

FREDY ENRIQUE GONZÁLEZ

**Aproximação Fenomenológica às ideias de George Cantor sobre o
Infinito em Matemática**

Relatório de Pós-doutorado realizado na
Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
- IGCE, Rio Claro.

Supervisora: Profa. Dra. Maria Aparecida
Viggiani Bicudo

Rio Claro

2025

PESQUISADOR

Fredy Enrique GONZÁLEZ

Doutorado em Educação (Ênfase em Educação Matemática)

Universidad de Carabobo (Valencia, Venezuela) / 27/01/1998

Endereço Eletrônico: fredhygonzalezdem@gmail.com Telefones: (+55) (84) – 9998646078

Possui Doutorado em Educação - Universidade de Carabobo, Valencia, Venezuela (1998). Professor Aposentado na Universidad Pedagógica Experimental Libertado (UPEL, Núcleo Maracay, Aragua, Venezuela); Coordenador-Fundador do Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM; UPEL Maracay) e do Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP; UPEL Maracay). Coordenador-fundador do PhD em Educação Matemática da UPEL Maracay; Coordenador do projeto de pesquisa intitulado "História Social da Educação Matemática na América Latina", vinculado à Linha de Pesquisa em Educação Matemática (018) do NIEM; Ministrador de cursos e seminários, orientador de dissertações e teses em várias universidades iberoamericanas. Professor convidado em: Universidad de Granada (Espanha), Universidad Mayor de San Andrés (Bolívia), Universidad Autónoma de San Carlos (Guatemala), Universidade Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana), Universidad de Cartagena (Colômbia), Universidad del Zulia, Universidad Nacional Experimental de Guayana, Universidad Fermín Toro, Universidad José Antonio Páez, Instituto Pedagógico de Barquisimeto, Instituto Pedagógico de Maturín, Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos (Venezuela); Diretor-Editor da Revista Paradigma (QUALIS A1). Consultor de pesquisa do Centro de Estudos Educacionais (CEED) ligado ao Departamento de Ciências Sociais e Humanas do Instituto Tecnológico de Santo Domingo, República Dominicana (2015-2017); Ex-vice-presidente da Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática (FISEM); membro associado do Comitê Latino-Americano de Matemática Educativa, CLAME (2016- atual). Membro do Comitê Científico do CIBEM-2021; Professor Visitante Estrangeiro da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) no Departamento de Educação (Dezembro de 2017 - 2021); Professor credenciado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEDMAT) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), na Linha de Pesquisa "Processos de Ensino e de Aprendizagem de Matemática".

SUPERVISORA

Professora Doutora Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Coordenadora do grupo de Fenomenologia em Educação Matemática - FEM

Maria Aparecida Viggiani Bicudo cursou Bacharelado e Licenciatura em Pedagogia, em nível da graduação, concluídos em 1963 e Pós-Graduação em Orientação Educacional, curso concluído em 1964, ambos na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras na Universidade de São Paulo, em São Paulo, capital. Posteriormente, realizou seu doutoramento, concluído em 1973, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, antigo Instituto Isolado do Ensino Superior do Estado de São Paulo que, em 1976, passou, junto aos outros Institutos Isolados desse Estado, a constituir a Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP. Foi *Research Fellow* entre os anos de 1974 e 1976 na *School of Education, University of California, Campus de Berkeley* nos Estados Unidos da América do Norte. No ano de 1979 realizou o concurso e obteve o título de Livre-Docente, em Filosofia da Educação, no Instituto de Letras, Ciências Sociais e Educação, Campus de Araraquara, pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP. Foi Presidente e Vice-Presidente da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos – SEPQ, de 1989 a 2007; de 2015 a 2023. Ocupou a posição de Pró-Reitora de Graduação da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho de 1993 a 2001. Foi Professora convidada da *Università Latoranense* de Roma em 2011. Foi do Comitê de Avaliação em Educação do CNPq de 2011 a 2014. É bolsista sênior do CNPq. Atualmente, aposentada de suas funções de professora, é docente Sênior do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, campus de Rio Claro – SP, orientando alunos de mestrado, doutorado e de pós-doutorado. É Coordenadora do grupo de Fenomenologia em Educação Matemática - FEM e editora da Revista Pesquisa Qualitativa - RPQ. Fonte: <http://www.mariabicudo.com.br/>

I. Estudo de bibliografia

Para o estudo, fiz uma pesquisa documental de fontes entrecruzadas (dado que entre elas são perceptíveis temas em comum). Entre tais fontes se encontram textos de autores que tecem comentários sobre a obra de Cantor ou que realizam estudos com base na obra desse autor e obras originais do próprio Cantor. Os itens relativos ao primeiro conjunto mencionado, estão arrolados na bibliografia apresentada no final deste Relatório. Estudei os trabalhos originais de George Cantor, particularmente seus artigos de 1870 e 1871 (sobre o Problema da Unicidade para representar uma função qualquer por meio de séries trigonométricas de Fourier); o de 1874 sobre a não enumerabilidade do conjunto dos números reais; e os de 1883 e 1884 sobre números transfinitos. Além desses trabalhos de Cantor, também estudei os trabalhos de José Ferreirós, dedicados à Teoria de Conjuntos de Cantor, os de Joseph Dauben e Phillip Jordain, também sobre os trabalhos de Cantor, e, por fim, a tese de doutorado de intitulada "O Infinito Contado por Deus. Uma Interpretação Dedekindiana do Conceito de Número Ordinal Transfinito de Cantor", defendida no 2006 por Walter Gomide do Nascimento Júnior, na Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro. Estes trabalhos, além de também estarem indicados na bibliografia que traz os textos estudados, estão aqui expostos mediante um pequeno resumo. A seguir, trago uma breve justificativa da escolha desses trabalhos como bibliografia significativa para o desenvolvimento da pesquisa, destacando sua importância, e um resumo de cada uma dessas obras, indicando em linhas gerais o conteúdo do trabalho e quais seus aportes para a pesquisa.

- **Justificativa da Escolha Bibliográfica**

A seleção dos artigos originais de Cantor (1870-1874, 1883-1884) é justificada porque neles é possível apreciar o percurso da sua trajetória intelectual, desde sua procura por soluções para o problema da unicidade de séries trigonométricas (1870) até a formalização da Teoria dos Números Transfinitos (1883-1884). Nesses trabalhos Cantor conseguiu construir as bases para sustentar o tratamento matemático do infinito, podendo, dessa forma, fundar a Teoria dos Conjuntos, que logo tornara-se a linguagem fundamental de quase toda a Matemática, aqui tomada como ciência da cultura ocidental.

As obras de Ferreirós, Dauben e Jourdain, são consideradas importantes porque, no seu conjunto, oferecem análises historiográficas e epistemológicas críticas, contextualizando o pensamento cantoriano na dimensão do estado do desenvolvimento da Matemática do século XIX e suas implicações filosóficas. Por fim, a tese de Gomide Júnior introduz uma perspectiva interpretativa singular, articulando a noção de infinito cantoriano com a Filosofia da

Matemática de Dedekind, o que complementa a abordagem proposta na pesquisa, ao vincular aspectos ontológicos e epistemológicos do conceito de número transfinito.

- **Resumos das Obras originais**

1. *Artigos de Cantor (1870-1871, 1874, 1883-1884)*

Os artigos de Cantor entre 1870 e 1884 marcam a evolução de seu pensamento sobre o infinito. Nos primeiros trabalhos (1870-1871), ele investiga a unicidade das representações de funções por séries trigonométricas, questionando pressupostos sobre continuidade e convergência — um passo crucial para sua posterior descoberta dos conjuntos não enumeráveis (1874). Em *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (Sobre Conjuntos Infinitos de Pontos) (1883-1884), Cantor formaliza os números transfinitos como entidades matemáticas legítimas, distinguindo infinitos potenciais e atuais e estabelecendo a aritmética transfinita. Esses textos são centrais para a pesquisa por revelarem a gênese conceitual do infinito cantoriano, suas rupturas com a tradição (e.g., rejeição do infinito aristotélico) e sua metodologia inovadora, que combina intuição e rigor formal.

2. *José Ferreirós (Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics, 1999)*

Ferreirós examina o desenvolvimento da teoria dos conjuntos desde Cantor até o século XX, destacando como questões técnicas (e.g., a Hipótese do Contínuo) e debates filosóficos (sobre a natureza dos objetos matemáticos) moldaram a disciplina. Sua análise contextualiza as ideias de Cantor no âmbito do programa de "Aritmetização da Análise", mostrando como a noção de conjunto emergiu de problemas concretos. Para a pesquisa, este trabalho é crucial por elucidar as motivações históricas e epistemológicas, subjacentes ao infinito cantoriano, além de discutir críticas dos matemáticos contemporâneos de Cantor (e.g., Kronecker) que influenciaram a recepção de suas ideias.

3. *Joseph Dauben (Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite, 1979)*

Dauben explora a biografia intelectual de Cantor, vinculando suas descobertas matemáticas a suas reflexões filosóficas e teológicas sobre o infinito. O livro detalha como Cantor justificou os números transfinitos através de argumentos metafísicos (e.g., a ideia de um "infinito absoluto" divino) e matemáticos (e.g., o princípio da correspondência biunívoca). Essa obra é relevante por oferecer uma visão integrada do pensamento cantoriano, destacando tensões entre inovação matemática e tradição filosófica, o que ressoa como uma abordagem fenomenológica que busca compreender a constituição do conceito de infinito.

4. Philip Jourdain (*The Development of the Theory of Transfinite Numbers*, 1910)¹

Jourdain analisa a evolução técnica da teoria dos números transfinitos, desde os primeiros trabalhos de Cantor até formalizações posteriores (e.g., axiomatização de Zermelo). Seu foco na estrutura lógica e nas definições cantorianas (e.g., ordinalidade e cardinalidade) complementa as leituras históricas de Ferreirós e Dauben. Para a pesquisa, o texto é valioso por sistematizar os aportes formais de Cantor, permitindo contrastar sua intuição original com reconstruções posteriores, importante para compreender as intuições que podem ser visualizadas ao se estudar e buscar olhar para além das categorizações e formalizações a respeito do infinito tratado por Cantor.

5. Walter Gomide Júnior (*O Infinito Contado por Deus*, 2006)

A tese de Gomide Júnior propõe uma interpretação dedekindiana dos ordinais transfinitos, argumentando que Cantor concebia os números como "livres criações do espírito humano" (inspirado em Dedekind), mas também como reflexos de uma realidade metafísica. O trabalho articula matemática, filosofia e teologia, sugerindo que o infinito cantoriano opera em dois níveis: o formal (aritmética transfinita) e o simbólico (o Absoluto divino). Para a pesquisa, essa perspectiva é significativa por abrir caminho para que se possa compreender a presença de uma dualidade no movimento do pensar o infinito de um ponto de vista da Matemática, além de dialogar com questões sobre a fundamentação ontológica dos objetos matemáticos.

Conclusão

O exame desse recorte da bibliografia estudada permite visualizar o percurso transitado por Cantor no desenvolvimento das suas descobertas e criações matemáticas; nesse trânsito são apreciáveis três dimensões: Técnico-Matemática; Histórico-Contextual; e Filosófico-Conceitual.

A primeira se refere ao desenvolvimento de questões propriamente matemáticas. Em 1870, abordou o Problema da Unicidade das Séries Trigonômétricas (Séries de Fourier); sua estratégia foi examinar os conjuntos de pontos onde a função não é contínua; e daí teve a necessidade de estudar conjuntos não finitos. Em seguida, em 1872, usando sua noção de Conjunto Derivado, desenvolveu o conceito de Número Ordinal Transfinito; já, em 1874, pela primeira vez, conseguiu provar que existem tamanhos diferentes de infinito (enumeráveis e não enumeráveis), mostrando seu método de diagonalização.

A segunda dessas três dimensões corresponde ao ambiente intelectual em que Cantor desenvolveu suas pesquisas. Primeiramente, destaca-se que os trabalhos de Cantor estiveram

¹ "The Development of the Theory of Transfinite Numbers. (Part III. From 1870 to 1882.)" *Archiv der Mathematik und Physik*, 3. Reihe, 16. Band (1910), S. 21–43.

inseridos no contexto da busca pelo rigor na Matemática, e teve a influência de matemáticos como Weierstrass, Kronecker, Dedekind, Riemann e Heine, entre muitos outros. Por outro lado, a ousadia de seu pensamento e, sobretudo, o tratamento dado ao infinito, iam na contramão do que era aceito e defendido por matemáticos de grande influência, não só, científica, como, também, política. Como exemplo da influência política, pode-se trazer o caso de Kronecker, que sustentava uma filosofia finitista da Matemática, contrária às ideias de Cantor. Isso ocasionou certo bloqueio à publicação dos trabalhos de Cantor na Revista *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (em português: Revista de Matemática Pura e Aplicada). Mas, ainda que durante sua gestação e publicação as propostas cantorianas tivessem recebido muita resistência, no fim foram reivindicadas, principalmente pela defesa que delas fez David Hilbert, quando, em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris, colocou como o Primeiro dos 23 Problemas de sua famosa lista, a Hipótese do Contínuo (um problema central na teoria dos conjuntos de Cantor).

Por fim, a terceira das dimensões anotadas tem a ver com as implicações das propostas de Cantor, além da Matemática. Primeiramente, o fato de ter conseguido a aritmetização do infinito constituiu um salto epistemológico enorme: derrubou séculos do domínio aristotélico no tratamento do infinito atual; desvelou a existência de uma hierarquia de infinitos; e atribuiu ao infinito a categoria de ser um objeto matemático por direito próprio.

Do acima exposto, pode-se afirmar que o trabalho de Cantor: satisfaz uma necessidade da Matemática, contribuindo para superar alguns dos paradoxos gerados pelo tratamento intuitivo do infinito; expôs a natureza do infinito (existem infinitos de diferente tamanho); gerou uma crise nos fundamentos filosóficos da Matemática; e, por fim, propiciou uma mudança de paradigma na Matemática ao consolidar o tratamento conjuntistas de suas noções nucleares.

II. Resumo da Pesquisa Realizada

- **Dados gerais de identificação da pesquisa**

Título: *Aproximação Fenomenológica às ideias de George Cantor sobre o Infinito em Matemática*²

Pós-Doutorando: Prof. Dr. Fredy Enrique GONZÁLEZ

Supervisora: Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo

² Informo que tenho um texto escrito sobre o estudo realizado nesta pesquisa, com 40 laudas. Entretanto, ainda não foi organizado em artigos e, portanto, não foi publicado. Estamos trabalhando, no momento, na elaboração de três artigos com base nesses estudos: a) ambiente intelectual em que Cantor desenvolveu suas pesquisas; b) como o problema da *unicidade* se mostrou como o alicerce para a criação da teoria dos conjuntos de Cantor; c) o movimento de construção da teoria dos *números transfinitos*.

Resumo. *Ao longo dos séculos, nas culturas mais diversas, a ideia da grandeza das coisas, da distância que nos separa daquilo que está longe de nós (as estrelas, a lua, o sol, ...), do que fica nos confins do Universo, tem exercido um enorme fascínio sobre os seres humanos. De igual forma, o que é pequeno, aquilo que escapa de nosso campo visual próximo, tem também chamado sua atenção. Como acessar isso tão grande ou tão pequeno? Como ter acesso ao que está longe do mais longe que possa ser imaginado? Ou ter acesso ao tão pequeno que resulta praticamente inexistente? Qual é a natureza dessas entidades, suposto que elas tenham alguma classe de existência? E mais, elas existem? A procura de resposta para essas e muitas outras perguntas dessa natureza, têm sido a tarefa, por vezes obsessiva, empreendida por teólogos, filósofos, científicos de áreas diversas. Assim como os teólogos e filósofos refletiram sobre o assunto, os matemáticos também refletiram, se destacando, entre outros, Galileu Galilei, Leibniz, Cauchy e Cantor. Essa ideia do ἄπειρον (ápeiron) o que não tem limites, com o tempo foi se encorporando na Matemática como a ideia de infinito, gerando a necessidade de seu esclarecimento; tarefa essa que foi efetuada por Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, mesmo que sua preocupação inicial não tenha sido essa. Foi Cantor que conseguiu “domar” o infinito. Nesta pesquisa tentaremos uma aproximação científico-filosófico- fenomenológica às ideias de George Cantor sobre o Infinito em Matemática. As perguntas norteadoras da pesquisa são: O que é característico do pensar de Cantor sobre o infinito na Matemática? Como se dá o infinito no pensamento de Cantor? Quais os aspectos centrais presentes na concepção de infinito como pensado por Cantor na Análise Matemática contemporânea?*

Palavras Chave: *Análise Matemática. Aritmetização da Análise. Números Transfinitos. Infinito Matemático.*

- **Descrição Geral da Pesquisa**

Como um requisito parcial do estabelecido no Artigo 100 das disposições sobre o Programa de Pós-doutorado na UNESP-RC, este documento tem como intenção dar conta das atividades realizadas pelo pesquisador, como estudante de pós-doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM), pertencente ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – (UNESP-Campus de Rio Claro), sob supervisão da Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo (Anexo 1). O presente projeto foi aprovado pela Universidade 09 de outubro de 2022, com a previsão de ser realizado em dois anos. Os estudos e reuniões de orientação com a supervisora desta investigação vem sendo realizados, sistematicamente, durante três a quatro horas semanais, nas segundas-feiras.

O projeto de pesquisa contemplado nestes estudos de pós-doutoramento desenvolvidos pelo pesquisador, implica a realização de um estudo científico-filosófico-fenomenológico das ideias de George Cantor sobre o infinito em Matemática e como poderiam ser expostas no ensino de Análise Matemática em cursos de formação de professores de Matemática. Um esboço dos achados é apresentado mais adiante neste relatório.

Na pesquisa estão foram consideradas as dimensões (Técnico-Matemática; Histórico-Contextual; e, Filosófico-Conceitual) acima indicadas, ao fim de expor: (a) o solo filosófico, religioso, científico e matemático no qual Cantor desenvolveu sua formação e como afetaram ao desenvolvimento das suas ideias matemáticas; (b) os cientistas, filósofos e matemáticos que o antecederam e os seus contemporâneos que influenciaram o seu pensamento matemático; (c) a ruptura paradigmática propiciada pelas propostas de Cantor sobre o infinito; (d) dificuldades enfrentadas e superadas por Cantor a fim de conseguir que suas ideias sobre o infinito fossem aceitas pela comunidade matemática da sua época. Olhando dessas vertentes, surgem as seguintes indicações:

Levando em consideração o universo humano no qual George Cantor desenvolveu sua vida, quais foram as ideias filosóficas, religiosas, científicas e matemáticas predominantes que circulavam no seu ambiente científico-acadêmico que influenciaram o seu trabalho? Quais foram os protagonistas principais desta História (filósofos, teólogos, cientistas, matemáticos)? De que perspectiva o termo “realidade” exposto no trabalho de Cantor sobre o infinito é passível de ser compreendido? Como se apresenta o universo simbólico do Infinito cantoriano? Que obstáculos epistemológicos Cantor teve que superar para que suas ideias fossem aceitas?

Essas inquietações constituem um desdobramento de uma questão muito mais geral, cuja resposta é o alvo final da pesquisa em pauta, que é formulada da maneira exposta a seguir: *De que modo Cantor conseguiu posicionar a noção do infinito, no âmbito da Ciência Matemática?* Essa pergunta geral conduz para perguntas específicas expostas a seguir:

O que é característico do pensar de Cantor sobre o infinito na Matemática? Como se dá o infinito no pensamento de Cantor? Quais os aspectos centrais presentes na ideia de infinito como pensado por Cantor na Análise Matemática contemporânea? Quais as ideias presentes em sua Teoria dos Números Transfinitos, que evidenciam o fato de ele, do ponto de vista da Matemática, ter dado conta do infinito? Como compreende o infinito e como o trabalha matematicamente? De que perspectiva se pode compreender que ele conseguiu colocar o infinito nas mãos dos matemáticos?

Essas interrogações são indicadoras de que a busca de resposta há de conduzir para um pensar filosófico, na procura de uma compreensão aprofundada das ideias, ou melhor, do pensamento de Cantor, entendendo que esse seu pensar se desenvolveu no âmbito da Ciência própria da Civilização Ocidental. A *Teoria dos Números Transfinitos* de Cantor, foi incorporada ao ensino da Análise Matemática nos cursos de formação de professores que ensinam Matemática e, tanto o ensino, quanto a aprendizagem desse assunto tem se mostrado complexo e de difícil realização bem sucedida.

A seguir, no item III, trago uma exposição, em forma de um esquema, da pesquisa que realizei. Todos os estudos realizados estão descritos e relatados, para serem retomados ao tomarem a forma de um ou mais artigos a respeito dos temas (a), (b), (c) e (d) acima mencionados. A intenção é ir evidenciando, para além do exposto nesses estudos, a ideia de infinito que vai se mostrando na obra de Cantor, e como essa ideia ficou expressa na sua Teoria dos Números Transfinitos.

III. Exposição sucinta da investigação realizada conforme o proposto no Projeto para este Pos-Doc.

- **Exposição sucinta da investigação realizada.** *Aritmética Transfinita: Uma Imersão Arqueológica nas Ideias de Cantor sobre o Infinito*

1. Introdução: Origens e Contextualização Histórica

1.1. O Infinito Pré-Cantoriano: Uma Noção Controversa

Antes de Georg Cantor (1845-1918), o *infinito* era um conceito envolto em ambiguidades e resistências. Três fatores principais contribuíam para essa controvérsia:

(a) O Tratamento Intuitivo e Não Axiomático do Infinito

- Visão de infinito na matemática grega: o infinito era visto como um processo potencial, conforme a concepção aristotélica, e não como uma entidade completa.
- Matemáticos como Gauss evitavam explicitamente o uso do infinito atual, considerando-o uma abstração perigosa.
- A falta de formalização levava a interpretações vagas, como nos paradoxos de Zenão (e.g., Aquiles e a tartaruga).

(b) Paradoxos e Contradições

- O infinito estava associado a problemas lógicos, como:
- O Paradoxo de Galileu: A correspondência biunívoca entre números naturais e seus quadrados sugeria que "o todo pode ser igual à parte".
- Os Infinitesimais no Cálculo: As críticas de Berkeley aos "fantasmas de quantidades desaparecidas" de Newton e Leibniz mostravam a fragilidade do infinito na análise.

(c) A Herança Aristotélica

- Aristóteles defendia que o infinito só existia como processo (infinito potencial), nunca como totalidade (infinito atual).
- Essa visão dominou por séculos, influenciando até mesmo matemáticos como Cauchy e Weierstrass, que evitavam o infinito em suas construções analíticas.
- A influência aristotélica permaneceu predominando no pensamento matemático durante séculos até que foi superada pelos trabalhos de Cantor que foram antecidos pelos tratamentos dados ao infinito, entre outros por Cauchy, Weierstrass e Dedekind como exponho a seguir:

Antes dos trabalhos de Cantor, a trajetória da ideia de infinito em Cauchy, Weierstrass e Dedekind, no século XIX, definiu um percurso de tentativas para conseguir superar as abordagens intuitivas e alcançar a rigorosidade aritmética na Análise Matemática; dando destaque, primordialmente ao Infinito Potencial, no qual o infinito é tratado como um processo sem fim, ainda imbuído das ideias aristotélicas. Assim sendo, *Cauchy* na sua tentativa de formalizar a ideia de limite, continuo tratando o infinito como processo dinâmico e de aproximação indefinidamente crescente; mas ele não atribuiu caráter estático pelo que se manteve na ideia aristotélica do infinito potencial e não do infinito atual.

Weierstrass, sem apelar à intuição geométrica ou "movimento", deu uma definição puramente aritmética do limite; mas, mesmo assim, *Weierstrass* rejeitou o infinito atual (como um objeto completo), alinhando-se ao infinito potencial aristotélico — o infinito como uma possibilidade de continuar indefinidamente

Foi *Dedekind* um dos primeiros em se movimentar tacitamente na direção do Infinito Atual; pois, ao criar os Cortes de Dedekind para definir os números reais, ele pressupôs a existência completa e acabada do conjunto infinito dos números racionais e o conjunto de todos os possíveis cortes. Mais tarde, em sintonia com Bolzano, ele formalizou sua aceitação do infinito em ato, definindo um conjunto infinito como aquele que pode ser colocado em correspondência biunívoca com um de seus subconjuntos próprios. Desse modo, a tríade Cauchy-Weierstrass-Dedekind estabeleceu os fundamentos rigorosos da Análise, mas com uma distinção crucial:

enquanto Cauchy e Weierstrass evitaram que o infinito fosse tratado como um objeto estático, Dedekind forneceu as ferramentas (os conjuntos infinitos completos) que tornariam o infinito atual uma entidade matemática válida.

Mais, a verdadeira ruptura com o Infinito Potencial foi consumada por *Georg Cantor*, profundamente influenciado pelo trabalho conjuntista de Dedekind. Cantor explorou sistematicamente o Infinito Atual; não apenas aceitando a existência de conjuntos infinitos completos, mas também revelando a existência de uma hierarquia de infinitos de diferentes tamanhos. Dessa forma, conseguiu extrair ao infinito do âmbito filosófico e religioso, transformando-o em um objeto de estudo matemática,

1.2. A Motivação Pessoal do autor deste Relatório: Uma Jornada desde o Ensino Médio

A pesquisa tem raízes em uma experiência vivida por esse autor na década de 1960, quando um professor de matemática propôs o seguinte exercício: (a) Desafio: "Pensem no maior número que conseguirem imaginar"; (b) Resposta dos Alunos: Números muito altos foram sugeridos; (c) Conclusão do Professor: "O infinito é maior do que isso."

Essa simples afirmação despertou questões duradouras que se mostraram importantes: O que é o infinito? Como podemos comparar diferentes "tamanhos" de infinito? Por que o infinito matemático difere da noção intuitiva?

Essas interrogações permaneceram como fundo das inquietações deste autor, e, quando já avançado em sua trajetória de pesquisador, guiaram-no a explorar a obra de Cantor, onde o infinito deixou de ser um mistério para se tornar um objeto matemático rigoroso.

Os estudos desenvolvidos, principalmente na proposta apresentada para a realização deste estágio, expandiram o horizonte de compreensão da ideia de infinito, evidenciando, então, o que causava tanta perplexidade ao jovem aluno do ensino médio frente à resposta do seu professor; o que conseguiu compreender foi que, na visão do professor, o infinito era tratado como uma imensidade numérica. Com os trabalhos de Cantor essa visão foi superada, uma vez que com ele o *infinito* é entendido em uma perspectiva *conjuntista*, o que implica uma mudança paradigmática qualitativamente importante na Ciência Matemática.

Trata-se de uma Transição Conceitual em que o infinito deixa de ser pensado como *Imensidão Numérica* para ser concebido como uma *Totalidade Conjuntista*.

O andamento da presente pesquisa permite apreciar a importante transição conceitual que se deu no conceito de infinito, ilustrada pela vivência primordial, do autor deste Relatório, na década de 1960. A resposta do professor, naquela época, ao afirmar que o infinito era "muito maior" que qualquer número imaginado, reflete a visão intuitiva do infinito como imensidade numérica ou um processo sem fim, assumindo implicitamente o infinito potencial. A investigação de que trata o presente *Relatório*, viabiliza compreensões a respeito da superação do ‘assombro’ gerado pela grandeza só possível de imaginar como algo imensamente grande, longo, longe, inacabável e inalcançável; mas, intuitivamente possível.

Com o estudo realizado, foi possível superar o assombro advindo da intuição de imensidão alentada pela resposta dada pelo professor, ao substituí-lo pela compreensão da natureza matemática do infinito, possibilitada pelos estudos com o trabalho de Cantor, que evidenciou que o infinito deixa de ser concebido como um número imensamente grande, inalcançável, e passa a ser considerado como propriedade de certo tipo de conjuntos.

Entendeu-se que essa mudança de perspectiva gerou uma autêntica revolução paradigmática no campo da Matemática enquanto ciência. O conceito de totalidade (relativo à visão do conjunto como um objeto único) substitui o conceito de imensidão (no qual está implicado o processo de contagem infinita).

2. O Fascínio pelo Infinito: um passeio pela sua história

2.1. O Infinito na Antiguidade e na Filosofia

- Parmênides e Zenão: Os paradoxos de Zenão (e.g., a dicotomia) mostravam as dificuldades em conciliar movimento e infinito.
- Aristóteles: Na Física, defendia que o infinito era apenas potencial (e.g., a divisibilidade infinita de uma linha).

2.2. A Revolução Científica e o Infinito Matemático

- Galileu (1638): No *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze*; observou que os números naturais podem ser postos em correspondência com seus quadrados, desafiando a noção de que "o todo é maior que a parte".
- Newton e Leibniz: Introduziram infinitesimais no cálculo, mas sem uma fundamentação rigorosa, gerando críticas (e.g., Berkeley).

2.3. A Aritmetização da Análise no Século XIX

- Cauchy e Weierstrass: Eliminaram os infinitesimais, substituindo-os por limites ε - δ .
- Dedekind: Definiu os números reais via *cortes*, evitando apelos ao infinito atual.
- A ideia subjacente sobre o infinito considerada no processo de Aritmetização da Análise no Século XIX era predominantemente a do Infinito Potencial, conceito herdado da tradição aristotélica e reforçado pela busca por rigor de matemáticos como Cauchy e Weierstrass, que viam o infinito não como um objeto completo e estático, mas sim como um processo dinâmico, sempre incompleto, de crescimento ou aproximação. Mas, a busca pelo rigor exigiu que o infinito potencial fosse forçado a aceitar a existência de coleções infinitas completas, abrindo caminho para o Infinito Atual. A Aritmetização da Análise culminou na necessidade de definir rigorosamente o continuum, o que foi realizado por Dedekind através dos cortes, pressupondo a existência de um conjunto infinito completo de racionais. Essa aceitação tácita do infinito como conjunto ou totalidade forneceu a base para a ruptura de Cantor, que explicitou o que estava implícito, tratando o infinito não apenas como uma imensidão numérica, mas como uma propriedade (cardinalidade) de certos conjuntos, permitindo que ele se tornasse um objeto matemático manipulável.

3. Cantor e a Revolução do Infinito

3.1. O Problema da Unicidade das Séries de Fourier (1870-1871)

Cantor começou estudando sob quais condições uma função poderia ser representada unicamente por uma série trigonométrica.

- Descoberta: A unicidade dependia do comportamento dos conjuntos de pontos excepcionais (hoje chamados de "conjuntos de Cantor").
- Implicação: Isso o levou a investigar a estrutura de conjuntos infinitos.

3.2. A Descoberta da Não Enumerabilidade dos Reais (1874)

- Teorema de Cantor: Os números reais não podem ser colocados em correspondência biunívoca com os naturais.
- Consequência: Existem diferentes "tamanhos" de infinito ($\aleph_0 < |\mathbb{R}|$).

3.3. A Teoria dos Números Transfinitos (1883-1884)

Nos artigos *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Cantor:

3.3.1. Introduziu os Números Ordinais Transfinitos:

- ω (o primeiro ordinal transfinito, seguindo todos os naturais).
- $\omega+1, \omega+2, \dots, \omega \cdot 2, \omega^2$, etc.

3.3.2. Desenvolveu a Aritmética Transfinita:

- Operações como adição e multiplicação foram estendidas aos ordinais.

3.3.3. Definiu a Hierarquia de Infinitos:

- $\aleph_0$ (cardinalidade dos naturais).
- $\aleph_1$ (cardinalidade do próximo infinito maior).

4. O Legado de Cantor e Questões em Aberto

4.1. Impacto na Matemática Moderna

- Teoria dos Conjuntos: Tornou-se fundamento para a análise, topologia e lógica.
- Problemas Não Resolvidos: A Hipótese do Contínuo ($\aleph_1 = |\mathbb{R}|$?) permanece indecidível no ZFC.

4.2. Implicações Filosóficas

- O Infinito como Objeto Matemático: Cantor mostrou que o infinito pode ser estudado rigorosamente, do ponto de vista matemático.
- Relação com o Divino: Cantor via os números transfinitos como reflexos do infinito absoluto (Deus).

4.3. Implicações para a Educação Matemática

4.4. Direcionamentos Futuros para a Pesquisa

4.3.1. Análise dos Manuscritos de Cantor: Investigar como suas ideias evoluíram em cartas e anotações.

4.3.2. Diálogo com a Fenomenologia: Explorar como Husserl interpretou o infinito cantoriano.

5. O que ficou em mim – autor deste Relatório - após de ter realizado esta pesquisa?

5.1 Para tentar dar uma resposta dessa inquietação, levo em conta as perguntas que nortearam a pesquisa: O que é característico do pensar de Cantor sobre o infinito na Matemática? Como se dá o infinito no pensamento de Cantor? Quais os aspectos centrais presentes na ideia de infinito como pensado por Cantor na Análise Matemática contemporânea? Quais as ideias presentes em sua Teoria dos Números Transfinitos, que evidenciam o fato de ele, do ponto de vista da Matemática, ter dado conta do infinito? Como compreende o infinito e como o trabalha matematicamente? De que perspectiva se pode compreender que ele conseguiu colocar o infinito nas mãos dos matemáticos? Tentarei responde-las a partir do que sinto que é a minha compreensão no momento que estou fazendo o presente relatório.

5.2 Depois de muitos anos e de ter desenvolvido a presente pesquisa, sinto que, por fim, estou compreendendo, de modo mais claro, o significado *do que é infinito na Matemática*. Penso que meu primeiro encontro com o infinito, que aconteceu naquela aula de Matemática no Ensino Médio, em que o professor convidou toda a turma a pensar em um número imensamente grande, todos pensamos num número com uma quantidade muito longa de dígitos e, mesmo assim, o professor afirmou que “o infinito é muito maior do que isso”, ou seja, maior que o maior dos números pensados por nós, permaneceu ao longo de toda a trajetória de minha vida.

5.3 Naquele momento, instalou-se em mim a ideia de pensar ao infinito como número. Além disso, essa vivência numérica (ou seja, aritmética) do infinito, esteve acompanhada de outras noções, dessa vez, geométricas, tais como comprimento (o infinito é um número imensamente longo;

inalcançável; porque, por mais dígitos que tenha o número, supostamente infinito, no qual eu consiga pensar, o infinito sempre será muito maior do que esse número, segundo o pensar do meu antigo professor de Matemática). Mas, esse modo de vivenciar o infinito mudou com a pesquisa que desenvolvi, e que refiro neste relato.

5.4 Sinto que em mim, se deu um salto qualitativo, semelhante àquele que aconteceu, séculos atrás, quando Cantor gerou o modo de pensar o infinito; nele, o infinito não era mais “um número imensamente longo, porém uma característica própria de certo tipo de conjuntos. Assim sendo, com as noções, conceitos e teorias criadas por Cantor, a mais importante se mostra como a noção de conjunto que, embora não seja completamente dele, com ele se destacou de modo preponderante no pensar da Matemática, mantido até os dias atuais. O infinito deixou de ser pensado como número e passou a ser uma propriedade distintiva de certo tipo de conjuntos. Mas, como aconteceu isso?

5.5 Compreendi que junto com a ideia de número, está articulado o processo de *contar*, que nos permite saber o *quanto*. E é aqui onde está a chave. O contar na Matemática não é mais que a possibilidade de estabelecer uma correspondência um a um, entre os elementos do conjunto de objetos a ser contados, e os elementos de outro conjunto que serve de referência. Foi assim que Cantor, apoiando-se no fato de que os números racionais já eram aceitos pelos matemáticos desde a mais remota Antiguidade, retomou a ideia de correspondência *um a um*, para pensar o infinito em termos de conjuntos e não como um número. Para isso, toma como referência o seguinte conjunto de números naturais

$$S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ (Segmento Inicial } n\text{-ésimo de números naturais)}$$

5.6 Assim sendo, para Cantor um conjunto é finito quando seus elementos podem ser postos em correspondência um a um com os elementos de um Segmento Inicial de Números Naturais; caso contrário, o conjunto não seria finito, ou seja, seria infinito!!!!!!

IV. Produção científica

1. **Capítulo no livro** “Filosofia Fenomenológica da Educação Matemática”, em processo de publicação pela editora Livraria da Física, São Paulo, organizado por Maria Aparecida Viggiani Bicudo e Fabiane Mondine, a ser lançado no início de 2026, intitulado: *Cálculo e Análise: Distinções Conceituais e Implicações na Formação de Professores de Matemática*.
2. **Comunicação Científica em Evento Internacional.** Na Trigésima Octava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa – RELME 38, organizada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, realizada em Bogotá (Colombia) entre el 20 y el 26 de julio de 2025 em la la Universidad Antonio Nariño, foi apresentado o Reporte de Investigación (#40), intitulado: *Articulaciones entre Leibniz y Cantor sobre el Infinito Matemático*. Essa comunicação vai ser apresentada como Conferencia Convidada, tanto no IV COLOQUIO INTERNACIONAL DE HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA, organizado em forma conjunta pelas IES (Universidad Nacional de Trujillo (UNT)- Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo (UNPRG)-Universidad de Magallanes (UMAG)), em forma híbrida durante os dias 3, 4, 5 de dezembro de 2025. Também foi apresentada, a convite da comissão organizadora, no SEMINARIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA do Programa de Maestría y Doctorado en Educación Matemática da UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO em Bogotá – Colombia; 10 se septiembre de 2025
3. **Palestra Convidada do Eixo 13 –História da/na Educação Matemática e da/na Matemática no XV Encontro Nacional de Educação Matemática (XV ENEM)**, organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), realizado na Universidade Federal do Amazonas (UFAM), sob a responsabilidade do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da UFAM, na cidade de Manaus, no período de 28 de julho até 1º de agosto de 2025, intitulada: *Contribuições de Georg Cantor para o desenvolvimento da matemática e suas implicações na formação de professores*. Essa comunicação foi, posteriormente, apresentada como Conferencia Convidada no Seminário realizado na UNIVERSIDAD DE COSTA RICA, pela Escuela de Matemática, Departamento de Educación

Matemática; Sección de Didácticas Específicas; Carrera Bachillerato y Licenciatura de Educación Matemática; Ejes de formación: Historia y Epistemología; 1 de octubre del 2025.

4. **Artigo Publicado:** GONZÁLEZ, Fredy Enrique; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. The Philosophical-Scientific Ground on Which Young Husserl's Mathematical Education Took Place. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 26, n. 4, p. 1-24, jan./mar. 2024. DOI: 10.17648/acta.scientiae.8208. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/8208>.

5. **Artigo em Preparação:** *O Infinito na Matemática: Uma Análise Histórica e Epistemológica com Foco na Revolução Cantoriana*. **Resumo** Este artigo oferece uma análise exaustiva e multifacetada do conceito de infinito na matemática, traçando sua evolução desde as concepções filosóficas antigas até a formalização revolucionária de Georg Cantor. Abordaremos a trajetória intelectual de Cantor, desde sua formação e os problemas de análise que o impulsionaram, passando pela construção dos números reais e a demonstração da sua não-enumerabilidade, até a culminante criação dos números transfinitos e a teoria dos conjuntos. Exploraremos as implicações filosóficas, as controvérsias e o legado duradouro de sua obra, que redefiniu a compreensão matemática do infinito e desencadeou uma crise nos fundamentos da matemática, culminando no "paraíso" de Hilbert.

Palavras-chave: Infinito, Georg Cantor, Teoria dos Conjuntos, Números Transfinitos, História da Matemática, Epistemologia da Matemática, Análise Real, Crise de Fundamentos.

V. Referência das obras estudadas

ARBOLEDA, Luis Carlos. MODALIDADES CONSTRUCTIVAS Y OBJETIVACION DEL CUERPO DE LOS REALES. *Revista Brasileira de História da Matemática*, [s. l.], p. 19, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2007vn19. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/299>. Acesso em: 20 ago. 2024.

ARTHUR, Richard T.W. (2019). Leibniz in **Cantor's** Paradise: A Dialogue on the Actual Infinite. In: De Risi, V. (eds) *Leibniz and the Structure of Sciences*. Boston Studies in the Philosophy and History of Science, vol 337, p.71-109. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-25572-5_3

BELLO, Angela A. **Husserl e as Ciências**. (M. A. V. Bicudo; J. C. Bortolote; R. de F. Batistela, Tradutores para português). São Paulo, SP: Livraria da Física, 2022.

BICUDO, Maria Aparecida V. The origin of number and origin of geometry: issues raised and conceptions assumed by Edmund Husserl. **Revista Pesquisa Qualitativa**, 8(18), 2020, 387-418.

BOLZANO, Bernard. **The Paradoxes of the Infinite**. London: Routledge and Kegan Paul, 1950 (1831).

BOLZANO, Bernard. **Theory of Science**. *Attempt at a Detailed and in the main Novel Exposition of LOGIC. With Constant Attention to Earlier Authors*. Edited and translated by Rolf George. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1972 (1837).

BOLZANO, Bernhard. **Las Paradojas del Infinito**. México, DF: Mathema (UNAM), 1991, f. 161.

BOYER, Carl. **History of Calculus**. New York: Dover. 1959.

BRANCATO, Mattia. **Cantor** on the Notion of Infinity in Spinoza and Leibniz. **Lumières** (Éditions Presses universitaires de Bordeaux), 2021/1 (N° 37-38), 131-147. <https://www.cairn.info/revue-lumieres-2021-1-page-131.htm>

BUSSOTTI, Paolo; TAPP, Christian. The influence of Spinoza's concept of infinity on **Cantor's** set theory. **Studies in History and Philosophy of Science**, Part A, Volume 40, Issue 1, 2009, Pages 25-35, ISSN 0039-3681, <https://doi.org/10.1016/j.shpsa.2008.12.010>.

CALINGER, Ronald. The Mathematics Seminar at the University of Berlin: Origins, Funding and the Kummer-Weierstrass Years. In: CALINGER, Ronald (Ed.) **VITA MATHEMATICA. Historical research and integration with teaching**. Washington, DC: Mathematical Association of America. 1996. II. Historical Studies: From the Scientific Revolution to the Present, p. 153-176.

CANTOR, George. **Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers**. Translated, and provided with an introduction and notes, by Philip E. B. Jourdain. Dover Publications, New York, 1952, ix + 211 pp.

CANTOR, George. **Fundamentos para uma Teoria Geral de Conjuntos. Escritos y Correspondencia Selecta**. Edición de José Ferreirós. Barcelona, España: Editorial Crítica, S. L. 2006.

CANTOR, George. Letter to Mittag-Leffler, G. Cantor, **Briefe**, Berlin, Springer-Verlag, 1980, p.211.

CENTRONE, Stefania (ed.). **Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics**. Dordrecht, The Netherlands: Springer Verlag. (Synthese Library. Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science. Volume 384). 2017.

CENTRONE, Stefania; SILVA, Jairo José da. **Husserl and Leibniz: Notes on the Mathesis Universalis**. In: CENTRONE (2017), Chapter 1, pp 1-23.

CONTARATO, Thiago Sebastião Reis. **Mereologia, a composição do mundo – reflexões filosóficas sobre as partes que compõem os objetos**. Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

COSTA, Paulo Cesar, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2017. **A Construção dos Números Reais e Aplicações no Ensino Médio**. Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha. Coorientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca. <https://locus.ufv.br/server/api/core/bitstreams/55ac7ea3-74b5-4bda-b1ba-dd7dcf0f8c81/content>

DAUBEN, W. **Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite**, Princeton University Press, 1990.

DE BOER, Theodore. **The Development of Husserl's Thought**. (Translated by Theodore Plantinga). The Hague/Boston/London: Martinus Nijhoff, 1978.

DEDEKIND, Richard. **Qué son los números y para qué sirven?** y otros escritos sobre los fundamentos de la Matemática. Edición e Introducción a cargo de José Ferreirós. Madrid: Ediciones Alianza Editorial –

Universidad Autónoma de Madrid. 1998, 188p (Versão digitalizada transcripta do original publicado em alemão no 1887 disponível aqui: http://www.opera-platonis.de/dedekind/Dedekind_Was_sind_2.pdf).

DUNHAM, William. **Cantor**. In: W. DUNHAM. **The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue**, Chapter 11, p. 158-169. Princeton University Press. 2005.

FARBER, Marver. Edmund Husserl e os Fundamentos de sua Filosofia. **Revista da Abordagem Gestáltica** – XVIII(2): 235-245, jul-dez, 2012. Título original: “Edmund Husserl and the Background of his Philosophy”, publicado na revista *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. 1, Nr.1, p. 1-20 (1940), editada pela International Phenomenological Society

FERREIRÓS, José, The Early Development of Set Theory, **The Stanford Encyclopedia of Philosophy** (Summer 2023), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), <https://plato.stanford.edu/cgi-bin/encyclopedia/archinfo.cgi?entry=settheory-early>

FERREIROS, José. "What Fermented in Me for Years": Cantor's Discovery of Transfinite Numbers. **Historia Mathematica**, 22, 33-42. 1995.
https://www.researchgate.net/publication/223154506_What_Fermented_in_Me_for_Years_Cantor%27s_discovery_of_transfinite_numbers

FINK, Eugen (Ed.). Edmund Husserl: **Introduction to the Logical Investigations; A Draft of a Preface to the Logical Investigations** (1913). (Translated with Introductions by Philip J. Bossert and Curtis H. Peters). The Hague: Martinus Nijhoff. 1975

FONSECA, Aline; SILVA, Denise. Estudo Histórico do Paradoxo de Russell: A fecundidade de uma matemática falível. En Pérez-Vera, Iván Esteban; García, Daysi (Eds.), **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa** (pp. 544-553), 2019. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/14073/1/Fonseca2019Estudo.pdf>

FREGE, Gottlob. **The foundations of arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number**. Translated by J. L. Austin. xxii + 119. New York: Harper & Brothers. 1960 (1884).

GALILEI, Galileo. *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuoue scienze attenenti alla meccanica & i mouimenti locali, del signor Galileo Galilei linceo, ... con vna appendice del centro di grauità d'alcuni solidi*. Leida: Appresso gli Elseuiri, 1638. 334 p. Disponível em: https://archive.org/details/bub_gb_E9BhikF658wC. Acesso em: 03 dez. 2025.

GRAY, Jeremy. The Construction of the Real Numbers. In: **The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century**. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, Cham. Chapter 25, pp 253-258. 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23715-2_25

GRAY, Jeremy. **The Real and the Complex: A History of Analysis in the Nineteenth Century**. xvi + 350 pp., figs., illus., apps., bibl., index. Cham, Switzerland: Springer, 2015.

GUAMANGA, Miguel Hernando. Husserl: ¿Fenomenología de la matemática? **Eidos: Revista de Filosofía de la Universidad del Norte**, 36:170-192, 2021. Disponível In: <http://www.scielo.org.co/pdf/eidos/n36/2011-7477-eidos-36-170.pdf>

HADDOCK, Guillermo E. Rosado, ed. **Husserl and Analytic Philosophy**. Berlim/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2016. ISBN 978-3-11-049655-0; 978-3-11-049737-3; 978-3-11-049418-1. Pp. viii + 338.

HADDOCK, Guillermo E. Rosado. **Against the Current: Selected Philosophical Papers**. Frankfurt: Ontos, 2012. ISBN: 978386838148; PP. xii + 456.

HADDOCK, Guillermo E. Rosado. **Husserl's Relevance for the Philosophy and Foundations of Mathematics**. In HADDOCK (2012). Chapter 3, pp 99-109.

HARTIMO, Mirja. Mathematical roots of phenomenology: Husserl and the concept of number, **History and Philosophy of Logic**, 27:4, 319-337, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/01445340600619663>
<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01445340600619663>

HATCHER, William S. Aritmetization of Analysis. In: **Foundations of Mathematics: An Overview at the Close of the Second Millennium**. 15-18, 2000. http://bahai-library.com/hatcher_foundations_mathematics.
https://william.hatcher.org/wp-content/uploads/2008/09/foundations_mathematics.pdf

HILL, Claire Ortiz. Abstraction and Idealization in Edmund Husserl and Georg Cantor Prior to 1895. In: F. Coniglione, R. Poli, R. Rollinger (eds.), **Poznan studies in the philosophy of the sciences and the humanities** vol. 82, Idealization IV. Historical Studies on Abstraction and Idealization. Amsterdam: Rodopi, 2004, pp. 217-243.

HILL, Claire Ortiz. On Husserl's Mathematical Apprenticeship and Philosophy of Mathematics. In: TYMIENIECKA, Anna-Teresa. (Editor). **Phenomenology World Wide: Foundations - Expanding Dynamics - Life-engagements, a Guide for Research and Study**. Seção II: LAYING THE FOUNDATIONS OF PHENOMENOLOGY, pp 78-93, 2002.

HUSSERL Edmund. **Introduction to the Logical Investigations; A Draft of a Preface to the Logical Investigations (1913)**. (Eugen Fink, ed. Translated with Introductions by Philip J. Bossert and Curtis H. Peters). The Hague: Martinus Nijhoff. 1975)

HUSSERL, E., Über den Begriff der Zahl. Psychologische Analysen. Halle: Heyneman, 1887. In: P. McCormick and F. Elliston (eds.), **Husserl: Shorter Works**, Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1981, 92-120.

HUSSERL, Edmund. **Experiencia y Juicio. Investigaciones Acerca de la Genealogía de la Lógica**. (Redacción y edición de Ludwig Landgrebe Con un epílogo de Lothar Ele y Traducción: Jas Reuter. Revisión de Bernabé Navarro) (Título original en alemán: Erfahrung und Urteil. Editada por Claassen. Hamburg: 1948.). México 20, D. F.: Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria (Primera edición en español) 1980

HUSSERL, Edmund. **Investigações Lógicas, Primeiro Volume, Prolegômenos à Lógica Pura**. De acordo com o texto de Husserliana XVIII Editado por Elmar Holenstein Tradução de Diogo Ferrer. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2014, f. 114.

HUSSERL, Edmund. **Lógica formal y trascendental. (Trad. de L. Villoro)**. México: UNAM, 1962. (Original: *Formale und transzendente Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernunft*. Hua XVII. Hrsg. von P. Janssen. Den Haag: Nijhoff, 1974).

HUSSERL, Edmund. **Philosophy of Arithmetic. Psychological and Logical Investigations with Supplementary Texts from 1887–1901**. Collected Works X, D. Willard, trans., Dordrecht: Kluwer. 2003. Original: **Philosophie der Arithmetik. Psychologische und Logische Untersuchungen**. Halle (Saale): C.E.M. Pfeffer (R. Stricker), 1891.

IERNA, Carlo. **The Beginnings of Husserl's Philosophy, Part 2: From Über den Begriff der Zahl to Philosophie der Arithmetik**. In: HOPKINS, Burt; CROWELL, Steven & Col., (2006). Chapter 1, pp 33-82

IERNA, Carlo. **The Beginnings of the Husserl's Philosophy, Part 1: On the Concept of the Number to Philosophy of Arithmetic**. In: HOPKINS, Burt; CROWELL, Steven & Col., (2005). Chapter 1, pp 1-56

IERNA, Carlo. The Reception of Russell's Paradox in Early Phenomenology and the School of Brentano: The Case of Husserl's Manuscript A I 35a. In: Guillermo E. Rosado Haddock (ed.), **Husserl as Analytic Philosopher**. De Gruyter. pp. 119-142 (2016) /

JARNÍK, Vojtěch. Bernard Bolzano and the foundations of mathematical analysis (English). In: JARNÍK, Vojtěch; NOVÁK, Josef; FOLTA, Jaroslav; JARNÍK, Jiří. **Praha: Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists**, 1981. pp. 33-42. <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400082>

KLEIN, Félix. The arithmetizing of mathematics. 965-71, 1887. In: EWALD, W. B. **From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics**. Oxford: Oxford University Press, 1996, v. 1.

KLEIN, Felix. **Ueber Arithmetisierung der Mathematik**. Göttinger Nachrichten (Geschäftliche Mittheilungen), 1895, p.82. (The arithmetizing of mathematics. Miss Maddison's translation in the Bulletin, 2d series, vol. 2, p.241, 1896), 1895.

KLEIN, Félix. **Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert**. Vol. 1. Berlin: Verlag Von Julius Springer. p.611. 1926

KNOPP, Konrad. Analytic Continuation and Complete Definition of Analytic Functions. In: **Knopp** (1945), Ch. 8 pp 92-111.

KNOPP, Konrad. **Theory of Functions. Part I. Elements of the General Theory of Analytic Functions**. (Translated by Frederick Bagemihl, M.A.). New York: Dover Publications; 8 figures. vii + 146pp, 1945.

KOENIGSBERGER, Leo. **Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionenlehre** (Palestras sobre a teoria das funções elípticas e uma introdução à teoria geral das funções) volume 1 (Leipzig: Teubner, 1874), 1.

KRONECKER, Leopold. UBER DEN BEGRIFF DER ZAHL IN DER MATHEMATIK: Offentliche Vorlesung des Herrn Prof. Dr. L. Kronecker, gehalten an der Friedrich Wilhelms Universit'at zu Berlim im Sommer Semester 1891. Nach stenographischen Aufzeichnungen. (*Sobre o conceito de número em matemática. Palestra aberta do professor Kronecker, realizada na Universidade Friedrich Wilhelms em Berlim, no verão de 1891. De acordo com registros estenográficos*) In: BONIFACE, Jacqueline; SCHAPPACHER, Norbert. 'Sur le concept de nombre en mathématique' Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlim (1891). **Revue d'histoire des mathématiques**, Tome 7 (2001) no. 2, pp. 207-275. Disponível em: http://www.numdam.org/item/?id=RHM_2001__7_2_207_0

KVASZ, Ladislav "On the Arithmetization of the Calculus" Address to European Society for the History of Science, 5th Intl Conf, Nov 2012. URL: <http://5eshs.hpdst.gr/abstracts/113>

LAPOINTE, Sandra. **Bolzano's Theoretical Philosophy, An Introduction**. History of Analytic Philosophy. Houndmills, Basingstoke, Hampshire. Palgrave Macmillan, 2012.

LOPES, Adrielle Cristine Mendello; SÁ, Pedro Franco de. NÚMEROS REAIS: ASPECTOS HISTÓRICOS. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 3, n. 9, p. 79-90, 2018. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/56>. Acesso em: 19 ago. 2024.

LOPES, Paula Cristina Reis. **Construções dos Números Reais**. Dissertação (Mestre em Matemática, Especialização em Matemática para o Ensino) – Departamento de Matemática e Engenharias, Universidade da Madeira. Funchal, Madeira, Portugal, p. 163. 2006.

LOTZE, Rudolph Hermann. **Logic in Three Book of Thought, of Investigation, and of Knowledge**. Oxford: Clarendon Press, 1884.

MAGOSSI, José Carlos. O sonho de Lagrange. **Professor de Matemática On Line (PMO), Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática**, v.8, n.1, 2020, ISSN: 2319-023X; <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo8>

MARTINS, A. P. A construção do Sistema dos Números Reais por Weierstrass. In: Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática, 17, 2004, Lisboa. **Anais eletrônicos [...]** Lisboa: Museu de Ciência da Universidade de Lisboa, 2004, jun. 25 e 26. p. 1. Disponível em: <https://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/1403>. Acesso em: 20 ago. 2024.

MASSA ESTEVE, María Rosa. Karl Weierstrass (1815-1897). El padre del análisis matemático. **Métode**, Nro. 88, p. 28-34. Disponível em: <https://metode.es/revistas-metode/article-revistas/karl-weierstrass-1815-1897.html>

- MENZEL, Christopher. **Cantor** and the Burali-Forti paradox. **The Monist**, vol. 67, no. 1, Oxford University Press, 1984, p. 2–107. <https://doi.org/10.5840/monist19846712>
- MILLER, George Abram. Arithmetization in the History of Mathematics. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, Vol. 11, No. 9 (Sep. 15, 1925), pp. 546-548 (3 pages). <https://www.jstor.org/stable/84857>
- MILLER, J. Philip. **Numbers in Presence and Absence: A Study of Husserl's Philosophy of Mathematics**. The Hague/Boston/London: Martinus Nijhoff Publishers. 1982.
- MOHANTY, Jitendra Nath. Husserl and Frege: A New Look at their Relationship. In: Mohanty, J.N. (eds) **Readings on Edmund Husserl's Logical Investigations**. Springer, Dordrecht, 1977. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-010-1055-9_3
- NEWSTEAD, Anne. Cantor on Infinity in Nature, Number, and the Divine Mind. *In Proceedings of the American Catholic Philosophical Association*, September 2009, Vol. 83, No. 4, 2009, DOI: <http://dx.doi.org/10.5840/acpq200983444> ,
- NOVÁK, Josef. (Ed.). **On Masaryk: Texts in English and German**. Amsterdam, Netherlands: Rodopi, 1988, 150 n50.
- NUNES, Rhamon de Oliveira. **Mereologia e o Problema da Composição**. Em: IMAGUIRE; CID (2020b, Capítulo 4, pp 109-156.
- NUNES, Rhamon de Oliveira. **Totalidades e estrutura mereológica: Um estudo sobre a natureza dos objetos compostos**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Tese, 2020a. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=9310076#
- ORTIZ HILL, Claire. Did Georg **Cantor** Influence Edmund Husserl? **Synthese** 113: 145–170, 1997. https://www.researchgate.net/publication/242918145_Did_Georg_Cantor_Influence_Edmund_Husserl
- PAÚL, Pedro J. Fourier, **Cantor**, las series trigonométricas y la teoría de conjuntos. *In*: Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. **Blog del IMUS**. Fondo de Armario. Sevilla, España, 29 out. 2018. Disponível em: <https://institucional.us.es/blogimus/2018/10/trashed/>
- PIERPONT, James (1899). "On the Arithmetization of Mathematics," **Bulletin of the American Mathematical Society**, (5) No 8, URL: https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.bams/1183415834.
- SCHUHMANN, Karl. **Husserl and Masaryk**. In: Novák (1988, p. 129-156)
- SCHULTZ, Phill "Weierstrass, Dedekind and **Cantor** on the Foundations of Mathematics", URL: <http://staffhome.ecm.uwa.edu.au/~00003428/L28Weierstr,Dede,Cantor.html>
- SILVA, Circe Mary Silva da. As Notas de Aula de Karl Weierstrass em 1878. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [s. l.], v. 21, n. 42, p. 294–328, 2021. DOI: 10.47976/RBHM2021v21n42294-328. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/364> . Acesso em: 1 abr. 2024.
- SINKEVICH, Galina Ivanovna. On the History of Number Line. **Antiquitates Mathematicae**, Vol. 9(1) 2015, p. 83–92. doi:<http://dx.doi.org/10.14708/am.v9i0.832>
- SNOW, Joanne E. "Views on the real numbers and the continuum". **The Review of Modern Logic** 9 (2003), no. 1-2, 95--113. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.rml/1081173837>.
- SOARES, Maria Luísa Couto. Notas Sobre Referência e Intencionalidade: Frege E Husserl. **Phainomenon-journal.pt**, n.º 20-21, Lisboa, pp. 25-42. 2010. Disponível em: <http://www.phainomenon-journal.pt/index.php/phainomenon/article/view/262/220>

SRIVASTAVA, S. M. How did **Cantor** discover set theory and topology?, **Resonance** 19 (2014), 977-999. <https://doi.org/10.1007/s12045-014-0117-8>

SRIVASTAVA, S.M. How did Cantor discover set theory and topology?, **Resonance** 19 (2014), 977-999. <https://doi.org/10.1007/s12045-014-0117-8> <https://link.springer.com/article/10.1007/s12045-014-0117-8>

STOLZ, Otto. "B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung" (A importância de B. Bolzano na história do cálculo). **Mathematische Annalen** 18, 1881, pp 255-279. Disponível In: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/download/pdf/PPN235181684_0018/PPN235181684_0018.pdf Acesso: 01 de março de 2024.

TAIT, William. **Cantor's Grundlagen and the Paradoxes of Set Theory**

https://www.researchgate.net/publication/2411389_Cantor's_Grundlagen_and_the_Paradoxes_of_Set_Theory

TAPP, Christian. On Some Philosophical Aspects of the Background to George Cantor's Theory of Sets. **Philosophia Scientiae**. Cahier spécial 5, 2005, pp 157-173.

TWEDDLE, J, Christopher (2012). "Weierstrass's Construction of the Irrational Numbers," **Mathematische Semesterberichte**, (2011) 58: 47-58. URL: <http://faculty.evansville.edu/ct55/Portfolio/WeierstrassArticle.pdf>.

TYMIENIECKA, Anna-Teresa. (Editor). **Phenomenology World Wide: Foundations - Expanding Dynamics - Life-engagements, a Guide for Research and Study**. Kluwer Academic Publishers. 2002.

VARGA, Peter Andras. Husserl's Early Period: Juvenilia and the Logical Investigations. In: ZAHAVI, Dan. (ed.). **The Oxford Handbook of the History of Phenomenology**. Chapter 6, pp 107–134. 2018.

VILELA, Denise Silva. A caracterização dos números reais por **Georg Cantor**. **Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência**, [S. l.], n. 10, p. 85–94, 1993. Disponível em: <https://rbhciencia.emnuvens.com.br/rsbhc/article/view/444>. Acesso em: 19 ago. 2024.

WANG Yixuan, WANG Ce. Bolzano and Phenomenology. **Cultural and Religious Studies**, February 2022, Vol. 10, No. 2, 85-90. doi: 10.17265/2328-2177/2022.02.003 Disponível em: <https://www.davidpublisher.com/index.php/Home/Article/index?id=47069.html>

ZAHAVI, Dan. (ed.). **The Oxford Handbook of the History of Phenomenology**. Oxford: Oxford University Press, Chapter 6, pp 107–134. 2018. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780198755340.001.0001>. Online ISBN: 9780191816642 Print ISBN: 9780198755340