



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS
FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

**TECNOLOGIAS DIGITAIS NA PRODUÇÃO DE
CONHECIMENTO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS: UM ESTUDO COM LICENCIANDOS EM
MATEMÁTICA**

ARTHUR MEDEIROS BARROS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Arthur Medeiros Barros

**TECNOLOGIAS DIGITAIS NA PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO SOBRE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO COM LICENCIANDOS
EM MATEMÁTICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Maria Teresa Zampieri.

Coorientadora: Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti

Rio Claro- SP

2026

B277t	Barros, Arthur Medeiros Tecnologias digitais na produção de conhecimento sobre equações diferenciais ordinárias: um estudo com licenciandos em matemática / Arthur Medeiros Barros. -- , 2026 113 p. : il., fotos Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, Orientadora: Maria Teresa Zampieri Coorientadora: Marta Cilene Gadotti 1. Mathematics students. 2. Equações. 3. Tecnologia de ponta e educação. 4. Inteligência artificial Aplicações educacionais. I. Título.
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

A pesquisa contribui para a ODS 4 – Educação de Qualidade ao investigar como a integração entre Tecnologias Digitais, ChatGPT, Python e calculadoras gráficas pode favorecer a produção do conhecimento matemático e a experimentação com tecnologias no ensino de Equações Diferenciais Ordinárias. Além disso, busca promover práticas pedagógicas que valorizem a exploração, a autonomia discente, a colaboração e a reflexão crítica, aproximando os conceitos matemáticos das demandas contemporâneas da sociedade digital.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

This research contributes to SDG 4 – Quality Education by investigating how the integration of Digital Technologies, ChatGPT, Python, and graphing calculators can foster the production of mathematical knowledge and experimentation with technologies in the teaching of Ordinary Differential Equations. Furthermore, it seeks to promote pedagogical practices that value exploration, student autonomy, collaboration, and critical reflection, connecting mathematical concepts with the contemporary demands of a digital society.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

ARTHUR MEDEIROS BARROS

**TECNOLOGIAS DIGITAIS NA PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO SOBRE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO COM LICENCIANDOS
EM MATEMÁTICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas do
Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Educação matemática.

Comissão Examinadora

Prof(a).Dr(a). Maria Teresa Zampieri - orientador(a)
IBILCE/UNESP/São José do Rio Preto (SP)

Prof(a).Dr(a). Sueli Liberatti Javaroni
FC/UNESP/Bauru (SP)

Prof(a).Dr(a). Aparecida Santana de Souza Chiari
INMA/UFMS/Campo Grande (MS)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 02 de julho de 2026

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Francisco e Marli

À minha esposa, Júlia.

In memoriam vó Lourdes.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me sustentar ao longo de toda essa caminhada, especialmente nos momentos mais desafiadores, concedendo força, sabedoria e perseverança para seguir em frente.

Ao meu pai, Francisco, e à minha mãe, Marli, pelo apoio incondicional, pelos ensinamentos e por sempre acreditarem em mim. Tudo o que sou carrega um pouco de vocês. À minha esposa, Júlia, por estar ao meu lado em todos os momentos, pela paciência, compreensão e incentivo constante. Seu apoio foi fundamental para que eu chegasse até aqui. Ao meu grande padrinho Darci que me incentivou, desde o início, na vida acadêmica e no ser matemático que sou. Aos meus amigos Guilherme, Kauan, Caio e Tom, pela amizade, pelas conversas, pelas risadas e por tornarem toda a minha trajetória mais leve. Aos meus colegas de pós-graduação, Andrei Hartmann, Francielle Teixeira e Davi Aga, pela parceria, pelas trocas e pelo apoio ao longo desta trajetória.

Às minhas orientadoras, Professora Dra. Maria Teresa e Professora Dra. Marta, pela orientação, pela confiança no desenvolvimento deste trabalho e pelas contribuições fundamentais para a minha formação acadêmica e profissional.

À Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), ao Programa de Pós-Graduação em Educação matemática (PPGEM) e ao Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação matemática (GPIMEM), pelas discussões, pelas contribuições teóricas e pelo ambiente acadêmico que favoreceu reflexões essenciais para o desenvolvimento desta pesquisa. Principalmente na pessoa do professor Marcelo Borba. Menciono o projeto "Ensino e aprendizagem de matemática com calculadoras: possibilidades para a prática do professor", uma parceria entre GPIMEM e Casio Comércio de Produtos Eletrônicos Ltda, com gestão administrativa e financeira da FUNDUNESP, processo no 3221/2021 – CCP. Coordenado pela Profa. Dra. Sueli Liberatti Javaroni,

À banca examinadora, composta pela Professora Dra. Aparecida Santana de Souza Chiari (Cida) e pela Professora Dra. Sueli Liberatti Javaroni, assim como aos suplentes Professor Dr. Andrei Luís Berres Hartmann e Professora Dra. Silvana Cláudia dos Santos, pela disponibilidade, pelas leituras cuidadosas e pelas contribuições fundamentais, que certamente enriqueceram esta pesquisa.

O Tempo Não Para

*Eu vejo o futuro repetir o passado
Eu vejo um museu de grandes novidades
O tempo não para
Não para, não para
Eu não tenho data pra comemorar
Às vezes, os meus dias são de par em par
Procurando agulha num palheiro
Nas noites de frio é melhor nem nascer
Nas de calor, se escolhe: é matar ou morrer
E assim nos tornamos brasileiros.*

Cazuza, 1988

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma pesquisa de mestrado que investiga a exploração de conceitos relacionados às soluções de sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) por meio de tecnologias digitais, com graduandos em matemática. O objetivo central consiste em compreender o que emerge sobre a produção de conhecimento matemático e a experimentação-com-tecnologias quando estudantes exploram e refletem sobre conceitos de EDO em atividades mediadas por mídias digitais. O trabalho de campo foi realizado com estudantes em matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), câmpus de Rio Claro, no contexto da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, componente da matriz curricular do curso. A pesquisa adota uma abordagem qualitativa, com produção de dados a partir de registros escritos das atividades, gravações em áudio e vídeo das aulas, notas de campo do pesquisador, memorandos e registros produzidos nas tecnologias utilizadas. A análise dos dados foi conduzida por meio de episódios, articulando diferentes fontes a partir de um processo de triangulação, permitindo identificar padrões e movimentos no desenvolvimento das ideias matemáticas dos estudantes. Os resultados evidenciam que, durante as três experimentações, os estudantes recorreram às tecnologias digitais para explorar sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias, interpretar campos de direções e retratos de fase, confrontar respostas produzidas pelo ChatGPT com resultados obtidos na calculadora gráfica e na linguagem de programação Python e elaborar modelos matemáticos aplicados a diferentes contextos. As interações revelaram movimentos recorrentes de exploração, análise, refutação e validação das respostas produzidas pelas mídias, além de discussões sobre a confiabilidade da inteligência artificial e a necessidade de embasamento teórico para interpretar seus resultados. Observou-se ainda que a articulação entre diferentes mídias favoreceu a interpretação qualitativa dos sistemas e a produção coletiva de conhecimento matemático, evidenciando a importância da mediação docente para promover o uso crítico e investigativo dessas tecnologias na formação inicial de professores de Matemática.

Palavras-chaves: Inteligência artificial; Calculadoras gráficas; Python; Formação inicial de professores de Matemática; Educação Matemática

ABSTRACT

This master's dissertation presents a study that investigates the exploration of concepts related to the solutions of systems of Ordinary Differential Equations (ODEs) through digital technologies with undergraduate mathematics students. The main objective is to understand what emerges regarding the production of mathematical knowledge and experimentation-with-technologies when students explore and reflect on ODE concepts in activities mediated by digital media. The field study was conducted with undergraduate mathematics students at São Paulo State University (UNESP), Rio Claro campus, within the Ordinary Differential Equations course, a component of the undergraduate mathematics curriculum. The research adopts a qualitative approach, with data generated from students' written records, audio and video recordings of classroom activities, the researcher's field notes, memoranda, and records produced through the digital technologies employed. Data analysis was conducted through the examination of episodes, articulating multiple data sources by means of triangulation, which made it possible to identify patterns and emerging movements in the development of students' mathematical thinking. The findings show that, throughout the three experimentation sessions, students used digital technologies to explore systems of Ordinary Differential Equations, interpret direction fields and phase portraits, compare responses generated by ChatGPT with results obtained using graphing calculators and the Python programming language, and develop mathematical models applied to different contexts. The interactions revealed recurring processes of exploration, analysis, refutation, and validation of the responses generated by these digital media, as well as discussions concerning the reliability of artificial intelligence and the need for theoretical knowledge to critically interpret its outputs. Furthermore, the articulation among different digital media supported the qualitative interpretation of dynamical systems and fostered the collective production of mathematical knowledge, highlighting the importance of teacher mediation in promoting the critical and investigative use of these technologies in initial mathematics teacher education.

Keywords: Artificial Intelligence; Graphing Calculators; Python; Initial Mathematics Teacher Education; Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Retrato de fase.....	30
Figura 2: Análise de estabilidade em Python para o modelo de Mimura-Murray	36
Figura 3: Plano de fase do tipo: autovalores reais, distintos e de mesmo sinal.....	39
Figura 4: Plano de fase do tipo: Autovalores reais com sinais diferentes	40
Figura 5: Plano de fase do tipo: autovalores iguais	40
Figura 6: Plano de fase do tipo: autovalores complexos	41
Figura 7: Plano de fase do tipo: autovalores complexos	42
Figura 8: Codificação da experimentação I.....	65
Figura 9: Codificação da experimentação II.....	66
Figura 10: Codificação da experimentação III	67
Figura 11: Codificação final	68
Figura 12: Definindo uma matriz	72
Figura 13: Definindo a matriz A.....	73
Figura 14: Comandos dentro do Khicas	73
Figura 15: Associando os autovalores	74
Figura 16: Autovalor da matriz A.....	74
Figura 17: Plotando o retrato de fase.....	76
Figura 18: Retrato de fase.....	77
Figura 19: Lápis, papel e calculadora.....	78
Figura 20: Definindo o retrato de fase.....	79
Figura 21: Autovetores	80
Figura 22: Interação com o ChatGPT.....	84
Figura 23: Interação com o ChatGPT	86
Figura 24: Interação com o ChatGPT.....	88

Figura 25: Interação com o ChatGPT	90
Figura 26: Interação Google Colab-Python.....	92
Figura 27: Interação com o ChatGPT	92
Figura 28: Interação com o ChatGPT	93
Figura 29: Interação com o ChatGPT	94
Figura 30: Interação com o ChatGPT	95
Figura 31: Interação com o Google Colab- Python.....	96
Figura 32: Interação com o ChatGPT	102
Figura 33: Interação com o ChatGPT	102
Figura 34: Interação com o Google Colab- Python.....	104
Figura 35: Interação com o Google Colab- Python.....	104

LISTA DE SIGLAS

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

EDI – Equação Diferencial Impulsiva

EDO – Equação Diferencial Ordinária

FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo

FUNDUNESP – Fundação para o Desenvolvimento da UNESP

GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação matemática

IA – Inteligência Artificial

IC – Iniciação Científica

PIBID – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência

PLN – Processamento de Linguagem Natural

PVI – Problema de Valor Inicial

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TD – Tecnologias Digitais

UNESP – Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

1. PASSOS INICIAIS.....	15
1.1. Do PESQUISADOR À PESQUISA	15
1.2. OBJETIVO.....	19
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	19
2.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	19
2.2. BUSCA E RELEVÂNCIA DE PESQUISA	20
2.3. INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL: O CHATGPT.....	23
2.4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	27
2.5. ESTUDO QUALITATIVO DE SISTEMA 2x2 LINEAR HOMOGÊNEO DE EDO	37
2.6. AUTOVALORES REAIS, DISTINTOS E DE MESMO SINAL.....	38
2.7. AUTOVALORES REAIS COM SINAIS DIFERENTES.....	39
2.8. AUTOVALORES IGUAIS	40
2.9. AUTOVALORES COMPLEXOS.....	41
3. TECENDO CAMINHOS COM OS REFERENCIAIS TEÓRICOS.....	43
3.1. PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO.....	43
3.2. TEORIA DA SUBSTITUIÇÃO E SUPLEMENTAÇÃO	45
3.3. A REORGANIZAÇÃO DO PENSAMENTO HUMANO-MÁQUINA.....	48
3.4. EXPERIMENTAÇÃO-COM-TECNOLOGIAS.....	49
4. METODOLOGIA DE PESQUISA	53
4.1. PESQUISA QUALITATIVA	54
4.2. TRAÇANDO CAMINHOS COM OS DOCENTES.....	55
4.3. PARTICIPANTES DA PESQUISA	55
4.4. ARQUITETURA DAS AULAS	56
I. Noções de Sistemas de EDO	58
II. Sistemas de EDO e linguagem Python	59
III. Experimentação com a linguagem Python.....	60
5. ORGANIZAÇÃO DE DADOS	61
5.1. REFLEXÕES E ANÁLISE DOS DADOS	64
6. ANÁLISE.....	70
6.1. EXPERIMENTAÇÃO I	70
6.2. EXPERIMENTAÇÃO II	82
6.3. EXPERIMENTAÇÃO III	98
7. LIMITAÇÕES E TENSÕES DA PESQUISA	108

8.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	109
9.	REFERÊNCIAS.....	111

1. PASSOS INICIAIS

1.1. DO PESQUISADOR À PESQUISA

Este capítulo inicia destacando as motivações que resultaram no desenvolvimento desta pesquisa, traçando uma linha desde os primeiros passos na vida acadêmica do pesquisador até a consolidação desta dissertação.

É importante explorar os caminhos que me levaram à matemática, culminando na área da Educação matemática, revelando os anseios e a visão de mundo ao longo das diversas fases de minha vida. Dessa maneira, esses fatores contribuíram para a formação do ser, cuja bagagem de experiências e contexto ao redor trouxeram inquietações que se transformaram na pergunta de pesquisa. Do mesmo modo, afirmam Borba, Almeida e Gracias (2019, p.77), “o problema, na maioria das vezes, parte de inquietações do pesquisador, mesmo que ele vá sendo redesenhado ao longo do processo de pesquisa.”

Dessa forma, a questão que norteia esta pesquisa é: **O que emerge sobre a produção de conhecimento matemático e a experimentação-com-tecnologia quando graduandos em matemática exploram e refletem sobre conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias por meio de tecnologias digitais?** A seguir, apresento minha trajetória acadêmica e profissional, evidenciando como as experiências vivenciadas ao longo desse percurso contribuíram para a construção da questão que norteia esta pesquisa.

Minha jornada educacional começou em casa, com a educação dada pelos meus pais, e essa influência persiste até hoje. Cada conquista que alcancei deve-se, em grande parte, ao apoio da minha família. Embora nem meu pai, nem minha mãe tenham completado os estudos, ambos possuem uma grande sabedoria e o sonho de ver seus filhos formados. Meu pai, em especial, sempre teve uma inclinação para a matemática e dizia que, se tivesse tido a oportunidade de cursar uma faculdade, teria escolhido a matemática como sua área e, de certa forma, me influenciou nesse caminho, além de meu padrinho Darci, que é professor de matemática, e sempre me apoiou.

Em 2008, ingressei no Ensino Fundamental na EMEI (Escola Municipal Professor Zeferino Vaz- CAIC) em Campinas, São Paulo, onde cursei o Ensino Fundamental completo. Durante esse período, já havia traços da matemática, participei de olimpíadas e campeonatos

na escola.

Em 2017, dei continuidade à minha educação ao ingressar no Ensino Médio no Colégio Objetivo de Campinas. Meu ingresso se deu por conta de uma bolsa de estudo garantida por uma prova de conhecimentos gerais. Essa fase representou uma transição importante em minha jornada educacional, local esse que me fez pensar sobre qual caminho eu deveria seguir. Logo, foi nesse momento, em especial no segundo ano, que decidi trilhar meus estudos para o ramo da matemática e me tornar professor.

Em 2020, ingressei no curso de Graduação em matemática na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), um lugar onde realmente desejava estar. Durante esse período de graduação, mesmo diante dos desafios impostos pela pandemia, tive a oportunidade de expandir meu entendimento da matemática e explorar áreas específicas, como as Equações Diferenciais Ordinárias e a Educação Matemática em sua totalidade. Além disso, participei do PIBID, o que me proporcionou uma compreensão sobre a prática docente e os desafios enfrentados no ensino da matemática.

Durante a graduação, ao vivenciar dificuldades e observar limitações na compreensão de conceitos nas disciplinas de Cálculo, Análise matemática e Equações Diferenciais Ordinárias, tornou-se imperativo refletir sobre essas disciplinas, especialmente no que se refere à prática docente nos processos de ensino e aprendizagem dos estudantes. Fui levado a questionar os motivos e medos que os estudantes tinham em relação a essas disciplinas e as possibilidades para que o ensino realmente alcançasse os estudantes. Essa inquietação também era pessoal, pois eu buscava compreender caminhos que tornassem esses conceitos mais acessíveis para mim.

Em paralelo, com o objetivo de aproveitar todas as oportunidades que a universidade me proporcionou, em 2021, entrei em contato com a Professora Dra. Marta Cilene, manifestando meu interesse em estudar dois tópicos: Cálculo e Álgebra Linear. Essas disciplinas despertaram um interesse e uma curiosidade em meu primeiro ano. Em resposta e com toda a empolgação, a professora sugeriu que estudássemos os conceitos iniciais das EDO, mesmo sem financiamento para a pesquisa. Esse momento marcou o início de uma longa trajetória e uma crescente intimidade com as EDO. A IC que se seguiu tornou-se um marco na minha formação, pois me permitiu estudar, de forma consistente e rigorosa, a teoria sobre sistemas lineares de equações diferenciais, além de explorar conceitos da teoria qualitativa de

EDO, tópicos que levei para minha pesquisa de mestrado.

Em 2022, com o objetivo de expandir e aprofundar meus conhecimentos, fui convidado pela professora a continuar a Iniciação Científica (IC), agora com o apoio da bolsa FAPESP. O foco deste novo estudo foi um tópico mais avançado das Equações Diferenciais Ordinárias: as Equações Diferenciais Impulsivas (EDI), que modelam sistemas cuja evolução é predominantemente contínua, mas que sofrem variações abruptas em instantes específicos. Nesse contexto, foram abordados aspectos como a formulação matemática desses sistemas, bem como resultados relacionados à existência, unicidade e comportamento de suas soluções, considerando os efeitos dos impulsos ao longo do tempo. Porém, mesmo não estando nos tópicos da IC, frequentemente discutíamos questões relacionadas ao ensino de EDO, como a escassez de tempo e espaço para implementar metodologias que incorporassem Tecnologias Digitais¹, a falta de motivação entre os alunos e a pressão que os professores enfrentam devido à rigidez dos planos de ensino.

No mesmo ano, após pesquisar sobre EDO durante as Iniciações Científicas, chegou o momento de cursar a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. Iniciei o curso com expectativas positivas, mas logo na primeira prova, tanto eu quanto meus colegas enfrentamos dificuldades e fomos mal. A princípio, acreditamos que o problema pudesse estar em nossa preparação. Estudamos intensamente, mas os resultados na segunda prova também foram desanimadores, o que levou a turma à desmotivação. Começamos a questionar se a metodologia de ensino adotada pelo docente poderia estar contribuindo para nossas dificuldades. Por se tratar de uma disciplina aplicada a modelos naturais e cotidianos, surgiam questionamentos sobre o uso de tecnologias digitais e sobre como essas poderiam participar dos processos de compreensão dos conceitos. No entanto, ao longo do percurso, compreendi que não se trata de atribuir às tecnologias um papel de melhoria automática do aprendizado, nem de responsabilizar o docente por sua não utilização. A inserção dessas mídias na prática pedagógica está diretamente relacionada à formação do professor, às experiências vivenciadas e às condições concretas de ensino. Como discutem Borba e Selva (2010), a ausência de vivências com tecnologias pode levar à construção de barreiras em relação ao seu uso.

¹ Nesta dissertação, a noção de tecnologia é assumida como “conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade” (Kenski, 2007, p. 24). Nesse cenário, embora diferentes mídias, o foco analítico recai sobre as tecnologias digitais e suas articulações com outras formas de mediação (Borba; Villareal, 2005; Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2021).

A disciplina contou com o auxílio da monitora, Professora Franciele Teixeira, que, em diálogo com o docente responsável, organizou uma atividade envolvendo o uso de calculadoras gráficas e da linguagem de programação Python (Teixeira et al., 2025). Esses encontros trouxeram uma nova perspectiva para a turma, na medida em que, por meio das visualizações dinâmicas geradas pela interação com as calculadoras gráficas e das aplicações práticas, foi possível compreender as nuances da disciplina, como ponto crítico, convergência e estabilidade de um sistema. Ainda assim, compreendi que esses avanços não decorreram apenas do uso das calculadoras gráficas, mas também das discussões realizadas em sala, das atividades propostas e das reflexões desenvolvidas ao longo das aulas.

As autoras Borba e Selva (2010, p. 47) afirmam que “O uso da calculadora libera o aluno da realização de cálculos no papel e no lápis, podendo se dedicar a pensar estratégias e desenvolver seus próprios métodos de resolução”. Essa experiência não só marcou meu aprendizado, mas também despertou uma curiosidade ainda maior em explorar métodos de ensino que integrem tecnologias.

Então, em meados de 2023, me inscrevi no processo seletivo de mestrado com o interesse em pesquisar sobre o ensino de EDO utilizando calculadoras gráficas, ChatGPT e linguagem de programação Python, visto que naquele momento os estudos com calculadoras gráficas² cercavam o grupo de pesquisa do qual gostaria de fazer parte, Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação matemática (GPIMEM), além do grupo pesquisar, há mais de trinta anos, Tecnologias Digitais na Educação matemática em variadas vertentes.

Aprovado no processo seletivo e iniciando minha participação como membro do grupo de pesquisa e do projeto envolvendo calculadoras, me deparei com alguns conceitos teóricos que o grupo vinha estudando e desenvolvendo: Produção do Conhecimento Matemático (Borba e Villareal, 2005) e Experimentação com Tecnologias (Borba; Villareal, 2005; Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2021). Esses conceitos e referenciais despertaram meu interesse em vinculá-los ao ensino de EDO, buscando entender o que emerge da produção do conhecimento matemático e da experimentação com tecnologias quando graduandos, matriculados na disciplina Equações Diferenciais Ordinárias, refletem e exploram conceitos de EDO utilizando

² Projeto "Ensino e aprendizagem de matemática com calculadoras: possibilidades para a prática do professor", uma parceria entre GPIMEM e Casio Comércio de Produtos Eletrônicos Ltda, com gestão administrativa e financeira da FUNDUNESP, processo no 3221/2021 – CCP. Coordenado pela Profa. Dra. Sueli Liberatti Javaroni, também membro do GPIMEM.

ChatGPT, a linguagem de programação Python e calculadora gráfica. Dessa forma, consolidou-se a questão de pesquisa.

1.2. OBJETIVO

A partir dessas inquietações que resultaram nessa pergunta de pesquisa, nos propusemos a analisar o que emerge, na visão do autor, dos processos de exploração e reflexão por parte dos graduandos em matemática, especificamente na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, durante o estudo de sistemas de EDO, quando inseridos em atividades mediadas por Tecnologias Digitais, como o ChatGPT, linguagem de programação Python e calculadoras.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Borba, Almeida e Gracias (2019) apontam que a revisão de literatura tem como finalidade mapear o campo de investigação, evidenciando a originalidade do problema de pesquisa e promovendo o diálogo entre o pesquisador e produções acadêmicas, tais como teses, dissertações e artigos científicos. Nessa perspectiva, a etapa de pré-análise contemplou a busca por produções nacionais de acesso livre na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), plataforma que integra os sistemas de informação das instituições de ensino e pesquisa do Brasil.

A primeira etapa de seleção foi realizada ao longo do mês de agosto de 2024, utilizando como critérios de busca as palavras-chave “Equações Diferenciais Ordinárias”, “Python” e “ChatGPT”, todas no campo título. As aspas foram empregadas com o objetivo de localizar as expressões em sua forma exata, enquanto o operador lógico E foi utilizado para restringir os resultados àqueles que contivessem simultaneamente os termos indicados. Não foi estabelecido recorte temporal para essa busca. Contudo, o sistema não retornou dissertações que atendessem a esses critérios.

Diante desse resultado, os parâmetros de busca foram reformulados, mantendo “Equações Diferenciais Ordinárias” no campo título e “Python” no campo resumo. Ainda assim, não foram localizados trabalhos que abordassem a temática proposta.

Na sequência, a busca foi ampliada para o Google Acadêmico, uma vez que esse ambiente permite o acesso a artigos científicos, possibilitando maior abrangência do levantamento. Para essa etapa, utilizaram-se as palavras-chave “Equações Diferenciais

Ordinárias”, “Python” e “licenciatura em matemática”. O sistema retornou 36 resultados; entretanto, após análise individual, verificou-se que os trabalhos não contemplavam simultaneamente os três descritores, sendo, em sua maioria, desenvolvidos em cursos de engenharia ou sem a utilização da linguagem de programação Python.

Considerando a escassez de produções que articulassem diretamente às temáticas investigadas nesta pesquisa, optou-se por flexibilizar os critérios de busca, recorrendo a referências que abordassem tais temas de forma mais geral. Esse movimento permitiu a construção da revisão de literatura.

Diante da ausência de trabalhos que articulassem simultaneamente Equações Diferenciais Ordinárias, Python e ChatGPT no contexto da licenciatura em Matemática, os critérios de busca foram flexibilizados. A partir desse movimento, passaram a ser realizadas buscas separadas envolvendo combinações mais amplas de descritores, tais como “Equações Diferenciais Ordinárias” e “Tecnologias Digitais”, “Python no ensino de Matemática”, “programação no ensino de Matemática”, “ChatGPT e Educação Matemática”, “Inteligência Artificial na Educação” e “Tecnologias Digitais na formação de professores”. Também foram considerados trabalhos que abordavam apenas um ou dois dos elementos centrais desta pesquisa, desde que contribuíssem teoricamente para a compreensão do problema investigado.

Com essa ampliação, a revisão de literatura consolidou-se em dois eixos principais: (i) pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias mediadas por Tecnologias Digitais, com destaque para o uso de softwares, programação e diferentes mídias no contexto da Educação Matemática; e (ii) estudos voltados ao uso do ChatGPT e da Inteligência Artificial na educação, especialmente em processos de ensino, aprendizagem e formação de professores. Esses eixos permitiram construir aproximações teóricas com o objeto desta pesquisa, mesmo diante da inexistência de trabalhos que contemplassem diretamente a articulação entre EDOs, Python e ChatGPT na licenciatura em Matemática.

2.2. BUSCA E RELEVÂNCIA DE PESQUISA

Há muitas décadas que a Educação Matemática vem propiciando estudos sobre metodologias de ensino alternativas para se trabalhar em sala de aula, de modo a favorecer a

autonomia discente. Em meio a essas metodologias destaca-se o uso das TD³, as quais têm um papel importante nesta pesquisa. Em vista da proposta de desenvolver aspectos relacionados à produção de conhecimento matemático e à experimentação com tecnologias em atividades envolvendo EDO e TD no contexto do ensino e da aprendizagem, conforme salientam Maltempi, Javaroni e Borba (2011), é imperativo promover uma ressignificação, "[...] pois a tecnologia não é neutra e transforma a relação ensino-aprendizagem" (Maltempi; Javaroni; Borba, 2011, p. 46).

As transformações sociais recentes também trazem novas maneiras de compreender o mundo, impactando diretamente a educação e as formas como os estudantes aprendem, uma vez que estão imersos em um contexto em constante evolução. Santos, Sant'Ana e Sant'Ana (2023, p. 02) destacam que "o ensino da matemática vivencia ao longo do tempo um processo de transformação inerente ao mundo em movimento e renovação". Essas mudanças, como, por exemplo o advento da inteligência artificial, tornam-se especialmente evidentes com a crescente integração de recursos e mídias digitais no ensino da matemática (Santos; Sant'Ana; Sant'Ana, 2023).

Consequentemente, torna-se relevante que educadores e pesquisadores continuem investigando os processos de aprendizagem em Matemática, considerando os desafios, limitações e possibilidades que emergem ao longo desse percurso. Nesse contexto, diferentes recursos e abordagens pedagógicas podem favorecer formas distintas de participação dos estudantes nos processos de produção de conhecimento matemático. Contudo, conforme discutem Borba e Villarreal (2005), as Tecnologias Digitais não garantem, por si só, protagonismo ou aprendizagem, uma vez que seus potenciais estão diretamente relacionados às formas como são mobilizadas nas práticas pedagógicas. Sob essa perspectiva, as Tecnologias Digitais podem contribuir para a emergência de outras formas de interação, comunicação e produção de conhecimento, especialmente quando articuladas a propostas que incentivem a exploração, a reflexão e a experimentação com tecnologias.

Nesse sentido, Zampieri et al. (2023, p. 208) ressaltam que as dificuldades inerentes à adoção dessas tecnologias estão intrinsecamente ligadas a uma formação que não está em sintonia com a sua utilização. No entanto, possivelmente professores que não tiveram, em seu processo de formação, práticas e vivências com as TD, tendem a ter receio de fazer esse uso.

³ Utilizarei a sigla TD para me referir a Tecnologias Digitais.

Os autores Maltempi, Javaroni e Borba (2011) afirmam que a tecnologia em si não é intrinsecamente boa ou má, seu impacto depende da relação que estabelecemos com ela e do uso que fazemos dela.

Dessa forma, ao pensar na integração de tecnologias digitais no processo de ensino, os autores alertam sobre o “uso não domesticado das mídias”, ou seja, um uso que promova o desenvolvimento de atividades que explorem as diversas possibilidades oferecidas por essas novas mídias e interfaces (Chiari; Borba, 2014). A partir dessa visão, busca-se explorar novos potenciais de uma interface, atentando para o fato de que o uso de tecnologias digitais pode, em alguns casos, manter práticas já consolidadas com outras mídias. O ponto central, nesse contexto, não está na replicação, mas na ausência de exploração das potencialidades que essas mídias podem oferecer (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2021).

Por outro lado, a utilização de tecnologias pode estar associada à constituição de um ambiente colaborativo dentro de uma sala de aula, como destacam Ferreira, Zampieri e Queiroz (2013, p. 6691):

[...] pensamos que a tecnologia e o ambiente virtual podem ser utilizados para uma comunicação entre aluno-aluno e aluno-professor e também pensarmos na ideia da aprendizagem como colaborativa. É fato que as experiências realizadas utilizando os recursos tecnológicos e o ciberespaço, nos permitem destacar as potencialidades de interação e comunicação.

Tendo em mente essa associação entre o uso das Tecnologias Digitais e a constituição de ambientes colaborativos de aprendizagem, como apontam as referidas autoras, torna-se relevante delimitar uma pesquisa que busque atuar em parceria com outros professores e estudantes em uma disciplina da graduação em matemática, tendo a experimentação com tecnologias (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2021) como enfoque pedagógico.

Em complemento, é válido ponderar que a formação de professores transcende o conhecimento teórico ela demanda um movimento contínuo de reflexão sobre a prática pedagógica que envolve a construção ativa de saberes, não apenas o acúmulo de informações (Santos et al. 2017). Portanto, no contexto do ensino da matemática, ao ensinar conteúdos específicos da disciplina, o professor é convidado a considerar as metodologias de ensino e as formas pelas quais os alunos aprendem, as barreiras e potencialidades das situações de ensino e aprendizagem, a avaliação, assim como o desenvolvimento de conceitos, do pensamento e da linguagem matemática (Santos et al. 2017).

Para tanto, a pesquisa sobre tecnologias digitais na graduação em matemática se revela

de grande importância, pois representa uma oportunidade e possibilidade de integrar recursos ao processo de formação de futuros professores ou de futuros matemáticos. O contato inicial com essas tecnologias possibilita que os alunos desenvolvam a habilidade de “pensar-com-tecnologias” (Borba; Villareal, 2005) um ponto de suma importância para preparar os futuros docentes a lidarem de forma crítica e alinhada com as demandas do ensino contemporâneo.

O uso dessas tecnologias digitais, como calculadoras gráficas, ChatGPT e a linguagem de programação Python, pode possibilitar a compreensão de conceitos matemáticos complexos, como o estudo do plano de fases em EDO, além de observar as dinâmicas e formatação da matemática no mundo.

Com isso, essa experimentação com os discentes têm a oportunidade de refletir sobre sua aplicação prática em sala de aula. A pesquisa propõe, portanto, uma articulação entre teoria e prática, na qual os estudantes não apenas constroem conhecimento, mas são incentivados a mobilizar o que aprendem em suas futuras práticas docentes, o que pode contribuir para a formação de educadores que atuem como agentes de transformação no ensino de matemática. A possibilidade de vivenciar essas experiências no contexto acadêmico pode permitir que os professores em formação se tornem mobilizados para utilizar as tecnologias digitais de forma crítica e construtiva, impactando diretamente a qualidade do ensino a ser ofertado no futuro.

2.3. INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL: O CHATGPT

Ao considerar o uso de tecnologias, a inteligência artificial tem se destacado no campo educacional, incluindo a Educação matemática. Nesse cenário, a escolha pelo ChatGPT nesta pesquisa está relacionada às suas potencialidades de interação, geração de respostas e apoio à exploração de conceitos matemáticos. Dessa forma, esta dissertação propõe discutir o uso dessa inteligência artificial, buscando compreender suas articulações, que serão posteriormente exploradas nas experimentações em sala de aula.

A saber, a GPT (*Generative Pre-trained Transformer*) é uma linha de modelos de linguagem que utiliza a arquitetura *Transformer*, um modelo amplamente adotado no campo da Inteligência Artificial. A versão mais renomada dessa tecnologia, o GPT-3, conta com 175 bilhões de parâmetros, tornando-se um dos maiores e mais poderosos modelos de linguagem já criados (OpenAI, 2025). A arquitetura *Transformer* é relevante no processamento de sequências de texto devido ao seu mecanismo de atenção, que permite ao modelo avaliar a importância de palavras dentro de um contexto amplo (OpenAI, 2025).

O ChatGPT, por sua vez, é uma aplicação avançada do Processamento de Linguagem Natural (PLN), projetada para possibilitar que as máquinas compreendam, interpretem e produzam texto ou fala de maneira significativa e útil para os seres humanos. A principal característica é sua capacidade de oferecer respostas precisas e coerentes, um resultado de seu treinamento em vastos conjuntos de dados que englobam uma grande diversidade de interações humanas (Deng; Lin, 2023, p. 82).

O GPT-4⁴, os usuários podem acessá-lo gratuitamente, porém, com um número limitado de interações. Para continuar utilizando-o, é necessário efetuar um pagamento, caso contrário, a plataforma retorna ao modelo básico e gratuito, o ChatGPT-3.5 (OpenAI, 2025). A principal diferença entre as duas versões está na precisão: o GPT-4 apresenta um desempenho superior em tarefas específicas, como a interpretação de questões mais complexas e a resolução de problemas, enquanto o GPT-3 mostra limitações em sua capacidade de compreensão e geração de texto. O GPT-4 também se destaca pela sua maior eficiência em lidar com grandes volumes de dados e maior complexidade, proporcionando respostas mais sofisticadas (OpenAI, 2025). Além disso, conforme Deng e Lin (2023, p. 82), "ele é capaz de analisar seus próprios erros e ajustar suas respostas nas interações seguintes, facilitando uma adaptação contínua a novos contextos e desafios", o que evidencia uma habilidade de autoaperfeiçoamento.

Embora a Inteligência Artificial apresente um potencial para apoiar processos educacionais, seu uso também demanda uma postura crítica. Modelos generativos, como o ChatGPT, podem produzir respostas imprecisas ou factualmente incorretas, fenômeno conhecido como alucinação⁵, além de reproduzir vieses presentes nos dados utilizados em seu treinamento. Como destaca Samarão (2023), os algoritmos não são neutros e podem incorporar pressupostos, crenças e preconceitos existentes nos conjuntos de dados, o que pode influenciar a qualidade e a confiabilidade das respostas geradas.

Além das questões relacionadas à precisão das informações, a crescente utilização de modelos de Inteligência Artificial suscita discussões éticas envolvendo transparência, privacidade, responsabilidade sobre os conteúdos produzidos e impactos ambientais decorrentes do elevado consumo de energia e recursos computacionais necessários para o treinamento e a operação desses sistemas. Tais aspectos reforçam que a IA deve ser

⁴ Versão mais avançada (julho de 2025).

⁵ Segundo Samarão (56 2023), alucinação é o termo técnico pelo qual os cientistas chamam os erros dos modelos de IA que não correspondem a um fato verídico.

compreendida como uma tecnologia potente, mas não isenta de limitações, exigindo que seus resultados sejam constantemente analisados, confrontados com outras fontes e validados pelos usuários (Samarão, 2023).

Essa evolução tecnológica, representada pela versão GPT-4, ilustra o avanço da inteligência artificial em termos de desempenho e precisão, e abre novas possibilidades para a educação, especialmente no ensino de matemática. A capacidade de lidar com questões mais complexas e fornecer respostas sofisticadas tem um potencial pedagógico, que permite que professores e alunos explorem novas formas de interação com o conteúdo matemático.

Com esse cenário em mente, torna-se relevante refletir sobre como a integração do ChatGPT e de outras Tecnologias Digitais pode transformar a maneira como ensinamos e aprendemos matemática. Segundo Barreira, Moura-Silva e Gonçalves (2024), discussões relacionadas ao uso da Inteligência Artificial vêm sendo desenvolvidas em programas de pós-graduação em Educação Matemática, especialmente no que se refere às potencialidades e limitações dessas tecnologias em contextos educacionais. Tal movimento evidencia um alinhamento às demandas contemporâneas, mas também reforça a necessidade de um olhar crítico sobre os impactos dessas tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem.

Um dos principais benefícios do ChatGPT no ensino da matemática é sua capacidade de esclarecer conceitos complexos, ajudar na resolução de desafios matemáticos e gerar novas questões que instigam a curiosidade dos estudantes (Barreira; Moura-Silva; Gonçalves, 2024). A ação docente também pode ser articulada ao uso dessa inteligência, pois permite ao professor propor diferentes estratégias de resolução, explorar múltiplas representações e incentivar a análise crítica das respostas geradas, o que pode impactar positivamente os estudantes. Santos, Sant'ana e Sant'ana (2023, p. 12) afirmam que “o professor também pode utilizar o ChatGPT para pesquisas em sala de aula, para trabalhar temas relacionados à IA e programação, além de sugerir aos estudantes como recurso na orientação de rotinas de estudo”.

A IA tem o potencial de oferecer aos professores recursos “que aprimorem seus métodos de ensino e elevem o desempenho dos estudantes, através dos quais a criação de experiências de aprendizado personalizadas se torna viável por meio da análise de dados individuais de cada aluno” (Lima; Serrano, 2024, p. 02).

No entanto, é importante reconhecer algumas limitações que precisam ser discutidas ao

integrar o ChatGPT na sala de aula. Lima e Serrano (2024) destacam como uma das preocupações o uso automatizado na elaboração de trabalhos e a dependência excessiva das respostas geradas, sem o uso do pensamento crítico. A própria plataforma já alerta que suas respostas podem conter erros, reforçando a necessidade de reflexão crítica sobre o conteúdo gerado. Espera-se que, com o avanço da IA, essas fragilidades sejam superadas (Lima; Serrano, 2024).

Portanto, apesar do potencial que as tecnologias digitais têm de transformar a educação, elas não substituem a atuação do professor, mas a complementam. O educador continua sendo uma peça essencial no processo educacional, com a responsabilidade pela construção do conhecimento, mediação do aprendizado, estímulo ao pensamento crítico, orientação e acompanhamento individualizado dos alunos (Santos; Sant'ana; Sant'ana, 2023). Assim, “em vez de serem substituídos pelas tecnologias, os professores podem utilizar essas ferramentas como aliadas para enriquecer o ensino e promover melhores experiências de aprendizagem” (Santos; Sant'ana; Sant'ana, 2023, p. 05).

Todavia, é imprescindível manter-se alerta aos riscos referentes à sua utilização e adotar medidas cautelares para minimizá-los. Os autores Barreira, Moura-Silva e Gonçalves (2024, p.10) defendem que:

Os pesquisadores devem assegurar a preservação de sua capacidade de reflexão crítica e elaboração de soluções autônomas [...] além de estar atentos às questões de parcialidade e falta de transparência na IA. Ademais, é crucial fomentar a integridade acadêmica, prevenindo o plágio e assegurando a compreensão completa das soluções sugeridas pelo ChatGPT.

Isso nos leva a refletir sobre o fato de que a IA constitui um campo que ainda carece de regulamentações adequadas. Tais regulamentações podem ser elaboradas, pensadas e discutidas de forma coletiva, com as instituições de ensino superior sendo o ponto de partida. Sendo um “espaço com potencial para discutir tais questões, sem ingenuidade e com criticidade, na possibilidade de reverberar ações críticas no contexto social, pelo compromisso e pela responsabilidade com a sociedade que integra” (Rodrigues; Rodrigues, 2023, p. 10).

Com base no contexto discutido, é possível estabelecer uma ligação entre o uso da inteligência artificial no ensino e a aplicação de recursos tecnológicos, como a linguagem de programação Python e as EDO. Se, por um lado, a IA abre novas possibilidades que contribuem com o aprimoramento da compreensão e a manipulação matemáticos, por outro, a programação oferece aos estudantes e educadores uma forma de concretizar, explorar e testar essas ideias de

maneira prática. No próximo capítulo, abordaremos a utilização da linguagem Python e o ensino e resolução de Equações Diferenciais Ordinárias.

2.4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

As Equações Diferenciais Ordinárias são um tipo de equações matemáticas que envolve uma função incógnita de uma variável e suas derivadas. Elas relacionam uma função desconhecida com suas derivadas, ou seja, com as taxas de variação dessa função em relação à variável em questão. As EDO são amplamente utilizadas para modelar fenômenos de diversos campos do conhecimento, como física, biologia, economia e engenharia, onde os fenômenos em sistemas dinâmicos precisam ser analisados. Como ressaltam Boyce e DiPrima (2010, prefácio):

A importância das equações diferenciais está no fato de que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como por exemplo, o decaimento de substâncias radioativas, o comportamento de sistemas de massas e molas e o comportamento de circuitos elétricos.

Por exemplo, em um tipo de modelo de crescimento populacional, a taxa de variação da população pode depender diretamente do número atual de indivíduos. O objetivo ao resolver uma EDO é encontrar a função desconhecida que descreve o comportamento do sistema ao longo do tempo ou de outra variável. Essas soluções são essenciais para compreender e prever o comportamento de sistemas complexos.

De acordo com Bassanezi, Ferreira (1988), Zill (2001) e Braun (2013) a forma geral de uma EDO de ordem n pode ser expressa da seguinte maneira:

$$F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0,$$

onde:

- t é a variável independente (geralmente representando o tempo);
- $y(t)$ é a função desconhecida que depende de t ;
- $y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)$ são as derivadas de $y(t)$ em relação a t , sendo $y'(t)$ a primeira derivada, $y''(t)$ a segunda derivada, e assim por diante;
- F é uma função que combina $t, y(t)$, e suas derivadas.

Além disso, a equação é dita linear se a EDO poder ser escrita como:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t),$$

onde, $a_0, a_1, \dots, a_n$ e g são funções somente de t . E sobre a homogeneidade: Se não houver termos independentes, a equação é homogênea; caso contrário, é não homogênea.

Em complemento, a resolução analítica das equações diferenciais ordinárias frequentemente se apresenta como uma certa dificuldade, tornando-se até mesmo impossível, a depender do caso. Isso pode ser atribuído à complexidade das equações diferenciais ao considerar uma trajetória específica ou expressá-las em termos de soluções infinitas. Além disso, nos deparamos com a incapacidade de elucidar a solução de tais equações sem o auxílio de um computador. Diante dos desafios apresentados, é comum a adoção de métodos, como a análise qualitativa, que se configura como uma alternativa para compreender o comportamento das equações diferenciais. Essa abordagem busca empregar métodos gráficos e geométricos, visando não somente verificar a existência, mas também a estabilidade das soluções (Magalhães, 2023). Tal procedimento proporciona uma compreensão mais clara e intuitiva do modelo aplicado (Boyce; DiPrima, 2010).

Para discutir a existência e a unicidade de solução de uma EDO, considera-se o Problema de Valor Inicial (PVI), que consiste em determinar uma função $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaça a equação diferencial

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

bem como a condição inicial

$$y(t_0) = y_0$$

em que $t_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$.

Nessa formulação, I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ contendo t_0 , e $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida em um domínio D que contém um conjunto da forma $I \times J$, com $J \subset \mathbb{R}$ sendo um intervalo que contém y_0 .

Sob hipóteses adequadas de regularidade impostas à função f , os teoremas clássicos de existência e unicidade garantem que o PVI admite uma única solução definida em um intervalo que contém t_0 .

Segundo Silva (2021, p. 01), a grande importância desse conceito “está ligado ao teorema fundamental do cálculo, em que sabemos que a primitiva de uma função não está completamente determinada, já que sempre podemos somar uma constante na resposta”. Isso

significa que, ao encontrar a primitiva de uma função, obtemos, na verdade, uma família de soluções que diferem entre si por uma constante aditiva.

Dado isso, o problema de valor inicial (PVI) fornece uma maneira de selecionar uma solução específica dentre as infinitas soluções possíveis de uma equação diferencial ordinária. Enquanto a solução geral envolve uma constante arbitrária, a condição inicial permite determinar o valor dessa constante, definindo, assim, uma única função $y(x)$ que satisfaz simultaneamente a equação diferencial e as condições impostas.

Além disso, sob determinadas condições, é possível garantir não apenas a existência dessa solução, mas também sua unicidade. Isso significa que, para uma EDO dada e uma condição inicial especificada, existe uma única função que atende ao problema, não havendo outras soluções possíveis que satisfaçam ambas as condições.

Dessa forma, enuncia-se o Teorema da Existência e Unicidade, conforme apresentado em Boyce e DiPrima (2010):

Teorema da Existência e Unicidade: Considere o problema de valor inicial,

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Se as funções f e a derivada parcial de f em relação à variável y , $\frac{\partial f}{\partial y}$, são contínuas em um retângulo:

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

então existe um número h , com $0 < h \leq a$, tal que o problema de valor inicial admite uma única solução $y = \varphi(t)$, definida no intervalo $|t - t_0| \leq h$.

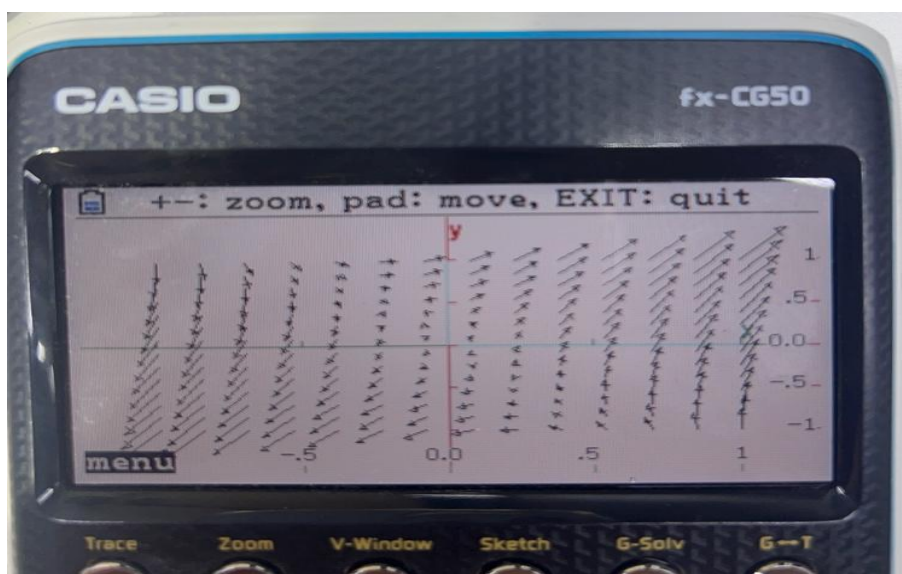
Esse resultado teórico é fundamental para garantir que as equações diferenciais ordinárias possuam soluções bem definidas, o que é essencial para a aplicação de modelos matemáticos em diversas áreas do conhecimento.

Adicionalmente, como observa Magalhães (2023), a análise qualitativa das soluções dessas equações é frequentemente enriquecida por ferramentas gráficas, como diagramas de

fase e campos de direção. Essas representações visuais fornecem uma maneira de entender a dinâmica dos sistemas de equações diferenciais além das soluções algébricas, que podem ser difíceis de interpretar de forma intuitiva. Nesse contexto, as TD permitem a visualização das soluções em planos de fase e uma exploração da dinâmica dos sistemas. Por meio delas, os estudantes conseguem observar os comportamentos das soluções, o que complementa o conhecimento algébrico adquirido por meio da solução analítica garantida pelo teorema, o que favorece uma compreensão integral da problemática estudada, a partir da sinergia entre abordagens analítica e geométrica. Entretanto, a articulação entre essas duas abordagens não ocorre de maneira imediata, pois exige que o estudante estabeleça relações entre as expressões algébricas, os parâmetros envolvidos e suas representações gráficas. Esse processo demanda interpretar como as propriedades evidenciadas na solução analítica se manifestam geometricamente, favorecendo uma compreensão mais ampla da problemática estudada ao integrar perspectivas analíticas e geométricas.

A Figura 1 apresenta um campo de direções associado a um sistema de equações diferenciais. Em cada ponto do plano, as setas representam a direção local das soluções, permitindo analisar qualitativamente a evolução do sistema ao longo do tempo. Observa-se que o campo apresenta padrões organizados, evidenciando comportamentos característicos das trajetórias do sistema.

Figura 1: Retrato de fase



Fonte: Dados da pesquisa.

Por outro lado, normalmente os cursos de EDO priorizam a obtenção de soluções

algébricas em detrimento da compreensão qualitativa das equações (Javaroni, 2008). A autora observa que isso pode levar os alunos a memorizar fórmulas sem entender os princípios subjacentes, destacando a necessidade de equilibrar a abordagem algébrica com a qualitativa no ensino dessa disciplina. Dessa maneira, as TD são meios que possibilitam a exploração e a visualização a partir da representação gráfica de soluções nos planos de fase, com base nas coordenadas inseridas.

Portanto, a álgebra atrelada à visualização gráfica pode facilitar a compreensão e, também, promover questionamentos sobre os motivos por trás de determinados comportamentos, aplicações com o cotidiano ou até de noções puramente matemáticas, como a convergência para um ponto ou a tendência ao infinito. Além disso, há a possibilidade de explorar a influência dos autovalores, sejam complexos e/ou reais, no tipo de estabilidade, incentivando a interação visual e a exploração das relações matemáticas.

Assim sendo, o ensino das EDO pode se dar por meio de uma abordagem experimental com a introdução de TD, proporcionando aos estudantes uma “abordagem dinâmica e envolvente” (Laudares; Furletti; Reis, 2019). Um exemplo dessa abordagem, reside na implementação da construção e análise do “campo de direções”⁶, utilizando recursos gráficos e computacionais para a representação visual de curvas e imagens associadas às equações dos sistemas. Esses recursos não apenas contribuem para a interpretação visual dos fenômenos, mas também constituem um artefato que enriquece a compreensão prática dos conceitos abordados (Laudares; Furletti; Reis, 2019). Como exemplo, Javaroni (2011) apresenta a possibilidade de articular softwares gráficos para esboçar campos de direções e softwares algébricos para calcular soluções de EDO e, posteriormente, compará-las. Tal perspectiva possibilita que os estudantes explorem diferentes representações matemáticas e estabeleçam relações entre aspectos algébricos e gráficos das soluções, o que favorece processos de experimentação com tecnologias (Borba, Scucuglia e Gadanidis, 2021).

Conforme destacam Borssoi e Silva (2017) esse tipo de abordagem “[...] retira os alunos da zona de conforto e tem potencial para ser encaminhada como investigação matemática” (Borssoi; Silva, 2017, p. 09).

Nesse sentido, Borssoi, Silva e Ferruzi (2020) utilizaram o Geogebra, software gratuito de matemática dinâmica, para desenvolver uma atividade, com alunos de engenharia da

⁶ Representação gráfica (com auxílio de vetores) das soluções para uma equação diferencial de primeira ordem.

universidade Federal do Paraná, com o intuito de explorar a solução de diferentes EDO de primeira ordem, a partir do campo de direções. Durante essa atividade, ajustaram-se parâmetros para o intervalo de visualização e para a condição inicial. O aplicativo possibilita o compartilhamento, por meio de um *link*, das experimentações realizadas. Dessa forma, o docente, em colaboração com os alunos, compartilha os denominados projetos do software para explorar diferentes situações (Borssoi; Silva, 2017). Como resultado, os autores destacam que o Geogebra permitiu aos alunos analisar comportamentos das variáveis e simular os modelos matemáticos a partir da alteração de parâmetros (Borssoi; Silva; Ferruzi, 2020).

Em outro contexto, Javaroni (2007) utilizou diferentes softwares, tais como Winplot, Maple e a planilha de cálculo Excel, para desenvolver as atividades de ensino nas aulas de EDO com alunos do curso de matemática. Essas aulas foram ministradas em um curso de extensão com o propósito de apresentar os fundamentos das Equações Diferenciais, abordando modelos matemáticos, como: crescimento populacional de Malthus, e Verhulst e da lei do aquecimento/resfriamento de corpos, por meio dos campos de direções.

Como resultado, a autora discute que os estudantes submetidos a uma abordagem que enfatiza exclusivamente o aspecto algébrico na resolução de equações frequentemente carecem de uma compreensão substancial do significado das soluções em contextos práticos (Javaroni, 2007). Dessa forma, os estudantes podem não apenas obter soluções aproximadas, mas também interpretar e justificar as implicações práticas dessas soluções em situações aplicadas. Um exemplo dessa abordagem foi discutido na própria tese da autora, quando uma dupla de estudantes explorou o modelo populacional de Verhulst, descrito pela equação diferencial logística:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

em que $P(t)$ representa o tamanho da população no instante t , $r > 0$ é a taxa intrínseca de crescimento populacional e $K > 0$ denota a capacidade de suporte do ambiente, isto é, o valor máximo em torno do qual a população tende a se estabilizar.

No episódio intitulado “*Modelo populacional de Verhulst*”, os estudantes traçaram o gráfico do campo de direções da equação, atribuindo diferentes valores ao parâmetro K , e analisaram o comportamento dos vetores diretores. A partir dessa exploração, foi possível realizar deduções acerca das soluções constantes do modelo, bem como compreender

qualitativamente a influência da capacidade de suporte na dinâmica populacional.

Além disso, a autora pontua: “concordo com Arcavi (2003) que o processo de visualização não somente organiza os dados em estruturas significativas. Ele constitui um importante fator que guia o desenvolvimento analítico de uma solução” (Javaroni, Santos, Borba, 2011, p.156).

Em outra atividade discutida nesta tese, sobre investigação do modelo do objeto em queda, dois estudantes optaram por utilizar uma planilha eletrônica para calcular os ângulos de alguns vetores diretores. Em seguida, utilizaram lápis e papel para esboçar manualmente no caderno o comportamento desses vetores. Posteriormente, empregaram o software Winplot para traçar o campo de direções, com o objetivo de confrontar o esboço feito no caderno. Essa abordagem, em que diferentes mídias se articulam, teve como objetivo proporcionar uma melhor compreensão das equações diferenciais, ultrapassando a simples manipulação algébrica (Javaroni, 2007).

Em sintonia com o exposto, pode-se reconhecer que a literatura aborda diferentes TD para o ensino de EDO, porém, propõe nesta pesquisa, além do ChatGPT, a programação com linguagem Python, caracterizada por ser uma linguagem de alto desempenho que se sobressai tanto em termos de resolução quanto na plotagem de gráficos (Alquimim, 2023). Por esse motivo, proporciona uma abordagem que pode ser unida à análise das Equações Diferenciais Ordinárias para fomentar o entendimento de aplicações dinâmicas (Alquimim, 2023).

Seguindo a abordagem apresentada por Braun (1993), inicialmente considera-se uma Equação Diferencial Ordinária de forma escalar, representada por uma função desconhecida $y(t)$ dependente da variável independente t . Entretanto, ao estender essa discussão para sistemas de EDOs lineares homogêneos, torna-se conveniente adotar uma notação vetorial, uma vez que o sistema passa a envolver simultaneamente diversas funções desconhecidas. Nesse contexto, realiza-se uma adaptação de notação, substituindo a função escalar $y(t)$ pelo vetor $x(t)$.

Ao abordar sistemas dinâmicos, estabilidade e pontos críticos, é fundamental estabelecer uma definição formal desses conceitos. Logo, definimos um sistema de EDO linear homogêneo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}x_1' &= p_{(11)}(t)x_1 + \cdots + p_{(1n)}(t)x_n \\x_2' &= p_{(21)}(t)x_1 + \cdots + p_{(2n)}(t)x_n\end{aligned}\tag{1.0}$$

⋮

$$x_n' = p_{(n1)}(t)x_1 + \cdots + p_{(nn)}(t)x_n.$$

No entanto, para simplificar consideramos o modelo matricial, onde $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$ como componente de um vetor $x = \varphi(t)$, solução da equação e $p_{11}(t), \dots, p_{nn}$ são funções escalares contínuas da matriz $P(t)_{(n \times n)}$ definidas no intervalo I, o que resulta:

$$x' = P(t).x.$$

Para isso, é importante destacar dois teoremas e uma definição, de modo que, posteriormente, os passos seguidos pelos autores e pelos estudantes durante a atividade final fiquem claros.

Teorema 2 (Princípio da Superposição): Sejam $X_1, \dots, X_n$ soluções de (1.0) num intervalo I, então a combinação linear $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ também será solução do sistema, quaisquer que sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$.

Definição 1: Se $x_1, \dots, x_n$ são soluções linearmente independente de (1.0) X_1 então dizemos que $x_1, \dots, x_n$ formam um conjunto fundamental de soluções do sistema em questão.

Teorema 3 (Solução geral dos sistemas homogêneos): Sejam $x_1, \dots, x_n$ um conjunto fundamental de soluções de (1.0). Então, a solução geral do sistema no intervalo é dada por:

$$X = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n,$$

onde $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ são constantes arbitrárias.

Dessa forma, precisamos definir o que vem a ser um ponto crítico já que são fundamentais no estudo de sistemas dinâmicos, pois representam os pontos de equilíbrio onde o sistema não apresenta variação. Eles são essenciais para a análise de estabilidade, permitindo determinar se o sistema tende a se estabilizar ou se afastar do ponto de equilíbrio. Além disso, a identificação dos pontos críticos ajuda a classificar o comportamento do sistema, como pontos de atração ou de sela, e fornece uma compreensão qualitativa das soluções, muitas vezes mais útil do que as soluções exatas. Em contextos práticos, como na engenharia ou biologia, os pontos críticos podem representar situações importantes, como equilíbrio térmico ou falha estrutural. Definimos da seguinte forma:

Dado um sistema de equações diferenciais ordinárias autônomo da forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

onde $f: R^n \rightarrow R^n$ é uma função vetorial que descreve o sistema, um ponto crítico (ou ponto de equilíbrio) $x_0 \in R^n$ é um ponto onde:

$$f(x_0) = 0$$

Isso significa que, ao substituir x_0 no sistema, obtém-se um vetor nulo, isto é, a taxa de variação das variáveis do sistema é zero nesse ponto. Assim, se o sistema iniciar em x_0 , permanecerá em equilíbrio ao longo do tempo.

Considere agora um sistema dinâmico descrito por uma equação diferencial não linear. A determinação dos pontos de equilíbrio constitui uma etapa fundamental da análise qualitativa, pois, a partir deles, podem ser investigadas propriedades como estabilidade e comportamento local das soluções.

Entretanto, essa análise não é realizada diretamente sobre o sistema não linear em toda a sua extensão. O procedimento consiste em linearizar o sistema em torno de um ponto de equilíbrio, obtendo-se um sistema linear associado. Nesse contexto, o Teorema de Hartman–Grobman (Braun, 1993) estabelece que, sob determinadas condições, o comportamento local do sistema não linear é topologicamente equivalente, em outras palavras, os dois sistemas apresentam comportamentos qualitativamente semelhantes nas proximidades do ponto de equilíbrio ao comportamento do sistema linearizado em uma vizinhança do ponto de equilíbrio.

Assim, a análise dos pontos críticos possibilita compreender a dinâmica local do sistema, permitindo a classificação do ponto de equilíbrio e a inferência sobre a estabilidade das soluções próximas. Contudo, essa abordagem não descreve a dinâmica global do sistema, mas fornece informações válidas apenas em uma região próxima ao ponto considerado.

Antes de adentrar nas discussões específicas sobre o uso do Python, faz-se pertinente explicitar os motivos que orientaram sua escolha no contexto desta pesquisa. Tal escolha não ocorreu de maneira aleatória, mas esteve fundamentada tanto nas potencialidades dessa linguagem de programação quanto em indicações presentes na literatura, que a apontam como uma tecnologia relevante para contextos educacionais e, de forma mais abrangente, no campo da matemática, incluindo suas dimensões pura e aplicada.

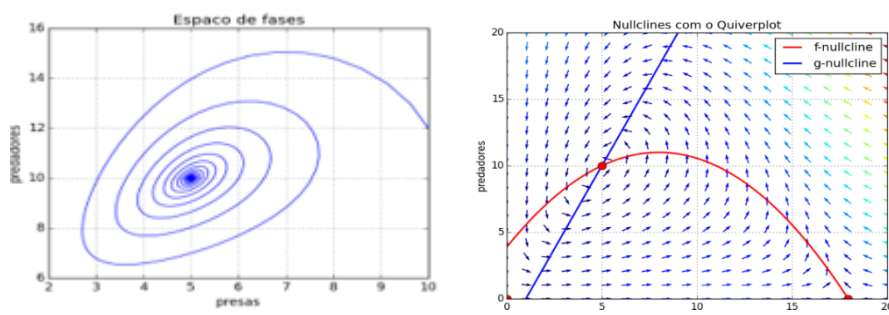
Nesse cenário, o Python se destaca por possibilitar a construção de representações

gráficas, a manipulação dinâmica de parâmetros e a exploração de diferentes comportamentos de soluções, aspectos que favorecem abordagens investigativas. Além disso, sua utilização foi pensada de forma articulada com outras tecnologias digitais e recursos de inteligência artificial, de modo a ampliar as formas de interação dos estudantes com os conceitos matemáticos. Assim, enquanto o Python contribui para a visualização e experimentação, a inteligência artificial pode atuar como apoio na interpretação, na elaboração de comandos e na reflexão sobre os resultados obtidos.

Por conseguinte, de toda forma, é interessante integrar tecnologias, neste caso: a linguagem Python, com o conceito de plano de fase, tendo a possibilidade de exploração do estudo de estabilidade em sistemas dinâmicos⁷ (Alquimim, 2023). Dessa forma, a linguagem oferece algoritmos numéricos robustos para a resolução de EDO, permitindo, a partir dessas soluções, identificar padrões, pontos críticos e avaliar a estabilidade do sistema ao longo do tempo. Por exemplo, o Bigato (2015) utiliza a linguagem Python para plotar a dinâmica presa-predador, que, ao ser visualizada, aparenta-se como uma espiral e possui um ponto crítico. No entanto, não é possível determinar se esse comportamento está convergindo ou divergindo apenas pela visualização da primeira figura (espaço de fase, abaixo). Portanto, é necessário utilizar o campo vetorial para perceber que o comportamento converge para o ponto crítico, representado em vermelho, exemplificando uma estabilidade do tipo assintoticamente estável.

Figura 2: Análise de estabilidade em Python para o modelo de Mimura-Murray⁸

Fonte: Bigato (2015).



Em paralelo, o autor Alquimim (2023), em seu estudo, propôs uma modelagem por meio do Python, utilizando as aplicações das EDO. O objetivo central era explorar a linguagens de programação na resolução de EDO, com ênfase na aplicação desses métodos na análise da

⁷ Modela diversos fenômenos, como a disseminação de doenças. Dessa forma, geralmente são descritos por Equações Diferenciais Ordinárias ou Parciais.

⁸ É um modelo não linear do tipo presa-predador no qual as presas estão sujeitas ao efeito Allee e os predadores à competição intra-específica, ou seja, entre indivíduos da mesma espécie (Bigato, 2015).

Curva de Phillips, especialmente no que se refere à modelagem para os índices de desemprego no Brasil. Com isso, ressalta:

Foi possível afirmar que a utilização de ferramentas computacionais, nesse caso o Python, foi possível obter de forma rápida e descomplicada as soluções das equações diferenciais ordinárias, garantindo uma boa aplicação do recurso tecnológico e tornando a sua utilidade em diferentes áreas de atuação (Alquimin, 2023, p.47).

Assim, possibilitou a obtenção de soluções precisas e rápidas para PVI (Alquimin, 2023). Além disso, a experiência revelou que o Python apresenta uma estrutura de programação que favorece sua compreensão, tornando-se utilizável mesmo por aqueles com menor familiaridade com a linguagem, o que se mostra relevante em contextos didáticos (Admiral, 2022). Adicionalmente, o autor observa que com pequenas adaptações na estrutura do algoritmo, é possível resolver um número significativamente grande de EDO.

No contexto da resolução de um sistema de equações, em que representavam equações para um reator catalítico, observou-se uma discrepância nos gráficos de solução entre os resultados obtidos pelo Excel, um decrescimento tendencialmente linear e, o comum apresentado na literatura para esse tipo de problema, uma curva decrescente, mas com uma tendência não linear (Silva e Pimentel, 1999). Diante dessa divergência, concluiu-se que: “A ferramenta Python se revelou uma escolha mais apropriada para a modelagem e resolução do problema, visto que os resultados gerados se alinham de maneira mais consistente com as expectativas literárias” (Silva; Pimentel, 1999, p.04).

Diante disso, a linguagem se revela um recurso multifuncional para a resolução, modelagem e visualização de problemas matemáticos complexos, especialmente em contextos que envolvem essas EDO.

2.5. ESTUDO QUALITATIVO DE SISTEMA 2X2 LINEAR HOMOGÊNEO DE EDO

O estudo qualitativo, como já mencionado, visa analisar o comportamento geral das soluções sem a necessidade de encontrar soluções exatas. Em vez de focar apenas nas soluções algébricas, esse tipo de análise busca entender aspectos como estabilidade, pontos críticos e comportamento assintótico das soluções. A partir dessa abordagem, é possível obter uma visão sobre a tendência das soluções para certos valores ou sua evolução em resposta a diferentes condições iniciais. Esse estudo entende o comportamento global de sistemas dinâmicos, especialmente quando as soluções exatas são difíceis de obter algebricamente.

Considerando um sistema 2x2 linear autônomo de primeira ordem do modo:

$$x' = Ax,$$

temos, no caso em que a matriz A possui dois autovalores reais e distintos, como solução geral do sistema:

$$x(t) = c_1 \alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t},$$

onde λ_1 e λ_2 são autovalores de A e $\alpha^{(1)}$ e $\alpha^{(2)}$ os respectivos autovetores associados. Pode-se organizar essa solução de certa forma que fique claro o comportamento do plano de fase:

$$x(t) = e^{\lambda_2 t} [c_1 \alpha^{(1)} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 \alpha^{(2)}].$$

Vejamos algumas definições acerca do ponto crítico e sua influência no comportamento:

Definição 2: Um ponto crítico $x = 0$ do sistema autônomo é dito estável se, dado $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que toda solução $\phi(t)$ do sistema satisfaz, em $t = t_0$.

$$|\phi(t_0)| < \delta,$$

existe para todo t e satisfaz, para todo $t \geq t_0$.

$$|\phi(t)| < \epsilon.$$

Caso contrário chamamos de instável

Definição 3: Diz-se que o ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável se:

- Estabilidade de Lyapunov

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se uma solução $x(t) = \phi(t)$ satisfaz:

$$\|\phi(t_0)\| < \delta,$$

então

$$\|\phi(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0.$$

2.6. AUTOVALORES REAIS, DISTINTOS E DE MESMO SINAL

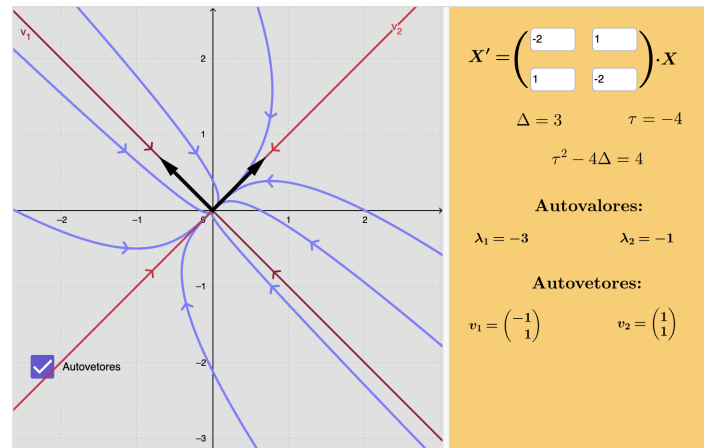
Analisando a partir dessa solução,

$$x(t) = e^{\lambda_2 t} [c_1 \alpha^{(1)} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 \alpha^{(2)}]$$

Supondo que: $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ e se $c_2 \neq 0$ o termo acompanhado por c_1 se torna desprezível em relação à c_2 , com valores para t grande.

Conclui-se que se $t \rightarrow \infty$ os caminhos do plano de fase tendem à origem (chamamos de nó) e a reta na direção de $\alpha^{(2)}$, como mostrado a seguir.

Figura 3: Plano de fase do tipo: autovalores reais, distintos e de mesmo sinal



Fonte: IGM Digital – Instituto Goiano de matemática (GeoGebra)

A Figura 3 apresenta o plano de fase associado a sistemas lineares bidimensionais cujos autovalores são reais, distintos e possuem o mesmo sinal. Nesse caso, o ponto de equilíbrio localizado na origem é classificado como um nó. A natureza desse nó, entretanto, depende do sinal dos autovalores.

Quando ambos os autovalores são negativos, como no exemplo apresentado na figura, as trajetórias convergem para a origem à medida que o tempo aumenta. Assim, a origem é um nó estável ou nó atrator. Por outro lado, se ambos os autovalores fossem positivos, as trajetórias se afastariam da origem, caracterizando um nó instável ou nó repulsor.

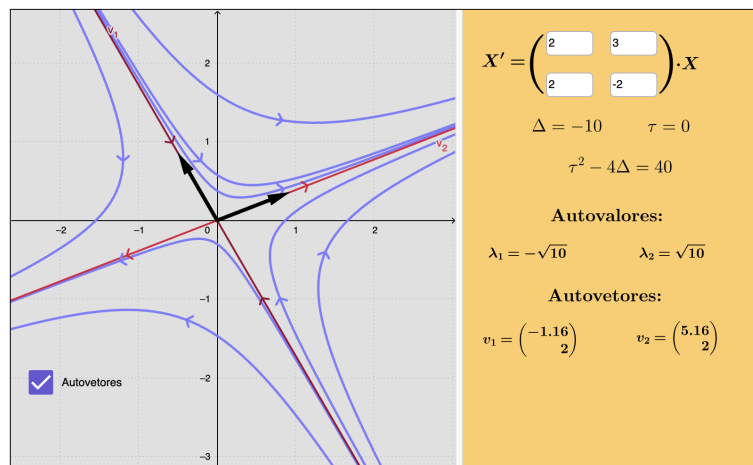
2.7. AUTOVALORES REAIS COM SINAIS DIFERENTES

Neste caso, considera-se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$. A seguir, realiza-se a análise correspondente. Se a solução estiver em um ponto sob a reta que passa pela origem em direção do nosso primeiro autovetor, logo $c_2 = 0$. Também, como supomos que $\lambda_1 > 0$, temos que $|(x_1, x_2)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$.

Se a solução estiver em um ponto sob a reta que passa pela origem em direção do nosso segundo autovetor, logo $c_1 = 0$. Também, como supomos que $\lambda_2 < 0$, temos que $|(x_1, x_2)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$.

0 quando $t \rightarrow \infty$.

Figura 4: Plano de fase do tipo: Autovalores reais com sinais diferentes



Fonte: IGM Digital – Instituto Goiano de matemática (GeoGebra)

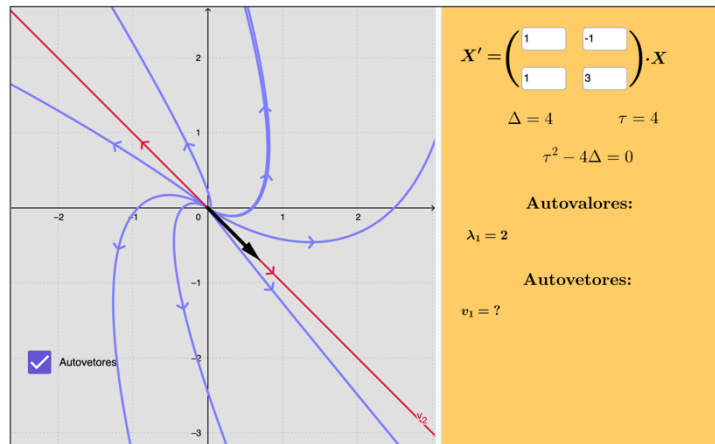
Em análise, o termo exponencial positivo é predominante, logo as soluções tendem ao infinito em módulo. Ressaltamos que a origem, nesse caso, é chamada de ponto sela e se trata de um comportamento instável.

2.8. AUTOVALORES IGUAIS

Podemos analisar supondo que ambos são negativos, assim, para os positivos o movimento é ao contrário. Temos dois casos abaixo:

No caso de dois autovetores linearmente independente, notamos que numa razão $x_2(t)/x_1(t)$ não depende de t e sim dos autovetores e das constantes. O que significa que caminha ao longo de uma reta que passa pela origem. Nesse caso, chamamos o ponto crítico de nó impróprio.

Figura 5: Plano de fase do tipo: autovalores iguais



Fonte: IGM Digital – Instituto Goiano de matemática (GeoGebra)

2.9. AUTOVALORES COMPLEXOS

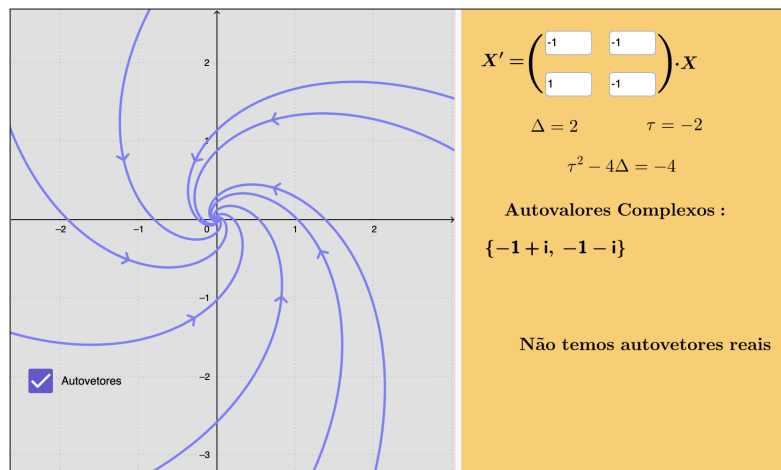
Para esse caso os autovalores são da forma: $\lambda = a \pm bi$ com solução em:

$$x = e^{at} (c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt))$$

Na análise qualitativa com autovalores complexos, considera-se principalmente a parte real dos autovalores, pois é ela que determina o comportamento das soluções ao longo do tempo. Quando a parte real é positiva, as soluções crescem; quando é negativa, as soluções decaem; e quando é nula, o sistema não apresenta crescimento nem decaimento.

Já a parte imaginária está associada apenas à presença de oscilações, indicando que as soluções podem apresentar comportamento oscilatório, mas sem alterar seu crescimento ou decaimento. Por isso, na análise da estabilidade do sistema, o foco recai sobre a parte real dos autovalores. Logo: Para $a < 0$, teremos trajetória assintoticamente estável e um ponto espiral:

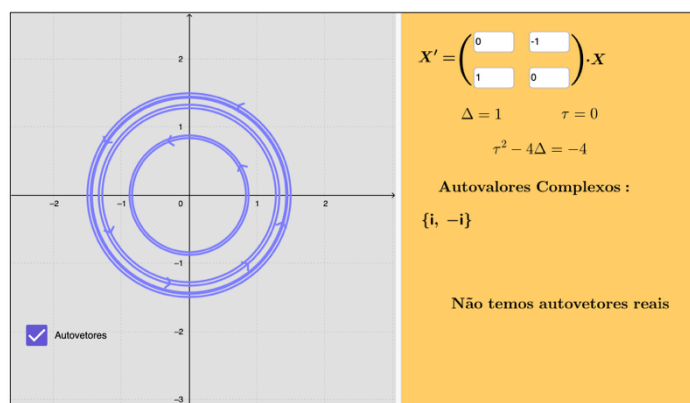
Figura 6: Plano de fase do tipo: autovalores complexos



Fonte: IGM Digital – Instituto Goiano de matemática (GeoGebra)

Para $a = 0$, a solução não apresenta crescimento nem decaimento exponencial, sendo composta apenas por funções seno e cosseno, o que caracteriza um comportamento oscilatório. Nesse caso, o ponto crítico é classificado como um centro, no qual as trajetórias são fechadas e indicam estabilidade.

Figura 7: Plano de fase do tipo: autovalores complexos



Fonte: IGM Digital – Instituto Goiano de matemática (GeoGebra)

Em conclusão, com as funcionalidades do Geogebra, percebemos que a análise de estabilidade em sistemas de equações diferenciais possibilita observar o comportamento das soluções, identificando pontos de equilíbrio e classificando a natureza de suas variações. Do mesmo modo que permite prever como um sistema se comporta ao longo do tempo, seja

converging para um ponto de equilíbrio, seja apresentando instabilidade.

Com base nesse entendimento, é possível avançar para a próxima etapa do estudo, onde exploraremos o processo de produção de conhecimento matemático e sua relação com os referenciais teóricos, essenciais para fundamentar as práticas e abordagens adotadas nesta pesquisa.

3. TECENDO CAMINHOS COM OS REFERENCIAIS TEÓRICOS

3.1. PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO

O pensamento humano, segundo Tikhomirov (1981), com base nos ideais do psicólogo Lev Vygotsky, é um processo complexo mediado por signos profundamente enraizados em fatores históricos e culturais e, no caso do pensamento com o computador, mediado pela informatização⁹. Também argumenta que esse pensamento não pode ser simplesmente reduzido a algoritmos, pois envolve a criação de significados, contextos e valores pessoais. Essa visão dialoga diretamente com as reflexões do filósofo francês Pierre Lévy, que destaca o impacto das tecnologias na transformação das modalidades de comunicação e na forma como representamos o mundo. Para Lévy (1993, p. 2), "as técnicas de transmissão de mensagens não são neutras e têm um papel essencial na redefinição dos modos de pensar e de organizar o conhecimento."

Ambos os autores rejeitam a ideia de que as máquinas possam imitar ou substituir o pensamento humano. Tikhomirov (1981) destaca que, embora os computadores possam resolver problemas, eles operam por processos distintos dos humanos, uma vez que não atribuem significados ou valores subjetivos às suas ações. Em diálogo com essa perspectiva, Lévy (1993) argumenta que as tecnologias não são neutras, pois influenciam as formas de comunicação, representação e organização do conhecimento. Para o autor, as tecnologias digitais integram aquilo que denomina de "tecnologias da inteligência", participando da constituição de novas ecologias cognitivas.

Nesse sentido, Lévy (1993) argumenta que as tecnologias da inteligência não atuam como meros recursos passivos, mas participam da constituição de diferentes formas de pensamento e produção do conhecimento. Para o autor, distintas tecnologias favorecem diferentes estilos cognitivos, influenciando maneiras de pensar, comunicar, representar e

⁹ Para Tikhomirov (1981), a informatização corresponde ao processo em que o computador passa a mediar a atividade cognitiva humana, reorganizando modos de pensar e de produzir conhecimento.

interagir com o mundo. Assim, as tecnologias digitais passam a integrar novas ecologias cognitivas, reorganizando práticas sociais e formas de construção do conhecimento.

No que se refere ao pensamento humano, Tikhomirov (1981) afirma que os seres humanos, ao realizar ações, utilizam das generalizações práticas, muitas vezes de maneira inconsciente. Ou seja, as pessoas aplicam conhecimento ou experiências previamente, sem necessariamente estarem cientes desse processo. O que permite que as pessoas resolvam problemas ou lidem com situações novas com base em princípios, regras ou padrões já aprendidos anteriormente.

Por outro lado, o funcionamento de uma Inteligência Artificial pode ser compreendido como um processo baseado em dados e algoritmos. Segundo OpenAI (2024), esse processo se inicia com a entrada de dados (input), na qual a IA analisa a pergunta ou informação recebida, extraindo elementos relevantes do texto ou do contexto fornecido. Em seguida, ocorre o processamento das informações, no qual, com base em padrões previamente aprendidos, os dados são analisados por meio de algoritmos que identificam relações, semelhanças e associações entre conceitos.

Na sequência, há a aplicação de regras e inferências, que podem ser de natureza determinística ou probabilística, permitindo organizar os dados e direcionar a construção da resposta. Esse processo é complementado pelo ajuste ao contexto, no qual a IA considera as especificidades da situação apresentada pelo usuário, buscando maior coerência e adequação. Por fim, ocorre a geração da resposta (output), formulada a partir das etapas anteriores e organizada de maneira clara e objetiva.

Em contraste com isso, "a investigação psicológica do pensamento revela uma organização um pouco mais complexa dos processos de busca na resolução de problemas humanos do que nos processos análogos no computador"¹⁰ Tikhomirov (1981, p. 268, tradução nossa). É evidente que, ao contrário do pensamento humano, influenciado por emoções, experiências e valores subjetivos, o funcionamento da IA é estritamente lógico, baseado em dados e nas regras que aprendeu ao longo do seu treinamento. Dessa forma, em confronto com

¹⁰ Tradução de: The psychological investigation of thought reveals a somewhat more complex organization of search processes in human problem- solving than in the analogous processes in the computer.

as ideias que assemelha o pensamento humano ao pensamento do computador, Tikhomirov (1981, p. 259, tradução nossa) diz:

Grande parte dos mecanismos de controle da busca nos humanos não está representada nos programas heurísticos existentes para computadores. Mesmo quando as heurísticas de computador se assemelham às humanas, são significativamente mais simples e não comparáveis de maneira essencial (Tikhomirov, 1981, p. 259, tradução nossa)¹¹.

No entanto, tanto em Tikhomirov (1981) e Lévy (1993) quanto em Borba e Villarreal (2005), prevalece a ideia de que a tecnologia não substitui, nem substituirá, o pensamento humano. Além disso, a mídia tem o potencial de transformar a estrutura e a dinâmica da atividade mental, pois, estamos tratando do pensar com a tecnologia, da atividade coletiva, dos "coletivos pensantes" de Lévy (1993), e do construto "seres-humanos-com-mídias" de Borba, Villarreal (2005). Essa interação será explorada na próxima seção.

3.2. TEORIA DA SUBSTITUIÇÃO E SUPLEMENTAÇÃO

Nos referenciais que sustentam este capítulo, Tikhomirov (1981) e Borba e Villarreal (2005) discutem teorias que, embora formuladas em contextos históricos distintos do atual, permanecem relevantes para a compreensão das relações entre sujeitos, tecnologias digitais e produção de conhecimento. As preocupações levantadas por esses autores continuam presentes no debate contemporâneo, como evidenciam estudos mais recentes.

Ademais, este trabalho se afasta da compreensão da tecnologia como elemento substitutivo da ação docente e do pensamento humano, aproximando-se da perspectiva de Borba e Villarreal (2005) que entende a produção do conhecimento matemático como um processo coletivo, no qual seres humanos e mídias se articulam e se reorganizam mutuamente. Assim, as tecnologias digitais não ocupam o lugar do professor, mas participam da reorganização das práticas pedagógicas, do pensamento e da ação em sala de aula, abrindo possibilidades para novas formas de experimentação e de produção de conhecimento matemático.

Lopes e Pessoa (2023) destacam que a chamada teoria da substituição sustenta o temor de que máquinas assumam o lugar dos docentes, gerando inseguranças no campo educacional. Oliveira e Lopes (2022), entre outros autores, também retomam esse debate, reforçando a

¹¹ Tradução de: A large part of the control mechanisms of search in humans in general are not represented in existing heuristic programs for computers. When computer heuristics do resemble human ones, they are significantly simpler and are not comparable in some essential way.

atualidade da discussão. De modo semelhante, Felcher (2020), por exemplo, problematiza a ideia de que professores seriam substituídos pelas tecnologias digitais, afirmando que tal substituição não ocorre, mesmo diante da expansão de *softwares* e tutoriais capazes de ensinar conteúdos sem o auxílio direto do professor. De modo semelhante

No entanto, Tikhomirov (1981), ao traçar um panorama sobre a evolução das relações entre tecnologias e pensamento humano, apresenta a chamada teoria da substituição, segundo a qual os computadores poderiam substituir o ser humano em determinadas tarefas intelectuais, na medida em que, em alguns casos, produzem entradas e saídas semelhantes às geradas pelo pensamento humano. Essa teoria pressupõe que o comportamento de uma máquina, ao resolver um problema de forma idêntica a um ser humano, pode ser considerado equivalente ao pensamento. Contudo, Tikhomirov (1981) rejeita essa visão ao apontar que a semelhança funcional entre computadores e seres humanos é, no máximo, superficial. Para o autor, ainda que os computadores possam reproduzir certos resultados observados externamente na atividade humana, não replicam os processos heurísticos utilizados pelos humanos na resolução de problemas. Além disso, “um computador pode fornecer a mesma solução que um humano, mas isso não equivale a resolver o problema da mesma maneira” (Borba; Villarreal, 2005, p.14)¹².

Dessa forma, o ponto central da crítica é a diferença qualitativa fundamental entre a atividade mental humana e o trabalho computacional. A solução de problemas nos seres humanos não se baseia apenas em algoritmos formais ou etapas logicamente predeterminadas, mas em processos criativos e subjetivos que não são reproduzidos pelos programas de computador. Além disso, a atividade humana envolve uma integração complexa de processos emocionais, intuitivos e racionais, que são mediadores essenciais da ação cognitiva, que as máquinas não podem replicar. Lévy (1993) complementa essa ideia ao propor que as novas tecnologias intelectuais¹³ não substituem o pensamento humano, mas sim o reorganizam, ao intervir diretamente nas representações e formas de comunicação. Em concordância, Borba e Villarreal (2005) argumentam que as tecnologias digitais atuam como mediadoras no processo de construção do conhecimento, reorganizando o pensamento humano. Elas não somente

¹² Tradução de: A computer can provide the same solution to a problem that a human would. This, as the reader may be convinced by now, is not the same as solving the problem in the same way.

¹³ Tecnologias intelectuais/inteligência, segundo Lévy (1993), referem-se aos sistemas simbólicos, linguagens, técnicas e mídias que ampliam, reorganizam e transformam os modos de pensar, de comunicar e de produzir conhecimento dos seres humanos.

facilitam o acesso à informação, mas têm capacidade de modificar.

A teoria da suplementação também é limitada, pois considera que as tecnologias apenas ampliam quantitativamente as capacidades humanas, sem observar as mudanças qualitativas no pensamento (Tikhomirov, 1981, p. 271). Essa teoria está fundamentada em uma visão informacional do pensamento, que "pressupõe que a inclusão de um computador na atividade humana faz apenas uma contribuição puramente quantitativa"¹⁴. Ele aponta que a informatização, quando entendida dessa forma, negligência o papel da mediação dos significados na atividade humana. O pensamento humano não é um processo mecânico de manipulação de símbolos ou simples processamento de dados; envolve a criação de sentido e a avaliação de valores, que direcionam o fluxo da atividade intelectual.

(1) o sentido operacional da situação para a pessoa que resolve o problema, (2) o sentido das tentativas concretas de resolver o problema, (3) o sentido de reinvestigar o problema, (4) o sentido de vários elementos da situação em oposição ao seu significado objetivo, (5) o surgimento dos sentidos do mesmo conjunto de elementos da situação e da situação como um todo em diferentes estágios da resolução de problemas, (6) correlação dos sentidos não verbais e verbais dos vários tipos de formação no curso da resolução de problemas, (7) os processos de interação da formação de sentidos, (8) o papel da formação de sentidos na organização da atividade de pesquisa na definição de seu alcance (seletividade) e direcionamento, (9) o processo de surgimento e satisfação dos requisitos de busca, (10) a mudança no valor subjetivo ou no significado do mesmo conjunto de elementos de uma situação e ações expressas na mudança de sua coloração emocional (com motivação constante), (11) o papel de uma escala de valores subjetivos em mudança na organização do fluxo de uma busca, e (12) a formação e a dinâmica do sentido pessoal da situação de um problema e seu papel na organização da atividade de resolução de problemas (Tikhomirov, 1981, p. 263).

Na perspectiva do autor, a informatização não deve ser entendida apenas como um aumento na capacidade de processamento de dados, mas como um fenômeno que pode transformar qualitativamente a atividade cognitiva, na medida em que introduz novas formas de mediação entre o sujeito e o conhecimento. Borba e Villarreal (2005, p.12) afirmam que mesmo com o progresso e suas inovações as tecnologias e o ser humano continuam sendo vistas como "conjuntos disjuntos"¹⁵, e essa a "unidade cognitiva"¹⁶ continua sendo vista apenas como o ser humano, e não como "humanos-mídias", "humanos-papel-e-lápis"¹⁷, "humanos-computador-papel-e-lápis-oralidade"¹⁸ (Borba; Villarreal, 2005).

¹⁴ Tradução de: it assumes that the inclusion of a computer in human activity does nothing more than provide a purely quantitative.

¹⁵ Tradução de: disjoint sets

¹⁶ Tradução de: cognitive unit

¹⁷ Tradução de: "humans-paper-and-pencil"

¹⁸ Tradução de: "humans-computer-paper-and-pencil-orality"

Nesse sentido, a informatização não se limita a suplementar o pensamento humano, mas cria um tipo de interação entre os seres humanos e as máquinas, que pode reorganizar e até mesmo redefinir as formas de pensar e agir. Do mesmo modo, para Lévy (1993), as tecnologias intelectuais, ao invés de simplesmente amplificar as capacidades humanas, introduzem novas ecologias cognitivas, redefinindo os modos de conhecimento e as formas de interação coletiva.

3.3. A REORGANIZAÇÃO DO PENSAMENTO HUMANO-MÁQUINA

Tikhomirov (1981) enfatiza sobre o não desaparecimento do pensamento, mas com o ato de reorganização da atividade humana qualitativamente diferente para cada tecnologia. Esse processo é mediado pelas máquinas, que atuam como novos sistemas de signos, alterando a estrutura das funções cognitivas humanas. Lévy (1993, p. 17) sugere que as tecnologias não são apenas recurso de comunicação, mas agentes ativos na criação de "novos universos de sentido", reorganizando o fluxo de informações e o próprio funcionamento cognitivo. O computador influencia a estrutura do pensamento, modificando também os modos de memória, comunicação e linguagem, entre outros aspectos cognitivos.

Se torna interessante destacar que enquanto Tikhomirov (1981) vê na informatização uma nova etapa da mediação cognitiva, Lévy (1993) amplia essa visão ao propor que as tecnologias digitais criam uma ecologia cognitiva, onde humanos e máquinas participam juntos na produção de conhecimento. Borba e Villarreal (2005, p.12) afirmam que a “ideia de considerar o ser humano como a unidade que produz conhecimento pode subestimar a importância das tecnologias nessa produção de conhecimento.”¹⁹ Também destacam, que a produção de conhecimento não é um processo isolado ou individual, mas algo construído através de interações com tecnologias e com outras pessoas. Eles afirmam que "o conhecimento é um fenômeno coletivo" (Borba; Villarreal, 2005, p. 39), sendo continuamente influenciado por elementos sociais, culturais e tecnológicos. Da mesma forma Lévy (1993, p. 18) pontua que a distinção entre sujeito e objeto do conhecimento se dissolve, à medida que as máquinas moldam o pensamento humano, permitindo o surgimento de um "coletivo pensante que inclui homens e coisas".

No entanto, compreendemos que a produção de conhecimento se refere ao processo pelo qual indivíduos ou coletivos constroem, validam e organizam informações, transformando-as

¹⁹ The very idea of considering the human being as the unit that produces knowledge can underestimate the importance of technologies in this knowledge production.

em saberes sistematizados que podem ser utilizados para interpretar o mundo. O conceito de “coletivos pensantes”, proposto por Lévy (1993) e ampliado por Borba e Villarreal (2005) no contexto da Educação matemática, refere-se à ideia de que o pensamento não é produzido apenas de forma individual, mas emerge das interações entre sujeitos, tecnologias e contextos. Nessa perspectiva, o conhecimento é construído de forma compartilhada, o que aponta para a fluidez das fronteiras entre o individual e o coletivo. Assim, o uso de tecnologias e as interações entre os sujeitos dificultam a distinção entre produções individuais e construções coletivas do conhecimento. Por exemplo, em um cenário de aprendizado colaborativo com o uso de tecnologias, os alunos compartilham ideias, testam hipóteses em conjunto e utilizam ferramentas digitais que contribuem igualmente para o processo de aprendizado. Nesse sentido, o conhecimento é um produto que emerge tanto das interações individuais quanto das coletivas.

Além disso, as mídias digitais favorecem a produção de conhecimento em interação, ideia presente em Borba e Villarreal (2005), que destacam que o conhecimento emerge da articulação entre pessoas e tecnologias. Da mesma forma, afirmam que as tecnologias não apenas suportam o processo de aprendizagem, mas também atuam como agentes ativos na transformação do pensamento e na organização coletiva do conhecimento. Borba e Villarreal (2005) argumentam que as tecnologias digitais atuam como mediadoras no processo de construção do conhecimento, reorganizando o pensamento humano. Elas facilitam o acesso à informação, e modificam a forma como as pessoas interagem com o conhecimento e entre si, criando espaços para a colaboração e experimentação.

3.4. EXPERIMENTAÇÃO-COM-TECNOLOGIAS

Há anos, educadores matemáticos vêm debatendo a importância de refletir sobre como as tecnologias podem permear o ensino de matemática e de que maneira podem ser utilizadas para o estudo de conceitos e a exploração de problemas matemáticos. Nesse sentido, Zampieri et al. (2023, p. 209) destacam o potencial das tecnologias digitais para favorecer o desenvolvimento do pensamento crítico e possibilitar que os estudantes construam suas próprias estratégias na resolução de situações-problema.

Além disso, essas abordagens incentivam a formulação de conjecturas, ou seja, hipóteses sobre possíveis soluções, bem como sua testagem, o que contribui para o desenvolvimento da criatividade e do raciocínio lógico. Dessa forma, os estudantes passam a atuar de maneira mais ativa na construção de seu próprio conhecimento.

Essa perspectiva encontra eco em Borba e Villarreal (2005) que propuseram uma atividade para um curso de matemática Aplicada direcionado a estudantes de biologia, na qual um grupo de alunos investigou o efeito de diferentes substratos na germinação e no crescimento de plantas. À medida que os alunos se aprofundaram nos conceitos envolvidos, especificamente nas definições e propriedades de logaritmos, passaram a explorar a relação entre coeficientes e gráficos de funções logarítmicas da forma $y(x) = a \log(x + b) + c$. Para isso, utilizaram uma calculadora gráfica.

Os autores destacam que os estudantes, com o objetivo de analisar as mudanças ao variar cada coeficiente, empregaram uma abordagem experimental com tecnologia utilizando uma família de funções distintas. Assim, os alunos formularam suposições, exploraram essas suposições, construíram conjecturas e discutiram suas descobertas tanto com os colegas quanto com o professor (Borba, Villarreal, 2005).

Da seguinte maneira, o enfoque experimental-com-tecnologias foi desenvolvido “como proposta pedagógica que enfatiza o gerar de conjecturas matemáticas feitas a partir de dois aspectos fundamentais de mídias informatizadas como as calculadoras gráficas: a experimentação e a visualização” (Borba, 2001, p. 142). Entendemos que o conceito amplia o escopo da interação dos alunos com esses recursos tecnológicos, possibilitando a integração de ideias que, de outra forma, poderiam não emergir. Dessa forma, é crucial considerar o aspecto coletivo dessa abordagem, ao qual a tecnologia se transforma em atores dentro dessa coletividade formada por atores humanos e não-humanos (Zampieri, 2018).

Em sintonia com Borba e Villarreal (2005), Borba, Scucuglia e Gadanidis (2021) defendem que o conhecimento é coletivo e sua produção é fruto da interação entre atores humanos e não-humanos, ou como eles denominam, por um sistema de seres-humanos-com-mídia. Nesse sentido, essas mídias englobam oralidade, escrita, TD etc. Segundo esses autores, essa noção nos ajuda a entender as possibilidades que se abrem ao interagirmos com uma dada mídia, particularmente com as TD, mas não com o intuito de comparação, mas de compreender as transformações qualitativas que ocorrem na produção de conhecimento ao interagirmos com elas e que novos problemas podem emergir (Borba, Villarreal, 2005).

Do mesmo modo, Borba e Souto (2016) afirmam que abordagem experimental se alinha à visão epistemológica do conceito de seres-humanos-com-mídias de Borba e Villarreal (2005), na qual o *feedback* fornecido pelas mídias durante uma experimentação pode provocar debates,

discussões, questionamentos, surgimento de novas ideias e diferentes caminhos para a resolução de um problema, envolvendo todos os participantes na busca por soluções. Assim, ao participar de discussões mediadas por tecnologias, o estudante recebe respostas imediatas dos recursos utilizados, o que os autores denominam "*feedback*". Vale mencionar que há diferentes tipos de *feedback* e estão intimamente conectados às diferentes interfaces que a tecnologia oferece (Borba e Villarreal, 2005). Esse *feedback* permite aos alunos confrontar suas próprias ideias e as ideias proporcionadas pela tecnologia, buscando compreender as razões subjacentes aos resultados obtidos e realizando ajustes em suas concepções. Dessa forma, os alunos têm a oportunidade de refutar, reanalisar e explorar diferentes abordagens com as TD para alcançar os resultados desejados.

Entende-se que nesse construto, seres humanos e mídias são percebidos como uma unidade integrada que colabora na produção de conhecimento (Borba; Villarreal, 2005). Dessa forma, por exemplo, a prática transpassa do “pressionar teclas” em uma calculadora gráfica ou computador, de modo que não ocorrem aleatoriamente, mas sim, a partir desse retorno permitido pela tecnologia com a qual se está interagindo (Borba; Villarreal, 2005; Zampieri, 2018).

Nesse contexto, Borba e Villarreal (2005, p. 75, tradução nossa)²⁰ definem o que constitui uma abordagem experimental em Educação matemática:

O uso de procedimentos provisórios e ensaios instruídos que apoiam a geração de conjecturas matemáticas; a descoberta de resultados matemáticos anteriormente desconhecidos para o experimentador; a possibilidade de testar maneiras alternativas de obter um resultado; a chance de propor novos experimentos; uma forma diferente de aprender matemática.

E, também afirmam que quando associada às tecnologias, pode propiciar:²¹

A possibilidade de testar uma conjectura usando um grande número de exemplos e a chance de repetir os experimentos, devido ao *feedback* rápido dado pelos computadores; a chance de obter diferentes tipos de representações de uma determinada situação mais facilmente; uma forma de aprender matemática que ressoa com a modelagem como uma abordagem pedagógica.

²⁰ Tradução de “the use of tentative procedures and educated trials that support the generation of mathematical conjectures; the discovery of mathematical results previously unknown to the experimenter; the possibility of testing alternative ways of getting a result; the chance to propose new experiments; a different way of learning mathematics.”

²¹ Tradução de “the possibility of testing a conjecture using a great number of examples and the chance of repeating the experiments, due to quick feedback given by computers; the chance of getting different types of representations of a given situation more easily; a way of learning mathematics that is resonant with modeling as a pedagogical approach.”

Ao se aprofundarem nessas ideias, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2021, p. 54) apresentam as seguintes características inerentes a abordagens dentro dessa perspectiva:

- Criação, simulação e geração de conjecturas de modelos matemáticos; exploração de diversificadas formas de resoluções;
- Manipulação dinâmica de objetos construídos;
- Realização de testes de conjecturas;
- Convencimento sobre a veracidade de conjecturas;
- Criação e conexão entre diferentes (e múltiplos) tipos de representações de objetos matemáticos;
- Exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos;
- Incentivo à combinação de raciocínios intuitivo, indutivo ou abduutivo, que podem contribuir ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo;
- Ensinar e aprender matemática de forma alternativa;
- Conhecimento de novas dinâmicas, formas de conectividade e relações de poder em sala de aula;
- Aprofundamento em variados níveis de rigor matemático e identificação de incoerências conceituais e/ou aprimoramento do enunciado.

Esses elementos têm como base uma perspectiva onde a produção de conhecimentos matemáticos adquire uma dimensão heurística, de descoberta, adequada aos contextos de ensino e aprendizagem de matemática. A identificação de padrões ou singularidades entre representações de objetos matemáticos (ou componentes dessas representações) promove a geração de significados matemáticos. Assim, há uma dimensão “empírica” que abrange o pensamento e a aprendizagem matemática (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2021).

Em contrapartida, faz-se imperativo tecer alguns apontamentos para fortalecer e situar o conceito de experimentação com tecnologia, além de mencionar algumas preocupações que perpassam o contexto de sala de aula e as demandas que o professor pode ter. É evidente que o desenvolvimento de atividades experimentais com tecnologia exige recursos e tempo que frequentemente não estão alinhados com a realidade dos professores. O acesso limitado aos objetos técnicos. Além disso, ambientes educacionais sofrem com questões estruturais dos recursos e do sistema escolar, como a organização das escolas e das aulas, que têm um impacto direto na prática do professor.

Paralelamente, é importante destacar as conexões que essa abordagem experimental com tecnologias evidencia, envolvendo aspectos como a experimentação, a formulação e

refutação de hipóteses e os processos de visualização. No contexto do uso de calculadoras gráficas, da linguagem de programação em Python e da inteligência artificial, destaca-se o que Borba e Villarreal (2005, p. 76, tradução nossa)²² denominam “feedback visual”, entendido como a possibilidade de as tecnologias fornecerem representações dinâmicas que permitem ao estudante observar, testar e reorganizar suas ideias em tempo real.

Nesse sentido, a visualização assume um papel central, uma vez que, conforme aponta Zampieri (2018, p. 67), oferece “suporte à intuição, à geração de conjecturas, à explicação de resultados matemáticos entre indivíduos e à resolução de problemas, de maneira geral”.

No ensino da matemática a visualização pode proporcionar novas interpretações e compreensões de conceitos que, de outra forma, seriam abstratos. Trata-se de um modo de pensar que contribui para a construção de significados e sentidos. Além disso, as tecnologias computacionais²³ permitem não apenas a visualização de imagens estáticas, mas também a criação de movimentos e simulações, ampliando as possibilidades de investigação matemática (Mazzi, 2014). O uso no ensino da matemática permite que os estudantes não apenas aprendam matemática, mas também sejam capazes de construir seu próprio conhecimento matemático (Flores; Wagner; Buratto, 2012).

Diante dessas discussões, esta pesquisa busca compreender o que emerge sobre a produção de conhecimento matemático e a experimentação com tecnologias quando graduandos em matemática exploram e refletem sobre conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias por meio de tecnologias digitais. Assim, apresenta-se, a seguir, a metodologia adotada nesta pesquisa.

4. METODOLOGIA DE PESQUISA

Antes de iniciar essa seção, retomo o objetivo dessa pesquisa o qual propusemos analisar o que emerge dos processos de exploração e reflexão por parte dos graduandos em matemática, especificamente na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, durante o estudo de sistemas de EDO, quando inseridos em atividades mediadas por Tecnologias Digitais, como o ChatGPT, linguagem de programação Python e calculadoras gráficas, fx-CG50 da Casio. Tendo como a questão que norteia esta pesquisa: **O que emerge sobre a produção de conhecimento**

²² Tradução de “Visual feedback.”

²³ Como softwares, calculadoras gráficas e linguagens de programação

matemático e a experimentação com tecnologias quando graduandos em matemática exploram e refletem sobre conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias por meio de tecnologias digitais?

Vale ponderar que Garnica (2020) afirma que um método não se dá apenas através de uma série de passos com tratamento processual. Ainda complementa que “isso pretende significar que os limites das metodologias e de seus pressupostos teóricos devem ser continuamente testados, confrontados e avaliados” (Garnica, 2020, p. 95). De fato, a busca por um método permeia a compreensão do estudado, na resolução de algum problema ou até no enfrentamento de obstáculos (Garnica, 2020).

A priori, esse trabalho de campo aconteceu no contexto da disciplina de EDO sendo oferecida comumente no sexto semestre do curso de licenciatura e bacharelado em matemática da Unesp, campus Rio Claro. A saber, a ementa da disciplina, de maneira geral, abrange Equações Diferenciais de 1ª Ordem e Aplicações; Teorema de Existência e Unicidade (sem demonstração); Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem e Aplicações; e Sistemas de Equações Diferenciais e Aplicações. A proposta foi produzir os dados em três dias de experimentações com TD, que veremos posteriormente, dentro desse contexto de pesquisa.

4.1. PESQUISA QUALITATIVA

Assim, a presente pesquisa segue os princípios da abordagem qualitativa. Dessa maneira, ressaltada por Flick (2009, p. 23):

A pesquisa qualitativa consiste em escolher adequadamente métodos e teorias convenientes, no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção de conhecimento; e na variedade de abordagens e métodos.

Em complemento, Garnica (2020) também aborda questões sobre a pesquisa de cunho qualitativo, evidenciando cinco aspectos, sendo eles:

a) a transitoriedade de seus resultados; b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; d) que a constituição de suas compreensões se dá não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de a obter podem ser (re)configurados; e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Assim, ressaltamos a importância da não neutralidade em um estudo qualitativo, já que o meio em que se faz pesquisa contribui para a análise de dados e, nesse caso, a criticidade do pesquisador auxilia na elucidação ou explanação do objeto de estudo.

4.2. TRAÇANDO CAMINHOS COM OS DOCENTES

A parceria com a professora Dra. Marta Cilene Gadotti, titular da disciplina, iniciou-se no início de 2021, quando ela possibilitou minha orientação em uma pesquisa de iniciação científica. Essa colaboração foi fundamental, pois contamos com seu apoio até o final desse processo do mestrado, agora como coorientadora. Durante esse período de iniciação científica, trabalhamos em conjunto explorando as EDO e suas variações, incluindo as EDO Impulsivas, além de suas diversas aplicações. A influência e o suporte da professora Marta foram cruciais para o desenvolvimento desses estudos.

Ao ingressar no mestrado, em consulta com minha orientadora Professora Dra. Maria Teresa, avaliamos a viabilidade de produzir dados em conjunto com a disciplina de EDO, tanto nas monitorias quanto nas aulas ministradas por mim, como mestrando. Nesse contexto, a professora Marta, titular da disciplina, demonstrou-se receptiva a todas as sugestões, contribuindo ativamente na elaboração do plano de aula e das atividades relacionadas ao estudo de estabilidades, como veremos posteriormente.

Por questões de indisponibilidade de horários, a professora Marta precisou se afastar da disciplina, transferindo suas aulas para o professor Dr. Jamil Pereira Viana, que foi extremamente receptivo e manteve os acordos previamente estabelecidos com a professora. O docente Jamil já havia sido meu professor em várias disciplinas da graduação. Marcamos uma reunião para discutir a aplicação de atividade piloto que eu desenvolveria com os alunos da disciplina.

4.3. PARTICIPANTES DA PESQUISA²⁴

Para a implementação, contamos com a participação de estudantes regulares da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, ofertada no 3º ano do curso de graduação em matemática da Unesp, câmpus de Rio Claro, com o devido respaldo do Comitê de Ética da instituição. Ao longo das três etapas de experimentação, o número de participantes variou, com cerca de 11 alunos no primeiro encontro, 12 no segundo e 14 no terceiro do total de 17 estudantes cadastrados na disciplina.

Os participantes se destacaram por seu perfil investigativo e pelo alto grau de empenho nos estudos. Demonstraram interesse contínuo pelo conteúdo abordado, sempre buscando

²⁴ Aprovado 05/06/2024 pelo Comitê de Ética sob o número CAAE: 79768624.0.0000.5408.

ampliar seu entendimento, o que foi evidenciado nas perguntas feitas durante os encontros e monitorias. Esses alunos estavam sempre dispostos a explorar não apenas os tópicos diretamente relacionados à disciplina, mas também a expandir suas discussões para áreas correlatas, mostrando um comprometimento ativo com seu aprendizado e com o desenvolvimento da pesquisa como um todo.

Vale destacar que foi proporcionado um espaço de monitoria com os estudantes da disciplina, realizada duas vezes por semana. Esse ambiente teve como objetivo estreitar os laços com os alunos, permitindo compreender seus anseios, dificuldades e percepções sobre a universidade e as disciplinas. Além disso, foram momentos de troca de curiosidades e de aprendizado mútuo. Em média, cerca de 9 alunos participaram das monitorias, sendo sempre os mesmos, o que favoreceu um acompanhamento contínuo e próximo de seu desenvolvimento.

4.4. ARQUITETURA DAS AULAS

No desenvolvimento desta pesquisa, o autor atuou como colaborador do projeto Ensino e aprendizagem de matemática com calculadoras: possibilidades para a prática do professor, uma parceria entre o GPIMEM e a Casio Comércio de Produtos Eletrônicos Ltda, com gestão administrativa e financeira da FUNDUNESP. Em decorrência dessa colaboração, as calculadoras utilizadas nas aulas foram disponibilizadas por meio de doação da empresa ao projeto, viabilizando sua inserção nas práticas investigadas.

Além disso, a produção dos dados contou com o apoio de Kauan Queiroz, até então estudante de Iniciação científica e colaborador do referido projeto, tanto no suporte técnico quanto na organização das atividades desenvolvidas, bem como com o acompanhamento teórico-metodológico do GPIMEM, que contribuiu para as discussões e fundamentação da pesquisa.

As atividades foram desenvolvidas ao longo de três encontros, com duração de duas horas cada, realizados em horários da própria disciplina, no intuito de possibilitar a participação de todos os estudantes. Essa organização foi discutida e aprovada pelo Conselho de Curso da Licenciatura em Matemática. Cabe destacar que a pesquisa foi realizada em uma única disciplina, de modo que os resultados produzidos devem ser compreendidos como situados nesse cenário. Além disso, por integrarem as atividades da disciplina e comporem parte do processo avaliativo dos estudantes, é possível que o engajamento observado tenha sido influenciado por esse contexto. Todavia, entende-se que essa condição não compromete a

produção dos dados, mas constitui um elemento do próprio ambiente investigado, devendo ser considerada na interpretação dos resultados.

O primeiro encontro ocorreu em sala de aula na Unesp, escolhido por dispor de mesas adequadas para trabalho em grupo e um projetor. Já os dois encontros subsequentes aconteceram no Laboratório de Informática, uma vez que o uso de computadores era essencial para as atividades propostas.

Todas as atividades foram planejadas para fortalecer o propósito da pesquisa, buscando entender quais elementos emergem da produção do conhecimento matemático e da experimentação com tecnologias quando os graduandos refletem e exploram conceitos de EDO utilizando Tecnologias Digitais. Do mesmo modo, vale destacar que para construir, adaptar e consolidar essas tarefas foram feitos quatro pilotos: sendo o primeiro realizado com o grupo pertencente ao projeto temático²⁵, o segundo e o terceiro foram com a professora Maria Teresa e o quarto realizado com três licenciados em matemática e que estavam no quinto ano do Bacharel, na Unesp.

No primeiro piloto, o intuito foi apresentar o tema, o problema de pesquisa e o objetivo proposto, buscando orientar a produção, a escolha e a adaptação dos exercícios. Essa etapa inicial permitiu identificar fragilidades na formulação da investigação, o que levou, a partir dos feedbacks recebidos, à reconstrução da pergunta de pesquisa e ao aprimoramento da primeira atividade, posteriormente descrita.

O segundo piloto, realizado em conjunto com a orientadora, teve como foco a articulação entre teoria, resolução manual e o uso da calculadora gráfica. Nesse momento, foram testados procedimentos, discutidas abordagens e ajustadas estratégias, especialmente no que se refere ao estudo de autovalores e autovetores e suas influências no comportamento dos sistemas. Inicialmente, a proposta previa que a primeira atividade fosse conduzida de maneira guiada pelo pesquisador, com o uso constante da calculadora gráfica ao longo das explorações. Entretanto, a partir das discussões e reflexões realizadas durante esse segundo piloto, optou-se por reorganizar a dinâmica das atividades, buscando oferecer maior autonomia aos estudantes.

²⁵ Projeto Ensino e aprendizagem de matemática com calculadoras: possibilidades para a prática do professor, uma parceria entre o Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação matemática (GPIMEM) e a Casio Comércio de Produtos Eletrônicos Ltda e conta com gestão administrativa e financeira da Fundação para o desenvolvimento da Unesp – FUNDUNESP (Aprovado no processo no 3221/2021 – CCP).

Assim, passou-se a considerar mais pertinente que os alunos desenvolvessem suas próprias estratégias de exploração e recorressem às tecnologias conforme julgassem necessário ao longo das investigações matemáticas.

No terceiro piloto, também desenvolvido com a orientadora, buscou-se aprofundar o conhecimento sobre o uso do Google Colab e do Python, com o objetivo de compreender como poderia ocorrer a interlocução entre atividade, código e o uso de inteligência artificial. Nesse contexto, foram realizadas explorações que permitiram compreender a estrutura dos códigos, bem como as possibilidades de interação com o ChatGPT-4²⁶, ampliando o repertório de estratégias para a construção das atividades.

O quarto piloto foi realizado com três licenciandos em matemática, tendo como objetivo testar aspectos mais próximos da aplicação final, como o tempo de execução das atividades, a compreensão dos comandos e as possíveis dúvidas emergentes. Nesse momento, surgiram questões relevantes, tanto de ordem técnica quanto conceitual, como a representação manual de campos de direções, a influência dos autovetores nesses campos e aspectos relacionados ao uso da calculadora. Esses elementos contribuíram para ajustes finais na proposta, evidenciando pontos que demandam maior explicitação ou reorganização.

Nos próximos tópicos, detalharemos o resultado da elaboração de cada atividade, destacando seus objetivos específicos.

I. Noções de Sistemas de EDO

Essa atividade foi organizada a partir de questões de natureza estritamente matemática, visando à consolidação dos conteúdos trabalhados em sala de aula, conforme solicitação do professor responsável pela disciplina.

Nesta atividade, os participantes foram introduzidos à resolução de sistemas EDO e à representação visual dos resultados por meio de planos de fase. Eles utilizaram a calculadora fx-CG50, junto com lápis e papel, para resolver numericamente o sistema de equação diferencial e plotar o plano de fase correspondente. Com isso, surge a primeira experimentação:

Experimentação 1: A partir do sistema de EDO fornecido, resolva utilizando a calculadora gráfica junto com lápis e papel. Dessa forma, registre todos os passos de sua solução da melhor maneira, justificando através da teoria o retorno apresentado pela calculadora. Em seguida, ainda nesta folha, representa graficamente o plano de

²⁶ Versão utilizada durante as atividades.

fase, destacando comportamentos característicos e pontos críticos identificados.

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot x$$

O intuito dessa atividade é de explorar a resolução de sistemas de EDO e a representação gráfica do plano de fase e tem como objetivo específico, compreender os conceitos de autovalor, autovetor, solução geral, solução particular, estabilidade, entre outros, para resolução de sistemas de EDO; habilidade para resolver numericamente atrelado ao recurso tecnológico; competência na representação gráfica dos planos de fase e interpretação dos resultados; desenvolvimento da capacidade de análise qualitativa de sistemas dinâmicos através de seus planos de fase.

Vale destacar que, foi utilizado o aplicativo KhiCAS, um ambiente computacional integrado à calculadora gráfica da Casio, que amplia suas funcionalidades para além dos recursos do equipamento. O KhiCAS possibilita, entre outras ações, a realização de cálculos algébricos simbólicos, a resolução de equações e sistemas, a manipulação de expressões matemáticas e a visualização gráfica de funções, aproximando a calculadora de um sistema de álgebra computacional. Além disso, utiliza-se a linguagem Python.

II. Sistemas de EDO e linguagem Python²⁷

Nesta atividade, os participantes foram introduzidos à resolução de sistemas EDO e à representação visual dos resultados por meio de planos de fase. Eles utilizaram a linguagem de programação Python, via Google Colab, e o ChatGPT para resolver o sistema de equação diferencial e plotar o plano de fase correspondente variando os parâmetros.

Experimentação 2²⁸: Utilizando o ChatGPT e a linguagem Python faça uma análise do sistema dinâmico dado por:

$$x' = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot x,$$

explorando como as soluções dependem qualitativamente de α . e visualizando o comportamento das órbitas no plano de fase e responda os itens abaixo.

- a) Como o comportamento das soluções do sistema e a estabilidade dos pontos críticos variam com

²⁷ Baseado na atividade feita em 2023 que, posteriormente, foi publicada em Teixeira, Javaroni, Zampieri e Rodrigueiro (2025).

²⁸ Exercício retirado de: Boyce, W. & DiPrima, R.: Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 7ª. Ed.- LTC Editora , 2002.

diferentes valores de α ?

- b) Descreva o comportamento das órbitas no plano de fase para pelo menos três valores diferentes de α .
- c) Como essas análises podem ser aplicadas a sistemas biológicos ou físicos reais?

Dessa forma, o objetivo em si é colocar em prática a experimentação-com-tecnologias visando explorar, conjecturar e refutar na resolução de sistemas de EDO, assim como na representação gráfica dos planos de fase correspondentes. De modo a compreender os conceitos de autovalor, solução geral, estabilidade, entre outros, para resolução de sistemas de EDO; Habilidade para resolver numericamente atrelado ao recurso tecnológico; desenvolvimento da capacidade de análise qualitativa de sistemas dinâmicos através de seus planos de fase, variando os parâmetros.

III. Experimentação com a linguagem Python

A terceira experimentação foi elaborada em conjunto com o ChatGPT através de discussões sobre o objetivo de pesquisa que queríamos alcançar, e então, a presente atividade propõe uma experiência de exploração guiada mediada pelo ChatGPT, com o intuito de promover a busca, análise e implementação de modelos baseados em sistemas de equações diferenciais ordinárias. Ao utilizarem o ChatGPT como meio para acessar descrições e variações de modelos aplicados a contextos diversos, os estudantes são convidados a tomar decisões fundamentadas sobre quais modelos se alinham às condições estudadas e aos interesses do grupo. A proposta valoriza a experimentação com tecnologia e o processo de produção coletiva de conhecimento.

Exploração Guiada com o ChatGPT

Peça aos alunos que interajam com o ChatGPT para buscar modelos aplicáveis de sistemas de EDO. Eles devem anotar os modelos sugeridos e as descrições básicas, mantendo o foco na área de interesse de cada modelo.

Orientações: Diga para escolherem um modelo que considerem interessante e viável de explorar.

Discussão Inicial

Organize os alunos em duplas ou grupos de três para compartilhar e comparar os modelos que escolheram. Eles devem discutir:

- Quais modelos atendem aos critérios?
- Se não atendem, quais simplificações poderiam ser feitas?

Análise Crítica dos Modelos

Cada grupo deve responder às perguntas orientadoras, analisando as características dos modelos que

escolheram. Se o modelo não é linear ou possui coeficientes variáveis, eles devem explorar como adaptá-lo ou aproximá-lo para as condições estudadas.

Experimentação com Python

Atividade prática: Os alunos implementam o modelo escolhido no Python e testam a dinâmica com diferentes valores de parâmetros. Passos:

- Configurar o sistema de EDO no Python (ou Google Colab) com os parâmetros iniciais.
- Variar os coeficientes (mantendo-os constantes, mas testando valores diferentes) e observar o comportamento.
- Plotar as soluções e discutir o que acontece com a estabilidade e as trajetórias das soluções para diferentes configurações.

Discussão de Resultados e Interpretação Biológica/Física

Cada grupo deve analisar os gráficos gerados e responder:

- O comportamento observado reflete a descrição teórica do modelo?
- Quais interpretações ou implicações biológicas/físicas podem ser inferidas com base nos gráficos?
- Como a variação de parâmetros se relaciona com a realidade modelada?

Dica: Peça para que relacionem o comportamento das soluções ao cenário de aplicação (por exemplo, o que significaria uma solução estável ou instável em um modelo de populações presa-predador?).

Finalizadas as três propostas de atividades desenvolvidas no contexto da disciplina, pode-se observar como cada uma delas foi planejada com o intuito de favorecer a experimentação com tecnologias digitais (Borba, Scucuglia e Gadanidis, 2021) e o estudo de EDO a partir de diferentes linguagens e recursos. Tais atividades também serviram como objeto para a produção dos dados da pesquisa, por meio da observação das interações dos estudantes com a tecnologia, das escolhas realizadas e das estratégias mobilizadas durante as aulas. A seguir, apresenta-se o processo de organização dos dados obtidos, que permitirá identificar recorrências, padrões e elementos para a análise posterior.

5. ORGANIZAÇÃO DE DADOS

A análise de dados é o processo de busca e organização sistemática de transcrições de entrevistas, notas de campo e outros materiais utilizados, com o objetivo de aprofundar a compreensão desses materiais e apresentar os resultados encontrados (Bogdan; Biklen 1999).

Além disso, os autores pontuam que esse processo com os dados envolve a sua “organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese procura de padrões, descoberta dos

aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros” (Bogdan; Biklen 1999, p.205).

Por conseguinte, para alcançar o objetivo desta pesquisa, em sintonia com os pressupostos da metodologia de pesquisa qualitativa, como fonte de dados foram consideradas as gravações de vídeos e/ou áudios dos encontros e das discussões em grupo. Esses registros foram transcritos para obter dados provenientes dessas interações entre os participantes. Foi feito o uso dos registros dos softwares gerados pelos estudantes, assim como as folhas de atividades sugeridas. Dessa forma, vamos apresentar e discutir o modelo analítico proposto por Powell, Francisco e Maher (2004) que utilizamos na organização e análise dos dados.

- **Observação dos Dados de Vídeo**

A primeira etapa, conforme descrita por Powell, Francisco e Maher (2004) e reforçada por Scucuglia (2006), consiste em uma observação atenta e repetida dos dados de vídeo. Nessa fase, os pesquisadores se familiarizaram com o conteúdo dos videoteipes sem impor uma lente analítica específica, permitindo um entendimento global das sessões de pesquisa em sua totalidade.

- **Descrição dos Dados de Vídeo**

A fase seguinte envolve a descrição detalhada dos dados, de forma essencialmente descritiva e não interpretativa. Scucuglia (2006) ressalta que essa descrição deve capturar transições particulares de situações, codificadas no tempo, para que o pesquisador possa ter uma visão objetiva do conteúdo dos vídeos.

- **Identificação de Eventos Críticos**

A identificação de eventos críticos é um passo crucial. Um evento é considerado crítico quando se relaciona diretamente com a questão de pesquisa, como quando os estudantes apresentam uma explicação ou justificativa matemática (Powell; Francisco; Maher, 2004). Scucuglia (2006) também destaca a importância de selecionar esses momentos para uma análise mais aprofundada.

- **Transcrição dos Dados**

A transcrição dos eventos críticos permite focar em elementos principais de linguagem e fluxo de ideias, facilitando a análise e a compreensão dos padrões de pensamento dos estudantes.

- **Codificação**

Na etapa de codificação, os pesquisadores criam notações para identificar participantes e elementos das transcrições, alinhando esses códigos com o enfoque teórico da pesquisa.

- **Construção do Enredo e Composição da Narrativa**

Por fim, a construção do enredo e a composição da narrativa envolvem a interpretação dos dados de modo a produzir uma narrativa coerente acerca do desenvolvimento do pensamento dos estudantes ao longo das atividades propostas. Esse movimento ocorre por meio de constantes retomadas aos registros produzidos durante a pesquisa, permitindo estabelecer relações entre diferentes episódios e reinterpretar situações observadas em sala de aula.

Nesse processo, a triangulação dos dados foi realizada a partir do cruzamento entre os registros escritos dos estudantes, as gravações em áudio e vídeo das aulas, as notas de campo do pesquisador e os registros produzidos nas Tecnologias Digitais, como o ChatGPT, Python e calculadoras gráficas. Conforme discutem Araújo e Borba (2020), a triangulação consiste na utilização de diferentes fontes de dados para analisar um mesmo fenômeno investigado, possibilitando confrontar evidências produzidas em distintos momentos e contextos da pesquisa.

A utilização dessas diferentes fontes permitiu acompanhar como determinadas ideias surgiam, eram reformuladas e retomadas pelos estudantes durante as atividades. Em alguns episódios, procedimentos registrados nas resoluções escritas apresentavam indícios que só puderam ser interpretados com maior precisão ao serem relacionados às discussões gravadas em vídeo ou às explorações realizadas nas tecnologias digitais. De maneira semelhante, falas inicialmente percebidas como pontuais passaram a adquirir outros significados quando analisadas juntamente com os gráficos produzidos no Python, os comandos inseridos no ChatGPT ou as explorações realizadas nas calculadoras gráficas.

Scucuglia (2006) destaca que a triangulação também pode envolver a participação de outros pesquisadores ou dos próprios participantes no movimento interpretativo, ampliando as possibilidades de leitura dos dados produzidos. Nessa perspectiva, o cruzamento entre múltiplas fontes contribuiu para analisar os episódios considerando diferentes elementos presentes nas interações estabelecidas ao longo da pesquisa.

De acordo com Araújo e Borba (2020, p. 41), “fazendo assim, o pesquisador, ao invés

de construir suas conclusões apenas a partir de observações, pode utilizar as entrevistas para checar algum detalhe”. Dessa forma, a triangulação permitiu relacionar informações provenientes de diferentes registros, favorecendo interpretações construídas a partir da articulação entre os diversos dados produzidos durante a investigação.

Além disso, em todo encontro, logo em seu fim, foram enviados áudios à orientadora registrando momentos especiais e alguns anseios do encontro, ao fim já prospectei ações e ajustes para o próximo dia. Com as riquezas contidas nesses áudios e minhas anotações nas notas de campo constituíram mais um acoplado de dados para analisar.

Essas “notas de campo” (Bogdan; Biklen, 1994) e os memorandos²⁹ foram de suma importância no acompanhamento das aulas da disciplina e, também, durante as monitorias. Estas estratégias foram concebidas para viabilizar a produção de dados concretos, essenciais para a concretização da pesquisa.

Sendo assim, esperamos com essa pesquisa compreender as discussões que emergem entre estudantes no curso de matemática, a partir da realização de tarefas investigativas, baseadas na experimentação com tecnologias (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2021). Com o desenvolvimento dessa pesquisa, esperamos contribuir para a discussão sobre o uso de TD no ensino. Menciono que para elaboração dessa seção, em específico, baseei-me na dissertação de Teixeira (2023), a qual organizou de forma sistemática seus dados de pesquisas, utilizando diagramas, cores diferentes, entre outras.

5.1. REFLEXÕES E ANÁLISE DOS DADOS

Para realizar a análise dos dados, iniciei assistindo às gravações dos encontros múltiplas vezes, familiarizando-me com o conteúdo dos dados sem impor uma lente analítica específica, conforme propõem Powell, Francisco e Maher (2004). Essa etapa permitiu a identificação de momentos-chave, expressões faciais, interações e outros detalhes relevantes para a compreensão do contexto investigativo.

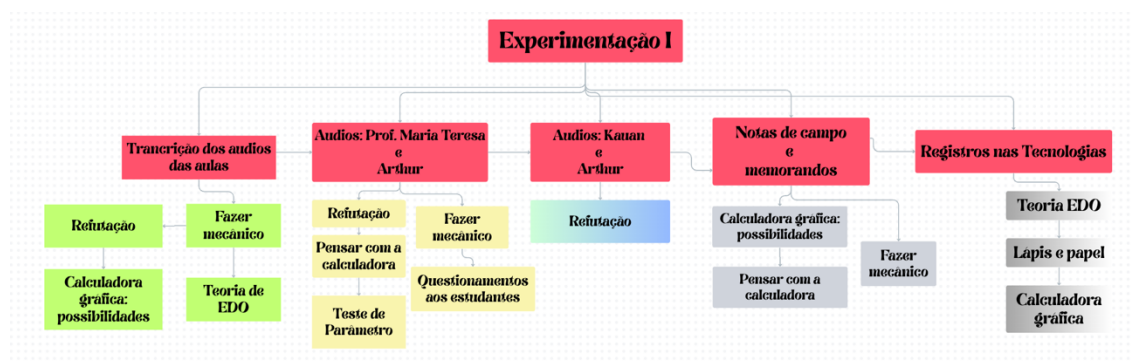
Em seguida, realizei uma descrição detalhada dos vídeos, registrando transições e ações de forma objetiva, como sugerido por esses autores. Essa abordagem descritiva ajudou a mapear

²⁹ Os memorandos consistem em registros escritos produzidos pelo pesquisador ao longo do processo investigativo, contendo reflexões, interpretações, hipóteses e possíveis relações identificadas durante a análise dos dados. Esses registros auxiliam na organização das ideias e no acompanhamento do desenvolvimento analítico da pesquisa.

o conteúdo dos vídeos, permitindo uma visão clara e objetiva das sessões de pesquisa. Posteriormente, identifiquei eventos críticos, ou seja, momentos significativos relacionados às questões de pesquisa. Esses eventos foram transcritos, focando nos elementos de linguagem e no fluxo de ideias manifestados pelos participantes. A partir da transcrição, foram criadas codificações que agruparam as informações em categorias e subcategorias mais abrangentes, alinhadas com os sete princípios da análise de dados de vídeo (Powell, Francisco e Maher, 2004). Utilizei recursos como o Excel para agrupar palavras-chave e o Canva para visualizar estes agrupamentos, destacando os temas mais recorrentes e construindo uma base sólida para a análise.

Por fim, esses dados foram integrados em uma narrativa, permitindo compreender o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes ao longo das atividades, em consonância com o modelo de análise de dados proposto por Powell, Francisco e Maher (2004).

Figura 8: Codificação da experimentação I



Fonte: Adaptado de Teixeira (2023)

O fluxograma apresentado representa a organização analítica dos dados da Experimentação I. Nessa etapa da análise, os códigos iniciais, extraídos das transcrições de áudios, das notas de campo, dos memorandos e dos registros produzidos nas tecnologias, deixam de aparecer de forma isolada e passam a ser relacionados entre si, evidenciando temas, interações e padrões presentes na Experimentação I. As diferentes fontes de dados indicadas no fluxograma (transcrição dos áudios das aulas, áudios com professores e monitor, notas de campo, memorandos e registros nas tecnologias) funcionam como elementos articuladores dos temas identificados. A recorrência de temas como, por exemplo, “fazer mecânico”, “refutação” e

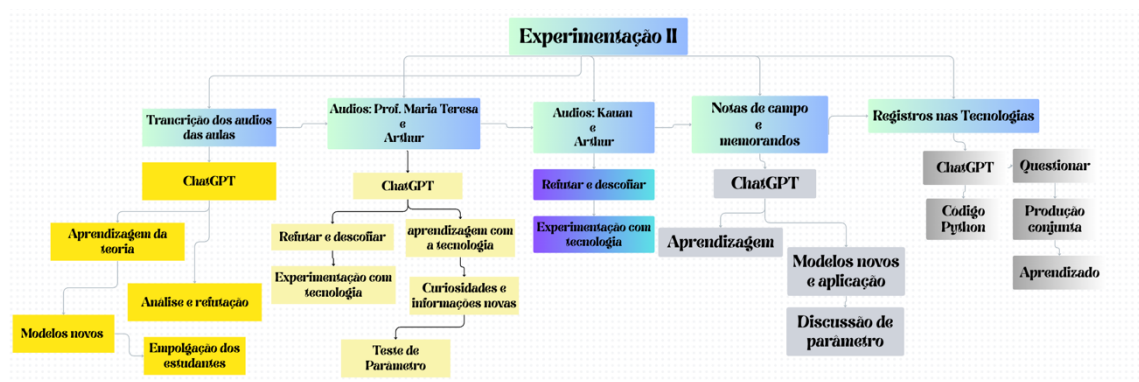
“teoria de EDO” em mais de uma fonte reforça sua relevância analítica e evidencia que esses modos de ação não se restringem a um único tipo de registro, mas atravessam diferentes momentos e contextos da prática investigada.

Nesse contexto, a identificação desses temas aproxima-se da noção de eventos críticos proposta por Powell, Francisco e Maher (2004), na medida em que evidencia momentos significativos nos quais os estudantes mobilizam diferentes formas de raciocínio e interação com as mídias.

A categoria “calculadora gráfica: possibilidades” assume papel central, articulando-se tanto com os registros nas tecnologias quanto com as falas dos estudantes e observações do pesquisador. Essa categoria não emerge como um uso homogêneo da tecnologia, mas se desdobra em diferentes formas de interação, entre elas o “fazer mecânico” e o “pensar com a calculadora”. Tal articulação explicita que o uso da calculadora gráfica oscila entre procedimentos instrumentais e movimentos mais exploratórios, sem que haja uma progressão linear entre esses modos de ação.

A categoria “refutação”, presente em distintos conjuntos de dados, atua como elemento de conexão entre o fazer mecânico, a teoria de EDO e o uso da calculadora gráfica. Ela indica momentos em que resultados obtidos são questionados, levando os estudantes a revisar procedimentos, reinterpretar conceitos ou mobilizar outras mídias. Nesse sentido, a refutação funciona como um mecanismo de reorganização do raciocínio, impulsionado tanto por questionamentos dos professores quanto pelos próprios resultados gerados pelas tecnologias.

Figura 9: Codificação da experimentação II

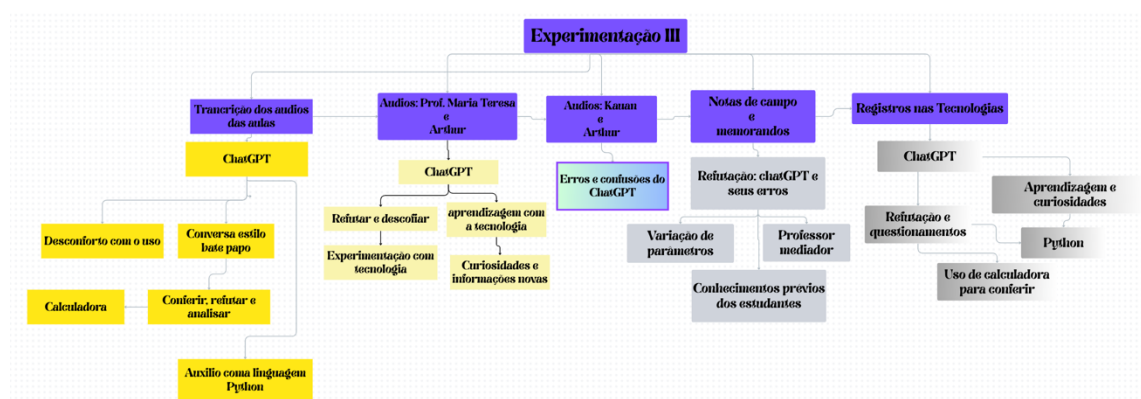


Fonte: Adaptado de Teixeira (2023)

O fluxograma da Experimentação II representa uma organização analítica dos dados que evidencia o aprofundamento das interações com o ChatGPT e um deslocamento para posturas mais críticas por parte dos estudantes. A temática “refutar e desconfiar” assume um papel central, indicando que a tecnologia passa a ser questionada, testada e confrontada, e não apenas utilizada como apoio. Esse movimento se articula com práticas de experimentação com tecnologia, teste de parâmetros e circulação de novas curiosidades, favorecendo a emergência de modelos novos e discussões mais amplas sobre suas aplicações.

Os registros nas tecnologias mostram uma intensificação da negociação entre mídias, com destaque para a articulação entre o ChatGPT, a produção de código em Python e momentos de produção conjunta. As notas de campo e os memorandos sintetizam esse processo ao evidenciar uma aprendizagem mais integrada, na qual exploração, questionamento e validação coletiva passam a estruturar o desenvolvimento das atividades.

Figura 10: Codificação da experimentação III



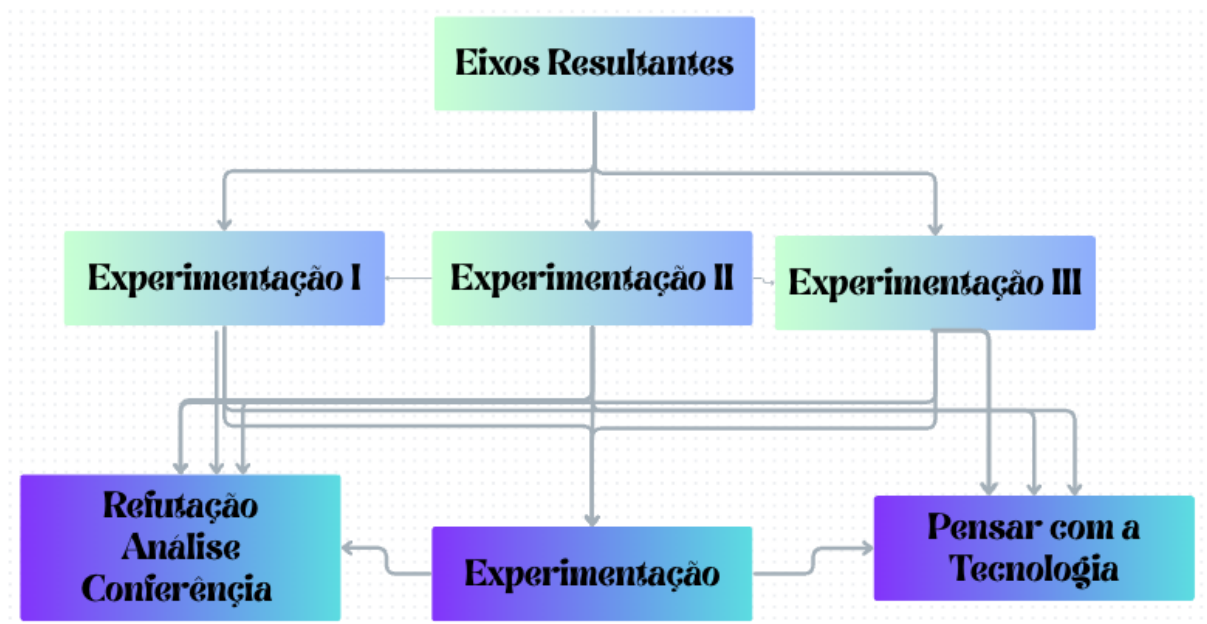
Fonte: Adaptado de Teixeira (2023)

Na Experimentação III, o tema da refutação se intensifica e se reconfigura, passando a incidir diretamente sobre as respostas do ChatGPT. Os estudantes mobilizam práticas de conferir, refutar e analisar, recorrendo a conhecimentos prévios, à calculadora gráfica e à variação de parâmetros como estratégias de validação. Nesse processo, o pesquisador assume um papel explícito de mediador, orientando a análise crítica das respostas e auxiliando na reorganização do raciocínio matemático.

Os registros nas tecnologias evidenciam uma negociação ainda mais complexa entre mídias, na qual o ChatGPT se articula com o uso do Python, da calculadora gráfica e de discussões coletivas. A tecnologia também passa a ser objeto de investigação pelos estudantes, estimulando questionamentos e curiosidades a serem objeto de investigação, estimulando aprendizagem e curiosidades a partir de seus próprios limites. Assim, a Experimentação III revela um estágio no qual a produção de conhecimento se estrutura a partir do confronto entre respostas automatizadas, validação matemática e mediação docente, reforçando o caráter crítico e coletivo da produção do conhecimento.

Durante todo o processo analítico, foi possível integrar as diferentes temáticas identificadas e destacar os conceitos mais relevantes, que fundamentam as análises apresentadas nos capítulos seguintes. Esse processo foi acompanhado de reflexões registradas em memorandos, nos quais anotei percepções, dúvidas e interpretações que surgiram ao longo da análise, permitindo um diálogo constante entre mim e os dados.

Figura 11: Codificação final



Fonte: Adaptado de Teixeira (2023)

Como etapa final e integradora da análise, o Diagrama dos Eixos Resultantes foi estruturado com base no cruzamento transversal das três experimentações realizadas. Distanciando-se de uma leitura isolada, este diagrama sintetiza o momento em que os achados de cada etapa são confrontados, evidenciando as tensões e os deslocamentos observados ao longo do trabalho de campo da pesquisa

O eixo Refutação, Análise e Conferência emerge de maneira transversal às três experimentações. Inicialmente associado à revisão de procedimentos e resultados matemáticos, esse eixo se amplia progressivamente para incluir a conferência de respostas produzidas pelas tecnologias, em especial pelo ChatGPT. A refutação deixa de incidir apenas sobre cálculos ou hipóteses dos próprios estudantes e passa a envolver também a crítica às respostas automatizadas, mobilizando conhecimentos prévios, teoria de EDO, lápis e papel, calculadora gráfica e Python como estratégias de validação. Esse eixo evidencia que a produção do conhecimento matemático é marcada por revisões constantes e não por aceitação imediata dos resultados (Borba e Villarreal, 2005).

Alinhado com Borba e Villarreal (2005) e Borba, Scucuglia e Gadanidis (2021), o eixo Experimentação articula as três experimentações como um movimento contínuo de exploração, teste e reorganização. A experimentação não se restringe ao uso de uma tecnologia específica, mas se configura como um modo de agir matematicamente, no qual variações de parâmetros, construção de modelos, comparação de representações e simulações desempenham papel central. Esse eixo evidencia que produzir conhecimento matemático, no contexto investigado, envolve experimentar possibilidades, lidar com erros e reformular caminhos, em um processo não linear.

O eixo pensar com a Tecnologia consolida-se de forma mais explícita ao longo das experimentações, especialmente a partir da segunda e da terceira. Ele não corresponde a um uso automático ou acrítico das tecnologias, mas a um processo gradual no qual os estudantes passam a integrar as mídias ao seu raciocínio matemático. Pensar com a tecnologia, nesse sentido, envolve questionar respostas, explorar cenários, articular diferentes mídias e reconhecer tanto as potencialidades quanto os limites dos artefatos utilizados (Borba, Villarreal (2005).

A articulação desses três eixos permite compreender as três experimentações como partes de um mesmo processo formativo, no qual a produção do conhecimento matemático ocorre em coletivos formados por seres humanos e mídias, conforme proposto por Borba e Villarreal (2005).

6. ANÁLISE³⁰

Este capítulo apresenta a análise dos dados produzidos ao longo das três experimentações realizadas na pesquisa. Com o objetivo de preservar o contexto em que as interações ocorreram, a análise foi organizada por experimentações, permitindo acompanhar os movimentos, discussões e explorações desenvolvidas pelos graduandos durante as atividades envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias e Tecnologias Digitais.

Entretanto, embora o capítulo esteja estruturado dessa maneira, os eixos analíticos identificados emergem transversalmente ao longo de todo o processo investigativo. Conforme ilustrado na Figura 11, as Experimentações I, II e III contribuíram para a constituição dos eixos “Refutação, Análise e Conferência”, “Experimentação” e “Pensar com a Tecnologia”. Esses eixos não foram definidos previamente, mas construídos a partir das interações, diálogos, registros escritos, memorandos e explorações realizadas pelos estudantes durante as atividades. Assim, ao longo da análise de cada experimentação, serão discutidos episódios e elementos que evidenciam a manifestação desses eixos

6.1. EXPERIMENTAÇÃO I

A partir do sistema de EDO fornecido, resolva utilizando a calculadora gráfica junto com lápis e papel. Dessa forma, registre todos os passos de sua solução da melhor maneira, justificando através da teoria o retorno apresentado pela calculadora. Em seguida, ainda nesta folha, representa graficamente o plano de fase, destacando comportamentos característicos e pontos críticos identificados.

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot x$$

Nesta atividade, os participantes foram introduzidos à resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO) e à representação visual de seus resultados por meio de planos de fase. Utilizando a calculadora gráfica fx-CG50, juntamente com lápis e papel, os alunos resolveram numericamente o sistema proposto e construíram o respectivo plano de fase.

³⁰ Usarei fonte 10 para descrever as atividades e fonte 12 discussão.

A partir do sistema de EDO fornecido, realize a resolução utilizando a calculadora gráfica, registrando detalhadamente todos os passos do processo em seu caderno ou folha de trabalho. Em seguida, explique e justifique, com base na teoria, o comportamento observado nos resultados apresentados pela calculadora. Por fim, representa graficamente o plano de fase, destacando os comportamentos característicos do sistema e os pontos críticos identificados durante a análise.

Dessa forma, analisamos as primeiras falas e explicações.

K: Onde a calculadora vai entrar?

A³¹: Isso que eu quero ver. Eu quero ver onde vocês vão colocar ela.

L: Acho que dá para fazer uma matriz aqui (calculadora).

A: No tutorial que está na segunda folha mostra que ela calcula o autovetor, e autovalor, o plano.

K: Ela faz tudo isso?

O diálogo revela o início da experimentação-com-tecnologia, conforme Borba e Villarreal (2005). A calculadora surge não como mera executora, mas como elemento que desperta curiosidade e exploração. O professor não prescreve o uso, mas instiga: “quero ver onde vocês vão colocar ela” promovendo um espaço investigativo. O grupo explora as potencialidades da mídia, reconhecendo sua complexidade (“ela faz tudo isso!”). Essa atitude aproxima-se do que Borba e Villarreal descrevem como um momento inicial de exploração e reconhecimento de possibilidades mediadas pela mídia digital, no qual os estudantes ainda não formulam conjecturas, mas começam a testar, observar e familiarizar-se com o apresentado. E a curiosidade à calculadora continua, como vemos na próxima fala.

La: Eu tenho que digitar a matriz aqui na calculadora?

A: Tem uma parte que é o comando. Aperta S, Executar. Vê se está na área da álgebra linear...

D: Você não chamou de nada.

A: Dá para voltar lá... Pode executar para ver se ele gera o autovalor. Acabou. Já calculou já.

O grupo: Nossa! Que isso! São três cliques e já chega!

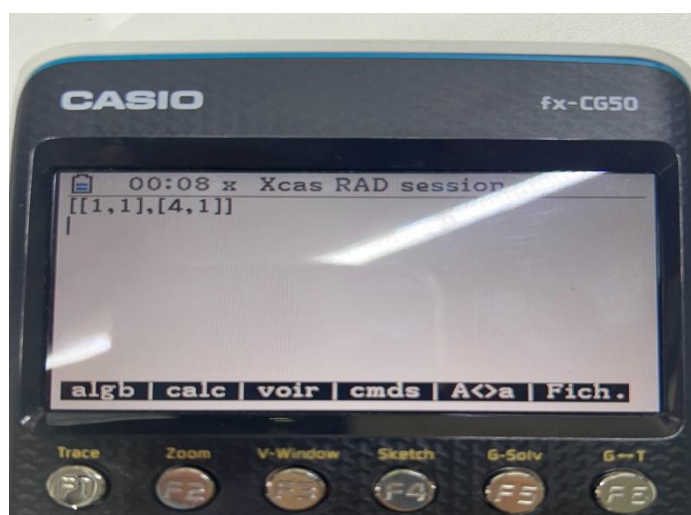
O espanto manifestado pelos estudantes (“nossa!”) expressa o primeiro contato com a resposta imediata fornecida pela calculadora, caracterizando um momento inicial de exploração das possibilidades da mídia. A rapidez com que os autovalores são obtidos chama a atenção do grupo para a potência do ambiente tecnológico, concentrando o foco, nesse estágio, no funcionamento do comando e na eficiência do procedimento, e não ainda na interpretação matemática dos resultados. Esse tipo de interação inicial com a calculadora aproxima-se do que

³¹ Refere-se ao autor.

Borba e Villarreal (2005) descrevem como uma fase exploratória, na qual os estudantes reconhecem as potencialidades da mídia digital, mas ainda não a integram plenamente aos processos de produção do conhecimento matemático.

Nessa atividade os estudantes tinham que definir a matriz do problema seguindo os passos: Para definir uma matriz podemos escrever: $[[1,1],[4,1]] \Rightarrow A$ e apertar “EXE” (EXE). Isso significa que estamos atribuindo a matriz A os elementos $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 4, a_{22} = 1$. Veja na calculadora:

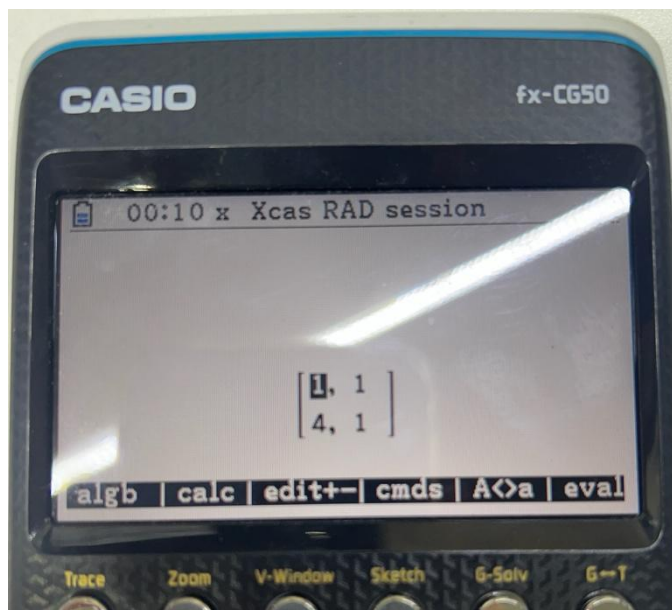
Figura 12: Definindo uma matriz³²



Fonte: Dados da pesquisa.

³² Os horários apresentados na calculadora não correspondem ao tempo real, uma vez que essa configuração não foi ajustada durante a realização da atividade.

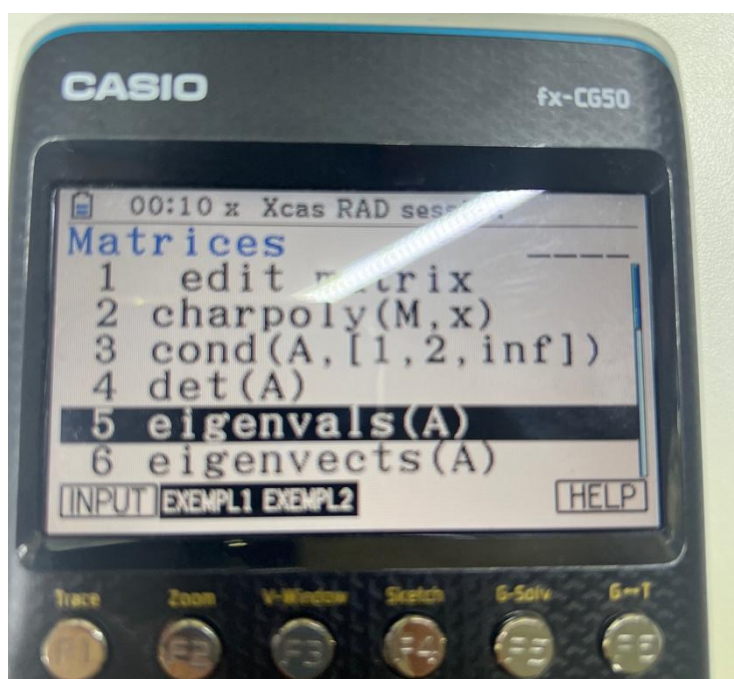
Figura 13: Definindo a matriz A



Fonte: Dados da pesquisa.

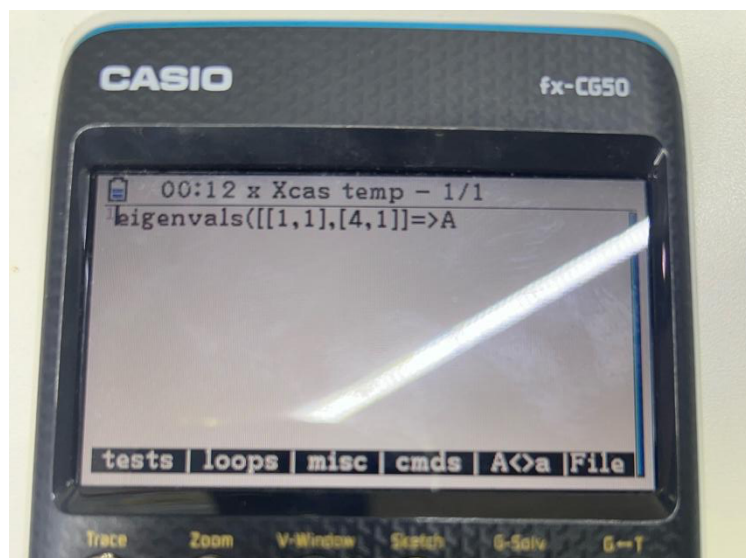
Da mesma forma, para calcular os autovalores da matriz A basta escrever ou seleccionar o comando: **eigenvals (A)** ou **eigenvects (A)** e apertar “EXE”().

Figura 14: Comandos dentro do Khicas



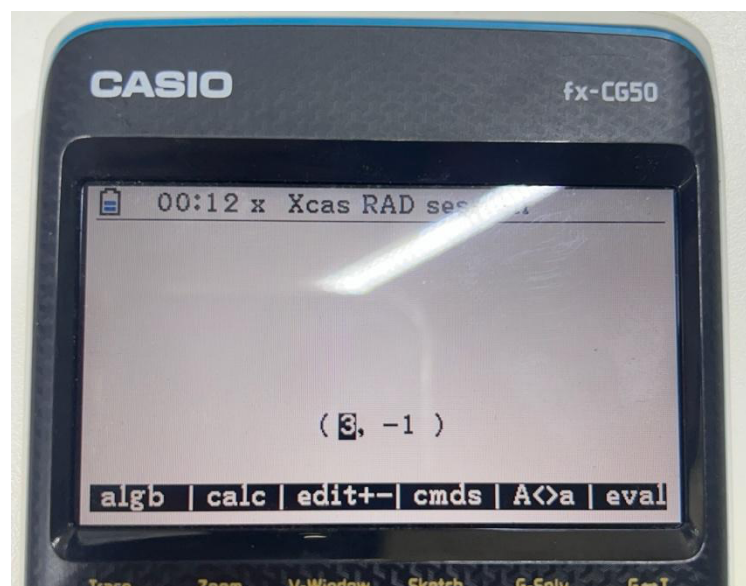
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 15: Associando os autovalores



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 16: Autovalor da matriz A



Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa forma, o autovalor solicitado pelos estudantes, comparando as explorações realizadas com apoio tecnológico às resoluções desenvolvidas com lápis e papel, à luz de Borba e Villarreal (2005).

Explicando os comandos que podem ser encontrados no ambiente Python da calculadora gráfica Casio, KhiCAS, o que permite a articulação entre álgebra linear, equações diferenciais e representações gráficas. Inicialmente, o comando *eigenvals* (A) é utilizado para calcular os autovalores da matriz associada ao sistema, fornecendo informações relevantes sobre o comportamento dinâmico esperado, como direções de crescimento e decaimento das soluções. Em seguida, o comando *eigenvects* (A) retorna os autovetores correspondentes a esses autovalores, indicando direções privilegiadas no plano de fase ao longo das quais o sistema apresenta comportamentos característicos.

A construção do campo vetorial é realizada por meio do comando *makevector*, no qual as expressões algébricas que definem o sistema são representadas simbolicamente como componentes de um vetor dependente das variáveis do plano. Essa representação permite que o sistema diferencial seja tratado diretamente como um campo de direções, deslocando o foco da resolução algébrica das equações para a observação do comportamento global das soluções. A partir disso, o comando *plotfield* possibilita a visualização gráfica desse campo vetorial, gerando o plano de fase no qual cada vetor indica a direção do movimento do sistema em um determinado ponto do plano.

O comando *makesuite* (3,-1) organiza os autovalores obtidos em uma estrutura computacional única, facilitando sua utilização conjunta com os demais comandos e integrando as informações algébricas e gráficas do sistema. Desse modo, o uso combinado desses recursos computacionais permite que o estudante explore visualmente as tendências do sistema dinâmico, reconheça padrões no campo vetorial e relacione resultados algébricos com representações gráficas, favorecendo uma leitura qualitativa do comportamento do sistema sem recorrer, nesse momento, à resolução explícita das equações diferenciais.

Nesse sentido, a situação vivenciada pelo grupo pode ser compreendida à luz do conceito de ecologia cognitiva de Lévy (1993), evidenciando como o meio digital altera a dinâmica do coletivo pensante ao oferecer outras interfaces de representação e de simulação. Contudo, nesse momento específico, a articulação entre os sujeitos e o artefato ainda se encontrava em estágio incipiente, não se configurando como um pensar matemático efetivamente mediado pela calculadora., como podemos observar nos excertos a seguir:

A: Oi, Kayth! Está dando certo com a calculadora?

K: Estou explorando.

A: Cancela, F6, aí você começa a escrever... define uma matriz e aí já vai direto...

K: Nossa, que legal!

A palavra “explorando” sintetiza o espírito da experimentação com tecnologias (Borba e Villarreal, 2005). A interação é caracterizada pela autonomia e pela curiosidade. A tecnologia se torna parceira da descoberta, não simples instrumento. O pesquisador incentiva a continuidade da exploração (“segue o tutorial, define a matriz”) sem antecipar o resultado, incita à constituição de um ambiente de investigação semelhante ao descrito por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2021), no qual a mídia fornece *feedbacks* que conduzem a novas tentativas e reformulações.

A: Essa aí é uma das importâncias, sim. Mas olhando a solução geral, o que você tem em termos de comportamento?

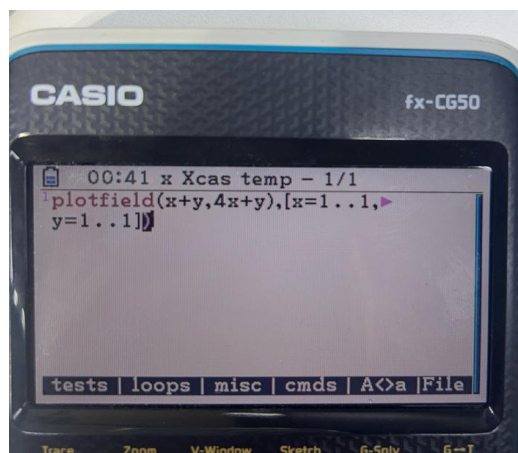
La: Para ver se ele vai explodir ou não por conta da exponencial.

D: E como ficaria esse desenho?

La: A gente coloca na calculadora.

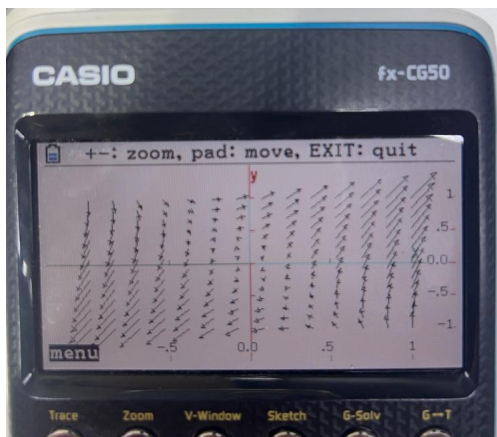
O diálogo evidencia a transição algébrica para a análise qualitativa típica do ensino de EDO com apoio visual (figura 18). A calculadora é acionada como espaço de simulação, incorporando a noção de visualização dinâmica presente em Borba, Scucuglia e Gadanidis (2021). A relação com a mídia permite prever comportamentos (“explodir ou não”) sem cálculo exato, manifestando o caráter exploratório e experimental da aprendizagem. Na calculadora gráfica para plotar o campo de direções de um sistema de EDO basta escrever *plotfield* ([1ª linha do sistema, 2ª linha do sistema], [x=a..b, y=c..d]) sendo a, b, c, d dimensões do plano cartesiano. Veja o resultado pela calculadora dos alunos:

Figura 17: Plotando o retrato de fase



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 18: Retrato de fase



Fonte: Dados da pesquisa.

Durante o processo de resolução dos sistemas de EDO, um aspecto interessante emergiu entre os participantes: a refutação inicial dos resultados obtidos pela calculadora gráfica. Observou-se que, diante das soluções numéricas apresentadas pela tecnologia, muitos alunos demonstraram ceticismo e buscaram validar os resultados por meio de cálculos manuais realizados no papel.

Esse comportamento revelou não apenas a falta de confiança na tecnologia, mas uma postura investigativa importante, na qual o estudante tenta compreender as divergências e confirmar a coerência dos procedimentos realizados. Assim, a refutação não deve ser interpretada como resistência à tecnologia, mas como uma etapa natural do processo de construção do conhecimento, em que o aluno confronta o resultado automático com o raciocínio analítico. Na fala apresentada a seguir, os estudantes realizavam o cálculo dos autovalores associados à matriz e, ao conduzir esse procedimento com a calculadora, formulei o seguinte questionamento:

A: Vocês vão acreditar no que a calculadora está falando?

La: Não, estou fazendo na cabeça.

Aqui se concretiza a categoria refutação e conferência. O questionamento foi para provocar o pensamento crítico e a verificação independente. A estudante contrapõe o cálculo manual ao resultado digital, instaurando um diálogo entre modos de produção de conhecimento.

Esse movimento reflete o princípio de Tikhomirov (1981) de que o pensamento humano, mediado pela tecnologia, conserva sua autonomia reflexiva, o computador reorganiza o pensamento, mas não o substitui.

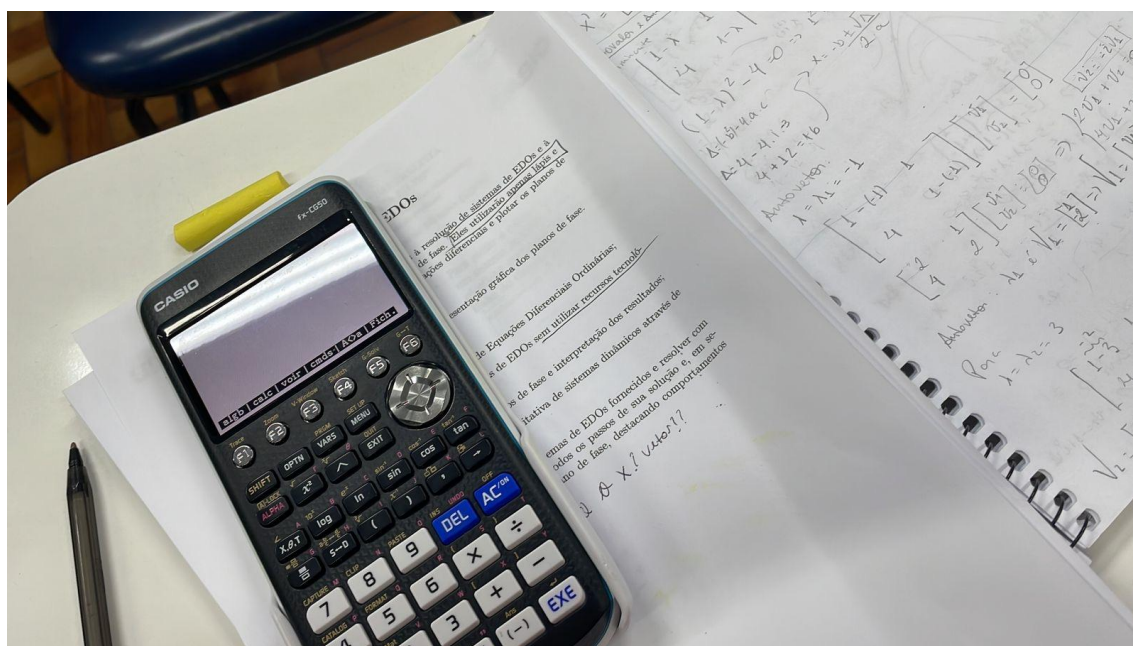
D: E aí a gente já calcula os autovalores, autovetores, mas ele entrega tudo.

A: É, mas a questão está: você confia?

D: Ela calculou na mão e deu certo também.

O professor mantém a tensão entre confiança e conferência. A pergunta “você confia?” desloca o foco do resultado para o processo, evidenciando a mediação epistemológica entre humano e mídia. A conferência entre cálculo manual e automático reforça o caráter coletivo e crítico do conhecimento, no qual a tecnologia é um interlocutor a ser avaliado, não uma autoridade infalível. Após a conversa, registrei os cálculos dos autovalores e autovetores dos estudantes antes de iniciar o processo com a calculadora:

Figura 19: Lápis, papel e calculadora



Fonte: Dados da pesquisa.

O modo como esse estudante se envolve com a atividade revela um percurso que articula diferentes formas de interação com o conhecimento matemático. Ao grifar o enunciado, registrar questionamentos à margem e realizar os cálculos manualmente, o aluno constrói uma leitura atenta do problema, explicitando dúvidas, hipóteses iniciais e caminhos possíveis de

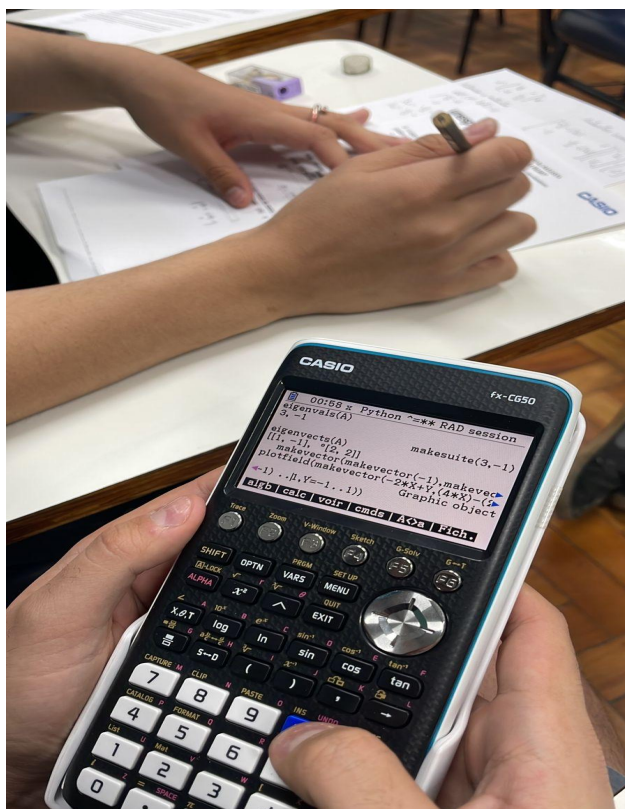
resolução. Esse movimento evidencia um primeiro momento de apropriação conceitual, no qual o papel e o lápis assumem função central na organização do pensamento.

A utilização posterior da calculadora gráfica (imagem a seguir) não substitui esse processo inicial, mas se soma a ele, permitindo a visualização dos gráficos e do comportamento do sistema de forma dinâmica. Nesse sentido, a calculadora passa a atuar como mídia que amplia as possibilidades de análise, oferecendo ao estudante um novo olhar sobre os resultados obtidos manualmente. Observa-se, assim, uma articulação entre registros escritos, cálculos algébricos e representações gráficas, na qual diferentes mídias coexistem e contribuem para a compreensão do problema, sem que uma anule a outra.

A: Tá dando certo, hein, Lidia? Vocês primeiro resolveram o autovalor aí (na calculadora) e conferiram na mão?

Li: Ela foi mais rápida nas contas, aí só confirmamos o resultado.

Figura 20: Definindo o retrato de fase



Fonte: Dados da pesquisa.

A dupla estratégia, cálculo manual e conferência digital mostra a integração de diferentes mídias (papel, lápis, calculadora) no mesmo processo de raciocínio. Esse entrelaçamento caracteriza o conceito de seres-humanos-com-mídias (Borba & Villarreal, 2005): o conhecimento emerge da interação de atores humanos e não-humanos, e não de um único modo de representação. A própria estudante reconhece que o uso da calculadora agiliza os cálculos, porém destaca que realizou a conferência dos resultados a partir dos procedimentos feitos à mão.

N: A gente achou os autovetores. Os autovetores... está diferente. Era isso?

A: Você vai perceber que é necessário atribuir um valor a v_1 para então determinar v_2 . O que importa é a relação entre as variáveis do sistema. Observe que, no primeiro caso, essa relação se mantém negativa; no segundo, ela se mantém positiva, numa proporção de 1 para 1. Portanto, é preciso analisar a lei de formação do vetor.

N: Então, está dando diferente da calculadora.

A: Precisamos verificar o que ocorreu. Vamos conferir: onde está a matriz? Vocês encontraram corretamente o autovalor?

N: Sim, esse bateu. O autovalor está correto.

K: O meu também deu igual ao da Naiara. Mas o meu deu igual ao seu também. Ou as duas cometeram o mesmo erro.

K: É muito difícil dizer que houve um erro da máquina.

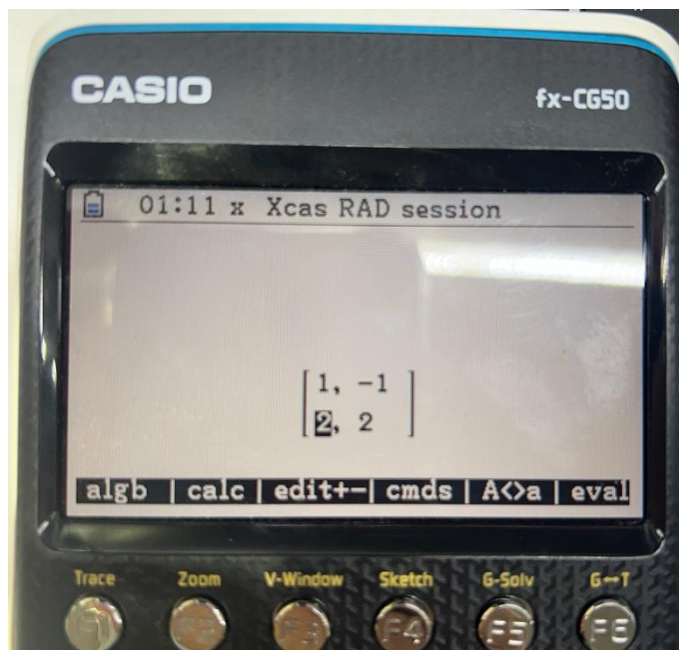
A: Ah, entendi. A calculadora está apresentando o vetor linha por linha, enquanto o autovetor deve ser interpretado como um vetor coluna.

N: Entendi. Então a minha resposta é $(-1, 2)$.

A: Exatamente. A calculadora apenas apresentou o resultado em uma forma diferente.

Nesse caso, ao clicar para calcular os autovetores o comum e correto seria a calculadora retornar a seguinte resposta, como essa de um grupo:

Figura 21: Autovetores



Fonte: Dados da pesquisa.

Aqui os autovetores são: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; porém, na calculadora dos estudantes, talvez por um erro de formatação a calculadora entregou na forma de linha como: $(1, 2); (-1, 2)$.

A divergência entre o resultado humano e o da máquina leva à uma análise reflexiva. Ao identificar o erro de forma (linha vs. coluna), o pesquisador explicita a diferença entre representação e conceito, convertendo a inconsistência em oportunidade de produção de conhecimento. Essa atitude reflete o princípio da experimentação-com-tecnologia, em que o erro é parte do processo e conduz à reformulação de hipóteses. Além disso, expressa o pensar-com-tecnologia, pois a interpretação do erro depende da leitura conjunta de humano e máquina, um coletivo cognitivo em ação (Borba, Villarreal, 2005).

A primeira experimentação evidenciou o potencial da calculadora gráfica como elemento de reorganização do pensamento matemático, no sentido proposto por Tikhomirov (1981). Ao oferecer uma visualização imediata das trajetórias no plano de fases, a mídia digital passou a integrar o processo de resolução e interpretação das EDO, não apenas como instrumento de cálculo, mas como parte constitutiva do raciocínio. Esse movimento permitiu aos licenciandos deslocarem-se de uma abordagem algébrica e mecânica para uma leitura qualitativa das soluções, reconhecendo o papel dos autovalores e autovetores na estrutura do

sistema e relacionando seus sinais ao comportamento de convergência ou divergência das soluções.

Do ponto de vista coletivo, a atividade configurou um ambiente de experimentação-com-tecnologia (Borba, Villarreal, 2005), em que estudantes, professor e calculadora constituíram um mesmo sistema cognitivo. A presença do artefato digital incentivou a investigação, o erro e a comparação de resultados, favorecendo a emergência de novas compreensões sobre o conteúdo. A calculadora foi se tornando parte da dinâmica de grupo não apenas uma extensão técnica, mas um agente de motivação e reflexão, especialmente quando o feedback visual do gráfico incitava discussões e interpretações sobre o comportamento da solução.

Por fim, os dados evidenciam a relevância da mediação docente na transição entre a execução de procedimentos e a compreensão conceitual. Observou-se que, ao questionar os estudantes sobre “por que calcular o autovalor” ou “o que ele representa graficamente”, o professor promoveu deslocamentos no discurso dos alunos, que passaram a articular o cálculo simbólico com sua representação visual. Esse movimento indica que a intervenção docente favoreceu a passagem do fazer mecânico para a explicitação de significados matemáticos. Nesse contexto, o uso articulado de lápis, papel e recursos digitais mostrou-se um elemento mediador do raciocínio matemático, sugerindo que o pensar-com-tecnologia (Borba, Villarreal, 2005), contribuiu para a reorganização das estratégias de resolução mobilizadas coletivamente pelo grupo.

6.2. EXPERIMENTAÇÃO II

Nesta atividade, os participantes foram introduzidos à resolução de sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e à representação visual de seus resultados por meio de planos de fase. Para isso, utilizaram a linguagem de programação Python, acessada pelo Google Colab, e o ChatGPT com o objetivo de resolver os sistemas e gerar os respectivos planos de fase, variando os parâmetros para observar diferentes comportamentos das soluções.

Ao entregar a folha com a atividade, não foram fornecidas instruções específicas sobre os passos a serem seguidos. O objetivo era observar de que forma os estudantes reagiriam e quais movimentos realizariam ao se deparar com o uso do ChatGPT em uma atividade,

analisando como explorariam o recurso de maneira espontânea. Ao circular pela sala já deparamos com um movimento:

A: Vamos ver. Então o primeiro passo de vocês foi subir uma foto do exercício.

K: Sim, mais fácil.

A: Você está conferindo agora, pra ver se tá tudo ok.

K: Sim, ele arrasou.

O trecho marca o início da experimentação-com-tecnologia, agora mediada por inteligência artificial. Os estudantes percebem o ChatGPT como capaz de executar tarefas matemáticas “ele arrasou”, e o professor os conduz à postura reflexiva de conferência. A dinâmica é semelhante à vivida com as calculadoras gráficas: o uso da mídia é acompanhado pela necessidade de verificar e compreender o resultado, o que reafirma o caráter coletivo e crítico do processo de produção de conhecimento, conforme apontam Borba e Villarreal (2005). Em outro grupo:

D: Arthur, pode mesmo fazer com o chat? Pode subir a foto pra ele resolver?

A: Vocês estão livres. Pode fazer o que quiser com o chat.

D: Ah! Mas aí ele já vai resolver tudo...

A: Vamos ver se resolve mesmo. Pode subir a foto.

La: Não gostei dessa atividade, não gosto de usar o chat pra resolver.

A: Vocês estão com medo de usar o chat? Ou de ficar fácil? [...] A diferença entre usar por usar e usar tentando entender o que tá acontecendo.

Aqui observa-se uma tensão entre dependência e autonomia. Os estudantes expressam receio de “deixar o chat fazer tudo”, enquanto o professor intervém de modo a favorecer a passagem de um uso automático para um uso crítico. Tal movimento pode ser compreendido à luz de Tikhomirov (1981), que distingue entre a substituição do pensamento e sua reorganização mediada pela tecnologia. O que se busca, portanto, é que o ChatGPT seja incorporado como meio de pensar, e não apenas como fornecedor de respostas prontas.

De forma análoga, Borba e Villarreal (2005), ao discutirem a experimentação-com-tecnologia, apontam para cenários nos quais o sujeito e as mídias compartilham o processo de produção do conhecimento. Nessa perspectiva, o uso do ChatGPT pode ser compreendido como uma manifestação contemporânea dessas interações, em que o erro, a automatização e as respostas geradas se tornam elementos que desencadeiam processos de reflexão.

A: Aqui, qual foi o passo?

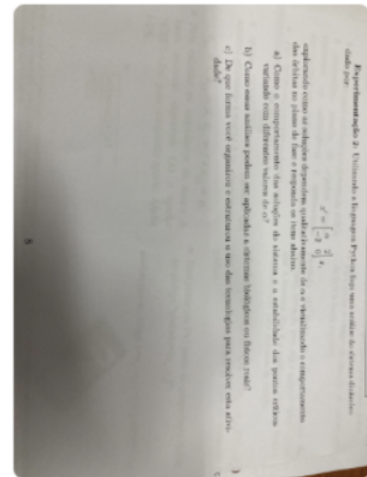
M: Escrevi realmente o exercício no chat. É que às vezes, tipo, com foto, ele dá umas bugadinhas.

A: Ah, tá. Beleza. Porque aí você já confere e já manda o que é correto para eles.

A estudante, apoiada em sua experiência recorrente de uso do chat, reconhece limitações na leitura de imagens pela ferramenta, que ela descreve como falhas de interpretação. A partir dessa compreensão, mobiliza uma estratégia considerada por ela mais eficiente: a transcrição do enunciado, em substituição ao envio da fotografia. Tal escolha evidencia um processo de adaptação consciente às possibilidades e restrições da tecnologia, integrando-a ativamente à sua forma de resolver a tarefa. Esse movimento exemplifica o pensar-com-tecnologia (Borba, Villarreal, 2005), pois revela adaptação cognitiva: a aluna ajusta o modo de interação para aprimorar o resultado. O professor valida essa postura, incentivando a verificação (“já confere”), reforçando o caráter de conferência e refutação como constitutivo do processo.

A: Vocês perguntaram em português junto com a foto e ele tá respondendo em inglês?
D: Sim, depois ele arrumou. A gente é bilíngue mesmo, tá de boa.
La: Mas o que ele fez? Ele já multiplicou?
C: Não, é porque ele não entendeu que era uma matriz lá, pela foto.
D: Nossa, vai dar trabalho... é fazer ele entender. É um pouco chato.
La: Fala aí, você é burro? É uma matriz. Vamos ver se agora ele corrige.
A: O alfa não tá multiplicando a matriz, né? O alfa é um componente...
D: Pera aí!

Figura 22: Interação com o ChatGPT



The image you provided contains instructions for an experiment using Python to analyze a dynamical system. Here's a transcription of the questions for easier reference:

Experimentação 2: Utilizando a linguagem Python, faça uma análise do sistema dinâmico dado por:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$$

explorando como as soluções dependem qualitativamente de α e visualizando o comportamento das órbitas no plano de fase e responda os itens abaixo:

a) Como o comportamento das soluções do s' na e a estabilidade dos pontos críticos variam com diferentes valores de α ?

 Mensagem ChatGPT



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao solicitar ao ChatGPT a transcrição e organização do enunciado, os estudantes recorrem à inteligência artificial como apoio para compreender a tarefa e tornar o problema mais acessível, especialmente no que diz respeito à leitura, estruturação e identificação dos objetivos da atividade.

Observa-se que ele assume o papel de reorganizador do enunciado, oferecendo uma reformulação textual que explicita o que está sendo pedido, sem, contudo, resolver diretamente o sistema ou antecipar conclusões matemáticas. Essa interação evidencia um uso inicial da tecnologia voltado à clarificação da tarefa e à redução da carga cognitiva associada à

interpretação do problema, permitindo que os estudantes concentrem sua atenção nos aspectos conceituais e exploratórios da atividade.

Embora o ChatGPT³³ tenha contribuído para a organização e a compreensão inicial do enunciado, a interação também evidenciou limitações no uso da inteligência artificial, especialmente no que se refere à formatação matemática. Em alguns momentos, a escrita das expressões algébricas e diferenciais apresentou imprecisões ou ambiguidades, exigindo que os estudantes revisassem, reinterpretassem e ajustassem as representações matemáticas apresentadas.

Essa necessidade de correção reforça o caráter não automático da mediação tecnológica, uma vez que o uso do ChatGPT não elimina o papel ativo dos estudantes na validação dos resultados e das representações. Ao contrário, a presença de erros ou inadequações na formatação matemática demanda um posicionamento crítico frente à mídia, mobilizando conhecimentos prévios para identificar inconsistências e reconstruir corretamente as expressões envolvidas. Desse modo, a interação evidencia que a inteligência artificial atua como suporte à organização do trabalho, mas não substitui a compreensão matemática dos estudantes, que permanecem responsáveis pela verificação, interpretação e correção das informações produzidas. Tal dinâmica reforça a ideia de que a produção do conhecimento ocorre no coletivo formado por seres humanos e mídias, no qual cada elemento apresenta potencialidades e limites que precisam ser constantemente negociados (Borba & Villarreal, 2005).

C: Pode colocar assim: “chat, você inverteu a linha 1 com a 2.”
A: Isso. Vamos ver se ele vai arrumar agora

Figura 23: Interação com o ChatGPT

³³ Versão gratuita.



Você está certo! A matriz é:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Obrigado pela correção! A análise ainda pode ser feita examinando os autovalores e autovetores dessa matriz para observar como o valor de α afeta o comportamento das soluções e a estabilidade do sistema.

Se precisar de ajuda com a implementação em Python, estou aqui para ajudar!



a matriz correta é: [alfa, 2, -2, 0], uma matriz 2x2. Escreva as linhas primeiro, na sequência dada.



Entendi! A matriz correta, seguindo as linhas na sequência dada, é:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa é uma matriz 2×2 onde os elementos da primeira linha são α e 2, e os elementos da segunda linha são -2 e 0.

Para analisar esse sistema no Python, aqui estão alguns passos:

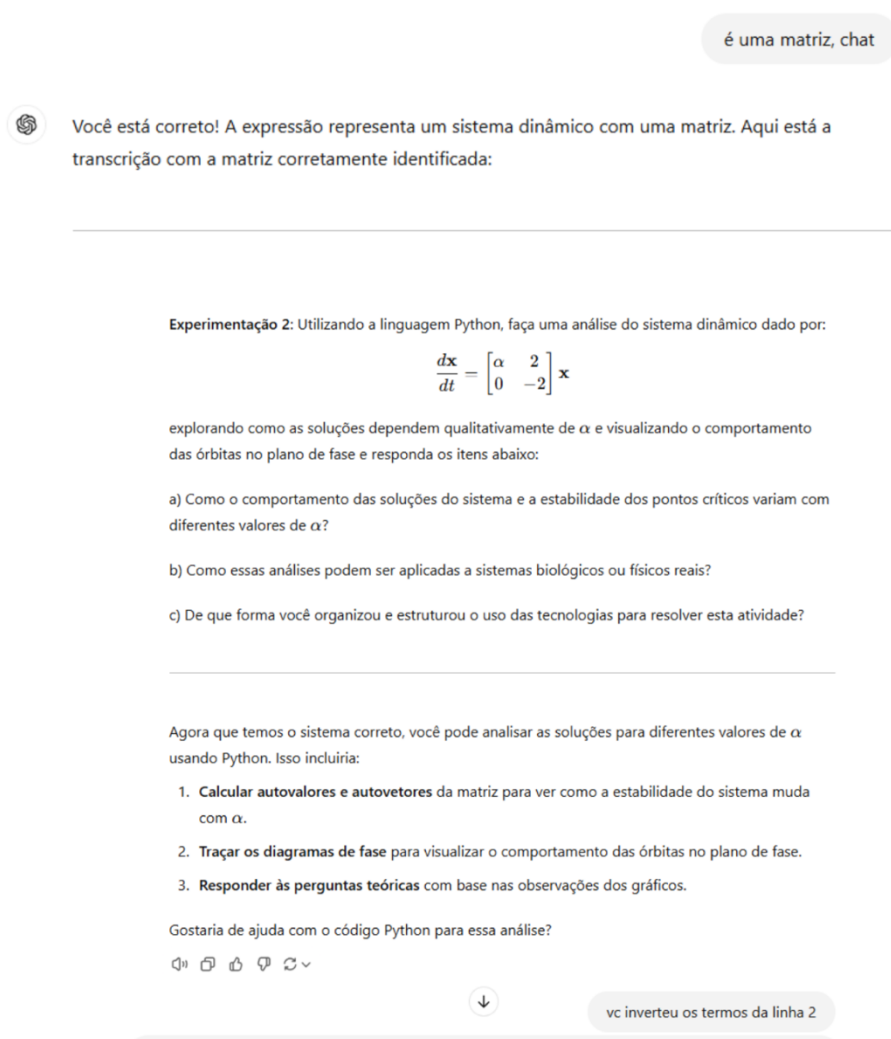
1. **Calcular os autovalores e autovetores** da matriz para entender como a estabilidade varia com diferentes valores de α .
2. **Traçar os diagramas de fase** para observar o comportamento das órbitas no plano de fase.
3. Responder às perguntas com base nos resultados obtidos.

Se precisar, posso te ajudar com o código para realizar esses cálculos e visualizar os gráficos.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 24: Interação com o ChatGPT



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse episódio, o grupo vivencia uma negociação linguística e conceitual com a IA. O ChatGPT é visto simultaneamente como parceiro e como entidade a ser “ensinada”. A tentativa de “fazer ele entender” e de “corrigir” o modelo revela a constituição de um coletivo, nos termos de Borba e Villarreal (2005): humanos e mídias que produzem conhecimento conjuntamente. A interação com o erro (“inverteu a linha 1 com a 2”) dá origem à refutação, à testagem e à reescrita de comandos, caracterizando um ciclo de experimentação-refutação-análise, onde a tecnologia não apenas responde, mas provoca reorganizações no grupo.

A: Sugere pra ele fazer uma análise por intervalo, senão fica confuso.

N: É, mas aí ele fez só olhando o zero.

A: É, o zero é o ponto crítico dele... agora, se você coloca números menores do que

4... já dá números negativos.
L: É entre -4 e 4. Vai dar delta negativo.
N: Então, eu vou pedir por intervalos.

Neste momento, o professor direciona os estudantes à interpretação analítica do que o ChatGPT produz. A sugestão de “pedir por intervalos” não é apenas técnica, mas epistemológica: introduz a noção de análise de comportamento, conceito central no estudo das EDO. A interação demonstra o uso investigativo da IA, em que os estudantes testam parâmetros, formulam hipóteses e comparam resultados. Trata-se de uma experimentação-com-tecnologia guiada pela reflexão, em sintonia com o que Borba e Villarreal (2005) descrevem como um processo de construção de significados em movimento.

A: E aí, gente?
N: Ele tá tendo um problema com o Bhaskar aqui.
K: Ele tem problema com o Bhaskar. A gente tá analisando no menos cinco, né? A fórmula é menos b, vai ficar cinco. Vai ficar menos menos, vai ficar cinco. Mas aí é negativo, só que esse aqui tem que ser menos.
A: Cuidado que esse é o próprio alfa, na verdade, se é menos cinco, ele é menos cinco, porque ele é o alfa.
N: Não, mas a fórmula...
L: O alfa vai dar menos b, mais ou menos raiz de delta. ,
N: Aí dá cinco.
L: Se for cinco, vai dar menos cinco.
N: E é menos cinco, então dá cinco.
L: No nosso caso aqui, o alfa é o b, né? Então a gente tá analisando o menos cinco.
A: Olha aqui. Menos alfa, né? Quando ele vai escrever, ele já faz menos com menos mais. Luis: Então aqui vai ser mais, então vai ficar menos b.
A: Não, então você pega assim, se você tá falando menos cinco, você pega o menos cinco, porque essa alteração do sinal ele já fez, quando ele isolou o lambda.
K para L: Nosso pensamento está errado.
A: Porque ele já fez essa conversão, né, para vocês.
N: ah! agora deu certo.

O grupo está lidando com confusão de sinais ao analisar um parâmetro (α) dentro de uma fórmula já manipulada algebricamente, muito provavelmente ligada ao cálculo de autovalores ou a uma expressão do tipo quadrática. Veja:

Figura 25: Interação com o ChatGPT

O sistema parte da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

que está associada a um sistema linear de EDOs do tipo

$$\begin{cases} x' = \alpha x + 2y \\ y' = -2x \end{cases}$$

1. Cálculo dos autovalores

Para encontrar os autovalores, calculamos o polinômio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$(\alpha - \lambda)(-\lambda) - (2)(-2) = -\alpha\lambda + \lambda^2 + 4$$

Logo, o polinômio característico é

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + 4 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$\lambda = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}$$

Aqui aparece claramente a dependência do comportamento do sistema em relação a α .

Fonte: Dados da pesquisa.

No episódio analisado, o erro dos estudantes está relacionado à interpretação do parâmetro α ao assumir um valor negativo. Ao analisar o caso $\alpha = -5$, o grupo recorre automaticamente à regra procedimental da expressão quadrática, em especial à expressão “menos b”, sem considerar que o polinômio característico já se encontra organizado na forma.

Nessa situação, os estudantes passam a tratar α como uma letra neutra da fórmula, desconsiderando que ele representa um número com sinal. Como consequência, realizam uma troca de sinal adicional, duplicando uma operação que já havia sido incorporada no processo

de escrita da expressão. A dificuldade, portanto, não decorre do desconhecimento da fórmula, mas da aplicação mecânica de um procedimento algébrico fora do contexto da expressão já transformada.

A intervenção do pesquisador direciona o grupo a compreender que o parâmetro deve ser substituído mantendo seu valor e sinal originais, uma vez que a alteração de sinais já havia sido realizada anteriormente. O reconhecimento do erro pelo próprio grupo indica a superação dessa leitura automatizada e a retomada de uma interpretação mais consistente do papel do parâmetro no cálculo dos autovalores.

Este diálogo explicita a construção de sentido matemático mediada pela IA. A confusão inicial (“problema com o Bhaskara”) gera discussão e correção coletiva, até que o grupo atinge consenso. A fala “nosso pensamento tá errado” indica um momento de reorganização cognitiva (Tikhomirov, 1981): a confusão e a reflexão humana se retroalimentam, resultando em nova compreensão. O raciocínio é reorganizado pela interação, não pela simples delegação à máquina.

A: Olha que figura bonita. [...] Mega plotou as figuras no Python e Moana pediu pro chat plotar a figura...
M: Os sentidos das setas... a gente achava que estava diferente no começo, mas quando olhava melhor era a mesma coisa.
A: O que acontece é que aqui ele plotou com o campo vetorial... ajuda a entender pra onde está indo...
M: Aí ele explicou... ponto crítico estável... pedi pra ele explicar de maneira mais simples... pedi um modelo real... um gráfico em 3D...

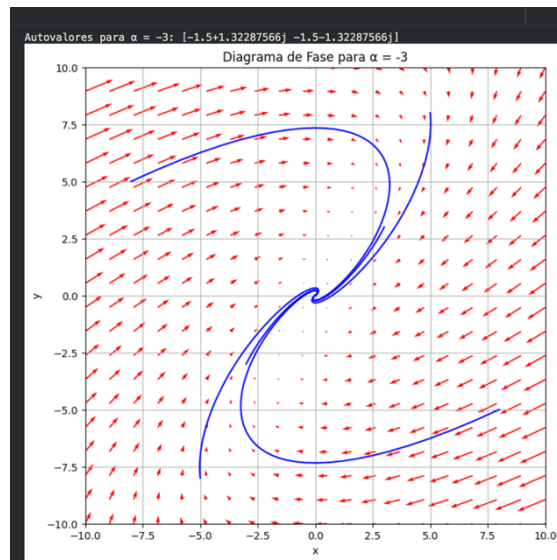
A comparação entre representações geradas por diferentes mídias (Python e ChatGPT) produz um diálogo entre visualizações. O grupo observa semelhanças e discrepâncias, discute direções e estabilidade, tudo isso mediado pelas imagens geradas. Esse tipo de situação caracteriza uma experimentação multimodal (Borba & Villarreal, 2005), em que as diferentes mídias ampliam o repertório cognitivo dos estudantes. Quando “M” solicita explicações “em modelo real” ou “em 3D”, ela evidencia um esforço de tradução entre representações de um processo de pensar-com-tecnologia, no qual o conceito matemático é reconstruído em diferentes linguagens.

No primeiro momento, o estudante recorreu ao ChatGPT para solicitar os códigos necessários à construção do gráfico, que foram posteriormente compilados no ambiente Google Colab. Essa etapa evidencia um uso inicial da inteligência artificial como mediadora na

tradução do problema matemático para a linguagem de programação. Em seguida, ao obter a visualização bidimensional do sistema, o estudante realizou um registro por meio de captura de tela e voltou a interagir com o ChatGPT, solicitando a transformação dessa representação para uma visualização tridimensional. Esse movimento explicita um processo de negociação entre diferentes mídias, no qual cada uma assume funções específicas no desenvolvimento da atividade. O Google Colab se configura como o espaço de execução e visualização gráfica, enquanto o ChatGPT atua como apoio à elaboração e adaptação dos códigos, sem assumir o controle direto da experimentação. Tal dinâmica dialoga com a perspectiva de Borba e Villarreal (2005), nos quais o pensamento é reorganizado a partir das possibilidades e limitações de cada meio.

Assim, a passagem do gráfico bidimensional para a representação tridimensional não se dá de forma automática, mas resulta de sucessivas interações e decisões do estudante, que transita entre mídias distintas para ampliar as formas de visualizar e interpretar o comportamento do sistema. Esse episódio evidencia que a experimentação-com-tecnologia envolve ajustes, reconfigurações e escolhas, reforçando o caráter coletivo e não linear do processo de produção do conhecimento matemático.

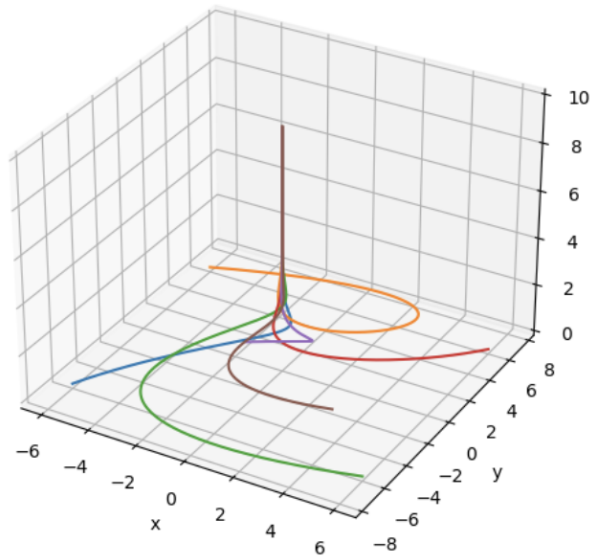
Figura 26: Interação Google Colab-Python



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 27: Interação com o ChatGPT

Visualização 3D das trajetórias (x, y, t) para $\alpha = -3$



Fonte: Dados da pesquisa.

A: E aí, deu certo?

N: Não, a gente mandou ele fazer um gráfico e ele fez meio cagado.

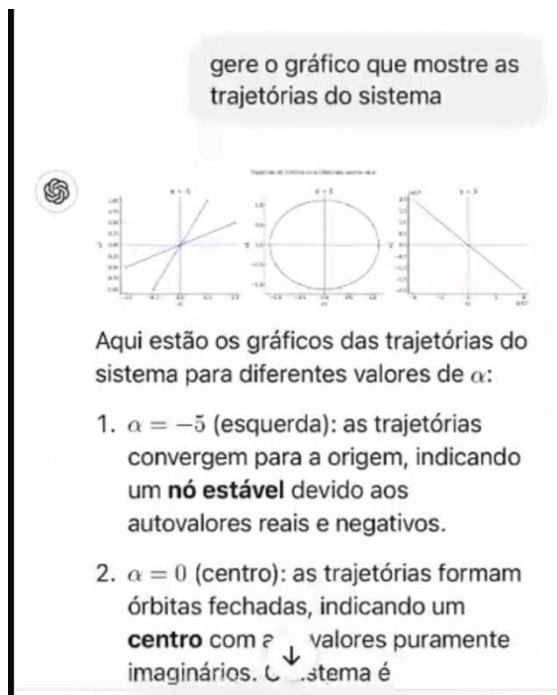
L: Mas esse gráfico aí ficou bem porco.

A: Uma EDO pode ser uma reta?

N: Acho que ele quis fazer as duas retas principais, mas não fez os campos.

A: Os autovetores, talvez... A solução de uma EDO tem uma exponencial que vira uma curva.

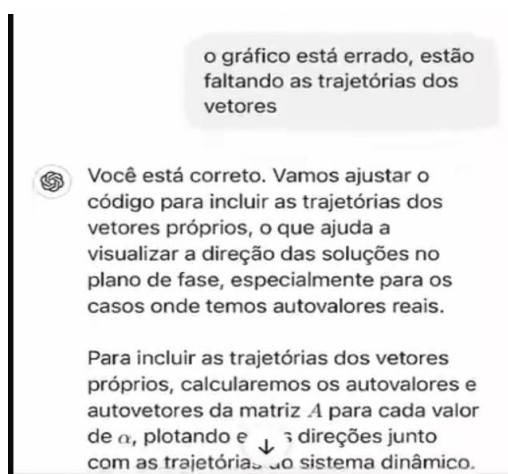
Figura 28: Interação com o ChatGPT



Fonte: Dados da pesquisa.

Essa passagem revela o processo de refutação e conferência. O grupo identifica incoerências na resposta do ChatGPT, e o professor orienta a reflexão conceitual (“uma EDO pode ser uma reta?”). O discurso evidencia a internalização de critérios de validação: os estudantes reconhecem o que é matematicamente aceitável. A tecnologia, portanto, não garante acerto, ela desencadeia a análise e estimula o pensar crítico, reforçando a autonomia. O estudante refuta a feedback dado pela tecnologia:

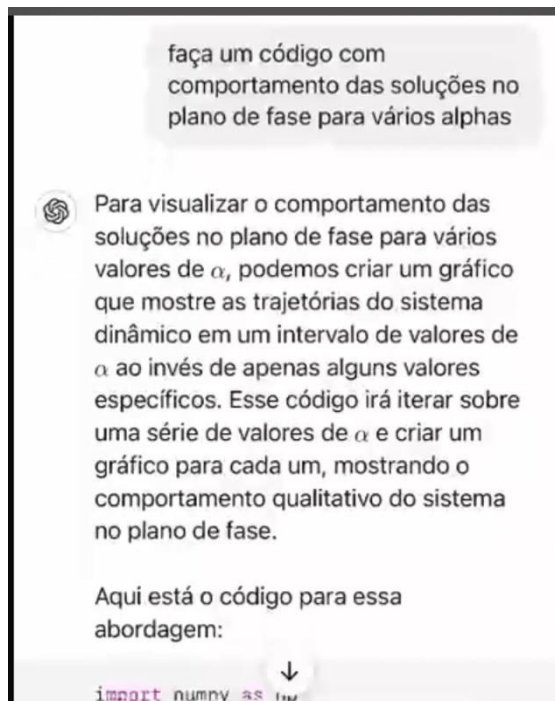
Figura 29: Interação com o ChatGPT



Fonte: Dados da pesquisa.

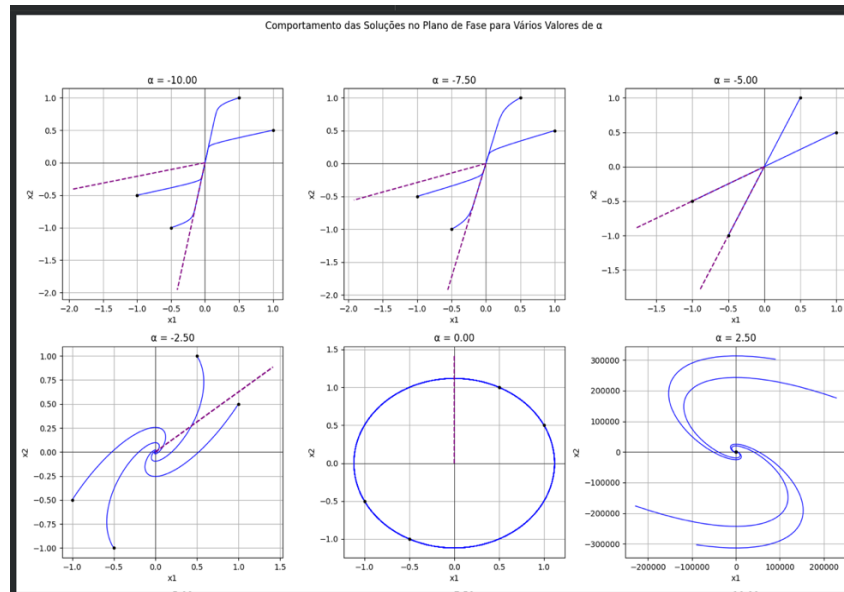
No entanto, o ChatGPT não foi capaz de garantir a geração de um gráfico completo e adequado para a análise pretendida. Diante dessa limitação, optou-se por recorrer à linguagem Python, utilizando o ambiente Google Colab, de modo a viabilizar a construção e a visualização do plano de fase de forma mais precisa. Nesse processo, o ChatGPT passou a ser utilizado como suporte para a elaboração dos códigos necessários, atuando como mediador na transposição da descrição matemática do sistema para a linguagem de programação, sem assumir o papel de executor direto da atividade.

Figura 30: Interação com o ChatGPT



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 31: Interação com o Google Colab- Python



Fonte: Dados da pesquisa.

O código desenvolvido em Python funcionou adequadamente e possibilitou uma visualização clara e consistente do comportamento das soluções no plano de fase para diferentes valores do parâmetro α . A partir dos gráficos gerados, foi possível observar, de forma comparativa, como variações nesse parâmetro influenciam qualitativamente a dinâmica do sistema.

Para valores negativos de α , as trajetórias tendem ao ponto de equilíbrio, caracterizando um comportamento estável. À medida que α se aproxima de zero, observa-se uma mudança no padrão das trajetórias, que passam a apresentar comportamento oscilatório, indicando uma configuração de centro. Já para valores positivos de α , as trajetórias se afastam do ponto de equilíbrio, evidenciando um comportamento instável, com crescimento das soluções.

A organização das representações em múltiplos painéis permitiu analisar, em um mesmo ambiente visual, essas transições no comportamento do sistema, evidenciando de forma clara a passagem de regimes estáveis para oscilatórios e, posteriormente, para regimes instáveis. Essa visualização favorece a identificação de padrões globais do campo dinâmico, algo que dificilmente seria percebido apenas por meio da análise algébrica isolada.

Além disso, a clareza dos gráficos possibilitou relacionar diretamente os resultados obtidos no cálculo dos autovalores com a geometria das trajetórias no plano de fase, reforçando a articulação entre procedimentos algébricos e interpretações qualitativas. O uso da linguagem Python, nesse contexto, mostrou-se fundamental para garantir precisão gráfica, controle das escalas e comparação entre diferentes cenários, ampliando as possibilidades de análise e discussão do sistema dinâmico em estudo. Assim, o recurso computacional não apenas viabilizou a construção dos gráficos, mas também se constituiu como elemento central para a compreensão das dependências paramétricas do sistema, permitindo uma leitura mais ampla e integrada de seu comportamento dinâmico.

L: Quanto que dá isso aí?
K: É, pra ver se está certo e se faz sentido, né?
L: Tem hora que ele “mete o loko”.
A: Perfeito. Aí vocês estão conferindo também.
K: Sim.

Nesta breve fala, o humor e a crítica se misturam: o grupo reconhece que o ChatGPT nem sempre acerta (“mete o loko”) e, por isso, a conferência se torna indispensável.

Nico: Pode utilizar o caderno?
An: A gente escreveu a pergunta e ele deu tudo junto com o Python.
A: Nossa, ele já gerou o código Python? E já gerou o plano?
Nico: Temos que verificar... do jeito que tá não dá pra saber pra onde está indo.
A: Vocês chegaram a conferir as contas do chat ou não?
An: A gente está fazendo isso agora.
A: Não acreditaram no que ele mandou?
An: Não tem como confiar, né?

Esse excerto reforça o caráter reflexivo e crítico da atividade. O grupo assume que “não dá pra confiar” plenamente na resposta automática, estabelecendo uma postura epistemológica madura diante da tecnologia. O professor atua como mediador, incentivando o questionamento e a validação. Assim, a interação transcende o uso mecânico e adquire valor formativo: o erro e a dúvida são constitutivos do aprender.

Logo, na segunda experimentação, o ChatGPT e a linguagem Python ampliaram o espaço de exploração iniciado com a calculadora gráfica, gerando um sistema multimodal de experimentação. O uso simultâneo dessas mídias evidenciou a complexidade do pensar-com-tecnologia: os estudantes precisaram ajustar comandos, interpretar respostas, lidar com erros e comparar representações gráficas, vivenciando a interação com a mídia como um diálogo. O ChatGPT, em particular, não apenas forneceu respostas, mas provocou o grupo a testar

hipóteses, detectar inconsistências e reconstruir o raciocínio, características centrais da experimentação-com-tecnologia.

A recorrência de erros interpretativos da IA (como o sinal incorreto no cálculo do delta) desencadeou momentos ricos de refutação, análise e conferência. Nessas situações, o grupo passou a assumir um papel investigativo, revisando passo a passo o processo, identificando o erro e solicitando correção ao sistema. Esse ciclo de erro, conferência e acerto ilustra a reorganização do pensamento matemático mediada pela tecnologia: não se trata de buscar respostas prontas, mas de pensar junto com a mídia, interpretando e refinando seus resultados (Borba e Villarreal, 2005).

Além disso, a interação com diferentes representações, o gráfico do ChatGPT, o campo vetorial do Google Colab e as contas manuais, favoreceu uma compreensão mais robusta do conceito de estabilidade e da influência dos parâmetros na solução. O professor atuou como mediador crítico, tensionando o uso automatizado e transformando a atividade em um espaço de investigação compartilhada, em que os estudantes perceberam que a confiabilidade da tecnologia está na análise coletiva e não na execução automática indo ao encontro da visão epistemológica de Borba e Villarreal (2005).

6.3. EXPERIMENTAÇÃO III

A terceira experimentação propõe uma experiência de exploração guiada mediada pelo ChatGPT, com o intuito de promover a busca, análise e implementação de modelos baseados em sistemas de equações diferenciais ordinárias. Ao utilizarem o ChatGPT como meio para acessar descrições e variações de modelos aplicados a contextos diversos, os estudantes são convidados a tomar decisões fundamentadas sobre quais modelos se alinham às condições estudadas e aos interesses do grupo. A proposta valoriza a experimentação-com-tecnologia e o processo de construção coletiva de conhecimento,

As discussões sobre o uso do ChatGPT revelaram concepções diversas dos estudantes a respeito da produção de conhecimento mediada por tecnologias digitais. Quando questionados sobre se o uso do chat proporciona mais aprendizado do que o modelo tradicional de ensino, as respostas revelaram um posicionamento crítico.

Lid, por exemplo, afirmou que “o problema do chat é que você tem que saber filtrar e analisar. Eu acho que quando você pesquisa sem ter uma base, você não tem veracidade se aquilo está certo ou errado, porque ele pode errar. Então você tem que ter um conhecimento breve para conseguir ver se a resposta que ele deu é coerente ou não”. Essa fala demonstra uma postura de análise frente à tecnologia: para ela, o ChatGPT só contribui efetivamente quando o estudante já possui uma base teórica que permita interpretar, validar ou refutar as respostas geradas. Nessa perspectiva, o processo de aprender com o Chat não é automático, mas demanda um olhar crítico e reflexivo. Tal compreensão aproxima-se da noção de reorganização do pensamento proposta por Tikhomirov (1981), segundo a qual a incorporação de novos meios tecnológicos provoca modificações qualitativas nos processos cognitivos humanos, exigindo novas formas de pensamento e de controle da atividade mental.

Nard complementa essa visão ao afirmar que “o chat dá uma complementada, aumenta o repertório. Mas eu gosto de pesquisar no chat depois de ter visto. Porque se eu pesquisar a primeira vez, eu não vou entender nada”. Sua fala sugere que a interação com o ChatGPT é mais produtiva quando há um contato prévio com o conteúdo, funcionando, portanto, como uma instância de ampliação e não de substituição. Esse tipo de relação em que a tecnologia suplementa a atividade cognitiva humana, mas não a substitui, isto é, coletivos cognitivos em que humanos e tecnologias interagem na produção do conhecimento (Tikhomirov, 1981).

O estudante C, por sua vez, destaca a importância da visualização: “eu gostei da segunda passagem com a calculadora e com o chat. Dá pra visualizar também, é muito bom”. O relato mostra que a integração entre diferentes mídias (a calculadora e o ChatGPT) promove um tipo de compreensão mais visual e exploratória, reforçando o caráter multimodal da aprendizagem contemporânea. A interação entre os estudantes e as tecnologias sugere um movimento de experimentação, no qual as mídias são mobilizadas para criar representações, testar hipóteses e construir significados.

Entretanto, Nard reconhece que “às vezes a gente faz e não tem nem ideia do que estamos fazendo”, sinalizando que o uso da tecnologia também pode produzir zonas de incerteza e dúvida. Essa ambiguidade é característica do processo de experimentação-com-tecnologia (Borba, Scucuglia, Gadani, 2021), em que o erro, a surpresa e a necessidade de reinterpretar são parte constitutiva da aprendizagem. Nesse sentido, as falas demonstram que a introdução do ChatGPT no contexto de ensino de EDO não apenas amplia o acesso à

informação, mas também cria espaços de reorganização do pensamento e de produção coletiva de conhecimento (Borba e Villarreal, 2005).

Essa dimensão crítica se aprofunda na fala de D, quando o pesquisador pergunta se ele considera o uso do ChatGPT melhor do que o ensino tradicional com lousa. O estudante responde: “não, só lousa, eu acho que é um problema. Eu acho que pode ser muito bom, mas é saber trabalhar, senão ele acaba tomando a parte de raciocínio da pessoa. [...] Antigamente a gente tinha um problema pra resolver e não conseguia resolver, você passava uma semana pra resolver aquele problema. [...] Agora acho que tá uma facilidade muito grande. [...] Ele vai me impedir de ter o desenvolvimento ali, de quebrar a cabeça pra resolver o problema. [...] Mas pode me auxiliar para chegar a respostas cada vez mais complexas, mas pode furtar o meu aprendizado.”

Daniel explicita, nesse trecho, uma tensão entre o esforço cognitivo envolvido na resolução de problemas e a rapidez proporcionada pelo uso da inteligência artificial. Sua reflexão evidencia uma consciência sobre o processo de produção do conhecimento e sobre o papel da dificuldade como elemento formativo.

Essa fala revela que o uso da tecnologia não se dá de forma neutra, mas envolve escolhas e modos de utilização que podem tanto favorecer quanto limitar o desenvolvimento do raciocínio matemático. Nesse sentido, o estudante reconhece que o uso do ChatGPT pode contribuir para a resolução de problemas, mas também aponta para a necessidade de um uso crítico, que não substitua o processo de elaboração do pensamento.

No entanto, ao longo do diálogo, D relativiza sua preocupação e reconhece que, quando há embasamento teórico, “vai ser muito melhor. Praticamente, pra gente conseguir respostas. Pra mim, tem coisa que a gente só vai alcançar por causa disso”. Essa afirmação evidencia a percepção de que o ChatGPT pode funcionar como meio de ampliação cognitiva, especialmente quando integrado criticamente ao processo de ensino. Nesse ponto, a mediação docente assume papel central: ao provocar o estudante a “não aceitar tudo”, o professor orienta o uso crítico da tecnologia, instaurando um espaço de reflexão coletiva sobre a validade e o sentido das respostas geradas. Assim, o que se vê é um ambiente de inteligência coletiva (Lévy, 1993), em que o conhecimento é produzido na interação entre sujeitos humanos e não humanos, num processo colaborativo de construção de sentido.

Em outra fala, M sintetiza de forma espontânea essa ambiguidade: “Ah, eu já faço tudo pelo chat, eu devia aprender. Ajuda, mas não dá para falar que substitui a aula teórica. [...] Eu uso muito o chat, eu sei que está errado, mas eu não me importo, porque eu tenho que entregar o bagulho e não vou me importar se está errado.” Apesar do tom despretensioso, a fala de Mega expõe uma relação pragmática com a tecnologia: ele reconhece o erro, mas o tolera em função da praticidade. Ainda assim, o simples fato de reconhecer o erro e de saber que o chat pode falhar indica a presença de uma consciência epistêmica como uma forma inicial de letramento tecnológico. Esse tipo de relação revela uma experimentação com a mídia em que o estudante oscila entre o uso automático e o uso reflexivo. A mediação do professor, ao questionar (“mas você sabe que está errado. Então você analisa o chat”), transforma essa atitude em um momento formativo, no qual o erro passa a ser um ponto de partida para a reflexão sobre o conhecimento produzido.

As falas até aqui analisadas mostram que os estudantes percebem o ChatGPT como uma tecnologia que potencializa a produção de conhecimento, mas que também exige discernimento, análise e autonomia intelectual. Nesse sentido, observa-se um movimento de reorganização do pensamento, em que o uso da IA provoca deslocamentos na forma como os estudantes se relacionam com o saber matemático. Contudo, à medida que as interações se intensificam, nota-se, em alguns casos, um novo movimento: o ChatGPT deixa de ser apenas um suporte para consultas e passa a integrar efetivamente a produção de conhecimento matemático dos alunos, funcionando como coautor nos processos de modelagem, análise e interpretação.

A fala de K: “mas o chat é bom, ele sabe um pouco. Ele aprendeu com o tempo” os alunos reconhecem que a IA também “aprende”, ou seja, percebem-na como um agente cognitivo em evolução. Essa percepção aproxima-se da concepção de Lévy (1993) sobre a inteligência coletiva, na qual as tecnologias digitais participam ativamente dos processos de construção do conhecimento, tornando-se parte do coletivo pensante.

O caráter colaborativo dessa interação torna-se ainda mais evidente quando C e Nard relatam a experiência de criar, junto ao ChatGPT, um modelo matemático inspirado em processos de aprendizagem artificial: “a gente tinha pedido pra ele inventar uma nova, ele criou. Ele criou uma nova, ele fez em aprendizagem de IA. [...] Ele fala sobre memória de curto prazo, memória de longo prazo, entre outros.”

Figura 32: Interação com o ChatGPT

Equação Diferencial

A equação que descreve a dinâmica da taxa de aprendizado $L(t)$ é dada por:

$$\frac{dL}{dt} = \beta_1 (M_{cp}(t) + M_{lp}(t)) I(t) - \gamma_1 L(t)$$

Parâmetros

1. β_1 (Taxa de Adaptação ou Assimilação)

- **Significado:** Representa a taxa com que a IA consegue adaptar ou assimilar novas informações com base nas memórias (curto e longo prazo) e na entrada de feedback.
- **Influência:** Controla o impacto das memórias e do feedback na taxa de aprendizado $L(t)$.
- **Valor sugerido:** Um valor pequeno, como $\beta_1 = 0.05$, pode indicar uma assimilação gradual das informações.

2. γ_1 (Taxa de Saturação da Taxa de Aprendizado)

- **Significado:** Reflete a diminuição da capacidade de aprendizado à medida que o agente acumula mais conhecimento ao longo do tempo. Ou seja, conforme a IA aprende mais, o aumento da taxa de aprendizado se torna mais lento.
- **Influência:** Controla a desaceleração do processo de aprendizado quando a IA acumula mais informações e experiências.
- **Valor sugerido:** Um valor pequeno, como $\gamma_1 = 0.01$, pode indicar que a saturação ocorre mais lentamente.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 33: Interação com o ChatGPT

Variáveis

1. $L(t)$ (Taxa de Aprendizado)

- **Significado:** Representa a **taxa de aprendizado** ou o **capacidade de aprendizado** da IA em um dado momento t . Quanto maior $L(t)$, maior a capacidade da IA de aprender novas informações.
- **Inicialização:** $L(0)$ é o valor inicial da taxa de aprendizado. Normalmente, inicia-se com um valor pequeno, como $L(0) = 0.1$, indicando que a IA tem um aprendizado inicial baixo.
- **Evolução:** $L(t)$ aumenta ou diminui com o tempo, dependendo das memórias e do feedback.

2. $M_{cp}(t)$ (Memória de Curto Prazo)

- **Significado:** Representa a **memória de curto prazo** do agente, ou seja, as informações recentemente adquiridas. Essa memória tem um impacto imediato na capacidade de aprendizado, mas decai com o tempo, indicando que as informações recentes se tornam menos relevantes conforme novas informações são adquiridas.
- **Modelo:** A memória de curto prazo pode ser modelada como uma função decrescente no tempo. No código, ela é dada por uma função exponencial $M_{cp}(t) = M_{cp_max} \cdot \exp(-0.1 \cdot t)$, que perde relevância ao longo do tempo.
- **Evolução:** A memória de curto prazo diminui à medida que o tempo passa, refletindo a perda de informações recentes.

3. $M_{lp}(t)$ (Memória de Longo Prazo)

- **Significado:** Representa a **memória de longo prazo** do agente, que reflete o conhecimento consolidado e acumulado ao longo do tempo. Diferente da memória de curto prazo, a memória de longo prazo é mais estável e tem um impacto mais duradouro na capacidade de aprendizado da IA.
- **Modelo:** A memória de longo prazo também é modelada como uma função exponencial, mas decai mais lentamente no tempo: $M_{lp}(t) = M_{lp_max} \cdot \exp(-0.05 \cdot t)$.
- **Evolução:** A memória de longo prazo perde relevância mais lentamente do que a memória de curto prazo.

4. $I(t)$ (Entrada ou Feedback)

- **Significado:** Representa a **entrada de feedback** ou estímulo que o agente recebe, o que influencia diretamente a taxa de aprendizado $L(t)$. O feedback pode ser visto como um sinal externo que indica o quão bem o agente está aprendendo.
- **Modelo:** No código, a entrada $I(t)$ é modelada como uma constante, $I(t) = 1.0$, mas poderia ser uma função dependente do desempenho ou de outros fatores, como uma entrada periódica ou senoidal, por exemplo.
- **Evolução:** A entrada pode ser constante ou variável ao longo do tempo, dependendo do tipo de interação com o ambiente.

Fonte: Dados da pesquisa.

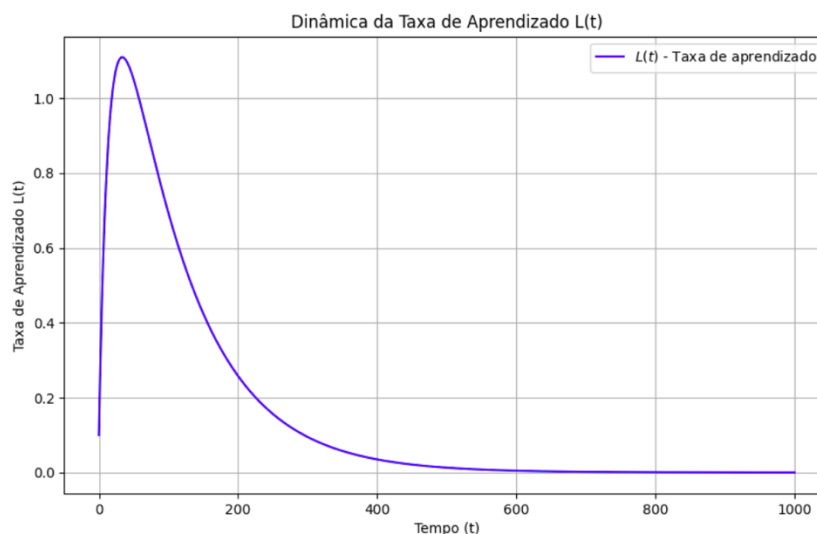
A equação apresentada é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, linear e não homogênea, cuja dinâmica é governada por um termo forçante dependente do tempo e por um termo linear de decaimento proporcional à variável $L(t)$. Do ponto de vista qualitativo, essa

equação possui estrutura típica de modelo de crescimento com saturação linear, no qual: o termo proporcional a $\beta_1 \gamma_1$ atuando como mecanismo de incremento da taxa de aprendizado; o termo $L(t)$ introduz um efeito dissipativo ou regulador, evitando crescimento indefinido.

A partir desse modelo, os alunos passam a discutir o significado dos parâmetros, questionando as relações entre variáveis e propondo interpretações para termos como “ $L(t)$ ” e “taxa de saturação”. Costa expressa dúvida ao afirmar que “quanto maior o $L(t)$, mais difícil se torna aprender novas informações”, questionando a coerência do modelo. O professor intervém, sugerindo interpretações possíveis, e o grupo discute até alcançar um entendimento coletivo: “quanto mais você aprende, mais saturado você fica”, ou seja, quanto mais você aprende, mais seu repertório se amplia, favorecendo uma compreensão mais densa dos conceitos. Esse diálogo evidencia um momento de produção de conhecimento matemático genuíno, no qual a compreensão emerge da interação entre estudantes, docentes e tecnologia.

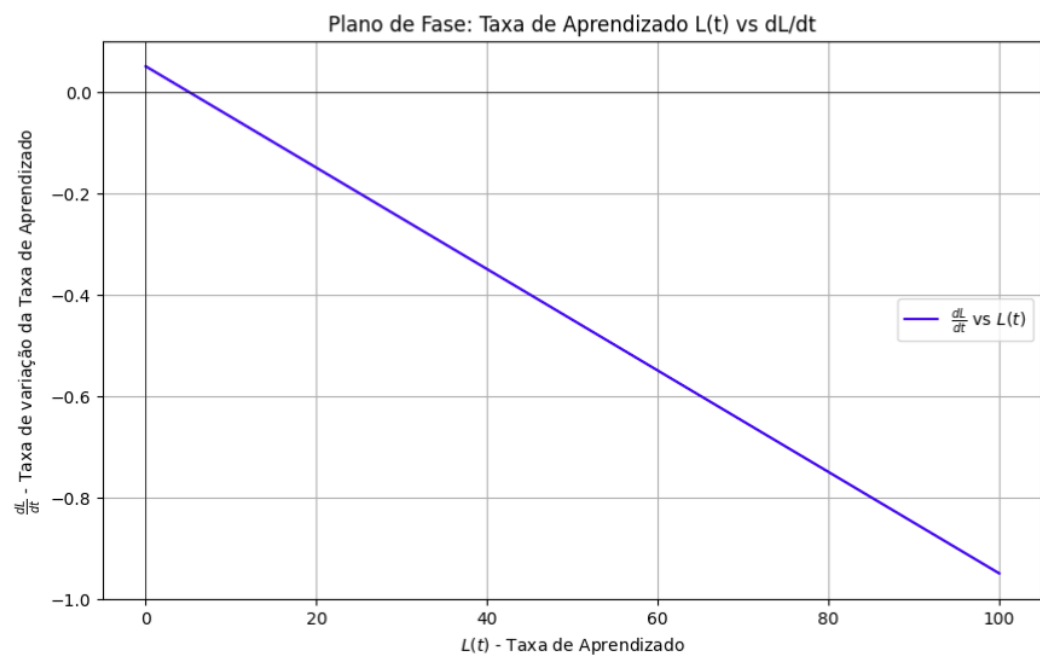
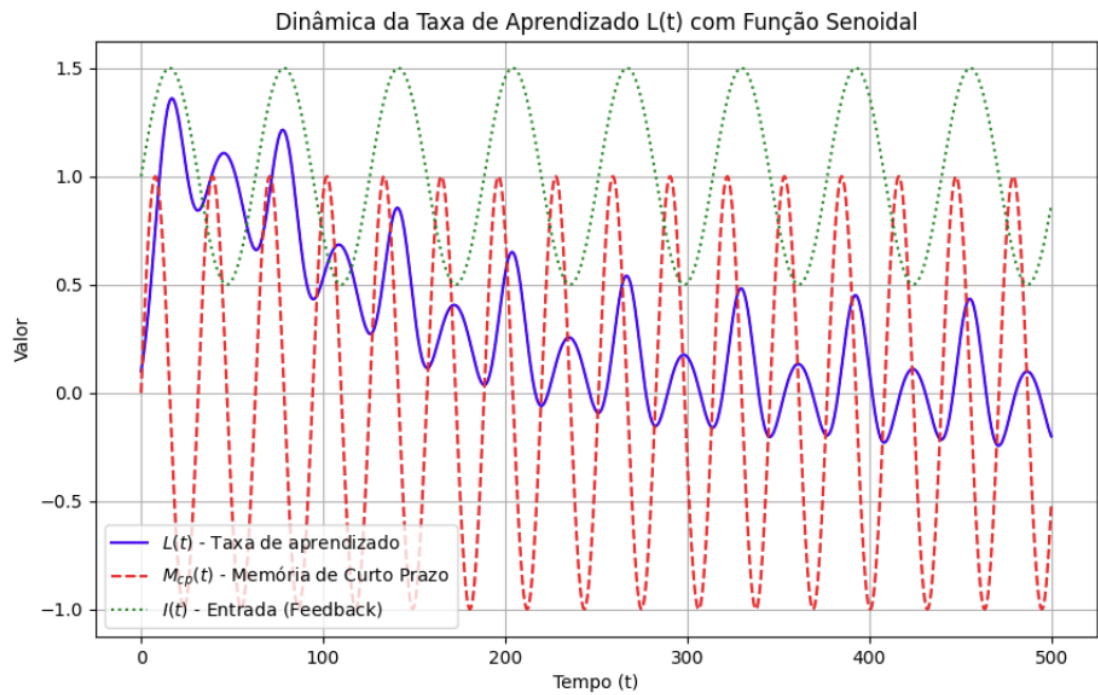
Figura 34: Interação com o Google Colab- Python

2. Experimentação com ChatGPT- Python-Geogebra



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 35: Interação com o Google Colab- Python



Fonte: Dados da pesquisa.

Esse tipo de situação ilustra um processo que Borba e Villarreal (2005) no qual as ideias são negociadas, reformuladas e construídas de forma compartilhada. A tecnologia, nesse contexto, não é apenas uma ferramenta de cálculo, mas um agente que suscita questionamentos

e reorganizações conceituais. O ChatGPT atua como um parceiro cognitivo, gerando hipóteses e tensionando o raciocínio dos estudantes. Tal dinâmica representa, também, a reorganização do pensamento matemático, pois desloca a aprendizagem de um modo individual e linear para um processo colaborativo, dialógico e investigativo.

Em outro momento, D e La percebem que o ChatGPT é “bom para conceitos” e que “se não desenhar pra ele, ele não entende”. A observação revela uma consciência sobre a natureza simbólica e linguística da IA: para que o diálogo com o ChatGPT funcione, é necessário comunicar-se de modo preciso, estruturando o raciocínio. Assim, o próprio ato de formular comandos, interpretar respostas e revisar a linguagem matemática torna-se parte do processo de aprendizagem. Essa percepção de que “ele entende se você desenhar” mostra que os estudantes compreendem a relação entre linguagem e raciocínio matemático, e que essa relação é mediada pela tecnologia.

De modo geral, as interações analisadas indicam que a produção de conhecimento com o ChatGPT evolui de um uso instrumental para uma relação de coautoria cognitiva. Inicialmente, os estudantes veem o chat como meio de obtenção de respostas; depois, passam a tratá-lo como interlocutor, testando hipóteses, interpretando resultados e refletindo sobre as implicações matemáticas de cada resposta. Esse percurso revela uma transformação qualitativa na forma como o conhecimento é produzido: o foco deixa de ser apenas o conteúdo matemático e passa a incluir o próprio processo de pensar com tecnologia conforme Borba e Villarreal (2005).

A análise desse conjunto de falas permite afirmar que o uso do ChatGPT provocou movimentos de reorganização do pensamento, no sentido de Tikhomirov (1981), ao levar os estudantes a repensar suas formas de compreender, resolver e validar problemas. Ao mesmo tempo, favoreceu a construção de um ambiente de interação no qual o raciocínio matemático passou a emergir do diálogo entre os estudantes, o professor e as tecnologias utilizadas, aproximando-se do que Lévy (1993) denomina inteligência coletiva.

Nesse contexto, as ideias não foram produzidas de forma isolada, mas construídas a partir de trocas, questionamentos e validações mediadas pelas tecnologias. O conhecimento, portanto, assumiu um caráter coletivo e experimental, em consonância com a perspectiva dos seres-humanos-com-mídias (Borba, Villarreal, 2005).

O ChatGPT deixou de ser apenas um recurso e passou a integrar a produção de conhecimento matemático dos estudantes, contribuindo para a construção de sentidos e para a ampliação das possibilidades cognitivas no ensino de Equações Diferenciais Ordinárias.

As três experimentações realizadas revelaram trajetórias distintas, porém complementares, de produção de conhecimento matemático mediado por tecnologias digitais. A calculadora gráfica, o ChatGPT e o Python, em diferentes níveis de complexidade, configuraram-se como mídias de reorganização cognitiva, permitindo que os estudantes transitassem do fazer procedimental ao entendimento conceitual das Equações Diferenciais Ordinárias. O movimento observado não foi linear, mas dialético: a cada nova mídia incorporada, o raciocínio coletivo se expandia, desafiando concepções prévias sobre o que é “resolver” e “compreender” uma EDO.

No conjunto das atividades, evidenciou-se o que (Borba e Villarreal, 2005) denominam experimentação-com-tecnologia, uma prática que desloca o foco do resultado para o processo. Ao testar, errar, conferir e ajustar, os estudantes foram se apropriando de uma forma de pensar em que o erro deixa de ser falha e passa a constituir uma instância produtiva de investigação. Essa experimentação, ao mesmo tempo coletiva e distribuída, aproximou os participantes de uma cultura científica baseada na curiosidade, na análise crítica e na colaboração. A calculadora, o ChatGPT e o Python não foram meros intermediários, mas atores cognitivos que participaram ativamente da construção do conhecimento, reconfigurando a própria dinâmica da aula.

Na perspectiva de Tikhomirov (1981), o que ocorreu foi uma reorganização do pensamento: as mídias digitais transformaram as condições de raciocínio, favorecendo modos de ação e reflexão que seriam impensáveis apenas com lápis e papel. A cada interação, o coletivo humano-tecnológico construía novas representações: gráficos, códigos, campos vetoriais, interpretações que exigiam novas formas de leitura, comparação e validação. Esse movimento confirma a tese de Lévy (1993) sobre os coletivos pensantes, em que o saber emerge da cooperação entre sujeitos e tecnologias, e não de uma mente isolada.

Ao longo das três experiências, tornou-se visível uma cultura de refutação e conferência, marcada pela atitude de confrontar o que a mídia apresentava, justificar resultados e discutir coerências. Essa postura evidencia um amadurecimento epistemológico: o conhecimento matemático não é aceito passivamente, mas negociado, verificado e significado coletivamente.

A mediação docente desempenhou papel essencial nesse processo, guiando questionamentos e promovendo deslocamentos do uso instrumental para o uso reflexivo das mídias.

Em síntese, as experimentações mostraram que produzir conhecimento com tecnologias digitais implica mais do que integrá-las à prática: significa repensar as relações entre humanos, saberes e mídias. O que se observou foi um coletivo que aprende a pensar com e através das tecnologias, em um processo em que o raciocínio matemático é continuamente ampliado por novas formas de ver, representar e comunicar ideias. Assim, o ensino de EDO mediado por mídias digitais revelou-se um espaço fértil de criação, onde o aprender se faz experimentando, refletindo e refutando junto às tecnologias e não apesar delas.

7. LIMITAÇÕES E TENSÕES DA PESQUISA

O uso do ChatGPT no contexto das práticas investigadas revelou tanto potencialidades quanto limitações que precisam ser consideradas de forma crítica. Entre as principais dificuldades encontradas, destaca-se o fato de o acesso ao recurso está condicionado a restrições de uso, especialmente quando não se dispõe de versões pagas, o que limita a continuidade das interações e impede o compartilhamento integral de determinadas respostas. Essa condição interfere diretamente na fluidez do trabalho e na possibilidade de retomada de interações anteriores, exigindo do pesquisador constantes adaptações metodológicas.

Além disso, a própria natureza da pesquisa qualitativa demanda a constituição de um conjunto de dados diverso e construído a partir de múltiplas fontes. Nesse sentido, os dados obtidos exclusivamente em momentos de monitoria mostraram-se limitados, uma vez que a participação dos estudantes nesses espaços não foi constante. Em diversas ocasiões, não houve a presença de nenhum estudante, o que reduziu as possibilidades de observação e registro de interações mais espontâneas. Tal cenário evidencia que a dependência exclusiva desse tipo de espaço pode comprometer a amplitude dos dados coletados.

Outro aspecto relevante diz respeito ao engajamento dos estudantes. As três aulas práticas realizadas apresentaram maior envolvimento discente, sobretudo por estarem inseridas na estrutura curricular da disciplina e vinculadas à avaliação por meio de nota de trabalho. Esse fator contribuiu para a participação efetiva dos estudantes e para a geração de dados mais consistentes. Por outro lado, também levanta a problematização de que o engajamento observado está, em certa medida, associado a exigências institucionais e ao momento específico

do semestre, especialmente por se tratar do período final, quando atividades avaliativas tendem a concentrar maior atenção dos alunos.

Dessa forma, trabalhar com tecnologias digitais no ensino e na pesquisa em Educação matemática implica reconhecer que os processos de produção de dados e de conhecimento não ocorrem de maneira linear ou isenta de tensões. As limitações de acesso, as condições institucionais, a assiduidade dos estudantes e o contexto curricular influenciam diretamente as possibilidades de interação e de experimentação. Reconhecer essas problemáticas não enfraquece a pesquisa, mas, ao contrário, contribui para uma compreensão mais realista e fundamentada dos desafios envolvidos no trabalho com inteligências artificiais e outras mídias no contexto educacional.

Cabe ainda ressaltar que o uso da calculadora gráfica apresentou grande potencial para o desenvolvimento das atividades, sobretudo no que diz respeito à visualização de campos vetoriais, planos de fase e à articulação entre diferentes representações matemáticas. A calculadora mostrou-se uma mídia potente para favorecer processos de exploração e análise qualitativa dos sistemas estudados. No entanto, é fundamental reconhecer que se trata de um material que não está disponível em todos os contextos educacionais, o que impõe limites à generalização das práticas desenvolvidas. Assim, embora suas potencialidades sejam evidentes, o trabalho com esse recurso exige uma reflexão cuidadosa sobre as condições reais de acesso, infraestrutura e políticas institucionais, de modo a evitar a compreensão da tecnologia como solução universal para os desafios do ensino de matemática.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como questão de pesquisa: **o que emerge sobre a produção de conhecimento matemático e a experimentação-com-tecnologia quando graduandos em matemática exploram e refletem sobre conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias por meio de tecnologias digitais?** A partir das três experimentações realizadas, foi possível identificar que o uso de diferentes mídias, como calculadora gráfica, ChatGPT e linguagem de programação Python, não atuou apenas como suporte ao ensino, mas passou a integrar efetivamente os modos de pensar e agir matematicamente dos estudantes.

Os dados evidenciam que o processo de produção de conhecimento se estruturou a partir de movimentos recorrentes de exploração, refutação, análise e conferência. Ao interagirem com

as tecnologias, os estudantes executaram procedimentos, testaram hipóteses, confrontaram resultados e reconstruíram caminhos, revelando que a produção do conhecimento matemático ocorreu de forma não linear, marcada por idas e vindas, erros e reformulações. Nesse contexto, o erro deixou de ser compreendido como falha e passou a assumir um papel produtivo, desencadeando discussões e favorecendo a construção de significados.

Um aspecto central observado ao longo das experimentações foi a tensão entre o uso automático e o uso crítico das tecnologias, especialmente no que se refere ao ChatGPT. Em diversos momentos, os estudantes reconheceram tanto o potencial quanto às limitações da inteligência artificial, evidenciando a necessidade de validação das respostas produzidas. Esse movimento deu origem a uma postura investigativa, na qual os resultados não foram aceitos de forma imediata, mas analisados, questionados e comparados com outros registros, como o lápis e papel, a calculadora e o Python.

A articulação entre diferentes mídias mostrou-se fundamental para a compreensão dos conceitos envolvidos. A calculadora gráfica favoreceu a exploração inicial e a visualização do comportamento das soluções, o ChatGPT atuou como interlocutor, provocando questionamentos e auxiliando na organização das ideias, e o Python possibilitou maior controle e precisão na construção das representações gráficas. Esse movimento entre mídias evidenciou que o conhecimento não foi produzido em um único ambiente, mas na relação entre diferentes formas de representação e interação. Nesse processo, destacou-se o papel da mediação docente, que se mostrou essencial para orientar o uso das tecnologias de forma reflexiva. Ao questionar, provocar e tensionar as respostas apresentadas pelas mídias, o professor contribuiu para deslocar os estudantes de uma postura centrada na execução para uma postura voltada à compreensão e interpretação dos conceitos matemáticos.

À luz do referencial teórico adotado, os resultados indicam que o uso das tecnologias digitais está associado a processos de reorganização do pensamento, na medida em que modifica as formas de interação com o conhecimento matemático e amplia as possibilidades de exploração e análise. Além disso, a produção do conhecimento evidenciou um caráter coletivo, emergindo das interações entre estudantes, professor e tecnologias, em um processo no qual diferentes agentes participam da construção de sentido.

Como contribuição, esta pesquisa aponta que o uso de tecnologias digitais, quando articulado a propostas que valorizam a experimentação e a reflexão, pode favorecer a compreensão de conceitos matemáticos complexos, como os sistemas de EDO. No entanto, também evidencia que tais tecnologias exigem um uso crítico e intencional, de modo que não substituem o raciocínio, mas o ampliem.

Por fim, sugere-se que novas investigações explorem diferentes contextos educacionais, níveis de ensino e outras tecnologias digitais, ampliando a compreensão sobre as formas pelas quais as mídias podem contribuir para a produção do conhecimento matemático. Os resultados aqui apresentados indicam que o desafio não está apenas em inserir tecnologias no ensino, mas em compreender como elas transformam as formas de pensar, aprender e ensinar matemática.

9. REFERÊNCIAS

ADMIRAL, T. D. **Resolução de EDO utilizando métodos numéricos de ordem superior com linguagem Python**. Caderno de Física da UEFS, v. 20, n. 1, p. 1-11, 2022. Disponível em: <https://ojs3.uefs.br/index.php/cadfis/article/view/9262/7752>. Acesso em: 29 jan. 2024.

ALQUIMIN, J. Y. K. **O uso de ferramentas computacionais para resolução de equações diferenciais ordinárias aplicadas à inflação e desemprego**. 2023. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em matemática) – Universidade Federal de São Paulo, Osasco, 2023. Disponível em: repositorio.unifesp.br. Acesso em: 29 jan. 2024.

BARREIRA, J. S.; MOURA-SILVA, G.; GONÇALVES, T. O. **Desafios e oportunidades para o uso do ChatGPT na pesquisa em educação matemática**. Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, v. 19, p. 63, 2024.

BIGATO, W. **Equilíbrio e estabilidade em modelos de duas espécies**. A Roda Viva, 2015. Disponível em: <https://arodadavida.wordpress.com/tag/python/>. Acesso em: 6 fev. 2024.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR., W. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. New York: Springer, 2005.

BORBA, M. C. **Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção matemática**. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO matemática, 1., 2001, Curitiba. Anais [...]. p. 135-146.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P. **Um produto educacional para o ensino de equações diferenciais ordinárias em um curso de formação docente**. Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino, v. 1, n. 1, p. 59-78, 2017. Disponível em: <https://seer.uenp.edu.br/index.php/reppe/article/view/901/867>. Acesso em: 29 jan. 2024.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P.; FERRUZI, E. C. **Ensino por investigação mediado por tecnologias digitais em aulas de matemática**. VIDYA, v. 40, n. 1, p. 297-313, 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/3101/2536>. Acesso em: 29 jan. 2024.

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

BRAUN, M. **Differential equations and their applications**. New York: Springer, 2013.

CHIARA, A. S. S.; BORBA, M. C. **Diferentes usos de tecnologias digitais nas licenciaturas em matemática da UAB**. Nuances, v. 25, n. 2, p. 127-147, 2014.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. **Insubordinação criativa: um convite à reinvenção do educador matemático**. Bolema, v. 29, n. 51, p. 1-17, 2015.

FELCHER, C. D. O. **Tecnologias digitais: percepções dos professores de matemática no contexto do desenvolvimento profissional docente**. 2020. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

FERREIRA, M. J. A.; ZAMPIERI, M. T.; MOURA, S. **Ambientes virtuais e suas potencialidades para o ensino e aprendizagem de matemática**. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO matemática, 7., 2013, Montevideu. Anais [...]. p. 6688-6697.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FLORES, C. R.; WAGNER, D. R.; BURATTO, I. C. F. **Pesquisa em visualização na educação matemática**. Educação matemática Pesquisa, v. 14, n. 1, 2012.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias**. 2011. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

Kenski, V. M. (2007). **Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação** (1oed). Papirus.

LAUDARES, J. B.; FURLETTI, S.; REIS, J. P. C. **Metodologia para a diversificação de representações de um fenômeno modelado com equações diferenciais ordinárias**. Ensino e Tecnologia em Revista, v. 3, n. 2, p. 247-267, 2019.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. 8. ed. Rio de Janeiro: Editora 34, 1999.

LIMA, C. B.; SERRANO, A. **Inteligência artificial generativa e ChatGPT: uma investigação sobre seu potencial na educação**. Transinformação, v. 36, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1590/2318-0889202436e2410839>.

OPENAI. **ChatGPT**. Disponível em: <https://chat.openai.com/>. Acesso em: 23 out. 2024.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. **Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas**. Bolema, v. 17, n. 21, p. 81-140, 2015.

RODRIGUES, O. S.; RODRIGUES, K. S. **A inteligência artificial na educação: os desafios do ChatGPT**. Texto Livre, v. 16, p. e45997, 2023.

SAMARÃO, L. A.; (2023). *IA e algoritmos enviesados: as dimensões do viver na sociedade 5.0*. Ibict.Br. https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/PUC_SP-1_faea7b31c8bea5ab95c671d718819b97

SANTOS, R. P.; SANT'ANA, C. C.; SANT'ANA, I. P. **O ChatGPT como recurso de apoio no ensino da matemática**. Revemop, v. 5, 2023.

SCUCUGLIA, R. U. **A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas**. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/>. Acesso em: 17 abr. 2026.

TIKHOMIROV, O. K. **The psychological consequences of computerization**. In: WERTSCH, J. V. (Ed.). *The concept of activity in Soviet psychology*. New York: M. E. Sharpe, 1981. p. 256-278.

ZAMPIERI, M. T. et al. **Calculadoras, formação de professores e práticas em sala de aula**. In: BORBA, M. C. et al. *Educação matemática: múltiplas visões sobre tecnologias digitais*. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais**. São Paulo: Pearson, 2001.