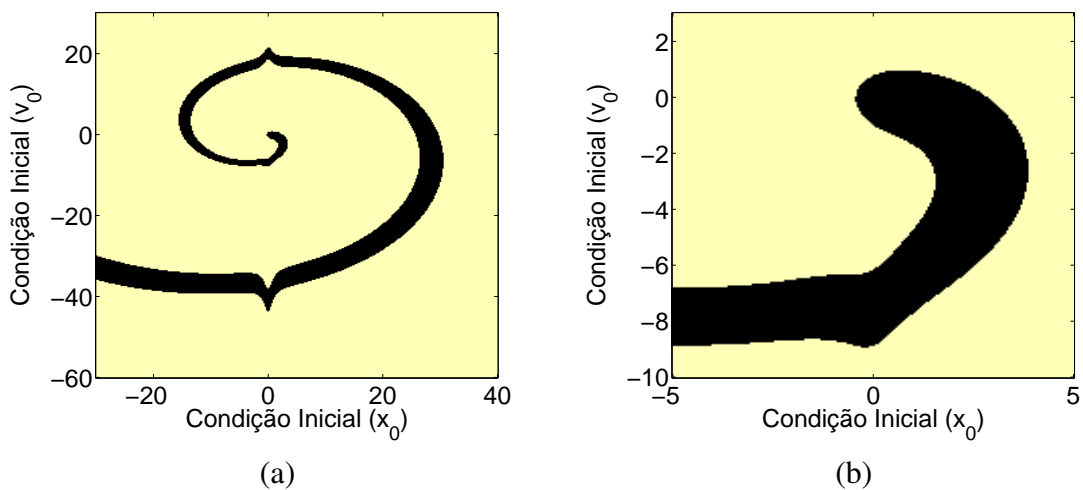
Figura 49 - (a) Histórico no tempo e (b) Plano de Fase no Estado-Estacionário para a frequência de excitação $\Omega = 0.91$ com $h_0 = 2$ e $h'_0 = -4.0$. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear - equação exata.



Fonte: Autor

As bacias de atração desses dois atratores periódicos foram calculadas e são mostradas na figura 50-a e na figura 50-b, em que a área amarela é a bacia do ciclo-limite de alta amplitude, e a área escura é a bacia do ciclo limite de pequena amplitude. A figura 51 mostra a evolução das bacias assim como a razão de inércia é variada μ , mostrando que quanto maior é μ resulta em uma maior probabilidade de encontrar uma resposta de amplitude maior. Esta figura ilustra uma provável existência de um fenômeno chamado de Erosão de Bacia.

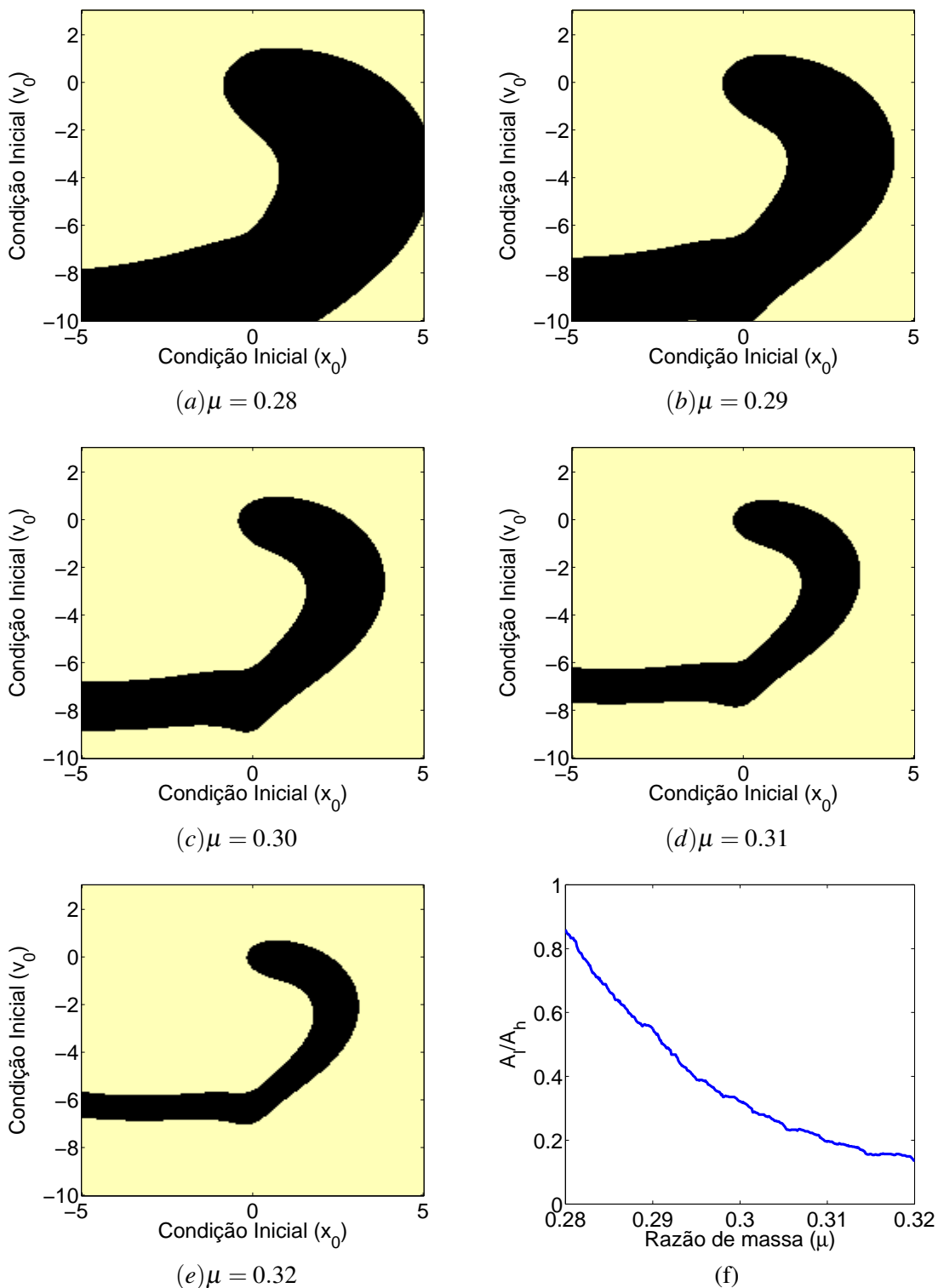
Figura 50 - (a) Bacias de atração para $\Omega = 0.91$, $\mu = 0.3$, $\xi = 0.01$ e $\hat{X}_0 = 0.1$, onde a área amarela representa o ciclo limite de alta amplitude e a área escura representa o ciclo limite de pequena amplitude; (b) região de *zoom*. Considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear - equação exata.



Fonte: Autor

As bacias de atrações sugerem que o aumento do valor da inércia tornam o sistema mais propenso a exibir um ciclo-limite de grande amplitude, figura 51(f).

Figura 51 - Efeito da razão de inércia (μ) na bacia de atração (a,b,c,d,e,f). A última figura no canto inferior direito mostra a relação entre os ciclos-limite de baixa e alta amplitude em função da razão de inércia, considerando o sistema com *Inerter* em arranjo geométrico não linear - equação exata.



Fonte: Autor

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 Conclusões

Nesta tese foi apresentada a análise do comportamento dinâmico de um sistema isolador de vibrações utilizando o dispositivo *Inerter* em arranjo geométrico linear e em arranjo geométrico não linear, através das curvas de transmissibilidade de deslocamento relativo e absoluto. No Capítulo 3, foram apresentadas as modelagens matemáticas de quatro modelos, o modelo de um grau de liberdade linear de um sistema isolador de vibrações do tipo massa-mola-amortecedor, Modelo 1, outro modelo, massa-mola-amortecedor-*Inerter*, Modelo 2, assim como a modelagem matemática de dois modelos mais aprimorados para efeito de validação do aparato experimental, Modelo 3 e Modelo 4. No capítulo 4, foram apresentadas as análises e validações do Modelo 3 e Modelo 4 referente ao aparato experimental massa-mola-*Inerter*. No Capítulo 5, foi apresentado um sistema isolador de vibrações massa-mola-amortecedor com *Inerter* em arranjo geométrico não linear, Modelo 5. Nesse capítulo apresentaram-se três modelagens matemáticas referentes ao Modelo 5: a primeira para a solução da equação do movimento exata, a segunda para a aproximação da equação do movimento para baixa amplitude e a terceira para a aproximação da equação do movimento para alta amplitude, foi utilizado o método do Balanço Harmônico para solucionar as equações não lineares do sistema. Foi apresentada a estabilidade da resposta periódica para o deslocamento relativo e para o deslocamento absoluto e uma análise numérica. As principais conclusões obtidas foram:

- Os sistemas isoladores de vibrações de um grau de liberdade linear massa-mola-amortecedor-*Inerter*, Modelo 2, trazem benefícios e malefícios no isolamento da vibração, apresentados nos Capítulos 3 e 5. A principal vantagem desse sistema isolador linear com *Inerter*, é que o sistema apresenta boa capacidade de isolamento na frequência da anti-ressonância, a qual é possível de ser escolhida e ajustada para um determinada frequência desejada alterando-se a inertância. O sistema linear isolador de vibrações com *Inerter* possui a capacidade de reduzir a amplitude de transmissibilidade de deslocamento do sistema em até aproximadamente 99% na anti-ressonância. Por outro lado, a desvantagem é que o sistema apresenta um valor contínuo de transmissibilidade em altas frequências, maior que o sistema massa-mola-amortecedor, Modelo 1, modelo clássico.
- O aparato experimental massa-mola-*Inerter* possibilitou validar ambos os modelos matemáticos Modelo 3 e Modelo 4, com exceção da magnitude relativa de transmissibilidade na ressonância, onde a causa mais provável é a existência de outro tipo de atrito no experi-

mento (atrito assimétrico devido a folgas e momentos de inércia atuantes no mecanismo), o qual interfere de maneira não linear na resposta do sistema. Tanto o aparato experimental massa-mola-*Inerter*, quanto as equações de magnitude relativa de transmissibilidade apresentaram resultados muito próximos, sendo possível identificar e validar as principais características desse sistema isolador de vibrações. Os resultados experimentais mostraram que o aparato experimental massa-mola-*Inerter* possui boa capacidade de isolamento de vibrações na frequência da anti-ressonância, e pode apresentar até aproximadamente 99% de isolamento da magnitude relativa de transmissibilidade, a qual pode ser escolhida e ajustada através da variação da inertância.

- O capítulo 5 apresentou o comportamento dinâmico de um sistema isolador de vibrações massa-mola-amortecedor com *Inerter* em arranjo geométrico não linear, Modelo 5, o qual possui benefícios em relação ao sistema massa-mola-amortecedor linear, Modelo 1, pois apresenta menor magnitude de deslocamento de transmissibilidade na anti-ressonância, aproximadamente 36% menor. A principal vantagem do sistema isolador de vibrações com *Inerter* em disposição geométrica não linear, Modelo 5, é que apresenta a magnitude de deslocamento de transmissibilidade, na alta frequência, aproximadamente 21% menor do que a do sistema linear massa-mola-amortecedor-*Inerter*. A não linearidade neste sistema desaparece quando a amplitude do movimento se torna alta, de modo que ela existe somente em um intervalo de amplitude limitado.

6.2 Trabalhos realizados

- Artigos completos publicados em periódicos: MORAES, FERNANDO DE HARO; SILVEIRA, MARCOS ; GONÇALVES, PAULO J. PAUPITZ . On the dynamics of a vibration isolator with geometrically nonlinear inerter. *NONLINEAR DYNAMICS*, v. 2018, p. 1, 2018.(ISSN:0924 – 090X).(https://doi.org/10.1007/s11071 – 018 – 4262 – 6)
- Trabalho apresentado em congresso internacional: DINAME - XVII (2017). International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics. THE USE OF A PNEUMATIC INERTER FOR VIBRATION ISOLATION. 2017
- Trabalho apresentado em encontro regional: III ERMAC - Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional. Análise de um modelo de dois graus de liberdade utilizando inerter. 2016.
- Trabalho apresentado em seminário: X Seminário da Pós-graduação em Engenharia Mecânica. ANÁLISE DE UM ISOLADOR DE VIBRAÇÕES INERCIAL PNEUMÁTICO. 2016.
- Trabalho apresentado em seminário: IX Seminário da Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. ANÁLISE DA RESPOSTA AO CHOQUE DE UM MODELO DE SUSPENSÃO DE UM QUARTO DE CARRO UTILIZANDO INERTER. 2015.

6.3 **Trabalhos futuros**

Sugestões de trabalhos futuros:

- Aperfeiçoar o modelo massa-mola-*Inerter* considerando os efeitos do atrito do tipo assimétrico, assim como considerar os diferentes tipos modelo de atrito, afim de verificar sua influência na amplitude dos picos de ressonância e anti-ressonância e trazer uma maior realidade ao modelo.
- Analisar a influência de diferentes tipos de não linearidades, como folga no acoplamento e no engrenamento da cremalheira do *Inerter*, desbalanceamento do volante de inércia. Considerando que os dispositivos reais estão sujeitos a esses tipos de folgas.
- Analisar o sistema absorvedor de vibrações com *Inerter* sob a excitação do tipo choque, impacto, buscando analisar se o dispositivo apresenta vantagens quanto ao isolamento de vibrações.
- Analisar a influência de um volante de inércia sob influência magnética, visando a aplicação de uma bobina sobre o mesmo com a finalidade de realizar a coleta de energia, isolar ou absorver vibração.
- Analisar a influência do volante de inércia composto por pares de um sistema de massa-mola-amortecedor, assim considerar a utilização desses conjuntos com diferentes configurações de rigidez com a finalidade de aumentar a faixa de isolamento da anti-ressonância.

REFERÊNCIAS

- ALUJEVIĆ, N. et al. Passive and active vibration isolation systems using inerter. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 418, p. 163–183, 2018.
- ASAI, T.; WATANABE, Y. Outrigger tuned inertial mass electromagnetic transducers for high-rise buildings subject to long period earthquakes. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 153, p. 404–410, 2017.
- AVRAMOV, K.; GENDELMAN, O. Interaction of elastic system with snap-through vibration absorber. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 44, n. 1, p. 81–89, 2009.
- CARRELLA, A.; BRENNAN, M.; WATERS, T. Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 301, n. 3, p. 678–689, 2007.
- CARRELLA, A. et al. Force and displacement transmissibility of a nonlinear isolator with high-static-low-dynamic-stiffness. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 55, n. 1, p. 22–29, 2012.
- CHEN, M. Z. et al. The missing mechanical circuit element. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, IEEE, v. 9, n. 1, 2009.
- CRAIG, R. R.; KURDILA, A. J. *Fundamentals of structural dynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006.
- DOMENICO, D. D.; RICCIARDI, G. An enhanced base isolation system equipped with optimal tuned mass damper inerter (tmdi). *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Wiley Online Library, v. 47, n. 5, p. 1169–1192, 2018.
- EVANGELOU, S. et al. Steering compensation for high-performance motorcycles. In: IEEE. *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*. [S.l.], 2004. v. 1, p. 749–754.
- FLANNELLY, W. G. *Dynamic Atiresonant Vibration Isolator*. [S.l.]: Google Patents, maio 20 1969. US Patent 3,445,080.
- GE, Z.; WANG, W. Modeling, testing, and characteristic analysis of a planetary flywheel inerter. *Shock and Vibration*, Hindawi, v. 2018, 2018.
- GIARALIS, A.; PETRINI, F. Optimum design of the tuned mass-damper-inerter for serviceability limit state performance in wind-excited tall buildings. *Procedia engineering*, Elsevier, v. 199, p. 1773–1778, 2017.
- GONZALEZ-BUELGA, A. et al. Assessing the effect of nonlinearities on the performance of a tuned inerter damper. *Structural Control and Health Monitoring*, v. 24, n. 3, p. e1879–n/a, 2017. ISSN 1545-2263. E1879 STC-15-0213.R1. Disponível em:

<<http://dx.doi.org/10.1002/stc.1879>>.

A. Goodwin. *Vibration isolators*. 1967. 3,322,379 A. US Patent 3,322,379 A.

HAMDAN, M.; DADO, M. Large amplitude free vibrations of a uniform cantilever beam carrying an intermediate lumped mass and rotary inertia. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 206, n. 2, p. 151–168, 1997.

HAO, Z.; CAO, Q.; WIERCIGROCH, M. Nonlinear dynamics of the quasi-zero-stiffness sd oscillator based upon the local and global bifurcation analyses. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 87, n. 2, p. 987–1014, 2017.

JIANG, J. Z. et al. Passive suspensions incorporating inerters for railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*, Taylor & Francis, v. 50, n. sup1, p. 263–276, 2012.

JONES, E. et al. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001–. Disponível em: <<http://www.scipy.org/>>.

KRACK, M. The harmonic balance method and its application to nonlinear vibrations: Introduction and current state of the art. 03 2018.

LAGIEWKA, L.; DOBRY, M. *Kinetic energy absorber, particularly for large mobile objects*. [S.l.]: Google Patents, dez. 5 2003. US Patent App. 10/570,095.

LAZAR, I.; NEILD, S.; WAGG, D. Using an inerter-based device for structural vibration suppression. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Wiley Online Library, v. 43, n. 8, p. 1129–1147, 2014.

LAZAREK, M.; BRZESKI, P.; PERLIKOWSKI, P. Design and identification of parameters of tuned mass damper with inerter which enables changes of inertance. *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, v. 119, p. 161–173, 2018.

LIU, C.; JING, X. Vibration energy harvesting with a nonlinear structure. *Nonlinear dynamics*, Springer, v. 84, n. 4, p. 2079–2098, 2016.

LIU, C.; XU, D.; JI, J. Theoretical design and experimental verification of a tunable floating vibration isolation system. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 331, n. 21, p. 4691–4703, 2012.

LIU, Y.; CHEN, M. Z.; TIAN, Y. Nonlinearities in landing gear model incorporating inerter. In: IEEE. *Information and Automation, 2015 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2015. p. 696–701.

MARINCA, V.; HERISANU, N. *Nonlinear dynamical systems in engineering: Some approximate approaches*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

MCKERNS, M. M. et al. Building a framework for predictive science. *arXiv preprint arXiv:1202.1056*, 2012.

MEIROVITCH, L. *Methods of analytical dynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2010.

NAYFEH, A. *Perturbation methods. A Wiley Interscience Publication*. [S.l.]: John Wiley &

sons, New York, 1973.

NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B. *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.

NORDIN, M.; GALIC', J.; GUTMAN, P.-O. New models for backlash and gear play. *International journal of adaptive control and signal processing*, Chichester; New York: Wiley, [1987?], v. 11, n. 1, p. 49–63, 1997.

PAPAGEORGIU, C.; HOUGHTON, N. E.; SMITH, M. C. Experimental testing and analysis of inerter devices. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, American Society of Mechanical Engineers, v. 131, n. 1, p. 011001, 2009.

PAPAGEORGIU, C.; SMITH, M. C. Laboratory experimental testing of inerters. In: IEEE. *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*. [S.l.], 2005. p. 3351–3356.

SHAW, A. et al. A nonlinear spring mechanism incorporating a bistable composite plate for vibration isolation. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 332, n. 24, p. 6265–6275, 2013.

SHEN, Y. et al. Improved design of dynamic vibration absorber by using the inerter and its application in vehicle suspension. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 361, p. 148–158, 2016.

SMITH, M. C. Synthesis of mechanical networks: The inerter. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 47, n. 10, p. 1648–1662, 2002.

SMITH, M. C. Synthesis of mechanical networks: The inerter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 47, n. 10, p. 1648–1662, 2002.

SMITH, M. C. The inerter concept and its application. *Plenary Lecture, Department of Engineering, University of Cambridge, UK*, 2003.

SMITH, M. C. *Force-controlling mechanical device*. [S.l.]: Google Patents, jan. 8 2008. US Patent 7,316,303.

SMITH, M. C.; WANG, F.-C. Controller parameterization for disturbance response decoupling: application to vehicle active suspension control. *IEEE Transactions on control systems technology*, IEEE, v. 10, n. 3, p. 393–407, 2002.

TANG, B.; BRENNAN, M. A comparison of two nonlinear damping mechanisms in a vibration isolator. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 332, n. 3, p. 510–520, 2013.

USHIJIMA, T.; TAKANO, K.; KOJIMA, H. *High performance hydraulic mount for improving vehicle noise and vibration*. [S.l.], 1988.

WANG, F.-C. et al. Performance analyses of building suspension control with inerters. In: IEEE. *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*. [S.l.], 2007. p. 3786–3791.

WANG, F.-C.; HONG, M.-F.; LIN, T.-C. Designing and testing a hydraulic inerter. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering*

Science, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 225, n. 1, p. 66–72, 2011.

WANG, F.-C. et al. The performance improvements of train suspension systems with mechanical networks employing inerters. *Vehicle System Dynamics*, Taylor & Francis, v. 47, n. 7, p. 805–830, 2009.

WANG, F.-C.; SU, W.-J. Inerter nonlinearities and the impact on suspension control. In: *2008 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 3245–3250. ISSN 0743-1619.

XIN, D.; YUANCE, L.; MICHAEL, Z. C. Application of inerter to aircraft landing gear suspension. In: *IEEE. Control Conference (CCC), 2015 34th Chinese*. [S.l.], 2015. p. 2066–2071.

YILMAZ, C.; KIKUCHI, N. Analysis and design of passive band-stop filter-type vibration isolators for low-frequency applications. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 291, n. 3, p. 1004–1028, 2006.

YU, Y.; NAGANATHAN, N. G.; DUKKIPATI, R. V. A literature review of automotive vehicle engine mounting systems. *Mechanism and machine theory*, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 123–142, 2001.

ZHANG, Y.; HU, Y. The realization of inerter for suspension of heavy truck. In: *IEEE. Control Conference (CCC), 2014 33rd Chinese*. [S.l.], 2014. p. 6273–6278.

ZHANG, Z.; CHEN, M. Z.; HUANG, L. Frequency response of a suspension system with inerter and play. In: *BEIJING. The 21th International Congress of Sound and Vibration*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 8pp–8pp.

APÊNDICE A - TERMOS POLINOMIAIS

Os termos polinomiais que definem a eq.60 e a eq.61 são:

$$P_1 = -\frac{5}{8}((\mu + 1)\Omega^2 - 1)H^5 - \frac{1}{2}((1\mu + 3)\Omega^2 - 3)H^3 + (1 - \Omega^2)H \quad (74)$$

$$P_2 = -\frac{1}{4}(\xi\Omega H^5 + 4\xi\Omega H^3 + 8\xi\Omega H) \quad (75)$$

$$P_3 = -\frac{1}{4}(\Omega^2 H^4 + 2\Omega^2 H^2)\hat{X}_0 \quad (76)$$

APÊNDICE B - TERMOS POLINOMIAIS - ESTABILIDADE

Segue abaixo os termos que definem as equações de estabilidade eq.69 e eq.70:

$$T_8 = \frac{125}{64} (\mu^2 + 2\mu + 1) \Omega^4 + \frac{1}{32} (10\xi^2 - 125\mu - 125) \Omega^2 + \frac{125}{64} \quad (77)$$

$$T_6 = \frac{1}{2} (5\mu^2 + 20\mu + 15) \Omega^4 + (2\xi^2 - 10\mu - 15) \Omega^2 + \frac{15}{2} \quad (78)$$

$$T_4 = \frac{1}{4} (3\mu^2 + 33\mu + 43) \Omega^4 + \frac{1}{4} (24\xi^2 - 33\mu - 84) \Omega^2 + 1 \quad (79)$$

$$T_2 = (2\mu + 6) \Omega^4 + (8\xi^2 - 2\mu - 12) \Omega^2 + 6 \quad (80)$$

$$T_0 = \Omega^4 + (4\xi^2 - 2) \Omega^2 + 1 \quad (81)$$

$$W_4 = \frac{1}{64} (125\mu^2 + 250\mu + 125) U^8 + \left(\frac{5}{2}\mu^2 + 10\mu + \frac{15}{2} \right) U^6 + \frac{1}{64} (48\mu^2 + 528\mu + 672) U^4 + (2\mu + 6) U^2 + 1 \quad (82)$$

$$W_2 = \frac{1}{32} (10\xi^2 - 125\mu - 125) U^8 + (2\xi^2 - 10\mu - 15) U^6 + \frac{1}{4} (24\xi^2 - 33\mu - 84) U^4 + (8\xi^2 - 2\mu - 12) U^2 + 4\xi^2 - 1 \quad (83)$$

$$W_0 = \frac{125}{64} U^8 + \frac{15}{2} U^6 + \frac{21}{2} U^4 + 6U^2 + 1 \quad (84)$$

B.1 Transmissibilidade absoluta do Sistema Linear

A transmissibilidade absoluta do sistema linear é dada por

$$T = \frac{1 + j2\xi\Omega}{1 - \Omega^2 + j2\xi\Omega} \quad (85)$$

A transmissibilidade absoluta do sistema linear massa-mola-amortecedor-*Inerter* da fig. 32 é dada por

$$T = \frac{1 - \mu\Omega^2 + j2\xi\Omega}{1 - (1 + \mu)\Omega^2 + j2\xi\Omega} \quad (86)$$