Ilha Solteira

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Ilha Solteira - SP

Gilberto Rodrigues dos Santos

CONTROLE CHAVEADO E $\mathscr{H}_\infty$ CHAVEADO DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO E SATURAÇÃO DOS ATUADORES

Ilha Solteira
2020

Gilberto Rodrigues dos Santos

CONTROLE CHAVEADO E $\mathscr{H}_\infty$ CHAVEADO DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO E SATURAÇÃO DOS ATUADORES

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Câmpus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.
Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo C. Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira
2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S237c

Santos, Gilberto Rodrigues dos.

Controle chaveado e $\mathcal{H}_\infty$ chaveado de sistemas não lineares incertos discretos no tempo descritos por modelos fuzzy T-S considerando região de operação e saturação dos atuadores / Gilberto Rodrigues dos Santos. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2020

168 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2020

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Inclui bibliografia

1. Controle chaveado de sistemas discretos no tempo. 2. Controle $\mathcal{H}_\infty$. 3. Sistemas não lineares incertos. 4. Saturação do sinal de controle. 5. Sistemas fuzzy Takagi- Sugeno (T-S). 6. Funções de pertinência incertas.

Raiane da Silva Santos
Raiane da Silva Santos
Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Controle chaveado e H chaveado de sistemas não lineares incertos discretos no tempo descritos por modelos fuzzy T-S considerando região de operação e saturação dos atuadores

AUTOR: GILBERTO RODRIGUES DOS SANTOS
ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO
Divisão de Engenharia Eletrônica / Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Prof. Dr. WALLYSONN ALVES DE SOUZA Wallysonn Alves de Souza
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais - CCMN / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO

Ilha Solteira, 14 de agosto de 2020

Aos meus pais Manoel e Josefa,
à minha irmã Cristiane e à minha esposa Karina
por todo amor, apoio, confiança e incentivo em todos os momentos.
Em especial aos meus filhos Thiago e Rael,
minhas maiores fontes de felicidade e encorajamento.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- A Deus, por ter me dado força e saúde para chegar até aqui;
- Aos meus pais Josefa e Manoel, pelo carinho, apoio e incentivo, sem os quais nada disso seria possível. Mãe, lembro quando nos contava que via os filhos das suas patroas se preparando para ir à faculdade, e a senhora se perguntava se um dia seus filhos teriam a oportunidade de cursar um curso superior. Pois bem, aqui estamos. Saiba que a senhora é a maior responsável por nossas conquistas. É nosso exemplo de vida, nossa inspiração, nosso alicerce, nosso grande amor;
- À minha irmã Cristiane, a pessoa mais corajosa, determinada e maravilhosa que conheço. Sua amizade e força, nos trouxeram até aqui;
- À minha esposa Karina, pelo amor, apoio, compreensão e confiança. Minha amiga de todos os momentos, sem a qual essa jornada seria infinitamente mais difícil. A pessoa mais linda e bondosa que Deus poderia colocar na minha vida. Sua presença torna nossas vidas mais leves, felizes e cheia de amor;
- Aos meus filhos Thiago e Rael, minhas maiores fontes de inspirações. Meus lindos e preciosos tesouros, que nos traz orgulho e felicidade em todos os momentos;
- Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por todo ensinamento, incentivo, confiança, orientação e amizade. Um ser humano excepcional, cuja generosidade, inteligência e elegância são imensuráveis;
- Aos professores do grupo de pesquisa em controle: Edvaldo Assunção, Rodrigo Cardim e Jean Marcos de Souza Ribeiro, pelas contribuições, incentivos e conselhos, pelo acompanhamento nas bancas examinadoras e principalmente pela amizade;
- Aos meus amigos e colegas do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), que de forma direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho. A amizade que construímos vai além de qualquer título ou conquistas profissionais;

- À Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS que por meio do meu afastamento, proporcionou a realização do meu doutorado. Aos professores do curso de Matemática do CPAN, por seu compromisso com a educação e por suprir com empenho minha ausência.

- Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE), pela oportunidade e acolhimento;

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela oportunidade e apoio financeiro.

*" Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito.
Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes."*

Marthin Luther King

RESUMO

Este trabalho dedica-se ao desenvolvimento de projetos de controle chaveado e $\mathscr{H}_\infty$ chaveado para o problema de estabilização local de sistemas não lineares incertos discretos no tempo sujeitos à saturação nos atuadores. Os procedimentos propostos utilizam modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) que possuem funções de pertinência dependentes de parâmetros incertos e modelos locais lineares conhecidos, e descrevem exatamente os sistemas não lineares incertos, em uma região de operação no espaço de estados. Baseados em uma função de Lyapunov não quadrática, os métodos propostos oferecem novas condições suficientes em termos de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) que asseguram estabilidade assintótica local do ponto de equilíbrio do sistema controlado. Além disso, os projetos de controle fornecem condições para a obtenção de um domínio, de modo que cada trajetória fique nele confinada, por todo o tempo futuro, desde que as trajetórias tenham suas condições iniciais contidas no referido domínio. Os procedimentos dos projetos asseguram a presença desse domínio dentro da região de validade da representação do sistema não linear incerto por modelos fuzzy T-S. Com o intuito de apresentar condições menos restritivas para a estabilização do sistema, o conceito de hiper-retângulos fechados é utilizado. Análises teóricas mostram o desenvolvimento de condições menos restritivas à medida que os projetos de controle chaveado são propostos. Além de serem comparados entre si, por não utilizarem as funções de pertinência para implementação da lei de controle, os projetos de controle chaveado são também comparados a projetos de controle que utilizam um controlador linear invariante no tempo. Levando em consideração a eficiência do controle chaveado na abordagem de sistemas fuzzy T-S incertos, um projeto de controle chaveado que garante um desempenho $\mathscr{H}_\infty$ para uma classe de sistemas não lineares incertos discretos no tempo sujeitos à atuação de sinais de distúrbio, é proposto. Exemplos numéricos, amplamente discutidos na literatura, ilustram a eficácia das metodologias propostas. As simulações mostram que os procedimentos apresentados são resultados relevantes na estabilização, na estimação de um domínio de atração (DA) para o ponto de equilíbrio e na mitigação dos efeitos do distúrbio sobre sistemas não lineares incertos discretos no tempo. Por fim, um exemplo prático apresenta uma implementação da lei de controle chaveada em um sistema de controle de uma suspensão ativa de bancada fabricado pela Quanser®.

Palavras-chave: Controle chaveado de sistemas discretos no tempo. Controle $\mathscr{H}_\infty$. Sistemas não lineares incertos. Saturação do sinal de controle. Sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (T-S). Funções de pertinência incertas. Domínio de atração (DA). Desigualdade matricial linear (LMI).

ABSTRACT

This work is dedicated to the development of switched control and $\mathscr{H}_\infty$ switched designs for the local stabilization problem of discrete-time uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. The proposed procedures use Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models that have membership functions dependent on uncertain parameters and known local linear models, and exactly describe the uncertain nonlinear systems in an operation region in the state space. Based on a non-quadratic Lyapunov function, the proposed methods offer new sufficient conditions in terms Linear Matrix Inequalities (LMIs) that ensure that the equilibrium point of the controlled system is asymptotically stable. In addition, the control designs provide conditions for obtaining a domain such that every trajectory will be confined in this domain, for all future time, as long as the trajectories have their initial conditions contained in the referred domain. The design procedures assure this domain within the region of validity of the representation of the uncertain nonlinear system by T-S fuzzy models. In order to present less restrictive conditions for system stabilization, the concept of closed hyper-rectangles is used. Theoretical analyzes show the development of more relaxed conditions, mainly due to the proposed switched control designs. Besides being compared to each other, since they do not use the pertinence functions to implement the control law, the switched control designs are also compared to control projects that use a linear time-invariant controller. Taking into account the efficiency of the switched control for controlling uncertain fuzzy TS systems, a switched control design procedure that guarantees a performance $\mathscr{H}_\infty$ for a class of discrete-time uncertain non-linear systems subject to the action of disturbance signals is proposed. Numerical examples, widely discussed in the literature, illustrate the effectiveness of the proposed methodologies. The simulations show that the presented procedures are relevant results in the stabilization, in the estimation of an attraction domain (DA) for the equilibrium point and in the mitigation of the disturbance effects on discrete-time uncertain nonlinear systems. Finally, a practical example presents an implementation of the switching control law in a Active Suspension System manufactured by Quanser ®.

Keywords: Switched control of discrete-time systems. $\mathscr{H}_\infty$ control. Uncertain nonlinear system. Control signal saturation. Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model. Uncertain membership functions. Domain of attraction (DA). Linear matrix inequality (LMI).

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

LMIs	Linear Matrix Inequalities
PDC	Compensação Distribuída Paralela
BMIs	Bilinear Matrix Inequalities
T-S	Takagi-Sugeno
FLF	Função de Lyapunov fuzzy
TVM	Teorema do Valor Médio
DA	Domínio de Atração

LISTA DE SÍMBOLOS

I	Matriz identidade com dimensão apropriada.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{K}_r$	Conjunto $\{1,\ 2,\ \cdots,\ r\} \subset \mathbb{N}$, dos primeiros r números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $n\times m$.
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores reais $n\times 1$.
$\Delta h(z(k))$	Variação $h(z(k+1))-h(z(k))$.
M^T	Transposto da matriz real M.
$M \geq\ (>)0$	Matriz M simétrica e semi-definida (definida) positiva.
$M \leq\ (<)0$	Matriz M simétrica e semi-definida (definida) negativa.
$M_{(l)}$	l-ésima linha de uma matriz M.
$diag\{M_1,\cdots,M_r\}$	Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes M_i, $i\in\mathbb{K}_r$.
$Nul(M)$	Espaço nulo ou núcleo de uma matriz M.
$\lvert z\rvert$	Valor absoluto de um número real z.
$\lVert\xi\rVert$	Norma euclidiana do vetor $\xi\in\mathbb{R}^n$; $\lVert\xi\rVert=\sqrt{\xi^T\xi}$.
$\lVert\xi(k)\rVert_2$	Norma 2 de $\xi(k)\in\mathbb{R}^n$, igual a $\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\xi^T(k)\xi(k)}$.
ℓ_2	Espaço de sinais $\xi(k)$ Lebesgue mensuráveis tais que $\lVert\xi(k)\rVert_2<\infty$.
$\text{co}\{a_1,\cdots,a_r\}$	Conjunto das combinações convexas dos vetores a_i, $i\in\mathbb{K}_r$.
e_i	Vetor $n\times 1$, com “1” no i-ésimo componente e “0’s” nos demais.
$\nabla f(x)$	Vetor gradiente $\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\ \cdots\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right]$.
$sign(\cdot)$	Função sinal definida como $sign(b)=\begin{cases}0, \text{ se } b=0\\ \dfrac{b}{\lvert b\rvert}, \text{ se } b\neq 0\end{cases}$.
$M_{z(k)}$	$\sum_{i=1}^{r}h_i(z(k))M_i$ com $h_i(z(k))\geq 0$ e $\sum_{i=1}^{r}h_i(z(k))=1$.
$M_{\mu(k)}$	$\sum_{t=1}^{2^r}\delta_t(z(k))M_t$ com $\delta_t(z(k))\geq 0$ e $\sum_{t=1}^{2^r}\delta_t(z(k))=1$.
$M_{z(k)\mu(k)}$	$\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{2^r}h_i(z(k))\delta_t(z(k))M_{it}$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Grande parte dos sistemas dinâmicos comportam-se como sistemas não lineares discretos no tempo cujos parâmetros físicos não são precisamente conhecidos. Muitas vezes, é possível determinar os limites desses parâmetros incertos e das não linearidades que compõem o sistema. Nesse sentido, uma alternativa eficiente e amplamente explorada nas últimas décadas, é a descrição dos sistemas não lineares incertos discretos no tempo por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (TAKAGI; SUGENO, 1985; SANTIM *et al.*, 2012; ALVES, 2017).

O controle de sistemas não lineares por meio de modelos fuzzy T-S possibilita representá-los por uma combinação de modelos locais lineares, ponderados suavemente por funções de pertinência não lineares. Em (TANIGUCHI *et al.*, 2001), é proposto um procedimento que permite a obtenção do modelo fuzzy T-S que representa exatamente uma ampla classe de sistemas não lineares em uma região de operação no espaço de estados. Na descrição exata, o número de modelos locais, também conhecidos como regras fuzzy, aumenta exponencialmente com o número das não linearidades. Consequentemente a complexidade numérica dos algoritmos de controle também aumenta, dificultando as implementações (LAM, 2011).

Utilizando funções de Lyapunov, Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) (BOYD *et al.*, 1994) e os modelos locais lineares do sistema fuzzy T-S, muitos projetos de controle para sistemas não lineares, inclusive que utilizam as funções de pertinência na composição da lei de controle, como por exemplo a Compensação Distribuída Paralela (PDC, do inglês *Parallel Distributed Compensation*), têm sido desenvolvidos (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996; TEIXEIRA; ŻAK, 1999; TANIGUCHI *et al.*, 2001; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; GUERRA; VERMEIREN, 2004; DING; SUN; YANG, 2006; GUERRA; KRUSZEWSKI; BERNAL, 2009; CHEN *et al.*, 2012; SANTIM *et al.*, 2012; LEE, 2013; LEE; JOO, 2014; KLUG *et al.*, 2014; KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015; MÁRQUEZ *et al.*, 2017).

Em (GUERRA; VERMEIREN, 2004; DING; SUN; YANG, 2006; GUERRA; KRUSZEWSKI; BERNAL, 2009; CHEN *et al.*, 2012) são apresentados resultados para o problema de estabilização de sistemas fuzzy T-S discreto no tempo, utilizando uma lei de controle que não tem estrutura PDC, mas que também é dependente das funções de pertinência. Com o propósito de obter condições de estabilidade menos conservativas, em (GUERRA; VERMEIREN, 2004), uma nova função de Lyapunov não quadrática, denominada função de Lyapunov fuzzy (FLF, do inglês *Fuzzy Lyapunov Function*), foi proposta. Uma generalização dos resultados obtidos em (GUERRA; VERMEIREN, 2004) foi apresentada em (DING; SUN; YANG, 2006), aplicando uma extensão da função Lyapunov não quadrática. Uma função de Lyapunov não quadrática do tipo mínimo por partes foi utilizada em (CHEN *et al.*, 2012) e as condições do projeto são mais relaxadas que os procedimentos descritos em (GUERRA; VERMEIREN, 2004) e (DING; SUN; YANG, 2006). No entanto, algumas condições propostas em (CHEN *et al.*, 2012) são Desigualdades Matriciais Bilinear (BMIs, do inglês *Bilinear Matrix Inequalities*).

O modelo fuzzy T-S descreve com precisão a dinâmica original do sistema não linear apenas em uma região limitada do espaço de estados, definida como o domínio de validade ou região de operação (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2013). Fora desse subconjunto do espaço de estados, a representação fuzzy T-S é imprecisa, o que prejudica o desempenho e o comportamento dinâmico do sistema de controle. Sendo assim, para garantir que o modelo fuzzy T-S descreva com precisão a dinâmica do sistema não linear, é necessário assegurar que o sistema opere dentro da região de operação. Além disso, muitos sistemas de controle funcionam em regiões do espaço de estados determinadas por restrições aplicadas às variáveis de estado e de controle. Devido às restrições operacionais, é necessário o uso de conceitos de estabilidade local.

Uma alternativa para assegurar que o sistema opere dentro de uma região do espaço de estados determinada por restrições aplicadas às variáveis de estado e de controle, consiste do emprego do conceito de invariância positiva de domínios definidos no espaço de estados. Esse conceito está intimamente ligado ao de domínio de estabilidade de Lyapunov. Em um domínio positivamente invariante, toda trajetória de um sistema dinâmico que, em k_0, inicia-se, nele permanece para todo $k > k_0$ (SLOTINE; LI, 1991; KHALIL, 2002; ROCHA, 1994). Dessa forma, regiões de condições iniciais admissíveis, que são vizinhanças do ponto de equilíbrio do sistema, garantem a estabilidade local e o atendimento das restrições em sistemas de controle, e podem ser usadas como estimativas do domínio de atração do sistema (KHALIL, 2002).

Em (LEE, 2013; LEE; JOO, 2014; LEE; JOO; RA, 2016; LEE; HU, 2017), por exemplo, utilizando um controlador não PDC, mas dependente das funções de pertinência, uma FLF e supondo que a taxa de variação das funções de pertinências do modelo fuzzy T-S são limitadas por constantes suficientemente pequenas, o problema da estabilidade local de sistemas não lineares é abordado. Condições LMIs que proporcionam a estabilização do sistema realimentado e que fornecem uma estimativa do DA dentro da região de operação na qual a representação por modelos fuzzy T-S é válido, são apresentadas. Em (KLUG *et al.*, 2014; DANG *et al.*, 2017) o mesmo problema é discutido, porém com a adição da hipótese de que os atuadores estão sujeitos à saturação. Além de considerar atuadores saturantes, em (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2013; KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015), os sistemas não lineares discreto no tempo são considerados sujeitos a distúrbios externos limitados. Além da mitigação dos efeitos do distúrbio, os procedimentos abordam o problema de assegurar que as trajetórias permanecerão dentro da região de operação dos modelos fuzzy T-S, por todo tempo futuro, considerando uma determinada classe de distúrbio.

Muitos casos práticos são descritos por sistemas não lineares que possuem parâmetros incertos. Por este motivo, trabalhos que estudam métodos que permitem utilizar modelos fuzzy T-S com incertezas nas funções de pertinência ou nas variáveis de premissa são desenvolvidos (OLIVEIRA *et al.*, 2018a). Considerando que as variáveis de estado do sistema não estão completamente disponíveis para realimentação, em (LO; LIN, 2003) um controle robusto $\mathscr{H}_\infty$ via realimentação estática de saída é proposto para o problema de estabilização quadrática de sistemas Fuzzy T-S incertos. Em (GOLABI; BEHESHTI; ASEMANI, 2012), baseado em observadores dinâmicos fuzzy, são apresentados resultados relativos ao projeto de controladores robustos $\mathscr{H}_\infty$, para sistemas fuzzy T-S incertos. Já em (YANG; FENG; ZHANG, 2014), um projeto de controle preditivo robusto para sistemas fuzzy T-S incertos com restrições de entrada e distúrbio persistentes é proposto. O problema de determinar um conjunto positivamente invariante para o sistema fuzzy T-S também é tratado em (YANG; FENG; ZHANG, 2014).

Mesmo para sistemas não lineares incertos, é possível obter modelos fuzzy T-S que os representem exatamente em uma região de operação (ALVES, 2017). O procedimento apresentado em (SANTIM *et al.*, 2012; ALVES, 2017), permite a aplicação dos modelos fuzzy T-S para a descrição de sistemas não lineares incertos, tais que as não linearidades e as incertezas limitadas do sistema são representadas por modelos locais lineares conhecidos e funções de pertinência incertas (SOUZA *et al.*, 2014; ALVES *et al.*, 2016b; ALVES *et al.*, 2016a; OLIVEIRA *et al.*, 2018a; OLIVEIRA *et al.*, 2018b). Em alguns casos as funções de pertinência podem ser até mesmo desconhecidas. Portanto, nestes casos, técnicas que utilizam o conceito de controle PDC, por exemplo, não podem ser utilizadas.

Uma alternativa para a manipulação de sistemas não lineares incertos é o controle por realimentação estática dos estados, pois não existe a necessidade de encontrar as expressões das funções de pertinência. Porém, em (SOUZA *et al.*, 2014) é proposta uma lei de controle chaveada para sistemas não lineares incertos contínuos no tempo descritos por modelos fuzzy T-S. Com a lei de controle chaveada vários ganhos de realimentação são projetados, sendo apenas um ganho utilizado por vez. Esta lei de controle chaveada utiliza os vetores de estado e matrizes auxiliares para a escolha do ganho do controlador, em cada instante de tempo, que minimiza a derivada da função de Lyapunov e proporciona condições que garantem a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio do sistema controlado. Este procedimento não usa as funções de pertinência em sua implementação.

As condições de projeto em (SOUZA *et al.*, 2014), são estendidas em (ALVES *et al.*, 2016b), para lidar com o problema da estabilidade local e saturação do sinal de controle. Além disso, o procedimento apresentado em (ALVES *et al.*, 2016b) propõe uma lei de controle chaveada suave, para evitar o *chattering* na entrada de controle. A lei de controle chaveada suave foi também utilizada em (ALVES *et al.*, 2016a), para lidar com o problema da estabilidade local para sistemas não lineares incertos sujeitos a distúrbios persistentes limitados em norma. Em (OLIVEIRA *et al.*, 2018a) é proposto um projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado para sistemas incertos fuzzy T-S sujeitos à saturação no atuador contínuo no tempo, considerando a região de operação. As condições de projeto propostas em (OLIVEIRA *et al.*, 2018a), garantem um desempenho $\mathscr{H}_\infty$ ao sistema realimentado e asseguram que as trajetórias do vetor de estado permanecem dentro da região de operação na qual o modelo fuzzy T-S é válido. Finalmente, (OLIVEIRA *et al.*, 2018b) propõem uma lei de controle chaveado para lidar com o problema de estabilização de sistemas não lineares incertos discretos no tempo, descritos por modelos fuzzy T-S.

Neste contexto, este trabalho introduz uma lei de controle chaveado no estudo da estabilização local de sistemas não lineares incertos discretos no tempo sujeitos à saturação no sinal de controle e na estabilização de sistemas sujeito a distúrbios de energia limitada, descritos por modelos fuzzy T-S. A lei de chaveamento seleciona o ganho que retorna o menor valor da variação da função de Lyapunov. Assim como em (SANTIM *et al.*, 2012; SOUZA *et al.*, 2014; ALVES *et al.*, 2016b; ALVES *et al.*, 2016a; OLIVEIRA *et al.*, 2018a), a lei de controle chaveado escolhe o ganho do controlador, em cada instante k, e não depende das funções de pertinência. Para a escolha do ganho do controlador, é utilizada uma matriz auxiliar. Por não envolver as funções de pertinência do modelo fuzzy T-S que descreve a planta, o controle chaveado proposto pode ser aplicado em uma ampla classe de sistemas não lineares incertos discretos no tempo.

Para a obtenção de condições LMIs menos conservadoras, que garantam a estabilidade local assintótica do sistema, baseado na FLF (GUERRA; VERMEIREN, 2004), é utilizada uma função de Lyapunov não quadrática que, além de envolver uma combinação convexa de várias matrizes de Lyapunov, P_i, em sua composição, conta com a introdução de uma nova matriz G, que proporciona menos restrições às matrizes de Lyapunov (OLIVEIRA; BERNUSSOU; GEROMEL, 1999). Ainda com o objetivo de redução do conservadorismo, para concepção de condições mais relaxadas, posteriormente é suposto que as taxas de variação das funções de pertinências do modelo fuzzy T-S são limitadas (MOZELLI *et al.*, 2009; GUEDES *et al.*, 2013).

Baseado em (LEE, 2013), utilizando o Teorema do Valor Médio para funções de várias variáveis e com o auxílio de um politopo formado pelos limites das derivadas parciais das funções de pertinência, de modo que os gradientes das funções de pertinência variem dentro desse politopo, é possível utilizar algumas informações sobre a relação entre as funções de pertinência nas amostras k e $k+1$. Dessa forma, utilizando essa informação, é assegurado que a estimativa do domínio de atração também está contida na região na qual as restrições na taxa de variação das funções de pertinência são garantidas.

Condições, em termos de um problema de otimização convexo (BOYD *et al.*, 1994), são formuladas de forma a garantir a estabilização local e assegurar que a estimativa obtida está contida na região de operação do modelo fuzzy T-S sujeito à saturação. Além disso, os métodos propostos proporcionam uma estimativa menos conservadora do domínio de atração, do que os presentes na literatura. Condições LMIs garantem que a estimativa do domínio de atração está situada em uma região em que todas as restrições às variáveis de controle e de estado são respeitadas.

Baseado em (OLIVEIRA *et al.*, 2018a), a metodologia proposta é estendida para o caso em que o sistema não linear incerto sujeito à saturação, está também sujeito a distúrbios externos limitados. Com o objetivo de mitigar os efeitos dos distúrbios sofridos pelo sistema e criar condições para que as trajetórias evoluam dentro da região de validade da representação do sistema por um modelo fuzzy T-S, um projeto de controle chaveado $\mathscr{H}_\infty$, considerando região de operação, restrições na taxa de variação das funções de pertinência e baseado no conceito de hiper-retângulos fechados, é proposto. As condições são dadas em termos de um problema de otimização que além de minimizar o norma $\mathscr{H}_\infty$, expande o tamanho da estimativa do DA projetada.

Por fim, a eficácia dos projetos propostos é demonstrada em exemplos numéricos e em uma implementação prática da lei de controle chaveada em um sistema de suspensão ativa, fabricado pela Quanser®. Todos os projetos e simulações apresentados neste trabalho foram realizados no *software* Matlab/Simulink®.

1.1 ESTRUTURA DO TEXTO

- Capítulo 1: Introduz o tema abordado na tese. Apresenta a organização do texto e algumas notações utilizadas ao longo do trabalho.
- Capítulo 2: Apresenta conceitos preliminares necessários para o desenvolvimento das teorias propostas neste trabalho.
- Capítulo 3: Propõe projetos de controle chaveado para sistemas não lineares incertos através do modelo fuzzy T-S e de hiper-retângulos fechados. O problema de estabilização local é abordado admitindo que o sistema opera dentro da região de validade do modelo fuzzy T-S. Análises teóricas de estabilidade mostram a evolução

dos projetos propostos e as vantagens deles sobre o procedimento que utiliza um controlador linear invariante no tempo para estabilização de sistemas incertos. Um exemplo comparativo é apresentado.

- Capítulo 4: Apresenta o projeto de controle chaveado para sistemas não lineares incertos sujeitos à saturação no atuador descritos por sistemas fuzzy T-S. Os resultados deste capítulo, são extensões dos resultados presentes no Capítulo 3. Condições para a concepção de uma estimativa elipsoidal do DA, que está situada em uma região em que todas as restrições às variáveis de controle e de estado, são fornecidas. Um procedimento que proporciona uma estimativa do DA menos conservadora é proposto. Exemplos numéricos ilustram a eficiência dos projetos propostos.

- Capítulo 5: Propõe um projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado, considerando região de operação, para sistemas não lineares incerto sujeitos à saturação no atuador e distúrbios externos limitados. Uma análise teórica de estabilidade demonstra a vantagem do projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado, sobre um procedimento que utiliza um controlador linear invariante no tempo. Exemplos numéricos e um exemplo prático de uma implementação em um sistema de suspensão ativa fabricado pela Quanser®, demonstram a eficácia do projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado proposto.

- Capítulo 6: Apresenta as conclusões e as perspectivas para pesquisas futuras.

1.2 NOTAÇÕES

Por simplicidade, ao longo deste trabalho serão adotadas as seguintes notações: $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{n\times m}$ denotam o conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais e o conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais, respectivamente. $\mathbb{K}_r = \{1,2,\ldots,r\}$, $r \in \mathbb{N}$. Em uma matriz simétrica, $(*)$ denota o transposto do elemento na posição simétrica. $M_{(l)}$ representa a l-ésima linha de uma matriz M. $diag\{M_1,M_2,\cdots,M_r\}$ denota uma matriz bloco diagonal formada pelas matrizes M_1, M_2, $\cdots$, M_r. Dada uma matriz M, $M > 0$ ($M < 0$, $M \geq 0$ e $M \leq 0$) indica que a matriz M é definida positiva (definida negativa, semi-definida positiva, semi-definida negativa), respectivamente. $Nul(M)$ representa o espaço nulo ou núcleo de M. $Tr(M)$ denota o traço da matriz M. e_i denota o vetor $n \times 1$, com "1" no i-ésimo componente e "0's" nos demais. $\|\xi\| = \sqrt{\xi^T \xi}$ representa a norma euclidiana do vetor $\xi \in \mathbb{R}^n$. $\|\xi(k)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \xi^T(k)\xi(k)}$ denota a norma 2 de $\xi(k) \in \mathbb{R}^n$. O conjunto das combinações convexas dos vetores a_i, $i \in \mathbb{K}_r$ é denotada por co$\{a_1,\cdots,a_r\}$, ou seja, $a \in$ co$\{a_1,\cdots,a_r\}$, então $a = \sum_{i=1}^{r} \phi_i a_i$, sendo $\phi_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{r} \phi_i$. A função sinal, $sign(\cdot)$, é definida como $sign(b) = \begin{cases} 0, \text{ se } b = 0 \\ \dfrac{b}{|b|}, \text{ se } b \neq 0 \end{cases}$. $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ representa o gradiente de uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ em um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ (neste trabalho o gradiente é considerado um vetor linha (LEE; JOO, 2014; LEE; JOO; RA, 2016)). ℓ_2 denota o espaço de sinais $\xi(k)$ Lebesgue mensuráveis tais que $\|\xi(k)\|_2 < \infty$. Dado $h(z(k)) = \begin{bmatrix} h_1(z(k)) & \cdots & h_r(z(k)) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^r$, a variação de $h(z(k))$ e de $h_i(z(k))$ do instante k para $k+1$, serão denotadas, respectivamente, por $\Delta h(z(k)) = h(z(k+1)) - h(z(k))$ e $\Delta h_i(z(k)) = h_i(z(k+1)) - h_i(z(k))$. $M_{z(k)}$, $M_{z(k+1)}$, $M_{\mu(k)}$ e $M_{z(k)\mu(k)}$ denotam matrizes, tais que

$$
\begin{aligned}
&M_{z(k)} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k))M_i,\ M_{z(k+1)} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k+1))M_i,\\
&M_{\mu(k)} = \sum_{t=1}^{2^r} \delta_t(z(k))M_t,\ M_{z(k)\mu(k)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{2^r} h_i(z(k))\delta_t(z(k))M_{it},\\
&\text{com } h_i(z(k)) \geq 0,\ i \in \mathbb{K}_r,\ \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) = 1 \text{ e } \delta_t(z(k)) \geq 0,\ t \in \mathbb{K}_{2^r},\ \sum_{t=1}^{2^r} \delta_t(z(k)) = 1.
\end{aligned} \tag{1}
$$

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo é dedicado à apresentação de definições e conceitos necessários para a elaboração das propostas teóricas deste trabalho. Inicialmente, são apresentados conceitos essenciais relativos à estabilidade de sistemas dinâmicos discretos no tempo e o método direto de Lyapunov para o estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos em tempo discreto. Conceitos sobre conjuntos invariantes relacionados com a ideia de estabilidade, também são descritos. Em seguida, apresenta-se um método para a descrição exata de sistemas não lineares incertos discretos no tempo por modelos fuzzy T-S incertos. Os modelos obtidos por esse procedimento, possuem modelos locais lineares conhecidos, embora suas funções de pertinência sejam incertas (dependem dos parâmetros incertos do sistema). Essas funções de pertinência incertas compõem a função de Lyapunov utilizada. Por fim, em razão da não disponibilização do comportamento das funções de pertinência incertas ao longo do tempo, é proposta uma lei de controle chaveada com realimentação do vetor de estado, que não necessita das funções de pertinência para sua implementação.

2.1 ESTABILIDADE SEGUNDO MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

Nesta seção será apresentado o critério de Lyapunov para o estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos discretos no tempo.

Considere o sistema dinâmico autônomo discreto no tempo descrito pela equação:

$$x(k+1) = \varphi(x(k)),\ x(0), \tag{2}$$

sendo $x(0)$ uma condição inicial dada, $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^{n_x} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ uma função não linear e $x(k) \in D$ o vetor de estado.

Antes de apresentar a teoria de Lyapunov, faz-se necessário definir alguns conceitos sobre estabilidade.

Sem perda de generalidade, o ponto de equilíbrio do sistema (2), pode ser considerado a origem. Isso pois, é sempre possível fazer a mudança de variáveis $\bar{x}(k) = x(k) - x_e$, sendo x_e o ponto de equilíbrio do sistema. Sendo assim, considere que $\varphi(x(k))$, satisfaz $\varphi(0) = 0$.

Definição 1. *O ponto de equilíbrio $x = 0$, do sistema* (2) *é:*

- *Estável, se*

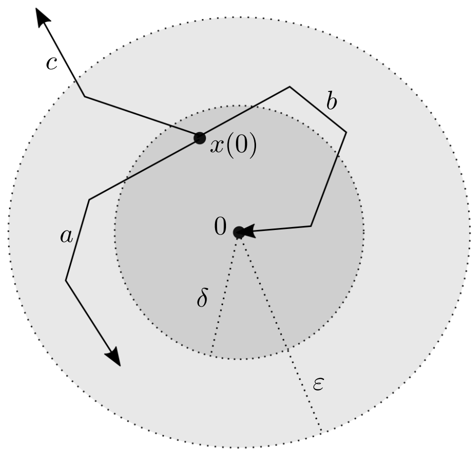
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \textit{tal que}\ \|x(0)\| < \delta \Longrightarrow \|x(k)\| < \varepsilon,\ \forall k \geq 0;$$

- *Instável, se não é estável;*

- *Assintoticamente estável, se é estável e adicionalmente δ pode ser escolhido de forma que*

$$\|x(0)\| < \delta \Longrightarrow \lim_{k \to \infty} x(k) = 0.$$

Figura 1 - Interpretação geométrica de estabilidade: a, estável; b, assintoticamente estável; c, instável.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O segundo método de Lyapunov (ou método direto de Lyapunov), baseado no conceito de energia dos sistemas, é o método clássico para o estudo estabilidade de sistemas dinâmicos. Ele tem como objetivo estudar o comportamento das trajetórias do sistema nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, através da utilização de funções definidas positivas denominadas funções de Lyapunov. A escolha dessas funções é feita de forma particular para cada caso, e podem ser interpretadas como a energia total do sistema. Assim, as funções de Lyapunov podem ser associadas à energia necessária para o deslocamento entre pontos do espaço de estados (VIDYASAGAR, 1993).

A estabilidade, segundo Lyapunov, do ponto de equilíbrio, $x = 0$, do sistema dinâmico discreto no tempo (2), é assegurada pelo teorema a seguir (KALMAN; BERTRAM, 1959; KHALIL, 2002; LASALLE, 1986).

Teorema 1. *Considere $x = 0$ o ponto de equilíbrio do sistema* (2). *Seja $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua definida em uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de $x = 0$. Se:*

(i) $V(0) = 0$ *e* $V(x(k)) > 0$, $\forall x(k) \neq 0$,

(ii) $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq 0$, $\forall x(k) \in U\backslash\{0\}$,
então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ *é localmente estável.*

Se além disso:

(iii) $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$, $\forall x(k) \in U\backslash\{0\}$,
então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ *é localmente assintoticamente estável.*

Uma função escalar que satisfaz as condições (i) e (ii) ou (i) e (iii) do Teorema 1, é denominada função de Lyapunov. Quando as condições (i) e (ii) ((i) e (iii)) são satisfeitas, $U \subset \mathbb{R}^n$ é chamado domínio de estabilidade (assintótica) local do sistema (2). Se $U = \mathbb{R}^n$ e $V(x(k)) \longrightarrow \infty$ quando $\|x(k)\| \longrightarrow \infty$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é globalmente (assintoticamente) estável.

A função $V(x(k))$ que satisfaz a condição (i), é dita definida positiva. Se $V(0) = 0$ e $V(x(k)) \geq 0$, $\forall x(k) \neq 0$, então $V(x(k))$ é dita semi-definida positiva.

É importante evidenciar que o Teorema 1, apresenta uma condição suficiente de estabilidade. Assim, caso um teste de análise de estabilidade falhe para uma particular função candidata $V(x(k))$, nada pode ser concluído com relação à instabilidade, pois outra função de Lyapunov que atenda as condições do Teorema 1 pode existir.

2.2 DOMÍNIO DE ATRAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO

Além da estabilidade assintótica do sistema, considere o problema de determinar uma região que contém o ponto de equilíbrio do sistema (2), no espaço de estado, em que toda trajetória iniciada nessa região, permanece nela por todo tempo futuro e se aproxima do ponto de equilíbrio à medida que $k \rightarrow \infty$. Nesse caso, essa região é dita positivamente invariante e assintoticamente estável (ROCHA, 1994).

Considere $x(0) = x_0$, uma condição inicial e seja $\chi(k,x_0)$ a trajetória, iniciada em x_0, do sistema (2), cujo ponto de equilíbrio é a origem. O conjunto definido por:

$$\mathscr{R}_A := \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^{n_x} : \lim_{k \to \infty} \chi(k,x_0) = 0 \right\}, \tag{3}$$

é denominado domínio de atração (DA) do ponto de equilíbrio ou domínio de atração do sistema (5). Note que $\mathscr{R}_A$ é um conjunto composto pelas condições iniciais x_0, tais que todas as trajetórias nelas iniciadas convergem para a origem.

Como relatado em (HU; LIN, 2001), não existem métodos disponíveis na literatura que permitam encontrar $\mathscr{R}_A$. Geralmente, é possível determinar somente um subconjunto de $\mathscr{R}_A$, ou seja, apenas uma estimativa do DA, $\mathscr{R}_A$, pode ser estabelecida.

Neste trabalho, é de interesse o estudo da estabilidade assintótica do sistema (2) a partir de funções de Lyapunov. Assim, utilizando a candidata a função de Lyapunov escolhida, é possível encontrar uma estimativa para o DA, $\mathscr{R}_A$.

Considere uma candidata a função de Lyapunov arbitrária $V(x(k))$. O conjunto elipsoidal

$$\Omega(V(x(k)),\gamma) := \{x(k) \in \mathbb{R}^n : \; V(x(k)) \leq \gamma\}, \tag{4}$$

com $\gamma > 0$ um número real conhecido, será uma estimativa para a domínio de atração se for um conjunto limitado e estiver contido em $\mathscr{R}_A$.

O conjunto $\Omega(V(x(k)),\gamma)$ é dito ser contrativamente invariante se $\Omega(V(x(k)),\gamma)\backslash\{0\} \subseteq \{x(k) \in \mathbb{R}^{n_x} : \; \Delta V(x(k)) < 0\}$. Neste caso, o conjunto elipsoidal definido em (4), é uma estimativa do DA (3), ou seja, $\Omega(V(x(k)),\gamma) \subseteq \mathscr{R}_A$ (CAO; LIN, 2003). Porém, em grande parte dos casos, essa estimativa do DA pode ser muito conservadora (KHALIL, 2002; HU; LIN, 2001), necessitando de condições para expandi-la.

2.3 SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO DESCRITOS POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

A descrição de sistemas não lineares por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (TAKAGI; SUGENO, 1985) possibilita representá-los como uma combinação de modelos locais lineares, ponderados por funções de pertinência. Essa representação é uma importante ferramenta no projeto de controladores para sistemas não lineares, que inclusive facilita o uso de LMIs (BOYD *et al.*, 1994).

Os modelos fuzzy T-S consistem em regras do tipo SE-ENTÃO, que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema. As regras SE-ENTÃO combinam os modelos lineares locais para a obtenção de uma representação do sistema não linear.

Considere o sistema não linear incerto descrito por

$$x(k+1) = f(z(k))x(k) + g(z(k))u(k), \tag{5}$$

sendo $f(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $g(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ funções não lineares, $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) & \cdots & x_{n_x}(k) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado, $u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) & \cdots & u_{n_u}(k) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de entrada, $z(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) & \cdots & z_{n_z}(k) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_z}$ um vetor composto pelo vetor de estado $x(k)$ e um vetor $v = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_{n_v} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_v}$, cujos elementos v_ς, $\varsigma \in \mathbb{K}_{n_v}$, são parâmetros incertos limitados invariantes no tempo de (5). Então,

$$z(k) = \begin{bmatrix} x_{a_1}(k) & \cdots & x_{a_q}(k) & v_1 & \cdots & v_{n_v} \end{bmatrix}^T, \tag{6}$$

sendo o conjunto de índices $\{a_1, a_2, \cdots, a_q\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n_x\}$, tal que $q + n_v = n_z$, $q \leq n_x$.

Sendo assim, o vetor $z(k)$ pode ser reescrito como

$$z(k) = \Upsilon x(k) + \Upsilon^* v, \tag{7}$$

sendo $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ e $\Upsilon^* \in \mathbb{R}^{n_z \times n_v}$.

Por exemplo, para $n_x = 4$, $n_v = 1$ e $n_z = 3$, com $z(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) & z_2(k) & z_3(k) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1(k) & x_3(k) & v_1 \end{bmatrix}^T$, ou seja, $q = 2$, segue que

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Upsilon^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tal que

$$\begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ z_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1.$$

Um modelo fuzzy T-S descreve com precisão a dinâmica original do sistema não linear (5) em uma determinada região do espaço de estados. Nessa região as não linearidades do sistema, que podem depender dos parâmetros incertos da planta, devem ser limitadas. Fora desse subconjunto do espaço de estados, a representação fuzzy T-S não é garantida.

Um procedimento sistemático para a representação do sistema não linear (5) pelos modelos fuzzy T-S é apresentado em (TANIGUCHI *et al.*, 2001; ALVES, 2017). Este procedimento utiliza o máximo e mínimo valores das não linearidades das entradas de $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$, e das incertezas do sistema associada a necessária região de operação no espaço de estado.

Na literatura recente (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015; ALVES *et al.*, 2016b; OLIVEIRA *et al.*, 2018a), conjuntos compactos são considerados para representarem as regiões de operação do sistema fuzzy T-S. Sendo assim, os Teoremas 2 e 3, presentes em (BARTLE, 1976), serão utilizados para concepção da região de operação do sistema fuzzy T-S.

Geralmente não é uma tarefa trivial verificar que um conjunto é compacto. Sendo assim, o seguinte teorema caracteriza completamente subconjuntos compactos de um espaço

$\mathbb{R}^n$.

Teorema 2. (*Heine-Borel*) *Um subconjunto $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, é compacto se, e somente se, ele é fechado e limitado.*

Uma importante propriedade das funções contínuas definidas em um subconjunto compacto de um espaço $\mathbb{R}^n$, é enunciado no Teorema 3.

Teorema 3. (*Preservação de compacidade*) *Se $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e φ é contínua em $\mathcal{X}$, então $\varphi(\mathcal{X})$ é compacto.*

De acordo com o Teorema 2 (Heine-Borel), o Teorema 3 poderia ser reformulado dizendo que se $\mathcal{X}$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$ e se φ é contínua em $\mathcal{X}$ e com imagem em $\mathbb{R}^m$, então $\varphi(\mathcal{X})$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}^m$.

Considerando a discussão acima e os Teoremas 2 e 3, suponha que o vetor de incertezas $v \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n_v}$, sendo $\mathcal{V}$ um conjunto compacto, definido por

$$\mathcal{V} := \{v \in \mathbb{R}^{n_v} : \ v_\varsigma \in [\underline{v_\varsigma}, \ \overline{v_\varsigma}], \ \varsigma \in \mathbb{K}_{n_v}\}, \tag{8}$$

em que, para todo $\varsigma \in \mathbb{K}_{n_v}$, $\underline{v_\varsigma}$ e $\overline{v_\varsigma}$ são números reais conhecidos.

Considere uma região de operação $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ no espaço de estados definido como segue (LEE, 2013):

$$\mathcal{L} := \{x(k) \in \mathbb{R}^{n_x} : \ x_{a\eta}(k) \in [-\bar{x}_{a\eta}, \ \bar{x}_{a\eta}], \ \eta \in \mathbb{K}_q\}, \tag{9}$$

sendo $q \leq n_x$ e $\bar{x}_{a\eta} > 0$ um número real conhecido, para todo $\eta \in \mathbb{K}_q$.

Suponha que para $v \in \mathcal{V}$ e $x(k) \in \mathcal{L}$, o sistema (5) possa ser representado por modelos fuzzy T-S. Note que, quando $q < n_x$, então as funções não lineares f e g do sistema (5) não estarão definidas em $\mathcal{L} \times \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n_x + n_v}$. Neste caso, nem todas as variáveis de estado compõem os vetores $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$, $n_z = q + n_v$ definidos em (6). Veja ainda que, de acordo com o Teorema 2, se ocorresse $q < n_x$, então $\mathcal{L}$ definido em (9), não seria um conjunto compacto, pois seria ilimitado.

Sendo assim, considere o compacto $\mathcal{G}$, uma projeção de $\mathcal{L}$ em $\mathbb{R}^q$, $q \leq n_x$, definido por

$$\mathcal{G} := \{\xi(k) \in \mathbb{R}^q : \ \xi_\eta(k) = x_{a\eta}(k) \in [-\bar{x}_{a\eta}, \ \bar{x}_{a\eta}], \ \eta \in \mathbb{K}_q\}. \tag{10}$$

Perceba que $\mathcal{G}$, é fechado e limitado. Logo do Teorema 2, segue que $\mathcal{G}$ é compacto.

Observação 1. *Para cada $x(k) \in \mathcal{L}$, existe um único elemento correspondente $\xi(k) \in \mathcal{G}$.*

Como visto anteriormente, o vetor $z(k)$ dado em (6), é composto pelos parâmetros incertos, v_ς, $\varsigma \in \mathbb{K}_{n_v}$, do sistema e pelas variáveis de estado, $x_{a\eta}(k)$, $\eta \in \mathbb{K}_q$, que possuem restrições na região de operação. Assim, o conjunto que contém o vetor $z(k)$ pode ser definido pelo conjunto compacto

$$\mathcal{Z} := \mathcal{G} \times \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^{n_z}. \tag{11}$$

Ou seja, as funções não lineares f e g do sistema (5), estão definidas em $\mathcal{Z}$.

Dessa forma, de acordo com a Observação 1, para cada $x(k) \in \mathcal{L}$ e $v \in \mathcal{V}$, a variável correspondente $z(k) \in \mathcal{Z}$.

Suponha que as funções não lineares em (5), f e g, são contínuas em $\mathcal{Z}$. Assim, como $\mathcal{Z}$ dado em (11) é compacto, do Teorema 3, segue que $f(\mathcal{Z})$ e $g(\mathcal{Z})$ são conjuntos compactos, isto é, f e g são limitadas para todo $z(k) \in \mathcal{Z}$. Logo os limites inferiores e superiores das não linearidades do sistema (5), podem ser determinados. Dessa forma, baseado em (TANIGUCHI *et al.*, 2001; SANTIM *et al.*, 2012; ALVES, 2017), para todo $x(k) \in \mathcal{L}$ e $v \in \mathcal{V}$, o sistema não linear incerto (5), pode ser exatamente representado por um modelo fuzzy T-S, cuja i-ésima regra pode ser descrita como

$$\begin{array}{ll} \underline{\textit{Regra i:}} & \text{SE } z_1(k) \text{ é } M_1^i \text{ e } \ldots \text{ e } z_{n_z}(k) \text{ é } M_{n_z}^i, \\ & \text{ENTÃO} \quad x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \end{array} \tag{12}$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r$, M_m^i o conjunto fuzzy m da regra i, $m \in \mathbb{K}_{n_z}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ matrizes do sistema, $z_1(k), \cdots, z_{n_z}(k)$ variáveis premissas e r o número de regras fuzzy.

Seja $M_m^i(z_m(k)) \in [0,1]$ o grau de pertinência da variável $z_m(k)$ ao conjunto M_m^i. O grau de pertinência da i-ésima regra é dada por

$$W_i(z(k)) = \prod_{m=1}^{n_z} M_m^i(z_m(k)).$$

Veja que $W_i(z(k)) \in [0,1]$.

O modelo matemático final do sistema fuzzy, que é uma representação da dinâmica da planta, é inferida como a soma ponderada dos r modelos locais, usando como ponderação o grau de pertinência de cada regra. Ou seja, definindo-se o grau de pertinência normalizado (função de pertinência normalizada) de cada modelo local (A_i, B_i) como

$$h_i(z(k)) = \frac{W_i(z(k))}{\sum_{i=1}^{r} W_i(z(k))}, \tag{13}$$

a partir de (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998), utilizando as definições dadas em (1),

$x(k+1)$ dado em (5), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k))\,(A_i x(k) + B_i u(k))$$
$$= A_{z(k)} x(k) + B_{z(k)} u(k), \tag{14}$$

sendo os elementos $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$, do vetor $h(z(k)) = [h_1(z(k))\, h_2(z(k)) \ldots h_r(z(k))]^T$, tais que

$$\sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) = 1, \text{ e } h_i(z(k)) \geq 0, \ i \in \mathbb{K}_r. \tag{15}$$

Observação 2. *A representação* (14) *do sistema não linear incerto* (5)*, usa um procedimento apresentado em (SANTIM et al., 2012; OLIVEIRA et al., 2018a; SOUZA et al., 2014; ALVES et al., 2016b). Para obter o modelo fuzzy T-S é necessário calcular os limites dos parâmetros incertos e das não linearidades do sistema. Assim, o modelo fuzzy T-S apresenta modelos locais conhecidos e funções de pertinência normalizadas incertas. Utilizando o método apresentado em (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM et al., 2012; SOUZA et al., 2014), é possível obter expressões das funções $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$, que podem depender dos parâmetros incertos v_ς, $\varsigma \in \mathbb{K}_r$, no caso do sistema não linear incerto* (5)*. Neste caso, como $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$, pode depender de parâmetros incertos, então leis de controle como PDC não podem ser implementadas, pois $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$, não estão disponíveis. Assim, uma alternativa para o controle de sistemas incertos é a aplicação de uma lei de controle chaveada adequada, que não utiliza as funções de pertinência em sua implementação, como em (SOUZA et al., 2014; ALVES et al., 2016b; OLIVEIRA et al., 2018a), em que esta estratégia foi implementada com sucesso no controle de um levitador magnético, um sistema bola e viga e uma suspensão ativa, respectivamente.*

2.4 FUNÇÃO DE LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICA

Baseado na FLF, proposta em (GUERRA; VERMEIREN, 2004), neste trabalho, a seguinte função não quadrática será adotada como candidata a função de Lyapunov:

$$V(x(k)) = x^T(k) G^{-T} \left(\sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) P_i \right) G^{-1} x(k)$$
$$= x^T(k) G^{-T} P_{z(k)} G^{-1} x(k), \tag{16}$$

sendo $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, uma matriz não singular e $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i \in \mathbb{K}_r$, matrizes simétricas positivas definidas.

2.5 LEI DE CONTROLE CHAVEADA

Suponha que as funções de pertinência normalizadas $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$, não podem ser computadas em tempo real, pois dependem de parâmetros incertos. Então $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$, não podem compor a lei de controle. Sendo assim, considere a lei de controle chaveada dada por:

$$\begin{aligned} u(k) &= u_\sigma(k) = -F_{\sigma(k)}G^{-1}x(k), \\ \sigma &= \sigma(k) = \arg^* \min_{l \in \mathbb{K}_r} \left\{ x^T(k)G^{-T}Q_lG^{-1}x(k) \right\}, \end{aligned} \tag{17}$$

sendo que $\arg^* \min_{l \in \mathbb{K}_r} \left\{ x^T(k)G^{-T}Q_lG^{-1}x(k) \right\}$ denota o menor índice $\sigma \in \mathbb{K}_r$, tal que $x^T(k)G^{-T}Q_{\sigma(k)}G^{-1}x(k) = \min_{l \in \mathbb{K}_r} \left\{ x^T(k)G^{-T}Q_lG^{-1}x(k) \right\}$. Note que para implementação da lei de controle chaveada, não é necessário usar as expressões das funções de pertinência.

A lei de controle (17), seleciona um ganho do controlador de realimentação do vetor de estado $K_{\sigma(k)} = F_{\sigma(k)}G^{-1}$, que pertence ao conjunto de ganhos $\{F_lG^{-1} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}, l \in \mathbb{K}_r\}$. Para a escolha do ganho do controlador, a lei de chaveamento σ utiliza matrizes simétricas auxiliares Q_l, $l \in \mathbb{K}_r$, que são calculadas usando critério LMI. A minimização de $x^T(k)G^{-T}Q_lG^{-1}x(k)$, para $l \in \mathbb{K}_r$ e $x(k) \neq 0$, causa a redução da variação de uma função de Lyapunov adequada, $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$ (OLIVEIRA *et al.*, 2018b), que é negativa para $x(k) \neq 0$.

Dessa forma, o sistema (14) controlado por (17), pode ser representado como

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) \left(A_i - B_iF_{\sigma(k)}G^{-1} \right) x(k) \\ &= \left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1} \right) x(k). \end{aligned} \tag{18}$$

3 CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO VIA MODELOS FUZZY T-S

Neste capítulo a lei de controle chaveada (17) é empregada na estabilização do sistema não linear incerto discreto no tempo (5), utilizando o modelo fuzzy T-S (14). Alguns projetos de controle, que utilizam a lei de controle chaveada e que buscam a estabilização do sistema não linear discreto no tempo são propostos.

Neste capítulo será considerado que o sistema não linear (5) opera na região onde a representação pelo modelo fuzzy T-S (14) é valida. Ou seja, é considerado que $x(k) \in \mathcal{L}$ definido em (9), $v \in \mathcal{V}$ apresentado em (8) e consequentemente $z(k) \in \mathcal{Z}$ descrita em (11). Posteriormente, no próximo capítulo, condições LMIs para que as variáveis de estado permaneçam na região de operação do sistema fuzzy T-S (14), serão fornecidas.

Inicialmente, é proposto um lema auxiliar, necessário na prova de um dos teoremas principais deste capítulo. Na sequência um projeto de controlador chaveado discreto é proposto. Um procedimento que utiliza um controlador linear invariante no tempo é apresentado e comparado com a metodologia proposta que utiliza uma lei de controle chaveada. Tal comparação é oportuna, pois ambos os procedimentos não utilizam as funções de pertinência na implementação da lei de controle. O projeto de controle chaveado é estendido para garantir, além da estabilidade local, uma taxa de decaimento α, especificada pelo projetista. Posteriormente, dois projetos de controle chaveado, que consideram as variações das funções de pertinência limitadas e utilizam a teoria de hiper-retângulos fechados são propostos. Para prova desses resultados, dois lemas auxiliares são apresentados. Em seguida, análises teóricas de estabilidade comparam as metodologias propostas.

3.1 PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO PARA O PROBLEMA DA ESTABILIDADE LOCAL

Considerando válida a representação do sistema (5), pelo modelo fuzzy T-S (14), nesta seção, serão apresentadas condições para estabilização local do sistema (5).

Os projetos de controle chaveado propostos neste trabalho, baseiam-se na seguinte relação de equivalência, apresentada em (OLIVEIRA; BERNUSSOU; GEROMEL, 1999), que considera uma matriz de Lyapunov P:

Teorema 4. *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Existe uma matriz simétrica $P > 0$, tal que*

$$A^T PA - P < 0; \tag{19}$$

(ii) *Existe uma matriz simétrica P e uma matriz G tais que*

$$\begin{bmatrix} P & (GA)^T \\ GA & G + G^T - P \end{bmatrix} > 0. \tag{20}$$

Demonstração: Note que a LMI (19) é equivalente à $P - (A^T P)P^{-1}(PA) > 0$. Então aplicando o complemento de Schur nesta última expressão, observe que a LMI (20) é verificada para $G = P$. Portanto (i) implica (ii). Por outro lado, de (20), segue que $P > 0$. Então multiplicando $\xi := \begin{bmatrix} I & -A^T \end{bmatrix}$ à esquerda e ξ^T à direita de (20), (19) é obtida. O que estabelece que (ii) implica (i). ∎

A condição (ii) aparece como uma expansão direta da condição (i). Com a introdução de uma nova matriz adicional G, obtém-se uma desigualdade matricial linear na qual a matriz Lyapunov P não está envolvida em nenhum produto com a matriz dinâmica A. Esta característica permite escrever uma nova condição de estabilidade robusta que, embora suficiente, é considerada menos conservadora devido à presença do grau extra de liberdade proporcionado pela introdução da matriz G. Note que esta matriz extra não é nem mesmo restrita a ser simétrica (OLIVEIRA; BERNUSSOU; GEROMEL, 1999).

Sendo assim, uma forma encontrada neste trabalho, de incluir a matriz G nas condições de projeto de controle do sistema fuzzy T-S (14), e na lei de controle chaveada, consiste em considerar a função de Lyapunov não quadrática (16). Dessa forma, a matriz G deixa de ser apenas uma matriz de folga, e passa a integrar o projeto de controle chaveado.

3.1.1 Condições para a estabilidade local

O seguinte lema proposto, será necessário para a formulação do projeto de controle chaveado discreto para o problema de estabilização local do sistema fuzzy T-S (14).

Lema 1. *Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas Z_i, $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_r$, tais que*

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_i G - B_i F_l)^T \\ A_i G - B_i F_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0. \tag{21}$$

Então, considerando a lei de controle chaveada (17), *sendo os ganhos do controlador dados* *por* $F_l G^{-1}$*,* $l \in \mathbb{K}_r$*, a seguinte condição também é satisfeita, para todo* $x(k) \neq 0$*,*

$$x^T(k)\left\{\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)^T \left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)\right\}x(k)$$
$$< x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k). \quad (22)$$

Demonstração: Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas Z_i, $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, tais que (21) seja satisfeita para todo $i,j,l \in \mathbb{K}_r$.

Multiplicando por $h_i(z(k))$ e $h_j(z(k+1))$ a LMI (21) e somando i e j de 1 até r, considerando (15), obtém-se

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(k))h_j(z(k+1)) \begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_iG - B_iF_l)^T \\ A_iG - B_iF_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0, \quad (23)$$

para todo $l \in \mathbb{K}_r$.

A partir de (23), substituindo l por $\sigma(k)$ e utilizando as notações dadas em (1), então

$$\begin{bmatrix} Z_{z(k)} + Q_{\sigma(k)} & \left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)^T \\ A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)} & G + G^T - P_{z(k+1)} \end{bmatrix} > 0. \quad (24)$$

De (21), note que $G + G^T - P_j > 0$ e consequentemente, $G + G^T > 0$, o que garante a existência de G^{-1}. De fato, suponha por absurdo G não invertível. Então existe $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, com $x \neq 0$, tal que $Gx = 0$. Logo

$$\begin{aligned} x^T\left(G + G^T\right)x &= x^T(G)x + x^T\left(G^T\right)x \\ &= x^T(Gx) + (Gx)^T x \\ &= x^T(0) + (0)^T x \\ &= 0, \text{ sendo } x \neq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Assim, de (25), segue que $G + G^T$ não é positiva definida, o que seria um absurdo. Tal absurdo veio da suposição de que o núcleo de G é diferente do espaço unitário nulo, $Nul(G) \neq \{0\}$. Portanto $Nul(G) = \{0\}$ e consequentemente G é invertível.

Pré e pós multiplicando (24) por $T := \begin{bmatrix} I & -\left(G^{-1}\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)\right)^T \end{bmatrix}$ e T^T respectivamente, obtém-se:

$$Z_{z(k)} + Q_{\sigma(k)} - \left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)^T G^{-T}\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right) - \left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)^T$$
$$\times G^{-}\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right) + \left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)^T G^{-T}\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)$$
$$+ \left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)^T G^{-1}\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)$$

$$-\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)^T G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right) > 0. \quad (26)$$

Então,

$$\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)^T \left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right) - Z_{z(k)} - Q_{\sigma(k)} < 0. \quad (27)$$

Multiplicando G^{-T} à esquerda e G^{-1} à direita de (27), obtém-se

$$\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)^T \left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right) \\ < G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{\sigma(k)}G^{-1}. \quad (28)$$

Dessa forma, para $x(k) \neq 0$, tem-se que

$$x^T(k)\left\{\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)^T \left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)\right\}x(k) \\ < x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{\sigma(k)}G^{-1}\right\}x(k). \quad (29)$$

De (1) e (17), lembrando que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual à qualquer combinação convexa destes números, segue que

$$x^T(k)G^{-T}Q_{\sigma(k)}G^{-1}x(k) = \arg^* \min_{l\in\mathbb{K}_r}\left\{x^T(k)G^{-T}Q_l G^{-1}x(k)\right\} \\ \leq \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k))\left\{x^T(k)G^{-T}Q_i G^{-1}x(k)\right\} = x^T(k)G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}x(k). \quad (30)$$

Logo, para $x(k) \neq 0$, de (29) e (30), segue

$$x^T(k)\left\{\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)^T \left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)\right\}x(k) \\ \leq x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{\sigma(k)}G^{-1}\right\}x(k) \\ \leq x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k). \quad (31)$$

■

Considerando uma candidata a função de Lyapunov não quadrática da forma dada em (16) e a lei de controle chaveada (17), supondo que $x(k) \in \mathcal{L}$, $v \in \mathcal{V}$ e consequentemente $z(k) \in \mathcal{Z}$, o seguinte teorema é proposto.

Teorema 5. *Considere que existam matrizes simétricas definidas positivas* $P_i \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$*, matrizes simétricas* $Z_i,\ Q_i \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$*, matrizes* $F_l \in \mathbb{R}^{n_u\times n_x}$ *e* $G \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$*, para todo*

$i,j,l \in \mathbb{K}_r$, tais que

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_i G - B_i F_l)^T \\ A_i G - B_i F_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0, \tag{32}$$

$$Z_i + Q_i - P_i \leq 0. \tag{33}$$

Então, a lei de controle chaveado (17) com os ganhos do controlador $F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, fazem o ponto de equilíbrio $x(k) = 0$ do sistema (14), localmente assintoticamente estável.

Demonstração: Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas Z_i, $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, tais que (32) e (33) são satisfeitas, para todo i, j, $l \in \mathbb{K}_r$.

De (1), lembrando que $h_i(z(k)) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) = 1$, multiplicando (33) por $h_i(z(k))$ e somando i de 1 até r, obtém-se a seguinte inequação

$$Z_{z(k)} + Q_{z(k)} - P_{z(k)} \leq 0. \tag{34}$$

De (32), note que $G + G^T - P_j > 0$, para todo $j \in \mathbb{K}_r$. Como $P_j > 0$, para todo $j \in \mathbb{K}_r$, a existência de G^{-1} é assegurada. Multiplicando G^{-T} à esquerda e G^{-1} à direita de (34), para $x(k) \neq 0$, obtém-se

$$x^T(k)\Big\{G^{-T} Z_{z(k)} G^{-1} + G^{-T} Q_{z(k)} G^{-1} - G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}\Big\}x(k) \leq 0. \tag{35}$$

De acordo com o Lema 1, considerando as notações definidas em (1) e a lei de controle chaveado (17), (32) garante que (22) é satisfeita. Logo, para $x(k) \neq 0$, de (22) e (35), segue

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ \Big(A_{z(k)} - B_{z(k)} F_{\sigma(k)} G^{-1}\Big)^T \Big(G^{-T} P_{z(k+1)} G^{-1}\Big) \Big(A_{z(k)} - B_{z(k)} F_{\sigma(k)} G^{-1}\Big) \Big\}x(k) \\ < x^T(k)\Big\{G^{-T} Z_{z(k)} G^{-1} + G^{-T} Q_{z(k)} G^{-1}\Big\}x(k) \\ \leq x^T(k) G^{-T} P_{z(k)} G^{-1} x(k). \end{aligned} \tag{36}$$

Assim,

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ \Big(A_{z(k)} - B_{z(k)} F_{\sigma(k)} G^{-1}\Big)^T \Big(G^{-T} P_{z(k+1)} G^{-1}\Big) \\ \times \Big(A_{z(k)} - B_{z(k)} F_{\sigma(k)} G^{-1}\Big) - G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}\Big\}x(k) < 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Considere o sistema controlado (14) com a lei de controle (17), dado por (18) e a candidata a função de Lyapunov dada em (16). Então a inequação (37) implica que $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$, para $x(k) \neq 0$.

Portanto, a lei de controle chaveado (17), torna o ponto de equilíbrio, $x(k) = 0$, do sistema não linear incerto (14), localmente assintoticamente estável. ■

Uma outra alternativa para a estabilização local do sistema não linear incerto (5), sem a necessidade de usar as funções de pertinência, é adotar um controlador linear invariante no tempo. Então, considere a lei de controle dada por

$$u(k) = -Kx(k). \tag{38}$$

Sendo assim, de (1), o sistema (14) com a lei de controle (38) pode ser representado como

$$x(k+1) = \left(A_{z(k)} - B_{z(k)}K\right)x(k). \tag{39}$$

Utilizando uma candidata a função de Lyapunov não quadrática da forma dada em (16), as condições de estabilização com um controlador linear e invariante no tempo, dado por (38), pode ser enunciado de forma similar ao Teorema 5.

Corolário 1. *Considere que existam matrizes simétricas positivas definidas* $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$*, matrizes* $F \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ *e* $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$*, tais que as seguintes LMIs são factíveis, para todo* i*,* $j \in \mathbb{K}_r$

$$\begin{bmatrix} P_i & (A_iG - B_iF)^T \\ A_iG - B_iF & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0. \tag{40}$$

Então, a lei de controle (38) *com o controlador linear e invariante no tempo dado por* $K = FG^{-1}$*, torna o ponto de equilíbrio* $x(k) = 0$ *do sistema não linear incerto* (14)*, localmente assintoticamente estável.*

Demonstração: Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, tais que (40) é satisfeita, para todo i , $j \in \mathbb{K}_r$.

De (40), note que $G + G^T - P_j > 0$, para todo $j \in \mathbb{K}_r$. Como $P_j > 0$, para todo $j \in \mathbb{K}_r$, a existência de G^{-1} está assegurada.

Multiplicando (40) por $h_i(z(k))$ e $h_j(z(k+1))$, tomando a soma de $i = 1$ a $i = r$ e $j = 1$ a $j = r$, utilizando as notações definidas em (1), segue que, para $x(k) \neq 0$,

$$\begin{bmatrix} P_{z(k)} & (A_{z(k)}G - B_{z(k)}F)^T \\ A_{z(k)}G - B_{z(k)}F & G + G^T - P_{z(k+1)} \end{bmatrix} > 0. \tag{41}$$

Pré e pós multiplicando (41) por $\left[I \quad -\left(G^{-1}\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F\right)\right)^T\right]$ e seu transposto, respectivamente, e pré e pós multiplicando o resultado por G^{-T} e G^{-1}, respectivamente, para $x(k) \neq 0$, obtém-se

$$x^T(k)\Big\{\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}FG^{-1}\right)^T\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right) \\ \times\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}FG^{-1}\right) - P_{z(k)}\Big\}x(k) < 0. \quad (42)$$

Considerando o sistema de controle (39) e a candidata a função de Lyapunov (16), de (42), segue que, para $x(k) \neq 0$, $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$. Portanto, o controlador linear invariante no tempo (38), com ganho FG^{-1}, torna o ponto de equilíbrio, $x(k) = 0$, do sistema não linear incerto (14), localmente assintoticamente estável.

3.1.1.1 *Análise de estabilidade*

O seguinte teorema apresenta uma análise teórica da estabilidade que compara o procedimento proposto no Teorema 5, que utiliza a lei de controle chaveada (17), com o procedimento apresentado no Corolário 1, que utiliza um controlador linear invariante no tempo dado em (38). É provado que se as condições LMIs de estabilidade para o sistema em malha fechada com um controlador invariante no tempo são satisfeitas, então as condições LMIs de estabilidade, obtidas utilizando a lei de controle chaveada também são satisfeitas. Uma análise semelhante foi apresentada em (BUZETTI, 2017) para o controle chaveado de sistemas contínuos no tempo.

Teorema 6. *Suponha que a condição do Corolário 1,* (40)*, relacionada ao sistema de controle* (39) *com a lei de controle* (38)*, seja satisfeita. Então, as condições do Teorema 5,* (32) *e* (33)*, relacionadas ao sistema de controle* (18) *com a lei de controle chaveada* (17)*, também são satisfeitas.*

Demonstração: Suponha que existam matrizes positivas definidas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, tais que (40) seja satisfeita, para todo i , $j \in \mathbb{K}_r$.

Agora, defina $S_{ij} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, dada por

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} P_i & (A_iG - B_iF)^T \\ A_iG - B_iF & G + G^T - P_j \end{bmatrix}, \quad (43)$$

para todo i, $j \in \mathbb{K}_r$.

De (40), observe que todos os autovalores de S_{ij} são maiores que zero, para todo i, $j \in \mathbb{K}_r$. Em particular, os autovalores mínimos e máximos de S_{ij}, definidos como $\lambda_{\min(S_{ij})}$ e $\lambda_{\max(S_{ij})}$, respectivamente, são também maiores que zero.

Considere um escalar não negativo ε, tal que

$$0 \leq \varepsilon < \lambda_{\min(S_{ij})}, \qquad \forall\, i,\, j \in \mathbb{K}_r, \tag{44}$$

e matrizes $\Theta \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ e $\Xi \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, dadas por

$$\Theta = \begin{bmatrix} \varepsilon I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Xi = \begin{bmatrix} \varepsilon I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix}. \tag{45}$$

Lembrando que $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$, defina $\bar{x}(k) \in \mathbb{R}^{2n_x}$. Considere $\|\bar{x}(k)\|^2$ a norma ao quadrado do vetor $\bar{x}(k) \in \mathbb{R}^{2n_x}$, tal que $\|\bar{x}(k)\|^2 = \bar{x}(k)^T \bar{x}(k)$. Para $\bar{x}(k) \neq 0$, segue que

$$0 < \lambda_{\min(S_{ij})} \|\bar{x}(k)\|^2 \leq \bar{x}^T(k) S_{ij} \bar{x}(k) \leq \lambda_{\max(S_{ij})} \|\bar{x}(k)\|^2. \tag{46}$$

De (44), (45) e (46), obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{x}^T(k)\Big\{S_{ij} - \Xi\Big\}\bar{x}(k) &= \bar{x}^T(k) S_{ij} \bar{x}(k) - \bar{x}^T(k) \Xi \bar{x}(k) \\ &= \bar{x}^T(k) S_{ij} \bar{x}(k) - \varepsilon \|\bar{x}(k)\|^2 \\ &> \bar{x}^T(k) S_{ij} \bar{x}(k) - \lambda_{\min(S_{ij})} \|\bar{x}(k)\|^2 \\ &\geq 0, \end{aligned} \tag{47}$$

e

$$\bar{x}^T(k)\Big\{S_{ij} - \Theta\Big\}\bar{x}(k) \geq \bar{x}^T(k)\Big\{S_{ij} - \Xi\Big\}\bar{x}(k) > 0. \tag{48}$$

Portanto, de (43) e (45), a inequação (48) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P_i - \varepsilon I & (A_i G - B_i F)^T \\ A_i G - B_i F & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0. \tag{49}$$

Agora, de (44) e (49), considerando $F_l = F$, $Z_i = P_i - \varepsilon I$ e $Q_l = 0$, para $i,\, j,\, l \in \mathbb{K}_r$, segue que

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_i G - B_i F_l)^T \\ A_i G - B_i F_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0, \tag{50}$$

e

$$Z_i + Q_i - P_i = (P_i - \varepsilon I) + 0 - P_i = -\varepsilon I \leq 0. \tag{51}$$

Note que, (50) e (51) são equivalentes a (32) e (33), respectivamente. Portanto, as condições do Teorema 5 são satisfeitas. ■

3.1.2 Condições para a estabilidade local com taxa de decaimento

Além da estabilização, em um projeto de controle outros requisitos de desempenho tais como a velocidade de resposta do sistema controlado, restrições nas variáveis de estado e no sinal de controle são fatores importantes que devem ser analisados. Nesta seção, o tempo de acomodação do sistema controlado, que está relacionada com a taxa de decaimento (α), será abordado.

Considere uma candidata a função de Lyapunov arbitrária $V(x(k))$, com $\Delta V(x(k)) < 0$, para $x(k) \neq 0$. De acordo com (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TANAKA; WANG, 2001a), a taxa de decaimento $0 < \alpha < 1$, é obtida se a condição

$$\Delta V(x(k)) \leq (\alpha^2 - 1)V(x(k)),$$

for satisfeita para toda a trajetória $x(k)$ do sistema. Neste caso, as trajetórias convergem para a origem (sistema assintoticamente estável) e, além disso, α estabelece um limitante para a taxa de decaimento dos estados, (ELIA; MITTER, 2001), isto é,

$$\|x(k)\| \leq \alpha^k \|x(0)\|, \ \forall k \geq 0.$$

Sendo assim, adotando uma candidata a função de Lyapunov não quadrática da forma dada em (16) e a lei de controle chaveado (17). Supondo que $x(k) \in \mathcal{L}$, $v \in \mathcal{V}$ e consequentemente $z(k) \in \mathcal{Z}$, o seguinte resultado aborda o problema de garantir uma taxa de decaimento $\alpha > 0$, o que implica também na estabilização do sistema, pois neste caso $\Delta V(x(k)) \leq (\alpha^2 - 1)V(x(k)) < 0$, para $x(k) \neq 0$.

Teorema 7. *Considere que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas Z_i, $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e um escalar $0 < \alpha < 1$, para todo i,j,l $\in \mathbb{K}_r$, tais que:*

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_iG - B_iF_l)^T \\ A_iG - B_iF_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0, \tag{52}$$

$$Z_i + Q_i - \alpha^2 P_i \leq 0. \tag{53}$$

Então, a lei de controle chaveado (17), com os ganhos do controlador F_lG^{-1}, $l \in \mathbb{K}_r$, tornam o ponto de equilíbrio $x(k) = 0$ do sistema (14), localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento limitada por α.

Demonstração: Suponha que as hipótese do teorema sejam satisfeitas, para todo i, j, $l \in \mathbb{K}_r$.

De (1), multiplicando (53) por $h_i(z(k))$ e somando i de 1 até r, obtém-se

$$Z_{z(k)} + Q_{z(k)} - \alpha^2 P_{z(k)} \leq 0. \tag{54}$$

De (52), a existência de G^{-1} é assegurada. Multiplicando G^{-T} à esquerda e G^{-1} à direita de (54), para $x(k) \neq 0$, obtém-se

$$x^T(k)\Big\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1} - \alpha^2 G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}\Big\}x(k) \leq 0. \tag{55}$$

Considerando a lei de controle chaveada (17) e utilizando o resultado presente no Lema 1, para $x(k) \neq 0$, de (52) e (55), segue que

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ \left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)^T \left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right) \Big\}x(k) \\ < x^T(k)\Big\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\Big\}x(k) \\ \leq \alpha^2 x^T(k)G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}x(k). \end{aligned} \tag{56}$$

Assim, considerando a função de Lyapunov (16), de (55) e (56), segue que

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ \left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)^T \left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right) \\ \times \left(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right) - \alpha^2 G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}\Big\}x(k) \\ = V(x(k+1)) - V(x(k)) + V(x(k)) - \alpha^2 V(x(k)) < 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Ou seja, $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < (\alpha^2 - 1)V(x(k))$, para todo $x(k) \neq 0$.

Portanto, a lei de controle chaveada (17), com os ganhos do controlador $F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, torna o ponto de equilíbrio, $x(k) = 0$, do sistema incerto T-S (14), localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento α. ■

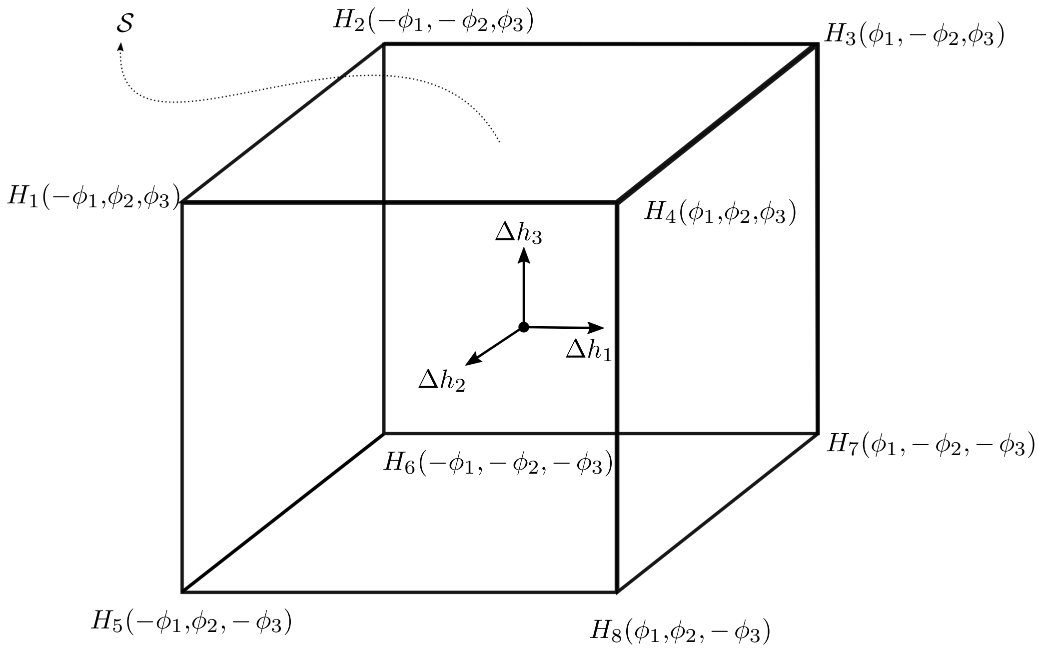
Observação 3. *Quando $\alpha = 1$, as condições LMIs* (52) *e* (53) *do Teorema 7, são equivalentes às condições* (32) *e* (33) *do Teorema 5. Portanto, o Teorema 5, pode ser visto como um caso particular do Teorema 7.*

3.2 PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO PARA O PROBLEMA DE ESTABILIDADE LOCAL UTILIZANDO HIPER-RETÂNGULOS FECHADOS

Com o objetivo de propor condições de estabilidade local menos conservadoras, nesta seção, considerando uma candidata a função de Lyapunov não quadráticas como dada em (16), o conceito de hiper-retângulos fechados será acrescentado no repertório de ferramentas utilizadas para abordar o problema de estabilização local do sistema discreto no tempo apresentado em (5).

De acordo com (LARA; FLORES; CALDERON, 2009), um hiper-retângulo fechado em um espaço de dimensão n é definido como o produto cartesiano de n intervalos fechados, $\Phi = [a_1,\ b_1] \times \cdots \times [a_n,\ b_n] \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pertence ao hiper retângulo Φ se para todo $i \in \mathbb{K}_n$, $a_i \leq x_i \leq b_i$. Os valores a_i e b_i são os limites inferiores e superiores da i-ésima dimensão de $\mathcal{S}$, respectivamente.

Figura 2 - Hiper-retângulo simétrico para o caso em que o sistema fuzzy T-S incerto (14) possui três regras.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Supondo $z(k) \in \mathcal{Z}$ e $h_i(z(k))$ diferenciáveis em $\mathcal{Z}$, um possível caminho para obtenção de condições menos restritivas para a estabilização do sistema (14), consiste na restrição da variação das funções de pertinência, $\Delta h_i(z(k)) = h_i(z(k+1)) - h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Sendo assim, suponha que o conjunto das variáveis premissas tais que, $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i$, sendo $\Delta h_i(z(k)) = h_i(z(k+1)) - h_i(z(k))$, $0 < \phi_i \leq 1$, $i \in \mathbb{K}_r$, $k \geq 0$, esteja contido na região de operação $\mathcal{Z}$ definida em (11). Então, para todo $z(k)$ pertencente à este subconjunto da região $\mathcal{Z}$, é possível a construção de um hiper-retângulo no espaço dos números reais de dimensão r, definido como o produto cartesiano dos r intervalos fechados simétricos $[-\phi_i,\ \phi_i]$, dado por

$$\mathcal{S} := [-\phi_1,\ \phi_1] \times [-\phi_2,\ \phi_2] \times \cdots \times [-\phi_{r-1},\ \phi_{r-1}] \times [-\phi_r,\ \phi_r]. \tag{58}$$

Note que o hiper-retângulo (58), é um conjunto convexo. O número de vértices do hiper-retângulo aumenta de forma exponencial, de acordo com o número de regras do sistema fuzzy T-S (14). Para r regras são 2^r vértices.

A Figura 2, ilustra o hiper-retângulo (58), no caso em que o modelo fuzzy T-S (14), possui três regras. A região representa os valores que o terno ordenado $(h_1(z(k)),h_2(z(k)),h_3(z(k)))$ pode assumir. Nesta figura, $H_j,\ j \in \mathbb{K}_8$, representam os vértices do hiper-retângulo e $\Delta h_i(z(k)) = \Delta h_i,\ i \in \mathbb{K}_3$.

Neste contexto, baseado em (GUEDES *et al.*, 2013), o seguinte lema é proposto.

Lema 2. *Considere as matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i \in \mathbb{K}_r$. Se a relação $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i,\ 0 < \phi_i \leq 1$, sendo $\Delta h_i(z(k)) = h_i(z(k+1)) - h_i(z(k))$, for satisfeita para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e $k \geq 0$, então existem números reais $\beta_{i1} \geq 0$, $\beta_{i2} \geq 0$, com $\beta_{i1} + \beta_{i2} = 1$, $i \in \mathbb{K}_r$, tais que*

$$\begin{aligned}
P_{z(k+1)} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k+1))P_i = P_{z(k)} \\
&+ \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[-\phi_1(P_1+H) - \phi_2(P_2+H) - \phi_3(P_3+H) - \cdots \\
&-\phi_{r-2}(P_{r-2}+H) - \phi_{r-1}(P_{r-1}+H) - \phi_r(P_r+H)] \\
&+ \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[-\phi_1(P_1+H) - \phi_2(P_2+H) - \phi_3(P_3+H) - \cdots \\
&-\phi_{r-2}(P_{r-2}+H) - \phi_{r-1}(P_{r-1}+H) + \phi_r(P_r+H)] \\
&+ \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[-\phi_1(P_1+H) - \phi_2(P_2+H) - \phi_3(P_3+H) - \cdots \\
&-\phi_{r-2}(P_{r-2}+H) + \phi_{r-1}(P_{r-1}+H) - \phi_r(P_r+H)] \\
&+ \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1),2}\beta_{r2}\,[-\phi_1(P_1+H) - \phi_2(P_2+H) - \phi_3(P_3+H) - \cdots \\
&-\phi_{r-2}(P_{r-2}+H) + \phi_{r-1}(P_{r-1}+H) + \phi_r(P_r+H)] \\
&+ \cdots \\
&+ \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[+\phi_1(P_1+H) + \phi_2(P_2+H) + \phi_3(P_3+H) + \cdots \\
&+\phi_{r-2}(P_{r-2}+H) + \phi_{r-1}(P_{r-1}+H) - \phi_r(P_r+H)] \\
&+ \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[+\phi_1(P_1+H) + \phi_2(P_2+H) + \phi_3(P_3+H) + \cdots \\
&+\phi_{r-2}(P_{r-2}+H) + \phi_{r-1}(P_{r-1}+H) + \phi_r(P_r+H)],
\end{aligned} \tag{59}$$

sendo $H \in \mathbb{R}^n$, uma matriz simétrica arbitrária.

Demonstração: Suponha que a relação $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i$, $i \in \mathbb{K}_r$, $k \geq 0$, com $0 < \phi_i \leq 1$, seja satisfeita e considere o hiper retângulo definido em (58). Então, para cada $i \in \mathbb{K}_r$ e

$k \geq 0$, $\Delta h_i(z(k))$ pode ser escrito como uma combinação convexa dos vértices do hiper retângulo dado em (58). Ou seja, para cada $i \in \mathbb{K}_r$ e $k \geq 0$, existem $\beta_{i1}(k)$ e $\beta_{i2}(k)$, tais que

$$\Delta h_i(z(k)) = \beta_{i1}(k)(-\phi_i) + \beta_{i2}(k)(\phi_i) \tag{60}$$

em que $\beta_{i1}(k) \geq 0$, $\beta_{i2}(k) \geq 0$ e $\beta_{i1}(k) + \beta_{i2}(k) = 1$.

Por simplicidade, a seguinte notação será adotada: $\beta_{im_i}(k) = \beta_{im_i}$, $m_i \in \mathbb{K}_2$.

Como $\sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) = 1$, de (60), segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} \beta_{i1}(-\phi_i) + \beta_{i2}(\phi_i) &= \sum_{i=1}^{r} \Delta h_i(z(k)) = \sum_{i=1}^{r} [h_i(z(k+1)) - h_i(z(k))] \\
&= [h_1(z(k+1)) - h_1(z(k))] + \cdots + [h_r(z(k+1)) - h_r(z(k))] \\
&= [h_1(z(k+1)) + \cdots + h_r(z(k+1))] - [h_1(z(k)) + \cdots + h_r(z(k))] \\
&= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k+1)) - \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) = 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Logo para qualquer matriz $H = H^T$,

$$\sum_{i=1}^{r} (\beta_{i1}(-\phi_i) + \beta_{i2}(\phi_i))\, H = 0. \tag{61}$$

Seja $P_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i \in \mathbb{K}_r$, matrizes simétricas definidas positivas. Utilizando (60) e (61), segue que

$$\begin{aligned}
P_{z(k+1)} &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k+1))P_i = \sum_{i=1}^{r} [h_i(z(k)) + (h_i(z(k+1)) - h_i(z(k)))]\, P_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} [h_i(z(k)) + \Delta h_i(z(k))]\, P_i = \sum_{i=1}^{r} [h_i(z(k)) + (\beta_{i1}(-\phi_i) + \beta_{i2}(\phi_i))]\, P_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k))P_i + \sum_{i=1}^{r} (\beta_{i1}(-\phi_i) + \beta_{i2}(\phi_i))(P_i + H).
\end{aligned} \tag{62}$$

Considere

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{\rho=1 \\ \rho\neq i}}^{r} (\beta_{\rho 1} + \beta_{\rho 2}) &= (\beta_{11} + \beta_{12})(\beta_{21} + \beta_{22}) \cdots (\beta_{i-1,1} + \beta_{i-1,2})(\beta_{i+1,1} + \beta_{i+1,2}) \\
&\quad \times \cdots \times (\beta_{r-1,1} + \beta_{r-1,2})(\beta_{r1} + \beta_{r2}) \\
&= \sum_{m_1=1}^{2} \sum_{m_2=1}^{2} \cdots \sum_{m_{i-1,1}=1}^{2} \sum_{m_{i+1}=1}^{2} \cdots \sum_{m_{r-1}=1}^{2} \sum_{m_r=1}^{2} \\
&\quad \times (\beta_{1m_1}\beta_{2m_2} \cdots \beta_{i-1m_{i-1}}\beta_{i+1,m_{i+1}} \cdots \beta_{r-1,m_{r-1}}\beta_{rm_r}),
\end{aligned} \tag{63}$$

sendo $\beta_{\rho 1} \geq 0$, $\beta_{\rho 2} \geq 0$, $\beta_{\rho 1} + \beta_{\rho 2} = 1$, $\rho \in \mathbb{K}_r$.

Note que, $\prod_{\substack{\rho=1\\ \rho\neq i}}^{r}(\beta_{\rho 1} + \beta_{\rho 2}) = 1$. Sendo assim, multiplicando (62) por (63), segue que

$$\begin{aligned} P_{z(k+1)} &= P_{z(k)} + \sum_{i=1}^{r} \prod_{\substack{\rho=1\\ \rho\neq i}}^{r} (\beta_{\rho 1} + \beta_{\rho 2})(\beta_{i1}(-\phi_i) + \beta_{i2}(\phi_i))(P_i + H) \\ &= P_{z(k)} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{m_1=1}^{2} \sum_{m_2=1}^{2} \cdots \sum_{m_{i-1,1}=1}^{2} \sum_{m_{i+1}=1}^{2} \cdots \sum_{m_{r-1}=1}^{2} \sum_{m_r=1}^{2} \\ &\quad \times (\beta_{1m_1}\beta_{2m_2}\cdots\beta_{i-1m_{i-1}}\beta_{i+1,m_{i+1}}\cdots\beta_{r-1,m_{r-1}}\beta_{rm_r}) \\ &\quad \times (\beta_{i1}(-\phi_i) + \beta_{i2}(\phi_i))(P_i + H). \end{aligned} \tag{64}$$

Desenvolvendo a primeira somatória da expressão (64), obtém-se

$$\begin{aligned} P_{z(k+1)} = P_{z(k)} &+ \Bigg(- \sum_{m_2=1}^{2} \sum_{m_3=1}^{2} \cdots \sum_{m_r=1}^{2} \beta_{11}\beta_{2m_2}\beta_{3m_3}\cdots\beta_{rm_r} \\ &+ \sum_{m_2=1}^{2} \sum_{m_3=1}^{2} \cdots \sum_{m_r=1}^{2} \beta_{12}\beta_{2m_2}\beta_{3m_3}\cdots\beta_{rm_r} \Bigg) \phi_1(P_1 + H) \\ &+ \Bigg(- \sum_{m_1=1}^{2} \sum_{m_3=1}^{2} \sum_{m_4=1}^{2} \cdots \sum_{m_r=1}^{2} \beta_{1m_1}\beta_{21}\beta_{3m_3}\beta_{4m_4}\cdots\beta_{rm_r} \\ &+ \sum_{m_1=1}^{2} \sum_{m_3=1}^{2} \sum_{m_4=1}^{2} \cdots \sum_{m_r=1}^{2} \beta_{1m_1}\beta_{22}\beta_{3m_3}\beta_{4m_4}\cdots\beta_{rm_r} \Bigg) \phi_2(P_2 + H) \\ &+ \Bigg(- \sum_{m_1=1}^{2} \sum_{m_2=1}^{2} \sum_{m_4=1}^{2} \sum_{m_5=1}^{2} \cdots \sum_{m_r=1}^{2} \beta_{1m_1}\beta_{2m_2}\beta_{31}\beta_{4m_4}\beta_{5m_5}\cdots\beta_{rm_r} \\ &+ \sum_{m_1=1}^{2} \sum_{m_2=1}^{2} \sum_{m_4=1}^{2} \sum_{m_5=1}^{2} \cdots \sum_{m_r=1}^{2} \beta_{1m_1}\beta_{2m_2}\beta_{32}\beta_{4m_4}\beta_{5m_5}\cdots\beta_{rm_r} \Bigg) \phi_3(P_3 + H) \\ &+ \cdots \\ &+ \Bigg(- \sum_{m_1=1}^{2} \sum_{m_2=1}^{2} \cdots \sum_{m_{r-2}=1}^{2} \sum_{m_r=1}^{2} \beta_{1m_1}\beta_{2m_2}\cdots\beta_{r-2,m_{r-2}}\beta_{r-1,1}\beta_{rm_r} \\ &+ \sum_{m_1=1}^{2} \sum_{m_2=1}^{2} \cdots \sum_{m_{r-2}=1}^{2} \sum_{m_r=1}^{2} \beta_{1m_1}\beta_{2m_2}\cdots\beta_{r-2,m_{r-2}}\beta_{r-1,2}\beta_{rm_r} \Bigg) \phi_{(r-1)}(P_{r-1} + H) \\ &+ \Bigg(- \sum_{m_1=1}^{2} \sum_{m_2=1}^{2} \cdots \sum_{m_{r-2}=1}^{2} \sum_{m_{r-1}=1}^{2} \beta_{1m_1}\beta_{2m_2}\cdots\beta_{r-2,m_{r-2}}\beta_{r-1,m_{r-1}}\beta_{r1} \\ &+ \sum_{m_1=1}^{2} \sum_{m_2=1}^{2} \cdots \sum_{m_{r-2}=1}^{2} \sum_{m_{r-1}=1}^{2} \beta_{1m_1}\beta_{2m_2}\cdots\beta_{r-2,m_{r-2}}\beta_{r-1,m_{r-1}}\beta_{r2} \Bigg) \phi_r(P_r + H). \end{aligned} \tag{65}$$

Desenvolvendo a soma de produtos em (65), segue que

$$
\begin{aligned}
P_{z(k+1)} = & P_{z(k)} + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[-\phi_1(P_1+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[-\phi_1(P_1+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[-\phi_1(P_1+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[-\phi_1(P_1+H)] + \cdots \\
& + \beta_{11}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[-\phi_1(P_1+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[-\phi_1(P_1+H)] \\
& + \beta_{12}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[\phi_1(P_1+H)] \\
& + \beta_{12}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[\phi_1(P_1+H)] \\
& + \beta_{12}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[\phi_1(P_1+H)] \\
& + \beta_{12}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_1(P_1+H)] + \cdots \\
& + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[\phi_1(P_1+H)] \\
& + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_1(P_1+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[-\phi_2(P_2+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[-\phi_2(P_2+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[-\phi_2(P_2+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[-\phi_2(P_2+H)] + \cdots \\
& + \beta_{12}\beta_{21}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[-\phi_2(P_2+H)] \\
& + \beta_{12}\beta_{21}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[-\phi_2(P_2+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{22}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[\phi_2(P_2+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{22}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[\phi_2(P_2+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{22}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[\phi_2(P_2+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{22}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_2(P_2+H)] + \cdots \\
& + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[\phi_2(P_2+H)] \\
& + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_2(P_2+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[-\phi_3(P_3+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[-\phi_3(P_3+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[-\phi_3(P_3+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[-\phi_3(P_3+H)] + \cdots \\
& + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[-\phi_3(P_3+H)] \\
& + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[-\phi_3(P_3+H)] \\
& + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[\phi_3(P_3+H)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[\phi_3(P_3+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[\phi_3(P_3+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_3(P_3+H)]+\cdots\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[\phi_3(P_3+H)]\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_3(P_3+H)]+\cdots\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[-\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[-\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[-\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[-\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]+\cdots\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[-\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[-\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]+\cdots\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[-\phi_r(P_r+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[-\phi_r(P_r+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[-\phi_r(P_r+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[-\phi_r(P_r+H)]+\cdots\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1}\,[-\phi_r(P_r+H)]\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1}\,[-\phi_r(P_r+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1;)1}\beta_{r2}\,[\phi_r(P_r+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_r(P_r+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[\phi_r(P_r+H)]\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_r(P_r+H)]+\cdots\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\,[\phi_r(P_r+H)]\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\,[\phi_r(P_r+H)]. \qquad (66)
\end{aligned}
$$

Finalmente, colocando em evidência, de forma adequada, os produtos que envolvem os termos β_{im_i}, $i\in\mathbb{K}_r$, $m_i\in\mathbb{K}_2$, a equação (66) pode ser reescrita como (59). ∎

Por simplicidade, a seguinte notação será adotada:

$$
\begin{aligned}
&\delta_1(z(k)) = \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1},\ \delta_2(z(k)) = \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}, \cdots,\\
&\delta_{2^r-1}(z(k)) = \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1},\ \delta_{2^r}(z(k)) = \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2},\\
&\Gamma_1 = -\phi_1(P_1+H)-\phi_2(P_2+H)-\phi_3(P_3+H)-\cdots\\
&\qquad\qquad -\phi_{r-2}(P_{r-2}+H)-\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)-\phi_r(P_r+H),\\
&\Gamma_2 = -\phi_1(P_1+H)-\phi_2(P_2+H)-\phi_3(P_3+H)-\cdots\\
&\qquad\qquad -\phi_{r-2}(P_{r-2}+H)-\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)+\phi_r(P_r+H),\\
&\vdots\\
&\Gamma_{2^r-1} = +\phi_1(P_1+H)+\phi_2(P_2+H)+\phi_3(P_3+H)+\cdots\\
&\qquad\qquad +\phi_{r-2}(P_{r-2}+H)+\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)-\phi_r(P_r+H),\\
&\Gamma_{2^r} = +\phi_1(P_1+H)+\phi_2(P_2+H)+\phi_3(P_3+H)+\cdots\\
&\qquad\qquad +\phi_{r-2}(P_{r-2}+H)+\phi_{r-1}(P_{r-1}+H)+\phi_r(P_r+H),\\
&\Gamma_{\mu(k)} = \sum_{t=1}^{2^r}\delta_t(z(k))\Gamma_t.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Utilizando as notações definidas em (67), do Lema 2, segue que $P_{z(k+1)} = P_{z(k)} + \Gamma_{\mu(k)}$. Observe que, $\delta_t(z(k)) \geq 0$ e $\sum_{t=1}^{2^r}\delta_t(z(k)) = 1$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{2^r}\delta_t(z(k)) &= \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1} + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1} + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1} + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1} + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\\
&+\cdots\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1} + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1} + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r1} + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}\beta_{r2}\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r1} + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}\beta_{r2}\\
&= \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}(\beta_{r1}+\beta_{r2}) + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}(\beta_{r1}+\beta_{r2})\\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}(\beta_{r1}+\beta_{r2}) + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}(\beta_{r1}+\beta_{r2})\\
&+\cdots\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)1}(\beta_{r1}+\beta_{r2}) + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)1}\beta_{(r-1)2}(\beta_{r1}+\beta_{r2})\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)1}(\beta_{r1}+\beta_{r2}) + \beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\beta_{(r-1)2}(\beta_{r1}+\beta_{r2})\\
&= \beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)1}\left(\beta_{(r-1)1}+\beta_{(r-1)2}\right)(\beta_{r1}+\beta_{r2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{(r-2)2}\left(\beta_{(r-1)1}+\beta_{(r-1)2}\right)(\beta_{r1}+\beta_{r2})\\
&+\cdots\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)1}\left(\beta_{(r-1)1}+\beta_{(r-1)2}\right)(\beta_{r1}+\beta_{r2})\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{(r-2)2}\left(\beta_{(r-1)1}+\beta_{(r-1)2}\right)(\beta_{r1}+\beta_{r2})\\
&=\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\left(\beta_{(r-2)1}+\beta_{(r-2)2}\right)\left(\beta_{(r-1)1}+\beta_{(r-1)2}\right)(\beta_{r1}+\beta_{r2})\\
&+\cdots\\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\left(\beta_{(r-2)1}+\beta_{(r-2)2}\right)\left(\beta_{(r-1)1}+\beta_{(r-1)2}\right)(\beta_{r1}+\beta_{r2})\\
&=\cdots\\
&=(\beta_{11}+\beta_{12})(\beta_{21}+\beta_{22})\times\cdots\times\left(\beta_{(r-2)1}+\beta_{(r-2)2}\right)\left(\beta_{(r-1)1}+\beta_{(r-1)2}\right)(\beta_{r1}+\beta_{r2})\\
&=\prod_{i=1}^{2^r}(\beta_{i1}+\beta_{i2})=1
\end{aligned}
$$

O lema proposto a seguir será necessário na prova dos teoremas principais desta seção. Ele pode ser considerado uma extensão do Lema 1, para o caso em que se considera as restrições $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i,\ 0<\phi_i\leq 1$, nas variações das funções de pertinência. Sua prova é baseada nos resultados obtidos nos Lemas 1 e 2.

Lema 3. *Suponha que a relação $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i,\ 0<\phi_i\leq 1$, seja satisfeita para todo $i\in\mathbb{K}_r$ e $k\geq 0$. Considere que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, matrizes simétricas Z_{it}, Q_i, $H\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, matrizes $F_l\in\mathbb{R}^{n_u\times n_x}$ e $G\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, tais que*

$$
\begin{bmatrix} Z_{it}+Q_l & (A_iG-B_iF_l)^T \\ A_iG-B_iF_l & G+G^T-(P_i+\Gamma_t) \end{bmatrix} > 0, \tag{68}
$$

com Γ_t dado em (67), seja satisfeita para todo $i,l\in\mathbb{K}_r$, $t\in\mathbb{K}_{2^r}$. Então, considerando a lei de controle chaveada (17), e os ganhos do controlador dados por F_lG^{-1}, $l\in\mathbb{K}_r$, a seguinte condição também é satisfeita para $x(k)\neq 0$:

$$
\begin{aligned}
x^T(k)\left\{\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)^T\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)\right\}x(k)&\\
< x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)\mu(k)}G^{-1}+G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k).&
\end{aligned} \tag{69}
$$

Demonstração:

Multiplicando $h_i(z(k))$ e $\delta_t(z(k))$ definido em (67), em (68) e somando de $i=1$ até $i=r$ e de $t=1$ até $t=2^r$, utilizando as notações definidas em (1) e (67), e substituindo l por $\sigma(k)$, segue do Lema 2 que, para $x(k)\neq 0$,

$$
\begin{bmatrix} Z_{z(k)\mu(k)}+Q_{\sigma(k)} & \left(A_zG-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)^T \\ A_{z(k)}G-B_{z(k)}F_{\sigma(k)} & G+G^T-P_{z(k+1)} \end{bmatrix} > 0. \tag{70}
$$

De (70), tem-se $G+G^T-P_{z(k+1)}>0$. Assim, como $P_i>0$, $h_i(z(k))\geq 0$ e $\sum_{i=1}^r h_i(z(k))=1$, segue que $P_{z(k+1)}>0$, o que garante $G+G^T>0$ e consequentemente assegura a existência de G^{-1}.

Pré e pós multiplicando (70) por $\left[I \quad -\left(G^{-1}\left(A_{z(k)}G-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)\right)^T\right]$ e seu transposto, respectivamente, obtém-se

$$\left(A_{z(k)}G-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right)^T\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\left(A_{z(k)}G-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}\right) \\ -Z_{z(k)w(k)}-Q_{\sigma(k)\mu(k)}<0. \quad (71)$$

Multiplicando G^{-T} à esquerda e G^{-1} à direita de (71), segue que, para $x(k)\neq 0$,

$$x^T(k)\left\{\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)^T\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)\right\}x(k) \\ <x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)\mu(k)}G^{-1}+G^{-T}Q_{\sigma(k)}G^{-1}\right\}x(k). \quad (72)$$

De (17), note que

$$x^T(k)G^{-T}Q_{\sigma(k)}G^{-1}x(k)=\min_{l\in\mathbb{K}_r}\left\{x^T(k)G^{-T}Q_lG^{-1}x(k)\right\} \\ \leq\sum_{i=1}^r h_i(z(k))\left\{x^T(k)G^{-T}Q_iG^{-1}x(k)\right\}=x^T(k)G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}x(k). \quad (73)$$

Logo, de (72) e (73), segue que, para $x(k)\neq 0$,

$$x^T(k)\left\{\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)^T\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)\right\}x(k) \\ \leq x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)\mu(k)}G^{-1}+G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k). \quad (74)$$

■

Neste contexto, supondo $|\Delta h_i(z(k))|\leq\phi_i$, $0<\phi_i\leq 1$, para todo $i\in\mathbb{K}_r$ e $k\geq 0$, e considerando o hiper-retângulo (58), formado produto cartesiano dos r intervalos fechados $[-\phi_i,\ \phi_i]$, a função de Lyapunov não quadrática (16) e a lei de controle chaveado (17), o Teorema 8, baseado em (MOZELLI *et al.*, 2009), e o Teorema 9 são propostos.

Teorema 8. *Suponha que a relação $|\Delta h_i(z(k))|\leq\phi_i$, $0<\phi_i\leq 1$, seja satisfeita para todo $i\in\mathbb{K}_r$ e $k\geq 0$. Considere que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, matrizes simétricas Z_i, Q_i, $H\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, matrizes $F_l\in\mathbb{R}^{n_u\times n_x}$, $G\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ e um escalar $0<\alpha<1$, para todo $i,l\in\mathbb{K}_r$, tais que*

$$P_i+H>0 \quad (75)$$

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_iG - B_iF_l)^T \\ A_iG - B_iF_l & G + G^T - \left(P_i + P_\phi\right) \end{bmatrix} > 0, \tag{76}$$

$$Z_i + Q_i - \alpha^2 P_i \leq 0, \tag{77}$$

sendo $P_\phi = \sum_{\lambda=1}^{r} \phi_\lambda (P_\lambda + H)$.

Então, a lei de controle chaveado (17)*, com os ganhos do controlador* F_lG^{-1}*,* $l \in \mathbb{K}_r$*, fazem o ponto de equilíbrio,* $x(k) = 0$*, do sistema incerto discreto T-S* (14)*, localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento* α*.*

Demonstração: Suponha que as hipóteses do teorema sejam satisfeitas.

De (77) segue que

$$Z_{z(k)} + Q_{z(k)} - \alpha^2 P_{z(k)} < 0. \tag{78}$$

De (76), veja que $G + G^T - \left(P_i + P_\phi\right) > 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$. Como $\phi_i > 0$, (75), assegura $P_\phi > 0$. Como $P_i > 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, a existência de G^{-1} é garantida. Assim, pré e pós multiplicando (78) por G^{-T} e G^{-1}, respectivamente, para $x(k) \neq 0$, obtém-se

$$x^T(k)\Big\{G^{-T} Z_{z(k)} G^{-1} + G^{-T} Q_{z(k)} G^{-1} - \alpha^2 G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}\Big\} x(k) \leq 0. \tag{79}$$

Observe que, (76) implica que

$$\begin{bmatrix} Z_{z(k)} + Q_{\sigma(k)} & (A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)})^T \\ A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)} & G + G^T - \left(P_{z(k)} + P_\phi\right) \end{bmatrix} > 0. \tag{80}$$

Observando que $\sum_{\lambda=1}^{r} \Delta h_\lambda(z(k)) = 0$, de (75) e da desigualdade $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i$, $i \in \mathbb{K}_r$, presentes nas hipóteses do teorema, segue que

$$P_\phi = \sum_{\lambda=1}^{r} \phi_\lambda (P_\lambda + H) \geq \sum_{\lambda=1}^{r} \Delta h_\lambda(z(k))(P_\lambda + H) = \sum_{\lambda=1}^{r} \Delta h_\lambda(z(k)) P_\lambda. \tag{81}$$

De (81) e da relação $h_i(z(k+1)) = h_i(z(k)) + \Delta h_i(z(k))$, segue que

$$\begin{aligned} P_{z(k)} + P_\phi &\geq \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) P_i + \sum_{i=1}^{r} \Delta h_i(z(k)) P_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left(h_i(z(k)) + \Delta h_i(z(k))\right) P_i = P_{z(k+1)}. \end{aligned} \tag{82}$$

Logo, de (80) e (82), tem-se

$$\begin{bmatrix} Z_{z(k)}+Q_{\sigma(k)} & (A_{z(k)}G-B_{z(k)}F_{\sigma(k)})^T \\ A_{z(k)}G-B_{z(k)}F_{\sigma(k)} & G+G^T-P_{z(k+1)} \end{bmatrix} > 0. \tag{83}$$

Note que a condição (83) coincide com a inequação (24) apresentada na prova do Lema 1. Assim analogamente à prova do Lema 1, de (83), segue que, para todo $x(k) \neq 0$,

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)^T\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)\Big\}x(k) \\ < x^T(k)\Big\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1}+G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\Big\}x(k). \end{aligned} \tag{84}$$

Logo, para $x(k) \neq 0$, de (84) e (79), segue

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ & \left(A_{z(k)}-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)^T\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right) \\ & \times\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\right)-\alpha^2G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}\Big\}x(k) < 0. \end{aligned} \tag{85}$$

Considerando o sistema controlado (18) e a candidata a função de Lyapunov (16), a inequação (85) implica que, para $x(k) \neq 0$, $V(x(k+1))-\alpha^2V(x(k)) < 0$, ou seja, $\Delta V(x(k)) < (\alpha^2-1)V(x(k))$. Portanto, a lei de controle chaveado (17), com os ganhos do controlador F_lG^{-1}, $l \in \mathbb{K}_r$, torna o ponto de equilíbrio $x(k)=0$ do sistema incerto T-S (14), localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento α. ■

Com o intuito de propor novas condições menos restritivas que o Teorema 8, o Teorema 9 é proposto. Considerando o hiper-retângulo fechado $\mathcal{S}$, dado em (58), definido pelo produto cartesiano dos r intervalos fechados simétricos $[-\phi_i,\ \phi_i]$, sendo $0<\phi_i \leq 1$, $i \in \mathbb{K}_r$, tais que $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i$, o Teorema 9 apresenta um conjunto de condições que garantem a estabilidade local do sistema fuzzy T-S (14), considerando a lei de controle chaveada (17).

Teorema 9. *Suponha que a relação* $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i$, $0<\phi_i \leq 1$, *seja satisfeita para todo* $i \in \mathbb{K}_r$ *e* $k \geq 0$. *Considere que existam matrizes simétricas definidas positivas* $P_i \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, *matrizes simétricas* Z_{it}, Q_i, $H \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, *matrizes* $F_l \in \mathbb{R}^{n_u\times n_x}$, $G \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ *e um escalar* $0<\alpha<1$, *para todo* $i,l \in \mathbb{K}_r$, $t \in \mathbb{K}_{2^r}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} Z_{it}+Q_l & (A_iG-B_iF_l)^T \\ A_iG-B_iF_l & G+G^T-(P_i+\Gamma_t) \end{bmatrix} > 0, \tag{86}$$

$$Z_{it}+Q_i-\alpha^2P_i \leq 0, \tag{87}$$

com Γ_t *dado em* (67). *Então, a lei de controle chaveada* (17) *com os ganhos do controlador* F_lG^{-1}, $l \in \mathbb{K}_r$, *tornam o ponto de equilíbrio* $x(k)=0$ *do sistema incerto discreto T-S* (14), *localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento α.*

Demonstração: De acordo com o Lema 3, (86) garante que, para $x(k) \neq 0$,

$$x^T(k)\Big\{\Big(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\Big)^T \Big(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\Big)\Big(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}\Big)\Big\}x(k) < x^T(k)\Big\{G^{-T}Z_{z(k)\mu(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\Big\}x(k). \quad (88)$$

De (87), segue que, para $x(k) \neq 0$,

$$Z_{z(k)w(k)} + Q_{z(k)} - \alpha^2 P_{z(k)} \leq 0. \quad (89)$$

Multiplicando G^{-T} à esquerda e G^{-1} à direita de (89), para $x(k) \neq 0$, obtém-se

$$x^T(k)\Big\{G^{-T}Z_{z(k)\mu(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1} - \alpha^2 G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}\Big\}x(k) \leq 0. \quad (90)$$

Assim, considerando a candidata a função de Lyapunov (16), de (88) e (90), segue que, para $x(k) \neq 0$, $V(x(k+1)) - \alpha^2 V(x(k)) < 0$, ou seja, $\Delta V(x(k)) < (\alpha^2 - 1)V(x(k))$.

Portanto, a lei de controle chaveada (17), com os ganhos do controlador $F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, torna o ponto de equilíbrio $x(k) = 0$ do sistema incerto T-S (14), localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento α ■.

Observação 4. *Note que, no Teorema 9, não houve a necessidade de incluir as LMIs, $P_i + H > 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, presentes no Teorema 8. Tal eliminação proporciona relaxação nas condições de estabilidade. Este fato será demonstrado, na próxima subseção, em uma análise teórica de estabilidade.*

Observação 5. *De forma análoga ao que foi exposto na Observação 3, se não for de interesse tratar o índice de desempenho, taxa de decaimento, basta considerar o parâmetro $\alpha = 1$ e os Teoremas 8 e 9, garantem apenas a estabilidade assintótica local do ponto de equilíbrio do sistema discreto fuzzy T-S* (14).

3.2.1 Análise de estabilidade

Nesta subseção, serão apresentadas análises teóricas de estabilidade entre os procedimentos apresentados nos Teoremas 7, 8 e 9.

Na análise feita no teorema a seguir é provado que se as condições LMIs de estabilidade do Teorema 7, para o sistema em malha fechada (18), são satisfeitas, então as condições LMIs de estabilidade do Teorema 9 também são satisfeitas.

Teorema 10. *Considere que as condições do Teorema 7,* (52) *e* (53)*, relacionadas ao sistema de controle* (18)*, com a lei de controle chaveada* (17)*, sejam satisfeitas. Então,* *para ϕ_i, $i \in \mathbb{K}_r$, suficientemente pequeno, as condições do Teorema 9,* (86) *e* (87)*, baseadas no conceito de hiper-retângulos, também são satisfeitas.*

Demonstração: Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétrica Z_i, $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, tais que (52) e (53) sejam satisfeitas para todo i, j e $l \in \mathbb{K}_r$.

Defina $S_{ijl} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, dada por

$$S_{ijl} = \begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_i G - B_i F_l)^T \\ A_i G - B_i F_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix}, \tag{91}$$

para todo i, j e $l \in \mathbb{K}_r$.

De (52), observe que os autovalores de S_{ijl}, definidos como $\lambda_{(S_{ijl})}$, são maiores do que zero, para todo i, j e $l \in \mathbb{K}_r$. Em particular, os autovalores mínimo e máximo de S_{ijl}, definidos como $\lambda_{\min(S_{ijl})}$ e $\lambda_{\max(S_{ijl})}$, respectivamente, são também maiores que zero.

Considere um escalar positivo ε, tal que

$$0 < \varepsilon < \lambda_{\min(S_{ijl})}, \qquad \forall\ i,\ j \text{ e } l \in \mathbb{K}_r, \tag{92}$$

e matrizes $\Theta \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ e $\Xi \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, dadas por

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix}, \qquad \Xi = \begin{bmatrix} \varepsilon I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix}. \tag{93}$$

Defina $\bar{x}(k) \in \mathbb{R}^{2n_x}$ e considere $\|\bar{x}(k)\|^2 = \bar{x}(k)^T \bar{x}(k)$, a norma ao quadrado do vetor $\bar{x}(k)$. Para $\bar{x}(k) \neq 0$,

$$0 < \lambda_{\min(S_{ijl})} \|\bar{x}(k)\|^2 \leq \bar{x}^T(k) S_{ijl} \bar{x}(k) \leq \lambda_{\max(S_{ijl})} \|\bar{x}(k)\|^2. \tag{94}$$

De (92), (93) e (94), segue que

$$\begin{aligned} \bar{x}^T(k)\Big\{S_{ijl} - \Xi\Big\}\bar{x}(k) &= \bar{x}^T(k) S_{ijl} \bar{x}(k) - \bar{x}^T(k) \Xi \bar{x}(k) \\ &= \bar{x}^T(k) S_{ijl} \bar{x}(k) - \varepsilon \|\bar{x}(k)\|^2 \\ &> \bar{x}^T(k) S_{ijl} \bar{x}(k) - \lambda_{\min(S_{ijl})} \|\bar{x}(k)\|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{95}$$

Logo,

$$\bar{x}^T(k)\Big\{S_{ijl} - \Theta\Big\}\bar{x}(k) \geq \bar{x}^T(k)\Big\{S_{ijl} - \Xi\Big\}\bar{x}(k) > 0. \tag{96}$$

Portanto, de (91) e (93), a inequação (96) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_iG - B_iF_l)^T \\ A_iG - B_iF_l & G + G^T - (P_j + \varepsilon I) \end{bmatrix} > 0, \tag{97}$$

para todo i, j e $l \in \mathbb{K}_r$.

Observe que, como (97) é valida para todo i, j e $l \in \mathbb{K}_r$, em particular, (97) é válida para $i = j$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_iG - B_iF_l)^T \\ A_iG - B_iF_l & G + G^T - (P_i + \varepsilon I) \end{bmatrix} > 0, \tag{98}$$

para todo i e $l \in \mathbb{K}_r$.

Agora, de (33), (92) e (98), considerando $Z_{it} = Z_i$ para todo $t \in \mathbb{K}_{2^r}$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} Z_{it} + Q_l & (A_iG - B_iF_l)^T \\ A_iG - B_iF_l & G + G^T - (P_i + \varepsilon I) \end{bmatrix} > 0, \tag{99}$$

e

$$Z_{it} + Q_i - \alpha^2 P_i \leq 0, \tag{100}$$

para todo i, $l \in \mathbb{K}_r$ e $t \in \mathbb{K}_{2^r}$.

Considerando (67), sem perda de generalidade, suponha a variável de folga $H = 0$. Assim, como $\phi_i > 0$ e $P_i > 0$, de (67), segue que

$$\Gamma_{2^r} = \sum_{i=1}^{r} \phi_i P_i > 0, \tag{101}$$

e

$$\Gamma_{2^r} \geq \Gamma_1,\ \Gamma_{2^r} \geq \Gamma_2,\ \cdots,\ \Gamma_{2^r} \geq \Gamma_{2^r-1}. \tag{102}$$

Portanto, de (101), segue que

$$\begin{aligned} 0 < \Gamma_{2^r} &= \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + \cdots + \phi_{r-1} P_{r-1} + \phi_r P_r \\ &\leq \phi_{max} P_1 + \phi_{max} P_2 + \cdots + \phi_{max} P_{r-1} + \phi_{max} P_r \\ &= \phi_{max} (P_1 + P_2 + \cdots + P_{r-1} + P_r) \\ &= \phi_{max} \mathscr{P}, \end{aligned} \tag{103}$$

sendo $\phi_{max} = \max\{\phi_i :\ i \in \mathbb{K}_r\}$ e $\mathscr{P} = \sum_{i=1}^{r} P_i$.

De (103), como $0 < \phi_{max} \leq 1$, segue que o mínimo e o máximo autovalor de $\mathscr{P}$, definidos como $\lambda_{\min(\mathscr{P})}$ e $\lambda_{\max(\mathscr{P})}$, respectivamente, são também maiores que zero.

Então, considerando $0 < \phi_{max} < \dfrac{\varepsilon}{\lambda_{\max(\mathscr{P})}}$ e $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$, de (92) e (103), segue que

$$
\begin{aligned}
x^T(k)\Big\{\Gamma_{2^r} - \varepsilon I\Big\}x(k) &= x^T(k)\Gamma_{2^r}x(k) - \varepsilon\|x(k)\|^2 \\
&\le x^T(k)\phi_{max}\mathscr{P}x(k) - \varepsilon\|x(k)\|^2 \\
&= \phi_{max}x^T(k)\mathscr{P}x(k) - \varepsilon\|x(k)\|^2 \\
&\le \phi_{max}\lambda_{\max(\mathscr{P})}\|x(k)\|^2 - \varepsilon\|x(k)\|^2 \\
&= \Big(\phi_{max}\lambda_{\max(\mathscr{P})} - \varepsilon\Big)\|x(k)\|^2 \\
&< \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max(\mathscr{P})}}\lambda_{\max(\mathscr{P})} - \varepsilon\right)\|x(k)\|^2 = 0.
\end{aligned} \tag{104}
$$

Logo, de (102) e (104), para todo $t \in \mathbb{K}_{2^r}$, tem-se

$$
\Gamma_t - \varepsilon I < 0. \tag{105}
$$

Portanto, de (99) e (105), obtém-se, para todo i, $l \in \mathbb{K}_r$ e $t \in \mathbb{K}_{2^r}$,

$$
\begin{bmatrix} Z_{it} + Q_l & (A_iG - B_iF_l)^T \\ A_iG - B_iF_l & G + G^T - (P_i + \Gamma_t) \end{bmatrix} > 0. \tag{106}
$$

Note que, (100) e (106) são equivalentes a (86) e (87), respectivamente. Portanto, as condições do Teorema 9 são satisfeitas. ■

Em seguida, uma análise teórica de estabilidade entre os procedimentos apresentados nos Teoremas 8 e 9, é proposta.

Teorema 11. *Considere que as hipóteses do Teorema 8,* (75)-(77)*, relacionadas ao sistema de controle* (18)*, com a lei de controle chaveada* (17)*, sejam satisfeitas. Então, as condições do Teorema 9,* (86) *e* (87)*, baseadas no conceito de hiper-retângulos, também são satisfeitas.*

Demonstração: Suponha que as condições (75)-(77) do Teorema 8 sejam satisfeitas.

Observe que, de (67),

$$
\begin{aligned}
P_\phi &= \sum_{\lambda=1}^{r}\phi_\lambda(P_\lambda + H) \\
&= \phi_1(P_1 + H) + \phi_2(P_2 + H) + \phi_3(P_3 + H) \\
&\quad + \cdots + \phi_{r-2}(P_{r-2} + H) + \phi_{r-1}(P_{r-1} + H) + \phi_r(P_r + H) \\
&= \Gamma_{2^r}.
\end{aligned} \tag{107}
$$

Como $\phi_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_r$, de (67) e (75), segue que

$$P_\phi \geq \Gamma_1,\ P_\phi \geq \Gamma_2,\ \cdots,\ P_\phi \geq \Gamma_{2^r-1}.$$

Logo, para todo $j \in \mathbb{K}_{2^r-1}$,

$$\left(P_i + P_\phi\right) \geq \left(P_i + \Gamma_j\right). \tag{108}$$

Dessa forma, de (76), (107) e (108), tem-se que

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_iG - B_iF_l)^T \\ A_iG - B_iF_l & G + G^T - (P_i + \Gamma_t) \end{bmatrix} > 0, \tag{109}$$

para todo $i, l \in \mathbb{K}_r$ e $t \in \mathbb{K}_{2^r}$.

Assim, para que (86) e (87) sejam satisfeitas, basta considerar em (109) e (77), respectivamente, $Z_{it} = Z_i$, para todo $t \in \mathbb{K}_{2^r}$. ■

3.3 UM EXEMPLO COMPARATIVO

Exemplo 1. *Considere o seguinte sistema não linear caótico apresentado em (WU, 2008), com a adição de um parâmetro incerto limitado invariante no tempo v:*

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= ax_1(k) - x_1^3 + (1+v)x_2(k) + u(k), \\ x_2(k+1) &= bx_1(k). \end{aligned} \tag{110}$$

O conjunto compacto abaixo especifica a região de operação definida em (11)*:*

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{bmatrix} z_1(k) & z_2(k) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1(k) & v \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 :\ x_1(k) \in [-\beta, \beta],\ v \in [-0{,}5,\ 0{,}5] \right\}. \tag{111}$$

Supondo $z(k) \in \mathcal{Z}$, a representação exata do sistema (110)*, por um modelo fuzzy T-S* (14)*, é assegurada. Sendo assim, utilizando o método descrito em (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM et al., 2012; ALVES, 2017), para $z(k) \in \mathcal{Z}$, as funções de pertinência normalizadas, que dependem do parâmetro incerto v, e as matrizes dos modelos locais do sistema fuzzy T-S, são dadas por:*

$$\begin{aligned} h_1(z(k)) &= \frac{(\beta^2 - x_1^2(k))(0{,}5 - v)}{\beta^2},\ h_2(z(k)) = \frac{(0{,}5 - v)x_1^2(k)}{\beta^2}, \\ h_3(z(k)) &= \frac{(\beta^2 - x_1^2(k))(0{,}5 + v)}{\beta^2},\ h_4(z(k)) = \frac{(0{,}5 + v)x_1^2(k)}{\beta^2}, \\ A_1 &= \begin{bmatrix} a & 0{,}5 \\ b & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} a & 1{,}5 \\ b & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} a - \beta^2 & 0{,}5 \\ b & 0 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} a - \beta^2 & 1{,}5 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{112}$$

Observação 6. *Apesar das funções de pertinência serem incertas, por dependerem do parâmetro incerto* v*, o fato da lei de controle chaveado* (17) *não utilizar as informações das funções de pertinência, permite que os procedimentos apresentados nos Teoremas 5, 8 e 9, além do Corolário 1, que utiliza o controlador linear invariante no tempo* (38)*, possam ser aplicados para estabilização do sistema caótico incerto* (110)*.*

Neste exemplo o objetivo é obter o máximo valor de β*, para o qual o sistema* (110) *em malha fechada possa ser estabilizado. Dessa forma, supondo* $a = 1{,}9$ *e* $b = 0{,}5$*, uma comparação entre os valores de* β *obtidos com os métodos propostos nos Teoremas 5, 8 e 9, e com o Corolário 1, é apresentada na Tabela 1. Como esperado, o Teorema 9, proporcionou a estabilização do sistema* (110)*, com a maior não linearidade, ou seja, o maior valor de* β*.*

Tabela 1 - Comparação de factibilidade para β.

Método	Factibilidade β
Teorema 5	$\beta \leq 1{,}2247$
Corolário 1	$\beta \leq 1{,}2247$
Teorema 8 com $\alpha = 1$ e $\phi_i = 0{,}01$, $i \in \mathbb{K}_4$	$\beta \leq 1{,}3674$
Teorema 9 com $\alpha = 1$ e $\phi = 0{,}01$, $i \in \mathbb{K}_4$	$\beta \leq 1{,}3718$

Para utilização dos Teoremas 8 e 9, além de supor que o sistema opera dentro da região de operação $\mathcal{Z}$*, descrita em* (111)*, é suposto que a restrição* $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i = 0{,}01$*, também é respeitada, para todo* $i \in \mathbb{K}_r$ *e* $k \geq 0$*.*

3.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

Utilizando uma lei de controle chaveada, este capítulo estabeleceu novas condições de estabilidade para uma classe de sistemas não lineares incertos discretos no tempo, descritos pelos modelos fuzzy T-S. O procedimento proposto não utiliza as funções de pertinência para a implementação da lei de controle chaveada e pode ser aplicado no controle de sistemas não lineares, com parâmetros incertos limitados.

Três projetos de controle chaveado foram propostos. No primeiro, condições suficientes, baseadas em uma candidata a função de Lyapunov não quadrática, foram fornecidas. Supondo que a variação no tempo das funções de pertinência são limitadas por uma constante menor que um e utilizando a teoria de hiper-retângulos fechados, outros dois resultados, que garantem a estabilização de sistemas não lineares incertos discretos no tempo, descritos pelos modelos fuzzy T-S, são propostos. Análises teóricas de estabilidade e um exemplo comparativo demonstram a flexibilidade e eficácia dos procedimentos propostos e a vantagem do controle chaveado sobre o procedimento que utiliza um controlador linear invariante no tempo para estabilização de sistemas incertos.

4 CONTROLE CHAVEADO SUJEITO À SATURAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO VIA MODELOS FUZZY T-S

Utilizando a lei de controle chaveada, neste capítulo é abordado o problema da estabilização local de sistemas não lineares incertos discretos no tempo, descritos por modelos fuzzy T-S, sujeitos à saturação no sinal de controle. Os projetos de controle apresentados no Capítulo 3, serão estendidos, inclusive com condições LMIs que asseguram uma estimativa do DA contida na região onde todas as restrições no problema de controle são satisfeitas. Além disso, um procedimento para obtenção de uma estimativa menos conservadora do DA é proposto.

Inicialmente uma breve descrição do sistema não linear incerto sujeito à saturação por modelos fuzzy T-S e a lei de controle chaveado sujeito à saturação são apresentadas. Em seguida, um conjunto elipsoidal e todas as restrições ou inclusões que ele deve satisfazer para que seja uma estimativa do DA são descritos. Condições LMIs asseguram que todas essas restrições no problema de controle são satisfeitas. Um novo procedimento para a maximização da estimativa do DA é proposto. Por fim, os resultados principais deste capítulo são apresentados. Neles são propostas condições na forma de um problema de otimização que asseguram a estabilidade local do sistema fuzzy T-S incerto com atuadores saturantes e que proporcionam uma estimativa do domínio de atração.

4.1 SISTEMAS FUZZY T-S DISCRETOS NO TEMPO SUJEITOS À SATURAÇÃO NO SINAL DE CONTROLE

Considere o sistema não linear incerto sujeito à saturação do sinal de controle descrito dado por:

$$x(k+1) = f(z(k))x(k) + g(z(k))\mathrm{sat}(u(k)), \tag{113}$$

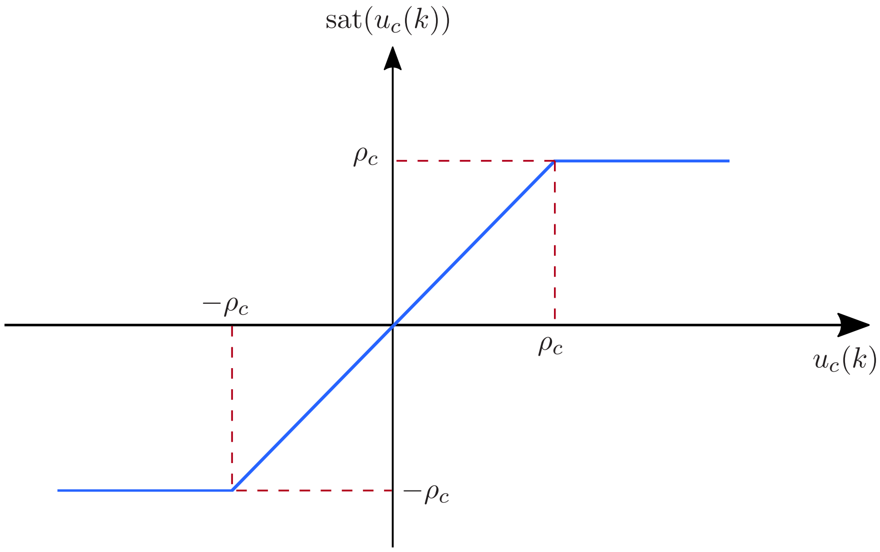
com $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ e $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$, funções não lineares, como definidos na Seção 2.3. Em (113), $\mathrm{sat} : \mathbb{R}^{n_u} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ é a função vetorial de saturação aplicada à realimentação do vetor de estado $u(k)$, com limites simétricos, definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{sat}(u(k)) &= \begin{bmatrix} \mathrm{sat}(u_1(k)) & \ldots & \mathrm{sat}(u_{n_u}(k)) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u}, \\ \mathrm{sat}(u_c(k)) &= \mathrm{sign}(u_c(k)) \min\{\rho_c, |u_c(k)|\}, \ \forall c \in \mathbb{K}_{n_u}, \end{aligned} \tag{114}$$

sendo que ρ_c, $c \in \mathbb{K}_{n_u}$, são constantes positivas com valores conhecidos.

A Figura 3, apresenta uma interpretação gráfica do comportamento da função $\text{sat}(u_c(k))$, $c \in \mathbb{K}_{n_u}$.

Figura 3 - Interpretação gráfica da função $\text{sat}(u_c(k))$, $c \in \mathbb{K}_{n_u}$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para $x(k) \in \mathcal{L}$ e $v \in \mathcal{V}$, a representação exata do sistema (113), por um modelo fuzzy T-S, com r regras fuzzy, é dado por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k))\,(A_i x(k) + B_i \text{sat}(u(k))) \\ &= A_{z(k)} x(k) + B_{z(k)} \text{sat}(u(k)), \end{aligned} \tag{115}$$

sendo $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$, funções diferenciáveis que representam as funções de pertinência normalizadas de cada modelo local (A_i, B_i), satisfazendo (15).

4.2 LEI DE CONTROLE CHAVEADA SUJEITA À SATURAÇÃO NO SINAL DE CONTROLE

A entrada de controle sujeita à saturação, pode ser representada por uma descrição politópica da função vetorial não linear $\text{sat}(u(k))$ (HU; LIN, 2001). Neste caso, a função vetorial $\text{sat}(u(k))$ pertence à combinação convexa de um conjunto de vetores lineares.

Tendo em vista a lei de controle chaveado (17), considere o conjunto definido por:

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathscr{D} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u} : \ \mathscr{D} = diag\{\xi_1, \cdots, \xi_{n_u}\} \right\}, \tag{116}$$

sendo $\xi_j = 1$ ou $\xi_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{K}_{n_u}$. Dessa forma, $\mathcal{D}$ possui 2^{n_u} elementos que são matrizes diagonais $\mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, cujos elementos das diagonais são 1 ou 0 (HU; LIN, 2001; CAO; LIN, 2003).

Denote cada elemento de $\mathcal{D}$ por $\mathscr{D}_s$, $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$, e $\mathscr{D}_s^- = I - \mathscr{D}_s$. Note que, se $\mathscr{D}_s \in \mathcal{D}$, então $\mathscr{D}_s^- \in \mathcal{D}$.

Seja $\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \cdots & \vartheta_{2^{n_u}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2^{n_u}}$ um vetor, tal que, $\vartheta_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \vartheta_s = 1$. Considere

$$\mathscr{D}_\vartheta = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \vartheta_s \mathscr{D}_s, \;\; \mathscr{D}_\vartheta^- = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \vartheta_s \mathscr{D}_s^-. \tag{117}$$

Para cada $l \in \mathbb{K}_r$, defina o conjunto

$$\mathcal{S}(M_l) := \left\{ x(k) \in \mathbb{R}^{n_x} : \; |M_{l(c)} x(k)| \leq \rho_c, \; c \in \mathbb{K}_{n_u} \right\}, \tag{118}$$

sendo $M_l = \begin{bmatrix} M_{l(1)}^T & M_{l(2)}^T & \cdots & M_{l(n_u)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, com $M_{l(c)} = N_{l(c)} G^{-1}$, $N_{l(c)} \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$, $c \in \mathbb{K}_{n_u}$ e $\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n_u} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u}$ um vetor dado, tal que $\rho_c > 0$, para todo $c \in \mathbb{K}_{n_u}$.

Note que, para todo $x(k) \in \bigcap_{l=1}^{r} \mathcal{S}(M_l)$, então em particular, $x(k) \in \mathcal{S}(M_\sigma)$, sendo o índice σ definido em (17). Assim, para todo $x(k) \in \bigcap_{l=1}^{r} \mathcal{S}(M_l)$, utilizando a notação definida em (117), de acordo com (HU; LIN, 2001; HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003), $\mathrm{sat}(u_\sigma(k))$, com $u_\sigma(k) = -K_\sigma x(k)$, $K_\sigma = F_\sigma G^{-1}$, dado em (17), pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \mathrm{sat}(u_\sigma(k)) &= \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \vartheta_s \left(\mathscr{D}_s(-K_{\sigma(k)} x(k)) + \mathscr{D}_s^- M_{\sigma(k)} x(k) \right) \\ &= \left(-\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)} \right) x(k). \end{aligned} \tag{119}$$

Dessa forma, de (119), para $x(k) \in \bigcap_{l=1}^{r} \mathcal{S}(M_l)$, o sistema realimentado sujeito à saturação (115), pode ser reescrito como

$$x(k+1) = \left(A_{z(k)} + B_{z(k)} \left(-\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)} \right) \right) x(k). \tag{120}$$

4.3 O PROBLEMA DE ESTABILIDADE CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO

Além de estabelecer a lei de controle chaveada $u_\sigma(k)$ como uma alternativa para tornar a origem um ponto de equilíbrio do sistema incerto (113) localmente assintoticamente estável, o problema de estimar um subconjunto invariante do DA, onde todas as restrições no problema de controle são satisfeitas é abordado.

A representação do sistema (113) por um sistema fuzzy T-S (115) e a existência das funções de pertinência $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$, são bem definidos quando $x(k) \in \mathcal{L}$. No entanto, conforme observado em (LEE; JOO, 2014), é necessário garantir que, para todo $x(k) \in \mathcal{L}$, o próximo instante $x(k+1)$ permanecerá na região $\mathcal{L}$, pois assim, $V(x(k+1))$ e $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$ podem ser definidos. Portanto, baseado em (LEE, 2013; LEE; JOO, 2014; LEE; HU, 2017), considere o seguinte conjunto:

$$\mathcal{R} := \left\{ x(k) \in \mathcal{L} : \left(A_{z(k)} + B_{z(k)} \left(\mathscr{D}_\vartheta K_\sigma + \mathscr{D}_\vartheta^- M_\sigma \right) \right) x(k) \in \mathcal{L} \right\}. \tag{121}$$

Note que, de (120) e (121), para todo $x(k) \in \mathcal{R}$, o próximo instante do vetor de estado, $x(k+1)$, permanecerá na região $\mathcal{L}$.

Considere a função de Lyapunov não quadrática (16) e, para todo $v \in \mathcal{V}$ e uma constante positiva $\gamma > 0$, o conjunto elipsoidal

$$\Omega(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma) := \left\{ x(k) \in \mathbb{R}^{n_x} : \ V(x(k)) = x^T(k) G^{-T} P_{z(k)} G^{-1} x(k) \leq \gamma \right\}. \tag{122}$$

Baseado em (LEE; JOO, 2014; LEE; HU, 2017), para provar que o conjunto elipsoidal $\Omega(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma)$ é uma estimativa do DA, as seguintes condições devem ser satisfeita:

1. $\Omega\left(G^{-T} P_z G^{-1}, \gamma\right) \subset \mathcal{L}$: assegura que, para todo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T} P_z G^{-1}, \gamma\right)$, o sistema (113) pode ser representado por (115);

2. $\Omega\left(G^{-T} P_z G^{-1}, \gamma\right) \subset \mathcal{R}$: garante a existência de $h_i(z(k))$ e $h_i(z(k+1))$, quando a condição 1. acima é satisfeita, e então $\Delta h_i(z(k)) = h_i(z(k+1)) - h_i(z(k))$ e $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(k)$ estão bem definidas, para todo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T} P_z G^{-1}, \gamma\right)$;

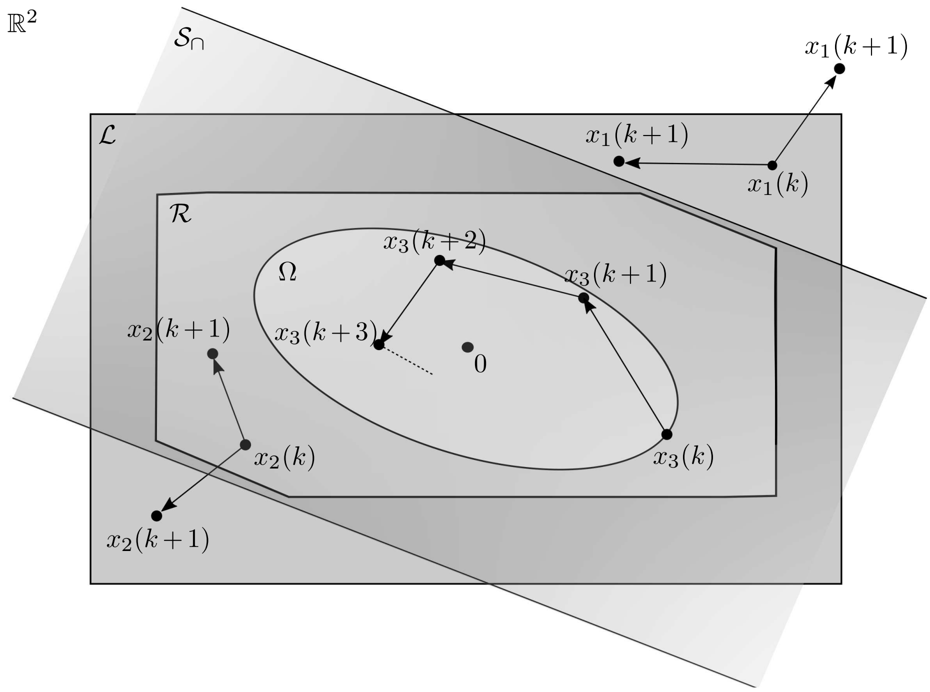
3. $\Omega\left(G^{-T} P_z G^{-1}, \gamma\right) \subset \bigcap_{l=1}^{r} \mathcal{S}(M_l)$: assegura a validade da representação definida em (119), para $\text{sat}(u_\sigma(k))$, para todo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T} P_z G^{-1}, \gamma\right)$;

4. $\Omega(G^{-T} P_z G^{-1}, \gamma) \backslash \{0\} \subseteq \{x(k) \in \mathbb{R}^{n_x} : \ \Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(k) < 0\}$: assegura que $\Omega(G^{-T} P_z G^{-1}, \gamma)$ é contrativamente invariante, ou seja, é um subconjunto do DA.

Observação 7. *Note que, de* (115) *e* (121)*, a condição* 2. *implica que* $x(k+1) \in \mathcal{L}$ *definido em* (9)*. Essa condição permite o cálculo de* $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1) - V(x(k))$*, pois de* (16)*, se a condição* 2. *é satisfeita, então* $x(k+1) \in \mathcal{L}$ *e* $h_i(z(k+1))$, $i \in K_r$*, estão bem definidas, pois neste caso a planta não linear* (113) *pode ser exatamente representada pelo modelo fuzzy T-S* (115)*, substituindo* k *por* $k+1$.

As propriedades acima enumeradas estão ilustradas na Figura 4. As setas indicam as possíveis evoluções das trajetórias do vetor de estado ao longo do tempo.

Figura 4 - Representação, no plano, das relações de inclusão entre os conjuntos $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}_{\cap} = \bigcap_{l=1}^{r} \mathcal{S}(M_l)$ e $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right)$, e os possíveis comportamentos de diferentes trajetórias do vetor de estado.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

4.3.1 Condições para as relações de inclusão entre os conjuntos da região de operação

Nesta subseção serão apresentados auxiliares resultados que fornecem condições LMIs para que as restrições, impostas ao conjunto elipsoidal $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right)$ definido em (122), enunciadas na Seção 4.3, sejam satisfeitas. Tais restrições são necessárias para que (122), seja uma estimativa do domínio de atração do ponto de equilíbrio do sistema não linear incerto (113).

Os Lemas 4 e 5, fornecem, respectivamente, condições suficiente para que $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right) \subset \mathcal{L}$ e $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right) \subset \mathcal{R}$.

Lema 4. *(LEE, 2013) Considere os conjuntos* $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right)$ *e* $\mathcal{L}$ *dados em* (122) *e* (9)*, respectivamente. A restrição* $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right) \subset \mathcal{L}$ *é assegurada se a seguinte condição*

$$\begin{bmatrix} P_i & G^T e_{a\eta} \\ e_{a\eta}^T G & \gamma^{-1} \bar{x}_{a\eta}^2 \end{bmatrix} > 0, \tag{123}$$

for satisfeita para todo $i \in \mathbb{K}_r$ *e* $\eta \in \mathbb{K}_q$*, sendo*

$$e_{a\eta}^T := [\ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ \underbrace{1}_{\eta-\acute{e}sima}\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ ] \in \mathbb{R}^{n_x}, \tag{124}$$

O Lema 5 é uma adaptação de um resultado presente em (LEE, 2013), considerando saturação no sinal de controle.

Lema 5. *Considere os conjuntos* $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ *e* $\mathcal{R}$ *dados em* (122) *e* (121)*, respectivamente, sendo* $M_{l(c)} = N_{l(c)}G^{-1}$ *e* $K_l = F_lG^{-1}$*, para* $c \in \mathbb{K}_{n_u}$ *e* $l \in \mathbb{K}_r$*. A restrição* $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right) \subset \mathcal{R}$ *é assegurada se, para todo* $i,l \in \mathbb{K}_r$*,* $\eta \in \mathbb{K}_q$ *e* $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$*, a seguinte condição for satisfeita:*

$$\begin{bmatrix} P_i & \left(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^-N_l\right)^T e_{a\eta} \\ e_{a\eta}^T\left(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^-N_l\right) & \gamma^{-1}\bar{x}_{a\eta}^2 \end{bmatrix} > 0. \tag{125}$$

Demonstração: Suponha que (125) seja satisfeita para todo $i,l \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$. Logo para qualquer $x(k) \in \mathcal{L}$, multiplicando $h_i(z(k))$ em (125) e somando de $i = 1$ até $i = r$, e multiplicando ϑ_s e somando de $s = 1$ até $s = 2^{n_u}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} P_{z(k)} & * \\ e_{a\eta}^T\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}\right)\right) & \gamma^{-1}\bar{x}_{a\eta}^2 \end{bmatrix} > 0, \tag{126}$$

para todo $\eta \in \mathbb{K}_p$, sendo $\sigma \in \mathbb{K}_r$.

Multiplicando $\left[I \quad -\gamma\bar{x}_{a\eta}^{-2}\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}\right)\right)^T e_{a\eta}\right]$ à esquerda e seu transposto à direita de (126), obtém-se, para todo $\eta \in \mathbb{K}_p$,

$$\begin{aligned} P_{z(k)} - \gamma\bar{x}_{a\eta}^{-2}&\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}\right)\right)^T e_{a\eta} \\ &\times e_{a\eta}^T\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}\right)\right) > 0. \end{aligned} \tag{127}$$

Pré e pós multiplicando (127) por G^{-T} e G^{-1}, respectivamente, segue que, para todo $\eta \in \mathbb{K}_p$ e $x(k) \neq 0$,

$$\begin{aligned} x^T(k)G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}x(k) - \gamma\bar{x}_{a\eta}^{-2}x^T(k)&\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)}G^{-1} + \mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}G^{-1}\right)\right)^T \\ &\times e_{a\eta}e_{a\eta}^T\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)}G^{-1} + \mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}G^{-1}\right)\right)x(k) > 0 \end{aligned} \tag{128}$$

Então, lembrando que $M_{l(c)} = N_{l(c)}G^{-1}$ e $K_l = F_lG^{-1}$, de (128), segue que

$$\begin{aligned} x^T(k)G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}x(k) - \gamma\bar{x}_{a\eta}^{-2}x^T(k)&\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)^T \\ &\times e_{a\eta}e_{a\eta}^T\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)x(k) > 0. \end{aligned} \tag{129}$$

Logo, de (129), para todo $x(k) \in \mathcal{L}\backslash\{0\}$ e $\eta \in \mathbb{K}_p$, tem-se

$$\begin{aligned} &V(x(k)) - \gamma \bar{x}_{a\eta}^{-2} x^T(k+1) e_{a\eta} e_{a\eta}^T x(k+1) > 0 \\ &\iff V(x(k)) - \gamma \bar{x}_{a\eta}^{-2} x_{a\eta}^2(k+1) > 0. \end{aligned} \tag{130}$$

Veja que, para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right)$, $V(x(k)) \leq \gamma$. Assim, supondo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right)$, de (130), segue

$$\gamma \bar{x}_{a\eta}^{-2} x_{a\eta}^2(k+1) < \gamma.$$

Multiplicando $\gamma^{-1} \bar{x}_{a\eta}^2$, na inequação acima, tem-se $x_{a\eta}^2(k+1) < \bar{x}_{a\eta}^2$, ou seja, $x_{a\eta}(k+1) \in [-\bar{x}_{a\eta},\ \bar{x}_{a\eta}]$, para todo $\eta \in \mathbb{K}_q$.

Logo, como $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right) \subset \mathcal{L}$, segue que

$$\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right) \subset \bigcap_{\eta=1}^{q} \left\{x(k) \in \mathcal{L} :\ x_{a\eta}(k+1) \in [-\bar{x}_{a\eta},\ \bar{x}_{a\eta}]\right\}. \tag{131}$$

Portanto, de (131), segue que $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, 1\right) \subset \mathcal{R}$. ■

Para garantir a validade da representação (119), para $sat(u_\sigma(k))$, $\sigma \in \mathbb{K}_r$, baseado em (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003), o Lema 6 é proposto. Nele condições suficientes para que o conjunto elipsoidal $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right)$ definido em (122), esteja contido na região $\bigcap_{l=1}^{r} \mathcal{S}(M_l)$, sendo $\mathcal{S}(M_l)$, $l \in \mathbb{K}_r$, dado em (118), são fornecidas.

Lema 6. *Considere os conjuntos* $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right)$ *e* $\mathcal{S}(M_l)$ *definidos em* (122) *e* (118), *respectivamente, sendo* $M_{l(c)} = N_{l(c)} G^{-1}$. *A inclusão* $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right) \subset \bigcap_{l=1}^{r} \mathcal{S}(M_l)$ *é assegurada, se*

$$\begin{bmatrix} -P_i & N_{l(c)}^T \\ N_{l(c)} & -\gamma^{-1} \rho_c^2 \end{bmatrix} \leq 0, \tag{132}$$

for satisfeita para todo $l, i \in \mathbb{K}_r$ *e* $c \in \mathbb{K}_{n_u}$.

Demonstração: Multiplicando $h_i(z(k))$ em (132) e somando de $i = 1$ até $i = r$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -P_{z(k)} & N_{l(c)}^T \\ N_{l(c)} & -\gamma^{-1} \rho_c^2 \end{bmatrix} \leq 0, \tag{133}$$

para todo $l \in \mathbb{K}_r$ e $c \in \mathbb{K}_{n_u}$.

Pré e pós multiplicando (133) por $\operatorname{diag}\left\{G^{-T}, 1\right\}$ e sua transposta, respectivamente, obtém-se, para todo $l \in \mathbb{K}_r$ e $c \in \mathbb{K}_{n_u}$,

$$\begin{bmatrix} -G^{-T}P_{z(k)}G^{-1} & G^{-T}N_{l(c)}^T \\ N_{l(c)}G^{-1} & -\gamma^{-1}\rho_c^2 \end{bmatrix} \leq 0. \tag{134}$$

Aplicando o complemento de Schur em (134), tem-se

$$\gamma\rho_c^{-2}G^{-T}N_{l(c)}^T N_{l(c)}G^{-1} - G^{-T}P_{z(k)}G^{-1} \leq 0 \Longleftrightarrow \gamma\rho_c^{-2}M_{l(c)}^T M_{l(c)} \leq G^{-T}P_{z(k)}G^{-1} \tag{135}$$

para todo $l \in \mathbb{K}_r$ e $c \in \mathbb{K}_{n_u}$.

Supondo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$, de (135), segue que, para todo $l \in \mathbb{K}_r$ e $c \in \mathbb{K}_{n_u}$,

$$\gamma\rho_c^{-2}x^T(k)M_{l(c)}^T M_{l(c)}x(k) \leq x^T(k)G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}x(k) \leq \gamma. \tag{136}$$

Multiplicando $\gamma^{-1}\rho_c^2$ em (136), segue que, para todo $l \in \mathbb{K}_r$ e $c \in \mathbb{K}_{n_u}$,

$$x^T(k)M_{l(c)}^T M_{l(c)}x(k) \leq \rho_c^2, \tag{137}$$

ou seja, $x(k) \in \bigcap_{l=1}^r \mathcal{S}(M_l)$.

Portanto, de (137), segue que $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right) \subset \bigcap_{l=1}^r \mathcal{S}(M_l)$. ∎

Observação 8. *Em alguns projetos de controle, os controladores de realimentação do vetor de estado apresentam ganhos elevados. Em implementações práticas, estes ganhos resultam em elevados valores do sinal de controle que podem inviabilizar a implementação. Uma forma de evitar estes controladores com ganhos elevados, se dá pela imposição da restrição* $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right) \subset \bigcap_{l=1}^r \mathcal{S}(K_l)$, $K_l = F_l G^{-1}$. *Esta inclusão pode ser garantida se a seguinte condição LMI for satisfeita para todo* $l,i \in \mathbb{K}_r$ *e* $c \in \mathbb{K}_{n_u}$ *:*

$$\begin{bmatrix} -P_i & F_{l(c)}^T \\ F_{l(c)} & -\gamma^{-1}\rho_c^2 \end{bmatrix} \leq 0. \tag{138}$$

O conjunto $\mathcal{S}(K_l)$ *é similar à* $\mathcal{S}(M_l)$, $l \in \mathbb{K}_r$, *dado em* (118) *(HU; LIN; CHEN, 2002). A demonstração da implicação descrita nesta observação é análoga à prova do Lema 6.*

A inclusão $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)\backslash\{0\} \subseteq \{x(k) \in \mathcal{R} : \ \Delta V(x(k)) < 0\}$, que garante a invariância do conjunto elipsoidal, será verificada na Seção 4.5, nos principais resultados deste capítulo.

4.4 MAXIMIZAÇÃO DA ESTIMATIVA ELIPSOIDAL DO DOMÍNIO DE ATRAÇÃO

O conjunto elipsoidal $\Omega\left(G^{-T}P_z G^{-1},\gamma\right)$ definido em (122), pode ser uma estimativa muito conservadora do DA, $\mathscr{R}_A$, dado em (3) (KHALIL, 2002; HU; LIN, 2001). Nesta seção, serão apresentadas condições para que a estimativa do domínio de atração (122), seja maximizada. Baseado em (HU; LIN, 2001; CAO; LIN, 2003), o método proposto é formulado como um problema de otimização e possibilita o projeto de ganhos de realimentação que proporcionam maiores estimativas do domínio de atração (BOYD *et al.*, 1994). A maximização do conjunto elipsoidal é obtida a partir da expansão de um subconjunto poliedral.

Além de fornecer um conjunto elipsoidal menos conservador, o problema de otimização é formulado de forma a garantir que o conjunto $\Omega\left(G^{-T}P_z G^{-1},\gamma\right)$, continue contido na região de operação e no domínio linear da função de saturação.

O problema de maximização da estimativa do DA (122), é um tema amplamente abordado na teoria de controle. Na sequência, além do método proposto, serão apresentados alguns procedimentos adotados na literatura.

- **Método A:**

Em (LEE, 2013), por exemplo, o seguinte conjunto é considerado

$$\mathcal{Y} := \{x(k) \in \mathbb{R}^{n_x} :\ x(k)^T x(k) \leq 1/\delta\}, \tag{139}$$

sendo $\delta > 0$ um número real. Condições LMIs são propostas para garantir que o conjunto dado em (139), esteja contido em $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ dado em (122). Assim, a minimização de δ causa a maximização do conjunto definido em (139), que, por sua vez, faz $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ ser expandido.

Lema 7. *(LEE, 2013) Sejam os conjuntos* $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ *e* $\mathcal{Y}$ *dados em* (122) *e* (139)*, respectivamente. A restrição* $\mathcal{Y} \subset \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ *é imposta se, para todo* $i \in \mathbb{K}_r$*, a seguinte condição for satisfeita:*

$$\begin{bmatrix} \delta I_{n_x} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & G^T + G - P_i \end{bmatrix} > 0. \tag{140}$$

- **Método B:**

Por outro lado, em (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003), é considerado um conjunto poliedral convexo, $\varpi\mathcal{W}$, definido por

$$\varpi\mathcal{W} = \varpi\mathrm{co}\{w_1, \cdots, w_{n_L}\}, \tag{141}$$

sendo ϖ um número real positivo, $w_m \in \mathbb{R}^{n_x}$, $m \in \mathbb{K}_{n_L}$, são vetores dados e n_L é o número de vértices dos poliedro.

Para assegurar que $\varpi\mathcal{W} \subset \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$, uma adaptação imediata das condições LMIs apresentadas em (CAO; LIN, 2003), para o caso em que uma candidata a função de Lyapunov como em (16) é considerada, pode ser enunciado da seguinte forma:

Lema 8. *(CAO; LIN, 2003) Seja os conjuntos* $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ *e* $\varpi\mathcal{W}$ *dados* (122) *e* (141), *respectivamente. A restrição* $\varpi\mathcal{W} \subset \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ *é imposta se, para todo* $i \in \mathbb{K}_r$ *e* $m \in \mathbb{K}_{n_L}$, *a seguinte condição for satisfeita:*

$$\begin{bmatrix} \varpi^{-2}\gamma & w_m^T \\ w_m & G^T + G - P_i \end{bmatrix} > 0. \tag{142}$$

Note que, se as condições do Lema 8 são satisfeitas, a maximização da variável ϖ amplifica o tamanho do conjunto poliedral $\varpi\mathcal{W}$ e, consequentemente, fornece uma estimativa menos conservadora do DA, $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$, dada em (122). Neste caso, $\varpi = \sup\left\{\tau : \ \tau\mathcal{W} \subset \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)\right\}$.

- **Método C (Método proposto):**

Com o intuito de desenvolver um método que possibilite uma estimativa do DA ainda menos conservadora, considere o conjunto poliedral

$$\mathcal{B} = \mathrm{co}\{\varpi_1 w_1, \cdots, \varpi_{n_L} w_{n_L}\}, \tag{143}$$

sendo ϖ_m, $m \in \mathbb{K}_{n_L}$, escalares positivos e $w_m \in \mathbb{R}^{n_x}$ vetores dados que definem a direção em que o conjunto $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ deve ser maximizado. Assim, para todo $\xi \in \mathcal{B}$, existem $\theta_m \geq 0$, com $\sum_{m=1}^{n_L}\theta_m = 1$, tais que

$$\xi = \sum_{m=1}^{n_L} \theta_m \varpi_m w_m = (\varpi w)_\theta. \tag{144}$$

Baseado em (TARBOURIECH *et al.*, 2011; HU; LIN; CHEN, 2002), o seguinte Lema fornece condições para $\mathcal{B} \subset \Omega\left(G^{-T}P_z G^{-1},\gamma\right)$.

Lema 9. *Considere os conjuntos* $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ *e* $\mathcal{B}$ *definidos em* (122) *e* (143), *respectivamente. A restrição* $\mathcal{B} \subset \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ *é assegurada se a condição,*

$$\begin{bmatrix} \gamma & \varpi_m w_m^T \\ \varpi_m w_m & G^T + G - P_i \end{bmatrix} > 0, \tag{145}$$

for satisfeita para todo $i \in \mathbb{K}_r$ *e* $m \in \mathbb{K}_{n_L}$.

Demonstração: Multiplicando (145) por $h_i(z(k))$ e θ_m, somando de $i = 1$ até $i = r$ e de $m=1$ até $m=n_L$, considerando as notações dadas em (1), (143) e (144), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \gamma & (\varpi w)_\theta^T \\ (\varpi w)_\theta & G^T+G-P_{z(k)} \end{bmatrix} > 0. \tag{146}$$

Pré e pós multiplicando (146) por $\begin{bmatrix} 1 & -(\varpi w)_\theta^T G^{-T} \end{bmatrix}$ e seu transposto, respectivamente, segue a seguinte desigualdade

$$\gamma - (\varpi w)_\theta^T G^{-T}(\varpi w)_\theta + (\varpi w)_\theta^T G^{-T} G G^{-1}(\varpi w)_\theta - (\varpi w)_\theta^T G^{-T} P_z G^{-1}(\varpi w)_\theta > 0$$
$$\iff (\varpi w)_\theta^T G^{-T} P_z G^{-1}(\varpi w)_\theta < \gamma. \tag{147}$$

Note que $(\varpi w)_\theta \in \mathcal{B}$. Logo, de (147), segue que $(\varpi w)_\theta \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$. Portanto, $\mathcal{B} \subset \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$. ■

Note que, uma vez que as condições do Lema 9 são satisfeitas, a maximização de $\sum_{m=1}^{n_L}\varpi_m$, proporciona a expansão do conjunto poliedral $\mathcal{B}$, que, por sua vez, provoca a obtenção de uma estimativa menos conservadora do DA, $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$.

O procedimento apresentado em (CAO; LIN, 2003) fornece uma expansão uniforme em todas as direções do conjunto poliedral $\mathcal{W}$, enquanto o método proposto no Lema 9 fornece a maximização de n_L variáveis ϖ_m, a partir da otimização de $\sum_{m=1}^{n_L}\varpi_m$. Portanto, são possíveis diferentes expansões em cada direção do conjunto poliedral $\mathcal{B}$.

O seguinte lema mostra que se as condições do Lema 8 são satisfeitas, então as condições do Lema 9 também são satisfeitas.

Lema 10. *Suponha que as condições do Lema 8 sejam satisfeitas. Então, as condições do Lema 9 também são satisfeitas.*

Demonstração: Suponha que a condição (142) do Lema 8 seja satisfeita para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e $m \in \mathbb{K}_{n_L}$.

Pré e pós multiplicando (142) por $\text{diag}\{\varpi, I\}$ e seu transposto, respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \gamma & \varpi w_m^T \\ \varpi w_m & G^T+G-P_i \end{bmatrix} > 0. \tag{148}$$

Assim, como (148) é satisfeita para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e $m \in \mathbb{K}_{n_L}$, considerando $\varpi_1 = \cdots = \varpi_{n_L}$, então (145) também é satisfeita para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e $m \in \mathbb{K}_{n_L}$.

Observação 9. *Além dos métodos explorados nesta seção, existem outras maneiras de maximizar o conjunto $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$. Uma alternativa para isso é maximizar os subconjuntos elipsoidais $\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},\gamma\right)$, definidos para cada matriz local de Lyapunov*

P_i, $i \in \mathbb{K}_r$. Como o volume de cada conjunto elipsoidal $\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},\gamma\right)$, $i \in \mathbb{K}_r$ é proporcional a $\left(\det(\gamma^{-1}P_i^{-1})\right)^{\frac{1}{2}}$, a minimização de $\log(\det(\gamma P_i))$, $i \in \mathbb{K}_r$, causa a maximização do conjunto $\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},\gamma\right)$, $i \in \mathbb{K}_r$ (BOYD et al., 1994). Além disso, cada autovalor de P_i, $i \in \mathbb{K}_r$, está associado ao comprimento dos eixo do elipsoide, então a minimização de $Tr(P_i)$ expande homogeneamente o conjunto $\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},\gamma\right)$, $i \in \mathbb{K}_r$ (TARBOURIECH et al., 2011).

4.5 PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS SUJEITOS À SATURAÇÃO NOS ATUADORES USANDO MODELOS FUZZY T-S

Nesta seção, os procedimentos propostos nos Teoremas 7, 8 e 9, são estendidos para estabilização local de sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy T-S sujeitos à saturação no sinal de controle. Além disso, condições que proporcionam uma estimativa do domínio de atração do ponto de equilíbrio do sistema são fornecidas.

4.5.1 Condições de estabilidade local de sistemas sujeitos à saturação no sinal de controle

Utilizando a lei de controle chaveado (17), o Lema 11 e o Teorema 12 apresentam uma generalização dos resultados propostos no Lema 1 e no Teorema 7, respectivamente, para o caso em que o sistema está sujeito à saturação. Além disso, são apresentadas condições para estimar um subconjunto invariante do DA. Um método para obter uma estimativa maior do DA é proposto.

Lema 11. *Considere que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas Z_i, $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $N_l = \begin{bmatrix} N_{l(1)}^T & N_{l(2)}^T & \cdots & N_{l(n_u)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, tais que*

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & \left(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^-N_l\right)^T \\ A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^-N_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0, \tag{149}$$

seja satisfeita para todo i, j, $l \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$. Então, utilizando a lei de controle chaveada (17), a condição abaixo também é satisfeita, para todo $x(k) \neq 0$:

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ & \left(A_{z(k)} + B_{z(k)}\left(-\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)^T \left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right) \\ & \times \left(A_{z(k)} + B_{z(k)}\left(-\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)\Big\}x(k) \\ & < x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k). \end{aligned} \tag{150}$$

Demonstração: Multiplicando (149) por $h_i(z(k))$ e $h_j(z(k+1))$, somando de $i = 1$ até

$i=r$ e de $j=1$ até $j=r$, multiplicando o resultado por ϑ_s e tomando a soma de $s=1$ até $s=2^{n_u}$, usando as notações definidas em (1) e (117), substituindo l por $\sigma(k)$, segue que, para $x(k)\neq 0$,

$$\begin{bmatrix} Z_{z(k)}+Q_{\sigma(k)} & \left(A_{z(k)}G-B_z\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)}+B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}\right)^T \\ A_{z(k)}G-B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)}+B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)} & G+G^T-P_{z(k+1)} \end{bmatrix} > 0. \tag{151}$$

Pré e pós multiplicando (151) por $\begin{bmatrix} I & -\left(G^{-1}\left(A_{z(k)}G-B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)}+B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}\right)\right)^T\end{bmatrix}$ e seu transposto, respectivamente, e Pré e pós multiplicando o resultado por G^{-T} e G^{-1}, respectivamente, para $x(k)\neq 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ &\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)}+\mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)^T\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right) \\ &\times\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)}+\mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)\Big\}x(k) \\ &< x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1}+G^{-T}Q_{\sigma(k)}G^{-1}\right\}x(k). \end{aligned} \tag{152}$$

Então, de (17), (30) e (152), for $x(k)\neq 0$, segue que

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ &\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)}+\mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)^T\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right) \\ &\times\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)}+\mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)\Big\}x(k) \\ &< x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1}+G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k). \end{aligned} \tag{153}$$

. ■

O teorema a seguir fornece condições suficientes, na forma de um problema de otimização, para o projeto de um controlador chaveado que permite a especificação da taxa de decaimento e a obtenção de uma estimativa do DA do ponto de equilíbrio do sistema incerto (113).

Teorema 12. *Considere o sistema não linear incerto sujeito à saturação no atuador* (113) *descrito por um modelo fuzzy T-S* (115) *em uma região de operação $\mathcal{L}$ dada em* (9)*, sendo $\rho\in\mathbb{R}^{n_u}$, com $\rho_c>0$, $c\in\mathbb{K}_{n_u}$, e $\bar{x}_{a\eta}>0$, $\eta\in\mathbb{K}_q$ conhecidos, assim como os limites dos parâmetros incertos definidos em* (8)*. Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, matrizes simétricas Z_i, $Q_i\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, matrizes $F_l\in\mathbb{R}^{n_u\times n_x}$, $G\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ e $N_l=\begin{bmatrix}N_{l(1)}^T & N_{l(2)}^T & \cdots & N_{l(n_u)}^T\end{bmatrix}^T\in\mathbb{R}^{n_u\times n_x}$, números reais $\varpi_m>0$, com $\mathit{\Pi}=diag\{\varpi_1,\cdots\ \varpi_{n_L}\}\in\mathbb{R}^{n_L\times n_L}$ e um escalar $0<\alpha<1$, tais qu, para todo $i,l,\mathbb{K}_r$, $c\in\mathbb{K}_{n_u}$, $\eta\in\mathbb{K}_q$, $s\in\mathbb{K}_{2^{n_u}}$ e $m\in\mathbb{K}_{n_L}$, o seguinte problema de otimização é factível:*

$$\max_{P_i,Z_i,Q_i,F_l,N_l,G,H} Tr(\mathit{\Pi}),\ \textit{sujeito a}$$

$$\begin{bmatrix} P_i & G^T e_{a\eta} \\ e_{a\eta}^T G & \gamma^{-1}\bar{x}_{a\eta}^2 \end{bmatrix} > 0, \tag{154}$$

$$\begin{bmatrix} P_i & (A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^- N_l)^T e_{a\eta} \\ e_{a\eta}^T(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^- N_l) & \gamma^{-1}\bar{x}_{a\eta}^2 \end{bmatrix} > 0, \tag{155}$$

$$\begin{bmatrix} -P_i & N_{l(c)}^T \\ N_{l(c)} & -\gamma^{-1}\rho_c^2 \end{bmatrix} < 0, \tag{156}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & \varpi_m w_m^T \\ \varpi_m w_m & G^T + G - P_i \end{bmatrix} > 0, \tag{157}$$

$$Z_i + Q_i - \alpha^2 P_i \leq 0, \tag{158}$$

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & \left(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^- N_l\right)^T \\ A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^- N_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0. \tag{159}$$

Então, a lei de controle chaveada (17) *com os ganhos do controlador* $K_l = F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, *torna o ponto de equilíbrio* $x(k) = 0$ *do sistema não linear incerto sujeito à saturação* (115)*, localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento* α*. Além disso, o conjunto elipsoidal* $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ *definido em* (122)*, é um subconjunto invariante do DA.*

Demonstração: De acordo com os Lemas 4, 5 e 6, as condições (154), (155) e (156), asseguram que $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right) \subset \mathcal{L}$, $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right) \subset \mathcal{R}$ e $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right) \subset \bigcap_{l=1}^{r}\mathcal{S}(M_l)$, respectivamente.

Multiplicando (158) por $h_i(z(k))$ e tomando a soma de $i = 1$ até $i = r$ e pré e pós multiplicando o resultado por G^{-T} e G^{-1}, respectivamente, para todo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right) \backslash \{0\}$, obtém-se

$$x^T(k)\Big\{G^{-T}\left(Z_{z(k)} + Q_{z(k)} - \alpha^2 P_{z(k)}\right)G^{-1}\Big\}x(k) \leq 0. \tag{160}$$

Considerando a lei de controle chaveada (17), segue do Lema 11, que a condição (159) garante que, para todo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right) \backslash \{0\}$,

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ &\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)^T \left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right) \\ &\times \left(A_{z(k)} - B_z\left(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)\Big\}x(k) \\ &< x^T(k)\Big\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\Big\}x(k). \end{aligned} \tag{161}$$

Assim, considerando a função de Lyapunov (16), de (160) e (161), segue que

$$x^T(k)\Big\{\Big(A_{z(k)} - B_{z(k)}\Big(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\Big)\Big)^T\Big(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\Big)$$
$$\times\Big(A_{z(k)} - B_{z(k)}\Big(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\Big)\Big) - \alpha^2 G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}\Big\}x(k)$$
$$= V(x(k+1)) - V(x(k)) + V(x(k)) - \alpha^2 V(x(k)) < 0. \quad (162)$$

Ou seja, $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < (\alpha^2 - 1)V(x(k))$, para todo $x(k) \in \Omega\Big(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\Big)\backslash\{0\}$.

Portanto, a lei de controle chaveada (17), com os ganhos do controlador $K_l = F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, tornam o ponto de equilíbrio $x(k) = 0$, do sistema não linear incerto (115), localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento α. Além disso, $\Omega\Big(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\Big)$ é um subconjunto invariante do DA.

Finalmente, do Lema 9 e da condição (157), segue que $\mathcal{B} \subset \Omega\Big(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\Big)$, sendo $\mathcal{B}$ dado em (143). Assim, a maximização do $Tr(\mathit{\Pi})$ expande o tamanho do conjunto elipsoidal $\Omega\Big(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\Big)$, isto é, fornece uma estimativa menos conservadora do DA.
■

Baseado em (CAO; LIN, 2003), considerando o controlador linear invariante no tempo (38) e utilizando a notação definida em (117), para todo $x(k) \in \mathcal{S}(M)$, sendo $\mathcal{S}(M)$ dado por (118), com $M_l = M$, para todo $l \in \mathbb{K}_r$, e $M = NG^{-1} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, a função $\mathrm{sat}(u(k))$ pode ser representado por

$$\mathrm{sat}(u(k)) = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \vartheta_s\Big(\mathscr{D}_s(-Kx(k)) + \mathscr{D}_s^- Mx(k)\Big) = \Big(-\mathscr{D}_\vartheta K + \mathscr{D}_\vartheta^- M\Big)x(k). \quad (163)$$

Assim, de (163), para $x(k) \in \mathcal{S}(M)$, o sistema (115) controlado por (38) pode ser reescrito como segue:

$$x(k+1) = \Big(A_{z(k)} + B_{z(k)}\Big(-\mathscr{D}_\vartheta K + \mathscr{D}_\vartheta^- M\Big)\Big)x(k). \quad (164)$$

Considerando o controlador linear invariante no tempo (38), condições similares ao Teorema 12 podem ser enunciadas.

Corolário 2. *Considere o sistema não linear incerto sujeito à saturação* (113) *descrito pelo modelo fuzzy T-S* (115) *em uma região de operação $\mathcal{L}$ e dada em* (9)*, sendo $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$, com $\rho_c > 0$, $c \in \mathbb{K}_{n_u}$, $\bar{x}_{a_\eta} > 0$, $\eta \in \mathbb{K}_q$, $0 < \phi_i \leq 1$, $i \in \mathbb{K}_r$, Υ descrito em* (7)*, e $w_m \in \mathbb{R}^{n_x}$, $m \in \mathbb{K}_{n_L}$, conhecidos, assim como os limites dos parâmetros incertos definidos em* (8)*. Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $N = \begin{bmatrix} N_{(1)}^T & N_{(2)}^T & \cdots & N_{(n_u)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, números reais $\varpi_m > 0$, $m \in \mathbb{K}_{n_L}$, com $\mathit{\Pi} = diag\{\varpi_1, \cdots, \varpi_{n_L}\} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$ e um escalar $0 < \alpha < 1$, tais que, para todo i, $j \in \mathbb{K}_r$, $c \in \mathbb{K}_{n_u}$, $\eta \in \mathbb{K}_q$, $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$ e $m \in \mathbb{K}_{n_L}$, o seguinte problema de otimização* *seja factível:*

$$\max_{P_i,F,N,G} Tr(\Pi) \text{ sujeito a}$$

(154),(157),

$$\begin{bmatrix} P_i & \left(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF + B_i\mathscr{D}_s^- N\right)^T e_{a_\eta} \\ e_{a_\eta}^T(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF + B_i\mathscr{D}_s^- N) & \gamma^{-1}\bar{x}_{a_\eta}^2 \end{bmatrix} > 0, \tag{165}$$

$$\begin{bmatrix} -P_i & N_{(c)}^T \\ N_{(c)} & -\gamma^{-1}\rho_c^2 \end{bmatrix} < 0, \tag{166}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 P_i & \left(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF + B_i\mathscr{D}_s^- N\right)^T \\ A_iG - B_i\mathscr{D}_sF + B_i\mathscr{D}_s^- N & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0. \tag{167}$$

Então, o controlador linear invariante no tempo (38) *com o ganho do controlador* $K = FG^{-1}$ *torna o ponto de equilíbrio* $x(k) = 0$*, do sistema não linear incerto sujeito à saturação* (115)*, localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento* α*. Além disso,* $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)$*, é um subconjunto invariante do DA.*

Demonstração: Analogamente a prova do Teorema 12, as condições (154) e (157), assegura que $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subset \mathcal{L}$ e $\mathcal{B} \subset \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)$, respectivamente.

Note que, nos Lemas 5 e 6, considerando $F_l = F$ e $N_l = N$, para todo $l \in \mathbb{K}_r$, as condições (125) e (132) coincidem com as inequações (165) e (166), respectivamente. Assim, (165) e (166), asseguram que $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subset \mathcal{R}$, sendo $\mathcal{R}$ dado em (121), com $K_l = K$ e $M_l = M$, para todo $l \in \mathbb{K}_r$, e $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subset \mathcal{S}(M)$, respectivamente.

Agora, multiplicando (167) por $h_i(z(k))$ e $h_j(z(k+1))$ e somando de $i = 1$ até $i = r$ e de $j = 1$ até $j = r$, multiplicando o resultado por ϑ_s e somando de $s = 1$ até $s = 2^{n_u}$, usando as notações definidas em (1) e (117), segue que, para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)\backslash\{0\}$,

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 P_{z(k)} & \left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F + B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N\right)^T \\ A_{z(k)}G - B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F + B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N & G + G^T - P_{z(k+1)} \end{bmatrix} > 0. \tag{168}$$

Pré e pós multiplicando (168) por $\left[I \quad -\left(G^{-1}\left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F + B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N\right)\right)^T\right]$ e seu transposto, respectivamente, e pré e pós multiplicando o resultado por G^{-T} e G^{-1}, respectivamente, para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)\backslash\{0\}$, obtém-se

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ &\left(A_{z(k)} + B_{z(k)}\left(-\mathscr{D}_\vartheta K + \mathscr{D}_\vartheta^- M\right)\right)^T \left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right) \\ &\times \left(A_{z(k)} + B_{z(k)}\left(-\mathscr{D}_\vartheta K + \mathscr{D}_\vartheta^- M\right)\right) - \alpha^2 G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\Big\} x(k) < 0. \end{aligned} \tag{169}$$

De (163), (164) e (169), obtém-se, para todo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)\backslash\{0\}$, $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < (\alpha^2-1)V(x(k))$. Portanto, o controlador linear invariante no tempo (38), com o ganho do controlador FG^{-1}, tornam o ponto de equilíbrio $x(k)=0$, do sistema incerto (115), localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento α e $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ é um subconjunto invariante do DA. Além disso, a maximização do $Tr(\mathit{\Pi})$ fornece uma estimativa do DA menos conservadora. ■

4.5.2 Condições de estabilidade local de sistemas sujeitos à saturação no sinal de controle via hiper-retângulos fechados

Como visto no capítulo anterior, os Teoremas 8 e 9, incluem em suas hipóteses a exigência de que as variações das funções de pertinência sejam limitadas por uma constante positiva, ou seja, $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i$, sendo $0 < \phi_i \leq 1$, $i \in \mathbb{K}_r$, $k \geq 0$.

Sendo assim, para todo $v \in \mathcal{V}$, baseado em (LEE, 2013), das definições apresentadas em (6)-(11), para $0 < \phi_i \leq 1$, $i \in \mathbb{K}_r$, considere o conjunto $\mathcal{H}$ definido por:

$$\mathcal{H} := \{x(k) \in \mathcal{R} : \ |\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i, \ i \in \mathbb{K}_r\}. \tag{170}$$

O lema proposto abaixo apresenta uma generalização do resultado proposto no Lema 3 e será necessário na prova dos próximos teoremas.

Lema 12. *Suponha $x(k) \in \mathcal{H}$ para todo $k \geq 0$ e considere que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas Z_{it}, $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $N_l = \begin{bmatrix} N_{l(1)}^T & N_{l(2)}^T & \cdots & N_{l(n_u)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, tais que*

$$\begin{bmatrix} Z_{it} + Q_l & \left(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^-N_l\right)^T \\ A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^-N_l & G + G^T - (P_i + \Gamma_t) \end{bmatrix} > 0, \tag{171}$$

com Γ_t dada em (67), seja satisfeita para todo i, j, $l \in \mathbb{K}_r$, $t \in \mathbb{K}_{2^r}$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$. Então, considerando a lei de controle chaveado (17), a seguinte condição também é satisfeita, para todo $x(k) \neq 0$:

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ &\left(A_{z(k)} + B_{z(k)}\left(-\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)^T \left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right) \\ &\times \left(A_{z(k)} + B_{z(k)}\left(-\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)\Big\}x(k) \\ &< x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)\mu(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k). \end{aligned} \tag{172}$$

Demonstração: Multiplicando (171) por $h_i(z(k))$ e tomando a soma de $i=1$ à $i=r$, multiplicando o resultado por $\delta_t(z(k))$ e somando de $t=1$ até $t=2^r$, multiplicando o resultado por ϑ_s e somando de $s=1$ até $s=2^{n_u}$, utilizando as notações definidas em (1),

(117) e (67), substituindo l por $\sigma(k)$, do Lema 2, para $x(k) \neq 0$, segue que

$$\begin{bmatrix} Z_{z(k)\mu(k)} + Q_{\sigma(k)} & \left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}\mathscr{D}_{\vartheta}F_{\sigma(k)} + B_{z(k)}\mathscr{D}_{\vartheta}^{-}N_{\sigma(k)}\right)^T \\ A_{z(k)}G - B_{z(k)}\mathscr{D}_{\vartheta}F_{\sigma(k)} + B_{z(k)}\mathscr{D}_{\vartheta}^{-}N_{\sigma(k)} & G + G^T - P_{z(k+1)} \end{bmatrix} > 0. \tag{173}$$

Veja que, com exceção do termo $Z_{z\mu}$, a inequação (173), coincide com a expressão (151), presente na prova do Lema 11. Assim, daqui em diante, o desenvolvimento da demonstração deste lema segue as mesmas etapas que a prova do Lema 11, lembrando de substituir Z_z por $Z_{z\mu}$ durante o prosseguimento dessa demonstração. ■

Observe que, para a aplicação do Lema 2, apresentado no Capítulo 3, e do Lema 12, é necessário garantir que o sistema opere dentro da região $\mathcal{H}$, descrita em (170). Portanto, além das inclusões impostas ao conjunto $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)$, apresentadas nas Seções 4.3 e 4.4, é necessário garantir que $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subseteq \mathcal{H}$. Para isso, será acrescentada a hipótese de que as funções de pertinência $h_\zeta(z(k))$, $\zeta \in \mathbb{K}_r$, são diferenciáveis em $\mathcal{Z}$.

Assim, como as funções de pertinência $h_\zeta(z(k))$, $\zeta \in \mathbb{K}_r$, são diferenciáveis em $\mathcal{Z}$, as derivadas parciais $\dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_1}(z(k))$, $\cdots$, $\dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{n_z}}(z(k))$, $\zeta \in \mathbb{K}_r$, existem para todo $z(k) \in \mathcal{Z}$.

Suponha que as funções $\dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_1}(z(k))$, $\cdots$, $\dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{n_z}}(z(k))$, $\zeta \in \mathbb{K}_r$, sejam limitadas em $\mathcal{Z}$, ou seja, para cada $\zeta \in \mathbb{K}_r$ e cada $m \in \mathbb{K}_{n_z}$, existem $\dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{m\,min}}$, $\dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{m\,max}}$, tais que $\dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{m\,min}} \leq \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_m}(z(k)) \leq \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{m\,max}}$, para todo $z(k) \in \mathcal{Z}$. Assim, com o intuito de criar condições para assegurar que $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subseteq \mathcal{H}$, baseado em (LEE, 2013), são definidos vetores $\psi_{\zeta d}^T \in \mathbb{R}^{n_z}$, para todo $d \in \mathbb{K}_{\lambda_\zeta}$, cujos componentes são os limites superiores e inferiores das derivadas parciais de $h_\zeta(z(k))$, $\zeta \in \mathbb{K}_r$, tais que

$$\nabla h_\zeta(z(k)) \in \mathrm{co}\{\psi_{\zeta 1}, \psi_{\zeta 2}, \ldots, \psi_{\zeta\lambda_\zeta}\}, \tag{174}$$

sendo $\nabla h_\zeta(z(k)) = \begin{bmatrix}\partial h_\zeta(z(k))/\partial z_1 & \cdots & \partial h_\zeta(z(k))/\partial z_{n_z}\end{bmatrix}$ o gradiente de $h_\zeta : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{K}_r$, no ponto $z(k) \in \mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^{n_z}$ e $\mathrm{co}\{\psi_{\zeta 1}, \psi_{\zeta 2}, \ldots, \psi_{\zeta\lambda_\zeta}\}$ denota o conjunto de toda combinação convexa dos vetores $\psi_{\zeta d}^T \in \mathbb{R}^{n_z}$, $d \in \mathbb{K}_{\lambda_\zeta}$, tais que o valor máximo que λ_ζ, $\zeta \in \mathbb{K}_r$, pode assumir é $\lambda_{max} = 2^{n_z}$.

Mais especificamente, os vetores $\psi_{\zeta d}^T \in \mathbb{R}^{n_z}$, $\zeta \in \mathbb{K}_r$, $d \in \mathbb{K}_{\lambda_\zeta}$, são dados por:

$$\psi_{\zeta 1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{1\,min}} & \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{2\,min}} & \cdots & \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{n_z\,min}} \end{bmatrix}, \; \psi_{\zeta 2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{1\,min}} & \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{2\,min}} & \cdots & \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{n_z\,max}} \end{bmatrix},$$
$$\cdots,$$

$$\psi_{\zeta(\lambda_\zeta-1)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{1\,max}} & \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{2\,max}} & \cdots & \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{n_z\,min}}\end{bmatrix},\ \psi_{\zeta\lambda_\zeta}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{1\,max}} & \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{2\,max}} & \cdots & \dfrac{\partial h_\zeta}{\partial z_{n_z\,max}}\end{bmatrix}. \tag{175}$$

O Teorema do Valor Médio (TVM) em várias variáveis, apresentado abaixo como um lema, será uma importante ferramenta na prova dos principais teoremas desta seção, baseado nas condições de gradiente apresentadas em (174) e (175).

Lema 13. *(BUCK, 1978) (TVM) Seja $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathcal{X}$, sendo $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, um conjunto convexo. Então, para quaisquer a e $b \in \mathcal{X}$ existe um $y = (1-\varepsilon_0)a + \varepsilon_0 b$ para algum $\varepsilon_0 \in [0,1]$, tal que*

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \nabla\varphi(y)(b-a),$$

sendo $\nabla\varphi(y)$ o gradiente de $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ no ponto $y \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Para a prova do próximo lema, é necessário que $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subset \mathcal{R}$. Assim, as condições do Lema 5 devem ser satisfeitas. Utilizando o resultado apresentado no Lema 13, baseado em (LEE; JOO, 2014), o seguinte lema que fornece condições LMIs para assegurar que $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subseteq \mathcal{H}$.

Lema 14. *Considere os conjuntos $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)$ e $\mathcal{H}$ definidos em* (122) *e* (170)*, respectivamente. A restrição $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subseteq \mathcal{H}$ é assegurada se a condição,*

$$\begin{bmatrix} P_i & \left(\psi_{\zeta d}\Upsilon(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^- N_l - G)\right)^T \\ \psi_{\zeta d}\Upsilon(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^- N_l - G) & \gamma^{-1}\phi_\zeta^2 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{176}$$

for satisfeita para todo $i,\ l,\ \zeta \in \mathbb{K}_r$, $d \in \mathbb{K}_{\lambda_\zeta}$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$.

Demonstração: Multiplicando (176) por $h_i(z(k))$ e somando de $i=1$ até $i=r$, multiplicando o resultado por ϑ_s e somando de $s=1$ até $s=2^{n_u}$, utilizando as notações definidas em (1) e (117), substituindo l por $\sigma(k)$, segue que

$$\begin{bmatrix} P_{z(k)} & \left(\psi_\zeta\Upsilon(A_{z(k)}G - B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)} + B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)} - G)\right)^T \\ \psi_\zeta\Upsilon(A_{z(k)}G - B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)} + B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)} - G) & \gamma^{-1}\phi_\zeta^2 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{177}$$

para qualquer $\psi_\zeta \in \mathrm{co}\{\psi_{\zeta 1}, \psi_{\zeta 2}, \ldots, \psi_{\zeta\lambda_\zeta}\}$ descrito em (174) e (175).

Pré e pós multiplicando (177) por

$$\begin{bmatrix} G^{-T} & -\gamma\phi_{\delta}^{-2}\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_{\vartheta}K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_{\vartheta}^{-}M_{\sigma(k)}\right) - I\right)^{T}\Upsilon^{T}\psi_{\zeta}^{T} \end{bmatrix}$$

e seu transposto, respectivamente, obtém-se de $K_{\sigma} = F_{\sigma}G^{-1}$ e $M_{\sigma} = N_{\sigma}G^{-1}$, para $\sigma \in \mathbb{K}_r$,

$$\begin{aligned} G^{-T}P_{z(k)}G^{-1} - \gamma\phi_{\zeta}^{-2}&\left(\psi_{\zeta}\Upsilon\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_{\vartheta}K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_{\vartheta}^{-}M_{\sigma(k)}\right) - I\right)\right)^{T} \\ &\times\left(\psi_{\zeta}\Upsilon\left(A_{z(k)} - B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_{\vartheta}K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_{\vartheta}^{-}M_{\sigma(k)}\right) - I\right)\right) \geq 0. \end{aligned} \tag{178}$$

Então, para todo $x(k) \in \mathcal{L}$ e $\psi_{\zeta} \in \text{co}\{\psi_{\zeta 1}, \psi_{\zeta 2}, \dots, \psi_{\zeta\lambda_{\zeta}}\}$, com $\zeta \in \mathbb{K}_r$, pré e pós multiplicando (178) por $x^T(k)$ e $x(k)$, respectivamente, segue de (120) e (16) que

$$V(x(k)) - \gamma\phi_{\zeta}^{-2}\left(\psi_{\zeta}\Upsilon\left(x(k+1) - x(k)\right)\right)^{T}\left(\psi_{\zeta}\Upsilon\left(x(k+1) - x(k)\right)\right) \geq 0. \tag{179}$$

Note que, se $x(k) \in \mathcal{R}$, então $x(k)$ e $x(k+1) \in \mathcal{L}$. Lembrando que $v \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{Z}$ é um conjunto convexo, então para qualquer $\varepsilon \in [0,1]$, tem-se que $(1-\varepsilon)z(k+1) + \varepsilon z(k) \in \mathcal{Z}$. Além disso, do Lema 13 para $\varphi = h_{\zeta}$, $a = z(k)$ e $b = z(k+1)$, para $\zeta \in \mathbb{K}_r$, considerando $z(k)$ dado em (7), segue que existem números reais ε_1, ε_2, $\cdots$, $\varepsilon_r \in [0,1]$, para cada amostra k, tais que, para todo $z(k) \in \mathcal{Z}$,

$$\begin{aligned} \Delta h_{\zeta}(z(k)) &= \nabla h_{\zeta}((1-\varepsilon_{\zeta})z(k+1) + \varepsilon_{\zeta}z(k))(z(k+1) - z(k)) \\ &= \nabla h_{\zeta}((1-\varepsilon_{\zeta})z(k+1) + \varepsilon_{\zeta}z(k))\left((\Upsilon x(k+1) + \Upsilon^{*}v) - (\Upsilon x(k) + \Upsilon^{*}v)\right) \\ &= \nabla h_{\zeta}((1-\varepsilon_{\zeta})z(k+1) + \varepsilon_{\zeta}z(k))\Upsilon(x(k+1) - x(k)). \end{aligned} \tag{180}$$

De (174), para todo $z(k) \in \mathcal{Z}$ e $\zeta \in \mathbb{K}_r$, obtém-se

$$\nabla h_{\zeta}((1-\varepsilon_{\zeta})z(k+1) + \varepsilon_{\zeta}z(k)) \in \text{co}\{\psi_{\zeta 1}, \psi_{\zeta 2}, \dots, \psi_{\zeta\lambda_{\zeta}}\}. \tag{181}$$

De (174), (180) e (181), para cada iteração k, existe $\psi_{\zeta}^{*} \in \text{co}\{\psi_{\zeta 1}, \psi_{\zeta 2}, \dots, \psi_{\zeta\lambda_{\zeta}}\}$, para todo $\zeta \in \mathbb{K}_r$ e $z(k) \in \mathcal{Z}$ tais que $x(k) \in \mathcal{R}$ e

$$\Delta h_{\zeta}(z(k)) = \psi_{\zeta}^{*}\Upsilon(x(k+1) - x(k)) \tag{182}$$

Então, de (179) e (182), para quaisquer $x(k) \in \mathcal{R}$ e $\zeta \in \mathbb{K}_r$

$$\begin{aligned} V(x(k)) - \gamma\phi_{\zeta}^{-2}\Delta h_{\zeta}^{2}(z(k)) \geq 0 &\iff \gamma\phi_{\zeta}^{-2}\Delta h_{\zeta}^{2}(z(k)) - \gamma \leq V(x(k)) - \gamma \\ &\iff \Delta h_{\zeta}^{2}(z(k)) - \phi_{\zeta}^{2} \leq \gamma^{-1}\phi_{\zeta}^{2}\left(V(x(k)) - \gamma\right). \end{aligned} \tag{183}$$

Se $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1}, \gamma\right)$, então $V(x(k)) - \gamma < 0$. Assim, de (183) e para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1}, \gamma\right)$, obtém-se que $|\Delta h_{\delta}(z(k))| \leq \phi_{\delta}$.

Como foi suposto que as condições do Lema 5 são satisfeitas, então $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1}, \gamma\right) \subset$

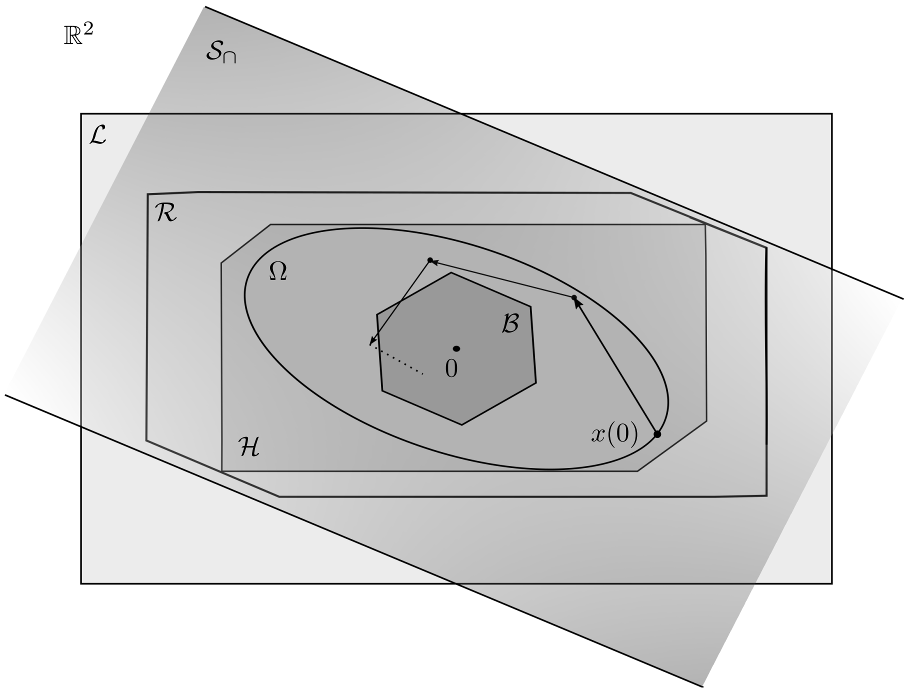
$\mathcal{R}$, segue que

$$\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\delta=1}^{r} \{x(k) \in \mathcal{R} : \ |\Delta h_\delta(z(k))| \leq \phi_\delta\},$$

ou seja, $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subseteq \mathcal{H}$. ■

Baseado nos argumentos apresentados nesta seção e na Seção 4.3, uma ilustração das relações de inclusão entre os conjuntos $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\bigcap_{l=1}^{r}\mathcal{S}(M_l) = \mathcal{S}_\cap$ e $\mathcal{B}$ é apresentada na Figura 5. As setas indicam uma possível trajetória do estado $x(k)$.

Figura 5 - Representação, no plano, da relação de inclusão entre os conjuntos $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}_\cap$, $\mathcal{B}$ e $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$, e uma possível trajetória do estado $x(k)$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Neste contexto, considerando a função de Lyapunov não quadrática (16) e a lei de controle chaveada (17), baseado (MOZELLI *et al.*, 2009), o seguinte teorema é proposto.

Teorema 13. *Considere o sistema não linear incerto sujeito à saturação* (113) *descrito pelo modelo fuzzy T-S* (115) *em uma região de operação* $\mathcal{L}$ *dada em* (9)*, e* $\mathcal{H}$ *definido em* (170)*, sendo* $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$*, com* $\rho_c > 0$*,* $c \in \mathbb{K}_{n_u}$*,* $\bar{x}_{a_\eta} > 0$*,* $\eta \in \mathbb{K}_q$*,* $0 < \phi_i \leq 1$*,* $i \in \mathbb{K}_r$*,* Υ *descrito em* (7)*, e* $w_m \in \mathbb{R}^{n_x}$*,* $m \in \mathbb{K}_{n_L}$*, conhecidos, assim como os limites dos parâmetros incertos definidos em* (8)*. Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas* $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$*, matrizes simétricas* Z_i*,* Q_i*,* $H \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$*, matrizes* $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$*,* $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ *e* $N_l = \begin{bmatrix} N_{l(1)}^T & N_{l(2)}^T & \cdots & N_{l(n_u)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$*, números reais* $\varpi_m > 0$*,* $m \in \mathbb{K}_{n_L}$*, com* $\Pi = diag\{\varpi_1, \ \cdots, \ \varpi_{n_L}\} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$ *e um escalar* $0 < \alpha < 1$*, tais que, para todo* $i,l,\zeta \in \mathbb{K}_r$*,*

$c \in \mathbb{K}_{n_u}$, $\eta \in \mathbb{K}_q$, $d \in \mathbb{K}_{\lambda_\zeta}$, $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$ e $m \in \mathbb{K}_{n_L}$ o seguinte problema de otimização é factível

$$\max_{P_i,Z_i,Q_i,F_l,N_l,G,H} Tr(\mathit{\Pi}) \text{ sujeito a}$$

(154) − (158),

$$\begin{bmatrix} P_i & \left(\psi_{\zeta d}\Upsilon(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^- N_l - G)\right)^T \\ \psi_{\zeta d}\Upsilon(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^- N_l - G) & \gamma^{-1}\phi_\zeta^2 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{184}$$

$$P_i + H > 0 \tag{185}$$

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & \left(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^- N_l\right)^T \\ A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^- N_l & G + G^T - \left(P_i + P_\phi\right) \end{bmatrix} > 0. \tag{186}$$

sendo $P_\phi = \sum_{\varsigma=1}^{r} \phi_\varsigma(P_\varsigma + H)$. Então, a lei de controle chaveada (17) *com os ganhos do controlador $K_l = F_lG^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, tornam o ponto de equilíbrio $x(k) = 0$ do sistema não linear incerto sujeito à saturação* (115)*, localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento α. Além disso, o conjunto elipsoidal $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$ definido em* (122)*, é um subconjunto invariante do DA.*

Demonstração: Como observado na prova do Teorema 12, as condições (154), (155), (156) e (157) asseguram que $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subset \mathcal{L}$, $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subset \mathcal{R}$, $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subset \bigcap_{l=1}^{r}\mathcal{S}(M_l)$ e $\mathcal{B} \subset \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)$, respectivamente.

De acordo com o Lema 14, a condição (184), garante que $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subseteq \mathcal{H}$.

Multiplicando (186) por $h_i(z(k))$ e somando de $i = 1$ até $i = r$, multiplicando o resultado por ϑ_s e somando de $s = 1$ até $s = 2^{n_u}$, considerando as notações definidas em (1) e (117), substituindo l por σ, segue que

$$\begin{bmatrix} Z_{z(k)} + Q_{\sigma(k)} & \left(A_{z(k)}G - B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)} + B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}\right)^T \\ A_{z(k)}G - B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)} + B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)} & G + G^T - \left(P_{z(k)} + P_\phi\right) \end{bmatrix} > 0. \tag{187}$$

De forma análoga à demonstração do Teorema 8, de (185) e considerando que $\sum_{\varsigma=1}^{r}\Delta h_\varsigma(z(k)) = \sum_{\varsigma=1}^{r}(h_\varsigma(z(k+1)) - h_\varsigma(z(k))) = 0$, $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i$, $i \in \mathbb{K}_r$, e $h_i(z(k+1)) = h_i(z(k)) + \Delta h_i(z(k))$, tem-se que

$$P_{z(k)} + P_\phi \geq P_{z(k+1)}. \tag{188}$$

Logo, de (187) e (188), segue que

$$\begin{bmatrix} Z_{z(k)}+Q_{\sigma(k)} & \left(A_{z(k)}G-B_{z(k)}\mathscr{D}_{\vartheta}F_{\sigma(k)}+B_{z(k)}\mathscr{D}_{\vartheta}^{-}N_{\sigma(k)}\right)^{T} \\ A_{z(k)}G-B_{z(k)}\mathscr{D}_{\vartheta}F_{\sigma(k)}+B_{z(k)}\mathscr{D}_{\vartheta}^{-}N_{\sigma(k)} & G+G^{T}-P_{z(k+1)} \end{bmatrix}>0. \tag{189}$$

Note que, a condição (189) coincide com a inequação (151) apresentado na prova do Lema 11. Assim, analogamente à prova do Lema 11, de (189), segue que, para todo $x(k)\in\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned} x^{T}(k)\Big\{&\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_{\vartheta}K_{\sigma(k)}+\mathscr{D}_{\vartheta}^{-}M_{\sigma(k)}\right)\right)^{T}\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\\ &\times\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_{\vartheta}K_{\sigma(k)}+\mathscr{D}_{\vartheta}^{-}M_{\sigma(k)}\right)\right)\Big\}x(k)\\ &<x^{T}(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1}+G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k). \end{aligned} \tag{190}$$

Assim, para $x(k)\in\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)\setminus\{0\}$, de (158) e (190), segue que

$$\begin{aligned} x^{T}(k)\Big\{&\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_{\vartheta}K_{\sigma(k)}+\mathscr{D}_{\vartheta}^{-}M_{\sigma(k)}\right)\right)^{T}\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right)\\ &\times\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_{\vartheta}K_{\sigma(k)}+\mathscr{D}_{\vartheta}^{-}M_{\sigma(k)}\right)\right)-\alpha^{2}G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}\Big\}x(k)<0. \end{aligned} \tag{191}$$

Considerando o sistema de controle sujeito à saturação (120) e a função de Lyapunov (16), a desigualdade (191) implica que $V(x(k+1))-V(x(k))+V(x(k))-\alpha^{2}V(x(k))<0$ e então $\Delta V(x(k))=V(x(k+1))-V(x(k))<(\alpha^{2}-1)V(x(k))$, para $x(k)\neq 0$. Portanto, a lei de controle chaveada (17), com os ganhos do controlador F_lG^{-1}, $l\in\mathbb{K}_r$, tornam o ponto de equilíbrio $x(k)=0$ do sistema incerto (115), localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento α. Além disso, a maximização do $Tr(\mathit{\Pi})$, fornece uma estimativa menos conservadora, $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$, do DA. ■

Com o objetivo de propor condições menos conservadoras do que as apresentadas nos Teoremas 12 e 13, considerando a lei de controle chaveada (17) e a candidata a função de Lyapunov (16), baseado no conceito de hiper-retângulos, o Teorema 14 é proposto.

Teorema 14. *Considere o sistema não linear incerto sujeito à saturação no atuador* (113) *descrito pelo modelo fuzzy T-S* (115) *em uma região de operação* $\mathcal{L}$ *e dada em* (9), *e* $\mathcal{H}$ *definido em* (170), *sendo* $\rho\in\mathbb{R}^{n_u}$, *com* $\rho_c>0$, $c\in\mathbb{K}_{n_u}$, $\bar{x}_{a_\eta}>0$, $\eta\in\mathbb{K}_q$, $0<\phi_i\leq 1$, $i\in\mathbb{K}_r$, Υ *descrito em* (7), *e* $w_m\in\mathbb{R}^{n_x}$, $m\in\mathbb{K}_{n_L}$, *conhecidos, assim como os limites dos parâmetros incertos definidos em* (8). *Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas* $P_i\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, *matrizes simétricas* Z_{it}, Q_i, $H\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, *matrizes* $F_l\in\mathbb{R}^{n_u\times n_x}$, $G\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ *e* $N_l=\begin{bmatrix}N_{l(1)}^{T} & N_{l(2)}^{T} & \cdots & N_{l(n_u)}^{T}\end{bmatrix}^{T}\in\mathbb{R}^{n_u\times n_x}$, *números reais* $\varpi_m>0$, $m\in\mathbb{K}_{n_L}$, *com* $\mathit{\Pi}=diag\{\varpi_1,\ \cdots,\ \varpi_{n_L}\}\in\mathbb{R}^{n_L\times n_L}$ *e um escalar* $0<\alpha<1$, *tais que o seguinte* *problema de otimização seja factível*

$$\max_{P_i,Z_{it},Q_i,F_l,N_l,G,H} Tr(\Pi),\ \textit{sujeito a}$$

$$(154)-(157),\ (184)$$

$$Z_{it}+Q_i-\alpha^2 P_i \leq 0, \tag{192}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{it}+Q_l & \left(A_iG-B_i\mathscr{D}_sF_l+B_i\mathscr{D}_s^-N_l\right)^T \\ A_iG-B_i\mathscr{D}_sF_l+B_i\mathscr{D}_s^-N_l & G+G^T-(P_i+\Gamma_t) \end{bmatrix} > 0, \tag{193}$$

para todo $i,l,\zeta \in \mathbb{K}_r$, $c \in \mathbb{K}_{n_u}$, $\eta \in \mathbb{K}_q$, $d \in \mathbb{K}_{\lambda_\zeta}$, $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$, $m \in \mathbb{K}_{n_L}$ *e* $t \in \mathbb{K}_{2^r}$, *sendo* $e_{a\eta}$ *e* Γ_t *definidos em* (124) *e* (67), *respectivamente. Então, a lei de controle chaveada* (17) *com os ganhos do controlador* $K_l = F_lG^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, *tornam o ponto de equilíbrio* $x(k)=0$, *do sistema incerto* (115), *localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento* α. *Além disso,* $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$, *é um subconjunto invariante do DA.*

Demonstração: Similarmente à prova do Teorema 13, as condições (154), (155), (156), (157) e (184), asseguram que $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subset \mathcal{L}$, $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subset \mathcal{R}$, $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subset \bigcap_{l=1}^r \mathcal{S}(M_l)$, $\mathcal{B} \subset \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)$ e $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \subseteq \mathcal{H}$, respectivamente.

De (192), para todo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)\setminus\{0\}$, obtém-se

$$x^T(k)\left\{G^{-T}\left(Z_{z(k)\mu(k)}+Q_{z(k)}-\alpha^2P_{z(k)}\right)G^{-1}\right\}x(k) \leq 0. \tag{194}$$

Do Lema 1, considerando a lei de controle chaveada (17), a condição (193) garante que para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned} x^T(k)\Big\{ & \left(A_{z(k)}-B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)}+\mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)^T\left(G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\right) \\ & \times\left(A_{z(k)}-B_{z(k)}\left(\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)}+\mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)}\right)\right)\Big\}x(k) \\ & < x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)\mu(k)}G^{-1}+G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k). \end{aligned} \tag{195}$$

Assim, adotando a função de Lyapunov (16), utilizando a representação do sistema (115) sujeito à saturação como apresentado em (120) e seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 13, então de (194) e (195), segue que $\Delta V(x(k)) < (\alpha^2-1)V(x(k))$, para todo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)\setminus\{0\}$.

Portanto, a lei de controle chaveado (17), com os ganhos do controlador F_lG^{-1}, $l \in \mathbb{K}_r$, tornam o ponto de equilíbrio $x(k)=0$, do sistema incerto (115), localmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento α e a maximização do $Tr(\Pi)$, fornece uma estimativa menos conservadora, $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)$, do DA. ∎

Observação 10. *Os projetos de controle chaveado com taxa de decaimento, propostos nos Teoremas 12, 13 e 14, assim como o projeto que utiliza um controlador invariante no tempo, apresentado no Corolário 2, se reduzem apenas à estabilidade assintótica local, quando* $\alpha = 1$.

4.5.3 Uma estimativa do domínio de atração

Para calcular $V(x(k))$, é necessário conhecer os valores das funções $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$. Entretanto, neste trabalho, as funções de pertinência normalizadas são consideradas dependentes dos parâmetros incertos do sistema, o que impossibilita o cálculo de $V(x(k))$. Assim, um método para obter uma estimativa conservadora do conjunto $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right)$ consiste em encontrar a interseção dos conjuntos elipsoidais $\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},\gamma\right)$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Afirmação 1. $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma\right) \supseteq \bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},\gamma\right)$.

De fato, denote $\Omega_i = \Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},\gamma\right)$, $i \in \mathbb{K}_r$, e suponha $x^*(k) \in \bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},\gamma\right)$. Assim, $x^*(k) \in \Omega_i,\ \cdots,\ x^*(k) \in \Omega_r$, ou seja,

$$x^{*T}(k)G^{-T}P_1G^{-1}x^*(k) < \gamma,\ \cdots,\ x^{*T}(k)G^{-T}P_rG^{-1}x^*(k) < \gamma.$$

Como $\gamma > 0$, P_i é definida positiva, $0 \leq h_i(z(k)) \leq 1$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $\sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) = 1$, segue que

$$\begin{aligned} &h_1(z(k))x^{*T}(k)G^{-T}P_1G^{-1}x^*(k) < h_1(z(k))\gamma,\ \cdots,\\ &h_r(z(k))x^{*T}(k)G^{-T}P_rG^{-1}x^*(k) < h_r(z(k))\gamma. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} x^{*T}(k)G^{-T}h_1(z(k))P_1G^{-1}x^*(k) + \cdots + x^{*T}(k)G^{-T}h_r(z(k))P_rG^{-1}x^*(k)&\\ < h_1(z(k))\gamma + \cdots + h_r(z(k))\gamma&\\ \iff x^{*T}(k)G^{-T}\sum_{i=1}^{r} h_i(z(k))P_iG^{-1}x^*(k) < \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k))\gamma&\\ \iff x^{*T}(k)G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}x^*(k) < \gamma \iff x^*(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right).& \end{aligned}$$

Portanto $\bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},\gamma\right) \subseteq \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma\right)$.

O método utilizado, que permite estimar o conjunto elipsoidal $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},1\right)$, através do conjunto $\bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},\gamma\right)$, consiste nos seguintes passos:

1. Para $x(k) \in \mathcal{L}$, calcule $V_i(x(k)) := x^T(k)G^{-T}P_iG^{-1}x(k)$, para cada $i \in \mathbb{K}_r$;

2. Para $x(k) \in \mathcal{L}$, calcule o $\max_{i \in \mathbb{K}_r}\left\{x^T(k)G^{-T}P_iG^{-1}x(k)\right\}$, em cada instante $k \geq 0$;

3. Encontre o índice $\iota(k)$, que maximiza a expressão acima, ou seja, $\iota(k) = \arg^* \max\limits_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ x^T(k) G^{-T} P_i G^{-1} x(k) \right\}$;

4. Encontre $x(k) \in \mathcal{L}$, tal que $V_{\iota(k)}(x(k)) := x^T(k) G^{-T} P_{\iota(k)} G^{-1} x(k) \leq \gamma$, em cada instante $k \geq 0$.

Assim, considerando $V_{\iota(k)}(x(k)) \leq \gamma$, obtém-se uma estimativa para $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right)$, pois a combinação convexa das funções $V_i(x(k))$, é menor ou igual que a função máximo $V_{\iota(k)}(x(k))$. De fato,

$$
\begin{aligned}
V_{\iota(k)}(x(k)) &= x^T(k) G^{-T} P_{\iota(k)} G^{-1} x(k) = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ x^T(k) G^{-T} P_i G^{-1} x(k) \right\} \\
&\geq \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) \left\{ x^T(k) G^{-T} P_i G^{-1} x(k) \right\} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) V_i(x(k)) = V(x(k)).
\end{aligned}
$$

Afirmação 2. *A estimativa do conjunto elipsoidal* $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right)$*, fornecido pelo método descrito nos quatro passos acima, é a região* $\bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, \gamma\right)$.

Com efeito, considere as função $V_i(x(k)) = x^T(k) G^{-T} P_i G^{-1} x(k)$, $i \in \mathbb{K}_r$, e os respectivos conjuntos elipsoidais Ω_i. Note que os conjuntos elipsoidais Ω_i, assim como a região $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right)$, são conjuntos centrados na origem.

Sem perda de generalidade, suponha que no instante k^*, $V_{\iota(k^*)}(x(k^*)) = V_1(x(k^*))$. Assim, fazendo $V_1(x(k^*)) \leq \gamma$, então $V_2(x(k^*))$, $\cdots$ $V_r(x(k^*)) \leq \gamma$. Logo,

$$
\{x(k^*) \in \mathbb{R}^{n_x} : \; V_1(x(k^*)) \leq \gamma\} \subseteq \{x(k^*) \in \mathbb{R}^{n_x} : \; V_i(x(k^*)) \leq \gamma, \; i \in \mathbb{K}_r, \; i \neq 1\}.
$$

Dessa forma, neste caso, $\Omega_1 = \bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, \gamma\right)$.

De modo geral, se em cada instante k, $V_{\iota(k)}(x(k)) = V_j(x(k))$, $j \in \mathbb{K}_r$, analogamente à análise acima, $\Omega_j = \bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, \gamma\right)$.

Portanto, o procedimento, descrito acima, para estimar o conjunto $\Omega\left(G^{-T} P_{z(k)} G^{-1}, \gamma\right)$, fornece a região $\bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, \gamma\right)$.

4.6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Exemplo 2. *Considere o sistema não linear apresentado em (GUERRA; VERMEIREN, 2004; CHEN et al., 2012), dado por:*

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - x_1(k)x_2(k) + (5 + x_1(k))u(k), \\ x_2(k+1) &= -x_1(k) - 0{,}5x_2(k) + 2x_1(k)u(k). \end{aligned} \tag{196}$$

As matrizes dos modelos locais do sistema fuzzy T-S (14)*, com* $r = 2$ *e* $\beta > 0$*, que representa o sistema não linear* (196)*, são*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -1 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 5+\beta \\ 2\beta \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 5-\beta \\ -2\beta \end{bmatrix}. \tag{197}$$

Neste exemplo, o objetivo é encontrar o valor máximo de β*, para o qual o sistema seja estabilizável. Então, considere as funções de pertinência (CHEN et al., 2012),*

$$h_1(z(k)) = \frac{(\beta + x_1(k))}{2\beta} \text{ e } h_2(z(k)) = \frac{(\beta - x_1(k))}{2\beta}, \tag{198}$$

e a região de operação dada por:

$$\mathcal{L} = \{x(k) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1(k) \in [-\beta, \ \beta]\}. \tag{199}$$

A Tabela 2 apresenta uma comparação entre os métodos propostos nos Teoremas 12, 13 e 14, e também o Corolário 2. Os seguintes parâmetros foram utilizados para obter os resultados apresentados na Tabela 2: $\gamma = 1$, $\bar{x}_1 = \beta$, $w_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = -w_1$, $w_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $w_4 = -w_3$*. Além desses parâmetros, para a implementação dos projetos apresentados nos Teoremas 13 e 14, pode-se obter, de* $h_1(z(k))$ *e* $h_2(z(k))$ *definidos em* (198)*,* $\nabla h_1(z(k)) = \dfrac{h_1(z(k))}{\partial x_1(k)} = \dfrac{1}{2\beta}$*,* $\nabla h_2(z(k)) = \dfrac{h_2(z(k))}{\partial x_1(k)} = -\dfrac{1}{2\beta}$ *e* $\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Observação 11. *Como o exemplo acima não considera que a entrada de controle esteja sujeita à saturação, os Teoremas 12, 13 e 14, e o Corolário 2, necessitam das seguintes alterações para serem aplicados:*

- *A LMI* (156) *deve ser removida das condições dos Teoremas 12, 13 e 14, e do Corolário 2;*
- *Nas LMIs* (155), (159), (184), (186) *e* (193)*, o termo* $B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^-N_l$*, deve ser substituído por* B_iF_l*, para todo* i*,* $l \in \mathbb{K}_r$ *e* $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$*.*

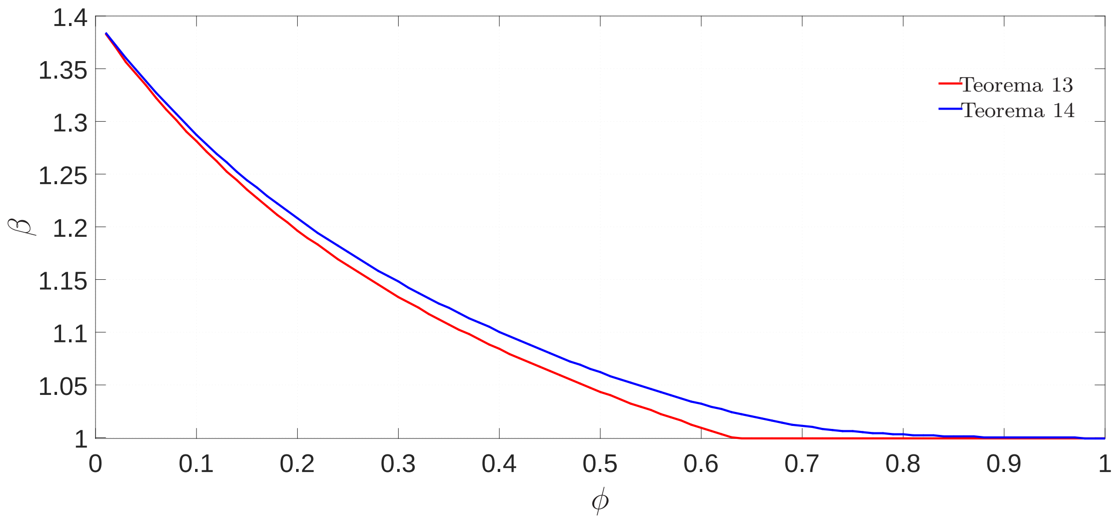
Tabela 2 - Comparação de factibilidade para β.

Método	*Factibilidade* β
Teorema 12	$\beta \leq 1{,}0161$
Corolário 2	$\beta \leq 0{,}9999$
Teorema 13 com $\alpha = 1$ *e* $\phi_i = 0{,}01$	$\beta \leq 1{,}3833$
Teorema 14 com $\alpha = 1$ *e* $\phi_i = 0{,}01$	$\beta \leq 1{,}3842$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Em geral, quanto mais baixos os valores adotados para ϕ_i, $i \in \mathbb{K}_2$, *maior a facilidade de encontrar uma solução factível para os problemas de otimização dados pelos Teoremas 13 e 14. Especificamente neste exemplo,* $\phi_i = \phi$, $i \in \mathbb{K}_2$, *foi adotado para encontrar uma solução factível com o maior valor possível de* β. *A Figura 6 mostra a relação entre um determinado* $\phi_i = \phi$, $i \in \mathbb{K}_2$, *e o valor máximo correspondente de* β *alcançado considerando as condições dos Teoremas 13 e 14.*

Figura 6 - Relação entre $\phi_i = \phi$, $i \in \mathbb{K}_2$ e o máximo valor de β tal que os Teoremas 13 e 14 são factíveis.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Em (GUERRA; VERMEIREN, 2004; DING; SUN; YANG, 2006; CHEN et al.*, 2012; LEE; JOO, 2014) este exemplo foi utilizado para realizar comparações numéricas com* *outros procedimentos disponíveis na literatura. Para algumas condições relacionadas às referências mencionadas, o valor de β é superior aos apresentados na Tabela 2. No entanto, esses procedimentos consideram o acesso total às funções de pertinência $h_i(z(k))$ e as utilizam na respectiva lei de controle. Portanto, quando o sistema de controle é incerto, esses métodos não podem ser utilizados, pois as funções de pertinência serão incertas. Os projetos de controle propostos em Teoremas 12, 13 e 14 não utilizam as funções de pertinência para implementar a lei de controle chaveada. Assim, espera-se que os projetos de controle dados nos Teoremas 12, 13 e 14 apresentem condições mais conservadoras.*

Para $\beta = 1{,}0161$, o Teorema 12, considerando $\alpha = 1$ (sem taxa de decaimento), $\gamma = 1$, $\bar{x}_1 = \beta$ e $w_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = -w_1$, $w_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $w_4 = -w_3$, a solução factível obtida para o problema de otimização composto pelas as LMIs (154)-(157)*, constituída pelo conjunto de ganhos do controlador $F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$, matrizes auxiliares simétricas $G^{-T} Q_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$, matrizes simétricas positivas definidas P_i, $i \in \mathbb{K}_2$, e números reais ϖ_m, $m \in \mathbb{K}_4$, é dada por:*

$$
\begin{aligned}
&F_1 G^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}06303 & 0{,}10047 \end{bmatrix}, \; F_2 G^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}08218 & 0{,}07696 \end{bmatrix}, \\
&U_1 = \begin{bmatrix} -249636670{,}12918 & 66471928{,}37702 \\ 66471928{,}37702 & 352001676{,}28131 \end{bmatrix}, \; U_2 = \begin{bmatrix} -249636669{,}79873 & 66471928{,}44003 \\ 66471928{,}44003 & 352001676{,}1036 \end{bmatrix}, \\
&P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}76365 & -0{,}50872 \\ -0{,}50872 & 0{,}63895 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}54799 & -0{,}40092 \\ -0{,}40092 & 0{,}73020 \end{bmatrix}, \\
&\varpi_1 = 0{,}67991 = \varpi_2, \; \varpi_3 = 0{,}59448 = \varpi_4,
\end{aligned}
\tag{200}
$$

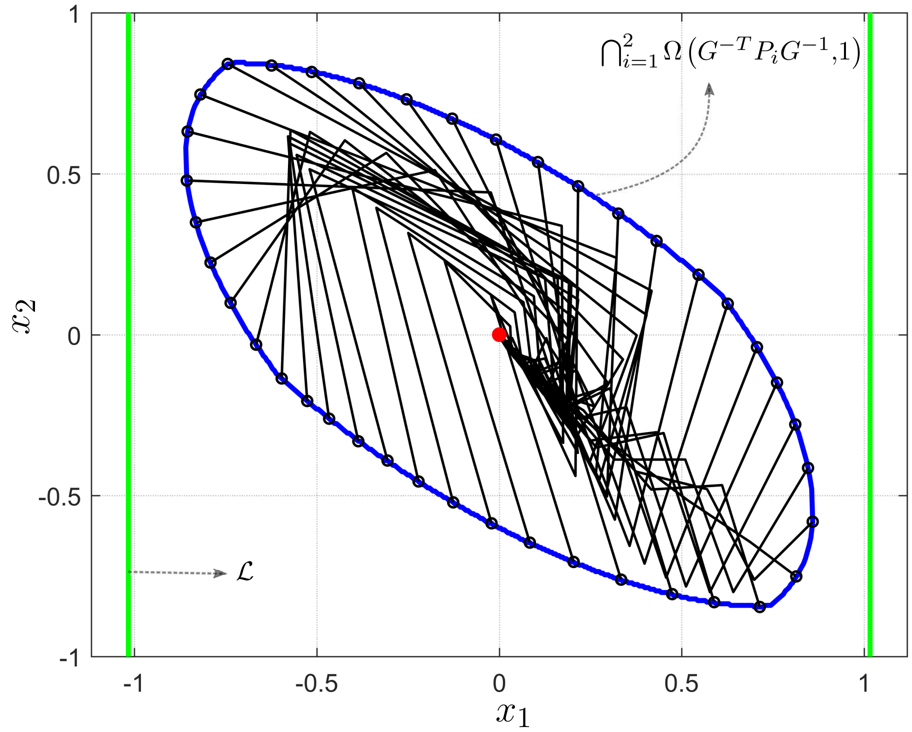
sendo $U_i = G^{-T} Q_i G^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_2$.

A Figura 7 ilustra a estimativa, $\bigcap_{i=1}^{2} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, 1\right)$, do DA e o comportamento de algumas trajetórias iniciadas em sua fronteira. A linha azul contínua representa a fronteira da estimativa do DA, enquanto as linhas pretas contínuas iniciadas nas marcas ∘*, são trajetórias contidas no subconjunto invariante do DA. Note que toda trajetória iniciada no conjunto $\bigcap_{i=1}^{2} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, 1\right)$ converge assintoticamente para a origem.*

Observação 12. *Sem utilizar qualquer informação sobre as funções de pertinência, a metodologia proposta no Teorema 12, fornece uma estimativa para o DA do sistema. Portanto, mesmo quando as funções de pertinência forem desconhecidas, o procedimento poderia ser utilizado tanto para estabilização do sistema, quanto para a determinação de uma vizinhança invariante do ponto de equilíbrio.*

Considerando o conjunto de ganhos e matrizes auxiliares fornecidos em (200)*, e a condição inicial $x(0) = \begin{bmatrix} -0{,}743 & 0{,}841 \end{bmatrix}^T$, pertencente ao conjunto $\bigcap_{i=1}^{2} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, 1\right)$, ilustrado na Figura 7, simulações com o sistema* (196)*, em malha fechada foram realizadas. Os resultados estão ilustradas nas Figuras 8 e 9.*

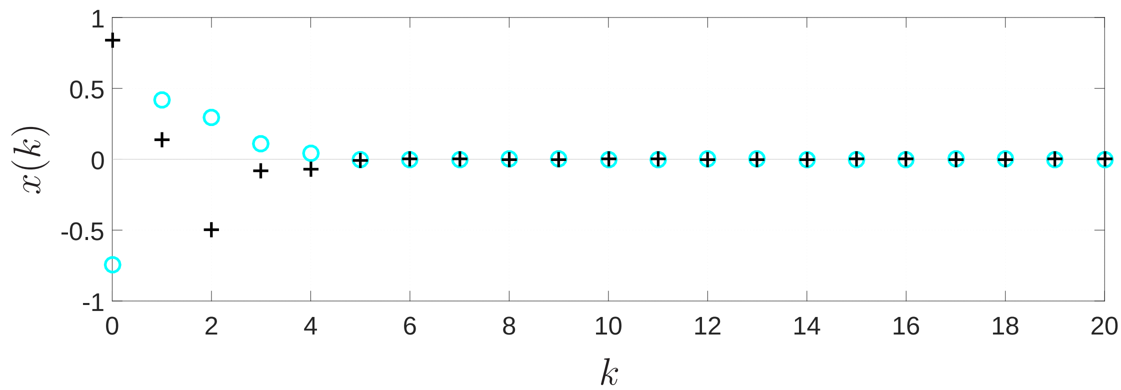
Figura 7 - Estimativa do DA obtida utilizando o Teorema 12, com $\alpha = 1$, $\gamma = 1$ e $\beta = 1{,}0161$, sendo as linhas sólidas pretas, trajetórias convergentes para a origem, $\bullet$, iniciadas em $\circ$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

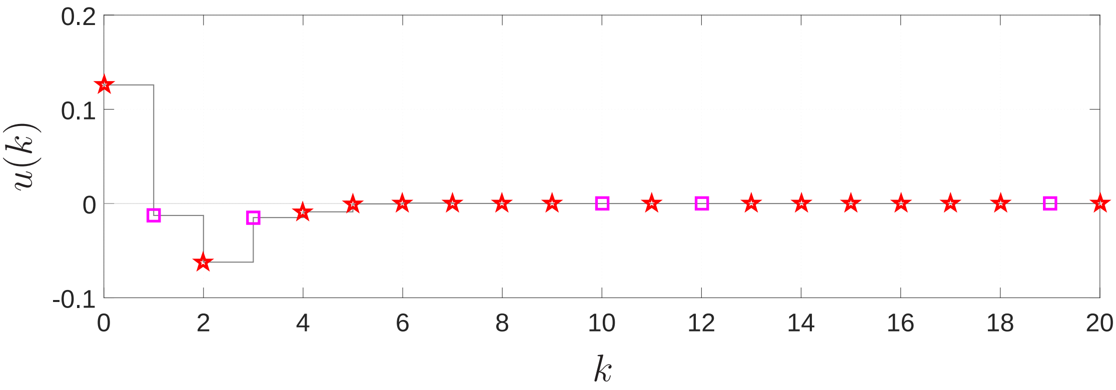
A Figura 8 apresenta as trajetórias das variáveis $x_1(k)$ e $x_2(k)$, simbolizadas por $\circ$ e $+$, respectivamente. Já a Figura 9 apresenta a evolução do sinal de controle juntamente com a seleção do ganho do controlador $F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$. Os símbolos $\star$ e $\square$ representam, respectivamente, os ganhos $F_1 G^{-1}$ e $F_2 G^{-1}$, indicando o que está ativo no instante k.

Figura 8 - Trajetórias das variáveis de estado para $x(0) = [-0{,}743 \;\; 0{,}841]$, sendo ($\circ$): $x_1(k)$ e ($+$): $x_2(k)$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 9 - Lei de controle chaveado (17): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo ($\star$): $\sigma(k)=1$ e ($\square$): $\sigma(k)=2$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Exemplo 3. *Considere o sistema não linear caótico de Lorenz discretizado com a aproximação de Euler (LEE; PARK; CHEN, 2001):*

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + T_s(-\mu_1 x_1(k) + \mu_1 x_2(k)) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + T_s(\mu_2 x_1(k) - x_2(k) - x_1(k)x_3(k)) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + T_s(x_1(k)x_2(k) - \mu_3 x_3(k)), \end{cases} \tag{201}$$

sendo T_s o tempo de amostragem fixo de discretização e, para o surgimento do caos, os valores nominais $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (10, 28, 8/3)$ são considerados.

Suponha que os parâmetros μ_1 e μ_2 são incertos mas limitados dentro de 50% dos seus valores nominais. Portanto, considerando um vetor $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$, cujas entradas são os parâmetros incertos limitados de (201), o conjunto $\mathcal{V}$ definido em (8) é dado por:

$$\mathcal{V} := \left\{ \mu \in \mathbb{R}^2 : \ \mu_1 \in [5,\ 15],\ \mu_2 \in [14,\ 42] \right\}. \tag{202}$$

Considere a região de operação

$$\mathcal{L} := \left\{ x(k) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1(k) \in [-\beta,\ \beta] \right\}. \tag{203}$$

Logo, de (202) e (203), o conjunto $\mathcal{Z}$, definido em (11), é dada por:

$$\mathcal{Z} := \left\{ z(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) & \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 : -\beta \le x_1(k) \le \beta, 5 \le \mu_1 \le 15, 14 \le \mu_2 \le 42 \right\}. \tag{204}$$

Assim, considerando $z(k) \in \mathcal{Z}$, dado (204), as seguintes matrizes dos modelos locais do sistema fuzzy T-S (14), que representa o sistema caótico (201), são obtidos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1-5T_s & 5T_s & 0 \\ 14T_s & 1-T_s & \beta T_s \\ 0 & -\beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1-15T_s & 15T_s & 0 \\ 14T_s & 1-T_s & \beta T_s \\ 0 & -\beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 1-5T_s & 5T_s & 0 \\ 42T_s & 1-T_s & \beta T_s \\ 0 & -\beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix}, \ A_4 = \begin{bmatrix} 1-15T_s & 15T_s & 0 \\ 42T_s & 1-T_s & \beta T_s \\ 0 & -\beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix},$$
$$A_5 = \begin{bmatrix} 1-5T_s & 5T_s & 0 \\ 14T_s & 1-T_s & -\beta T_s \\ 0 & \beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix}, \ A_6 = \begin{bmatrix} 1-15T_s & 15T_s & 0 \\ 14T_s & 1-T_s & -\beta T_s \\ 0 & \beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix},$$
$$A_7 = \begin{bmatrix} 1-5T_s & 5T_s & 0 \\ 42T_s & 1-T_s & -\beta T_s \\ 0 & \beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix}, \ A_8 = \begin{bmatrix} 1-15T_s & 15T_s & 0 \\ 42T_s & 1-T_s & -\beta T_s \\ 0 & \beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix}. \tag{205}$$

As matrizes de entrada B_i, $i \in \mathbb{K}_8$, foram arbitrariamente escolhidas como

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = B_7 = B_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{206}$$

Então, com este procedimento, os modelos locais são conhecidos e as funções de pertinência normalizados são incertas.

Observação 13. *Este exemplo não considera que a entrada de controle esteja sujeita à saturação. Então as seguintes alterações nas condições LMIs do Teorema 12, são necessárias para sua aplicação: A LMI* (156) *deve ser removida e nas LMIs* (155) *e* (159)*, o termo $B_i \mathscr{D}_s F_l + B_i \mathscr{D}_s^- N_l$, deve ser substituído por $B_i F_l$, para todo i, $l \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$.*

A seguinte solução foi obtida para o problema de otimização composto pelas LMIs (154), (156), (157)-(159) *apresentas no Teorema 12, como descrito na Observação 13, considerando $T_s = 0.002s$, $\gamma = 1$, $\bar{x}_1 = \beta = 50$, $w_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = -w_1$, $w_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $w_4 = -w_3$, $w_5^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $w_6 = -w_5$:*

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0{,}9783 & -0{,}0201 & -1{,}5300 \times 10^{-6} \end{bmatrix}, \ K_2 = \begin{bmatrix} -0{,}9783 & -0{,}0201 & 1{,}5300 \times 10^{-6} \end{bmatrix},$$
$$K_3 = \begin{bmatrix} -0{,}9791 & -0{,}0201 & -2{,}1913 \times 10^{-7} \end{bmatrix}, \ K_4 = \begin{bmatrix} -0{,}9791 & -0{,}0201 & 2{,}1913 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$
$$K_5 = \begin{bmatrix} -0{,}9788 & -0{,}0201 & -1.7399 \times 10^{-6} \end{bmatrix}, \ K_6 = \begin{bmatrix} -0{,}9788 & -0{,}0201 & 1{,}7399 \times 10^{-6} \end{bmatrix},$$
$$K_7 = \begin{bmatrix} -0{,}9790 & -0{,}0201 & -4{,}1993 \times 10^{-7} \end{bmatrix}, \ K_8 = \begin{bmatrix} -0{,}9790 & -0{,}0201 & 4{,}1993 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$
$$P_1 = \begin{bmatrix} 2503{,}4145 & -82{,}0527 & -0{,}6179 \\ -82{,}0527 & 765515{,}4923 & 25{,}9001 \\ -0{,}6179 & 25{,}9001 & 777420{,}9898 \end{bmatrix}, \ P_2 = \begin{bmatrix} 2503{,}4145 & -82{,}0527 & 0{,}6179 \\ -82{,}0527 & 765515{,}4923 & -25{,}9001 \\ 0{,}6179 & -25{,}9001 & 777420{,}9898 \end{bmatrix},$$
$$P_3 = \begin{bmatrix} 2503{,}6194 & -88{,}2740 & -1{,}0224 \\ -88{,}2740 & 765415{,}1759 & 13{,}0573 \\ -1{,}0224 & 13{,}0573 & 777355{,}7218 \end{bmatrix}, \ P_4 = \begin{bmatrix} 2503{,}6194 & -88{,}2740 & 1{,}0224 \\ -88{,}2740 & 765415{,}1759 & -13{,}0573 \\ 1{,}0224 & -13{,}0573 & 777355{,}7218 \end{bmatrix},$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 2503{,}4231 & -82{,}1080 & -0{,}5195 \\ -82{,}1080 & 765506{,}9255 & 55{,}0938 \\ -0{,}5195 & 55{,}0938 & 777395{,}6498 \end{bmatrix}, \; P_6 = \begin{bmatrix} 2503{,}4231 & -82{,}1080 & 0{,}5195 \\ -82{,}1080 & 765506{,}9255 & -55{,}0938 \\ 0{,}5195 & -55{,}0938 & 777395{,}6498 \end{bmatrix},$$

$$P_7 = \begin{bmatrix} 2503{,}6359 & -89{,}1073 & -1{,}2062 \\ -89{,}1073 & 765396{,}3768 & 33{,}3830 \\ -1{,}2062 & 33{,}3830 & 777354{,}6413 \end{bmatrix}, \; P_8 = \begin{bmatrix} 2503{,}6359 & -89{,}1073 & 1{,}2062 \\ -89{,}1073 & 765396{,}3768 & -33{,}3830 \\ 1{,}2062 & -33{,}3830 & 777354{,}6413 \end{bmatrix},$$

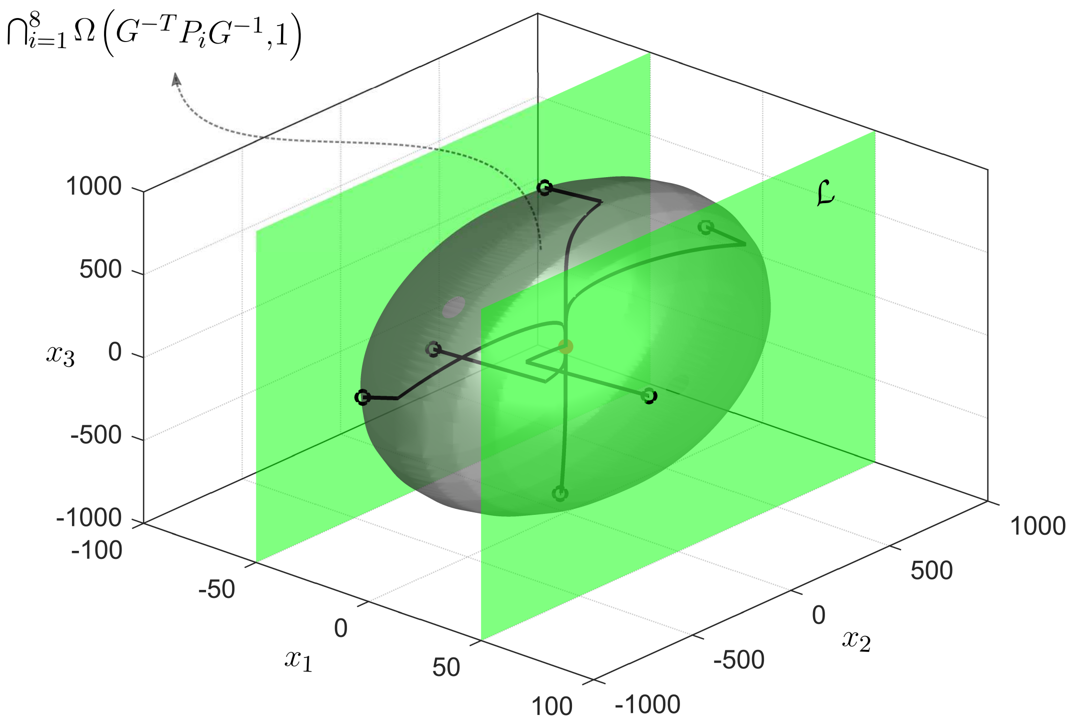
$$G = \begin{bmatrix} 2501{,}7024 & -84{,}0690 & 2{,}1461 \times -10 \\ -84{,}0585 & 765497{,}6411 & 2{,}6572 \times -8 \\ -4{,}7390 \times -10 & -1{,}1378 \times -9 & 777224{,}7235 \end{bmatrix},$$

$$\varpi_1 = \varpi_2 = 49{,}9819, \; \varpi_3 = \varpi_4 = 874{,}9082, \; \varpi_5 = \varpi_6 = 881{,}4864, \quad (207)$$

sendo $K_i = F_i G^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_8$.

A estimativa do DA obtido com o procedimento apresentado no Teorema 12, utilizando a solução (207)*, está representado nas Figuras 10 e 11.*

Figura 10 - Superfície do conjunto $\mathcal{L}$ e estimativa do DA calculada usando o Teorema 12, com $\gamma = 1$ e $\bar{x}_1 = 50$, em que as linhas sólidas pretas representam as trajetórias de estado que se iniciam em "○" e convergem para a origem "●".

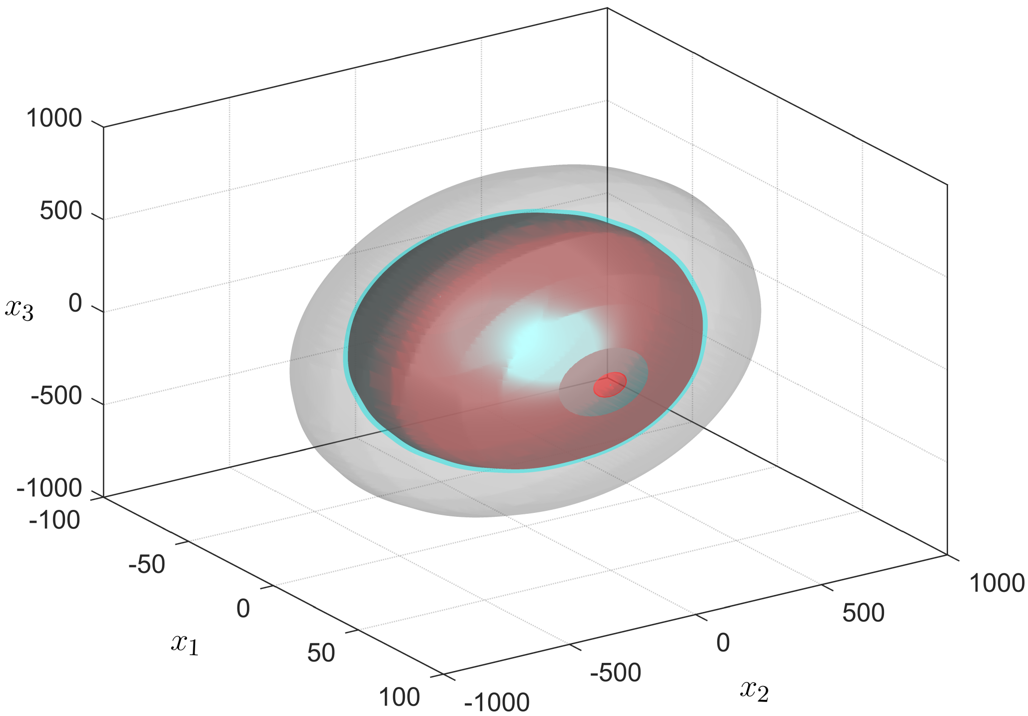


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observação 14. *Para a aplicação da lei de controle chaveada* (17)*, o projeto de controle proposto no Teorema 12 não usa as funções de pertinência ou os parâmetros incertos*

μ_1 e μ_2. Portanto, mesmo que as variáveis premissas e as funções de pertinência sejam incertas, com o procedimento proposto no Teorema 12, é possível encontrar uma estimativa do DA para os sistemas fuzzy T-S discreto no tempo. A Figura 10 ilustra a validade da abordagem proposta.

Figura 11 - Estimativas do DA obtido por diferentes métodos de maximização: Em cinza, obtido utilizando o Teorema 12, com $\gamma = 1$ e $\bar{x}_1 = 50$; Em ciano usando o procedimento proposto em (LEE, 2013); Em vermelho obtido utilizando o procedimento apresentado em (CAO; LIN, 2003).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

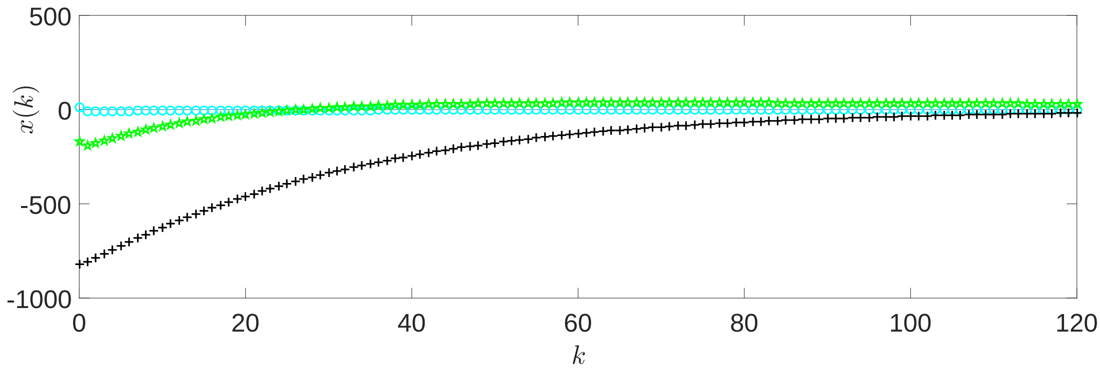
A Figura 11 mostra os conjuntos elipsoidais obtidos com diferentes procedimentos para otimizar a estimativa do DA. O conjunto elipsoidal em vermelho foi obtido utilizando o Teorema 12 modificado com substituição da condição (157) *pela LMI* (142) *e otimizando uma variável única ϖ. O conjunto elipsoidal em ciano foi obtido com o Teorema 12 modificado com substituição da condição* (157) *pela LMI* (140) *e otimizando uma única variável δ. Finalmente, a estimativa do DA em cinza foi obtida com o procedimento proposto no Teorema 12. Observe que os conjuntos elipsoidais obtidos utilizando os métodos de maximização propostos em (LEE, 2013) e (CAO; LIN, 2003) estão contidos no domínio obtido com o procedimento proposto no Teorema 12.*

Utilizando a lei de controle chaveada (17)*, com o conjunto de ganhos fornecido em*

(207), *foi realizada uma simulação do sistema de malha fechada* (14), *considerando* $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 14$ *e a condição inicial* $x(0) = \begin{bmatrix} 13{,}78 & -820 & -170 \end{bmatrix}^T$, *pertencentes à estimativa do DA apresentado na Figura 10. Observe que a condição inicial não pertence aos conjuntos elipsoidais obtidos usando os métodos propostos em (LEE, 2013) e (CAO; LIN, 2003).*

A Figura 12 apresenta as trajetórias de $x_1(k)$, $x_2(k)$ *e* $x_3(k)$, *simbolizadas por* $\circ$, $+$ *e* $\star$, *respectivamente.*

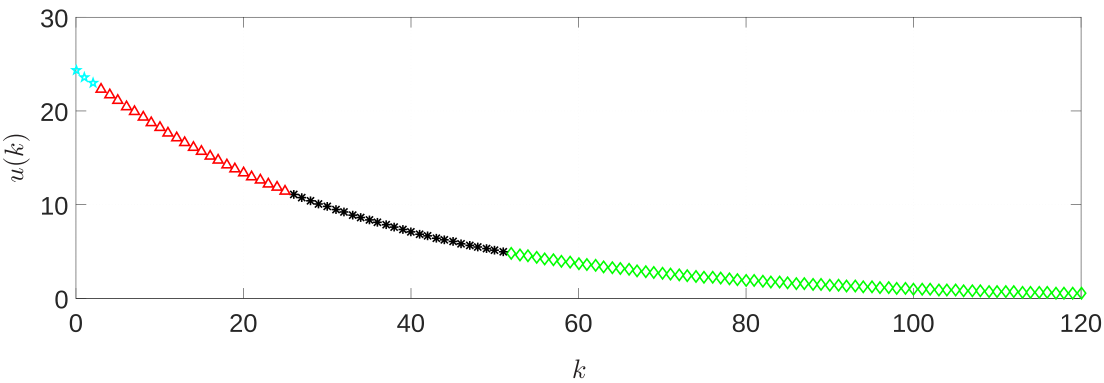
Figura 12 - Trajetória das variáveis de estado para $x(0) = [13{,}78 \ -820 \ -170]^T$, sendo ($\circ$): $x_1(k)$, ($+$): $x_2(k)$ e ($\star$): $x_3(k)$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O esforço da lei de controle chaveada (17) *é mostrado na Figura 13, em que os símbolos* $\times$, $\square$, $\diamond$, $\star$, $\circ$, $\bigtriangledown$, $*$ *e* $\bigtriangleup$ *representam que o controlador* F_1G^{-1}, F_2G^{-1}, F_3G^{-1}, F_4G^{-1}, F_5G^{-1}, F_6G^{-1}, F_7G^{-1} *ou* F_8G^{-1} *está ativo, respectivamente, a cada instante* k.

Figura 13 - A lei de controle chaveada (17): esforço do controle e $\sigma(k)$, sendo ($\times$): $\sigma(k) = 1$, ($\square$): $\sigma(k) = 2$, ($\diamond$): $\sigma(k) = 3$, ($\star$): $\sigma(k) = 4$, ($\circ$): $\sigma(k) = 5$, ($\bigtriangledown$): $\sigma(k) = 6$, ($*$): $\sigma(k) = 7$ e ($\bigtriangleup$): $\sigma(k) = 8$.



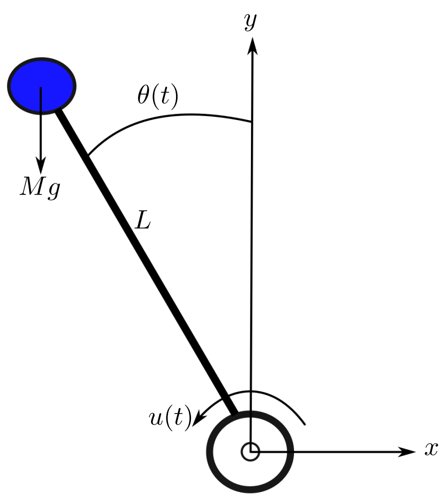
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Exemplo 4. *Considere o pêndulo invertido com um grau de liberdade, que consiste de um motor elétrico, que atua em uma barra de comprimento L, que possui em seu final uma massa M anexada, discretizado utilizando a aproximação direta de Euler (DÍAZ; ARMESTO; SALA, 2016; DÍAZ; ARMESTO; SALA, 2019):*

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + T_s x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \dfrac{T_s}{ML^2+J}\left(MgL\text{sen}(x_1(k)) - bx_2(k) + u(k)\right), \end{cases} \tag{208}$$

sendo $x_1(k)$ a medida do ângulo (rad) da barra do pêndulo com relação ao eixo vertical, $x_2(k)$ a velocidade angular (rad/s), $u(k)$ é o sinal de controle (N.m) e T_s o tempo de amostragem. Os parâmetros do modelo são dados na Tabela 3. A Figura 14, ilustra o sistema descrito.

Figura 14 - Representação do pêndulo invertido



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 3 - Parâmetros do modelo do pêndulo invertido.

Parâmetros do modelo	Símbolo	Valores	Unidades
Comprimento do pêndulo	L	0,30	m
Coeficiente de amortecimento	b	0,35	kg.m^2.s^{-1}
Inércia do pêndulo	J	$5{,}59 \times 10^{-2}$	kg.m^2
Gravidade	g	9,81	m.s^{-2}

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Considere que a massa, M (kg), anexa à barra, possa sofrer variações, ou seja, será acrescentada a hipótese de que a massa é um parâmetro incerto limitado invariante no *tempo.*

Sendo assim, considerando $T_s = 0{,}01s$*, as matrizes dos modelos locais lineares do sistema fuzzy T-S discreto no tempo* (115) *são dadas por:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}11246 \end{bmatrix},\ A_2 = A_1,\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}11483 \end{bmatrix},\ A_4 = A_3$$
$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}01 \\ 0{,}261926 & 0{,}11246 \end{bmatrix},\ A_6 = A_5,\ A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}01 \\ 0{,}261926 & 0{,}1148368 \end{bmatrix},\ A_8 = A_7$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}03559 \end{bmatrix}^T,\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}0423908 \end{bmatrix}^T,\ B_3 = B_5 = B_7,\ B_4 = B_6 = B_8. \quad (209)$$

para $z(k) \in \mathcal{Z}$*, sendo*

$$\mathcal{Z} = \Big\{ z(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & M \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 :\ x_1(k) \in [-\pi,\ \pi],$$
$$x_2(k) \in [-15,\ 15],\ M \in [2,\ 2{,}5] \Big\}. \quad (210)$$

Considerando $\rho = 120$*,* $\bar{x}_1 = \pi$*,* $\bar{x}_2 = 15$*,* $\gamma = 1$*,* $w_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$*,* $w_2 = -w_1$*,* $w_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $w_4 = -w_3$ *o método proposto no Teorema 12, foi aplicado com o intuito de relacionar a estimativa do domínio de atração obtida, com a taxa de decaimento adotada. A tabela 4, apresenta os valores de* ϖ_m*,* $m \in \mathbb{K}_4$*, e* $Tr(\Pi)$*, sendo* $\Pi = diag\{\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4\}$*, obtidos resolvendo o problema de otimização do Teorema 12, para distintas taxas de decaimento. Na Figura 15, pode-se observar as estimativas obtidas para os diferentes valores de* α*.*

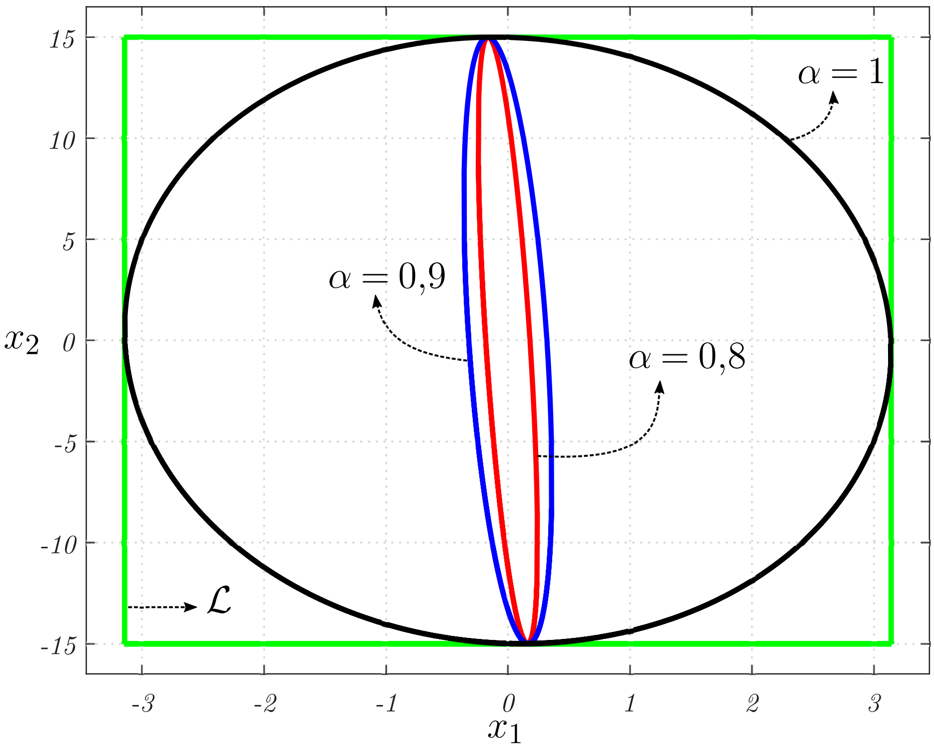
Tabela 4 - Relação entre Taxa de decaimento e volume do elipsoide obtido.

Taxa de decaimento α	$Tr(\Pi)$	$\varpi_1 = \varpi_2$	$\varpi_3 = \varpi_4$
$\alpha = 1$ (sem taxa de decaimento)	36,2606	3,13963	14,83718
$\alpha = 0{,}9$	27,2706	0,32010	13,31518
$\alpha = 0{,}8$	22,7491	0,18140	11,19314
$\alpha = 0{,}7$	–	–	–

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 15, o conjunto elipsoidal preto foi obtido considerando $\alpha = 1$*, ou seja, para obtê-lo não foi considerada taxa de decaimento. Enquanto os conjunto elipsoidal azul e vermelho foram alcançados com* $\alpha = 0{,}9$ *e* $\alpha = 0{,}8$ *respectivamente. Para* $\alpha = 0{,}7$ *não foi possível encontrar solução factível. Note que, é visível que o volume do elipsoide diminui à medida que a taxa de decaimento é reduzida. A linha contínua verde representa a região de operação do sistema fuzzy T-S* (115)*.*

Figura 15 - Estimativas do DA obtidas com o Teorema 12, utilizando diferentes valores para a taxa de decaimento α: $\alpha = 1$ (sem taxa de decaimento), conjunto elipsoidal preto; $\alpha = 0{,}9$, conjunto elipsoidal azul; $\alpha = 0{,}8$, conjunto elipsoidal vermelho.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

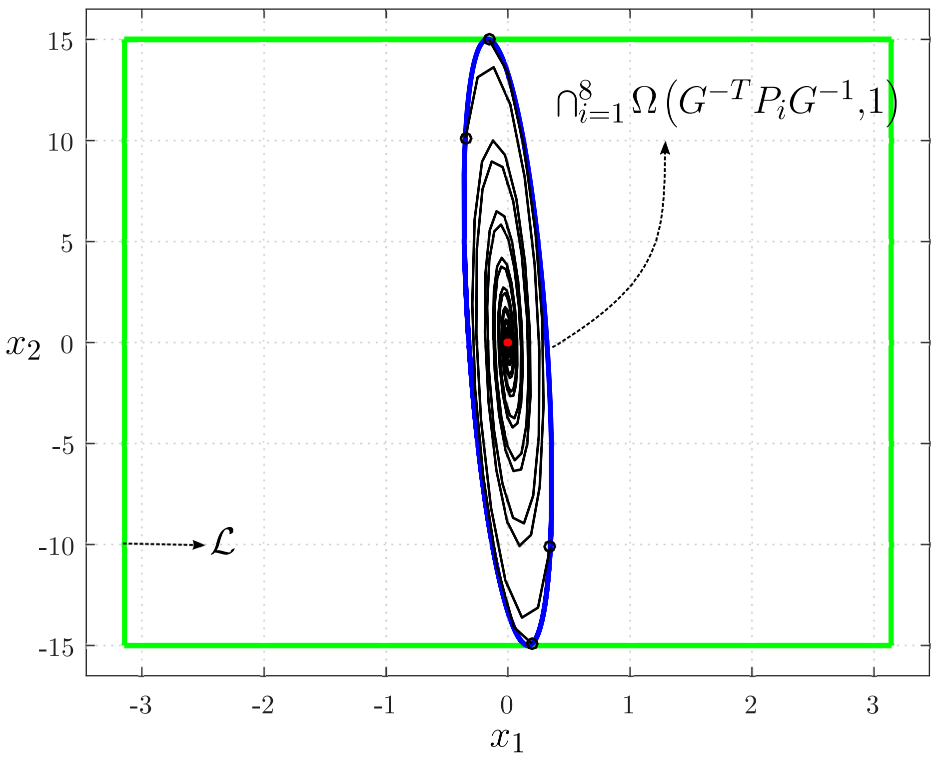
Para $\alpha = 0{,}9$, a seguinte solução para as LMIs (154)-(157) *foi obtida:*

$$F_1G^{-1} = \begin{bmatrix} -476{,}285515 & -7{,}418629 \end{bmatrix}, \; F_2G^{-1} = \begin{bmatrix} -477{,}988599 & -7{,}460964 \end{bmatrix},$$
$$F_3G^{-1} = \begin{bmatrix} -476{,}297184 & -7{,}419317 \end{bmatrix}, \; F_4G^{-1} = \begin{bmatrix} -477{,}990026 & -7{,}460947 \end{bmatrix},$$
$$F_5G^{-1} = \begin{bmatrix} -476{,}095377 & -7{,}413264 \end{bmatrix}, \; F_6G^{-1} = \begin{bmatrix} -477{,}876021 & -7{,}458463 \end{bmatrix},$$
$$F_7G^{-1} = \begin{bmatrix} -476{,}102008 & -7{,}413530 \end{bmatrix}, \; F_8G^{-1} = \begin{bmatrix} -477{,}879164 & -7{,}458604 \end{bmatrix},$$
$$G^{-T}Q_1G^{-1} = \begin{bmatrix} 17{,}756485 & 0{,}330453 \\ 0{,}330453 & 0{,}005752 \end{bmatrix}, \; G^{-T}Q_2G^{-1} = \begin{bmatrix} 17{,}779582 & 0{,}330902 \\ 0{,}330902 & 0{,}005756 \end{bmatrix},$$
$$G^{-T}Q_3G^{-1} = \begin{bmatrix} 17{,}756456 & 0{,}330431 \\ 0{,}330431 & 0{,}005751 \end{bmatrix}, \; G^{-T}Q_4G^{-1} = \begin{bmatrix} 17{,}779580 & 0{,}330895 \\ 0{,}330895 & 0{,}005755 \end{bmatrix},$$
$$G^{-T}Q_5G^{-1} = \begin{bmatrix} 17{,}754574 & 0{,}330465 \\ 0{,}330465 & 0{,}005756 \end{bmatrix}, \; G^{-T}Q_6G^{-1} = \begin{bmatrix} 17{,}777762 & 0{,}330857 \\ 0{,}330857 & 0{,}005756 \end{bmatrix},$$
$$G^{-T}Q_7G^{-1} = \begin{bmatrix} 17{,}754540 & 0{,}330442 \\ 0{,}330442 & 0{,}005754 \end{bmatrix}, \; G^{-T}Q_8G^{-1} = \begin{bmatrix} 17{,}777759 & 0{,}330848 \\ 0{,}330848 & 0{,}005755 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}130040250 & -2{,}490721482 \\ -2{,}490721482 & 224{,}999986535 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}130040250 & -2{,}490721483 \\ -2{,}490721483 & 224{,}999986543 \end{bmatrix},$$
$$P_3 = \begin{bmatrix} 0{,}130040250 & -2{,}490721482 \\ -2{,}490721482 & 224{,}999986532 \end{bmatrix}, \; P_4 = \begin{bmatrix} 0{,}130040250 & -2{,}490721483 \\ -2{,}490721483 & 224{,}999986543 \end{bmatrix},$$
$$P_5 = \begin{bmatrix} 0{,}130040250 & -2{,}490721476 \\ -2{,}490721476 & 224{,}999986442 \end{bmatrix}, \; P_6 = \begin{bmatrix} 0{,}130040250 & -2{,}490721483 \\ -2{,}490721483 & 224{,}999986544 \end{bmatrix},$$
$$P_7 = \begin{bmatrix} 0{,}130040250 & -2{,}490721480 \\ -2{,}490721480 & 224{,}999986505 \end{bmatrix}, \; P_8 = \begin{bmatrix} 0{,}130040250 & -2{,}490721483 \\ -2{,}490721483 & 224{,}999986543 \end{bmatrix}. \quad (211)$$

A Figura 16, obtida considerando o conjunto de ganhos dado em (211)*, ilustra a eficácia do método proposto na obtenção de uma vizinhança invariante do ponto de equilíbrio do sistema, mesmo considerando taxa de decaimento. A linha azul contínua representa a fronteira da estimativa do domínio de atração, enquanto as linhas pretas contínuas iniciadas em o, são trajetórias contidas em* $\bigcap_{i=1}^{8} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, 1\right)$*, convergentes para a origem.*

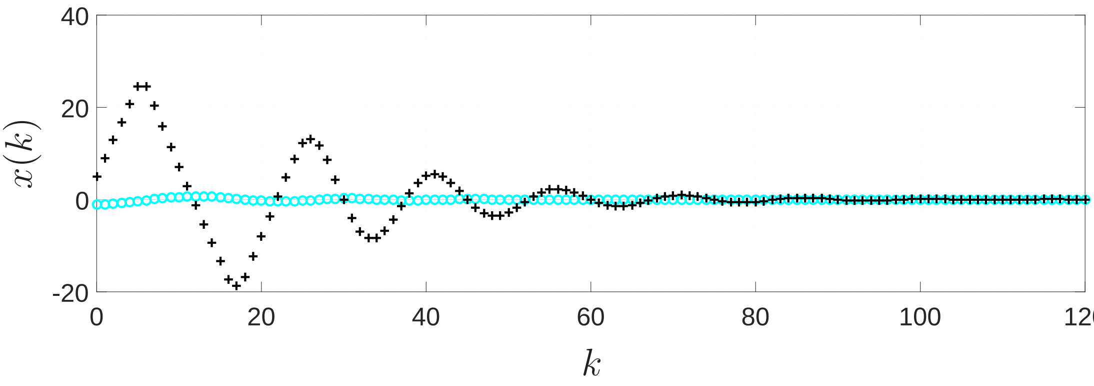
Figura 16 - Estimativa do DA obtida utilizando o Teorema 12, com taxa de decaimento $\alpha = 0{,}9$, $\gamma = 1$, $\bar{x}_1 = \pi$, $\bar{x}_2 = 15$, $\rho = 120$ e $M = 2{,}5$. As linhas sólidas pretas, trajetórias convergentes para a origem, •, iniciadas em ∘.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

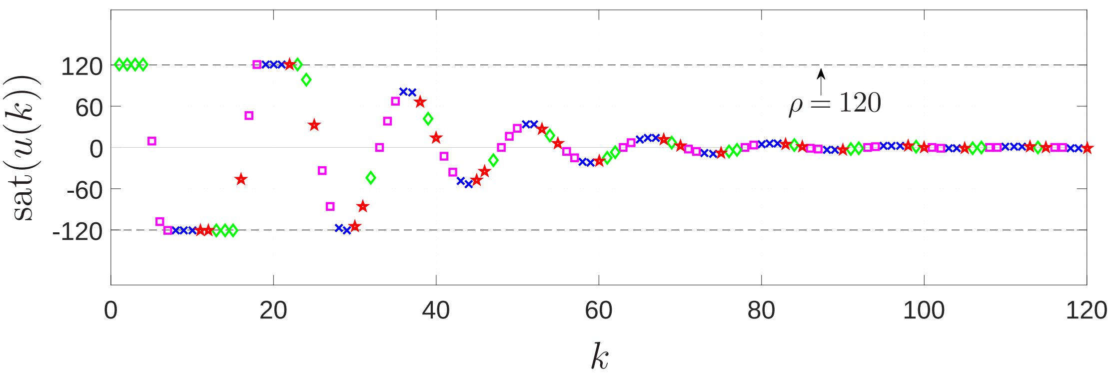
Considerando a condição inicial $x(0) = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{3} & 5 \end{bmatrix}^T$*, pertencente ao conjunto ilustrado* *na Figura 16, e utilizando a lei de controle chaveada* (17)*, com o conjunto de ganhos dado em* (211)*, a resposta das variáveis de estado, a evolução do sinal de controle e a seleção do ganho do controlador* $F_l G^{-1}$*,* $l \in \mathbb{K}_8$*, executada pela lei controle, são ilustradas nas Figuras 17 e 18, respectivamente. Tendo em vista a resposta apresentada na Figura 17, observe que a lei de controle* (17) *foi capaz de estabilizar o sistema de forma satisfatória. Pode ser notado na Figura 18 que dentre os oito ganhos possíveis, quatro foram selecionados pela lei de controle chaveada* (17) *para a estabilização do sistema* (208)*.*

Figura 17 - Trajetórias das variáveis de estado $x(0) = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{3} & 5 \end{bmatrix}^T$, sendo (○): $x_1(k)$ e (+): $x_2(k)$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 18 - Lei de controle chaveado (17): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (+): $\sigma(k) = 1$, (○): $\sigma(k) = 2$, (×): $\sigma(k) = 3$, (□): $\sigma(k) = 4$, (◇): $\sigma(k) = 5$, (△): $\sigma(k) = 6$, (★): $\sigma(k) = 7$, (∗): $\sigma(k) = 8$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Exemplo 5. *Considere o sistema caótico de Lorenz discreto no tempo* (201)*, descrito no Exemplo 3. Porém, neste exemplo apenas o parâmetro* μ_1 *é considerado incerto. Neste caso, as matrizes dos modelos locais do sistema fuzzy T-S discreto no tempo* (115)*, que* *representa o sistema caótico de Lorenz são dadas por:*

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 1-\underline{\mu}_1 T_s & \underline{\mu}_1 T_s & 0 \\ \mu_2 T_s & 1-T_s & \beta T_s \\ 0 & -\beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1-\overline{\mu}_1 T_s & \overline{\mu}_1 T_s & 0 \\ \mu_2 T_s & 1-T_s & \beta T_s \\ 0 & -\beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix}, \\
A_3 &= \begin{bmatrix} 1-\underline{\mu}_1 T_s & \underline{\mu}_1 T_s & 0 \\ \mu_2 T_s & 1-T_s & -\beta T_s \\ 0 & \beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix}, \; A_4 = \begin{bmatrix} 1-\overline{\mu}_1 T_s & \overline{\mu}_1 T_s & 0 \\ \mu_2 T_s & 1-T_s & -\beta T_s \\ 0 & \beta T_s & 1-\mu_3 T_s \end{bmatrix}, \\
B_1 &= B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T,
\end{aligned} \tag{212}
$$

sendo T_s o tempo de amostragem. Como no exemplo (201), os valores nominais de $(\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1, \mu_2, \mu_3)$ são $(5, 15, 28, 8/3)$ para o surgimento do caos. Observe que $\underline{\mu}_1$ e $\overline{\mu}_1$ são os limites inferior e superior de μ_1, tais que

$$
\mathcal{Z} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1(k) & \mu_1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : \; x_1(k) \in [-\beta, \beta], \; \mu_1 \in [5, 15] \right\}. \tag{213}
$$

Utilizando o procedimento descrito em (TANIGUCHI et al., 2001) e (ALVES, 2017), e considerando o tempo de amostragem $T_s = 0.002s$, as funções de pertinência encontradas são dadas por:

$$
\begin{aligned}
h_1(z(k)) &= \frac{(15-\mu_1)(\beta - x_1(k))}{20\beta}, \; h_2(z(k)) = \frac{(\mu_1 - 5)(\beta - x_1(k))}{20\beta}, \\
h_3(z(k)) &= \frac{(15-\mu_1)(\beta + x_1(k))}{20\beta}, \; h_4(z(k)) = \frac{(\mu_1 - 5)(\beta + x_1(k))}{20\beta}.
\end{aligned} \tag{214}
$$

Note que as funções de pertinência dependem do parâmetro incerto μ_1. Assim, sendo $z(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) & z_2(k) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1(k) & \mu_1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_1(k)} &= \frac{\mu_1 - 15}{20\beta}, \quad \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_2(k)} = \frac{x_1(k) - \beta}{20\beta}, \\
\frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_1(k)} &= \frac{(5 - \mu_1)}{20\beta}, \quad \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_2(k)} = \frac{(\beta - x_1(k))}{20\beta}, \\
\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_1(k)} &= \frac{(15 - \mu_1)}{20\beta}, \quad \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_2(k)} = \frac{-(\beta + x_1(k))}{20\beta}, \\
\frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_1(k)} &= \frac{\mu_1 - 5}{20\beta}, \quad \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_2(k)} = \frac{\beta + x_1(k)}{20\beta}.
\end{aligned} \tag{215}
$$

Então, considerando o conjunto $\mathcal{Z}$ dado em (213) com $\beta = 52$, de (215), segue que, para todo $z(k) \in \mathcal{Z}$,

$$
m_{11} = \min_{z(k) \in \mathcal{Z}} \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_1(k)} = -0{,}009615, \; M_{11} = \max_{z(k) \in \mathcal{Z}} \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
m_{12} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_2(k)} = -0{,}1,\ M_{12} = \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0,\\
m_{21} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_1(k)} = -0{,}009615,\ M_{21} = \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0,\\
m_{22} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0,\ M_{22} = \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0{,}1,\\
m_{31} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0,\ M_{31} = \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0{,}009615,\\
m_{32} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_2(k)} = -0{,}1,\ M_{32} = \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_3(k)} = 0,\\
m_{41} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0,\ M_{41} = \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0{,}009615,\\
m_{42} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0,\ M_{42} = \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0{,}1.
\end{aligned}
\tag{216}
$$

Logo, os gradientes das funções de pertinência dados por $\nabla h_i(z(k)) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i(z(k))}{\partial z_1(k)} & \dfrac{\partial h_i(z(k))}{\partial z_2(k)} \end{bmatrix}$*,* $i \in \mathbb{K}_4$*, sendo as derivadas parciais dadas em* (215) *e seus limites dados em* (216)*, são tais que* $\nabla h_i(z(k)) \in \mathrm{co}\{\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}, \psi_{i4}\}$*,* $i \in \mathbb{K}_4$*, sendo*

$$
\psi_{i1} = \begin{bmatrix} m_{i1} & m_{i2} \end{bmatrix},\ \psi_{i2} = \begin{bmatrix} m_{i1} & M_{i2} \end{bmatrix},\ \psi_{i3} = \begin{bmatrix} M_{i1} & m_{i2} \end{bmatrix},\ \psi_{i4} = \begin{bmatrix} M_{i1} & M_{i2} \end{bmatrix},
$$

com m_{ij} *e* M_{ij}*,* $i \in \mathbb{K}_4$*,* $j \in \mathbb{K}_2$*, dados em* (216)*, ou seja,*

$$
\begin{aligned}
&\psi_{11} = \begin{bmatrix} -0{,}009615 & -0{,}1 \end{bmatrix},\ \psi_{12} = \begin{bmatrix} -0{,}009615 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}1 \end{bmatrix},\ \psi_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},\\
&\psi_{21} = \begin{bmatrix} -0{,}009615 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{22} = \begin{bmatrix} -0{,}009615 & 0{,}1 \end{bmatrix},\ \psi_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 \end{bmatrix},\\
&\psi_{31} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}1 \end{bmatrix},\ \psi_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{33} = \begin{bmatrix} 0{,}009615 & -0{,}1 \end{bmatrix},\ \psi_{34} = \begin{bmatrix} 0{,}009615 & 0 \end{bmatrix},\\
&\psi_{41} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 \end{bmatrix},\ \psi_{43} = \begin{bmatrix} 0{,}009615 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{44} = \begin{bmatrix} 0{,}009615 & 0{,}1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{217}
$$

Resolvendo o problema de otimização dado pelas LMIs (154)-(157)*,* (184)*,* (192) *e* (193)*, apresentado no Teorema 14, considerando* $\alpha = 1$*,* $\gamma = 1$*,* $\bar{x}_1 = \beta = 52$*,* $\rho = 3$*,* $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i = 0{,}1$*,* $i \in \mathbb{K}_4$*,* $\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*,* $\Upsilon^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$*,* $w_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*,* $w_2 = -w_1$*,* $w_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$*,* $w_4 = -w_3$*,* $w_5^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $w_6 = -w_5$*, a seguinte solução foi obtida:*

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \begin{bmatrix} -0{,}0902 & -0{,}0202 & 7{,}6411 \times 10^{-5} \end{bmatrix},\ K_3 = \begin{bmatrix} -0{,}1055 & -0{,}0284 & 1{,}5739 \times 10^{-4} \end{bmatrix},\\
K_2 &= \begin{bmatrix} -0{,}0902 & -0{,}0202 & -7{,}6411 \times 10^{-5} \end{bmatrix},\ K_4 = \begin{bmatrix} -0{,}1055 & -0{,}0284 & 1{,}5739 \times 10^{-4} \end{bmatrix},\\
U_1 &= \begin{bmatrix} 0{,}0003 & 7{,}3765 \times 10^{-7} & 1{,}2298 \times 10^{-6} \\ 7{,}3765 \times 10^{-7} & 3{,}4099 \times 10^{-5} & 2{,}5990 \times 10^{-8} \\ 1{,}2298 \times 10^{-8} & 2{,}5990 \times 10^{-8} & 3{,}3391 \times 10^{-5} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

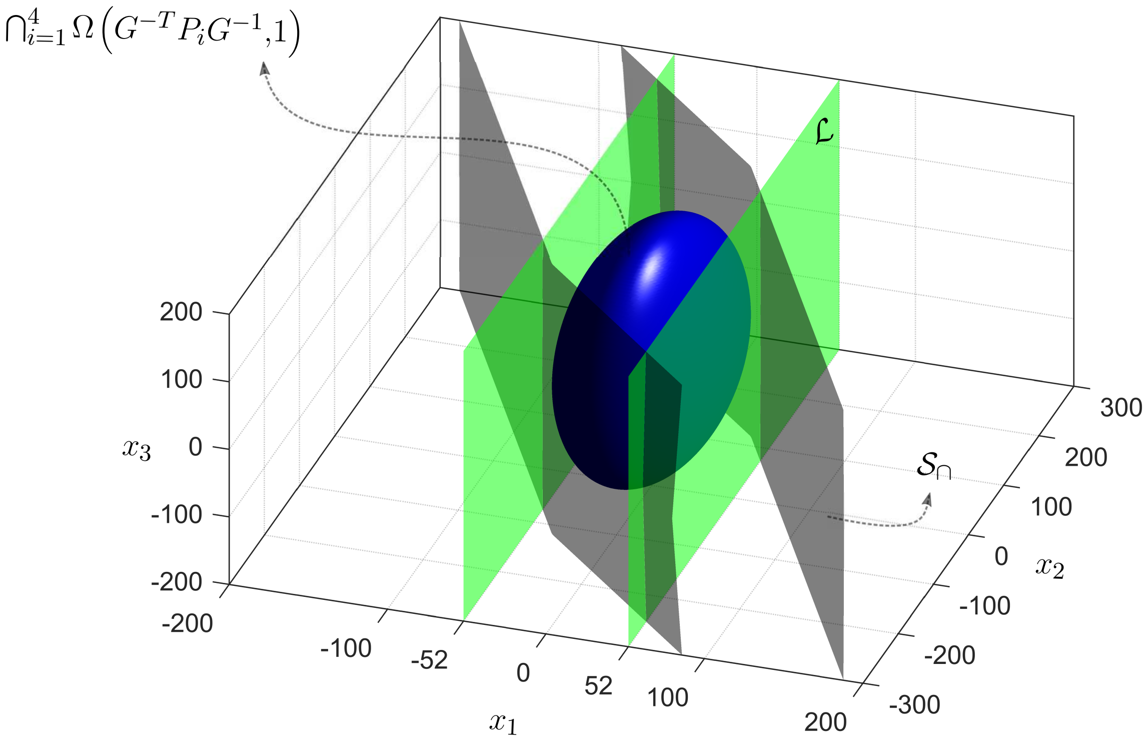
$$U_2 = \begin{bmatrix} 0{,}0003 & 7{,}3765\times10^{-7} & 1{,}3778\times10^{-6} \\ 7{,}3765\times10^{-7} & 3{,}4099\times10^{-5} & 4{,}3532\times10^{-8} \\ 1{,}3778\times10^{-6} & 4{,}3532\times10^{-8} & 3{,}3391\times10^{-5} \end{bmatrix},$$
$$U_3 = \begin{bmatrix} 0{,}0003 & -3{,}7063\times10^{-6} & 1{,}1188\times10^{-6} \\ -3{,}7063\times10^{-6} & 3{,}4061\times10^{-5} & -1{,}2929\times10^{-8} \\ 1{,}1188\times10^{-6} & -1{,}2929\times10^{-8} & 3{,}3389\times10^{-5} \end{bmatrix},$$
$$U_4 = \begin{bmatrix} 0{,}0003 & -3{,}7063\times10^{-6} & 1{,}4889\times10^{-6} \\ -3{,}7063\times10^{-6} & 3{,}4061\times10^{-5} & 8{,}2452\times10^{-8} \\ 1{,}4889\times10^{-6} & 8{,}2452\times10^{-8} & 3{,}3389\times10^{-5} \end{bmatrix},$$
$$P_1 = \begin{bmatrix} 2766{,}2825 & -317{,}5384 & 105{,}8293 \\ -317{,}5384 & 27592{,}7458 & -178{,}9028 \\ 105{,}8293 & -178{,}9028 & 27823{,}6191 \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} 2766{,}2825 & -317{,}5384 & -105{,}8293 \\ -317{,}5384 & 27592{,}7458 & 178{,}9028 \\ -105{,}8293 & 178{,}9028 & 27823{,}6191 \end{bmatrix},$$
$$P_3 = \begin{bmatrix} 2766{,}1270 & -325{,}3492 & 113{,}5846 \\ -325{,}3492 & 27614{,}1053 & -165{,}8357 \\ 113{,}5846 & -165{,}8357 & 27829{,}5494 \end{bmatrix},\ P_4 = \begin{bmatrix} 2766{,}1270 & -325{,}3492 & -113{,}5846 \\ -325{,}3492 & 27614{,}1053 & 165{,}8357 \\ -113{,}5846 & 165{,}8357 & 27829{,}5494 \end{bmatrix},$$
$$G = \begin{bmatrix} 2734{,}5533 & -291{,}3896 & 1{,}4493\times10^{-9} \\ -269{,}3269 & 27540{,}3155 & 5{,}9669\times10^{-9} \\ -7{,}6158\times10^{-10} & 6{,}8421\times10^{-9} & 27822{,}4214 \end{bmatrix},$$
$$\varpi_1 = \varpi_2 = 51{,}9559,\ \varpi_3 = \varpi_4 = 165{,}6608,\ \varpi_5 = \varpi_6 = 166{,}7565, \tag{218}$$

sendo $K_i = F_i G^{-1}$, $U_i = G^{-T} Q_i G^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_4$.

A estimativa para o DA obtido com o procedimento apresentado no Teorema 14, utilizando a solução (218), *é apresentada nas Figuras 19 e 20. Na Figura 19 está ilustrada a relação de inclusão entre o conjunto* $\bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, 1\right)$, *a região de operação* $\mathcal{L}$ *dado em* (9), *com* $n_x = 3$ *e* $\bar{x}_1 = 52$, *e a região* $\bigcap_{l=1}^{r} \mathcal{S}(M_l)$, *onde a representação dada em* (119) *para* $sat(u_\sigma(k))$, $k \geq 0$, *é valida para todo* $\sigma \in \mathbb{K}_4$. *Enquanto que a Figura 20, mostra a invariância da estimativa do DA obtida com o procedimento proposto no Teorema 14. Observe que todas as trajetórias que possuem suas condições iniciais em* $\bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, 1\right)$ *convergem assintoticamente para a origem.*

Considerando $\mu_1 = 15$ *e a condição inicial* $x(0) = \begin{bmatrix} 51{,}67 & 12 & -6 \end{bmatrix}^T$, *pertencente à estimativa do DA apresentada nas Figuras 19 e 20, foi realizada uma simulação do sistema de malha fechada* (115), *utilizando a lei de controle chaveada* (17), *com o conjunto de ganhos e matrizes auxiliares dadas em* (218). *Os resultados das simulações são apresentados nas Figuras 21, 22 e 23.*

Figura 19 - Estimativa do DA obtida utilizando o Teorema 14, com $\alpha=1$, $\gamma=1$, $\beta=52$, $\rho=3$ e $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i = 0{,}1$, $i \in \mathbb{K}_4$, e as superfícies dos conjuntos $\mathcal{L}$ e $\mathcal{S}_\cap = \bigcap_{l=1}^{r} \mathcal{S}(M_l)$.

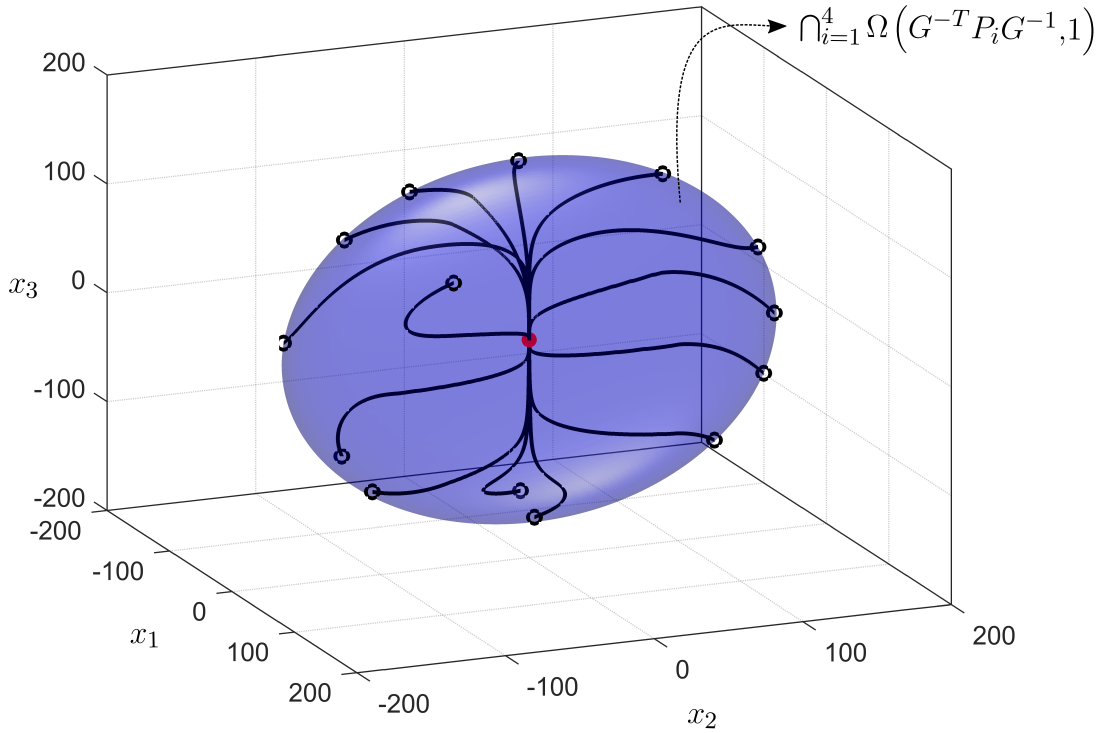


Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 21 apresenta as trajetórias de $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $x_3(k)$, simbolizadas por $\circ$, $+$ e $\star$, respectivamente. O esforço da lei de controle chaveada (17) *é mostrada na Figura 22, em que os símbolos $\times$, $\square$, $\diamond$ e $\star$ representam que o controlador F_1G^{-1}, F_2G^{-1}, F_3G^{-1} ou F_4G^{-1} está ativo, respectivamente, em cada instante k.*

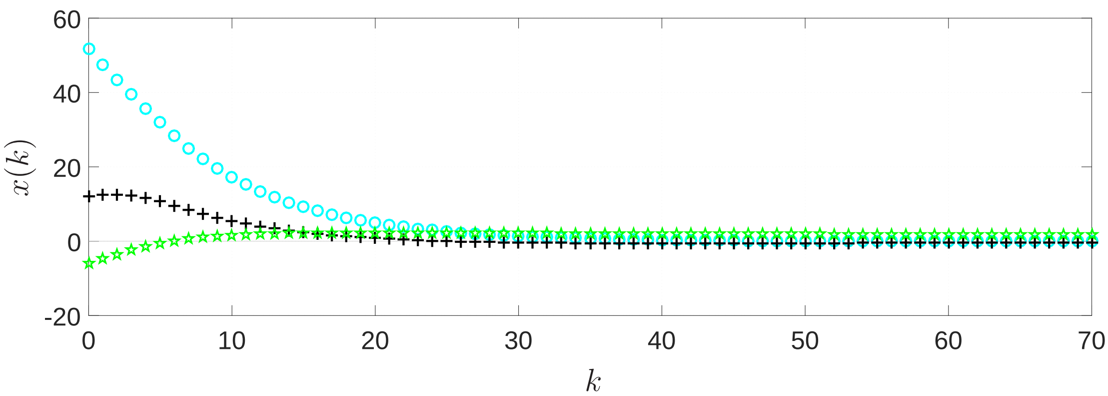
A Figura 23 mostra que a variação das funções de pertinência $\Delta h_2(z(k)) = h_2(z(k+1)) - h_2(z(k))$ e $\Delta h_4(z(k)) = h_4(z(k+1)) - h_4(z(k))$ ao longo do tempo, simbolizada por $\diamond$ e $\times$, respectivamente. Note que de (214)*, como nesta simulação, para $\mu_1 = 15$, para todo $z(k) \in \mathcal{Z}$, $k \geq 0$, $h_1(z(k)) = h_3(z(k)) = 0$ e portanto $\Delta h_1(z(k)) = \Delta h_3(z(k)) = 0$. O máximo do valor absoluto da variação das funções de pertinência $h_2(z(k))$ e $h_4(z(k))$ são dados por $\max\limits_{k\geq 0}\{|\Delta h_2(z(k))|\} = 0{,}04028 < 0{,}1 = \phi_2$ e $\max\limits_{k\geq 0}\{|\Delta h_4(z(k))|\} = 0{,}04028 < 0{,}1 = \phi_4$, conforme o especificado no projeto de controle.*

Figura 20 - Estimativa do DA calculado usando o Teorema 14, com $\mu_1 = 10$, $\gamma = 1$, $\beta = 52$, $\rho = 3$, $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i = 0{,}1$, $i \in \mathbb{K}_4$, onde as linhas sólidas pretas representam as trajetórias de estado que se iniciam em "$\circ$" e converge para a origem "$\bullet$".



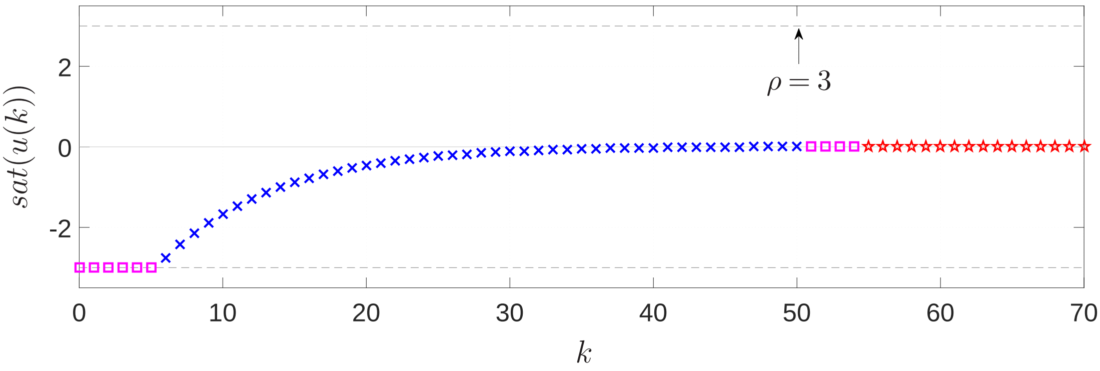
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 21 - Trajetórias das variáveis de estado para $x(0) = [51{,}67\ 12\ -6]^T$, sendo ($\circ$): $x_1(k)$, ($+$): $x_2(k)$ e ($\star$): $x_3(k)$.



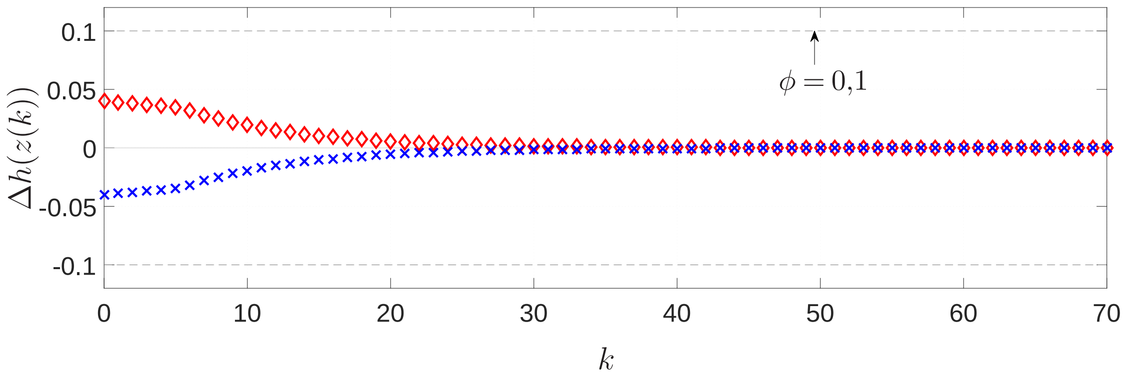
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 22 - A lei de controle chaveada (17): esforço do controle e $\sigma(k)$, sendo ($\times$): $\sigma(k) = 1$, ($\square$): $\sigma(k) = 2$, ($\diamond$): $\sigma(k) = 3$ e ($\star$): $\sigma(k) = 4$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 23 - Variação das funções de pertinência $h_2(z(k))$ e $h_4(z(k))$, em que ($\diamond$): $\Delta h_2(z(k))$ e ($\times$): $\Delta h_4(z(k))$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observação 15. *Nesta simulação, deve-se enfatizar que o parâmetro incerto μ_1 não foi utilizado para a aplicação da lei de controle chaveada* (17). *Além disso, é importante destacar que, para $5 \leq \mu_1 \leq 15$ e $-52 \leq x_1(k) \leq 52$, nenhuma solução factível foi encontrada com os procedimentos apresentados nos Teoremas 12, que também utiliza a lei de controle chaveada* (17) *e com o Corolário 2, que utiliza um controlador linear invariante no tempo.*

Exemplo 6. *Considere o sistema caótico discreto no tempo* (110)*, apresentado no Exemplo 1. Admita também o conjunto compacto $\mathcal{Z}$ dado em* (111) *e o sistema fuzzy T-S* (112)*, que descreve o sistema não linear* (110).

Veja que os gradientes, $\nabla h_i(z(k)) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i(z(k))}{\partial z_1(k)} & \dfrac{\partial h_i(z(k))}{\partial z_2(k)} \end{bmatrix}$, $i \in \mathbb{K}4$, das funções de *pertinência definidas em* (112)*, são dados por:*

$$\nabla h_1(z(k)) = \left(\frac{2x_1(k)(0{,}5-v)}{\beta^2}, \frac{-x_1^2(k)}{\beta^2}\right),\ \nabla h_2(z(k)) = \left(\frac{-2x_1(k)(0{,}5-v)}{\beta^2}, \frac{x_1^2(k)-\beta^2}{\beta^2}\right)$$
$$\nabla h_3(z(k)) = \left(\frac{2x_1(k)(0{,}5+v)}{\beta^2}, \frac{x_1^2(k)}{\beta^2}\right),\ \nabla h_4(z(k)) = \left(\frac{-2x_1(k)(0{,}5+v)}{\beta^2}, \frac{\beta^2-x_1(k)}{\beta^2}\right). \tag{219}$$

Logo, para todo $z(k) \in \mathcal{Z}$ dado em (111)*, considerando $\beta = 1$, os gradientes dados em* (219)*, são tais que $\nabla h_i(z(k)) \in \mathrm{co}\{\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}, \psi_{i4}\}$, $i \in \mathbb{K}_4$, sendo*

$$\psi_{i1} = \begin{bmatrix} m_{i1} & m_{i2} \end{bmatrix},\ \psi_{i2} = \begin{bmatrix} m_{i1} & M_{i2} \end{bmatrix},\ \psi_{i3} = \begin{bmatrix} M_{i1} & m_{i2} \end{bmatrix},\ \psi_{i4} = \begin{bmatrix} M_{i1} & M_{i2} \end{bmatrix},$$

com m_{ij} o mínimo da derivada parcial de $h_i(z(k))$ em relação a variável premissa $z_j(k)$ e M_{ij} o máximo da derivada parcial de $h_i(z(k))$ em relação a variável premissa $z_j(k)$, $i \in \mathbb{K}_4$, $j \in \mathbb{K}_2$, para $z(k) \in \mathcal{Z}$ dado em (111)*, ou seja,*

$$\begin{aligned}
&\psi_{11} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix},\ \psi_{12} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{13} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix},\ \psi_{14} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix},\\
&\psi_{21} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix},\ \psi_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix},\ \psi_{24} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix},\\
&\psi_{31} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{32} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix},\ \psi_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{34} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix},\\
&\psi_{41} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{42} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix},\ \psi_{43} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \psi_{44} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{220}$$

Observação 16. *Este exemplo não considera que a entrada de controle esteja sujeita à saturação. Então as seguintes alterações nas condições LMIs do Teorema 14, são necessárias para sua aplicação: A LMI* (156) *deve ser removida e nas LMIs* (155), (184) *e* (193)*, o termo $B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^-N_l$, deve ser substituído por B_iF_l, para todo i, $l \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$.*

Assim, resolvendo o problema de otimização do Teorema 14, composto pelas condições (154), (155),(157), (184), (192) *e* (193)*, como descrito na Observação 16, supondo $\alpha = 1$ e considerando $\gamma = 1$, $\bar{x}_1 = \beta = 1$, $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i = 0{,}8$, $i \in \mathbb{K}_4$, $\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $w_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = -w_1$, $w_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $w_4 = -w_3$, obteve-se:*

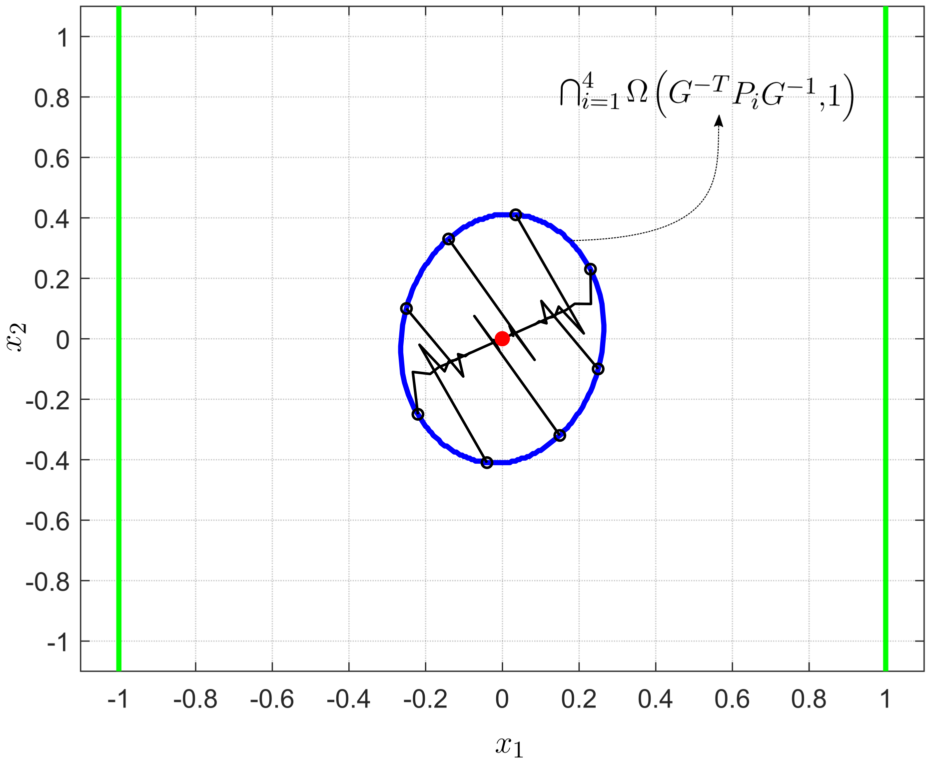
$$\begin{aligned}
F_1G^{-1} &= \begin{bmatrix} -1{,}20836 & -0{,}94573 \end{bmatrix},\ F_2G^{-1} = \begin{bmatrix} -1{,}21543 & -1{,}12660 \end{bmatrix},\\
F_3G^{-1} &= \begin{bmatrix} -1{,}21027 & -1{,}04031 \end{bmatrix},\ F_4G^{-1} = \begin{bmatrix} -1{,}22494 & -0{,}96652 \end{bmatrix},\\
U_1 = 10^8 &\begin{bmatrix} 3{,}73544718 & -2{,}74967540 \\ -2{,}74967540 & -1{,}24721853 \end{bmatrix},\ U_2 = 10^8 \begin{bmatrix} 3{,}73544720 & -2{,}74967546 \\ -2{,}74967546 & -1{,}24721852 \end{bmatrix},\\
U_3 = 10^8 &\begin{bmatrix} 3{,}73544721 & -2{,}74967543 \\ -2{,}74967543 & -1{,}24721854 \end{bmatrix},\ U_4 = 10^8 \begin{bmatrix} 3{,}73544723 & -2{,}74967539 \\ -2{,}74967539363692 & -1{,}24721853 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}06352 & -0{,}00638 \\ -0{,}00638 & 0{,}14149 \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}06194 & -0{,}00364 \\ -0{,}00364 & 0{,}14202 \end{bmatrix},$$
$$P_3 = \begin{bmatrix} 0{,}06064 & 0{,}02384 \\ 0{,}02384 & 0{,}13555 \end{bmatrix},\ P_4 = \begin{bmatrix} 0{,}06352 & -0{,}00637 \\ -0{,}006372 & 01{,}4149 \end{bmatrix},$$
$$\varpi_1 = \varpi_2 = 0{,}26293,\ \varpi_3 = \varpi_4 = 0{,}41182, \tag{221}$$

em que $Ui = G^{-T}Q_iG^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_4$.

Uma estimativa do DA obtida com a solução (221) *do Teorema 14, pode ser observada na Figura* (24). *A linha azul contínua representa a fronteira da estimativa do DA, enquanto as linhas pretas contínuas iniciadas nas marcas* $\circ$, *são trajetórias contidas em* $\bigcap_{i=1}^{2} \Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1}{,}1\right)$.

Figura 24 - Estimativa do domínio de atração obtida utilizando o Teorema 14, com $\upsilon = 5$, $\gamma = 1$, $\alpha = 1$ e $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i = 0{,}8$, $i \in \mathbb{K}_4$, sendo as linhas sólidas pretas, trajetórias convergentes para a origem, $\bullet$, iniciadas em $\circ$.

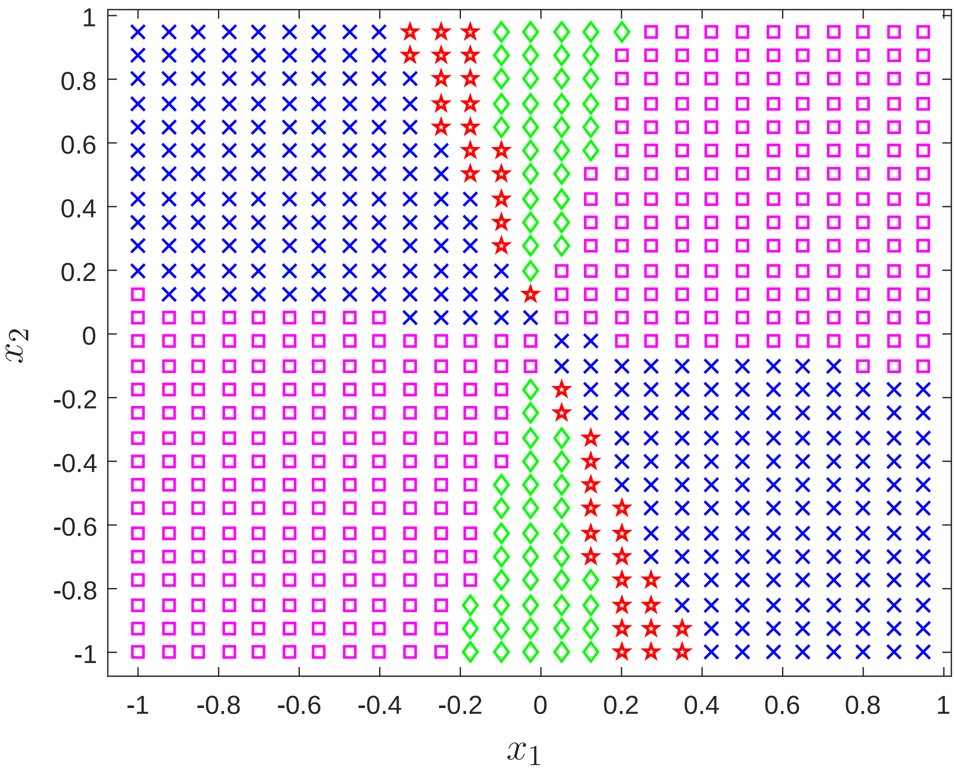


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Considerando o conjunto de ganhos dado em (221), *a condição inicial* $x(0) = \begin{bmatrix} -0{,}1 & -0{,}139 \end{bmatrix}^T$ *e* $\upsilon = 0{,}5$, *de* (112), *segue que* $h_1(z(k)) = h_2(z(k)) = 0$, *para todo* $z(k) \in \mathcal{Z}$, $k \geq 0$, *e portanto* $\Delta h_1(z(k)) = \Delta h_2(z(k)) = 0$. *O máximo do valor absoluto da* *variação das funções de pertinência* $h_3(z(k))$ *e* $h_4(z(k))$ *são dados por* $\max\limits_{k\geq 0}\{|\Delta h_3(z(k))|\} = 0{,}05113 < 0{,}8 = \phi_3$ *e* $\max\limits_{k\geq 0}\{|\Delta h_4(z(k))|\} = 0{,}05113 < 0{,}8 = \phi_4$*, conforme as restrições do projeto.*

A representação do chaveamento da lei de controle (17)*, para cada par* (x_1,x_2) *do plano, é apresentada na Figura 25, sendo que os símbolos* $\times$, $\square$, $\diamond$ *e* $\star$ *representam, respectivamente, o ganho* F_1G^{-1}, F_2G^{-1}, F_3G^{-1} *ou* F_4G^{-1} *ativo. Assim, a Figura 25, exibe o comportamento do chaveamento, para cada possível trajetória do vetor de estado* $x(k)$*, com* $-1 \leq x_1 \leq 1$ *e* $-1 \leq x_2 \leq 1$.

Figura 25 - Representação do chaveamento da lei de controle (17), sendo ($\times$): $\sigma(k) = 1$, ($\square$): $\sigma(k) = 2$, ($\diamond$): $\sigma(k) = 3$ e ($\star$): $\sigma(k) = 4$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

4.7 CONCLUSÕES PARCIAIS

Baseado no modelo fuzzy T-S e utilizando uma lei de controle chaveada, neste capítulo, a teoria apresentada no Capítulo 3 foi estendida com condições LMIs para a estabilização local de uma classe de sistemas não lineares incertos sujeitos à saturação. O procedimento proposto pode ser aplicado para controlar uma ampla classe de sistemas com parâmetros incertos, pois não utiliza as funções de pertinência para a implementação da lei de controle chaveada. Três diferentes projetos de controle chaveado são propostos para a estabilização local de sistemas não lineares incerto discretos no tempo, sujeitos à saturação no atuador. As metodologias propostas com a lei de controle chaveada, asseguram que todas as trajetórias do vetor de estado permanecem dentro de uma região, na qual o sistema não linear incerto pode ser descrito exatamente por modelos fuzzy T-S. Além disso, para obter uma estimativa menos conservadora do DA, na qual todas as restrições do sistema são satisfeitas, é proposto um método baseado na maximização do traço de uma matriz. Finalmente, exemplos numéricos ilustram a eficiência das metodologias propostas.

5 CONTROLE $\mathscr{H}_\infty$ CHAVEADO CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO

Neste capítulo um projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado para sistemas não lineares incertos discretos no tempo, sujeitos à saturação no atuador e distúrbio externo com energia limitada é proposto. Considerando funções de pertinência dependentes de parâmetros incertos limitados e baseado no conceito de hiper-retângulos fechados, o projeto de controle tem como objetivo mitigar a ação de um distúrbio limitado na saída do sistema e de manter as trajetórias do vetor de estado dentro de uma região, na qual a descrição do sistema não linear por modelos fuzzy T-S é assegurada. Exemplos numéricos ilustram a metodologia proposta. Uma implementação demonstra a eficácia prática do procedimento no controle de um sistema de suspensão ativa de bancada fabricado pela Quanser® (Quanser Innovate Educate, 2010), considerando uma mola não linear e uma massa incerta.

5.1 SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO SUJEITOS À SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE E DISTÚRBIO EXTERNO

Considere o sistema não linear incerto sujeito à saturação do sinal de controle e distúrbio externo de energia limitada descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f_1(z(k))x(k) + f_2(z(k))sat(u(k)) + f_3(z(k))w(k), \\ y(k) &= g_1(z(k))x(k) + g_2(z(k))sat(u(k)) + g_3(z(k))w(k), \end{aligned} \tag{222}$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de entrada, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ a entrada exógena com energia limitada, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de saída e $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ um vetor que depende do vetor de estado $x(k)$ e de um vetor $v \in \mathbb{R}^{n_v}$, cujas componentes v_ς, $\varsigma \in \mathbb{K}_{n_v}$ são parâmetros incertos limitados e invariantes no tempo de (222), como descrito em (6) e (7). A expressão $sat(u(k))$ representa a entrada de controle sujeita à saturação descrita em (114). Além disso, as funções não lineares $f_1 : \mathbb{R}^{n_z} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $f_2 : \mathbb{R}^{n_z} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ e $f_3 : \mathbb{R}^{n_z} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ descrevem a dinâmica do sistema não linear incerto. A saída do sistema é dada pelas funções $g_1 : \mathbb{R}^{n_z} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $g_2 : \mathbb{R}^{n_z} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ e $g_3 : \mathbb{R}^{n_z} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$.

Suponha que para $x(k) \in \mathcal{L}$ e $v \in \mathcal{V}$, e consequentemente $z(k) \in \mathcal{Z}$, sendo $\mathcal{Z}$ dado em (11), o sistema não linear incerto sujeito à saturação do sinal de controle e distúrbio externo de energia limitada (222), pode ser representado por um modelo fuzzy T-S, cuja

i-ésima regra pode ser descrita como

$$\begin{array}{ll} \underline{\textit{Regra i:}} & \text{SE } z_1(k) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_{n_z}(k) \text{ é } M_{n_z}^i, \\ & \text{ENTÃO } \begin{array}{l} x(k+1) = A_i x(k) + B_i sat(u(k)) + H_i w(k) \\ y(k) = C_i x(k) + D_i sat(u(k)) + E_i w(k), \end{array} \end{array} \tag{223}$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r$, M_m^i o conjunto fuzzy m da regra i, $m \in \mathbb{K}_{n_z}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $H_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $C_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $D_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$, $E_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$ matrizes do sistema, $z_1(k), \cdots, z_{n_z}(k)$ são variáveis premissas e r o número de regras fuzzy.

A representação exata do sistema (222), por um modelo fuzzy T-S, com r regras fuzzy, é dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) \left(A_i x(k) + B_i sat(u(k)) + H_i w(k)\right) \\ &= A_{z(k)} x(k) + B_{z(k)} sat(u(k)) + H_z w(k), \\ y(k) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) \left(C_i x(k) + D_i sat(u(k)) + E_i w(k)\right) \\ &= C_{z(k)} x(k) + D_{z(k)} sat(u(k)) + E_z w(k), \end{aligned} \tag{224}$$

sendo $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$, funções diferenciáveis que representam as funções de pertinência normalizadas de cada modelo local definido em (223), tais que satisfazem (15).

Considerando a lei de controle chaveada (17), para todo $x(k) \in \bigcap_{l=1}^{r} \mathcal{S}(M_l)$, sendo $\mathcal{S}(M_l)$, $l \in \mathbb{K}_r$, definido em (118), utilizando a notação dada em (117), o sistema realimentado sujeito à saturação e distúrbio externo com energia limitada (224), pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) \left(A_i x(k) + B_i \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \left(-\mathscr{D}_s K_{\sigma(k)} x(k) + \mathscr{D}_s^- M_{\sigma(k)} x(k) \right) + H_i w(k) \right) \\ &= A_{z(k)} x(k) + B_{z(k)} \left(-\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)} \right) x(k) + H_z w(k), \\ y(k) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) \left(C_i x(k) + D_i \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \left(-\mathscr{D}_s K_{\sigma(k)} x(k) + \mathscr{D}_s^- M_{\sigma(k)} x(k) \right) + E_i w(k) \right) \\ &= C_{z(k)} x(k) + D_{z(k)} \left(-\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + \mathscr{D}_\vartheta^- M_{\sigma(k)} \right) x(k) + E_z w(k), \end{aligned} \tag{225}$$

5.2 O PROBLEMA DE CONTROLE $\mathscr{H}_\infty$ CONSIDERANDO A REGIÃO DE OPERAÇÃO

Além de estabilidade, um controlador deve assegurar um bom desempenho do sistema em malha fechada. Habitualmente é definida uma medida ou norma para garantir a qualidade do projeto realizado. Desta forma, um importante índice de desempenho é a norma $\mathscr{H}_\infty$, que está relacionada com a capacidade do sistema em rejeitar distúrbios de energia limitada.

Sendo assim, considere uma constante positiva γ e o distúrbio de energia limitada $w(k) \in \ell_2$, sendo ℓ_2 o espaço de sinais $\xi(k)$ Lebesgue mensuráveis que satisfazem $\|\xi(k)\|_2 < \infty$, em que

$$\|\xi(k)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \xi^T(k)\xi(k)},$$

tais que,

$$\mathscr{W}_\gamma := \left\{ w(k) \in \mathbb{R}^{n_w} : \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k) \leq \gamma \right\}. \tag{226}$$

Considere um distúrbio $w(k)$ com energia limitada, uma variável de relaxação $\varphi > 0$ e uma constante $\gamma_0 \geq 0$. É atribuído um valor γ que limita a energia do distúrbio $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$. Baseado em (OLIVEIRA *et al.*, 2018a), o problema de controle $\mathscr{H}_\infty$ para um sistema não linear incerto discreto no tempo, considerando a região de operação, consiste em determinar uma lei de controle que satisfaça as seguintes condições:

1. Para $w(k) = 0$, $k > 0$, a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (222), com a lei de controle chaveada (17), e o conjunto elipsoidal $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)$ é um subconjunto invariante do domínio de atração (ou seja, se $x(0)$ pertence ao conjunto $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)$, então todas as trajetórias de $x(k)$, $k > 0$, também irão permanecer dentro deste conjunto).

2. Para $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$, qualquer trajetória com condição inicial dentro de $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1}, \gamma_0\right)$ (ou seja, $x^T(0)G^{-T}P_zG^{-1}x(0) \leq \gamma_0$) não irá escapar do conjunto elipsoidal $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)$, para todo $k > 0$.

3. Para $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$ e $x(0) = 0$, o sistema realimentado (225) possui um custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ igual $\varepsilon = \sqrt{\tau}$, tal que
$$\|y(k)\|_2^2 < \varepsilon^2 \|w(k)\|_2^2, \tag{227}$$
e $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1}, \varphi^{-1}\gamma\right)$, para todo $k > 0$.

5.3 PROJETO DE CONTROLE $\mathscr{H}_\infty$ CHAVEADO CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO

Considerando o problema de controle $\mathscr{H}_\infty$ com região de operação, descrito na Seção 5.2, o seguinte teorema é proposto.

Teorema 15. *Considere o sistema não linear incerto sujeito à saturação do atuador e distúrbio de energia limitada* (222) *descrito por um modelo fuzzy T-S incerto* (224) *em uma região de operação* $\mathcal{L}$ *definida em* (9)*, sendo* $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$*, com* $\rho_c > 0$*,* $c \in \mathbb{K}_{n_u}$*,* $\bar{x}_{a\eta} > 0$*,* $\eta \in \mathbb{K}_q$*,* $\gamma_0 \geq 0$*,* $\gamma > 0$ *e* $\varphi > 0$ *conhecidos, assim como as faixas de valores para seus parâmetros incertos invariantes no tempo definidas em* (8)*. Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas* $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$*, matrizes simétricas* Z_{it}*,* $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$*, matrizes* $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$*,* $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ *e* $N_l = \begin{bmatrix} N_{l(1)}^T & N_{l(2)}^T & \cdots & N_{l(n_u)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ *e números reais* $\varpi_m > 0$*, com* $\Pi = diag\{\varpi_1, \cdots \varpi_{n_L}\} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$*, tais que o seguinte problema de otimização*

$$\max_{P_i, Z_{it}, Q_i, F_l, N_l, G, H} (Tr(\Pi) - \tau), \ \textit{sujeito a}$$

$$\begin{bmatrix} P_i & G^T e_{a\eta} \\ e_{a\eta}^T G & \left(\gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)^{-1} \bar{x}_{a\eta}^2 \end{bmatrix} > 0, \tag{228}$$

$$\begin{bmatrix} P_i & (A_i G - B_i \mathscr{D}_s F_l + B_i \mathscr{D}_s^- N_l)^T e_{a\eta} \\ e_{a\eta}^T (A_i G - B_i \mathscr{D}_s F_l + B_i \mathscr{D}_s^- N_l) & \left(\gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)^{-1} \bar{x}_{a\eta}^2 \end{bmatrix} > 0, \tag{229}$$

$$\begin{bmatrix} -P_i & N_{l(c)}^T \\ N_{l(c)} & -\left(\gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)^{-1} \rho_c^2 \end{bmatrix} < 0, \tag{230}$$

$$\begin{bmatrix} P_i & \left(A_i G - B_i \mathscr{D}_s F_l + B_i \mathscr{D}_s^- N_l - G\right)^T \Upsilon^T \psi_{\zeta d}^T \\ \psi_{\zeta d} \Upsilon (A_i G - B_i \mathscr{D}_s F_l + B_i \mathscr{D}_s^- N_l - G) & \left(\gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)^{-1} \phi_\zeta^2 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{231}$$

$$\begin{bmatrix} G + G^T - (P_i + \Gamma_t) & 0 & A_i G - B_i \mathscr{D}_s F_l + B_i \mathscr{D}_s^- N_l & H_i \\ 0 & \varphi \tau I & C_i G - D_i \mathscr{D}_s F_l + D_i \mathscr{D}_s^- N_l & E_i \\ \left(A_i G - B_i \mathscr{D}_s F_l + B_i \mathscr{D}_s^- N_l\right)^T & \left(C_i G - D_i \mathscr{D}_s F_l + D_i \mathscr{D}_s^- N_l\right)^T & Z_{it} + Q_l & 0 \\ H_i^T & E_i^T & 0 & \varphi^{-1} I \end{bmatrix} > 0, \tag{232}$$

$$Z_{it} + Q_i - P_i \leq 0, \tag{233}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma & \varpi_m w_m^T \\ \varpi_m w_m & G^T + G - P_i \end{bmatrix} \geq 0, \tag{234}$$

seja satisfeito para todo i*,* l*,* δ *e* $j \in \mathbb{K}_r$*,* $t \in \mathbb{K}_{2^r}$*,* $c \in \mathbb{K}_{n_u}$*,* $\eta \in \mathbb{K}_q$*,* $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$ *e* $m \in \mathbb{K}_{n_L}$*, sendo* $e_{a\eta}$ *definido em* (124)*,* Γ_t *dado em* (67) *e* $w_m \in \mathbb{R}^{n_x}$*, vetores conhecidos descritos em* (143)*. Então, a lei de controle chaveada* (17) *com os ganhos do controlador* $K_l = F_l G^{-1}$*,* $l \in \mathbb{K}_r$*, garante que:*

1. *Para $w(k)=0$, $k>0$, a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto* (222)*, com a lei de controle chaveada* (17)*, e o conjunto elipsoidal $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$ definido em* (122)*, é um subconjunto invariante do domínio de atração.*

2. *Para $w(k)\in\mathscr{W}_\gamma$, se $x(0)\in\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma_0\right)$, então $x(k)\in\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$, para todo $k>0$.*

3. *Para $w(k)\in\mathscr{W}_\gamma$, se $x(0)=0$ o sistema realimentado* (225) *possui um custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ igual $\varepsilon=\sqrt{\tau}$, tal que*
$$\|y(k)\|_2^2<\varepsilon^2\|w(k)\|_2^2, \tag{235}$$
e $x(k)\in\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\varphi^{-1}\gamma\right)$, para todo $k>0$.

Demonstração: De acordo com os Lemas 4, 5 e 6, as condições (228), (229) e (230), asseguram as inclusões $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\subset\mathcal{L}$, $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\subset\mathcal{R}$ e $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\subset\bigcap_{l=1}^{r}\mathcal{S}(M_l)$, respectivamente. Assim, para $x(k)\in\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$ o sistema (222) pode ser representado pelo modelo fuzzy T-S (225).

Note que, das definições de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{H}$, em (121) e (170) respectivamente, segue que $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{R}$. Como a condição (229) garante $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\subset\mathcal{R}$, segue do Lema 14 que a condição (231) assegura $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\subseteq\mathcal{H}$. Logo, para $x(k)\in\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\backslash\{0\}$, as funções $h_i(z(k))$ e $h_i(z(k+1))$, $i\in\mathbb{K}_r$, descritas em (13) e (15), existem e são tais que $|\Delta h_i(z(k))|\leq\phi_i$, $0<\phi_i\leq 1$, $i\in\mathbb{K}_r$.

Sendo assim, para $x(k)\in\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\backslash\{0\}$, utilizando as notações definidas em (1) e (67), multiplicando (233) por $h_i(z(k))$ e por $\delta_t(z(k))$ e somando i de 1 até r e t de 1 até 2^r, obtém-se

$$Z_{z(k)\mu(k)}+Q_{z(k)}-P_{z(k)}\leq 0. \tag{236}$$

Multiplicando $x^T(k)G^{-T}$ à esquerda e $G^{-1}x(k)$ à direita de (236), obtém-se

$$x^T(k)\left\{G^{-T}Z_{z(k)\mu(k)}G^{-1}+G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}-G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k)\leq 0. \tag{237}$$

Considerando a lei de controle chaveada (17), multiplicando $h_i(z(k))$, $\delta_t(z(k))$ e ϑ_s em (232), somando i de 1 até r, t de 1 até 2^r e s de 1 até 2^{n_u}, utilizando as notações definidas em (1), (67) e (117), substituindo l por $\sigma(k)$ e utilizando o resultado apresentado no Lema

2 segue que, para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\backslash\{0\}$,

$$\begin{bmatrix} G+G^T-P_{z(k+1)} & 0 & A_{z(k)}G-B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)}+B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)} & H_{z(k)} \\ 0 & \varphi\tau I & C_{z(k)}G-D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)}+D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)} & E_{z(k)} \\ \left(A_{z(k)}G-B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)}+B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}\right)^T & \left(C_{z(k)}G-D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)}+D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}\right)^T & Z_{z(k)\mu(k)}+Q_{\sigma(k)} & 0 \\ H_{z(k)}^T & E_{z(k)}^T & 0 & \varphi^{-1}I \end{bmatrix} > 0. \tag{238}$$

Considere

$$\begin{aligned} \overline{A}_{z(k)} &= A_{z(k)}G-B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)}+B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)} \text{ e} \\ \overline{C}_{z(k)} &= C_{z(k)}G-D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F_{\sigma(k)}+D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N_{\sigma(k)}. \end{aligned} \tag{239}$$

Logo, utilizando a notação definida em (239), a inequação (238), pode ser reescrita como segue:

$$\begin{bmatrix} G+G^T-P_{z(k+1)} & 0 & \overline{A}_{z(k)} & H_{z(k)} \\ 0 & \varphi\tau I & \overline{C}_{z(k)} & E_{z(k)} \\ \overline{A}_{z(k)}^T & \overline{C}_{z(k)}^T & Z_{z(k)\mu(k)}+Q_{\sigma(k)} & 0 \\ H_{z(k)}^T & E_{z(k)}^T & 0 & \varphi^{-1}I \end{bmatrix} > 0. \tag{240}$$

Multiplicando à esquerda de (240),

$$T = \begin{bmatrix} -\left(G^{-1}\overline{A}_{z(k)}\right)^T & -\varphi^{-1}\tau^{-1}\overline{C}_{z(k)}^T & I & 0 \\ -\left(G^{-1}H_{z(k)}\right)^T & -\varphi^{-1}\tau^{-1}E_{z(k)}^T & 0 & I \end{bmatrix}$$

e à direita T^T, obtém-se

$$T\begin{bmatrix} G+G^T-P_{z(k+1)} & 0 & \overline{A}_{z(k)} & H_{z(k)} \\ 0 & \varphi\tau I & \overline{C}_{z(k)} & E_{z(k)} \\ \overline{A}_{z(k)}^T & \overline{C}_{z(k)}^T & Z_{z(k)\mu(k)}+Q_{\sigma(k)} & 0 \\ H_{z(k)}^T & E_{z(k)}^T & 0 & \varphi^{-1}I \end{bmatrix}T^T > 0. \tag{241}$$

Efetuando a primeira multiplicação em (241), tem-se

$$\begin{bmatrix} -\overline{A}^T_{z(k)}G^{-T}G+\overline{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)} & 0 \\ -H^T_{z(k)}G^{-T}G+H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -\overline{A}^T_{z(k)}G^{-T}\overline{A}_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}\overline{C}^T_{z(k)}\overline{C}_{z(k)}+\left(Z_{z(k)\mu(k)}+Q_{\sigma(k)}\right) \\ -H^T_{z(k)}G^{-T}\overline{A}_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}E^T_{z(k)}\overline{C}_{z(k)} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -\overline{A}^T_{z(k)}G^{-T}H_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}\overline{C}^T_{z(k)}E_{z(k)} \\ -H^T_{z(k)}G^{-T}H_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}E^T_{z(k)}E_{z(k)}+\varphi^{-1}I \end{matrix}\right] T^T > 0. \tag{242}$$

Então, de (242), segue que

$$\left[\begin{matrix} -\overline{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\overline{A}_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}\overline{C}^T_{z(k)}\overline{C}_{z(k)}+\left(Z_{z(k)\mu(k)}+Q_{\sigma(k)}\right) \\ -H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\overline{A}_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}E^T_{z(k)}\overline{C}_{z(k)} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} -\overline{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}\overline{C}^T_{z(k)}E_{z(k)} \\ -H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}E^T_{z(k)}E_{z(k)}+\varphi^{-1}I \end{matrix}\right] > 0. \tag{243}$$

Agora, lembrando que $K_{\sigma(k)} = F_{\sigma(k)}G^{-1}$ e $M_{\sigma(k)} = N_{\sigma(k)}G^{-1}$, considere

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{z(k)} &= \overline{A}_{z(k)}G^{-1} = A_{z(k)} - B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + B_{z(k)}\mathscr{D}^-_\vartheta M_{\sigma(k)} \text{ e} \\ \mathscr{C}_{z(k)} &= \overline{C}_{z(k)}G^{-1} = C_{z(k)} - D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta K_{\sigma(k)} + D_{z(k)}\mathscr{D}^-_\vartheta M_{\sigma(k)}. \end{aligned} \tag{244}$$

Multiplicando $\overline{G} = \begin{bmatrix} G^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ à esquerda e $\overline{G}^T$ à direita de (243) e utilizando as notações definidas em (244), segue que

$$\left[\begin{matrix} -\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}\mathscr{C}^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)}+G^{-T}\left(Z_{z(k)\mu(k)}+Q_{\sigma(k)}\right)G^{-1} \\ -H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}E^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} -\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}\mathscr{C}^T_{z(k)}E_{z(k)} \\ -H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}E^T_{z(k)}E_{z(k)}+\varphi^{-1}I \end{matrix}\right] > 0. \tag{245}$$

- Primeira propriedade:

Note que de (245), para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\backslash\{0\}$, tem-se

$$x^T(k)\Big\{\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)}+\varphi^{-1}\tau^{-1}\mathscr{C}^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)} - G^{-T}\left(Z_{z(k)\mu(k)}+Q_{\sigma(k)}\right)G^{-1}\Big\}x(k) < 0. \tag{246}$$

Considerando a lei de controle (17), de (30) e (246), segue que

$$x^T(k)\Big\{\mathscr{A}_{z(k)}^T G^{-T} P_{z(k+1)} G^{-1} \mathscr{A}_{z(k)} + \varphi^{-1}\tau^{-1}\mathscr{C}_{z(k)}^T \mathscr{C}_{z(k)} \\ - G^{-T}\left(Z_{z(k)\mu(k)} + Q_{z(k)}\right)G^{-1}\Big\}x(k) < 0. \quad (247)$$

Assim, de (237) e (247), para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right) \setminus \{0\}$, tem-se

$$x(k)^T\left\{\mathscr{A}_{z(k)}^T G^{-T} P_{z(k+1)} G^{-1} \mathscr{A}_{z(k)} + \varphi^{-1}\tau^{-1}\mathscr{C}_{z(k)}^T \mathscr{C}_{z(k)} - G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k) < 0 \\ \Longleftrightarrow x(k)^T\left\{\mathscr{A}_{z(k)}^T G^{-T} P_{z(k+1)} G^{-1} \mathscr{A}_{z(k)} - G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}\right\}x(k) \\ < -\varphi^{-1}\tau^{-1}x^T(k)\mathscr{C}_{z(k)}^T \mathscr{C}_{z(k)}x(k). \quad (248)$$

Note que, para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right) \setminus \{0\}$,

$$x(k)^T\mathscr{C}_{z(k)}^T \mathscr{C}_{z(k)}x(k) = \left(\mathscr{C}_{z(k)}x(k)\right)^T\left(\mathscr{C}_{z(k)}x(k)\right) = \|\mathscr{C}_{z(k)}x(k)\|^2 \geq 0. \quad (249)$$

Assim, como $\varphi > 0$ e $\tau > 0$, de (248) e (249), segue que, para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right) \setminus \{0\}$,

$$x(k)^T\mathscr{A}_{z(k)}^T G^{-T} P_{z(k+1)} G^{-1} \mathscr{A}_{z(k)}x(k) - x^T(k)G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}x(k) \\ < -\varphi^{-1}\tau^{-1}x^T(k)\mathscr{C}_{z(k)}^T \mathscr{C}_{z(k)}x(k) \leq 0. \quad (250)$$

Dessa forma, considerando a candidata a função de Lyapunov $V(x(k)) = x^T(k)G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}x(k)$, definida em (16), o sistema (225) e a notação dada em (244), para $w(k) = 0$, $k \geq 0$, e $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right) \setminus \{0\}$, a desigualdade (250) implica que

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0. \quad (251)$$

Portanto, de (251), segue que, para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)$ e $w(k) = 0$, $k \geq 0$, a lei de controle chaveada (17), com os ganhos do controlador $F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, tornam o ponto de equilíbrio, $x(k) = 0$, do sistema (224), localmente assintoticamente estável. Logo, $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)$ é um subconjunto invariante do domínio de atração.

- Segunda propriedade:

Considere $\delta^T(k) = \begin{bmatrix} x^T(k) & w^T(k) \end{bmatrix}$, sendo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0\right) \setminus \{0\} \subset \mathcal{H}$ e $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$, lembrando que a inclusão $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0\right) \setminus \{0\} \subset \mathcal{H}$ é garantida por (231). Multiplicando $\delta^T(k)$ à esquerda e $\delta(k)$ à direita de (245), obtém-se

$$\Big\{x^T(k)\left(\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)}\right)x(k)+x^T(k)\left(\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)}\right)w(k)$$
$$+w^T(k)\left(H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)}\right)x(k)+w^T(k)\left(H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)}\right)w(k)$$
$$-x^T(k)\left(G^{-T}\left(Z_{z(k)\mu(k)}+Q_{\sigma(k)}\right)G^{-1}\right)x(k)\Big\}$$
$$+\varphi^{-1}\tau^{-1}\Big\{x^T(k)\left(\mathscr{C}^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)}\right)x(k)+x^T(k)\left(\mathscr{C}^T_{z(k)}E_{z(k)}\right)w(k)+w^T(k)\left(E^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)}\right)x(k)$$
$$+w^T(k)\left(E^T_{z(k)}E_{z(k)}\right)w(k)\Big\}-\varphi^{-1}\Big\{w^T(k)w(k)\Big\}<0. \quad (252)$$

De (30), (237) e (252), tem-se que

$$\Big\{x^T(k)\left(\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)}\right)x(k)+x^T(k)\left(\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)}\right)w(k)$$
$$+w^T(k)\left(H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)}\right)x(k)+w^T(k)\left(H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)}\right)w(k)$$
$$-x^T(k)G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}x(k)\Big\}$$
$$+\varphi^{-1}\tau^{-1}\Big\{x^T(k)\left(\mathscr{C}^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)}\right)x(k)+x^T(k)\left(\mathscr{C}^T_{z(k)}E_{z(k)}\right)w(k)+w^T(k)\left(E^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)}\right)x(k)$$
$$+w^T(k)\left(E^T_{z(k)}E_{z(k)}\right)w(k)\Big\}-\varphi^{-1}\Big\{w^T(k)w(k)\Big\}<0. \quad (253)$$

Observe que, considerando a candidata a função de Lyapunov (16) e o sistema em malha fechada (225), a desigualdade (253) pode ser reescrito como

$$\Big\{V(x(k+1))-V(x(k))\Big\}+\Big\{\varphi^{-1}\tau^{-1}\left(\mathscr{C}_{z(k)}x(k)+E_{z(k)}w(k)\right)^T$$
$$\times\left(\mathscr{C}_{z(k)}x(k)+E_{z(k)}w(k)\right)\Big\}-\Big\{\varphi^{-1}w(k)^Tw(k)\Big\}<0. \quad (254)$$

Considerando o sistema em malha fechada (225), da notação definida em (244) e de (254), segue que, para $x(k)\in\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0\right)\backslash\{0\}$ e $w(k)\in\mathscr{W}_\gamma$,

$$\Delta V(x(k))+\varphi^{-1}\tau^{-1}y^T(k)y(k)-\varphi^{-1}w^T(k)w(k)<0. \quad (255)$$

Ou seja, para todo $k\geq 0$,

$$\Delta V(x(k))-\varphi^{-1}w^T(k)w(k)<-\varphi^{-1}\tau^{-1}y^T(k)y(k)=-\varphi^{-1}\tau^{-1}\|y(k)\|^2\leq 0. \quad (256)$$

Em (256), somando k de 0 até k^*-1, sendo $k^*>0$ um instante arbitrário, tem-se

$$\sum_{k=0}^{k^*-1}\Big\{\Delta V(x(k))-\varphi^{-1}w(k)^Tw(k)\Big\}<0. \quad (257)$$

Desenvolvendo a somatória em (257), obtém-se

$$
\begin{aligned}
&(V(x(1))-V(x(0)))+(V(x(2))-V(x(1)))+\cdots+(V(x(k^*-1))-V(x(k^*-2)))\\
&\qquad +(V(x(k^*))-V(x(k^*-1)))-\varphi^{-1}\sum_{k=0}^{k^*-1} w^T(k)w(k)<0\\
&\qquad\qquad \Longleftrightarrow V(x(k^*))<V(x(0))+\varphi^{-1}\sum_{k=0}^{k^*-1} w(k)^T w(k). \qquad (258)
\end{aligned}
$$

Como $w^T(k)w(k) \geq 0$ para qualquer $k \geq 0$, tem-se de (258), que

$$
V(x(k^*))<V(x(0))+\varphi^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k), \qquad (259)
$$

sendo $k^* > 0$, um instante arbitrário.

Da desigualdade (259), para $x(0) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0\right)$ e $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$, ou seja, $\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k) < \gamma$, segue que

$$
V(x(k^*))<V(x(0))+\varphi^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k) \leq \gamma_0+\varphi^{-1}\gamma, \qquad (260)
$$

para qualquer $k^* > 0$.

Portanto a desigualdade (260), assegura que qualquer trajetória iniciada em $x(0) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0\right)$, permanecerá na região $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\setminus\partial\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$, por todo tempo futuro, sendo $\partial\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$ a fronteira de $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$.

- Terceira propriedade

Considere (254), com $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\varphi^{-1}\gamma\right)\setminus\{0\} \subset \mathcal{H}$ e $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$, sendo $\mathscr{W}_\gamma$ definido em (226).

Observe que, da Segunda propriedade, se $x(0) = 0$ e $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$, então $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\varphi^{-1}\gamma\right) \subseteq \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$, para todo $k \geq 0$. Assim, lembrando que das condições (228), (229), (230) e (231) asseguram $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right) \subset \mathcal{L}$, $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right) \subset \mathcal{R}$, $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right) \subset \bigcap_{l=1}^{r}\mathcal{S}(M_l)$ e $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right) \subset \mathcal{H}$, respectivamente, considerando a candidata a função de Lyapunov (16) e o sistema em malha fechada (225), da desigualdade (254), segue que

$$
\Delta V(x(k))+\varphi^{-1}\tau^{-1}y^T(k)y(k)-\varphi^{-1}w^T(k)w(k)<0, \qquad (261)
$$

para todo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\varphi^{-1}\gamma\right)\setminus\{0\}$ e $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$.

Em (261), somando k de 0 até ∞, obtém-se

$$\begin{aligned}&(V(x(1))-V(x(0)))+(V(x(2))-V(x(1)))+\cdots+(V(x(k^*-1))-V(x(k^*-2)))\\&+(V(x(k^*))-V(x(k^*-1)))+\cdots+\varphi^{-1}\tau^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}y^T(k)y(k)-\varphi^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}w^T(k)w(k)<0.\end{aligned} \tag{262}$$

Ou seja, de (262), obtém-se

$$\varphi^{-1}\tau^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}y^T(k)y(k)-\varphi^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}w^T(k)w(k)<-V(x(\infty))+V(x(0))<V(x(0))=0. \tag{263}$$

Portanto, multiplicando φ e τ em (263), segue que

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}y^T(k)y(k)<\tau\sum_{k=0}^{\infty}w^T(k)w(k)\\&\iff \|y(k)\|_2^2<\tau\|w(k)\|_2^2.\end{aligned} \tag{264}$$

Logo o sistema realimentado (225) possui um custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ igual $\varepsilon=\sqrt{\tau}$.

Finalmente, do Lema 9 e da condição (234), segue que $\mathcal{B}\subset\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$, sendo $\mathcal{B}$ dado em (143). Assim, a maximização do $Tr(\mathit{\Pi}-\tau)$, proporciona uma estimativa do DA, $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$, menos conservadora, além de minimizar o custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, $\varepsilon=\sqrt{\tau}$. ■

Observação 17. *Sempre que limitada, a norma $\mathscr{H}_\infty$ impõe ao sistema certas propriedades de robustez contra perturbações externas. Assim, quanto menor o valor de $\varepsilon=\sqrt{\tau}$, melhor a atenuação do efeito de perturbação $w(k)$ na saída controlada $y(k)$. Para conseguir uma boa rejeição à perturbação com o comprometimento de obter um domínio de atração menos conservador, no Teorema 15 foi proposto a maximização $Tr(\mathit{\Pi})-\tau$. Porém, uma melhor atenuação pode ser obtida minimizando apenas o parâmetro τ. Neste último caso, uma estimativa menor do domínio de atração é proporcionada pelo método proposto no Teorema 15.*

Observação 18. *O projeto proposto no Teorema 15, pode ser entendido como uma extensão do resultado apresentado no Teorema 14, para o caso em que o sistema está sujeito a distúrbios externos. Sendo assim, de forma análoga, os projetos de controle apresentados nos Teoremas 12 e 13, também podem ser estendidos para o controle de sistemas sujeitos a distúrbios externos limitados.*

Uma outra alternativa para a estabilização local do sistema não linear incerto sujeito à saturação e distúrbio externo de energia limitada (222), seria adotar um controlador linear invariante no tempo (38).

Assim, utilizando a notação definida em (117), da representação para função sat$(u(k))$, dada em (163), para todo $x(k) \in \mathcal{S}(M)$, sendo $\mathcal{S}(M)$ dado por (118), com $M_l = M$, para todo $l \in \mathbb{K}_r$, e $M = NG^{-1} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, o sistema (224) controlado por (38), pode ser reescrito como segue:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) \left(A_i x(k) + B_i \sum_{s=1}^{2^{nu}} \Big(-\mathscr{D}_s K x(k) + \mathscr{D}_s^- M x(k) \Big) + H_i w(k) \right) \\ &= A_{z(k)} x(k) + B_{z(k)} \Big(-\mathscr{D}_\vartheta K + \mathscr{D}_\vartheta^- M \Big) x(k) + H_z w(k), \\ y(k) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(k)) \left(C_i x(k) + D_i \sum_{s=1}^{2^{nu}} \Big(-\mathscr{D}_s K x(k) + \mathscr{D}_s^- M x(k) \Big) + E_i w(k) \right) \\ &= C_{z(k)} x(k) + D_{z(k)} \Big(-\mathscr{D}_\vartheta K + \mathscr{D}_\vartheta^- M \Big) x(k) + E_z w(k). \end{aligned} \tag{265}$$

Logo, considerando o controlador linear invariante no tempo (38), condições similares ao Teorema 15 podem ser enunciadas da seguinte forma:

Corolário 3. *Considere o sistema não linear incerto sujeito à saturação do atuador e distúrbio de energia limitada* (222) *descrito por um modelo fuzzy T-S incerto* (224) *em uma região de operação* $\mathcal{L}$ *definida em* (9), *sendo* $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$, *com* $\rho_c > 0$, $c \in \mathbb{K}_{n_u}$, $\bar{x}_{a\eta} > 0$, $\eta \in \mathbb{K}_q$, $\gamma_0 \geq 0$, $\gamma > 0$ *e* $\varphi > 0$ *conhecidos, assim como as faixas de valores para seus parâmetros incertos invariantes no tempo definidas em* (8). *Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas* $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, *matrizes* $F \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ *e* $N = \begin{bmatrix} N_{(1)}^T & N_{(2)}^T & \cdots & N_{(n_u)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ *e números reais* $\varpi_m > 0$, *com* $\Pi = diag\{\varpi_1, \cdots \varpi_{n_L}\} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$, *tais que o seguinte problema de otimização*

$$\max_{P_i, F, N, G, H} \left(Tr(\Pi) - \tau \right),$$

sujeito a

(228), (234)

$$\begin{bmatrix} P_i & (A_i G - B_i \mathscr{D}_s F + B_i \mathscr{D}_s^- N)^T e_{a\eta} \\ e_{a\eta}^T (A_i G - B_i \mathscr{D}_s F + B_i \mathscr{D}_s^- N) & \left(\gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)^{-1} \bar{x}_{a\eta}^2 \end{bmatrix} > 0, \tag{266}$$

$$\begin{bmatrix} -P_i & N_{(c)}^T \\ N_{(c)} & -\left(\gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)^{-1} \rho_c^2 \end{bmatrix} < 0, \tag{267}$$

$$\begin{bmatrix} P_i & \Big(A_i G - B_i \mathscr{D}_s F + B_i \mathscr{D}_s^- N - G\Big)^T \Upsilon^T \psi_{\zeta d}^T \\ \psi_{\zeta d} \Upsilon (A_i G - B_i \mathscr{D}_s F + B_i \mathscr{D}_s^- N - G) & \left(\gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)^{-1} \phi_\zeta^2 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{268}$$

$$\begin{bmatrix} G+G^T-P_j & 0 & A_iG-B_i\mathscr{D}_sF+B_i\mathscr{D}_s^-N & H_i \\ 0 & \varphi\tau I & C_iG-D_i\mathscr{D}_sF+D_i\mathscr{D}_s^-N & E_i \\ \left(A_iG-B_i\mathscr{D}_sF+B_i\mathscr{D}_s^-N\right)^T & \left(C_iG-D_i\mathscr{D}_sF+D_i\mathscr{D}_s^-N\right)^T & P_i & 0 \\ H_i^T & E_i^T & 0 & \varphi^{-1}I \end{bmatrix} > 0, \tag{269}$$

seja satisfeito para todo i, δ e $j \in \mathbb{K}_r$, $c \in \mathbb{K}_{n_u}$, $\eta \in \mathbb{K}_q$, $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$ e $m \in \mathbb{K}_{n_L}$, sendo $e_{a\eta}$ definido em (124) *e $w_m \in \mathbb{R}^{n_x}$, vetores conhecidos descritos em* (143). *Então, o controlador linear invariante no tempo* (38), *com o ganho do controlador $K = FG^{-1}$ garante que:*

1. *Para $w(k) = 0$, $k > 0$, a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto* (222), *com a lei de controle* (38), *e o conjunto elipsoidal $\Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$ definido em* (122), *é um subconjunto invariante do domínio de atração.*

2. *Para $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$, se $x(0) \in \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma_0\right)$, então $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$, para todo $k > 0$.*

3. *Para $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$, se $x(0) = 0$ o sistema realimentado* (265) *possui um custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ igual $\varepsilon = \sqrt{\tau}$, tal que*
$$\|y(k)\|_2^2 < \varepsilon^2\|w(k)\|_2^2, \tag{270}$$
e $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_zG^{-1},\varphi^{-1}\gamma\right)$, para todo $k > 0$.

Demonstração: De acordo com o Lema 4, a condição (228), garante $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right) \subset \mathcal{L}$.

Nos Lemas 5, 6 e 14, considerando $F_l = F$ e $N_l = N$, para todo $l \in \mathbb{K}_r$, as condições (125), (132) e (229) coincidem com as desigualdades (266), (267) e (268), respectivamente. Logo, as condições (266), (267) e (268) asseguram $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right) \subset \mathcal{R}$, sendo $\mathcal{R}$ definido em (121), com $K_l = K$ e $M_l = M$, para todo $l \in \mathbb{K}_r$, $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right) \subset \bigcap_{l=1}^{r}\mathcal{S}(M)$ e $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right) \subseteq \mathcal{H}$, respectivamente.

Considerando a lei de controle invariante no tempo (38), multiplicando $h_i(z(k))$, $h_j(z(k+1))$ e ϑ_s em (269), somando i e j de 1 até r e s de 1 até 2^{n_u}, utilizando as notações definidas em (1), (117) e considerando o resultado apresentado no Lema 2, segue que, para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right) \setminus \{0\}$,

$$\left[\begin{array}{cccc} G+G^T-P_{z(k+1)} & 0 & A_{z(k)}G-B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F+B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N & H_{z(k)} \\ 0 & \varphi\tau I & C_{z(k)}G-D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F+D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N & E_{z(k)} \\ \left(A_{z(k)}G-B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F+B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N\right)^T & \left(C_{z(k)}G-D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F+D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N\right)^T & P_{z(k)} & 0 \\ H_{z(k)}^T & E_{z(k)}^T & 0 & \varphi^{-1}I \end{array}\right] > 0. \tag{271}$$

Considere

$$\begin{aligned} \overline{A}_{z(k)} &= A_{z(k)}G-B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F+B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N \text{ e} \\ \overline{C}_{z(k)} &= C_{z(k)}G-D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta F+D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta^- N. \end{aligned} \tag{272}$$

Utilizando as notações definida em (272), multiplicando à esquerda de (271),

$$T = \left[\begin{array}{cccc} -\left(G^{-1}\overline{A}_{z(k)}\right)^T & -\varphi^{-1}\tau^{-1}\overline{C}_{z(k)}^T & I & 0 \\ -\left(G^{-1}H_{z(k)}\right)^T & -\varphi^{-1}\tau^{-1}E_{z(k)}^T & 0 & I \end{array}\right]$$

e à direita T^T, obtém-se

$$T\left[\begin{array}{cccc} G+G^T-P_{z(k+1)} & 0 & \overline{A}_{z(k)} & H_{z(k)} \\ 0 & \varphi\tau I & \overline{C}_{z(k)} & E_{z(k)} \\ \overline{A}_{z(k)}^T & \overline{C}_{z(k)}^T & P_{z(k)} & 0 \\ H_{z(k)}^T & E_{z(k)}^T & 0 & \varphi^{-1}I \end{array}\right]T^T > 0. \tag{273}$$

Efetuando a primeira multiplicação em (273), tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc} -\overline{A}_{z(k)}^T G^{-T}G+\overline{A}_{z(k)}^T G^{-T}P_{z(k+1)} & 0 & -\overline{A}_{z(k)}^T G^{-T}\overline{A}_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}\overline{C}_{z(k)}^T\overline{C}_{z(k)}+P_{z(k)} & -\overline{A}_{z(k)}^T G^{-T}H_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}\overline{C}_{z(k)}^T E_{z(k)} \\ -H_{z(k)}^T G^{-T}G+H_{z(k)}^T G^{-T}P_{z(k+1)} & 0 & -H_{z(k)}^T G^{-T}\overline{A}_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}E_{z(k)}^T\overline{C}_{z(k)} & -H_{z(k)}^T G^{-T}H_{z(k)}-\varphi^{-1}\tau^{-1}E_{z(k)}^T E_{z(k)}+\varphi^{-1}I \end{array}\right]T^T > 0. \tag{274}$$

Então, de (274), segue que

$$\begin{bmatrix} -\overline{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\overline{A}_{z(k)} - \varphi^{-1}\tau^{-1}\overline{C}^T_{z(k)}\overline{C}_{z(k)} + P_{z(k)} & \\ -H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\overline{A}_{z(k)} - \varphi^{-1}\tau^{-1}E^T_{z(k)}\overline{C}_{z(k)} & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -\overline{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)} - \varphi^{-1}\tau^{-1}\overline{C}^T_{z(k)}E_{z(k)} \\ -H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)} - \varphi^{-1}\tau^{-1}E^T_{z(k)}E_{z(k)} + \varphi^{-1}I \end{bmatrix} > 0. \tag{275}$$

Lembrando que $K = FG^{-1}$ e $M = NG^{-1}$, considere também a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{z(k)} &= \overline{A}_{z(k)}G^{-1} = A_{z(k)} - B_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta K + B_{z(k)}\mathscr{D}^-_\vartheta M \text{ e} \\ \mathscr{C}_{z(k)} &= \overline{C}_{z(k)}G^{-1} = C_{z(k)} - D_{z(k)}\mathscr{D}_\vartheta K + D_{z(k)}\mathscr{D}^-_\vartheta M. \end{aligned} \tag{276}$$

Utilizando as notações definidas em (276), multiplicando $\overline{G} = \begin{bmatrix} G^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ à esquerda e $\overline{G}^T$ à direita de (243), segue que

$$\begin{bmatrix} -\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)} - \varphi^{-1}\tau^{-1}\mathscr{C}^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)} + G^{-T}P_{z(k)}G^{-1} & \\ -H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)} - \varphi^{-1}\tau^{-1}E^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)} & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)} - \varphi^{-1}\tau^{-1}\mathscr{C}^T_{z(k)}E_{z(k)} \\ -H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)} - \varphi^{-1}\tau^{-1}E^T_{z(k)}E_{z(k)} + \varphi^{-1}I \end{bmatrix} > 0. \tag{277}$$

- Primeira propriedade:

De (277), segue que

$$\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)} + \varphi^{-1}\tau^{-1}\mathscr{C}^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)} - G^{-T}P_{z(k)}G^{-1} < 0. \tag{278}$$

Logo, para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right) \setminus \{0\}$, de (278), lembrando que $\varphi > 0$ e $\tau > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} x(k)^T \left\{\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)} - G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}\right\} x(k) & \\ < -\varphi^{-1}\tau^{-1}x^T(k)\mathscr{C}^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)}x(k) & \\ = -\varphi^{-1}\tau^{-1}\|\mathscr{C}_{z(k)}x(k)\|^2 \leq 0. & \end{aligned} \tag{279}$$

Considerando a candidata a função de Lyapunov definida em (16), o sistema (265) e a notação dada em (276), para $w(k) = 0$, $k \geq 0$, e

$x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\setminus\{0\}$, de (279), segue que

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0. \tag{280}$$

Logo, de (280), segue que, para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$ e $w(k)=0$, $k \geq 0$, a lei de controle (38), com o ganho do controlador FG^{-1}, torna o ponto de equilíbrio, $x(k) = 0$, do sistema (224), localmente assintoticamente estável. Portanto, $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$ é um subconjunto invariante do domínio de atração.

- Segunda propriedade:

Considere $\delta^T(k) = \begin{bmatrix} x^T(k) & w^T(k)\end{bmatrix}$, sendo $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0\right)\setminus\{0\} \subset \mathcal{H}$ e $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$. Multiplicando $\delta^T(k)$ à esquerda e $\delta(k)$ à direita de (277), obtém-se

$$\begin{aligned}
&\Big\{x^T(k)\left(\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)}\right)x(k) + x^T(k)\left(\mathscr{A}^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)}\right)w(k)\\
&\quad + w^T(k)\left(H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}\mathscr{A}_{z(k)}\right)x(k) + w^T(k)\left(H^T_{z(k)}G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}H_{z(k)}\right)w(k)\\
&\qquad\qquad - x^T(k)\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}\right)x(k)\Big\}\\
&\quad +\varphi^{-1}\tau^{-1}\Big\{x^T(k)\left(\mathscr{C}^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)}\right)x(k) + x^T(k)\left(\mathscr{C}^T_{z(k)}E_{z(k)}\right)w(k) + w^T(k)\left(E^T_{z(k)}\mathscr{C}_{z(k)}\right)x(k)\\
&\qquad\qquad + w^T(k)\left(E^T_{z(k)}E_{z(k)}\right)w(k)\Big\} - \varphi^{-1}\Big\{w^T(k)w(k)\Big\} < 0.
\end{aligned} \tag{281}$$

Considerando a candidata a função de Lyapunov (16) e o sistema em malha fechada (265), segue da desigualdade (281), que

$$\begin{aligned}
&\Big\{V(x(k+1)) - V(x(k))\Big\} + \Big\{\varphi^{-1}\tau^{-1}\left(\mathscr{C}_{z(k)}x(k) + E_{z(k)}w(k)\right)^T\\
&\qquad \times\left(\mathscr{C}_{z(k)}x(k) + E_{z(k)}w(k)\right)\Big\} - \Big\{\varphi^{-1}w(k)^Tw(k)\Big\} < 0.
\end{aligned} \tag{282}$$

Assim, da notação definida em (276) e de (282), para $x(k) \in \Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0\right)\setminus\{0\}$ e $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$, segue que

$$\Delta V(x(k)) + \varphi^{-1}\tau^{-1}y^T(k)y(k) - \varphi^{-1}w^T(k)w(k) < 0. \tag{283}$$

Logo, para todo $k \geq 0$,

$$\Delta V(x(k)) - \varphi^{-1}w^T(k)w(k) < -\varphi^{-1}\tau^{-1}y^T(k)y(k) = -\varphi^{-1}\tau^{-1}\|y(k)\|^2 \leq 0. \tag{284}$$

Em (284), somando k de 0 até k^*-1, sendo $k^* > 0$ um instante arbitrário, tem-se

$$\sum_{k=0}^{k^*-1}\Big\{\Delta V(x(k)) - \varphi^{-1}w(k)^Tw(k)\Big\} < 0. \tag{285}$$

Desenvolvendo a somatória em (285), obtém-se

$$
\begin{aligned}
&(V(x(1))-V(x(0)))+(V(x(2))-V(x(1)))+\cdots+(V(x(k^*-1))-V(x(k^*-2)))\\
&\qquad +(V(x(k^*))-V(x(k^*-1)))-\varphi^{-1}\sum_{k=0}^{k^*-1}w^T(k)w(k)<0\\
&\qquad\qquad \iff V(x(k^*))<V(x(0))+\varphi^{-1}\sum_{k=0}^{k^*-1}w(k)^Tw(k). \qquad (286)
\end{aligned}
$$

Como $w^T(k)w(k)\geq 0$ para qualquer $k\geq 0$, tem-se de (286), que

$$
V(x(k^*))<V(x(0))+\varphi^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}w^T(k)w(k), \qquad (287)
$$

sendo $k^*>0$, um instante arbitrário.

Da desigualdade (287), para $x(0)\in\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0\right)$ e $w(k)\in\mathscr{W}_\gamma$, ou seja, $\sum_{k=0}^{\infty}w^T(k)w(k)<\gamma$, segue que

$$
V(x(k^*))<V(x(0))+\varphi^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}w^T(k)w(k)\leq\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma, \qquad (288)
$$

para qualquer $k^*>0$.

Portanto de (288), segue que qualquer trajetória iniciada em $x(0)\in\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0\right)$, permanecerá dentro do conjunto elipsoidal $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)\backslash\partial\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$, por todo tempo futuro.

- Terceira propriedade

Da Segunda propriedade, se $x(0)=0$ e $w(k)\in\mathscr{W}_\gamma$, então $x(k)\in\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\varphi^{-1}\gamma\right)\subseteq\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$, para todo $k\geq 0$. Assim, considerando a candidata a função de Lyapunov (16) e o sistema em malha fechada (265), da desigualdade (282), segue que

$$
\Delta V(x(k))+\varphi^{-1}\tau^{-1}y^T(k)y(k)-\varphi^{-1}w^T(k)w(k)<0, \qquad (289)
$$

para todo $x(k)\in\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\varphi^{-1}\gamma\right)\backslash\{0\}$ e $w(k)\in\mathscr{W}_\gamma$.

Em (289), somando k de 0 até ∞, obtém-se

$$
\begin{aligned}
&(V(x(1))-V(x(0)))+(V(x(2))-V(x(1)))+\cdots+(V(x(k^*-1))-V(x(k^*-2)))\\
&\quad +(V(x(k^*))-V(x(k^*-1)))+\cdots+\varphi^{-1}\tau^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}y^T(k)y(k)-\varphi^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}w^T(k)w(k)<0.
\end{aligned}
\qquad (290)
$$

Então, de (290), obtém-se

$$\varphi^{-1}\tau^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} y^T(k)y(k) - \varphi^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k) < -V(x(\infty)) + V(x(0)) < V(x(0)) = 0. \quad (291)$$

Multiplicando $\varphi\tau$ em (291), segue que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} y^T(k)y(k) < \tau\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k) \\ &\iff \|y(k)\|_2^2 < \tau\|w(k)\|_2^2, \end{aligned} \quad (292)$$

ou seja, o sistema realimentado (265) possui um custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ igual $\varepsilon = \sqrt{\tau}$.

Por fim, do Lema 9, segue que a condição LMI dada em (234), assegura $\mathcal{B} \subset \Omega\Big(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\Big)$, sendo $\mathcal{B}$ dado em (143). Logo, a maximização do $Tr(\Pi - \tau)$, proporciona uma estimativa do DA, $\Omega\Big(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\Big)$, menos conservadora, além de minimizar o custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, $\varepsilon = \sqrt{\tau}$. ■

5.3.1 Análise de estabilidade

O seguinte teorema apresenta uma análise teórica da estabilidade que compara o procedimento proposto no Teorema 15, que utiliza a lei de controle chaveada (17), com o procedimento apresentado no Corolário 3, que utiliza um controlador linear invariante no tempo dado em (38). É provado que se as condições LMIs de estabilidade para o sistema em malha fechada com um controlador invariante no tempo são satisfeitas, então as condições LMIs de estabilidade, obtidas utilizando a lei de controle chaveada também são satisfeitas.

Teorema 16. *Suponha que as condições do Corolário 3,* (228), (234), (266)-(269) *relacionadas ao sistema* (265) *com a lei de controle* (38), *sejam satisfeitas, para* ϕ_i, $i \in \mathbb{K}_r$, *suficientemente pequenos. Então, condições do Teorema 15,* (228)-(234), *relacionadas ao sistema* (225) *com a lei de controle chaveada* (17), *também são satisfeitas.*

Demonstração:

Suponha que as condições (228), (234), (266)-(269), do Corolário 3 sejam satisfeitas para todo i, $j \in \mathbb{K}_r$, $c \in \mathbb{K}_{n_u}$, $\eta \in \mathbb{K}_q$, $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$ e $m \in \mathbb{K}_{n_L}$.

Defina $S_{ijs} \in \mathbb{R}^{(2n_x+n_y+n_w)\times(2n_x+n_y+n_w)}$, dada por

$$
S_{ijs} = \begin{bmatrix} G+G^T-P_j & 0 & A_iG-B_i\mathscr{D}_sF+B_i\mathscr{D}_s^-N & H_i \\ 0 & \varphi\tau I & C_iG-D_i\mathscr{D}_sF+D_i\mathscr{D}_s^-N & E_i \\ \left(A_iG-B_i\mathscr{D}_sF+B_i\mathscr{D}_s^-N\right)^T & \left(C_iG-D_i\mathscr{D}_sF+D_i\mathscr{D}_s^-N\right)^T & P_i & 0 \\ H_i^T & E_i^T & 0 & \varphi^{-1}I \end{bmatrix}, \tag{293}
$$

para todo $i,\ j \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$.

De (269), segue que os autovalores de S_{ijs}, definidos como $\lambda_{(S_{ijs})}$, são maiores do que zero, para todo $i,\ j \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$. Em particular, os autovalores mínimo e máximo de S_{ijs}, definidos como $\lambda_{\min(S_{ijs})}$ e $\lambda_{\max(S_{ijs})}$, respectivamente, são também maiores que zero.

Considere um escalar positivo ε, tal que

$$
0 < \varepsilon < \lambda_{\min(S_{ijs})}, \qquad \forall\ i,\ j \in \mathbb{K}_r \text{ e } s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}} \tag{294}
$$

e matrizes $\Theta \in \mathbb{R}^{(2n_x+n_y+n_w)\times(2n_x+n_y+n_w)}$ e $\Xi \in \mathbb{R}^{(2n_x+n_y+n_w)\times(2n_x+n_y+n_w)}$, dadas por

$$
\Theta = \begin{bmatrix} \varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Xi = \begin{bmatrix} \varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon I \end{bmatrix}. \tag{295}
$$

Defina $\bar{x}(k) \in \mathbb{R}^{(2n_x+n_y+n_w)}$ e considere $\|\bar{x}(k)\|^2 = \bar{x}(k)^T\bar{x}(k)$, a norma ao quadrado do vetor $\bar{x}(k)$. Para $\bar{x}(k) \neq 0$,

$$
0 < \lambda_{\min(S_{ijs})}\|\bar{x}(k)\|^2 \leq \bar{x}^T(k)S_{ijs}\bar{x}(k) \leq \lambda_{\max(S_{ijs})}\|\bar{x}(k)\|^2. \tag{296}
$$

De (294), (295) e (296), segue que

$$
\begin{aligned}
\bar{x}^T(k)\Big\{S_{ijs}-\Xi\Big\}\bar{x}(k) &= \bar{x}^T(k)S_{ijs}\bar{x}(k) - \bar{x}^T(k)\Xi\bar{x}(k) \\
&= \bar{x}^T(k)S_{ijs}\bar{x}(k) - \varepsilon\|\bar{x}(k)\|^2 \\
&> \bar{x}^T(k)S_{ijs}\bar{x}(k) - \lambda_{\min(S_{ijs})}\|\bar{x}(k)\|^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned} \tag{297}
$$

Logo, de (297), tem-se

$$\bar{x}^T(k)\Big\{S_{ijs}-\Theta\Big\}\bar{x}(k) \geq \bar{x}^T(k)\Big\{S_{ijs}-\Xi\Big\}\bar{x}(k) > 0. \tag{298}$$

Portanto, de (293), (295) e (298), segue que

$$\begin{bmatrix} G+G^T-(P_j+\varepsilon I) & 0 & A_iG-B_i\mathscr{D}_sF+B_i\mathscr{D}_s^-N & H_i \\ 0 & \varphi\tau I & C_iG-D_i\mathscr{D}_sF+D_i\mathscr{D}_s^-N & E_i \\ \Big(A_iG-B_i\mathscr{D}_sF+B_i\mathscr{D}_s^-N\Big)^T & \Big(C_iG-D_i\mathscr{D}_sF+D_i\mathscr{D}_s^-N\Big)^T & P_i-\varepsilon I & 0 \\ H_i^T & E_i^T & 0 & \varphi^{-1}I \end{bmatrix} > 0, \tag{299}$$

para todo $i,\ j \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$.

De (294) e (299), considerando $F_l = F$, $N_l = N$, $Z_{it} = P_i - \varepsilon I$ e $Q_l = 0$, para todo i, $l \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$, segue que

$$\begin{bmatrix} G+G^T-(P_j+\varepsilon I) & 0 & A_iG-B_i\mathscr{D}_sF_l+B_i\mathscr{D}_s^-N_l & H_i \\ 0 & \varphi\tau I & C_iG-D_i\mathscr{D}_sF_l+D_i\mathscr{D}_s^-N_l & E_i \\ \Big(A_iG-B_i\mathscr{D}_sF_l+B_i\mathscr{D}_s^-N_l\Big)^T & \Big(C_iG-D_i\mathscr{D}_sF_l+D_i\mathscr{D}_s^-N_l\Big)^T & Z_{it}+Q_l & 0 \\ H_i^T & E_i^T & 0 & \varphi^{-1}I \end{bmatrix} > 0 \tag{300}$$

e

$$Z_{it}+Q_i-P_i = (P_i-\varepsilon I)+0-P_i = -\varepsilon I \leq 0. \tag{301}$$

Além disso, considerando $F_l = F$, $N_l = N$, as condições (229), (230) e (231) do Teorema 15, coincidem, respectivamente, com as LMIs (266), (267) e (268) do Corolário 3.

Considerando (67), sem perda de generalidade, suponha a variável de folga $H = 0$. Assim, como $\phi_i > 0$ e $P_i > 0$, de (67), segue que

$$\Gamma_{2^r} = \sum_{i=1}^{r}\phi_iP_i > 0, \tag{302}$$

e

$$\Gamma_{2^r} \geq \Gamma_1,\ \Gamma_{2^r} \geq \Gamma_2,\ \cdots,\ \Gamma_{2^r} \geq \Gamma_{2^r-1}. \tag{303}$$

Portanto, de (302), segue que

$$\begin{aligned}
0 < \Gamma_{2^r} &= \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + \cdots + \phi_{r-1} P_{r-1} + \phi_r P_r \\
&\leq \phi_{max} P_1 + \phi_{max} P_2 + \cdots + \phi_{max} P_{r-1} + \phi_{max} P_r \\
&= \phi_{max}\left(P_1 + P_2 + \cdots + P_{r-1} + P_r\right) \\
&= \phi_{max}\mathscr{P},
\end{aligned} \tag{304}$$

sendo $\phi_{max} = max\{\phi_i :\ i \in \mathbb{K}_r\}$ e $\mathscr{P} = \sum_{i=1}^{r} P_i$.

De (304), como $0 < \phi_{max} \leq 1$, segue que o mínimo e o máximo autovalor de $\mathscr{P}$, definidos como $\lambda_{\min(\mathscr{P})}$ e $\lambda_{\max(\mathscr{P})}$, respectivamente, são também maiores que zero.

Então, considerando $0 < \phi_{max} \leq \dfrac{\varepsilon}{\lambda_{\max(\mathscr{P})}}$ e $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$, de (294) e (304), segue que

$$\begin{aligned}
x^T(k)\Big\{\Gamma_{2^r} - \varepsilon I\Big\}x(k) &= x^T(k)\Gamma_{2^r}x(k) - \varepsilon\|x(k)\|^2 \\
&\leq x^T(k)\phi_{max}\mathscr{P}x(k) - \varepsilon\|x(k)\|^2 \\
&= \phi_{max}x^T(k)\mathscr{P}x(k) - \varepsilon\|x(k)\|^2 \\
&\leq \phi_{max}\lambda_{\max(\mathscr{P})}\|x(k)\|^2 - \varepsilon\|x(k)\|^2 \\
&= \Big(\phi_{max}\lambda_{\max(\mathscr{P})} - \varepsilon\Big)\|x(k)\|^2 \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max(\mathscr{P})}}\lambda_{\max(\mathscr{P})} - \varepsilon\right)\|x(k)\|^2 = 0.
\end{aligned} \tag{305}$$

Logo, de (303) e (305), para todo $t \in \mathbb{K}_{2^r}$, tem-se

$$\Gamma_t - \varepsilon I \leq 0. \tag{306}$$

Portanto, de (300) e (306), obtém-se, para todo $i,\ j,\ l \in \mathbb{K}_r$, $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$ e $t \in \mathbb{K}_{2^r}$,

$$\begin{bmatrix}
G + G^T - (P_j + \Gamma_t) & 0 & A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^-N_l & H_i \\
0 & \varphi\tau I & C_iG - D_i\mathscr{D}_sF_l + D_i\mathscr{D}_s^-N_l & E_i \\
\Big(A_iG - B_i\mathscr{D}_sF_l + B_i\mathscr{D}_s^-N_l\Big)^T & \Big(C_iG - D_i\mathscr{D}_sF_l + D_i\mathscr{D}_s^-N_l\Big)^T & Z_{it} + Q_l & 0 \\
H_i^T & E_i^T & 0 & \varphi^{-1}I
\end{bmatrix} > 0. \tag{307}$$

Como (307) é valida para todo $i,\ j,\ l \in \mathbb{K}_r$, $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$ e $t \in \mathbb{K}_{2^r}$, em particular, (307) é válida para $i = j$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} G+G^T-(P_i+\Gamma_t) & 0 & A_iG-B_i\mathscr{D}_sF_l+B_i\mathscr{D}_s^-N_l & H_i \\ 0 & \varphi\tau I & C_iG-D_i\mathscr{D}_sF_l+D_i\mathscr{D}_s^-N_l & E_i \\ \left(A_iG-B_i\mathscr{D}_sF_l+B_i\mathscr{D}_s^-N_l\right)^T & \left(C_iG-D_i\mathscr{D}_sF_l+D_i\mathscr{D}_s^-N_l\right)^T & Z_{it}+Q_l & 0 \\ H_i^T & E_i^T & 0 & \varphi^{-1}I \end{bmatrix} > 0, \tag{308}$$

Note que, (301) e (308) são equivalentes as condições (233) e (232) do Teorema 15, respectivamente. Portanto, todas as condições do Teorema 15 são satisfeitas.

■

Observação 19. *Valores suficientemente pequenos para* ϕ_i, $i \in \mathbb{K}_r$, *correspondentes ao enunciado do Teorema 16, são dados por* $0 < \phi_i < \dfrac{\lambda_{\min(S_{ijs})}}{\lambda_{\max(\mathscr{P})}}$, *para todo* $i,\ j \in \mathbb{K}_r$ *e* $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$, *sendo* $\lambda_{\min(S_{ijs})}$ *e* $\lambda_{\max(\mathscr{P})}$ *os máximos autovalores de* S_{ijs}, *definida em* (293), *e de* $\mathscr{P} = \sum_{i=1}^{r} P_i$, *respectivamente.*

5.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para ilustrar a eficiência do método proposto no Teorema 15, exemplos numéricos e uma implementação prática em um sistema de suspensão ativa, são apresentados:

Exemplo 7. *(Exemplo comparativo) Considere o sistema não linear exibido no Exemplo 2 (GUERRA; VERMEIREN, 2004), sujeito a um distúrbio externo, como apresentado em (ZHOU; LAM; ZHENG, 2007), e sujeito à saturação:*

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - x_1(k)x_2(k) + (5+x_1(k))sat(u(k)) - 0{,}03w_1(k) + 0{,}01w_2(k), \\ x_2(k+1) &= -x_1(k) - 0{,}5x_2(k) + 2x_1(k)sat(u(k)) + 0{,}01w_2(k), \\ y(k) &= -0{,}1x_1(k) - 0{,}05x_2(k) + 0{,}5sat(u(k)) + 0{,}01w_1(k) + 0{,}01w_2(k). \end{aligned} \tag{309}$$

Sob a suposição de que $x_1(k) \in [-\beta,\ \beta]$, $\beta > 0$, *ou seja, considerando a região de operação* $\mathcal{L}$, *descrita em* (199), *as matrizes dos modelos locais do sistema fuzzy T-S* (224), *com* $r = 2$, *que representa o sistema não linear* (309), *são dadas por:*

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -1 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 5+\beta \\ 2\beta \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 5-\beta \\ -2\beta \end{bmatrix},\\
&H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} -0{,}03 & 0{,}01 \\ 0 & -0{,}01 \end{bmatrix}, \quad C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} -0{,}1 & -0{,}05 \end{bmatrix},\\
&D_1 = D_2 = 0{,}5, \quad E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}01 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{310}
$$

Neste exemplo, diferentes valores para o parâmetro β, *são utilizados para realização de uma comparação entre o desempenho* $\mathscr{H}_\infty$ *proporcionado pelo Teorema 15 e pelo Corolário 3.*

- *Minimizando* τ*:*

Inicialmente, com o objetivo de encontrar o mínimo valor do custo $\mathscr{H}_\infty$, $\varepsilon = \sqrt{\tau}$, *que os projetos propostos no Teorema 15 e no Corolário 3 possam propiciar, o problema de maximização de* $Tr(\Pi) - \tau$ *foi substituído pela minimização de* τ, *como descrito na Observação 17.*

Supondo o distúrbio com energia limitada $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$, *de acordo com* (226), *com* $\gamma = 1$, $\varphi = 1$ *e* $\gamma_0 = 0{,}5\gamma/\varphi$ *e considerando o sinal de controle sujeito à saturação, com* $\rho = 1$, *e as funções de pertinência dadas em* (198) *no Exemplo 2, tais que* $\nabla h_1(z(k)) = \dfrac{\partial h_1(z(k))}{\partial x_1(k)} = \dfrac{1}{2\beta}$, $\nabla h_2(z(k)) = \dfrac{\partial h_2(z(k))}{\partial x_1(k)} = -\dfrac{1}{2\beta}$ *e* $\|\Delta h_1(z(k))\| \leq \phi_i = 0{,}1$, $i \in \mathbb{K}_2$, *o limite* $\bar{x}_1 = \beta$, *para a variável de estado* $x_1(k)$, *como descrito na região de operação* $\mathcal{L}$ *dada em* (199), *foi adotado para a aplicação do Teorema 15 e do Corolário 3, assim como os vetores relacionados à expansão da estimativa do DA* $w_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = -w_1$, $w_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $w_4 = -w_3$ *e* $\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

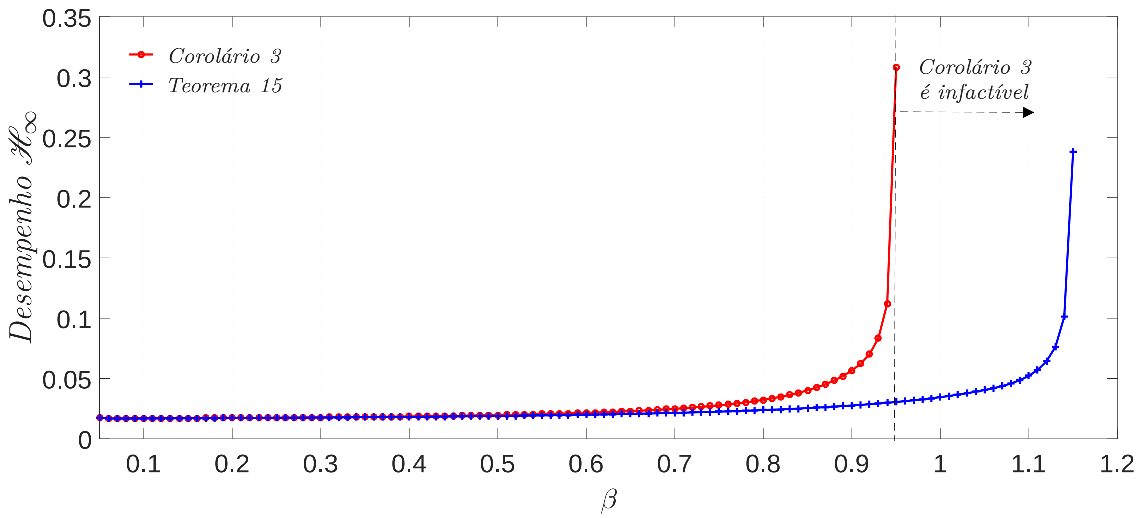
Para diferentes valores de β, *a Tabela 5 apresenta os custos garantidos* $\mathscr{H}_\infty$, $\varepsilon = \sqrt{\tau}$, *obtidos com o Teorema 15 e com o Corolário 3, minimizando a variável* τ, *como descrito na Observação 17. A Figura 26 mostra que o Teorema 15, que utiliza o controlador chaveado* (17), *apresenta um desempenho* $\mathscr{H}_\infty$ *melhor ou igual ao procedimento apresentado no Corolário 3, que utiliza um controlador linear invariante no tempo. Para* $\beta > 0{,}9514$, *não é possível encontrar solução factível para o Corolário 3, enquanto que com o Teorema 15, não é possível encontrar solução factível para* $\beta > 1{,}152$.

Tabela 5 - Custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ calculado com o Teorema 15 e com o Corolário 3, para diferentes β.

β	*Teorema 15:* $\varepsilon = \sqrt{\tau}$	*Corolário 3:* $\varepsilon = \sqrt{\tau}$
0,05	0,0174	0,0175
0,1	0,0169	0,0169
0,5	0,0189	0,0196
0,8	0,0238	0,0323
0,95	0,0305	0,3082
1	0,0345	*infactível*
1,15	0,2382	*infactível*

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 26 - Comparação entre os custos garantido $\mathscr{H}_\infty$ proporcionados pelo Teorema 15 e o Corolário 3, para diferentes valores de β.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

- *Maximizando* $Tr(\Pi) - \tau$*:*

Agora, considere os problemas de otimização originais, baseados na maximização de $Tr(\Pi) - \tau$*, propostos no Teorema 15 e no Corolário 3, suponha* $\gamma = 1$*,* $\varphi = 1$ *e* $\gamma_0 = 0{,}5\gamma/\varphi$*,*

$\rho = 1$, $\phi_i = 0{,}2$, $i \in \mathbb{K}_2$, $\bar{x}_1 = \beta$, $w_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = -w_1$, $w_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $w_4 = -w_3$ e $\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, e considere as funções de pertinência dadas em (198) *no Exemplo 2, tais que $\nabla h_1(z(k)) = \frac{1}{2\beta}$, $\nabla h_2(z(k)) = -\frac{1}{2\beta}$, como no caso anterior. A Tabela 6 apresenta os custos garantidos $\mathscr{H}_\infty$ e os valores de ϖ_i, $i \in \mathbb{K}_4$, que estão relacionados com o tamanho da estimativa do DA, para determinados valores de β. Note que, os valores de ϖ_i, $i \in \mathbb{K}_4$, exibidos na Tabela 6, sugerem que as estimativas do DA obtidas com o procedimento proposto no Teorema 15, são maiores do que as estimativas obtidas com o Corolário 3, para cada valor de β.*

Tabela 6 - Custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ e ϖ_i, $i \in \mathbb{K}_4$, calculados com o Teorema 15 e com o Corolário 3, para diferentes β.

	Teorema 15			Corolário 3		
β	$\varepsilon = \sqrt{\tau}$	$\varpi_1 = \varpi_2$	$\varpi_3 = \varpi_4$	$\varepsilon = \sqrt{\tau}$	$\varpi_1 = \varpi_2$	$\varpi_3 = \varpi_4$
0,05	0,1438	0,0490	0,5649	0,1414	0,0499	0.5366
0,1	0,1861	0,0973	0,8129	0,1823	0,0997	0,7805
0,5	0,1954	0,4838	0,6641	0,2134	0,4887	0,6499
0,8	0,1369	0,2077	0,2030	0,1361	0,1940	0,2091
0,95	0,1083	0,1446	0,1248	0,3088	0,1153	0,1137
1	0,1024	0,1295	0,1066	infactível	–	–
1,15	0,2391	0,0793	0,0690	infactível	–	–

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Considerando $\beta = 0{,}95$, o seguinte conjunto de ganhos do controlador $F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$, e matrizes simétricas positivas definidas P_i, $i \in \mathbb{K}_2$, foram obtidos resolvendo o problema de otimização proposto no Teorema 15:

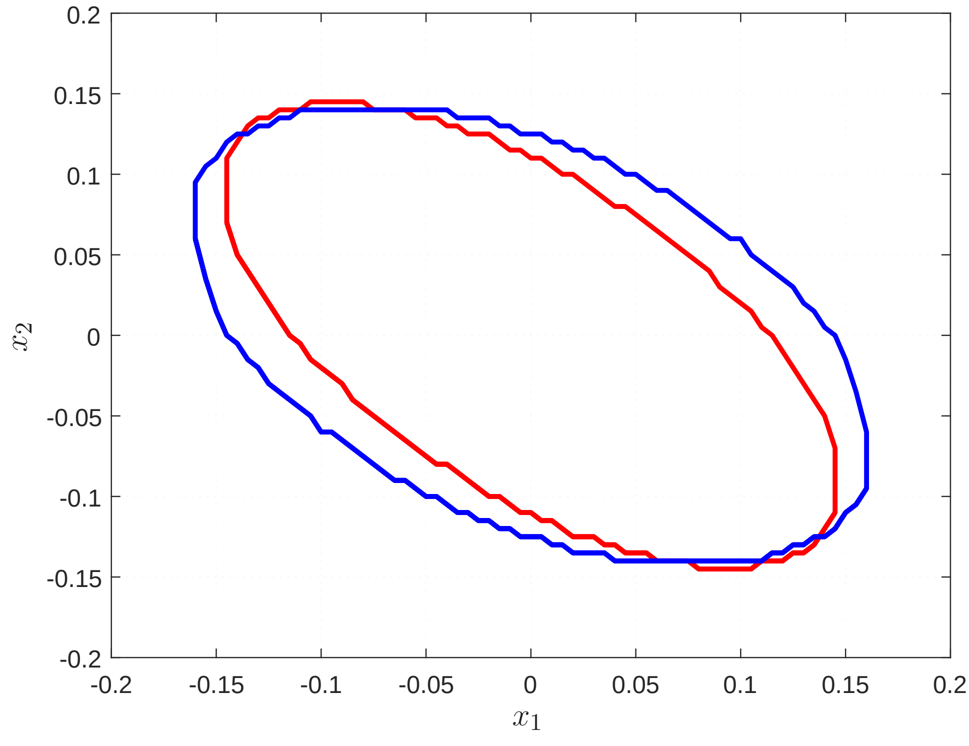
$$F_1 G^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}0965 & 0{,}0594 \end{bmatrix}, \; F_2 G^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}0967 & 0{,}0588 \end{bmatrix},$$
$$P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0176 & -0{,}0071 \\ -0{,}0071 & 0{,}0118 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}0169 & -0{,}0082 \\ -0{,}0082 & 0{,}0197 \end{bmatrix}. \tag{311}$$

Resolvendo o problema de otimização apresentado no Corolário 3, o seguinte ganho *do controlador* FG^{-1} *e matrizes simétricas positivas definidas* P_i, $i \in \mathbb{K}_2$, *foram obtidos:*

$$FG^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}0948 & 0{,}0524 \end{bmatrix}, \; P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0146 & -0{,}0090 \\ -0{,}0090 & 0{,}0142 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}0146 & -0{,}0090 \\ -0{,}0090 & 0{,}0142 \end{bmatrix}. \tag{312}$$

Utilizando os ganhos apresentados em (311) *e* (312)*, a Figura 27 mostra as estimativas,* $\bigcap_{i=1}^{2} \Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)$*, do DA obtidas com o Teorema 15 e com o Corolário 3. Note que, o conjunto elipsoidal em vermelho, obtido com o Corolário 3, está quase que inteiramente contido no conjunto elipsoidal azul, obtido com o Teorema 15. Para* $\beta = 0{,}95$*, o Teorema 15, proporciona um custo garantido* $\mathscr{H}_\infty$, $\varepsilon = 0{,}1083$*, enquanto que o Corolário 3, fornece um custo* $\varepsilon = 0{,}3088$*. Portanto, além de proporcionar uma melhor atenuação dos efeitos de um distúrbio externo, o Teorema 15 propicia uma estimativa menos conservadora do DA.*

Figura 27 - Estimativas do DA obtidas utilizando o Teorema 15 (conjunto elipsoidal azul) e o Corolário 3 (conjunto elipsoidal vermelho), com $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $\varphi = 1$, $\gamma_0 = \frac{0{,}5\gamma}{\varphi}$ e $\beta = 0{,}95$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Exemplo 8. *Baseado em (LO; LIN, 2003; WU; CAI, 2006; TANAKA; WANG, 2001b; KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015), considere o problema de controle de backing-up* *a Truck-Trailer, descrito pelo seguinte sistema não linear incerto discreto no tempo:*

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= \left(1 - \frac{bT_s}{L} + v_1\right) x_1(k) + \frac{bT_s}{l} u(k) \\
x_2(k+1) &= x_2(k) + \frac{bT_s}{L} x_1(k) + 0{,}2w(k) \\
x_3(k+1) &= x_3(k) + bT_s \mathrm{sen}\left(x_2(k) + \frac{bT_s}{2L} x_1(k)\right) + 0{,}1w(k) \\
y(k) &= 7x_1(k) - bT_s x_2(k) + 0{,}03x_3(k) - \frac{bT_s}{l} u(k),
\end{aligned} \tag{313}$$

em que, baseado em (WU; CAI, 2006), o parâmetro incerto invariante no tempo v_1*, foi acrescentado ao sistema original,* $l = 2{,}8m$*, é o comprimento do veículo,* $L = 5{,}5m$*, é o comprimento do trailer,* $b = -1{,}0m/s$*, é a velocidade constante de ré do veículo e* $T_s = 2{,}0s$*, é o tempo de amostragem adotado.*

Devido à limitação física do sistema, tal como o "efeito canivete", que ocorre quando $x_1(k) = \pm\frac{\pi}{2}$*, considere a região de operação* $\mathcal{L}$ *descrita em* (9)*, dado por (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015):*

$$\mathcal{L} = \left\{ x(k) \in \mathbb{R}^3 : \ -\frac{\pi}{3} \leq x_1(k) \leq \frac{\pi}{3}, \ -\frac{17\pi}{18} \leq x_2(k) \leq \frac{17\pi}{18} \right\}. \tag{314}$$

Baseado em (WU; CAI, 2006), considere que o parâmetro incerto v_1 *é tal que* $|v_1| \leq 0{,}3$*. Dessa forma, o conjunto compacto* $\mathcal{V}$ *descrito em* (8)*, é dado por:*

$$\mathcal{V} = \{ v_1 \in \mathbb{R} : \ -0{,}3 \leq v_1 \leq 0{,}3 \}. \tag{315}$$

Portanto o conjunto $\mathcal{Z}$ *apresentado em* (11)*, em que o sistema não linear* (313) *pode ser representado pelo modelo fuzzy T-S* (223)*, é definido por:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} = \Big\{ z(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) & z_2(k) & z_3(k) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & v_1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{\pi}{3} \leq x_1(k) \leq \frac{\pi}{3}, \\
-\frac{17\pi}{18} \leq x_2(k) \leq \frac{17\pi}{18}, \ -0{,}3 \leq v_1 \leq 0{,}3 \Big\}.
\end{aligned} \tag{316}$$

Seja $\theta(k) = x_2(k) + \frac{bT}{2L} x_1(k)$*, então para* $z(k) \in \mathcal{Z}$*,* $\frac{199\pi}{198} \leq \theta(k) \leq \frac{199\pi}{198}$*. Assim, utilizando o procedimento apresentado em (TANAKA; WANG, 2001b), o termo não linear* $f(z(k)) = \mathrm{sen}\,(\theta(k))$*, pode ser representado da seguinte forma:*

$$f(z(k)) = \mathrm{sen}(\theta(k)) = \xi^1(z(k))\theta(k) + \xi^2(z(k))\theta(k)g, \tag{317}$$

sendo $g = \dfrac{10^{-2}}{\pi}$,

$$\xi^1(z(k)) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(\theta(k)) - g\theta(k)}{\theta(k)(1-g)}, & se\ \theta(k) \neq 0 \\ 1, & se\ \theta(k) = 0, \end{cases}$$

$$\xi^2(z(k)) = \begin{cases} \dfrac{\theta(k) - \text{sen}(\theta(k))}{\theta(k)(1-g)}, & se\ \theta(k) \neq 0 \\ 0, & se\ \theta(k) = 0. \end{cases} \tag{318}$$

Por outro lado, considerando as metodologias apresentadas em (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM et al., 2012; ALVES, 2017), o termo incerto v_1*, do sistema* (313)*, pode ser representado como segue:*

$$v_1 = z_3(k) = \alpha^1(z(k))(-0{,}3) + \alpha^2(z(k))(0{,}3), \tag{319}$$

em que

$$\alpha^1(z(k)) = \frac{0{,}3 - v_1}{0{,}6}, \quad \alpha^2(z(k)) = \frac{v_1 - 0{,}3}{0{,}6}. \tag{320}$$

Então, baseado em (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM et al., 2012; ALVES, 2017), de (318) *e* (320)*, as funções de pertinência, que dependem do parâmetro incerto* v_1*, podem ser expressas como:*

$$h_1(z(k)) = \alpha^1(z(k))\xi^1(z(k)) = \begin{cases} \dfrac{(0{,}3 - v_1)(\text{sen}(\theta(k)) - g\theta(k))}{(0{,}6)\theta(k)(1-g)}, & se\ \theta(k) \neq 0 \\ \dfrac{0{,}3 - v_1}{0{,}6}, & se\ \theta(k) = 0 \end{cases}$$

$$h_2(z(k)) = \alpha^1(z(k))\xi^2(z(k)) = \begin{cases} \dfrac{(0{,}3 - v_1)(\theta(k) - \text{sen}(\theta(k)))}{(0{,}6)\theta(k)(1-g)}, & se\ \theta(k) \neq 0 \\ 0, & se\ \theta(k) = 0 \end{cases}$$

$$h_3(z(k)) = \alpha^2(z(k))\xi^1(z(k)) = \begin{cases} \dfrac{(v_1 + 0{,}3)(\text{sen}(\theta(k)) - g\theta(k))}{(0{,}6)\theta(k)(1-g)}, & se\ \theta(k) \neq 0 \\ \dfrac{v_1 + 0{,}3}{0{,}6}, & se\ \theta(k) = 0 \end{cases}$$

$$h_4(z(k)) = \alpha^2(z(k))\xi^2(z(k)) = \begin{cases} \dfrac{(v_1 + 0{,}3)(\theta(k) - \text{sen}(\theta(k)))}{(0{,}6)\theta(k)(1-g)}, & se\ \theta(k) \neq 0 \\ 0, & se\ \theta(k) = 0. \end{cases} \tag{321}$$

Note em (321)*, que* $h_i(z(k)) \geq 0$ *e* $\sum_{i=1}^{4} h_i(z(k)) = 1$.

Considerando a região $\mathcal{Z}$ *dada em* (316)*, as matrizes dos modelos locais do sistema* *fuzzy T-S (224), que representa o sistema não linear incerto (313), são dadas por:*

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \begin{bmatrix} 1-\frac{bT_s}{L}-0{,}3 & 0 & 0 \\ \frac{bT_s}{L} & 1 & 0 \\ \frac{b^2T_s^2}{2L}g & bT_sg & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1-\frac{bT_s}{L}+0{,}3 & 0 & 0 \\ \frac{bT_s}{L} & 1 & 0 \\ \frac{b^2T_s^2}{2L}g & bT_sg & 1 \end{bmatrix},\\
&A_3 = \begin{bmatrix} 1-\frac{bT_s}{L}-0{,}3 & 0 & 0 \\ \frac{bT_s}{L} & 1 & 0 \\ \frac{b^2T_s^2}{2L} & bT_sg & 1 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 1-\frac{bT_s}{L}+0{,}3 & 0 & 0 \\ \frac{bT_s}{L} & 1 & 0 \\ \frac{b^2T_s^2}{2L} & bT_sg & 1 \end{bmatrix},\\
&B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} \frac{bT_s}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,\ \ H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}^T,\\
&C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \begin{bmatrix} 7 & bT_s & 0{,}03 \end{bmatrix}^T,\ D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = -\frac{bT_s}{l},\\
&E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 0. \qquad (322)
\end{aligned}
$$

Sendo $z(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) & z_2(k) & z_3(k) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & v_1 \end{bmatrix}^T$*, para aplicação do Teorema 15, baseado em (LEE; JOO, 2014), considere*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_1(k)} &= \frac{1}{(5{,}50001x_2(k)-x_1(k))^2}\Big((9{,}19595v_1-2{,}75878)\mathrm{sen}(-\theta(k))\\
&\quad +(x_1(k)(0{,}501597-1{,}67199v_1)+x_2(k)(9{,}19595v_1-2{,}75878))\cos(-\theta(k))\\
&\quad +10^{-18}x_2(k)(1{,}84648-3{,}69295v_1)\Big)\\
\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_2(k)} &= \frac{1}{(5{,}50001x_2(k)-x_1(k))^2}\Big((15{,}1733-50{,}5778v_1)\mathrm{sen}(-\theta(k))\\
&\quad +(x_2(k)(15{,}1733-50{,}5778v_1)+x_1(k)(9{,}19595v_1-2{,}75878))\cos(-\theta(k))\\
&\quad 10^{-18}(x_1(k)(-4.41744v_1+2{,}20872)+x_2(k)(35{,}3395v_1-8{,}83487))\Big),\\
\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_3(k)} &= \frac{-9.19595\mathrm{sen}(-\theta(k))+0.00532211x_1(k)-0.0292716x_2(k)}{x_1(k)-5.50001x_2(k)},\\
\frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_1(k)} &= \frac{1}{(5{,}50001x_2(k)-x_1(k))^2}\Big((2{,}75878-9{,}19595v_1)\mathrm{sen}(-\theta(k))\\
&\quad +(x_2(k)(2{,}75878-9{,}19595v_1)+x_1(k)(1{,}67199v_1-0{,}501597))\cos(-\theta(k))\Big),\\
\frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_2(k)} &= \frac{9{,}19595(0{,}3-v_1)((x_1(k)-5{,}50001x_2(k))\cos(-\theta(k))-5{,}50001\mathrm{sen}(-\theta(k)))}{(5{,}50001x_2(k)-x_1(k))^2},\\
\frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_3(k)} &= -\frac{1{,}67199(\mathrm{sen}(-\theta(k))+\theta(k))}{\theta(k)},\\
\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_1(k)} &= \frac{1}{(5{,}50001x_2(k)-x_1(k))^2}\Big((-9{,}19595v_1-2{,}75878)\mathrm{sen}(-\theta(k))\\
&\quad +(x_1(k)(1{,}67199v_1+0{,}501597)+x_2(k)(-9{,}19595v_1-2{,}75878))\cos(-\theta(k))\\
&\quad +10^{-18}x_2(k)(3.69295v_1+1.84648)\Big),\\
\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_2(k)} &= \frac{1}{(5{,}50001x_2(k)-x_1(k))^2}\Big((50{,}5778v_1+15{,}1733)\mathrm{sen}(-\theta(k))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + (x_1(k)(-9{,}19595v_1 - 2{,}75878) + x_2(k)(50{,}5778v_1 + 15{,}1733))\cos(-\theta(k)) \\
&\qquad + 10^{-18}(x_1(k)(4{,}41744v_1 + 2{,}20872) + x_2(k)(-35{,}3395v_1 - 8{,}83487))\Big), \\
\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_3(k)} &= \frac{9.19595\text{sen}(-\theta(k)) - 0.00532211x_1(k) + 0.0292716x_2(k)}{x_1(k) - 5.50001x_2(k)}, \\
\frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_1(k)} &= \frac{1}{(5{,}50001x_2(k) - x_1(k))^2}\Big((9{,}19595v_1 + 2{,}75878)\text{sen}(-\theta(k)) \\
&\quad + (x_2(k)(9{,}19595v_1 + 2{,}75878) + x_1(k)(-1{,}67199v_1 - 0{,}501597))\cos(-\theta(k))\Big), \\
\frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_2(k)} &= \frac{9{,}19595(v_1 + 0{,}3)((x_1(k) - 5{,}50001x_2(k))\cos(-\theta(k)) - 5{,}50001\text{sen}(-\theta(k)))}{(5{,}50001x_2(k) - x_1(k))^2}, \\
\frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_3(k)} &= -\frac{1{,}67199(\text{sen}(-\theta(k)) + \theta(k))}{\theta(k)}.
\end{aligned} \tag{323}
$$

Assim, considerando o conjunto $\mathcal{Z}$ *dado em* (316)*, de* (323)*, segue que, para todo* $z(k) \in \mathcal{Z}$*,*

$$
\begin{aligned}
m_{11} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_1(k)} = -0{,}0795589, & M_{11} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0{,}0795589, \\
m_{12} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_2(k)} = -0{,}437575, & M_{12} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0{,}437575, \\
m_{13} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_3(k)} = -1{,}66667, & M_{13} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_3(k)} = 0{,}0137234, \\
m_{21} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_1(k)} = -0{,}0795589, & M_{21} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0{,}0795589, \\
m_{22} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_2(k)} = -0{,}437575, & M_{22} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0{,}437575, \\
m_{23} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_3(k)} = -1{,}68039, & M_{23} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_3(k)} = 0, \\
m_{31} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_1(k)} = -0{,}0795589, & M_{31} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0{,}0795589, \\
m_{32} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_2(k)} = -0{,}437575, & M_{32} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0{,}437575, \\
m_{33} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_3(k)} = -0{,}0137234, & M_{33} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_3(k)} = 1{,}66667, \\
m_{41} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_1(k)} = -0{,}0795589, & M_{41} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0{,}0795589, \\
m_{42} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_2(k)} = -0{,}437575, & M_{42} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0{,}437575, \\
m_{43} &= \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_3(k)} = 0, & M_{43} &= \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_3(k)} = 1{,}68039.
\end{aligned} \tag{324}
$$

Logo, os gradientes das funções de pertinência dados por

$\nabla h_i(z(k)) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i(z(k))}{\partial z_1(k)} & \dfrac{\partial h_i(z(k))}{\partial z_2(k)} & \dfrac{\partial h_i(z(k))}{\partial z_3(k)} \end{bmatrix}$, *$i \in \mathbb{K}_4$, sendo as derivadas parciais dadas em* (323)*, são tais que* $\nabla h_i(z(k)) \in \mathrm{co}\{\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}, \psi_{i4}, \psi_{i5}, \psi_{i6}, \psi_{i7}, \psi_{i8}\}$*, $i \in \mathbb{K}_4$, sendo*

$$\psi_{i1} = \begin{bmatrix} m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} \end{bmatrix},\ \psi_{i2} = \begin{bmatrix} m_{i1} & m_{i2} & M_{i3} \end{bmatrix},\ \psi_{i3} = \begin{bmatrix} m_{i1} & M_{i2} & m_{i3} \end{bmatrix},\ \psi_{i4} = \begin{bmatrix} m_{i1} & M_{i2} & M_{i3} \end{bmatrix},$$
$$\psi_{i5} = \begin{bmatrix} M_{i1} & m_{i2} & m_{i3} \end{bmatrix},\ \psi_{i6} = \begin{bmatrix} M_{i1} & m_{i2} & M_{i3} \end{bmatrix},\ \psi_{i7} = \begin{bmatrix} M_{i1} & M_{i2} & m_{i3} \end{bmatrix},\ \psi_{i8} = \begin{bmatrix} M_{i1} & M_{i2} & M_{i3} \end{bmatrix},$$

com m_{ij} e M_{ij}, $i \in \mathbb{K}_4$, $j \in \mathbb{K}_3$, dados em (324)*, ou seja,*

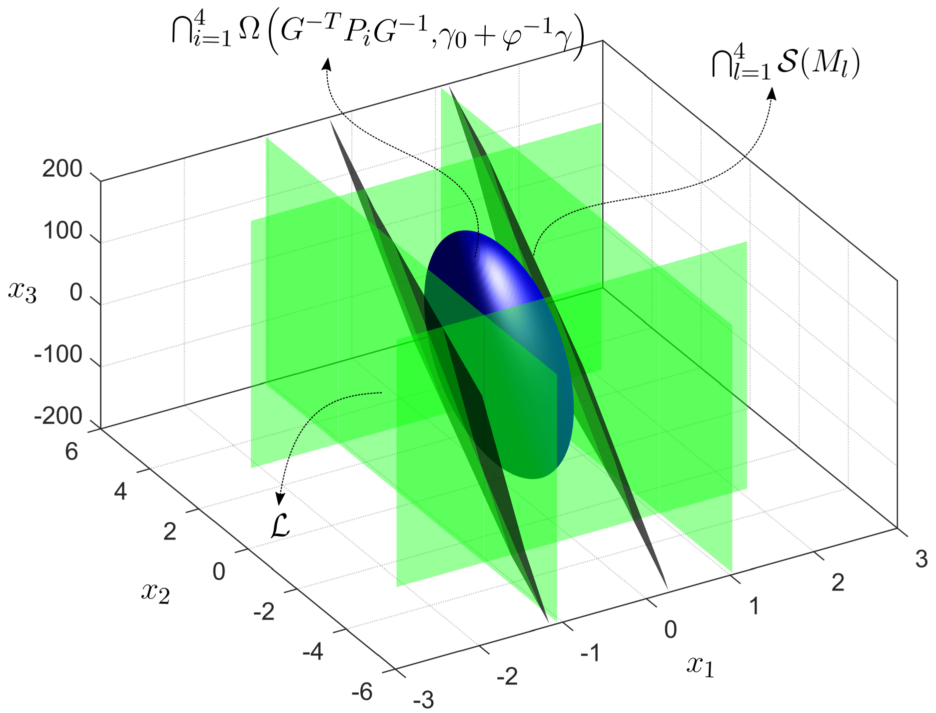
$$\begin{aligned}
&\psi_{11} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & -0{,}437575 & -1{,}66667 \end{bmatrix},\ \psi_{12} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & -0{,}437575 & 0{,}0137234 \end{bmatrix},\\
&\psi_{13} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & 0{,}437575 & -1{,}66667 \end{bmatrix},\ \psi_{14} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & 0{,}437575 & 0{,}0137234 \end{bmatrix},\\
&\psi_{15} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & -0{,}437575 & -1{,}66667 \end{bmatrix},\ \psi_{16} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & -0{,}437575 & 0{,}0137234 \end{bmatrix},\\
&\psi_{17} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & 0{,}437575 & -1{,}66667 \end{bmatrix},\ \psi_{18} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & 0{,}437575 & 0{,}0137234 \end{bmatrix};\\
&\psi_{21} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & -0{,}437575 & -1{,}68039 \end{bmatrix},\ \psi_{22} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & -0{,}437575 & 0 \end{bmatrix},\\
&\psi_{23} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & 0{,}437575 & -1{,}68039 \end{bmatrix},\ \psi_{24} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & 0{,}437575 & 0 \end{bmatrix},\\
&\psi_{25} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & -0{,}437575 & -1{,}68039 \end{bmatrix},\ \psi_{26} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & -0{,}437575 & 0 \end{bmatrix},\\
&\psi_{27} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & 0{,}437575 & -1{,}68039 \end{bmatrix},\ \psi_{28} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & 0{,}437575 & 0 \end{bmatrix};\\
&\psi_{31} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & -0{,}437575 & -0{,}0137234 \end{bmatrix},\ \psi_{32} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & -0{,}437575 & 1{,}66667 \end{bmatrix},\\
&\psi_{33} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & 0{,}437575 & -0{,}0137234 \end{bmatrix},\ \psi_{34} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & 0{,}437575 & 1{,}66667 \end{bmatrix},\\
&\psi_{35} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & -0{,}437575 & -0{,}0137234 \end{bmatrix},\ \psi_{36} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & -0{,}437575 & 1{,}66667 \end{bmatrix},\\
&\psi_{37} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & 0{,}437575 & -0{,}0137234 \end{bmatrix},\ \psi_{38} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & 0{,}437575 & 1{,}66667 \end{bmatrix};\\
&\psi_{41} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & -0{,}437575 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{42} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & -0{,}437575 & 1{,}68039 \end{bmatrix},\\
&\psi_{43} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & 0{,}437575 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{44} = \begin{bmatrix} -0{,}0795589 & 0{,}437575 & 1{,}68039 \end{bmatrix},\\
&\psi_{45} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & -0{,}437575 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{46} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & -0{,}437575 & 1{,}68039 \end{bmatrix},\\
&\psi_{47} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & 0{,}437575 & 0 \end{bmatrix},\ \psi_{48} = \begin{bmatrix} 0{,}0795589 & 0{,}437575 & 1{,}68039 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{325}$$

Dessa forma, considere $\rho = 1$, o valor de saturação para o sinal de entrada, $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i = 0{,}2$, $i \in \mathbb{K}_4$, a restrição para a variação das funções de pertinência, $\bar{x}_1 = \frac{\pi}{3}$ e $\bar{x}_2 = \frac{17\pi}{18}$, os limites para as variáveis de $x_1(k)$ e $x_2(k)$, respectivamente, dados na definição da região de operação $\mathcal{Z}$ em (316)*, $\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Upsilon^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $w_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = -w_1$, $w_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $w_4 = -w_3$, $w_5^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $w_6 = -w_5$ vetores relacionados à expansão da estimativa elipsoidal do domínio de atração. Suponha o distúrbio com energia limitada $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$, de acordo com* (226)*, com $\gamma = 12$, e considere $\varphi = 2$, $\gamma_0 = 0{,}1\varphi^{-1}\gamma$.*

Utilizando os parâmetros descritos acima, o problema de otimização dado pelas LMIs

(228)-(234) no Teorema 15 foi resolvido. A solução deste problema de otimização apresentou um custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ de $\varepsilon = 5{,}26545$. Os ganhos dos controladores $K_i = F_i G^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_4$, matrizes simétricas $U_i = G^{-T} Q_i G^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_4$, matriz G, matrizes simétrica definidas positivas P_i, $i \in \mathbb{K}_4$, e escalares ϖ_i, $i \in \mathbb{K}_4$, obtidos, são dados em (326).

Figura 28 - Estimativa do domínio de atração obtida utilizando o Teorema 15, com $\gamma = 12$, $\varphi = 2$, $\gamma_0 = 0{,}1\varphi^{-1}\gamma$, $\rho = 1$ e $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i = 0{,}2$, $i \in \mathbb{K}_4$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1{,}37733 & -0{,}21257 & 0{,}00300 \end{bmatrix}, \; K_2 = \begin{bmatrix} 1{,}36169 & -0{,}19166 & 0{,}00271 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1{,}38906 & -0{,}22683 & 0{,}00348 \end{bmatrix}, \; K_4 = \begin{bmatrix} 1{,}36878 & -0{,}19821 & 0{,}00310 \end{bmatrix},$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} -1979{,}29312 & 655{,}71379 & -9{,}35677 \\ 655{,}71379 & -222{,}92802 & 3{,}20232 \\ -9{,}35677 & 3{,}20232 & -0{,}04554 \end{bmatrix}, \; U_2 = \begin{bmatrix} -1986{,}62712 & 656{,}83056 & -9{,}37262 \\ 656{,}83056 & -223{,}05873 & 3{,}20419 \\ -9{,}37262 & 3{,}20419 & -0{,}04557 \end{bmatrix},$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} -1980{,}72344 & 656{,}34267 & -9{,}37252 \\ 656{,}34267 & -223{,}10385 & 3{,}20578 \\ -9{,}37252 & 3{,}20578 & -0{,}04559 \end{bmatrix}, \; U_4 = \begin{bmatrix} -1987{,}38982 & 657{,}10146 & -9{,}38090 \\ 657{,}10146 & -223{,}13628 & 3{,}20612 \\ -9{,}38090 & 3{,}20612 & -0{,}04560 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}13067 & 0{,}20630 & -0{,}00836 \\ 0{,}20630 & 1{,}33789 & 29{,}70991 \\ -0{,}00836 & 29{,}70991 & 2121{,}61267 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}13084 & 0{,}20608 & -0{,}03913 \\ 0{,}20608 & 1{,}33817 & 29{,}73894 \\ -0{,}03913 & 29{,}73894 & 2121{,}57755 \end{bmatrix},$$

$$P_3=\begin{bmatrix}0{,}13248 & 0{,}21191 & -0{,}05192\\ 0{,}21191 & 1{,}33735 & 29{,}75556\\ -0{,}05192 & 29{,}75556 & 2121{,}54136\end{bmatrix},\ P_4=\begin{bmatrix}0{,}13015 & 0{,}20384 & -0{,}03526\\ 0{,}20384 & 1{,}33749 & 29{,}73790\\ -0{,}03526 & 29{,}73790 & 2121{,}57226\end{bmatrix},$$

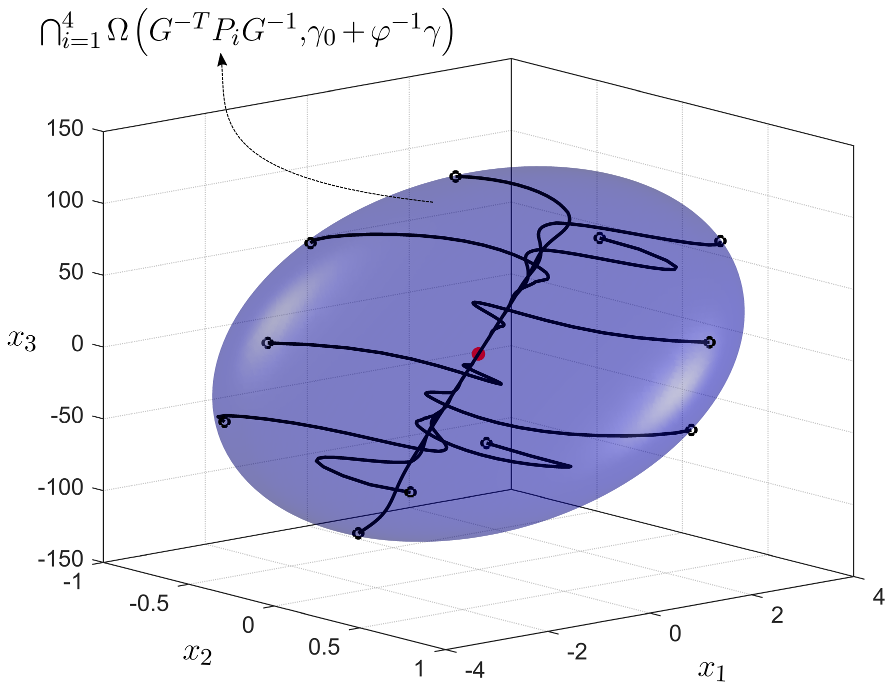
$$G=\begin{bmatrix}0{,}13005 & 0{,}20640 & -0{,}03675\\ 0{,}20819 & 1{,}33553 & 29{,}74966\\ -0{,}03223 & 29{,}73435 & 2121{,}48774\end{bmatrix},$$

$$\varpi_1=\varpi_2=0{,}73241,\ \varpi_3=\varpi_4=1{,}94494,\ \varpi_5=\varpi_6=89{,}95163. \tag{326}$$

Considerando a solução (326)*, para o problema de otimização dado no Teorema 15, composto pelas LMIs* (228)*-*(234)*, a Figura 28 mostra que a estimativa* $\bigcap_{i=1}^{4}\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$ *(descrito na Seção 4.5.3) do conjunto elipsoidal* $\Omega\left(G^{-T}P_{z(k)}G^{-1},\gamma_0+\varphi^{-1}\gamma\right)$ *está contida na região de operação* $\mathcal{L}$ *dada em* (314)*, e no conjunto* $\bigcap_{l=1}^{4}\mathcal{S}(M_l)$*, com* $\mathcal{S}(M_l)$*,* $l\in\mathbb{K}_4$*, definido em* (119)*, em que a representação* (119) *para* $sat(u_\sigma(k))$*,* $k>0$*, é válida.*

As três afirmações enunciadas no Teorema 15, são abordadas nas Figuras 29, 30 e 31:

Figura 29 - Estimativa do domínio de atração obtida utilizando o Teorema 15, com $\gamma=12$, $\varphi=2$, $\gamma_0=0{,}1\varphi^{-1}\gamma$, $\rho=1$, $|\Delta h_i(z(k))|\leq\phi_i=0{,}2$, $i\in\mathbb{K}_4$, e $w(k)=0$, sendo as linhas sólidas pretas, trajetórias convergentes para a origem, $\bullet$, iniciadas em $\circ$, para $v_1=0{,}3$.

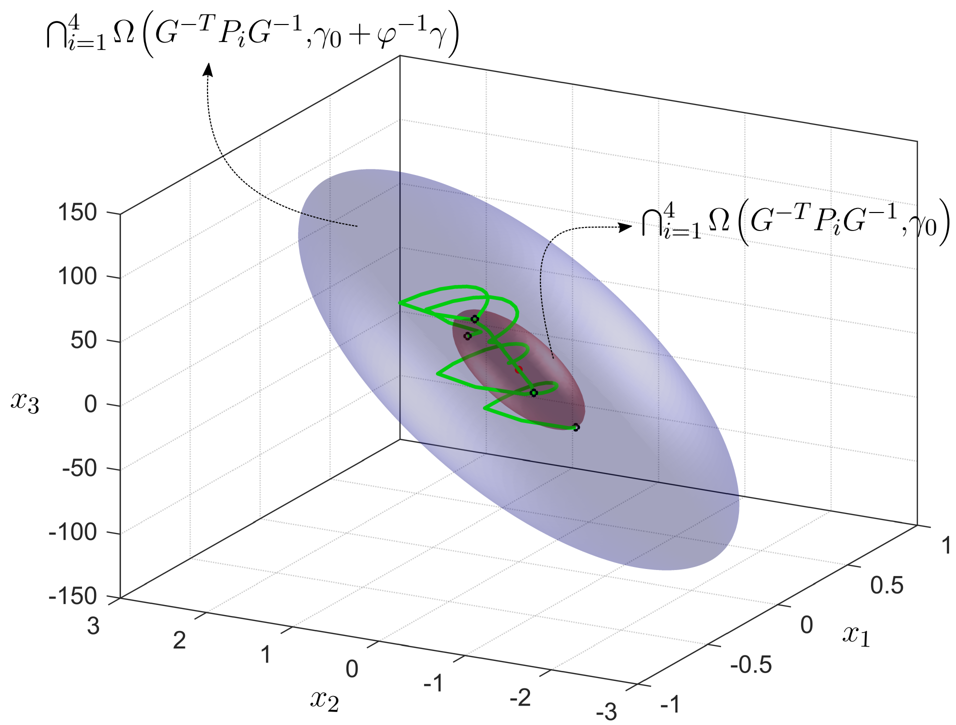


Fonte: Elaboração do próprio autor.

- *A Figura 29 mostra que para* $w(k) = 0$, $k > 0$, *o conjunto elipsoidal* $\cap_{i=1}^{4}\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)$, *é um subconjunto invariante do domínio de atração. Nesta figura, com o intuito de ilustrar a afirmação* 1. *do Teorema 15, as linhas pretas representam as trajetórias iniciadas na fronteira de* $\cap_{i=1}^{4}\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)$, *com* $w(k) = 0$ *e* $v_1 = 0{,}3$.

- *Supondo* $w(k) \neq 0$ *e* $w(k) \in \mathscr{W}_\gamma$, *a Figura 30 apresenta os conjuntos elipsoidais* $\cap_{i=1}^{4}\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1}, \gamma_0\right)$ *e* $\cap_{i=1}^{4}\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)$. *As linhas verdes representam trajetórias iniciadas na fronteira do conjunto* $\cap_{i=1}^{4}\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1}, \gamma_0\right)$, *para* $v_1 =$ 0,3. *Assim, como enunciado na afirmação* 2. *do Teorema 15, as trajetórias com condições iniciais em* $\cap_{i=1}^{4}\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1}, \gamma_0\right)$ *permanecem em* $\cap_{i=1}^{4}\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)$, *para todo* $k > 0$, *considerando* $w(k) = \begin{cases} \sqrt{6} \ se \ 1 \leq k \leq 2 \\ 0 \ se \ k < 1 \ ou \ k > 2 \end{cases}$, $\|w(k)\|_2^2 = 12$.

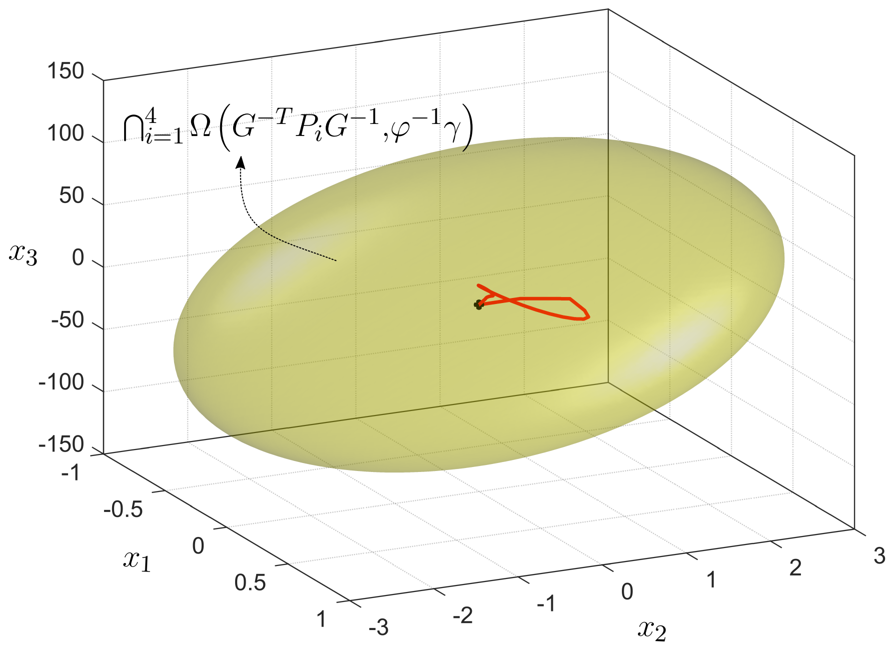
Figura 30 - Conjuntos $\cap_{i=1}^{4}\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1}, \gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)$ e $\cap_{i=1}^{4}\Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1}, \gamma_0\right)$, obtidos utilizando o Teorema 15, com $\gamma = 12$, $\varphi = 2$, $\gamma_0 = 0{,}1\varphi^{-1}\gamma$, $\rho = 1$, $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i = 0{,}2$, $i \in \mathbb{K}_4$, e $w(k) \neq 0$, $\|w(k)\|_2^2 = 12$, sendo as linhas sólidas verdes, trajetórias convergentes para a origem, $\bullet$, iniciadas em $\circ$, para $v_1 = 0{,}3$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

- *Com o objetivo de ilustrar a afirmação 3., considerando* $w(k) \neq 0$ *e* $w(k) \in \mathscr{W}_{\gamma}$*, com* $w(k) = \begin{cases} \sqrt{6} \text{ se } 1 \leq k \leq 2 \\ 0 \text{ se } k < 1 \text{ ou } k > 2 \end{cases}$*, na Figura 31 a linha vermelha corresponde a trajetória iniciada em* $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$*. Note que a trajetória* $x(k)$ *permanece em* $\cap_{i=1}^{4} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, \varphi^{-1}\gamma\right)$*, para todo tempo futuro* $k > 0$*.*

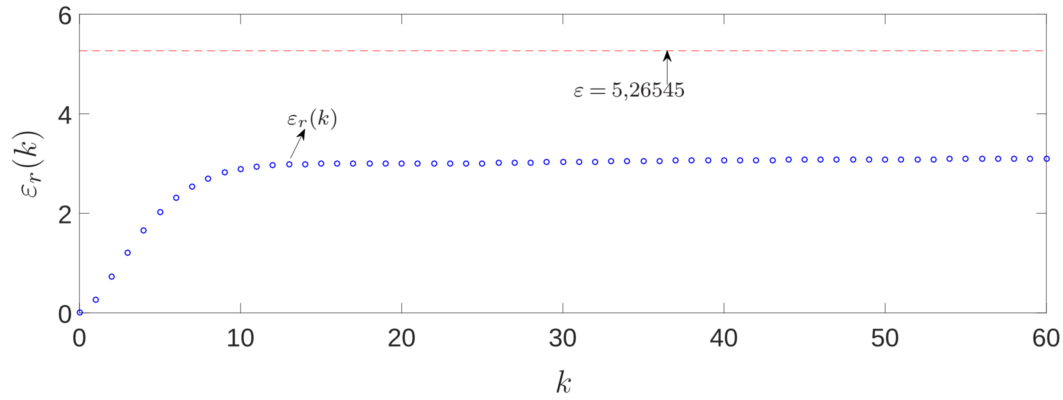
Figura 31 - Conjunto $\cap_{i=1}^{4} \Omega\left(G^{-T} P_i G^{-1}, \varphi^{-1}\gamma\right)$ obtido utilizando o Teorema 15, com $\alpha = 1$, $\mu_1 = 10$, $\gamma = 1$, $\beta = 40$, $\rho = 3$, $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i = 0{,}2$, $i \in \mathbb{K}_4$, e $w(k) \neq 0$, $\|w(k)\|_2^2 = 12$, sendo a linha sólida vermelha, trajetórias convergentes para a origem, •, iniciada na origem, para $v_1 = 0{,}3$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observe que aplicando o problema de otimização dado pelo Teorema 15, a lei de controle chaveada foi capaz de manter a trajetória do vetor de estado confinada ao domínio de validade do modelo fuzzy T-S, $\mathcal{L}$*, na região* $\bigcap_{l=1}^{4} \mathcal{S}(M_l)$ *em que a representação (119) para* $sat(u_\sigma(k))$*,* $k > 0$*, é válida e no conjunto* $\mathcal{H}$ *definido em (170), em que a variação* $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i = 0{,}2$*. Além disso, o custo garantido* $\mathscr{H}_\infty$ *obtido, assegura* $\varepsilon_r(k) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} y^T(k) y(k) / \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k) w(k)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon = 5{,}26545$*. Na Figura 32 é possível observar que o valor real para o desempenho* $\mathscr{H}_\infty$ $(\varepsilon_r(k))$ *é sempre menor que* $\varepsilon = 5{,}26545$*, sendo que o máximo valor que* $\varepsilon_r(k) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} y^T(k) y(k) / \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k) w(k)\right)^{\frac{1}{2}}$ *atinge é dado por* $\max(\varepsilon_r(k)) = 3{,}11578$*.*

Figura 32 - Relação entre $\varepsilon_r(k) = \left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty} y^T(k)y(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)}\right)^{\frac{1}{2}}$ e o custo garantido $\varepsilon = 5{,}26545$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Como destacado na observação (17)*, é possível obter uma melhor atenuação do efeito de uma pertubação* $w(k)$*, ou seja, minimizar o valor de* $\varepsilon = \sqrt{\tau}$*, resolvendo o problema de otimização composto pelas LMIs* (228)-(234) *no Teorema 15, substituindo a maximização de* $Tr(\Pi) - \tau$*, pela minimização do parâmetro* τ*. De fato, procedendo desta forma e considerando os mesmos parâmetros que foram utilizados para a obtenção dos ganhos dados em* (326)*, foi obtido uma solução factível que apresentou o custo garantido* $\mathscr{H}_\infty$ *de* $\varepsilon = 4{,}90047$*.*

5.5 IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA EM UM SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA DE BANCADA

Exemplo 9. *Este exemplo é dedicado à implementação prática do controle* $\mathscr{H}_\infty$ *chaveado para sistemas não lineares discretos no tempo considerando saturação no atuador e distúrbio externo. Para isso, considere o sistema de suspensão ativa de um veículo, fabricado pela Quanser®* (*Quanser Innovate Educate,* 2010)*, o qual representa* 1/4 *de um veículo. Um modelo esquemático está representado na Figura 33.*

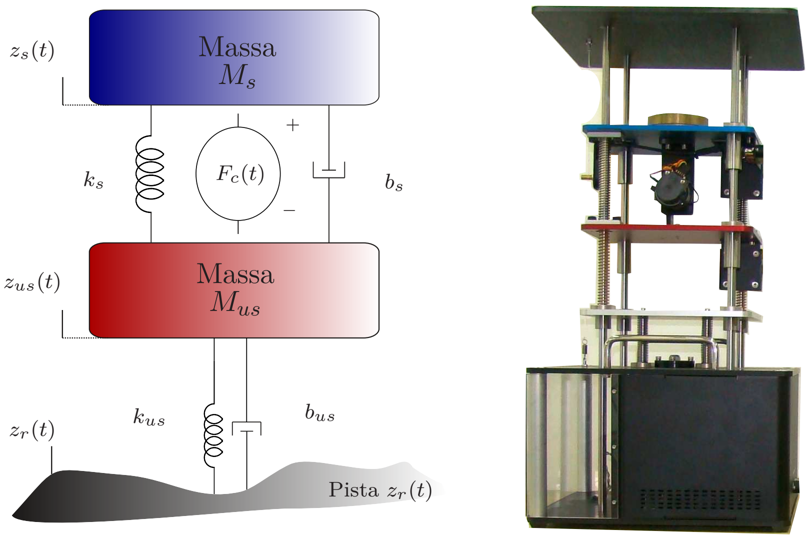
O sistema da suspensão ativa reduz-se a um conjunto de duas massas: M_s*, que representa* 1/4 *de um veículo e é suportada pela mola* k_s *e pelo amortecedor* b_s*, e* M_{us}*, que corresponde a massa do conjunto do pneu e é suportada pela mola* k_{us} *e pelo amortecedor* b_{us}*.*

O modelo esquemático fornecido pela Quanser® *considera que a rigidez da mola* k_{us} *é constante e igual a* k_{us0}*. Porém, para deformações elevadas, a rigidez da mola possui um comportamento não linear (ONAT et al., 2009). Sendo assim, baseado em (ONAT* *et al., 2009; OLIVEIRA et al., 2018a), considere que a rigidez da mola é dada pela não linearidade:*

$$k_{us}(z_{us} - z_r, \Delta k_{us}) = k_{us0}(1 + \Delta k_{us}|z_{us} - z_r|), \tag{327}$$

sendo Δk_{us} *um parâmetro incerto tal que* $0 \leq \Delta k_{us} \leq \Delta k_{us0}$*, com* k_{us0} *e* Δk_{us0} *constantes conhecidas. Além disso, neste exemplo, a massa de 1/4 do corpo total do veículo (kg),* M_s*, é considerada incerta, podendo assumir valores tais que* $1{,}455 \leq M_s \leq 2{,}45$*.*

Figura 33 - Sistema de suspensão ativa.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Dessa forma, o modelo dinâmico contínuo no tempo do sistema pode ser representado por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) - x_4(t)\\
\dot{x}_2(t) &= -k_s g(z(t))x_1(t) - b_s g(z(t))x_2(t) + b_s g(z(t))x_4(t) + g(z(t))sat(u(t))\\
\dot{x}_3(t) &= x_4(t) - w(t)\\
\dot{x}_4(t) &= \frac{k_s}{M_{us}}x_1(t) + \frac{b_s}{M_{us}}x_2(t) + f_{43}(z(t))x_3(t) - \frac{b_s + b_{us}}{M_{us}}x_4(t) - \frac{1}{M_{us}}sat(u(t)) + \frac{b_{us}}{M_{us}}w(t),\\
y(t) &= x_1(t) + x_3(t),
\end{aligned} \tag{328}$$

sendo $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) & \dot{z}_s(t) & z_{us}(t) - z_r(t) & \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix}^T$,

$$g(z(t)) = \frac{1}{M_s} \text{ e } f_{43}(z(t)) = -\frac{k_{us0}(1 + \Delta k_{us}\|z_{us} - z_r\|)}{M_{us}}, \tag{329}$$

com $z(t) = \begin{bmatrix} x_3(t) & \Delta k_{us} & M_s \end{bmatrix}^T$.

Os valores dos parâmetros do sistema são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 - Parâmetros do sistema de suspensão ativa.

Parâmetros	*Notação*	*Valor*
Massa do conjunto do pneu (kg)	M_{us}	1
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_s	900
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_{us0}	2500
Coeficiente de amortecimento (Ns/m)	b_s	7,5
Coeficiente de amortecimento (Ns/m)	b_{us}	5
Parâmetro da mola (m^{-1})	Δk_{us0}	2

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Baseado em (DING, 2011) e (GAINO et al., 2020), para um tempo de amostragem T_s suficientemente pequeno, o sistema fuzzy T-S contínuo no tempo que descreve o sistema não linear (328)*, pode ser aproximado por um modelo fuzzy T-S discreto no tempo* (225)*, utilizando o seguinte método de discretização:*

$$\begin{aligned} A_i &= e^{A_{ci}T_s} = I + T_s A_{ci}, \\ B_i &= \int_0^{T_s} e^{A_{ci}\tau} B_{ci} d\tau = (A_i - I)\, A_{ci}^{-1} B_{ci}, \\ H_i &= \int_0^{T_s} e^{A_{ci}\tau} H_{ci} d\tau = (A_i - I)\, A_{ci}^{-1} H_{ci}, \\ C_i &= C_{ci},\ E_i = E_{ci} \text{ e } D_i = D_{ci}, \end{aligned} \tag{330}$$

sendo T_s (s) o tempo de amostragem, A_{ci}, B_{ci}, H_{ci}, C_{ci}, E_{ci} e D_{ci}, $i \in \mathbb{K}_4$, matrizes dos modelos locais do sistema fuzzy T-S contínuo.

Devido à restrição física relacionada ao comprimento da mola, a variável de estado $x_3(k) = z_{us} - z_r$ é limitada no intervalo $-0{,}02 \leq z_{us} - z_r \leq 0{,}02$ m (OLIVEIRA et al., 2018a). Sendo assim, considere o conjunto $\mathcal{Z}$ definido em (11)*, como:*

$$\mathcal{Z} = \Big\{ z(k) = \begin{bmatrix} x_3(k) & \Delta k_{us} & M_s \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 :\ -0{,}02 \leq x_3(k) \leq 0{,}02,\ 0 \leq \Delta k_{us} \leq 2, \\ 1{,}455 \leq M_s \leq 2{,}45 \Big\}, \tag{331}$$

Assim, considerando os valores dos parâmetros do sistema descritos na Tabela 7, utilizando *método de discretização descrito em* (330)*, para* $z(k) \in \mathcal{Z}$*, as matrizes do sistema fuzzy T-S discreto no tempo* (225)*, que descrevem o sistema* (328)*, são dadas por:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1+T_s & T_s & 0 & -T_s \\ -450T_s & 1-3{,}75T_s & 0 & 3{,}75T_s \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 900T_s & 7{,}5T_s & -2600T_s & 1-12{,}5T_s \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1+T_s & T_s & 0 & -T_s \\ -360T_s & 1-3T_s & 0 & 3T_s \\ 0 & 0 & 1 & T_s \\ 900T_s & 7{,}5T_s & -2600T_s & 1-12{,}5T_s \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 1+T_s & T_s & 0 & -T_s \\ -450T_s & 1-3{,}75T_s & 0 & 3{,}75T_s \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 900T_s & 7{,}5T_s & -2500T_s & 1-12{,}5T_s \end{bmatrix}, \ A_4 = \begin{bmatrix} 1+T_s & T_s & 0 & -T_s \\ -360T_s & 1-3T_s & 0 & 3T_s \\ 0 & 0 & 1 & T_s \\ 900T_s & 7{,}5T_s & -2500T_s & 1-12{,}5T_s \end{bmatrix},$$
$$B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5T_s & 0 & -T_s \end{bmatrix}^T, \ B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4T_s & 0 & -T_s \end{bmatrix}^T,$$
$$H_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -T_s & 5T_s \end{bmatrix}^T, \ C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ E_i = 0 \text{ e } D_i = 0, \ i \in \mathbb{K}4, \tag{332}$$

$$\text{em que } g(z(k)) = \frac{1}{M_s} \text{ e } f_{43}(z(k)) = -\frac{k_{us0}(1+\Delta k_{us}|z_{us}-z_r|)}{M_{us}},$$

$$f_{43}^1 = \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \{f_{43}(z(k))\} = -2600, \ f_{43}^2 = \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \{f_{43}(z(k))\} = -2500,$$
$$g^1 = \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \{g(z(k))\} = 0{,}4, \ g^2 = \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \{g(z(k))\} = 0{,}5. \tag{333}$$

Como as funções de pertinência dependem das não linearidades e dos parâmetros incertos do sistema (328)*, e devem ser diferenciáveis, para aplicação do Teorema 15, considere a função*

$$\overline{f}_{43}(z(k)) = -\frac{k_{us0}(1+\Delta k_{us}(z_{us}-z_r))}{M_{us}}. \tag{334}$$

Note que a função $\overline{f}_{43}(z(t))$ *dada em* (334)*, difere da função* $f_{43}(z(k))$ *definida em* (329)*, apenas devido ao módulo no termo* $z_{us}-z_r$*. Como em* $\mathcal{Z}$ *dado em* (331)*,* $-0{,}2 \le x_3(k) \le 0{,}2$*, então* $0 \le |z_{us}-z_r| \le 0{,}2$*. Sendo assim, para calcular o máximo e mínimo de* $\overline{f}_{43}(z(t))$*, é considerado um subconjunto de* $\mathcal{Z}$*, dado por:*

$$\overline{\mathcal{Z}} = \Big\{ z(k) = \begin{bmatrix} x_3(k) & \Delta k_{us} & M_s \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le x_3(k) \le 0{,}02, \ 0 \le \Delta k_{us} \le 2, \ 1{,}455 \le M_s \le 2{,}45 \Big\}, \tag{335}$$

Assim,

$$\overline{f}_{43}^1 = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}} \{\overline{f}_{43}(z(k))\} = \min_{z(k)\in\mathcal{Z}} \{f_{43}(z(k))\} = -2600 \text{ e}$$
$$\overline{f}_{43}^2 = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}} \{\overline{f}_{43}(z(k))\} = \max_{z(k)\in\mathcal{Z}} \{f_{43}(z(k))\} = -2500. \tag{336}$$

Logo, os modelos locais do sistema fuzzy T-S (225)*, obtidos considerando* $\overline{f}_{43}(z(k))$ *com* $z(k) \in \overline{\mathcal{Z}}$ *ou* $f_{43}(z(k))$ *com* $z(k) \in \mathcal{Z}$*, são os mesmos. Portanto, apenas para a obtenção do máximo e do mínimo das derivadas parciais das funções de pertinência, como descrito em* (174) *e* (175)*, a função* $\overline{f}_{43}(z(k))$ *definida em* (334)*, sendo* $z(k) \in \overline{\mathcal{Z}}$*, será adotada.*

Veja que, baseado em (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM et al., 2012; ALVES, 2017), as funções $g(z(k))$ *e* $\overline{f}_{43}(z(k))$ *podem ser reescritas com:*

$$\begin{aligned}
\overline{f}_{43}(z(k)) &= -\frac{k_{us0}(1+\Delta k_{us}(z_{us}-z_r))}{M_{us}} = \xi^1(z(k))\overline{f}^1_{43} + \xi^2(z(k))\overline{f}^2_{43}, \\
g(z(k)) &= \frac{1}{M_s} = \alpha^1(z(k))g^1 + \alpha^2(z(k))g^2,
\end{aligned} \tag{337}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\xi^1(z(k)) &= \frac{\overline{f}^2_{43} - \overline{f}_{43}(z(k))}{\overline{f}^2_{43} - \overline{f}^1_{43}} = \frac{-2500M_{us} + k_{us0}(1+\Delta k_{us}(z_{us}-z_r))}{100M_{us}} \\
\xi^2(z(k)) &= \frac{\overline{f}_{43}(z(k)) - \overline{f}^1_{43}}{\overline{f}^2_{43} - \overline{f}^1_{43}} = \frac{-k_{us0}(1+\Delta k_{us}(z_{us}-z_r)) + 2600M_{us}}{100M_{us}}, \\
\alpha^1(z(k)) &= \frac{g^2 - g(z(k))}{g^2 - g^1} = \frac{0{,}5 - M_s^{-1}}{0{,}1}, \\
\alpha^2(z(k)) &= \frac{g(z(k)) - g^1}{g^2 - g^1} = \frac{-M_s^{-1} - 0{,}4}{0{,}1}.
\end{aligned} \tag{338}$$

Observe que $\xi^j(z(k)) \geq 0$, $j \in \mathbb{K}_2$, $\sum_{j=1}^{2} \xi^j(z(k)) = 1$, $\alpha^j(z(k)) \geq 0$, $j \in \mathbb{K}_2$, *e* $\sum_{j=1}^{2} \alpha^j(z(k)) = 1$.

Ainda utilizando a metodologia apresentada em (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM et al., 2012; ALVES, 2017) , de (337) *e* (338)*, as funções de pertinência, que dependem do parâmetro incerto* M_s*, são dadas por:*

$$\begin{aligned}
h_1(z(k)) &= \alpha^1(z(k))\xi^1(z(k)) = 250(0{,}5 - M_s^{-1})\Delta k_{us}(z_{us}-z_r), \\
h_2(z(k)) &= \alpha^1(z(k))\xi^2(z(k)) = 10(M_s^{-1} - 0{,}5)(25\Delta k_{us}(z_{us}-z_r) - 1), \\
h_3(z(k)) &= \alpha^2(z(k))\xi^1(z(k)) = 250(M_s^{-1} - 0{,}4)\Delta k_{us}(z_{us}-z_r), \\
h_4(z(k)) &= \alpha^2(z(k))\xi^2(z(k)) = 10(M_s^{-1} - 0{,}4)(1 - 25\Delta k_{us}(z_{us}-z_r)).
\end{aligned} \tag{339}$$

Veja que as funções $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_4$, *dadas em* (339)*, satisfazem* $h_i(z(k)) \geq 0$ *e* $\sum_{i=1}^{4} h_i(z(k)) = 1$.

Logo, sendo $z(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) & z_2(k) & z_3(k) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_3(k) & \Delta k_{us} & M_s \end{bmatrix}^T$*, em que* $x_3(k) =$

$z_{us}-z_r$, segue que

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_1(k)} = 250(0{,}5-M_s^{-1})\Delta k_{us}, && \frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_2(k)} = 250(0{,}5-M_s^{-1})(z_{us}-z_r),\\
&\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_3(k)} = 250M_s^{-2}\Delta k_{us}(z_{us}-z_r), && \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_1(k)} = -250(0{,}5-M_s^{-1})\Delta k_{us},\\
&\frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_2(k)} = -250(0{,}5-M_s^{-1})(z_{us}-z_r), && \frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_3(k)} = 10M_s^{-2}(1-25\Delta k_{us}(z_{us}-z_r)),\\
&\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_1(k)} = 250(M_s^{-1}-0{,}4)\Delta k_{us}, && \frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_2(k)} = 250(M_s^{-1}-0{,}4)(z_{us}-z_r),\\
&\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_3(k)} = -250M_s^{-2}\Delta k_{us}(z_{us}-z_r), && \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_1(k)} = -250(M_s^{-1}-0{,}4)\Delta k_{us},\\
&\frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_2(k)} = -250(M_s^{-1}-0{,}4)(z_{us}-z_r), && \frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_3(k)} = -10M_s^{-2}(1-25\Delta k_{us}(z_{us}-z_r)).
\end{aligned}
\tag{340}
$$

Então, considerando o conjunto $\overline{\mathcal{Z}}$ dado em (335), de (340), segue que, para todo $z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}$,

$$
\begin{aligned}
&m_{11} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_1(k)} = -93{,}6426, && M_{11} = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_1(k)} = 45{,}9184,\\
&m_{12} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_2(k)} = -0{,}9364, && M_{12} = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0{,}45918,\\
&m_{13} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_3(k)} = 0, && M_{13} = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_1(z(k))}{\partial z_3(k)} = 4{,}72361,\\
&m_{21} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_1(k)} = -45{,}9184, && M_{21} = \max_{z(k)\in\mathcal{Z}}\frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_1(k)} = 93{,}6426,\\
&m_{22} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_2(k)} = -0{,}45918, && M_{22} = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0{,}9364,\\
&m_{23} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_3(k)} = 0, && M_{23} = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_2(z(k))}{\partial z_3(k)} = 4{,}72361,\\
&m_{31} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0, && M_{31} = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_1(k)} = 143{,}643,\\
&m_{32} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0, && M_{32} = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_2(k)} = 1{,}43643,\\
&m_{33} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_3(k)} = -4{,}72361, && M_{33} = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_3(z(k))}{\partial z_3(k)} = 0,\\
&m_{41} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_1(k)} = -143{,}643, && M_{41} = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_1(k)} = 0,\\
&m_{42} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_2(k)} = -1{,}43643, && M_{42} = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_2(k)} = 0,\\
&m_{43} = \min_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_3(k)} = -4{,}72361, && M_{43} = \max_{z(k)\in\overline{\mathcal{Z}}}\frac{\partial h_4(z(k))}{\partial z_3(k)} = 0.
\end{aligned}
\tag{341}
$$

Logo, lembrando que $z(k)=\begin{bmatrix}x_3(k) & \Delta k_{us} & M_s\end{bmatrix}^T$, os gradientes das funções de pertinência dados por $\nabla h_i(z(k))=\begin{bmatrix}\frac{\partial h_i(z(k))}{\partial z_1(k)} & \frac{\partial h_i(z(k))}{\partial z_2(k)} & \frac{\partial h_i(z(k))}{\partial z_3(k)}\end{bmatrix}$, $i\in\mathbb{K}_4$, sendo as derivadas parciais dadas em (340) e seus limites dados em (341), são tais que $\nabla h_i(z(k))\in$

$\text{co}\{\psi_{i1},\psi_{i2},\psi_{i3},\psi_{i4},\psi_{i5},\psi_{i6},\psi_{i7},\psi_{i8}\}$, $i\in\mathbb{K}_4$, *sendo*

$$\psi_{i1}=\begin{bmatrix}m_{i1} & m_{i2} & m_{i3}\end{bmatrix},\ \psi_{i2}=\begin{bmatrix}m_{i1} & m_{i2} & M_{i3}\end{bmatrix},\ \psi_{i3}=\begin{bmatrix}m_{i1} & M_{i2} & m_{i3}\end{bmatrix},\ \psi_{i4}=\begin{bmatrix}m_{i1} & M_{i2} & M_{i3}\end{bmatrix},$$
$$\psi_{i5}=\begin{bmatrix}M_{i1} & m_{i2} & m_{i3}\end{bmatrix},\ \psi_{i6}=\begin{bmatrix}M_{i1} & m_{i2} & M_{i3}\end{bmatrix},\ \psi_{i7}=\begin{bmatrix}M_{i1} & M_{i2} & m_{i3}\end{bmatrix},\ \psi_{i8}=\begin{bmatrix}M_{i1} & M_{i2} & M_{i3}\end{bmatrix},$$

com m_{ij} *e* M_{ij}, $i\in\mathbb{K}_4$, $j\in\mathbb{K}_3$, *dados em* (341), *ou seja,*

$$\begin{aligned}
&\psi_{11}=\begin{bmatrix}-93{,}6426 & -0{,}9364 & 0\end{bmatrix},\ \psi_{12}=\begin{bmatrix}-93{,}6426 & -0{,}9364 & 4{,}72361\end{bmatrix},\\
&\psi_{13}=\begin{bmatrix}-93{,}6426 & 0{,}45918 & 0\end{bmatrix},\ \psi_{14}=\begin{bmatrix}-93{,}6426 & 0{,}45918 & 4{,}72361\end{bmatrix},\\
&\psi_{15}=\begin{bmatrix}45{,}9184 & -0{,}9364 & 0\end{bmatrix},\ \psi_{16}=\begin{bmatrix}45{,}9184 & -0{,}9364 & 4{,}72361\end{bmatrix},\\
&\psi_{17}=\begin{bmatrix}45{,}9184 & 0{,}45918 & 0\end{bmatrix},\ \psi_{18}=\begin{bmatrix}45{,}9184 & 0{,}45918 & 4{,}72361\end{bmatrix},\\
&\psi_{21}=\begin{bmatrix}-45{,}9184 & -0{,}45918 & 0\end{bmatrix},\ \psi_{22}=\begin{bmatrix}-45{,}9184 & -0{,}45918 & 4{,}72361\end{bmatrix},\\
&\psi_{23}=\begin{bmatrix}-45{,}9184 & 0{,}9364 & 0\end{bmatrix},\ \psi_{24}=\begin{bmatrix}-45{,}9184 & 0{,}9364 & 4{,}72361\end{bmatrix},\\
&\psi_{25}=\begin{bmatrix}93{,}6426 & -0{,}45918 & 0\end{bmatrix},\ \psi_{26}=\begin{bmatrix}93{,}6426 & -0{,}45918 & 4{,}72361\end{bmatrix},\\
&\psi_{27}=\begin{bmatrix}93{,}6426 & 0{,}9364 & 0\end{bmatrix},\ \psi_{28}=\begin{bmatrix}93{,}6426 & 0{,}9364 & 4{,}72361\end{bmatrix},\\
&\psi_{31}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -4{,}72361\end{bmatrix},\ \psi_{32}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix},\\
&\psi_{33}=\begin{bmatrix}0 & 1{,}43643 & -4{,}72361\end{bmatrix},\ \psi_{34}=\begin{bmatrix}0 & 1{,}43643 & 0\end{bmatrix},\\
&\psi_{35}=\begin{bmatrix}143{,}643 & 0 & -4{,}72361\end{bmatrix},\ \psi_{36}=\begin{bmatrix}143{,}643 & 0 & 0\end{bmatrix},\\
&\psi_{37}=\begin{bmatrix}143{,}643 & 1{,}43643 & -4{,}72361\end{bmatrix},\ \psi_{38}=\begin{bmatrix}143{,}643 & 1{,}43643 & 0\end{bmatrix},\\
&\psi_{41}=\begin{bmatrix}-143{,}643 & -1{,}43643 & -4{,}72361\end{bmatrix},\ \psi_{42}=\begin{bmatrix}-143{,}643 & -1{,}43643 & 0\end{bmatrix},\\
&\psi_{43}=\begin{bmatrix}-143{,}643 & 0 & -4{,}72361\end{bmatrix},\ \psi_{44}=\begin{bmatrix}-143{,}643 & 0 & 0\end{bmatrix},\\
&\psi_{45}=\begin{bmatrix}0 & -1{,}43643 & -4{,}72361\end{bmatrix},\ \psi_{46}=\begin{bmatrix}0 & -1{,}43643 & 0\end{bmatrix},\\
&\psi_{47}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -4{,}72361\end{bmatrix},\ \psi_{48}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{342}$$

De acordo com o fabricante, a entrada de controle $u(k)=F_c(k)$ *deve ser limitada no intervalo* $-39{,}2\leq u(k)\leq 39{,}2$. *Dessa forma, considere o tempo de amostragem* $T_s=0{,}01s$, $\rho=39{,}2$ *o valor de saturação para o sinal de entrada,* $\bar{x}_3=0{,}02$ *o limite para a variável de estado* $x_3(k)$, *fornecido pela região de operação* $\mathcal{Z}$ *dada em* (331), $|\Delta h_i(z(k))|\leq\phi_i=0{,}2$, $i\in\mathbb{K}_4$, *a restrição para a variação das funções de pertinência,* $\Upsilon=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, $\Upsilon^*=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ *e* $w_1^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}$, $w_2=-w_1$, $w_3^T=\begin{bmatrix}0&1&0&0\end{bmatrix}$, $w_4=-w_3$, $w_5^T=\begin{bmatrix}0&0&1&0\end{bmatrix}$, $w_6=-w_5$, $w_7^T=\begin{bmatrix}0&0&0&1\end{bmatrix}$ *e* $w_8=-w_7$ *vetores relacionados à expansão da estimativa elipsoidal do DA. Suponha o distúrbio com energia limitada* $w(k)\in\mathscr{W}_\gamma$, *de acordo com*

(226), *com* $\gamma = 0{,}02$, $\varphi = 2$ *e* $\gamma_0 = 0$.

Neste contexto, considere o projeto proposto no Teorema 15, alterado com a substituição do problema de maximização de $Tr(\Pi) - \tau$ *pela minimização de* τ*, como descrito na Observação 17. E com o objetivo de obter controladores com ganhos menos elevados que viabilizem a implementação prática, considere também a substituição da condição* (230) *do Teorema 15, pela seguinte LMI:*

$$\begin{bmatrix} -P_i & F_{l(c)}^T \\ F_{l(c)} & -\left(\gamma_0 + \varphi^{-1}\gamma\right)^{-1}\rho_c^2 \end{bmatrix} \leq 0, \qquad (343)$$

como descrito na Observação 8. O Teorema 15 com as alterações enunciadas acima produziram um custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ *de* $\varepsilon = 0{,}17941$*. Os seguintes ganhos dos controladores* $K_i = F_i G^{-1}$*,* $i \in \mathbb{K}_4$*, matrizes simétricas* $U_i = G^{-T} Q_i G^{-1}$*,* $i \in \mathbb{K}_4$*, matriz* G *e matrizes simétrica definidas positivas* P_i*,* $i \in \mathbb{K}_4$*, obtidos, são dados por:*

$$K_1 = \begin{bmatrix} 280{,}50650 & -70{,}58600 & 1204{,}38366 & 91{,}42055 \end{bmatrix},$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} 280{,}31508 & -70{,}84800 & 1208{,}57846 & 92{,}25321 \end{bmatrix},$$
$$K_3 = \begin{bmatrix} 282{,}17464 & -70{,}52077 & 1203{,}44035 & 91{,}59539 \end{bmatrix},$$
$$K_4 = \begin{bmatrix} 280{,}52925 & -70{,}83892 & 1204{,}88511 & 92{,}30823 \end{bmatrix},$$
$$U_1 = \begin{bmatrix} -1857540{,}02400 & -202179{,}41185 & 8105025{,}52172 & 113347{,}00965 \\ -202179{,}41185 & -26404{,}03370 & 1192984{,}44249 & 17555{,}58073 \\ 8105025{,}52172 & 1192984{,}44249 & -57354037{,}12247 & -864995{,}59382 \\ 113347{,}00965 & 17555{,}58073 & -864995{,}59382 & -13136{,}87605 \end{bmatrix},$$
$$U_2 = \begin{bmatrix} -1857550{,}09525 & -202180{,}40860 & 8105047{,}93491 & 113347{,}78445 \\ -202180{,}40860 & -26404{,}12629 & 1192986{,}44155 & 17555{,}63804 \\ 8105047{,}93491 & 1192986{,}44155 & -57354075{,}37851 & -864996{,}65390 \\ 113347{,}78445 & 17555{,}63804 & -864996{,}65390 & -13136{,}87774 \end{bmatrix},$$
$$U_3 = \begin{bmatrix} -1857541{,}42088 & -202179{,}56709 & 8105030{,}75546 & 113347{,}14236 \\ -202179{,}56709 & -26404{,}05043 & 1192985{,}07455 & 17555{,}59421 \\ 8105030{,}75546 & 1192985{,}07455 & -57354066{,}13614 & -864996{,}25110 \\ 113347{,}14236 & 17555{,}59421 & -864996{,}25110 & -13136{,}88580 \end{bmatrix},$$
$$U_4 = \begin{bmatrix} -1857549{,}47174 & -202180{,}35934 & 8105045{,}68025 & 113347{,}76679 \\ -202180{,}35934 & -26404{,}12261 & 1192986{,}34863 & 17555{,}63618 \\ 8105045{,}68025 & 1192986{,}34863 & -57354079{,}39212 & -864996{,}80876 \\ 113347{,}76679 & 17555{,}63618 & -864996{,}80876 & -13136{,}87572 \end{bmatrix},$$
$$P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}02608 & -0{,}45108 & -0{,}00588 & -0{,}00017 \\ -0{,}45108 & 9{,}36725 & 0{,}13684 & -0{,}53428 \\ -0{,}00588 & 0{,}13684 & 0{,}00334 & -0{,}04157 \\ -0{,}00017 & -0{,}53428 & -0{,}04157 & 2{,}81625 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}02600 & -0{,}44736 & -0{,}00580 & -0{,}00200 \\ -0{,}44736 & 9{,}29484 & 0{,}13478 & -0{,}42887 \\ -0{,}00580 & 0{,}13478 & 0{,}00331 & -0{,}04052 \\ -0{,}00200 & -0{,}42887 & -0{,}04052 & 2{,}80197 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0{,}02603 & -0{,}45031 & -0{,}00584 & 0{,}00150 \\ -0{,}45031 & 9{,}36612 & 0{,}13623 & -0{,}55744 \\ -0{,}00584 & 0{,}13623 & 0{,}00331 & -0{,}04253 \\ 0{,}00150 & -0{,}55744 & -0{,}04253 & 2{,}84184 \end{bmatrix},$$

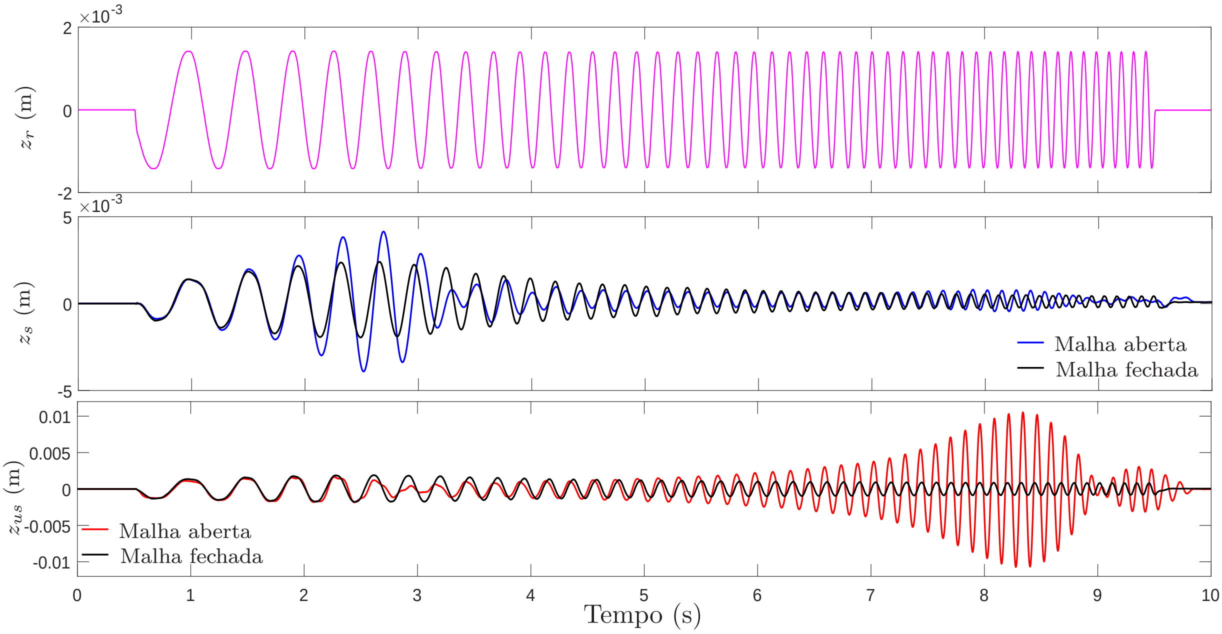
$$P_4 = \begin{bmatrix} 0{,}02612 & -0{,}45335 & -0{,}00588 & -0{,}00025 \\ -0{,}45335 & 9{,}45369 & 0{,}13604 & -0{,}44906 \\ -0{,}00588 & 0{,}13604 & 0{,}00329 & -0{,}04081 \\ -0{,}00025 & -0{,}44906 & -0{,}04081 & 2{,}82543 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}02319 & -0{,}40098 & -0{,}00505 & -0{,}00647 \\ -0{,}40061 & 8{,}36043 & 0{,}12040 & -0{,}20128 \\ -0{,}00507 & 0{,}12132 & 0{,}00299 & -0{,}03719 \\ -0{,}00514 & -0{,}24765 & -0{,}03793 & 2{,}25953 \end{bmatrix}. \tag{344}$$

Duas implementações práticas foram realizadas. A primeira com o sistema em malha aberta ($u(k) = 0$, para $0 \leq k \leq 10s$). Na segunda implementação, com o sistema em malha fechada, a lei de controle chaveada dada em (17), com o conjunto de ganhos dado em (344), foi utilizada, considerando para o perfil da pista ($z_r(t)$) um sinal de onda senoidal, com amplitude de 0,0015m e a frequência variando linearmente de 1,5 a 10,5Hz para $0{,}5 \leq t \leq 9{,}5s$. Para $0 \leq t < 0{,}5s$ e $9{,}5 < t \leq 10s$, amplitude de $z_r(t) = 0$. Esse mesmo perfil de pista foi considerado em (OLIVEIRA et al., 2018a). Além disso, para implementações foram considerados os seguintes valores para os parâmetros incerto: $M_s = 2{,}45$ e $\Delta K_{us} = 0$.

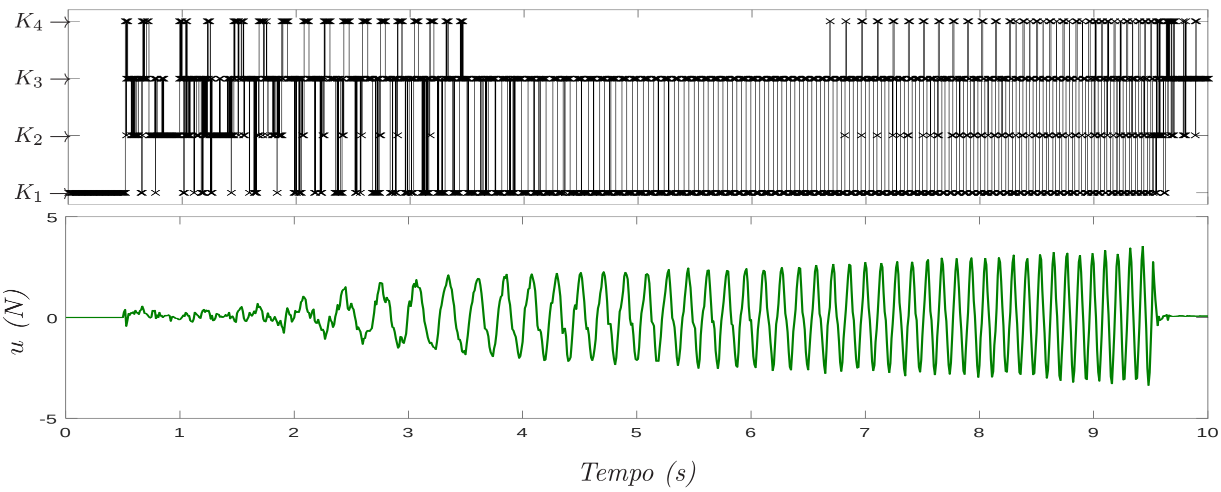
A Figura 34 apresenta o deslocamento das placas z_s e z_us, para o sistema em malha aberta e em malha fechada, considerando o perfil da pista z_r. Pode-se notar que o sistema em malha aberta apresenta resposta limitada, ou seja, é estável. Porém, o sistema apresenta grandes oscilações de amplitude, causando desconforto ao motorista e alto nível de esforço mecânico, que podem causar danos aos componentes da suspensão (OLIVEIRA et al., 2018a). Por sua vez, o sistema em malha fechada, considerando o controle chaveado (17), mesmo sob a restrição de saturação do atuador, reduziu a amplitude máxima do deslocamento das placas z_s e z_us, melhorando assim a segurança e o conforto do sistema e do motorista. A Figura 35 apresenta a entrada de controle ($u(k) = F_c(k)$) e o ganho do controlador escolhido em cada instante de tempo com a lei de controle chaveada (17). Note que os 4 ganhos possíveis foram ativados.

Figura 34 - Resposta dinâmica de z_s [placa azul] e z_{us} [placa vermelha] para o perfil da pista z_r [placa de prata].



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 35 - Resposta dinâmica de $u(t)$ e ganho do controlador escolhido em cada instante de tempo com a lei de controle chaveada.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

5.6 CONCLUSÕES PARCIAIS

Baseado em uma candidata a função de Lyapunov não quadrática e no conceito de hiper-retângulos fechados, um projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado para sistemas não lineares incertos discretos no tempo, sujeitos à saturação no atuador e distúrbio de energia limitada, foi proposto. O projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado proposto no Teorema 15, é capaz de mitigar a ação de um distúrbio limitado na saída do sistema e de manter as trajetórias do vetor de estado dentro de uma região, na qual todas as restrição impostas ao sistema são satisfeitas, como a representação (119) para $\text{sat}(u_\sigma(k))$, $\sigma \in \mathbb{K}_r$, e a descrição do sistema não linear por modelos fuzzy T-S. Além disso, o projeto proporciona a estimação de um conjunto de condições iniciais admissíveis, de forma que, toda trajetória nele iniciada, permanece na região na qual a representação do sistema por modelos fuzzy T-S é assegurada, mesmo estando o sistema sujeito a distúrbios externos. No Corolário 3 do Teorema 15, é apresentado um resultado, que utiliza um controlador invariante no tempo. Uma análise teórica de estabilidade, demonstra que se as condições do Corolário 3 são satisfeitas, então as LMIs do Teorema 15, referentes ao controlador chaveado proposto, também são satisfeitas.

Em um exemplo numérico, o procedimento proposto no Teorema 15, que utiliza um controlador chaveado, é comparado com um projeto de controle que utiliza um controlador invariante no tempo, apresentado no Corolário 3. Um segundo exemplo numérico aborda a aplicação do procedimento concebido no problema de controle de *backing-up a Truck-Trailer*. Por fim, um exemplo prático, que trata do controle de um sistema de suspensão ativa de bancada, demonstra a eficiência da metodologia de projeto de controladores chaveados proposta.

6 CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

6.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram propostas uma lei de controle chaveada e novas condições de estabilidade local para uma classe de sistemas não lineares incertos discretos no tempo com saturação nos atuadores. Um novo procedimento de projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos discretos no tempo descritos por modelos fuzzy T-S, considerando funções de pertinência dependentes de parâmetros incertos limitados, também foi apresentado. As incertezas paramétricas foram supostas limitadas e seus limites conhecidos. Os resultados propostos, foram elaborados com base na representação exata de sistemas não lineares com parâmetros incertos limitados por modelos fuzzy T-S. Embasado em (TANIGUCHI *et al.*, 2001; SANTIM *et al.*, 2012; ALVES, 2017), através de uma combinação convexa de modelos locais lineares conhecidos, ponderados por funções de pertinência dependentes de parâmetros incertos, os modelos fuzzy T-S incertos são encontrados. Os procedimento propostos foram obtidos considerando uma adaptação da FLF (GUERRA; VERMEIREN, 2004), e não utilizam as funções de pertinência para a implementação da lei de controle chaveado.

No Capítulo 3, para o desenvolvimento de condições que garantam a estabilização de sistemas não lineares dependentes de parâmetros incertos, foi suposto que o sistema opera dentro da sua região de operação, ou seja, dentro da região na qual a representação do sistema não linear incerto por modelos fuzzy T-S é válida. A partir de condições apresentadas em (OLIVEIRA; BERNUSSOU; GEROMEL, 1999) e utilizando uma candidata a função de Lyapunov não quadrática, um primeiro projeto de controle chaveado foi proposto (Teorema 5), o qual foi apresentado no congresso FUZZ-IEEE 2018 - IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Rio de Janeiro - RJ, 2018, no artigo intitulado *On switched control of discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with unknown membership functions* (OLIVEIRA *et al.*, 2018b). Com o objetivo de redução do conservadorismo nas condições do projeto de controle chaveado, outros resultados (Teoremas 8 e 9), baseados na teoria de hiper-retângulos, construído a partir de intervalos fechados, os quais são definidos pelos limites da variação das funções de pertinência do sistemas fuzzy T-S (MOZELLI *et al.*, 2009; GUEDES *et al.*, 2013). Análises teóricas de estabilidade (Teoremas 6, 10 e 11) mostraram a evolução dos métodos propostos e a vantagem deles sobre o procedimento que utiliza um controlador linear invariante no tempo, na estabilização de sistemas não lineares incertos.

Os resultados propostos no Capítulo 4, podem ser entendidos como uma extensões dos resultados apresentados Capítulo 3. Nos Teoremas 12, 13 e 14 são propostos projetos de controle chaveado para sistemas não lineares incertos sujeitos à saturação do sinal de controle, que garantem a operação do sistema dentro da região em que a representação por modelos fuzzy T-S é válida e que fornecem uma estimativa de seu DA. Para representar o sinal de controle sujeito à saturação, foi adotada a metodologia apresentada em (HU; LIN, 2001; HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003), na qual o sinal de controle sujeito à saturação é representado por uma combinação convexa dos valores do sinal de controle saturado e não saturado. As condições impostas nos projetos garantem a estimativa do DA em uma região em que todas as restrições às variáveis de controle e de estado são respeitadas. Além disso, nos Teoremas 13 e 14, utilizando o TVM em várias variáveis (SAGAN, 1974) e um limite politópico para o gradiente das funções de pertinência, ou seja, um politopo tal que o gradiente das funções de pertinência variam, é garantido que a estimativa do domínio obtida, também está situada dentro da região em que as restrições na variação das funções de pertinência são respeitadas. Os projetos são formulados como um problema de otimização LMI (BOYD *et al.*, 1994). O método proposto para a expansão da estimativa do domínio de atração é baseado na maximização do traço de uma matriz diagonal Π. O procedimento mostrou-se mais eficiente que outros presentes na literatura. Uma versão particular do Teorema 12, em que não se considera que o sinal de controle esteja sujeito à saturação, foi apresentado no congresso FUZZ-IEEE 2020 - 2020 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Glasgow, United Kingdom Scotland, em um artigo intitulado *Switched Control for Local Stabilization of Discrete-time Uncertain Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Relaxed Estimate of the Domain of Attraction*.

Exemplos numéricos ilustraram a eficiência dos métodos propostos no Capítulo 4. No Exemplo 2, foi apresentado um sistema não linear, atualmente amplamente discutido na literatura. Uma comparação entre as metodologias (Teoremas 12, 13 e 14 e Corolário 2) propostas e procedimentos presentes na literatura é apresentada. Simulações com o Teorema 12, que não utiliza qualquer informação das funções de pertinência, foram realizadas. No exemplo é possível observar o conjunto contrativamente invariante obtido, além da resposta dinâmica e a atuação da lei de controle chaveado. O Teorema 12 foi utilizado também no Exemplo 3, no qual foi demonstrado a vantagem do método de maximização da estimativa do DA proposto, quando comparado com os métodos apresentados em (CAO; LIN, 2003) e (LEE, 2013). No Exemplo 4, o Teorema 12 é utilizado na estabilização de um pêndulo invertido. Com diferentes taxas de decaimento, distintas estimativas do DA foram obtidas. As regiões das estimativas obtidas, foram relacionadas com as taxas de decaimento adotadas. Mesmo considerando taxa de decaimento, o procedimento proposto mostrou-se eficiente na concepção de um conjunto contrativamente invariante.

Novamente abordando o sistema caótico incerto de Lorenz, no Exemplo 5, o Teorema 14 é aplicado na estabilização do sistema. É possível observar que mesmo sob saturação do atuador, a estabilidade do sistema é assegurada para todo $x(k) \in \bigcap_{i=1}^{4} \Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},1\right)$. Além disso, as inclusões $\bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},1\right) \subset \mathcal{L}$ e $\bigcap_{i=1}^{r} \Omega\left(G^{-T}P_iG^{-1},1\right) \subset \bigcap_{l=1}^{r} \mathcal{S}(M_l)$ foram asseguradas e ilustradas. O Teorema 14 é também utilizado no Exemplo 6. Novamente o procedimento foi capaz de proporcionar um estimativa do DA. O comportamento do chaveamento, para cada possível trajetória dentro de uma região de operação é apresentado.

Baseado em (OLIVEIRA *et al.*, 2018a), no Capítulo 5, foi proposto um projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos discretos no tempo descritos por modelos fuzzy T-S, considerando região de operação e funções de pertinência dependentes de parâmetros incertos limitados. Utilizando uma candidata a função de Lyapunov não quadrática, o resultado apresentado no Teorema 14, que é baseado no conceito de hiper-retângulos fechados (GUEDES *et al.*, 2013), foi estendido no Teorema 15, para o controle de sistemas não lineares incertos sujeitos à saturação no atuador e distúrbio de energia limitada. A lei de controle chaveada garantiu ao sistema realimentado um índice de desempenho $\mathscr{H}_\infty$ e confinou todas as trajetórias do vetor de estado dentro de uma região de operação, na qual o sistema não linear incerto pode ser descrito por modelos fuzzy T-S, mesmo estando o sistema sujeito a distúrbios externos com energia limitada. Um resultado, derivado do projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado, que utiliza um controlador invariante no tempo é proposto no Corolário 3. Em uma análise teórica de estabilidade, foi demonstrado que se as condições do Corolário 3, que utiliza um controlador invariante no tempo são satisfeitas, então as condições LMIs do Teorema 15 também são satisfeitas.

Um exemplo numérico, ilustra a vantagem do procedimento proposto no Teorema 15, que utiliza um controlador chaveado, sobre o projeto de controle que utiliza um controlador invariante no tempo, apresentado no Corolário 3. Um segundo exemplo numérico que considera o problema de controle de *backing-up a Truck-Trailer* demonstra a eficiência da metodologia proposta no Teorema 15. A minimização do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ mitigou o efeito do distúrbio na saída do sistema. O exemplo deixa claro que os propósitos do projeto de controle, como a criação de regiões invariantes que garantem a representação do sistema não linear por modelos fuzzy T-S, mesmo estando ele sob pertubações externas, são totalmente alcançados. Finalmente, o projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ é aplicado em um exemplo prático utilizando um sistema de suspensão ativa de bancada. O controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado se mostrou capaz reduzir as amplitudes máximas das oscilações das placas, proporcionando conforto e segurança ao sistema.

6.2 PESQUISAS FUTURAS

Como perspectivas de pesquisas futuras, pode-se listar os seguintes tópicos:

- Adaptar os resultados obtidos para o projeto de controle chaveado para realimentação de saída de sistemas incertos discretos no tempo.

- Além de satisfazerem as relações $|\Delta h_i(z(k))| \leq \phi_i,\ i \in \mathbb{K}_r$, com $0 < \phi_i \leq 1$, como visto no Lema 2, as variações das funções de pertinência satisfazem a equação $\sum_{i=1}^{r} \Delta h_i(z(k)) = 0$. Dessa forma, as variações das funções não pertencem apenas ao subespaço do $\mathbb{R}^r$, dado pelo hiper-retângulo (58), elas estão contidas na variedade convexa de dimensão $r-1$, dada pela interseção do hiper-retângulo (58), com o hiper-plano definido pela equação $\sum_{i=1}^{r} \Delta h_i(z(k)) = 0$ (MOZELLI, 2011). Sendo assim, para incluir informações mais precisas sobre as variações temporais das funções de pertinência no projeto de controle, é possível utilizar os vértices do politopo definido pela interseção do hiper-retângulo (58), com um hiper-plano. Portanto, depois de uma análise de viabilidade, essa alternativa para o procedimento proposto de projeto de controladores chaveados pode ser explorada em pesquisas futuras.

- Estudar o desempenho do controlador chaveado com a utilização de outras representações para a função não linear $\text{sat}(u(k))$, como apresentado em (TARBOURIECH *et al.*, 2011).

6.3 PUBLICAÇÕES

SANTOS, G. R.; OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; LAZARINI, A. Z. N. . "Switched Control for Local Stabilization of Discrete-time Uncertain Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Relaxed Estimate of the Domain of Attraction". In: FUZZ-IEEE 2020 - 2020 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Glasgow, United Kingdom Scotland, 2020.

OLIVEIRA, D. R.; **SANTOS, G. R.**; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; Alves, U. N. L. T. "On switched control of discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with unknown membership functions". In: FUZZ-IEEE 2018 - IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Rio de Janeiro - RJ, 2018, Available: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8491671.

CARNIATO, L. A.; CARNIATO, A. A.; OLIVEIRA, D. R.; **SANTOS, G. R.**; ORTUNHO, T. V.; TEIXEIRA, M. C. M. Projeto de controle robusto para realimentação de saída de sistemas chaveados via LMIs e Algoritmo Evolutivo. In: Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, 2017, São José do Rio Preto. DINCON, 2017.

REFERÊNCIAS

ALVES, U. N. L. T. *Controle chaveado e chaveado suave de sistemas não lineares incertos via modelos fuzzy T-S*. 2017. 103 f. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2017.

ALVES, U. N. L. T.; OLIVEIRA, D. R. d.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Smoothing switched control for uncertain T-S fuzzy systems with unknown membership functions, actuator saturation and disturbance. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ-IEEE), [s.n.] 2016, Vancouver. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2016a p. 2212–2219.

ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R. de; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. de. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, West Sussex, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016b. ISSN 1099-1115.

BARTLE, R. G. *The Elements of Real Analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1976. 496 p. ISBN 978-0-471-05464-1.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM - Soc. Ind. Appl. Math., 1994. (Studies in Applied Mathematics, v. 15).

BUCK, R. *Advanced calculus*. 3rd edn. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1978. ISBN 0-07-008728-8.

BUZETTI, A. S. *Projeto de Controle Robusto Chaveado com Falhas nos Sensores*. 2017. 88 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2017.

CAO, Y.-Y.; LIN, Z. Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 11, n. 1, p. 57–67, Feb 2003. ISSN 1063-6706.

CHEN, Y.-J.; OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, W.-J.; WANG, H. Relaxed stabilisation criterion for discrete T-S fuzzy systems by minimum-type piecewise non-quadratic Lyapunov function. **Control Theory Applications, IET**, Stevenage, v. 6, n. 12, p. 1918–1925, Aug 2012. ISSN 1751-8644.

DANG, Q. V.; VERMEIREN, L.; DEQUIDT, A.; DAMBRINE, M. Robust stabilizing controller design for Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems under state constraints and actuator saturation. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 329, p. 77 – 90, 2017. ISSN 0165-0114.

DÍAZ, H.; ARMESTO, L.; SALA, A. Improvement of LMI controllers of Takagi-Sugeno models via Q-learning*. In: 4th IFAC CONFERENCE ON INTELLIGENT CONTROL AND AUTOMATION SCIENCESICONS, 2016, Reims. **IFAC-PapersOnLine**, v. 49, n. 5, p. 67 – 72, 2016. ISSN 2405-8963.

DÍAZ, H.; ARMESTO, L.; SALA, A. Fitted q-function control methodology based on takagi-sugeno systems. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York p. 1–12, 2019. ISSN 1063-6536.

DING, B. Dynamic output feedback predictive control for nonlinear systems represented by a Takagi-Sugeno model. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 19, n. 5, p. 831–843, 2011.

DING, B.; SUN, H.; YANG, P. Further studies on LMI-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form. **Automatica**, Elmsford. v. 42, n. 3, p. 503 – 508, 2006. ISSN 0005-1098.

ELIA, N.; MITTER, S. K. Stabilization of linear systems with limited information. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 46, n. 9, p. 1384–1400, Sep. 2001. ISSN 0018-9286.

GAINO, R.; COVACIC, M. R.; CARDIM, R.; SANCHES, M. A. A.; DE CARVALHO, A. A.; BIAZETO, A. R.; TEIXEIRA, M. C. M. Discrete Takagi-Sugeno fuzzy models applied to control the knee joint movement of paraplegic patients. **IEEE Access**, Piscataway, v. 8, p. 32714–32726, 2020.

GOLABI, A.; BEHESHTI, M.; ASEMANI, M. H. $\mathscr{H}_\infty$ robust fuzzy dynamic observer-based controller for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems. **Control Theory Applications, IET**, Stevenage, v. 6, n. 10, p. 1434–1444, 2012.

GUEDES, J. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Stability of nonlinear system using Takagi-Sugeno fuzzy models and hyper-rectangle of lmis. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Heidelberg, v. 24, n. 1-2, p. 46–53, 2013.

GUERRA, T. M.; KRUSZEWSKI, A.; BERNAL, M. Control law proposition for the stabilization of discrete Takagi-Sugeno models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York v. 17, n. 3, p. 724–731, June 2009. ISSN 1063-6706.

GUERRA, T. M.; VERMEIREN, L. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. **Automatica**, Elmsford, v. 40, n. 5, p. 823 – 829, 2004. ISSN 0005-1098.

HU, T.; LIN, Z. **Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design**, Secaucus, NJ, USA: Birkhauser Boston, Inc., 2001. ISBN 0817642196.

HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. **Automatica**, Elmsford, v. 38, n. 2, p. 351 – 359, 2002. ISSN 0005-1098.

KALMAN, R.; BERTRAM, J. Control system analysis and design via the second method of lyapunov: (i) continuous-time systems (ii) discrete time systems. **IRE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 4, n. 3, p. 112–112, December 1959. ISSN 0096-199X.

KHALIL, H. K. *Nonlinear systems; 3rd ed.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.

KLUG, M.; CASTELAN, E.; LEITE, V.; SILVA, L. Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi-Sugeno models. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 263, 06 2014.

KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. Control of nonlinear discrete-time systems subject to energy bounded disturbances using local T-S fuzzy models. In: 52nd IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL. 2013, Florence. **Prooceedings...** [S.l.: s.n.], 2013. p. 7426–7431. ISSN 0191-2216.

KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. A T-S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Heidelberg, v. 26, n. 3, p. 191–200, Jun 2015. ISSN 2195-3899.

LAM, H. K. LMI-based stability analysis for fuzzy-model-based control systems using artificial T-S fuzzy model. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 19, n. 3, p. 505–513, June 2011. ISSN 1063-6706.

LARA, C.; FLORES, J. J.; CALDERON, F. On the hyperbox - hyperplane intersection problem. **INFOCOMP - Journal of Computer Science**, Coimbatore, v. 8, n. 4, p. 21–27, 2009.

LASALLE, J. P. *The Stability and Control of Discrete Processes*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1986. ISBN 0387964118.

LEE, D.; HU, J. Local model predictive control for T-S fuzzy systems. **IEEE Transactions on Cybernetics**, Piscataway, v. 47, n. 9, p. 2556–2567, 2017.

LEE, D.; JOO, Y. H.; RA, I.-H. Local stability and local stabilization of discrete-time T-S fuzzy systems with time-delay. **International Journal of Control, Automation and Systems**, Heidelberg, v. 14, n. 1, p. 29–38, Feb 2016. ISSN 2005-4092.

LEE, D. H. Linear matrix inequality approach to local stability analysis of discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. **Control Theory and Applications, IET**, Stevenage, Institution of Engineering and Technology, v. 7, p. 1309–1318(9), June 2013. ISSN 1751-8644.

LEE, D. H.; JOO, Y. H. On the generalized local stability and local stabilization conditions for discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 22, n. 6, p. 1654–1668, Dec 2014. ISSN 1063-6706.

LEE, H. J.; PARK, J. B.; CHEN, G. Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 9, n. 2, p. 369–379, Apr. 2001. ISSN 1063-6706.

LO, J.-C.; LIN, M.-L. Robust $\mathscr{H}_\infty$, nonlinear control via fuzzy static output feedback. **IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications**, New York, v. 50, p. 1494 – 1502, 12 2003.

MOZELLI, L.; PALHARES, R.; SOUZA, F.; MENDES, E. Reducing conservativeness in recent stability conditions of ts fuzzy systems. **Automatica**, Elmsford, v. 45, n. 6, p. 1580 – 1583, 2009. ISSN 0005-1098.

MOZELLI, L. A. *Novas funções de Lyapunov fuzzy e soluções numéricas para análise de estabilidade e controle de sistemas via modelagem Takagi-Sugeno: aproximando os controles fuzzy e não-linear*. 2011. 122 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, 2011.

MÁRQUEZ, R.; GUERRA, T. M.; BERNAL, M.; KRUSZEWSKI, A. Asymptotically necessary and sufficient conditions for Takagi-Sugeno models using generalized non-quadratic parameter-dependent controller design. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 306, p. 48 – 62, 2017. ISSN 0165-0114.

OLIVEIRA, D. R. de; dos Santos, G. R.; Teixeira, M. C. M.; Assunção, E.; Cardim, R.; Alves, U. N. L. T. On switched control of discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with unknown membership functions. In: 2018 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ-IEEE). [s.n.] 2018, Rio de Janeiro. **Proceeding...** [S.l.: s.n.], 2018b. p. 1–8.

OLIVEIRA, D. R. de; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A. de; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. On local $\mathscr{H}_\infty$ switched controller design for uncertain T-S fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 344, p. 1 – 26, 2018a. ISSN 0165-0114. Theme: Control Engineering.

OLIVEIRA, M. de; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. A new discrete-time robust stability condition. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 37, n. 4, p. 261 – 265, 1999.

ONAT, C.; KUCUKDEMIRAL, I.; SIVRIOGLU, S.; YUKSEK, I.; CANSEVER, G. LPV gain-scheduling controller design for a nonlinear quarter-vehicle active suspension system. **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, London, v. 31, n. 1, p. 71–95, 2009.

ROCHA, T. C. T. *Domínios Positivamente Invariantes De Sistemas Lineares Com Restrições Nas Variáveis de Controle*. 1994. 107 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 1994.

SAGAN, H. *Advanced calculus: of real-valued functions of a real variable and vector-valued functions of a vector variable*. [S.l.]: Houghton Mifflin Co., 1974. ISBN 9780395170908.

SANTIM, M. P. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 2012, p. 1–17, 2012.

SLOTINE, J. E.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.

SOUZA, W.; TEIXEIRA, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, Dec. 2014.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.**, Piscataway, v. 15, n. 1, p. 116–132, Feb. 1985.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, May 1998.

TANAKA, K.; WANG, H. O. **Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach**. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2001. ISBN 0471323241.

TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. USA: John Wiley & Sons, Inc., 2001. ISBN 0471323241.

TANIGUCHI, T.; K.; OHATAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–537, Aug. 2001.

TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; SILVA, J. Gomes da; QUEINNEC, I. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. [S.l.]: Springer-Verlag London, 2011. ISBN 978-0-85729-940-6.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **IEEE Transaction Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŻAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 7, n. 2, p. 133–142, April 1999. ISSN 1941-0034.

VIDYASAGAR, M. *Nonlinear Systems Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 14–23, Feb 1996. ISSN 1063-6706.

WU, H.-N. An ILMI approach to robust $\mathscr{H}_2$ static output feedback fuzzy control for uncertain discrete-time nonlinear systems. **Automatica**, Elmsford, v. 44, p. 2333–2339, 2008.

WU, H.-N.; CAI, K.-Y. $\mathscr{H}_2$ guaranteed cost fuzzy control design for discrete-time nonlinear systems with parameter uncertainty. **Automatica**, Elmsford, Pergamon Press, Inc., USA, v. 42, n. 7, p. 1183–1188, 2006. ISSN 0005-1098.

YANG, W.; FENG, G.; ZHANG, T. Robust model predictive control for discrete-time

Takagi-Sugeno fuzzy systems with structured uncertainties and persistent disturbances. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 22, n. 5, p. 1213–1228, 2014.

ZHOU, S.; LAM, J.; ZHENG, W. X. Control design for fuzzy systems based on relaxed nonquadratic stability and $\mathscr{H}_\infty$ performance conditions. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 15, n. 2, p. 188–199, 2007.