

Michelli Maldonado Carretero de Oliveira

*Reformulações para o Problema Integrado de
Dimensionamento e Sequenciamento da Produção*

Tese de Doutorado

Michelli Maldonado Carretero de Oliveira

Reformulações para o Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento da Produção

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Prof. Dr. Maria do Socorro Nogueira Rangel

São José do Rio Preto

Agosto de 2015

Michelli Maldonado Carretero de Oliveira

*Reformulações para o Problema Integrado de Dimensionamento e
Sequenciamento da Produção*

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel

UNESP

Orientadora

Prof. Dr. Horácio Hideki Yanasse

UNIFESP

Prof. Dra. Maristela Oliveira dos Santos

USP

Prof. Dr. Hélio Yochihiro Fuchigami

UFG

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira

UNESP

São José do Rio Preto,

Agosto de 2015.

Maldonado, Michelli.

Reformulações para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção / Michelli Maldonado Carretero de Oliveira. -- São José do Rio Preto, 2015

93 f. : il., tabs.

Orientador: Maria do Socorro Nogueira Rangel

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Otimização matemática. 3. Pesquisa operacional. 4. Problema de dimensionamento de lotes. 5. Problema do caixeiro viajante. 6. Planejamento da produção - Modelos matemáticos. I. Oliveira, Michelli Maldonado Carretero de. II. Rangel, Maria do Socorro Nogueira. III. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU – 518.734

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Àqueles que sempre rezam por mim,
Dedico.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus. Quando alimentamos a nossa fé, nossos medos morrem de fome.

Agradeço minha orientadora Profa Dra Socorro Rangel, pela dedicação e atenção durante os nove anos de relação orientadora e orientanda. Sem o empenho, os conselhos e a confiança dela, nada disso seria possível.

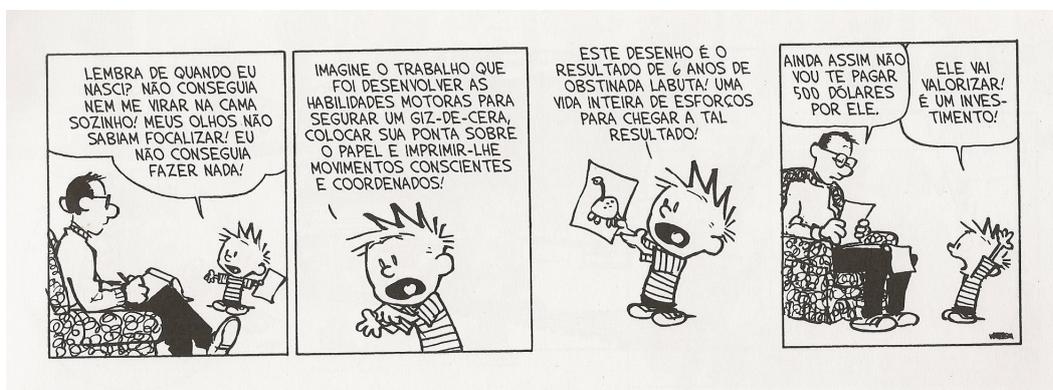
Agradeço aos meus pais Rose Maldonado e Dorival Carretero, que não me deram o peixe, mas me ensinaram a pescar.

Agradeço ao meu companheiro Ronaldo de Oliveira pelo carinho incondicional mesmo nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos meus amigos que sempre torcem por mim.

Agradeço à todos do DMAP, professores, técnicos e secretários, que mantém o departamento funcionando corretamente e conseqüentemente possamos realizar a nossa pesquisa sem preocupações burocráticas, técnicas ou de outra natureza.

E por fim, agradeço o apoio financeiro da FAPESP (2010/19006-0).



Watterson, Bill. Calvin e Haroldo. Disponível em www.depositocalvin.blogspot.com.br, acesso em 13 de Outubro de 2014.

Resumo

A Pesquisa Operacional se tornou uma aliada de diversos problemas reais, principalmente de problemas da indústria, cujo objetivo é minimizar seus custos. Um dos problemas de muitos gestores é determinar quanto produzir, quando produzir e em que ordem produzir. Para responder essas três perguntas simultaneamente é t m-se que resolver o problema integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produ o. O presente trabalho vem trazer modelos matemáticos que podem ser adaptados em diversos estudos de casos para responder a questão tríplice: quanto, quando e em que ordem, tudo isso, minimizando os custos de estoque, atraso e troca. A tese responde a seguinte pergunta, até então uma lacuna na literatura, entre os modelos que integram dimensionamento e sequenciamento da produ o, qual é o melhor? Cinco modelos foram propostos e estudados do ponto de vista teórico e computacional para então descobrir o melhor. A constru o dos modelos foi baseada no artigo de Oncam et al. (2009) que apresenta resultados teóricos e computacionais para mostrar qual o melhor modelo para o problema do caixeiro viajante. Esperava-se que os resultados fossem similares. Porém, o melhor modelo para o problema integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produ o é diferente do melhor modelo para o problema do caixeiro viajante.

Palavras Chave: Dimensionamento de lotes, Sequenciamento da Produ o, Problema do Caixeiro Viajante, Reformula o de Benders.

Abstract

Operational Research has become an ally of several real problems, especially problems of industry, whose objective is to minimize their costs. One of the problems of many managers is to determine how much to produce, when to produce and in what order produce. To answer these three questions simultaneously simply solve the integrated problem of lot sizing and sequencing of production. This work presents mathematical models that can be adapted in several case studies to answer the threefold question: how much, when and in what order, all while minimizing inventory costs, delay and return. This thesis is interested on the question, "What is the best model for the integrate lot sizing and scheduling problem?". It Were proposed five models and they were studied in the theoretical and computational viewpoint. All models was based in the travelling salesman problem (TSP). And the results show that the integrate lot sizing and scheduling problem based in the TSP isn't the same model for the TSP.

Key Words: Lot sizing, scheduling, traveling salesman problem, Benders Reformulation.

Sumário

Introdução	p. 10
1 Conceitos Básicos de Otimização Linear Inteira Mista	p. 12
1.1 Conceitos Básicos	p. 12
1.2 Projeção e Projeção Reversa	p. 15
1.3 Decomposição de Benders	p. 18
2 Problemas de Dimensionamento e Sequenciamento da Produção	p. 31
2.1 Problemas de Dimensionamento de Lotes	p. 31
2.2 Problemas de Sequenciamento da Produção	p. 36
2.3 Problemas Integrados de Dimensionamento e Sequenciamento	p. 37
2.3.1 Estratégia <i>Small Bucket</i>	p. 37
2.3.2 Estratégia <i>Big Bucket</i>	p. 39
3 Reformulação das Decisões de Sequenciamento	p. 42
3.1 Modelos Propostos	p. 42
3.1.1 Modelo MTZ1S1M	p. 43
3.1.2 Modelo DL1S1M	p. 44
3.1.3 Modelo SD1S1M	p. 46
3.1.4 Modelo DFJ1S1M	p. 48
3.1.5 Modelo SCF1S1M	p. 49
3.1.6 Modelo MCF1S1M	p. 50
3.2 Equivalência entre os Modelos	p. 52
4 Estudo Computacional	p. 66

4.1	Geração das Instâncias	p. 66
4.2	Resultados	p. 67
4.2.1	Relaxação Linear	p. 67
4.2.2	Limite Inferior Antes da Ramificação	p. 69
4.2.3	Limite de Tempo 1 hora - 3600 segundo	p. 71
5	Aplicação: Fábrica de Refrigerante	p. 73
5.1	Estudo Computacional	p. 75
	Conclusão e Perspectivas Futuras	p. 80
	Referências Bibliográficas	p. 81
	Anexo A	p. 86
5.1	Modelo GLSP	p. 86
5.2	Modelo MTZ1S1M	p. 87
5.3	Modelo DL1S1M	p. 88
5.4	Modelo SD1S1M	p. 89
5.5	Modelo DFJ1S1M	p. 90
5.6	Modelo MCF1S1M	p. 91

Introdução

Com o cenário atual, as empresas buscam cada vez mais melhorar seus processos de modo a tomarem melhores decisões. Questões como dimensionamento e sequenciamento de lotes, adequação dos níveis de estoque, atendimento da demanda de mercado e a consequente sincronização de todos esses processos são ainda hoje desafios presentes. O processo de dimensionar lotes de produção consiste em determinar quanto produzir de cada produto em cada período a fim de atender a uma demanda prevista sob as condições e capacidades operacionais existentes. Um dimensionamento incorreto dos lotes pode causar excesso de produto acabado em estoque, pedidos de venda não totalmente atendidos, eventuais perdas de material perecível, entre outros. Por sua vez, sequenciar lotes de produção significa determinar em que ordem produzir os lotes de forma a melhor aproveitar os recursos produtivos e atender aos prazos estabelecidos. Um sequenciamento ineficiente pode provocar o não cumprimento dos prazos, a redução significativa da capacidade da linha de produção, o acúmulo de estoque de produtos acabados, o aumento do custo total de preparação de máquinas, entre outros.

A Pesquisa Operacional, é uma ciência aplicada que estuda esses problemas. É considerada uma área recente, visto que o termo foi introduzido pela primeira vez durante a segunda guerra mundial. Mas alguns artigos datam 1917, como é o caso dos primórdios dos problemas de dimensionamento. Devido à sua jovialidade muitos problemas foram tratados de forma isolada. Como é o caso dos problemas de dimensionamento de lotes e os problemas de sequenciamento da produção que foram tratados, na literatura, e ainda mais na prática, separadamente (Drexl (1997), Karimi (2003)). Mas notou-se que tratar esses problemas de forma isolada, pode trazer diversos prejuízos para a empresa. Em alguns setores industriais tais como nas indústrias de nutrição animal (Toso et al. (2005)), e refrigerante (Toledo et al. (2007), Ferreira et al. (2009)), a resolução desses dois problemas de forma isolada e independente cria dificuldades para que a produção seja flexível às mudanças do mercado e para que se obtenha soluções boas considerando a capacidade disponível e os prazos de entrega estabelecidos.

Modelos de otimização que integram as decisões de dimensionamento e sequenciamento (PIDS - Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes) tem sido propostos na literatura utilizando duas abordagens principais relativas às decisões de sequenciamento. Uma proposta usa a idéia de dividir os períodos de produção (macro-períodos) em períodos menores (sub-períodos ou número de preparos do período) - modelo GLSP (*General Lot-sizing*

and Scheduling Problem). O número máximo de sub-períodos de cada período é definido pelo usuário, e em cada sub-período pode haver a produção de no máximo um item, obtendo-se assim, em cada macro-período a ordem em que os lotes serão produzidos (Fleischmann 1997). O modelo GLSP tem sido a base para o estudo do problema PDSL em diversos contextos industriais: fundição (Araujo 2007), bens de consumo como fraldas e lenços (Kawamura 2010), produtos químicos (Cunha 2010), bebidas (Toledo (2007), Ferreira (2009), Baldo (2014)) entre outros.

Outra proposta para modelar as decisões de sequenciamento é usando as restrições de eliminação de subrotas do Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico (PCVA). As restrições propostas por Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ) foram utilizadas no problema PIDS no contexto da indústria de nutrição animal e de bebidas. Outra classe de inequações de eliminação de subrotas, propostas por Miller, Tucker e Zemlin (1956) (MTZ), foram usadas no contexto de uma fábrica de contêineres de vidro (Almada-lobo 2007) e de uma fábrica de refrigerantes (Defalque 2010). Reformulações das restrições MTZ para obter classes de inequações de eliminação de subrotas mais fortes (Sherali e Laporte 1991), também podem ser úteis para modelar as decisões de sequenciamento. Carretero e Rangel (2010) discutem esta possibilidade no contexto de uma fábrica de refrigerantes. Diversas outras possibilidades de modelagem das decisões de sequenciamento podem ser exploradas na modelagem matemática do problema PIDS. Oncan 2009 apresentam uma análise de diversas formulações para o PCVA, estabelecendo uma hierarquia de modelos considerando a qualidade da formulação.

Uma questão importante neste contexto se refere ao estudo de qual seria a melhor estratégia para modelar as decisões de sequenciamento do problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção. O interesse prático aliado ao desafio acadêmico motivaram o desenvolvimento dos novos modelos para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção propostos neste trabalho. A contribuição principal deste trabalho é fazer um estudo teórico e computacional de diferentes estratégias para modelar as decisões de sequenciamento no PIDS. Preenchendo, assim uma lacuna encontrada na literatura pois a maioria dos modelos encontrados só foram testados em aplicações específicas e o comportamento foi avaliado apenas em termos computacionais.

A tese esta organizada em 6 capítulos. No Capítulo 1 uma breve revisão de conceitos básicos de otimização é apresentada. No Capítulo 2 é apresentada uma revisão dos dois problemas envolvidos, dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção. No Capítulo 3 são discutidas duas estratégias para modelar as decisões de sequenciamento, bem como as reformulações propostas, e estudo teórico da relação entre os modelos. O Capítulo 4 é dedicado ao estudo computacional dos modelos. O Capítulo 5 contém um estudo de caso para uma fábrica de refrigerante. No Capítulo 6 são feitas as considerações finais sobre o trabalho.

Capítulo 1

Conceitos Básicos de Otimização Linear Inteira Mista

Durante o texto principal da Tese de Doutorado são necessários alguns conceitos considerados básicos para o leitor que tem domínio em Otimização Linear Inteira. Mas para melhor entendimento de todos, nesse capítulo serão apresentados conceitos básicos álgebra linear, teoria da dualidade e teoria dos poliedros; Projeção e Projeção Reversa e por fim Decomposição de Benders. Mais informações sobre cada tópico podem ser encontradas em Bazaraa, Wolsey, Yoshiko, Lasdon.

1.1 Conceitos Básicos

Álgebra Linear é um dos pré requisitos mais importantes para o entendimento da Otimização Linear Inteira. Toda a base matemática proposta para a construção de modelos, heurísticas, e métodos de solução, vem da álgebra linear. Por isso, iniciamos esse capítulo com os principais conceitos de álgebra linear relativos aos problemas estudados nessa tese. Provavelmente, muitos já tem o familiaridade com esses conceitos mas serão aqui descritos para estabelecer a notação e terminologia que serão adotadas no decorrer do texto. Para obter uma leitura mais detalhada desses conceitos pesquisar em Boldrini e Figueredo, Anton e Rorres.

Em otimização linear inteira estamos interessados em construir restrições que modelam matematicamente condições a serem satisfeita. O reunião dessas restrições formam um sistema linear. Todo sistema linear pode ser representado como uma matriz de coeficientes, um vetor de variáveis consideradas, e um vetor linear, chamado vetor de custo. Para que os métodos de solução trabalhem de maneira mais eficiente possível é necessário analisar esses vetores e essas matrizes para reduzir redundâncias, obter o conjunto de soluções factíveis e muitas outras informações que um sistema linear pode fornecer, antes mesmo de resolver o problema de otimização.

Um dos conceitos primordiais é o de combinação linear, afim e convexa. Com ela pode-se definir a relação existentes entre as restrições.

Definição 1.1 (Combinação linear, afim e convexa). *Sejam os vetores $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ e os escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, então o vetor $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$, é chamado uma combinação linear dos vetores x_1, \dots, x_k . Se além disso, os escalares $\lambda_i, \forall i = 1, \dots, k$ satisfazem a condição $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, então x é chamado de combinação afim dos vetores x_1, \dots, x_k . Se x é uma combinação afim tal que os escalares $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k$, então x é chamado de combinação convexa dos vetores x_1, \dots, x_k .*

A partir de agora pode-se definir qual relação de dependência entre cada uma das restrições o que ajuda muitas vezes a descobrir quando uma restrição é redundante ou não.

Definição 1.2. *Seja o conjunto não vazio $\{x_1, \dots, x_k\}$ de k pontos. Os pontos x_1, \dots, x_k são linearmente independentes se a única solução para $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$ for $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, k$. Caso contrário são chamados de linearmente dependentes.*

Definição 1.3. *Seja o conjunto não vazio $\{x_1, \dots, x_k\}$ de k pontos. Os pontos x_1, \dots, x_k são afim independentes se a única solução para $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$ com $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$ for $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, k$. Caso contrário são chamados de afim dependentes.*

Observe que todo conjunto de vetores do \mathbb{R}^n linearmente independente contém no máximo n elementos. E todo conjunto afim independente contém no máximo $n + 1$ elementos (os n vetores linearmente independente e o vetor nulo). Mais ainda, todo conjunto unitário é afim e linearmente independente, com exceção do $\{0\}$ que é apenas afim independente. Por convenção o conjunto vazio é afim e linearmente independente. Podemos notar que se um conjunto é linearmente independente então é afim independente porém a recíproca não é verdadeira.

Definição 1.4 (Envoltório Convexo). *Dado um conjunto S , o envoltório convexo de $S \neq \emptyset$ e $S \subset \mathbb{R}^n$, denotado por $\text{conv}(S)$, é o conjunto de todos os pontos $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ tal que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, k$ e $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq S$.*

De acordo com a Definição 1.4, o envoltório convexo de S é o conjunto de todos os pontos que são uma combinação convexa de pontos de S .

Definição 1.5. *Chamamos de posto do conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ a cardinalidade do maior subconjunto de S linearmente independente. E chamamos de posto afim do conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ a cardinalidade do maior subconjunto de S afim independente.*

Os resultados que seguem agora são úteis para a descrição do conjunto de soluções viáveis de um problema de otimização.

Definição 1.6 (Semi-espço). *Um conjunto da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : ax \leq w\}$, com $a \in \mathbb{R}^n$, não nulo e $w \in \mathbb{R}$, é chamado semi-espço.*

Definição 1.7 (Hiperplano). *Um conjunto de pontos que divide o espço em dois semi-espços, ou seja, um conjunto da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : ax = w\}$, onde $a \in \mathbb{R}^n$, não nulo e $w \in \mathbb{R}$, é chamado hiperplano.*

Definição 1.8 (Poliedro). *Um poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de pontos que satisfazem um número finito de inequações e que pode ser representado da seguinte forma $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.*

Em outras palavras um poliedro é a intersecção de um número finito de semi-espços. De cada poliedro podemos extrair algumas informações, como o seu raio, obter uma direção, seus pontos extremos e seus raios extremos.

Definição 1.9. *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Um raio é um conjunto de elementos da forma $\{x_0 + \lambda d : \lambda \geq 0\}$, onde d se designa por direção do raio e x_0 por vértice do raio.*

Definição 1.10. *Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Um vetor $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ diz-se direção de S se para todo $x_0 \in S$, o raio $\{x_0 + \lambda d : \lambda \geq 0\} \in S$.*

Definição 1.11. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Um elemento de $x \in S$ denomina-se ponto extremo de S se não puder ser escrito como combinação linear convexa de dois elementos distintos de S , x_1 e x_2 , tais que, $x \neq x_1$ e $x \neq x_2$.*

Definição 1.12. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma direção de S diz-se direção extrema se não for possível escrevê-la como $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^n$ e d_1, d_2 direções de S tais que d_1 não é um múltiplo positivo de d_2 .*

Definição 1.13. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Um raio em S diz-se um raio extremo se a sua direção for uma direção extrema.*

Com essas definições, quando não for possível representar as inequações que definem o poliedro podemos usar o Teorema de Minkowski, que apresenta uma caracterização dos poliedros a partir de seus pontos e raios extremos.

Teorema 1.1 (Teorema de Minkowski). *Se $P \neq \emptyset$ e $\dim(A) = n$, então*

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{k \in K} \lambda_k x^k + \sum_{j \in J} \mu_j r^j, \sum_{k \in K} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, \forall k \in K, \mu_j \geq 0 \forall j \in J \right\},$$

onde $\{x^k\}_{k \in K}$ é o conjunto de pontos extremos de P e $\{r^j\}_{j \in J}$ é o conjunto de raios extremos de P .

De acordo com Bazaraa et al.(1990) e outros autores, para todo problema linear que resolvemos, há um outro problema linear associado que é resolvido simultaneamente. Esse par de problema satisfaz algumas propriedades importantes. Essas propriedades podem ser extremamente úteis para se obter a solução dos dois problemas. O problema original é chamado de problema primal enquanto que o problema associado é chamado de problema dual.

Considere o problema primal (1.1) - (1.3):

$$\min cx \quad (1.1)$$

$$\text{s.a. } Ax \geq b \quad (1.2)$$

$$x \geq 0 \quad (1.3)$$

e seja $P = \{x \geq 0 : Ax \geq b\}$ o conjunto de soluções viáveis para o problema primal.

O dual será dado por (1.4) - (1.6):

$$\max wb \quad (1.4)$$

$$\text{s.a. } wA \leq c \quad (1.5)$$

$$w \text{ irrestrita} \quad (1.6)$$

e seja $D = \{w : wA \leq c\}$ o conjunto de soluções viáveis para o problema dual.

Lema 1.1 (Lema Fraco da Dualidade). *Se P e D tem soluções viáveis, ou seja, $P \neq \emptyset$ e $D \neq \emptyset$ então $\min c(x) \geq \max w(u)$ para todo $x \in P$ e todo $u \in D$.*

Teorema 1.2 (Teorema Forte da Dualidade). *Sejam P e D os problemas primal e dual. Então, ambos os problemas tem solução ótima e os valores ótimos são iguais se e somente se esses problemas tem soluções viáveis.*

Corolário 1.1 (Corolário Fundamental da Dualidade). *Considerando o problema linear primal e o seu dual, uma das seguintes afirmações é unicamente verdadeira:*

- 1-) *Ambos problemas possuem solução ótima, x^* e w^* com $cx^* = w^*b$.*
- 2-) *Um problema tem valor ilimitado, nesse caso o outro problema é infactível.*
- 3-) *Ambos problemas são infactíveis.*

1.2 Projecção e Projecção Reversa

Muitos problemas de Otimização Combinatória tendem a ter várias formulações alternativas, algumas delas são mais fáceis de lidar do que outras. A projecção fornece uma conexão entre diferentes formulações.

Definição 1.14. Dado um poliedro da forma

$$Q = \{(u, x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : A_u + B_x \leq b\},$$

a projeção de Q em \mathbb{R}^q é definida por

$$Proj_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^q : \exists u \in \mathbb{R}^p : (u, x) \in Q\}.$$

Então projeção do conjunto Q em \mathbb{R}^q pode ser vista como encontrar uma matriz $C \in \mathbb{R}^{m \times q}$ e um vetor $d \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$Proj_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^q : Cx \leq d\}.$$

Em outras palavras, projeção é uma formulação para Q tal que $Q = Proj_x(Q) \cap \mathbb{R}^q$.

Veja na Figura 1 uma ilustração de projeção.

Figura 1: Projeção

Projeção não pode ser confundida com restrição, outra operação que relaciona um objeto de dimensão superior a um em um subespaço (yoshiko). Considerando o mesmo conjunto $Q \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ a restrição no subespaço definida por $u = 0$ é

$$\{(u, x) \in Q : u = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^q : (0, x) \in Q\}.$$

Para ilustrar a diferença entre projeção e restrição, considere o poliedro Q , representado na Figura 2 (Figura adaptada de projecao):

$$Q = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : x + u \geq 1, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq u \leq 1\}.$$

A projeção de Q no espaço dos reais é $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$ (Figura 3), enquanto a restrição de Q a um subespaço do \mathbb{R}^2 definida por $u = 0$ é $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$ (Figura 4).

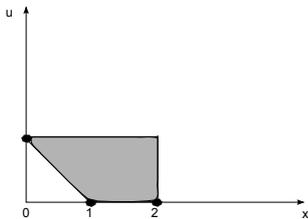


Figura 2: Poliedro Q



Figura 3: Projeção de Q em \mathbb{R}



Figura 4: Restrição de Q

Enquanto projeção e restrição projetam o poliedro de uma dimensão maior do espaço para uma dimensão menor, algumas vezes queremos ir na direção oposta. A operação, reversa da projeção, que vai de uma formulação poliédrica de um problema em uma dada dimensão para

uma dimensão maior, envolvendo novas variáveis, é chamada formulação estendida ou *lifting*.

Definição 1.15. *A técnica de lifting é um processo de construir a partir de uma determinada inequação válida para um poliedro de uma dimensão uma inequação para um poliedro de dimensão maior.*

A idéia de *lifting* foi introduzida por Gomory em 1969 no contexto de problemas de grupo. Considere um conjunto de soluções viáveis para um problema inteiro dado por:

$$X = \{x \in \mathbb{R}_+^{|N|} : \sum_{j \in N} a_j x_j \leq d, \\ \sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k, \quad k = 0, \dots, t, \\ x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \subset N\}.$$

Aqui $\{C_k : k = 0, \dots, t\}$ é uma partição de N , a_j e $d \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ e w_j e $r_k \in \mathbb{R}^{m_k \times 1}$, com $j \in N$. Inicialmente, nós consideramos o subconjunto de X obtido fazendo $x_j = 0$ para $j \in N \setminus C_0$ dado por:

$$X^0 = \{x \in \mathbb{R}_+^{|C_0|} : \sum_{j \in C_0} a_j x_j \leq d, \\ \sum_{j \in C_0} w_j x_j \leq r_0, \\ x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \cap C_0\}.$$

Seja

$$0 \leq \alpha_0 - \sum_{j \in C_0} \alpha_j x_j \tag{1.7}$$

uma inequação válida arbitrária para X^0 . Nós queremos construir uma inequação válida para X da forma

$$0 \leq \alpha_0 - \sum_{0 \leq k \leq t} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j. \tag{1.8}$$

Para construir tal inequação, nós começamos com (1.7) e aplicamos a técnica de *lifting* nas variáveis em $N \setminus C_0$. Os conjuntos de pontos viáveis, X^i , para $i = 1, \dots, t$ são definidos por:

$$X = \{x \in \mathbb{R}_+^{\sum_{0 \leq k \leq i} |C_k|} : \sum_{0 \leq k \leq i} \sum_{j \in C_k} a_j x_j \leq d, \\ \sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k, \quad k = 0, \dots, i, \\ x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \cap (\cup_{k=0}^i C_k)\}.$$

O problema de *lifting* associado a C_i e uma inequação válida:

$$0 \leq \alpha_0 - \sum_{0 \leq k \leq i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j. \quad (1.9)$$

para X^{i-1} , é encontrar α_j para $j \in C_i$ tal que

$$\sum_{j \in C_i} \alpha_j x_j \leq \alpha_0 - \sum_{0 \leq k \leq i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \quad (1.10)$$

seja uma inequação válida para X^i .

Seja $Z = [0, d]$. Mais ainda, para $z \in Z$ seja

$$h_i(x) = \max \sum_{j \in C_i} \alpha_j x_j \quad (1.11)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in C_i} a_j x_j = z \quad (1.12)$$

$$\sum_{j \in C_i} w_j x_j \leq r_i \quad (1.13)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in C_i \cap I, \quad x \in \mathbb{R}_+^{|C_i|}. \quad (1.14)$$

e seja

$$f_i(x) = \min \alpha_0 - \sum_{0 \leq k \leq i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \quad (1.15)$$

sujeito a:

$$\sum_{0 \leq k \leq i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \leq d - z \quad (1.16)$$

$$\sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k, \quad k = 0, \dots, i-1 \quad (1.17)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \cap (\cup_{k=0}^{i-1} C_k), \quad x \in \mathbb{R}^{\sum_{k=0}^{i-1} |C_k| +} \quad (1.18)$$

A técnica de *lifting* normalmente é aplicada sequencialmente: A técnica de *lifting* é aplicada nas variáveis uma após a outra e um problema de separação tem que ser resolvido para determinar cada coeficiente *lifting*.

1.3 Decomposição de Benders

A técnica de Decomposição de Benders (Benders, 1972; Granville et al. 1988, 1989; Geoffrion, 1972; Monticelli et al., 1987; Lebow et al., 1985), utiliza a teoria da dualidade em

programação matemática (linear e não linear), para particionar um problema de difícil solução quando são consideradas todas as variáveis envolvidas, aplicando os conceitos de partição e projeção, em subproblemas com variáveis específicas, que são resolvidas iterativamente até que uma solução ótima seja obtida para o problema original.

Considere o problema inteiro misto (1.19) - (1.23):

$$\min cx + dy \quad (1.19)$$

s. a:

$$Ax + By \geq b \quad (1.20)$$

$$Dy \geq e \quad (1.21)$$

$$x \geq 0 \quad (1.22)$$

$$y \geq 0 \text{ e inteiro} \quad (1.23)$$

Esse problema pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\min_{\bar{y} \in Y} \{d\bar{y} + \min_{x \geq 0} \{cx : Ax \geq b - B\bar{y}\}\} \quad (1.24)$$

onde $Y = \{y | Dy \geq e, y \geq 0 \text{ e inteiro}\}$.

O subproblema em (1.24)

$$\min_{x \geq 0} \{cx : Ax \geq b - B\bar{y}\} \quad (1.25)$$

é um problema linear contínuo que pode ser dualizado através da associação das variáveis duais u às restrições $Ax \geq b - B\bar{y}$, obtendo o problema (1.26):

$$\max_{u \geq 0} \{u(b - B\bar{y}) : uA \leq c\}. \quad (1.26)$$

O problema (1.26) é conhecido como o subproblema da decomposição de Benders. Devido à teoria da dualidade, as formulações primais e duais podem ser usadas de forma intercalada, isto é pode-se escrever (1.24) como:

$$\min_{\bar{y} \in Y} \{d\bar{y} + \max_{u \geq 0} \{u(b - B\bar{y}) : uA \leq c\}\} \quad (1.27)$$

A vantagem de usar a formulação (1.27) é que a região de soluções viáveis do subproblema (1.26), o poliedro convexo $U = \{u \geq 0 : uA \leq c\}$, é independente da variável y . Note que o mesmo não ocorre com o poliedro convexo $P = \{x \geq 0 : Ax \geq b - B\bar{y}\}$ associado a (1.25), que depende do valor atribuído à variável y .

Analisando o subproblema (1.26) e usando teoria da dualidade pode-se avaliar os possíveis casos para U :

- $U = \emptyset$

- $U \neq \emptyset$.

Se $U = \emptyset$ então a solução do subproblema primal (1.25) será ilimitada (se $P \neq \emptyset$) ou inviável (se $P = \emptyset$). Se $P = \emptyset$ o valor atribuído a y não fornece um subproblema primal factível. Consequentemente, esse y também não é factível para o problema original. Conclui-se assim que o problema original também será infactível. Se $P \neq \emptyset$ então o subproblema primal (1.25) é ilimitado, e o problema (1.24) será:

$$\min_{\bar{y} \in Y} \{d\bar{y} + (-\infty)\} \quad (1.28)$$

ou seja, o problema original também será ilimitado.

Considerando $U \neq \emptyset$, pelo Teorema de Minkowski, o conjunto U pode ser representado por um número finito de pontos extremos, u^i ($\forall i = 1, \dots, E$) e um número finito de raios extremos, v^q , ($\forall q = 1, \dots, Q$). Os raios extremos são necessários na representação quando o poliedro U é ilimitado. As soluções duais ilimitadas são indesejadas, uma vez que é resultado de problemas primais inviáveis. Pode-se eliminar os valores de y que geram tais soluções considerando explicitamente as seguintes restrições obtidas pelo Lema de Farkas:

$$v^q(b - B\bar{y}) \leq 0 \quad \forall q = 1, \dots, Q. \quad (1.29)$$

Proposição 1.1. *As restrições (1.29) são chamadas de corte factível no algoritmo de Decomposição de Benders e são válidas para o problema original.*

Para demonstrar a validade dos cortes factíveis considere o sistema linear para y fixo:

$$Ax - s = b - B\bar{y} \quad (1.30)$$

$$x \geq 0 \quad (1.31)$$

$$s \geq 0 \quad (1.32)$$

por Farkas, y é factível se e somente se:

$$(b - B\bar{y})'u \leq 0 \quad (1.33)$$

para todo u satisfazendo:

$$A'u \leq 0, \quad u \geq 0 \quad (1.34)$$

Considere o cone poliédrico:

$$C = \{u | A'u \leq 0, \quad u \geq 0\} \quad (1.35)$$

Isso é, existem vetores u_i^r , $i = 1, \dots, n_r$, tal que qualquer elemento $u \in C$ pode ser escrito como

$$u = \sum_{i=1}^{n_r} \lambda_i u_i^r, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (1.36)$$

Substituindo (1.36) em (1.33),

$$\sum_{i=1}^{n_r} \lambda_i (b - B\bar{y})'u_i^r \leq 0 \quad (1.37)$$

que permanece válido para todo $\lambda_i \geq 0$ se e somente se

$$(b - B\bar{y})'u_i^r \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_r \quad (1.38)$$

Então y é factível se e somente se satisfaz um número finito de restrições do tipo (1.38).

Portanto

$$v^q (b - B\bar{y}) \leq 0 \quad \forall q = 1, \dots, Q. \quad (1.39)$$

supondo que v^q , $q = 1, \dots, Q$ são raios extremos de U é válida para o problema original.

Se o subproblema (1.26) for factível limitado, sabe-se que a solução ótima é um ponto extremo u^p de U .

Seja,

$$\eta = u^* = \max u^p (b - B\bar{y}) \quad \forall p \in p = 1, \dots, E \quad (1.40)$$

Assim o dual do subproblema pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\max \eta \quad (1.41)$$

s.a.

$$\eta \geq u^p(b - B\bar{y}) \quad (1.42)$$

Assim, o problema original (1.19) - (1.23) pode ser reformulado como (1.43) - (1.47) denominada reformulação de Benders:

$$\min d\bar{y} + \eta \quad (1.43)$$

s.a.

$$\eta \geq u^p(b - B\bar{y}) \quad \forall p = 1, \dots, E \quad (1.44)$$

$$v^s(b - B\bar{y}) \leq 0 \quad \forall q = 1, \dots, Q \quad (1.45)$$

$$\bar{y} \in Y \quad (1.46)$$

$$\eta \geq 0 \quad (1.47)$$

O número de pontos extremos e de raios extremos pode ser muito grande. Para trabalhar com esta limitação, Benders propôs a geração das restrições de forma dinâmica, como planos de corte. Por isso essas inequações são também conhecidas como "Planos de Corte de Bender".

Considere o problema (1.48) - (1.49), denominado problema mestre relaxado:

$$z_0 = \min dy + \eta \quad (1.48)$$

s.a.

$$y \in Y \quad (1.49)$$

Em cada iteração k do algoritmo de decomposição de Benders, um novo corte do tipo (1.44) ou (1.45) é agregado ao problema (1.48) - (1.49).

O Subproblema (1.41) - (1.42) serve para testar a factibilidade/otimalidade de uma proposta $[y^k, z_0^k]$ do problema mestre (1.43) - (1.47). O problema mestre é um problema nas variáveis y e gera novos valores para a variável y para o subproblema. O subproblema testa esses novos valores da variável y do problema mestre e é um problema nas variáveis u :

Considerando UB um limitante superior, LB um limitante inferior e ϵ uma precisão dese-

jada, o algoritmo de decomposição de Benders clássico pode ser definido de acordo com:

Passo 1: Faça $UB = \infty$, $LB = -\infty$; $k=1$.

Passo 2: Resolva o problema mestre relaxado (1.48) - (1.49), obtendo, assim, um valor inicial para y , y^* .

Passo 3: Dado y^* , resolva o subproblema dual (1.26) para obter u^* . Atualize o valor do $UB = \min\{UB, d\bar{y} + u^*(b - B\bar{y})\}$ (isto é, o valor da melhor solução factível até então);

Passo 4: Se o subproblema dual (1.26) for limitado gere um corte ótimo (1.44) para o problema mestre. Se o subproblema dual for ilimitado gere um corte factível (1.45) para o problema mestre.

Passo 5: Resolva o problema mestre com o corte do Passo 4 adicionado para obter y^* , $z0^*$. Calcule o novo $LB = z0^*$;

Passo 6: $UB - LB \leq \epsilon$? Se sim, FIM. Senão, $k=k+1$ e volte ao Passo 3.

O exemplo a seguir mostra como pode ser usado o Algoritmo de Decomposição de Benders.

Exemplo 1.1 (Aplicação do Algoritmo da Decomposição de Benders). *Seja o problema MIP:*

$$\min 5y_1 - 2y_2 + 2x_1 - 3x_2 \quad (1.50)$$

s.a.

$$5y_1 - 3y_2 + 2x_1 + 3x_2 \leq -2 \quad (1.51)$$

$$4y_1 + 2y_2 + 3x_1 - x_2 \leq 10 \quad (1.52)$$

$$y_j \leq 5 \quad \forall j = 1, 2 \quad (1.53)$$

$$y \in Z_+^2 \quad (1.54)$$

$$x \in R_+^2 \quad (1.55)$$

O problema original será dividido em dois problemas; um em função das variáveis y , chamado de Problema Mestre. E outro, em função das variáveis x , chamado de Subproblema Primal.

Problema Mestre:

$$\max 5y_1 - 2y_2 \quad (1.56)$$

s.a.

$$y_j \leq 5 \quad \forall j = 1, 2 \quad (1.57)$$

$$y \in Z_+^2 \quad (1.58)$$

Do problema mestre, (1.56)-(1.58) obtém-se valores para y , y^* . Assim, defini-se o subproblema primal:

Subproblema Primal:

$$\max 2x_1 - 3x_2 \quad (1.59)$$

s.a.

$$2x_1 + 3x_2 \leq -2 - 5\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 \quad (1.60)$$

$$3x_1 - x_2 \leq 10 - 4\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2 \quad (1.61)$$

$$x \in R_+^2 \quad (1.62)$$

Subproblema Dual:

$$\min(-2 - 5\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2)u_1 + (10 - 4\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2)u_2 \quad (1.63)$$

s.a.

$$2u_1 + 3u_2 \geq 2 \quad (1.64)$$

$$3u_1 - u_2 \geq -3 \quad (1.65)$$

$$u \in R_+^2 \quad (1.66)$$

Seja $U = \{u = (u_1, u_2) \in R_+^2 : 2u_1 + 3u_2 \geq 2 \text{ e } 3u_1 - u_2 \geq -3\}$ a região factível do subproblema dual (1.63) - (1.66).

Aplicação do Algoritmo de Decomposição de Benders ao problema (1.50)-(1.55):

k=1

Passo 1: $UB = \infty$, $LB = -\infty$

Passo 2: Resolva o problema mestre (1.56)-(1.58).

A solução encontrada é $[(y_1, y_2); z_0] = [(5, 0); 25]$

Passo 3:

Substituindo o valor de y no subproblema dual (1.63) - (1.66), obtém-se:

$$\min -27u_1 - 10u_2 \quad (1.67)$$

s.a.

$$2u_1 + 3u_2 \geq 2 \quad (1.68)$$

$$3u_1 - u_2 \geq -3 \quad (1.69)$$

$$u \in R_+^2 \quad (1.70)$$

O subproblema dual (1.67) - (1.70) tem solução ilimitada. E $UB = \min\{UB, d\bar{y} + u^*(b - B\bar{y})\} = \min\{+\infty, 25 + (+\infty)\} = +\infty$

Passo 4: Determinar um corte factível.

O raio extremo é $v_1 = (0.5; 0)$.

E o corte factível é gerado da seguinte maneira: $v_1(b - B\bar{y}) \geq 0 \Rightarrow (-2 - 5\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2)(0.5) + (10 - 4\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2)0 \geq 0 \Rightarrow$

$$5\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 \geq 2 \quad (1.71)$$

Acrescentando o corte factível (1.71) ao problema mestre (1.56)-(1.58) obtém-se um novo Problema Mestre (1.72) - (1.75):

$$\max 5y_1 - 2y_2 \quad (1.72)$$

s.a.

$$y_j \leq 5 \quad \forall j = 1, 2 \quad (1.73)$$

$$-5y_1 + 3y_2 \geq 2 \quad (1.74)$$

$$y \in Z_+^2 \quad (1.75)$$

Passo 5: Resolvendo o novo problema mestre obtém-se $[y; z1] = [(2, 4); 2]$.

E $LB = 2$

Passo 6: $UB - LB < \epsilon$? Não! Volte ao Passo 3.

k=2

Passo 3: Substituindo o valor de $y = (2, 4)$ no subproblema dual (1.63) - (1.66) tem-se o seguinte problema a ser resolvido:

$$\min -6u_2 \quad (1.76)$$

s.a.

$$2u_1 + 3u_2 \geq 2 \quad (1.77)$$

$$3u_1 - u_2 \geq -3 \quad (1.78)$$

$$u \in R_+^2 \quad (1.79)$$

O problema tem solução ilimitada. Assim $UB = \infty$.

Passo 4: Determinar um corte factível.

O raio extremo é $v_2 = (1; 3)$.

E o corte factível é gerado da seguinte maneira: $v_2(b - B\bar{y}) \geq 0 \Rightarrow (-2 - 5\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2)(1) + (10 - 4\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2)(3) \geq 0 \Rightarrow$

$$-17y_1 - 3y_2 \geq -28 \quad (1.80)$$

Acrescentando o corte factível (1.80) ao problema mestre (1.72)-(1.75) obtém-se um novo Problema Mestre (1.81) - (1.85):

$$\max 5y_1 - 2y_2 \quad (1.81)$$

s.a.

$$y_j \leq 5 \quad \forall j = 1, 2 \quad (1.82)$$

$$-5y_1 + 3y_2 \geq 2 \quad (1.83)$$

$$-17y_1 - 3y_2 \geq -28 \quad (1.84)$$

$$y \in Z_+^2 \quad (1.85)$$

Passo 5: Resolvendo o novo problema mestre obtém-se $[y; z2] = [(1, 3); -1]$.

$$\text{E } LB = -1$$

Passo 6: $UB - LB < \epsilon$? Não! Volte ao Passo 3.

k=3

Passo 3: Substituindo o valor de $y = (1, 3)$ no subproblema dual (1.63) - (1.66) tem-se o seguinte problema a ser resolvido:

$$\min 2u_1 \tag{1.86}$$

s.a.

$$2u_1 + 3u_2 \geq 2 \tag{1.87}$$

$$3u_1 - u_2 \geq -3 \tag{1.88}$$

$$u \in R_+^2 \tag{1.89}$$

Tem solução limitada $u = (0, 3)$ com valor da função objetivo 0. Assim $UB = 0$.

Passo 4: Determinar um corte ótimo.

Ponto extremo $u = (0, 3)$.

E o corte ótimo é gerado da seguinte maneira: $\eta \geq (-2 + 5y_1 + 3y_2)u_1 + (10 - 4y_1 - 2y_2)u_2 \rightarrow \eta \geq 30 - 12y_1 - 6y_2$.

Portanto o corte ótimo é acrescentado ao problema mestre anterior:

$$\max 5y_1 - 2y_2 + \eta \tag{1.90}$$

s.a.

$$\eta \geq 30 - 12y_1 - 6y_2 \tag{1.91}$$

$$y_j \leq 5 \quad \forall j = 1, 2 \tag{1.92}$$

$$-5y_1 + 3y_2 \geq 2 \tag{1.93}$$

$$-17y_1 - 3y_2 \geq -28 \tag{1.94}$$

$$y \in Z_+^2 \tag{1.95}$$

Resolve o problema mestre (1.90) - (1.95) obtém a solução e verificar o a diferença entre os $UB-LB$. O algoritmo termina quando a diferença é menor do que o ϵ estabelecido inicialmente.

Geoffrion (1972) apresenta uma generalização da decomposição Benders, onde os subproblemas resultantes não são necessariamente lineares. A eficiência computacional da decomposição de Benders na resolução de problemas de larga escala pode ser verificada no trabalho pioneiro de Geoffrion e Graves (1974), na resolução de problemas estocásticos de transporte e localização de França e Luna (1982), no problema de sequenciamento aéreo integrado de Papadakos (2008), no trabalho de Costa (2005) que faz um levantamento de problemas de projeto de rede com custo fixo em que a decomposição de Benders foi aplicada e, mais recentemente, na resolução de problemas de localização de concentradores em redes do tipo eixo-raio com alocação múltipla de Camargo et al. (2006).

A reformulação de Benders pode ser considerada como uma técnica de projeção, pois reduz o número de variáveis do problema original. Com essa ideia, Gravish e Graves usou a reformulação de Benders no modelo desenvolvido por ele para o PCV para provar a qualidade do modelo proposto em relação ao modelo clássico MTZ. O modelo proposto, denominado single commodity flow, necessita de variáveis auxiliares para garantir soluções sem subsequências. Para mostrar a qualidade da sua formulação, eles reformularam o modelo original usando a decomposição de benders e assim seu modelo passo a ter apenas as variáveis consideradas originais, e o poliedro associado pode ser facilmente comparado. A seguir, apresentamos uma aplicação da reformulação de Benders no modelo MTZ do problema do caixeiro viajante, que é considerada um dos modelos clássicos da literatura.

Considere o Problema do Caixeiro Viajante descrito pelas restrições (1.96) - (1.100):

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} \quad (1.96)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 1 \quad \forall j \quad (1.97)$$

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (1.98)$$

$$u_i - u_j + N x_{ij} \leq N - 1 \quad \forall i, j \geq 2; i \neq j \quad (1.99)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}; N l e q u_i \geq 0 \quad \forall i, j \quad (1.100)$$

Uma aplicação direta do Método de Benders à formulação (1.96) - (1.100) fornece o pro-

blema mestre (1.101) - (1.104), conhecido como problema da designação.

Problema Mestre:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} \quad (1.101)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 1 \quad \forall j \quad (1.102)$$

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (1.103)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (1.104)$$

É um subproblema com função objetivo nula pois o vetor de custo associado a variável u é nulo. Para facilitar o desenvolvimento do método de Benders podemos, sem perda de generalidade, supor que o vetor de custo da variável u no problema original PCVA é 1. Para contornar esse problema, a função objetivo (??) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^N u_i \quad (1.105)$$

Os valores que a variável u_i vai receber são 0, 1, 2, ..., $N - 1$, assim $\sum_{i=1}^N u_i = \frac{N(N-1)}{2}$, então não afeta o valor da solução ótima, pois sabemos qual é o valor dessa soma, para retornar o valor original de Z basta subtrair $\frac{N(N-1)}{2}$.

E a nova função objetivo para o subproblema será: $\min \sum_{i=1}^N u_i$. Portanto o subproblema primal do método de Benders é dado por (1.106), (1.107) - (1.108).

$$\min \sum_{i=1}^N u_i \quad (1.106)$$

sujeito a:

$$u_j - u_i \geq N x_{ij} - N + 1 \quad \forall i, j \geq 2; i \neq j. \quad (1.107)$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i \quad (1.108)$$

O dual do subproblema (1.106), (1.107) - (1.108) é dado por:

$$\sum_{i=2}^N \sum_{j=2; j \neq i}^N \lambda_{ij} (N\bar{x}_{ij} - N + 1) \quad (1.109)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=2; j \neq i}^N \lambda_{ji} - \sum_{j=2; j \neq i}^N \lambda_{ij} \leq 1 \quad \forall i \geq 2 \quad (1.110)$$

$$\lambda_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \geq 2; i \neq j \quad (1.111)$$

O problema mestre fornece uma solução para x , se essa solução não formar uma subsequência, então o subproblema primal é factível e consequentemente o subproblema dual também será. Logo um corte, formado por ponto extremo, será acrescentado ao problema mestre. Se essa solução inicial do problema mestre formar uma subsequência, então o subproblema primal será infactível e como $\lambda_{ij} = 0$ é uma solução viável para o subproblema dual, o subproblema dual será ilimitado. Logo teremos que acrescentar ao problema mestre um corte formado por raio extremo.

Capítulo 2

Problemas de Dimensionamento e Sequenciamento da Produção

A solução de um problema de dimensionamento de lotes determina o quanto e quando produzir de um conjunto de produtos para satisfazer a demanda conhecida ao longo de um horizonte de planejamento finito. A solução de um problema de sequenciamento estabelece a ordem em que os lotes são produzidos em um período de tempo, e pode-se considerar os tempos e os custos de preparação dependentes da sequência. A integração destes dois problemas permite a criação de planos de produção melhores do que os obtidos quando os dois problemas são resolvidos hierarquicamente. Isto é particularmente importante nas indústrias de processos (por exemplo, containers de vidro, suplementos de alimentação animal, refrigerantes), uma vez que a estreita relação entre a definição do dimensionamento de lotes e sequenciamento torna interessante que ambas as decisões sejam tomadas simultaneamente, a fim de utilizar de forma eficiente a capacidade da produção. A seguir estão descritas as definições e considerações dos dois problemas estudados, dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção.

2.1 Problemas de Dimensionamento de Lotes

De acordo com .karimi2003 o dimensionamento de lotes é um dos mais importantes e difíceis problemas do planejamento da produção. Por isso, esse assunto tem sido objeto de diversos estudos na literatura. O problema de dimensionamento de lotes consiste em determinar a quantidade de lotes a serem produzidos e em que períodos haverá produção. O critério de otimização geralmente é de cunho econômico e envolve custos de produção que são tradicionalmente divididos em custo de estoque, custo de processamento de produtos e custos de preparação de máquinas (.pochetwolsey2006).

A complexidade computacional em termos de modelagem dos problemas de dimensionamento de lotes depende dos recursos considerados no modelo (.zhu2006). A seguir estão des-

critas algumas características que afetam diretamente a classificação, a modelagem e a complexidade computacional dos problemas de dimensionamento de lotes. Revisões bibliográficas sobre problemas de dimensionamento de lotes são encontradas, por exemplo, em .maes1988, .haase1995, .degraeve2008 e .brahimi2006.

Horizonte de Planejamento

O horizonte de planejamento é o intervalo de tempo em que acontece a produção. O horizonte de planejamento pode ser finito ou infinito e pode conter períodos de tempo contínuos ou discretos. Se os períodos forem discretos, eles podem ser divididos em duas categorias: problemas do tipo *big bucket* ou tipo *small bucket*. Períodos do tipo *big bucket* são aqueles cujo período de tempo é grande o suficiente para produzir vários itens, enquanto que períodos do tipo *small bucket* tem períodos tão pequenos que somente um único item pode ser produzido em cada período.

Número de Estágios

Os problemas de dimensionamento de lotes podem ser divididos em multi-estágio ou mono-estágio. Denomina-se sistema de produção multi-estágio quando os itens a serem produzidos são dependentes, isto é, a produção de determinado item depende da produção de outro, que é chamado item componente. Diz-se que um sistema de produção é mono-estágio quando os itens a serem produzidos são independentes, ou seja, nenhum item depende da produção de outro item. De acordo com .karimi2003 sistemas multi-estágio são mais difíceis de serem resolvidos do que sistemas mono-estágio. .guptakeung1990 apresentam uma revisão dos modelos multi-estágio.

Número de Produtos

O número de produtos considerados no problema é outra característica importante que afeta a modelagem e a complexidade computacional dos problemas de planejamento da produção. Os problemas de dimensionamento de lotes podem considerar a produção de um único item ou de vários itens. .brahimi2006 discutem os problemas com um único item e .maes1988 apresentam uma revisão dos modelos que consideram vários itens.

Capacidade

Os problemas de dimensionamento de lotes podem conter restrições de capacidade ou não. Os modelos que consideram restrições de capacidade são mais ajustados a realidade. .quadt e .brahimi2006 trazem uma revisão dos problemas de dimensionamento de lotes que consideram restrições de capacidade e suas extensões.

Demanda

A demanda pode ser considerada estática, ou seja, não muda ao longo do tempo, é constante.

Ou pode ser dinâmica, que significa que o seu valor muda no tempo. Se o valor da demanda é conhecido, seja ele estático ou dinâmico, dizemos que a demanda é determinística. Se a demanda não é conhecida, mas os valores são determinados por alguma distribuição de probabilidade, dizemos que a demanda é estocástica.

Estrutura de Preparo

Há duas estruturas de preparo: simples e complexa. A estrutura de preparo simples acontece quando os custos ou tempos de preparo são independentes da sequência de produção dos itens. Essa estrutura é conhecida na literatura como *preparo independente da sequência*. Na estrutura de preparo complexa os custos ou tempos de preparo são dependentes da sequência, chamado de *preparo dependente da sequência*.

No preparo dependente da sequência existem outras características a serem consideradas. .drex1997 e .suerie2006 propõem modelos permitindo que o preparo comece e termine em períodos diferentes, chamados de preparo *Cross Over* (Figura 5). .soxgao1999 considera o caso em que a produção de um item pode começar num período e terminar no período seguinte sem a necessidade de novo preparo entre períodos, chamado preparo *Carry Over* (Figura 5). .erdirik abordam o problema de dimensionamento de lotes com preparo dependente da sequência *cross over* e *carry over*.

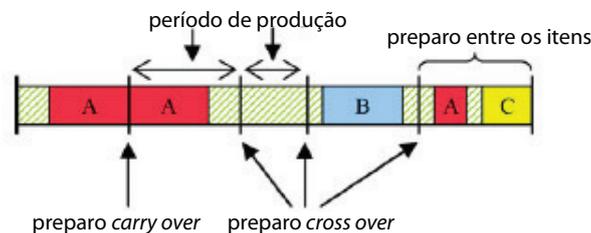


Figura 5: Estrutura de Preparo - Figura adaptada de .maravelias2008

Outras características podem ser levadas em conta para classificar os problemas de dimensionamento de lotes tais como: o número máquinas, problemas estendidos, entre outros. .glockgroseries2013 apresentam uma revisão bibliográfica dos cem anos de dimensionamento de lotes.

Os primeiros estudos de problemas de dimensionamento de lotes ocorreram com o *Economic Order Quantity* (EOQ) em 1913 (.harris), que consiste num modelo sem restrição de capacidade e com um único item. A demanda é estacionária, ou seja, ocorre continuamente com uma razão constante. Os períodos de tempo são contínuos e o horizonte de planejamento é infinito. Posteriormente, surgiram novos modelos mais ajustados à realidade. Em 1950 surgiu o *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP), que considera restrições de capacidade e vários itens. A demanda também é estacionária e os períodos de tempo são contínuos com um hori-

zonte de planejamento infinito. .wagner apresentam um modelo que difere dos anteriores pelo fato de considerar um horizonte de planejamento finito dividido em vários períodos discretos, e supondo que a demanda é conhecida em cada período e pode variar, ou seja, supõe-se uma demanda dinâmica.

O presente trabalho está direcionado aos problemas de dimensionamento de lotes com as seguintes características:

- horizonte de planejamento finito;
- demanda determinística;
- com restrição de capacidade;
- multi-itens;
- mono-estágio;
- estrutura de tempo/custo de preparação complexa;
- uma máquina.

Um modelo de dimensionamento de lotes com essas características é o modelo denominado CLSP (*capacitated lotsizing problem*) (Trigeiro1989). Os parâmetros e variáveis descritos na Tabela 1 são usados na descrição do modelo CLSP.

Parâmetros e Índices:	
J	número total de itens;
T	número total de períodos;
j	1 ... J;
t	1 ... T;
h_j	custo de estocar uma unidade do item j ;
ct_j	custo de preparo da máquina para o item j ;
d_{jt}	demanda do item j no período t ;
p_j	tempo de produção de uma unidade do item j ;
C_t	capacidade da máquina no período t ;
M	número muito grande.
Variáveis:	
I_{jt}	quantidade do item j em estoque no final do período t ;
x_{jt}	quantidade produzida do item j no período t ;
y_{jt}	$\begin{cases} 1, & \text{se houve preparo da máquina para o item } j \text{ no período } t; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Tabela 1: Parâmetros e Variáveis do Modelo CLSP

O modelo CLSP é descrito por (2.1) - (2.5):

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (h_j I_{jt} + ct_j y_{jt}) \quad (2.1)$$

sujeito a:

$$I_{j,t-1} + x_{jt} - d_{jt} = I_{jt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^J a_j x_{jt} \leq K_t, \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.3)$$

$$x_{jt} \leq M y_{jt}, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T; \quad (2.4)$$

$$y_{jt} \in \{0, 1\}, \quad I_{jt} \geq 0 \quad x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, J; \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.5)$$

A função objetivo (2.1) minimiza o custo total de estoque e de preparo. As restrições (2.2) são chamadas de restrições de balanceamento entre estoque e produção. Essas restrições garantem o atendimento da demanda em cada período t . As restrições (2.4) impõem que só haverá produção caso a máquina esteja preparada. As restrições (2.3) garantem que o tempo de produção não ultrapasse a capacidade da máquina. E por fim, as restrições (2.5) definem o domínio das variáveis.

2.2 Problemas de Sequenciamento da Produção

O problema de sequenciamento de produtos consiste em estabelecer a sequência em que os produtos que devem ser produzidos em uma ou mais máquinas. O problema de sequenciamento é discutido por exemplo em .pinedo1995. Existe uma nomenclatura própria para descrever problemas de sequenciamento, formada a partir do preenchimento de três campos. Para as características das máquinas é definido o campo α , para as características das operações e recursos o campo β e o critério de otimização é definido o campo γ . Essa notação é conhecida como notação de três campos $\alpha|\beta|\gamma$. Na Tabela 2 são exibidos exemplos de configurações para os campos $\alpha|\beta|\gamma$.

Campo α	
1	máquina única;
Pm	máquinas paralelas idênticas;
Qm	máquinas paralelas uniformes;
Rm	máquinas paralelas não relacionadas;
J	<i>job shop</i> ;
F	<i>flow shop</i> .
Campo β	
r_j	presença de data de liberação;
d_j	presença de datas de entrega;
s_{ij}	presença de tempo de preparo dependente da sequência.
Campo γ	
C_{max}	duração total da programação - <i>makespan</i> ;
L_{max}	maior diferença da pontualidade das tarefas;
T_{max}	maior atrasa das tarefas;
Π	custo mínimo;
Π'	soma mínima de custo de atraso e estoque.

Tabela 2: Opções para os campos da notação $\alpha|\beta|\gamma$.

Por exemplo, a notação $1|s_{ij}|C_{max}$ designa um problema que tem uma máquina com preparo dependente da sequência e o objetivo é minimizar a duração total da programação. A classificação de três campos pode acomodar quaisquer elementos desejados, podendo haver mais de uma informação nos campos. O presente trabalho tem a seguinte classificação de três campos: $1|s_{ij}|\Pi'$, ou seja, será estudado um ambiente de produção com uma única máquina, considerando a estrutura de preparo dependente da sequência e o com objetivo de minimizar o custo

de atraso, estoque e troca.

Um *job shop* clássico é um ambiente de produção com n tarefas e m máquinas, em que cada tarefa é processada nas m máquinas, de acordo com um roteiro prestabelecido. O ambiente de produção *flow shop* é um caso particular do ambiente *job shop*, em que as n tarefas tem o mesmo roteiro nas m máquinas. Quando a sequência das tarefas é a mesma em todas as máquinas, tem-se um *flow shop* permutacional. Existem diversas variantes dos problemas básicos de *job shop* (*flow shop*): *job shop* com número distinto de operações por tarefa, com interrupção, com instantes de disponibilidade distintos, flexível entre outras. A quantidade de trabalhos relacionados a esse assunto mostra a importância dos problemas de sequenciamento. O estudo do sequenciamento da produção é útil na investigação da melhor estratégia para modelar as decisões associadas ao sequenciamento no problema integrado. .blazewicz1991 e .keha2009 apresentam uma revisão bibliográfica de modelos de otimização para o problema de sequenciamento.

2.3 Problemas Integrados de Dimensionamento e Sequenciamento

A incorporação do sequenciamento da produção em modelos de dimensionamento de lotes tem sido objeto de estudo de diversos autores devido as questões importantes na produção industrial, que tem considerável influência na produtividade (.clark2011). O problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção (PIDS) consiste em determinar simultaneamente a quantidade a ser produzida, em que máquina, em que período e em que ordem.

Duas estratégias principais tem sido usadas para modelar as decisões de sequenciamento. A primeira é denominada estratégia *small bucket* e cada período do horizonte de planejamento é dividido em subperíodos (ou micro-período). Para cada subperíodo somente o lote de um item pode ser produzido. Essa estratégia é baseada no modelo GLSP (*General Lotsizing and Scheduling Problem*) .fleischmann1997. A segunda estratégia é denominada *big bucket* e permite a produção de vários tipos de itens num dado período. Para obter o sequenciamento da produção, restrições baseadas no Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico (PCVA) são adicionadas ao modelo de dimensionamento de lotes.

2.3.1 Estratégia *Small Bucket*

Na estratégia *Small Bucket* apenas um item é produzido por subperíodo e os subperíodos considerados são de curta duração (dias, horas, turnos). Logo, ao se determinar o lote de

produção de cada período, está sendo determinado o momento que cada produto será produzido, ou seja, a sequência de produção, além do tamanho dos lotes. Fleishmann e Meyr (1997) apresentam um modelo *big bucket* (vários itens podem ser produzidos em um mesmo período) onde os períodos (macro períodos) são divididos em períodos menores (sub-períodos), e nos sub-períodos apenas um item pode ser produzido por vez. O lote de produção é definido em termos dos subperíodos s pertencentes aos conjuntos S_t , que são os conjuntos dos subperíodos do período t . A produção do item j no período t é a soma do que foi produzido daquele item em cada subperíodo s do período t . No máximo um item pode ser produzido por subperíodo, assim pode-se saber exatamente o que será produzido em cada subperíodo e, portanto, a sequência de produção de cada período. O tamanho de cada subperíodo é dado pela quantidade produzida no subperíodo. O modelo GLSP é apresentado pelas expressões (2.6) - (2.12).

Modelo GLSP

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{j=1}^J \sum_{s \in S_t} s_{ij} z_{ijs} \quad (2.6)$$

sujeito a:

$$I_{j,t-1} + \sum_{s \in S_t} x_{js} - d_{jt} = I_{jt}, \quad j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T. \quad (2.7)$$

$$a_j x_{js} \leq C_t y_{js}, \quad j = 1, \dots, J, s \in S_t. \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{s \in S_t} a_j x_{js} \leq C_t \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^J y_{js} = 1, \quad s \in S_t. \quad (2.10)$$

$$z_{ijs} \geq y_{is} + y_{j,s-1} - 1, \quad i, j = 1, \dots, J, s \in S_t. \quad (2.11)$$

$$y_{js} \in \{0, 1\}, z_{ijs}, I_{jt}, x_{js} \geq 0, \quad j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T, s \in S_t. \quad (2.12)$$

A função objetivo (2.6) minimiza os custos de estoque e troca. As restrições de balanceamento de estoque são as restrições (2.7) e as restrições (2.8) controlam o preparo da máquina, ou seja, só há produção do item j no subperíodo s se a máquina estiver preparada para isso. As restrições (2.9) controlam o uso da capacidade da máquina. Neste modelo é exigido que a máquina esteja preparada para um e apenas um item em cada sub-período, o que é garantido pelas restrições (2.10). As restrições (2.11) garantem que as trocas entre itens entre os sub-períodos sejam contadas. As restrições (2.12) são as restrições de domínio das variáveis.

O modelo GLSP tem sido a base para o estudo do problema PIDS em diversos contextos

indústrias: fundição (.araujo2007), bens de consumo como fraldas e lenços (.kawamura2010), produtos químicos (.cunha2010), bebidas (.toledo2007) e .ferreira2009), baldo (2014), entre outros.

2.3.2 Estratégia *Big Bucket*

Os modelos do tipo *big bucket* permitem a produção de mais de um tipo de item no mesmo período. Nessa seção apresentamos diversos modelos que usam essa estratégia. As decisões associadas ao dimensionamento de lotes são baseadas no *Capacitated Lot Sizing Problem* (CLSP) (Seção 2.1). Para modelar a decisão de sequenciamento adaptamos as restrições do PCVA.

Vamos considerar como critério de otimização a minimização do custo total levando em conta o custo de estoque, de atraso e de troca entre os itens, conforme descrito em (2.13).

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} s_{ij} z_{ijt} \quad (2.13)$$

As restrições de dimensionamento de lotes são definidas por (2.14)-(2.16) e são similares às (2.7) - (2.9). A restrição (2.14) representam a conservação de fluxo de cada item em cada período. As restrições (2.15) impõem que a capacidade da máquina seja respeitada em cada período. As restrições (2.16) garantem que haverá produção do item j somente se a máquina estiver preparada. Note que a variável de *setup* é considerada de maneira implícita em termos da variável de troca.

Dimensionamento de Lotes:

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad \forall j, \forall t \quad (2.14)$$

$$\sum_{j \in J} p_j x_{jt} + \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt} \leq C_t, \quad \forall t \quad (2.15)$$

$$x_{jt} \leq \frac{C_t}{p_{jt}} \left(\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J z_{ijt} \right), \quad \forall j, \forall t \quad (2.16)$$

As restrições (2.17)-(2.21) modelam a ordem em que os itens serão produzidos no período t , e são baseadas nas restrições do PCVA. As restrições (2.17) consideram que em cada período a máquina está inicialmente preparada para o item fantasma i_0 . Os custos de troca associados ao item fantasma são zero e não interferem na solução final. As restrições (2.18) conservam o fluxo e asseguram que se há troca de um item i para qualquer item k então há troca do item k para um item j . As restrições (2.19) garantem que cada item j é produzido no máximo uma

vez em cada período t .

As restrições (2.17) e (2.19) associadas às restrições de designação do PCVA, sozinhas podem gerar subrotas, ou seja, subsequências desconexas. Assim não temos como determinar qual a sequência de produção dos itens. Para impedir subsequências desconexas incluímos as restrições (2.20). Finalmente as restrições (2.21) definem o domínio das variáveis.

Sequenciamento:

$$\sum_{j \in J} z_{i_0jt} \geq \sum_{i=i_0}^J z_{ikt}, \quad \forall k \in J; k \neq i, \forall t \quad (2.17)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^J z_{kjt}, \quad \forall k \in J, \forall t \quad (2.18)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt} \leq 1, \quad \forall i = i_0, 1, \dots, J, \forall t \quad (2.19)$$

$$\text{Restrições de eliminação de subsequências} \quad (2.20)$$

$$x_{jt} \geq 0, z_{ijt} = 0/1, \quad \forall i, j; \forall t. \quad (2.21)$$

Em Oncan2009 diversas formulações para o PCVA são apresentadas. Elas diferem entre si na formulação das restrições usadas para a eliminação de subrotas. Estas restrições podem ser usadas para formular as restrições (2.20) para a eliminação de subsequências desconexas. Os autores propõem neste artigo uma hierarquia entre as formulações comparando os poliedros associados a cada formulação (Figura 6). As formulações em destaques são as utilizadas no presente trabalho.

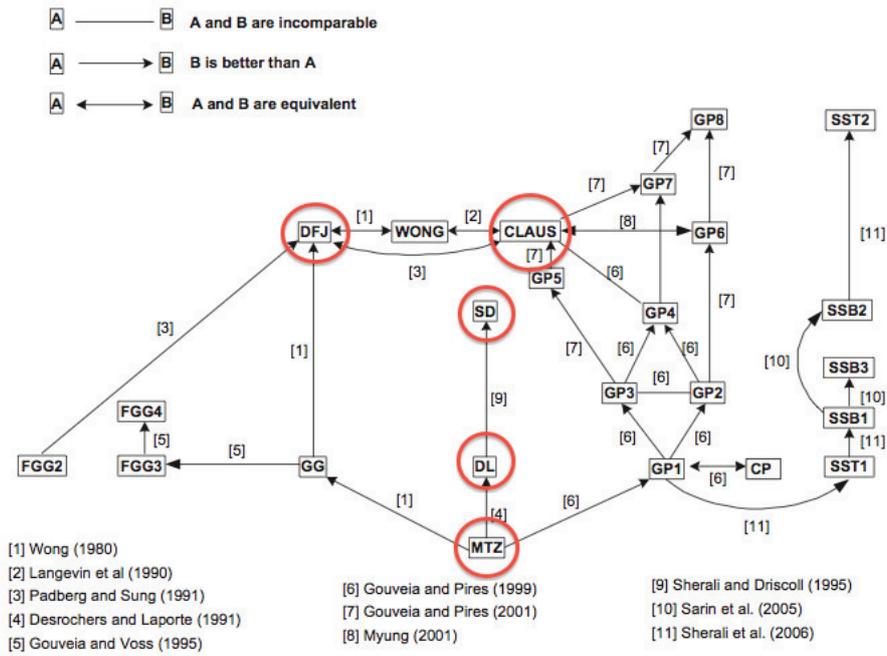


Figura 6: Grafo de relação entre os poliedros associado a cada formulação PCVA (.Oncan2009)

Capítulo 3

Reformulação das Decisões de Sequenciamento

Este Capítulo é dedicado ao estudo de diversas reformulações das decisões de sequenciamento associadas ao PIDS. No Capítulo 2 foi apresentada duas maneiras de modelar o problema de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção, uma classificada como *small bucket*, baseada no modelo GLSP (*General lot sizing and problem*) de Fleishmann e Meyer (1994) e a segunda maneira baseada na integração do modelo CLSP com o modelo do PCVA. Nesse Capítulo discutiremos sobre o uso de seis formulações do PCVA no PIDS. Após a apresentação dos seis novos modelos para o PIDS, Seção 3.2, os modelos propostos são estudados do ponto de vista teórico e mostramos qual a relação existente entre cada um deles do ponto de vista de qualidade de formulação.

3.1 Modelos Propostos

Os modelos apresentados a seguir são todos do tipo *big bucket*, ou seja, cada período tem tamanho suficiente para produzir mais de um item (Haase e Kimms (2000)). As decisões associadas ao dimensionamento de lotes são baseadas no *Capacitated Lot Sizing Problem* (CLSP) e para modelar as decisões de sequenciamento adapta-se as restrições associadas ao PCVA.

O modelo base já foi apresentado em seções anteriores, mas para melhor manuseio do trabalho será novamente descrito nessa seção. O modelo PIDS baseado na estratégia *big bucket* é dado por (3.1) - (3.9).

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} s_{ij} z_{ijt} \quad (3.1)$$

Dimensionamento de Lotes:

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad \forall j, \forall t \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in J} p_j x_{jt} + \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt} \leq C_t, \quad \forall t \quad (3.3)$$

$$x_{jt} \leq \frac{C_t}{p_{jt}} \left(\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J z_{ijt} \right), \quad \forall j, \forall t \quad (3.4)$$

Sequenciamento:

$$\sum_{j \in J} z_{i_0jt} \geq \sum_{i=i_0}^J z_{ikt}, \quad \forall k \in J; k \neq i, \forall t \quad (3.5)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^J z_{kjt}, \quad \forall k \in J, \forall t \quad (3.6)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt} \leq 1, \quad \forall i = i_0, 1, \dots, J, \forall t \quad (3.7)$$

$$\text{Restrições de eliminação de subsequências} \quad (3.8)$$

$$x_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0; z_{ijt} = 0/1, \quad \forall i, j; \forall t. \quad (3.9)$$

O foco do presente trabalho é o estudo de formulações para as restrições (3.8) de eliminação de subsequência. Alguns artigos se dedicaram a apresentar uma revisão da literatura para as diversas formulações para o PCVA, por exemplo, Oncam et al. (2009), Orman et al. (2000). Esses modelos diferem entre si na formulação das restrições de eliminação de subsequência. Nas Seções 3.1.1 - 3.1.6 apresentamos seis modelos para o PIDS baseados respectivamente nas formulações MTZ, DL, SD, SFJ, SCF, MCF para o PCVA. Cada modelo será denominado da seguinte maneira, AB1S1M, onde AB indica qual tipo de restrição de eliminação de subsequência está sendo usada, 1S, indica tratar-se de um problema de um único estágio (*one stage*), e por fim, 1M, indica um ambiente com uma única máquina (*one machine*).

3.1.1 Modelo MTZ1S1M

O primeiro modelo proposto é denominado MTZ1S1M, nele usam-se as restrições do CLSP concomitantemente com as restrições da designação e as restrições de eliminação de subsequência proposta por Miller et al. (1960). Para modelar o MTZ1S1M são necessárias variáveis auxiliares, definida nesse modelo por U_{it} , que indica a ordem que o item i será produzido no período t . O modelo MTZ1S1M é definido por (3.1) - (3.7), (3.10) e (3.11). O modelo completo

por ser encontrado no Anexo Modelos Propostos.

$$u_{jt} \geq u_{it} + 1 - J + Jz_{ijtx}; \quad i, j = 1, \dots, J; \quad i \neq j; \quad t = 1, \dots, T \quad (3.10)$$

$$J \geq u_{it} \geq 1; x_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0; z_{ijtx} = 0/1, \quad \forall i, j; \forall t. \quad (3.11)$$

O uso das restrições MTZ é comum na literatura, muitos autores usam essas restrições na formulação do PIDS em diversos contextos industriais, tais como, bebidas (tamara, defalque, ferreira), ração animal (toso); vidro (almada-lobo), (Guimaraes). Nos trabalhos de Orman () e Oncan () as restrições MTZ são analisadas no contexto do PCVA. Eles concluem que as restrições de MILLER são as que produzem o pior valor para a relaxação linear. A fraqueza das restrições MTZ, no contexto do PCVA, já foi demonstrada por Padberg and Sung, Langevin, Desrochers e Laporte. Na Seção 3.2 será discutida a qualidade da restrição MTZ no contexto do PIDS.

3.1.2 Modelo DL1S1M

O que chama atenção da restrições do tipo MTZ é o fato de serem polinomiais e assim podem ser todas incluídas *a priori* na formulação. Porém, o limite dual associado, a relaxação linear, é muito fraco. Com o intuito de obter melhores limitantes mas sem perder a característica polinomial, diversos autores propuseram novas restrições de eliminação de subsequências baseadas nas restrições MTZ. laporte1991 propõem uma nova classe de inequações para eliminação de subsequências, obtidas a partir das restrições MTZ, para obter uma formulação mais forte para o PCVA. O processo de projeção inversa (*lifting*) é aplicado às restrições MTZ para obter inequações válidas mais fortes. Usando a mesma técnica é possível obter inequações válidas mais fortes para o modelo MTZ1S1M.

As restrições MTZ de eliminação de subsequências (??) podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$u_{it} - u_{jt} + (J - 1)z_{ijtx} \leq J - 2 \quad \forall t, i, j = 1, \dots, J; \quad i \neq j. \quad (3.12)$$

Deseja-se construir uma inequação válida para o modelo MTZ1S1M incluindo a variável z_{jit}^{II} com o coeficiente α_{jit} em (3.12) (técnica de projeção reversa).

$$u_{it} - u_{jt} + (J - 1)z_{ijtx} + \alpha_{jit}z_{jit} \leq J - 2 \quad \forall t, i, j = 1, \dots, J; \quad i \neq j. \quad (3.13)$$

Para tal, deve-se encontrar o maior valor que o coeficiente α_{jit} pode assumir para que a inequação (3.13) continue válida para o modelo MTZ1S1M. Este valor é obtido resolvendo o problema

de otimização (3.14) - (3.15).

$$\text{Max } Z = \alpha_{jit} \quad (3.14)$$

sujeito a:

$$\alpha_{jit} z_{jit} \leq J - 2 - u_{it} + u_{jt} - (J - 1) z_{ijt} \quad \forall t, i, j. \quad (3.15)$$

Considera-se dois casos quando o problema de otimização (3.14)-(3.15) é resolvido:

- $z_{jit}^{II} = 0$
- $z_{jit}^{II} = 1$

Se $z_{jit}^{II} = 0$, então o seguinte problema de maximização é obtido:

$$\text{Max } Z = \alpha_{jit} \quad (3.16)$$

sujeito a:

$$0 \leq J - 2 - u_{it} + u_{jt} - (J - 1) z_{ijt}, \quad \forall t, i, j. \quad (3.17)$$

Portanto para qualquer valor de α_{jit} , a inequação (3.13) é válida para MTZ1S1M.

Se $z_{jit} = 1$ então $z_{ijt} = 0$ (por (2.19), o seguinte problema tem que ser resolvido:

$$\text{Max } Z = \alpha_{jit} \quad (3.18)$$

sujeito a:

$$\alpha_{jit} \leq J - 2 - u_{it} + u_{jt}, \quad \forall t, i, j. \quad (3.19)$$

Contudo, sabe-se que se $z_{jit} = 1$, então o item i é produzido após o item j , então a inequação (3.20) é válida para o poliedro associado a MTZ1S1M.

$$u_{it} = u_{jt} + 1. \quad (3.20)$$

Assim, substituindo (3.20) em (3.19), obtemos o seguinte problema de otimização:

$$\text{Max } Z = \alpha_{jit} \quad (3.21)$$

sujeito a:

$$\alpha_{jit} \leq J - 3, \quad \forall t, i, j. \quad (3.22)$$

Como o problema é de maximizar, o maior valor que o coeficiente α_{jit} pode receber é $J - 3$. Obtendo a inequação (3.23), que é válida para MTZ1S1M.

$$u_{it} - u_{jt} + (J - 1)z_{ijt} + (J - 3)z_{jit} \leq J - 2 \quad \forall t, i, j = 1, \dots, J; \quad i \neq j. \quad (3.23)$$

Se o mesmo argumento é usado para fazer a projeção reversa das variáveis $z_{jio t}$ e z_{iojt} na restrição $1 \leq u_{jt} \leq J - 1$, obtém-se a seguinte inequação (3.24):

$$1 + (J - 2)z_{jio t} \leq u_{jt} \leq J - 1 - (J - 2)z_{iojt}, \quad \forall t, i, j. \quad (3.24)$$

Mas supondo que $z_{jio t} = 1$ e $z_{iojt} = 1$, ou seja, que houve produção de apenas um item no período t , então obtém-se:

$$J - 1 \leq u_{jt} \leq 1 \quad (3.25)$$

O que é um absurdo. Ou seja a técnica de projeção reversa aplicada às restrições de caixa associadas às variáveis u_{it} não produzem inequações válidas para o modelo MTZ1S1M como no caso do PCVA descrito em laporte1991. O modelo DL1S1M é então formado por (2.13) - (2.19), (??) e (3.23). maldonado2011 discutem a aplicação das inequações (3.23) no contexto de uma fábrica de refrigerante.

3.1.3 Modelo SD1S1M

.sherali, propõem uma nova classe de restrições de eliminação de subrotas para o PCVA a partir das restrições MTZ. Para isso, utilizam a técnica RLT - *Reformulation Linearization Technique*, proposta por sheraliadams. A mesma técnica RLT será aplicada para o modelo MTZ1S1M com a intenção de se obter uma formulação mais forte para o PIDS.

Considere a reformulação não linear para as restrições (??) da formulação MTZ1S1M:

$$u_{jt}z_{ijt} \leq (u_{it} + 1)z_{ijt} \quad \forall i, j, t \quad (3.26)$$

$$u_{jt}z_{iojt} \geq z_{iojt} \quad \forall j, t \quad (3.27)$$

$$u_{jt}z_{jio t} \leq (J)z_{jio t} \quad \forall j, t. \quad (3.28)$$

e o seguinte limite inferior e superior para a variável a u_{jt} :

$$1 \leq u_{jt} \leq J \quad \forall j, t \quad (3.29)$$

A formulação dada por (2.13)-(2.19), (??) e (3.26)-(3.29) será chamada MTZ1S1M2. Para aplicar a RLT ao MTZS1M2, reformula-se o modelo gerando novas restrições (Fase da Reformulação). A fase da reformulação é feita em dois passos. A fase de linearização é então aplicada aos termos não lineares de MTZ1S1M2 usando substituição de variáveis.

Fase de Reformulação

Passo 1 - Tome as restrições (2.19) e transforme-as em (3.30), já que $u_{kt} \geq 0$.

$$u_{it} \left[\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt} - 1 \right] \leq 0 \quad \forall i, t. \quad (3.30)$$

Agora considere as restrições (2.18) e (2.19). Juntas elas implicam (3.31), pois $u_{kt} \geq 0$.

$$u_{kt} \left[\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} - 1 \right] \leq 0 \quad \forall k, t. \quad (3.31)$$

Passo 2 - De acordo com (2.18) e (2.19) tem-se que $z_{ijt} + z_{jit} \leq 1 \forall i, j, t; i \neq j$. Isto é verdade desconsiderado o item fantasma i_0 . Então pode-se usar o limite inferior da variável u_{jt} definido em (3.29) para obter a inequação válida (3.32).

$$(u_{jt} - 1)(1 - z_{ijt} - z_{jit}) \geq 0 \quad \forall i \geq 1; \forall j \geq 1; i \neq j. \quad (3.32)$$

Usando o limite superior da variável u_{jt} dado em (3.29), podemos obter a seguinte inequação válida (3.33).

$$(J - u_{jt})(1 - z_{ijt} - z_{jit}) \geq 0 \quad \forall i \geq 1; \forall j \geq 1; i \neq j. \quad (3.33)$$

Fase de Linearização

Considere o seguinte conjunto de variáveis:

$$\lambda_{ijt} = u_{it} z_{ijt} \quad \forall i, j, t; i \neq j; \quad (3.34)$$

$$y_{ijt} = u_{jt} z_{ijt} \quad \forall i, j, t; i \neq j; \quad (3.35)$$

$$y_{ijt} = \lambda_{ijt} + z_{ijt} \quad \forall i, j, t; i \neq j. \quad (3.36)$$

Abrindo as restrições (3.30) e usando (3.28) e (3.34) um novo conjunto de inequações válidas é obtido:

$$\sum_{j=1}^J \lambda_{ij} + (J)z_{i0t} \leq u_{it}, \quad \forall i, t. \quad (3.37)$$

Com um argumento similar e usando as restrições (3.27) e (3.34), a linearização de (3.31) é dada por (3.38).

$$\sum_{i=1}^J \lambda_{ikt} + z_{i0kt} \leq u_{kt}, \quad \forall k, t. \quad (3.38)$$

Expandindo a inequação não linear válida (3.32) e usando a redefinição de variável dada por (3.34) e (3.35) tem-se a inequação linear válida (3.39).

$$\lambda_{ijt} + \lambda_{jit} \leq u_{jt} - (1 - z_{jit}), \quad \forall i \geq 1; \forall j \geq 1; i \neq j. \quad (3.39)$$

Com argumento similar e usando a redefinição de variável dada por (3.34)-(3.36) obtém-se de (3.33) a inequação válida (3.40).

$$u_{it} + (J - 1)z_{ijt} - (J)(1 - z_{jit}) \leq \lambda_{ijt} + \lambda_{jit}, \quad \forall i \geq 1; \forall j \geq 1; i \neq j. \quad (3.40)$$

Considere as restrições (3.41), domínio das variáveis.

$$u_{it} \geq 1; x_{ijt} \geq 0; z_{ijt} = 0 \text{ ou } 1 \quad \lambda_{ijt} \geq 0 \quad \forall i, j, t. \quad (3.41)$$

O modelo SD1S1M é definido por (2.13) - (2.19), pelas restrições de eliminação de subrotas (3.37) - (3.40) e pelo domínio de variáveis (3.41).

Proposição 3.1. *As restrições obtidas pela técnica RLT, (3.37) - (3.40), são mais fortes que as restrições clássicas MTZ, (??).*

Resultados de um estudo computacional comparando os modelo MTZ1S1M e SD1S1M são apresentados em CLAIO 2014.

3.1.4 Modelo DFJ1S1M

As inequações de eliminação de subrotas para o PCVA propostas por .dfj também são consideradas clássicas da literatura. Sabe-se que para o PCVA as inequações DFJ definem facetas do envoltório convexo e podem ser adicionadas gradualmente à formulação usando o método de planos de corte (.wolsey1998). As restrições (3.42) asseguram que no máximo $|S_r| - 1$ arestas podem ser consideradas no subgrafo da solução.

$$\sum_{i,j \in S_r} z_{ijt} \leq |S_r| - 1 \quad \forall t; S_r \subset \{1, \dots, J\}; 2 \leq |S_r| \leq J - 1 \quad (3.42)$$

O modelo DFJ1S1M é dado por (2.13) - (2.19), (2.21) e (3.42). Porém o número de possíveis subconjuntos S_r é da ordem 2^n ficando inviável a inclusão de todas *a priori*, por isso necessita de um algoritmo (Algoritmo 1) para inserir as restrições DFJ de forma dinâmica.

```

while Tempo < Tempo Total Limite do
  Passo 1. Resolve o Modelo (2.13)-(2.19);
  Passo 2. Detecta Subsequências;
  if Não há subsequência then
    | Pare
  end
  else
    | Gerar e inserir as restrições (3.42) no Modelo e volte ao Passo 1;
  end
end

```

Algorithm 1: Pseudo-código para resolver o PIDS usando o modelo DFJ1S1M (Adaptado de .deise2012)

.deise2012 apresentam uma formulação usando as restrições DFJ considerando o PIDS com sincronização de dois estágios no contexto de uma fábrica de refrigerante. .toso2005 usam as restrições DFJ no contexto da indústria de nutrição animal.

3.1.5 Modelo SCF1S1M

Outra classe de formulações para o PCVA são do tipo *network flow*. Onde variáveis que representam o fluxo de commodities através dos arcos são adicionadas e satisfazem restrições de conservação do fluxo. Gavish e Graves (1978) propôs a formulação *Single Commodity Flow* - (SCF). Na SCF variáveis contínuas scf_{ijt} são acrescentadas e descrevem o fluxo de uma commodity do vértice inicial para qualquer outro vértice. As restrições (3.43) - (3.46) podem ser incluídas no modelo *Big Bucket* para eliminar subrotas.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J scf_{jit} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J scf_{ijt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J z_{ijt}, \quad \forall i; \forall t; \quad (3.43)$$

$$\sum_{j=1}^J scf_{i_0jt} \leq J - 1 \quad \forall t; \quad (3.44)$$

$$scf_{ijt} \leq z_{ijt} \quad \forall i, j : i \neq j; \forall t; \quad (3.45)$$

$$scf_{ijt} \geq 0 \quad \forall i, j, t. \quad (3.46)$$

As restrições (3.43) garantem a conservação do fluxo. As restrições (3.44) obriga que no máximo uma commodity de cada item atravessará o arco inicial. E por fim, as restrições (3.45) afirmam que só poderá ter fluxo em arco existentes.

O modelo SCF1S1M é então descrito por (2.13) - (2.19) junto com (3.43) - (3.46).

3.1.6 Modelo MCF1S1M

A formulação do tipo *Multi Commodity Flow* - MCF, foi apresentada por .claus, a formulação. A ideia principal da formulação proposta é assegurar que, em qualquer período t , há sempre um caminho do produto inicial s para qualquer outro produto r no período t , obtendo assim o sequenciamento dos itens.

Para obter o modelo MCF1S1M, é necessário ajustar a formulação PCVA e definir um novo índice $r = \{1, \dots, J\}$, e um novo conjunto de variáveis. As variáveis contínuas, m_{rijt} , são usadas para formular as restrições de eliminação de subrotas baseadas na formulação *multi-commodity-flow* para o PCVA. A ideia dessa formulação é supor que há J *commodities* disponíveis no nó i_0 e uma demanda de uma unidade da *commodity* j no nó j . Se $m_{rijt} = 1$ então o fluxo da *commodity* r flui do nó i_0 para o nó r através do arco (i, j) (ver Figura 7). Em termos de sequência dos itens no período t , significa que se o produto r é incluído na sequência da produção, então o produto j sucede o produto i nesse sequenciamento.

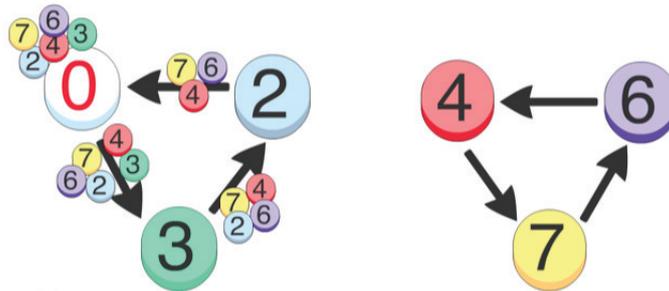


Figura 7: Representação da variável m_{rijt}

As restrições (3.47)-(3.50) eliminam subsequências desconexas dos itens. Como somente os itens que são produzidos (*i.e.* $x_{rt} > 0$ e $z_{ijt} = 1$) devem ser sequenciados, as restrições (3.47) e (3.48) são impostas somente quando a máquina está preparada para o item r , caso contrário, as restrições (3.50) zeram as variáveis de fluxo associadas. As restrições (3.47) garantem que todas as *commodities* requisitadas atravessarão o arco inicial (i_0, j) para algum j . Mas cada *commodity* será depositada no nó do item requisitado, assim quando o último arco (j, i_0) for incluído no circuito, nenhuma *commodity* estará mais disponível. As restrições (3.48) garantem a conversação do fluxo, ou seja, se a *commodity* r atravessar o arco (j, r) ela é depositada no nó r e não atravessará o arco (r, k) . As restrições (3.49) garantem que cada *commodity* será depositada apenas no nó requisitado, ou seja, quando a *commodity* r atravessar o arco (i, j) ela terá que atravessar também o arco (j, i') . As restrições (3.51) definem o domínio das variáveis.

$$\sum_{j \in J} m_{ri_0jt} - \sum_{j \in J} m_{rji_0t} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J z_{jrt}, \quad \forall r, \forall t \quad (3.47)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J m_{rjrt} - \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J m_{rrjt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J z_{jrt}, \quad \forall r, \forall t \quad (3.48)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J m_{rijt} = \sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J m_{rjit}, \quad \forall r, \forall j; j \neq r, \forall t \quad (3.49)$$

$$m_{rijt} \leq z_{ij} \quad \forall i, j = i_0, 1, \dots, J; \forall r; \forall t \quad (3.50)$$

$$x_{jt} \geq 0, m_{rijt} \geq 0, z_{ijt} = 0/1 \quad \forall i, j, r; \forall t. \quad (3.51)$$

O modelo MCF1S1M é então formado por (2.13) - (2.19) e (3.47) - (3.51). O modelo MCF1S1M é da ordem polinomial, contendo $JT(J^2 + 1)$ restrições de eliminação de subrotas. Apesar de apresentar um número polinomial de restrições esse número ainda é muito alto. Uma ideia para tratar a dificuldade computacional associada a esse número de restrições seria incluí-las de maneira dinâmica.

As Figura 8 apresenta um exemplo de como o modelo proposto impede uma solução que apresenta subrotas. Considerem a *commodity* $r = 4$ e as restrições (3.47) - (3.48):

$$\text{De (3.47)} \Rightarrow m_{403t} - m_{420t} = z_{64t} \Rightarrow 1 - 1 = 1 \text{ Absurdo!}$$

$$\text{De (3.48)} \Rightarrow m_{464t} - m_{447t} = z_{64t} \Rightarrow 0 - 0 = 1 \text{ Absurdo!}$$

Portanto a inclusão do conjunto de restrições (3.47) - (3.51) garante a eliminação de subrotas.

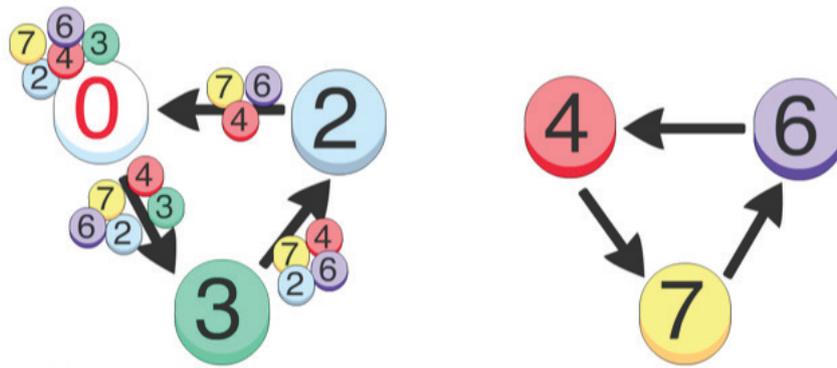


Figura 8: Representação de uma solução com subrota eliminada pelo modelo MCF1S1M

.socorroalstair usam as restrições MCF para modelar as decisões de sequenciamento na presença de tempos de *setups* não triangulares. No artigo de .guimaraes2014 considera-se as restrições MCF para um modelo para o PIDS na presença de *setup carryover*. .sarin2011 apresenta um modelo para o problema do .cheasepeake usando restrições do tipo MCF e obtém resultados bons para exemplares antes nunca resolvidos na literatura. .mathieuvan apresenta uma formulação do tipo MCF para o problema de dimensionamento de lotes com *fixed charges*. Em .maldonado2014 discute-se o uso do modelo MCF1S1M no contexto de uma fábrica de refrigerantes.

3.2 Equivalência entre os Modelos

ONCAN apresenta um organograma onde os vértices são as diversas formulações para o PCVA e as arestas indicam a relação entre os poliedros associados a cada formulação. O embasamento teórico para obtenção desse organograma é feito por estudos teóricos envolvendo técnicas de projeção CITACOES entre outras. A ideia usada foi obter o poliedro associado a cada formulação para o PCVA e verificar qual a relação entre eles.

Sabe-se que a eficiência dos métodos de enumeração depende da qualidade do limite dual associado a relaxação da formulação usada. De acordo com wolsey1998, uma das relaxações mais útil é a relaxação linear. É possível afirmar que dada duas formulações e o critério de minimização, aquela que produz valores maiores de relaxações é melhor. Outra maneira de se comparar a qualidade da relaxação entre duas formulações é através da informação dos poliedros associados a cada uma delas.

Proposição 3.2. *Sejam duas formulações diferentes para um problema, $F1$ e $F2$, definidas em termo de um mesmo conjunto de variáveis $x \in R^n$, e critério de otimização de minimizar. Sejam $P(F1)$ e $P(F2)$ os poliedros associados a cada formulação. Se $P(F1) \subset P(F2)$ então a*

formulação $F1$ é melhor que a formulação $F2$. Neste caso o valor da relaxação linear associado a formulação $F1$ é melhor ou igual que o valor da relaxação linear associado à formulação $F2$.

Diferentes formulações para um mesmo problema podem conter diferentes conjuntos de variáveis, como é o caso do problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção. Supondo que $F3$ seja uma formulação com diferentes conjuntos de variáveis. É possível projetar o poliedro $P(F3)$ de $F3$ no subespaço das variáveis de $F1$ sem perder nenhuma solução factível e comparar o valor da relaxação linear obtido com o poliedro projetado $TP(F3)$ ao $P(F2)$.

Proposição 3.3. *Sejam $F3$ uma formulação com diferentes conjuntos de variáveis e $P(F3) = \{(x, y) \in R^p \times R^q : Ax + By \leq b\}$ o poliedro associado a $F3$. A projeção de $P(F3)$ no subespaço das variáveis x é: $TP(F3) = \{x \in R^p : \exists y \in R^q \text{ com } (x, y) \in P(F3)\}$. Se $TP(F3) \subset P(F1)$, então $F3$ é uma formulação melhor que $F1$.*

Os valores das RL podem ser obtidos através da solução de instâncias dos modelos relaxados. No entanto, as relações de inclusão dos poliedros associados as formulações do PIDS tem que ser obtidas através de técnicas de projeção. Para poder comparar os poliedros, eles precisam estar no mesmo espaço de variáveis. Uma das técnicas a ser usadas para projetar as variáveis extras dos modelos é a Reformulação de Benders (SEÇÃO 1).

O modelo DFJ1S1M (Secção DFJ) é o único modelo que para eliminar as soluções com subsequência não foi necessário acrescentar variáveis auxiliares. Por isso, ele é considerado o modelo base, e todos os outros modelos propostos terão as variáveis auxiliares projetadas para o mesmo espaço de soluções factíveis do modelo DFJ1S1M.

Para estudar os poliedros dos modelos propostos na Seção 3.1, vamos escrever o modelo (3.1) - (3.9) na forma matricial.

Sejam $H_{1 \times JT}$ o vetor de custo de estoque, $G_{1 \times JT}$ o vetor de custo de atraso, $S_{1 \times (J+1)JT}$ o vetor de custo de troca, $\mathbf{0}_{1 \times JT}$ o vetor nulo que representa o custo de produção. E por fim, seja $\mathbf{0}$ o vetor nulo que representa o custo da variável auxiliar de cada modelo, como cada modelo tem uma variável auxiliar de diferente dimensão, a dimensão do vetor nulo não está definida *a priori*. Os vetores associados as variáveis de estoque, atraso, produção, troca e auxiliar são dados respectivamente por $\mathbf{I}_{JT \times 1}^+$, $\mathbf{I}_{JT \times 1}^-$, $\mathbf{x}_{JT \times 1}$, $\mathbf{z}_{(J+1)JT \times 1}$, \mathbf{va} .

Assim, pode-se escrever a função objetivo (??) na forma matricial (3.52):

$$\min \left([H_{1 \times JT} \quad G_{1 \times JT} \quad \mathbf{0}_{1 \times JT} \quad S_{1 \times (J+1)JT} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{JT \times 1}^+ \\ \mathbf{I}_{JT \times 1}^- \\ \mathbf{x}_{JT \times 1} \\ \mathbf{z}_{(J+1)JT \times 1} \\ \mathbf{va} \end{bmatrix} \right) \quad (3.52)$$

Sejam M_b^a os blocos de matrizes que formam a matriz A da forma padrão, onde o superíndice a indica a qual variável o bloco da matriz M está relacionado, e o subíndice b indica qual a dimensão da matriz M . Sejam $D_{JT \times 1}$ o vetor de demanda e $C_{T \times 1}$ o vetor de capacidade. O sinal \sim significa que cada estrutura de blocos do lado direito recebe um tipo de desigualdade ou até mesmo igualdade para cada restrição do problema. O conjunto de restrição (3.2) - (3.7) pode ser reescrito na forma matricial como (3.53).

$$\left(\begin{array}{ccccc} M_{JT \times JT}^{I^+} & M_{JT \times JT}^{I^-} & M_{T \times JT}^x & 0_{JT \times (J+1)JT}^z & 0^{va} \\ 0_{T \times JT}^{I^+} & 0_{T \times JT}^{I^-} & M_{T \times JT}^x & M_{T \times (J+1)JT}^z & 0^{va} \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & M_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z & 0^{va} \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & 0_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z & 0^{va} \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & 0_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z & 0^{va} \\ 0_{(J+1)T \times JT}^{I^+} & 0_{(J+1)T \times JT}^{I^-} & 0_{(J+1)T \times JT}^x & M_{(J+1)T \times (J+1)JT}^z & 0^{va} \\ 0_{J(J-1)T \times JT}^{I^+} & 0_{J(J-1)T \times JT}^{I^-} & 0_{J(J-1)T \times JT}^x & M_{J(J-1)T \times (J+1)JT}^z & M^{va} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{I}_{JT \times 1}^+ \\ \mathbf{I}_{JT \times 1}^- \\ \mathbf{x}_{JT \times 1} \\ \mathbf{z}_{J(J-1)T \times 1} \\ \mathbf{va} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c} D_{JT \times 1} \\ C_{T \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{1}_{(J+1)T \times 1} \\ b^{va} \end{array} \right) \quad (3.53)$$

As variáveis que serão projetadas são as variáveis auxiliares de cada modelo proposto, assim pode-se escrever *a priori*, o modelo PIDS da forma padrão $Ax + By \sim b$, onde a matriz que relaciona as variáveis auxiliares fica separada da matriz A . Portanto o modelo (3.52) - (3.53) pode ser escrito, sem perda de generalidade, da forma (3.54) - (3.55).

$$\min \left([H_{1 \times JT} \quad G_{1 \times JT} \quad \mathbf{0}_{1 \times JT} \quad S_{1 \times (J+1)JT}] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{JT \times 1}^+ \\ \mathbf{I}_{JT \times 1}^- \\ \mathbf{x}_{JT \times 1} \\ \mathbf{z}_{(J+1)JT \times 1} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{0va} \quad (3.54)$$

Sujeito a:

$$\left(\begin{array}{c} 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ M^{va} \end{array} \right) \mathbf{va} + \left(\begin{array}{ccccc} M_{JT \times JT}^{I^+} & M_{JT \times JT}^{I^-} & M_{T \times JT}^x & 0_{JT \times (J+1)JT}^z & \\ 0_{T \times JT}^{I^+} & 0_{T \times JT}^{I^-} & M_{T \times JT}^x & M_{T \times (J+1)JT}^z & \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & M_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z & \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & 0_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z & \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & 0_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z & \\ 0_{(J+1)T \times JT}^{I^+} & 0_{(J+1)T \times JT}^{I^-} & 0_{(J+1)T \times JT}^x & M_{(J+1)T \times (J+1)JT}^z & \\ 0_{J(J-1)T \times JT}^{I^+} & 0_{J(J-1)T \times JT}^{I^-} & 0_{J(J-1)T \times JT}^x & M_{J(J-1)T \times (J+1)JT}^z & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{I}_{JT \times 1}^+ \\ \mathbf{I}_{JT \times 1}^- \\ \mathbf{x}_{JT \times 1} \\ \mathbf{z}_{J(J-1)T \times 1} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c} D_{JT \times 1} \\ C_{T \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{1}_{(J+1)T \times 1} \\ b^{va} \end{array} \right) \quad (3.55)$$

Como discutido na Seção 1.3 a técnica de Decomposição de Benders fixa um conjunto de variáveis obtendo assim um subproblema linear, $Ax = b - B\bar{y}$. As variáveis a serem fixadas são as de estoque, I_{jt}^+ , atraso, I_{jt}^- , produção, x_{jt} e troca, z_{ijt} . Fixando as variáveis escolhidas, tem-se o seguinte subproblema primal na forma matricial:

$$[H_{1 \times JT}][\bar{\mathbf{I}}_{JT \times 1}^+] + [G_{1 \times JT}] + [\bar{\mathbf{I}}_{JT \times 1}^-] + [\mathbf{0}_{1 \times JT}][\bar{\mathbf{x}}_{JT \times 1}] + [S_{1 \times (J+1)JT}][\bar{\mathbf{z}}_{(J+1)JT \times 1}] + \min[\mathbf{0}][\mathbf{va}] \quad (3.56)$$

Sujeito a:

$$\begin{pmatrix} 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ M^{va} \end{pmatrix} \mathbf{va} \sim \begin{pmatrix} D_{JT \times 1} \\ C_{T \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{1}_{(J+1)T \times 1} \\ b^{va} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_{JT \times JT}^{I^+} & M_{JT \times JT}^{I^-} & M_{JT \times JT}^x & 0_{JT \times (J+1)JT}^z \\ 0_{T \times JT}^{I^+} & 0_{T \times JT}^{I^-} & M_{T \times JT}^x & M_{T \times (J+1)JT}^z \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & M_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & 0_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & 0_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z \\ 0_{(J+1)T \times JT}^{I^+} & 0_{(J+1)T \times JT}^{I^-} & 0_{(J+1)T \times JT}^x & M_{(J+1)T \times (J+1)JT}^z \\ 0_{J(J-1)T \times JT}^{I^+} & 0_{J(J-1)T \times JT}^{I^-} & 0_{J(J-1)T \times JT}^x & M_{J(J-1)T \times (J+1)JT}^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{I}}_{JT \times 1}^+ \\ \bar{\mathbf{I}}_{JT \times 1}^- \\ \bar{\mathbf{x}}_{JT \times 1} \\ \bar{\mathbf{z}}_{J(J-1)T \times 1} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Seja o dual do subproblema (3.56) - (3.57) dado por (3.58) - (3.59), na forma matricial.

$$\max \begin{pmatrix} D_{JT \times 1} \\ C_{T \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{0}_{JT \times 1} \\ \mathbf{1}_{(J+1)T \times 1} \\ b^{va} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_{JT \times JT}^{I^+} & M_{JT \times JT}^{I^-} & M_{JT \times JT}^x & 0_{JT \times (J+1)JT}^z \\ 0_{T \times JT}^{I^+} & 0_{T \times JT}^{I^-} & M_{T \times JT}^x & M_{T \times (J+1)JT}^z \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & M_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & 0_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z \\ 0_{JT \times JT}^{I^+} & 0_{JT \times JT}^{I^-} & 0_{JT \times JT}^x & M_{JT \times (J+1)JT}^z \\ 0_{(J+1)T \times JT}^{I^+} & 0_{(J+1)T \times JT}^{I^-} & 0_{(J+1)T \times JT}^x & M_{(J+1)T \times (J+1)JT}^z \\ 0_{J(J-1)T \times JT}^{I^+} & 0_{J(J-1)T \times JT}^{I^-} & 0_{J(J-1)T \times JT}^x & M_{J(J-1)T \times (J+1)JT}^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{I}}_{JT \times 1}^+ \\ \bar{\mathbf{I}}_{JT \times 1}^- \\ \bar{\mathbf{x}}_{JT \times 1} \\ \bar{\mathbf{z}}_{J(J-1)T \times 1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{JT}^1 \\ \lambda_T^2 \\ \lambda_{JT}^3 \\ \lambda_{JT}^4 \\ \lambda_{JT}^5 \\ \lambda_{(J+1)T}^6 \\ \lambda^7 \end{bmatrix}^t \quad (3.58)$$

Sujeito a:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{JT}^1 & \lambda_T^2 & \lambda_{JT}^3 & \lambda_{JT}^4 & \lambda_{JT}^5 & \lambda_{(J+1)T}^6 & \lambda^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ 0^{va} \\ M^{va} \end{pmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (3.59)$$

$$\lambda_{JT}^1 \text{ livre}; \lambda_T^2 \leq 0; \lambda_{JT}^3 \leq 0; \lambda_{JT}^4 \geq 0; \lambda_{JT}^5 \text{ livre}; \lambda_{(J+1)T}^6 \leq 0; \lambda^7 \sim \quad (3.60)$$

Isto é,

$$\max \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} (d_{ij} - I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^-) \lambda_{jt}^1 + \quad (3.61)$$

$$+ \sum_{t \in T} (C_t - \sum_{j \in J} p_j x_{jt} + \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt}) \lambda_{jt}^2 + \quad (3.62)$$

$$+ \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} (0 - x_{jt} - \frac{C_t}{p_j} \left(\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J z_{ijt} \right)) \lambda_{jt}^3 + \quad (3.63)$$

$$+ \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} (0 - \sum_{j \in J} z_{i_0jt} - \sum_{i=i_0}^J z_{ikt}) \lambda_{jt}^4 + \quad (3.64)$$

$$+ \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} (0 - \sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} - \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^J z_{kjt}) \lambda_{jt}^5 + \quad (3.65)$$

$$+ \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} (1 - \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt}) \lambda_{jt}^6 + \quad (3.66)$$

$$+ \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} b^{va} \lambda_{ijt}^7 \quad (3.67)$$

Sujeito a:

$$\lambda_{JT}^1 0^{va} \leq 0 \quad (3.68)$$

$$\lambda_T^2 0^{va} \leq 0 \quad (3.69)$$

$$\lambda_{JT}^3 0^{va} \leq 0 \quad (3.70)$$

$$\lambda_{JT}^4 0^{va} \leq 0 \quad (3.71)$$

$$\lambda_{JT}^5 0^{va} \leq 0 \quad (3.72)$$

$$\lambda_{(J+1)T}^6 0^{va} \leq 0 \quad (3.73)$$

$$\lambda^7 M^{va} \leq 0 \quad (3.74)$$

$$\lambda_{JT}^1 \text{ livre}; \lambda_T^2 \leq 0; \lambda_{JT}^3 \leq 0; \lambda_{JT}^4 \geq 0; \lambda_{JT}^5 \text{ livre}; \lambda_{(J+1)T}^6 \leq 0; \lambda^7 \sim \quad (3.75)$$

Analisando cada parcela da soma da função objetivo tem-se:

Parcela (3.61): $\sum_{t \in T} \sum_{j \in J} (d_{ij} - I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^-) \lambda_{jt}^1 = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} 0 \lambda_{jt}^1 \Rightarrow \lambda_{jt}^1 \text{ é livre} \Rightarrow \lambda_{jt}^1 = 0 \forall j, t$, pois a restrição de balanceamento de estoque é uma igualdade.

Parcela (3.62): $\sum_{t \in T} (C_t - \sum_{j \in J} p_j x_{jt} + \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt}) \underbrace{\lambda_{jt}^2}_{\leq 0} \Rightarrow \lambda_{jt}^2 = 0 \forall t$.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\leq 0}$

$$\text{Parcela (3.63): } \underbrace{\sum_{t \in T} \sum_{j \in J} \left(0 - x_{jt} - \frac{C_t}{p_j} \left(\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J z_{ijt} \right) \right)}_{\geq 0} \underbrace{\lambda_{jt}^3}_{\leq 0} \Rightarrow \lambda_{jt}^3 = 0 \quad \forall j, t$$

$$\text{Parcela (3.64): } \underbrace{\sum_{t \in T} \sum_{j \in J} \left(0 - \sum_{j \in J} z_{i_0jt} - \sum_{i=i_0}^J z_{ikt} \right)}_{\leq} \underbrace{\lambda_{jt}^4}_{\geq 0} \Rightarrow \lambda_{jt}^4 = 0 \quad \forall j, t$$

$$\text{Parcela (3.65): } \underbrace{\sum_{t \in T} \sum_{j \in J} \left(0 - \sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} - \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^J z_{kjt} \right)}_{=0} \lambda_{jt}^5 = \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} 0 \lambda_{jt}^5 \Rightarrow \lambda_{jt}^5 \text{ é livre} \Rightarrow \lambda_{jt}^5 =$$

$0 \quad \forall j, t$, pois a restrição associada é uma igualdade.

$$\text{Parcela (3.66): } \underbrace{\sum_{t \in T} \sum_{j \in J} \left(1 - \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt} \right)}_{\leq 0} \underbrace{\lambda_{jt}^6}_{\geq 0} \Rightarrow \lambda_{jt}^6 = 0 \quad \forall j, t$$

Portanto tem-se que $\lambda_t^2 = \lambda_{jt}^3 = \lambda_{jt}^4 = \lambda_{jt}^6 = 0 \quad \forall j, t$. E os valores de $\lambda_{jt}^1, \lambda_{jt}^5$ são livres, mas como as restrições associadas, (3.68) e (3.72) respectivamente, serão zeradas, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\lambda_{jt}^1 = \lambda_{jt}^5 = 0 \quad \forall j, t$. E o subproblema dual (3.61) - (3.75) pode ser reescrito como (3.76) - (3.78).

$$\max \mathbf{b}^{va} \lambda^7 \tag{3.76}$$

s.a.

$$\lambda^7 M^{va} \leq 0 \tag{3.77}$$

$$\lambda^7 \sim \tag{3.78}$$

Para os próximos passos da decomposição de Benders será necessário definir o subproblema primal e dual de cada um dos modelos propostos, mas o trabalho será menor, pois já se sabe que tanto o primal, quanto o dual sempre estarão apenas em função das restrições de eliminação de subsequências.

Sabemos que o problema mestre está em função das variáveis $x_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^-, z_{ijt}$. Quando essas variáveis são fixadas nós verificamos a existência ou não de subsequências. Caso não tenha subsequência nada precisa se feito, a solução é ótima. Se a solução tiver subsequências podemos afirmar que o primal é infactível, pois não satisfaz a restrição de eliminação de subsequências.

Pela teoria da Dualidade, o subproblema dual, nesse caso, é infactível ou tem solução ilimitada.

Olhando para o problema dual, é fácil observar que a solução 0 para todos os λ é factível, assim, pode-se afirmar que sempre que tiver subsequências o subproblema dual será ilimitado. Assim o corte gerado sempre será do tipo factível, aquele que é gerado com auxílio dos raios extremos. Para determinar os raios extremos do poliedro usa-se a seguinte propriedade apresentada por Padberg and Sung (1991):

Propriedade 3.1. *Um vetor $v = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1n}, \dots, v_{mn}\}$ define um raio extremo se e somente se $v_{ij} = \begin{cases} 1 & \forall (i, j) \in S \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ onde $S \subseteq V$ é o conjunto de vértice que pertencem a subsequência secundária.*

A seguir vamos apresentar a reformulação de Benders dos modelos MTZ1S1M...

MTZ1S1M

No modelo MTZ1S1M a restrição de eliminação de subsequência é dada por (3.79):

$$u_{jt} \geq u_{it} + 1 - J + Jz_{ijt}; \quad i, j = 1, \dots, J; i \neq j; t = 1, \dots, T \quad (3.79)$$

O subproblema primal:

$$\min 0u_{jt} \quad (3.80)$$

s.a.

$$u_{jt} - u_{it} \geq 1 - J + J\bar{z}_{ijt} \quad (3.81)$$

O subproblema dual (3.76) - (3.78) associado é dado por:

$$\max \sum_i \sum_j \sum_t (1 - J + J\bar{z}_{ijt}) \lambda_{ijt} \quad (3.82)$$

s.a.

$$\sum_{j=1} \lambda_{jit} - \sum_{j=2} \lambda_{ijt} \leq 1 \forall i, t. \quad (3.83)$$

Se com os valores de x_{jt} , I_{jt}^+ , I_{jt}^- , z_{ijt} fixados a solução não tiver subsequências o problema está na solução ótima. Caso contrário temos que obter o corte de raio extremo.

Se $z_{ijt} = 1$, então há troca do item i para o item j no período t . Se a solução tem

subsequência significa que existe uma subsequência S com i, j onde $z_{ijt} = 1$ e nessa rota não considera o item fantasma i_0 . De acordo com a propriedade de Padberg e Sung (1991), quando o $z_{ijt} = 1$ para $i, j \in S$ o componente do vetor de raio extremo associado a i, j , $v^{(ij)} = 1$, caso contrário recebe zero. Portanto, o corte de raio extremo será:

$$\sum_i \sum_j \sum_t v^{(ijt)} (1 - J - Jz_{ijt}) \leq 0 \quad (3.84)$$

Se $i, j \in S$ então $v^{(ijt)} = 1$ e obtém-se:

$$S - SJ + J \sum_{i,j \in S} z_{ijt} \leq 0 \rightarrow \sum_{i,j \in S} z_{ijt} \leq \frac{S(J-1)}{J}$$

Portanto o modelo MTZ1S1M, pode ser reformulado de acordo com a decomposição de Benders e ser escrito apenas em funções das variáveis originais.

O que nos dá o modelo MTZRB:

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} s_{ij} z_{ijt} \quad (3.85)$$

sujeito a:

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad \forall j, \forall t \quad (3.86)$$

$$\sum_{j \in J} p_j x_{jt} + \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt} \leq C_t, \quad \forall t \quad (3.87)$$

$$x_{jt} \leq \frac{C_t}{p_{jt}} \left(\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J z_{ijt} \right), \quad \forall j, \forall t \quad (3.88)$$

$$\sum_{j \in J} z_{i_0jt} \geq \sum_{i=i_0}^J z_{ikt}, \quad \forall k \in J; k \neq i, \forall t \quad (3.89)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^J z_{kjt}, \quad \forall k \in J, \forall t \quad (3.90)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt} \leq 1, \quad \forall i = i_0, 1, \dots, J, \forall t \quad (3.91)$$

$$\sum_{i,j \in S} z_{ijt} \leq \frac{S(J-1)}{J} \quad (3.92)$$

$$x_{jt} \geq 0, z_{ijt} = 0/1, \quad \forall i, j; \forall t. \quad (3.93)$$

Dessa maneira obtemos o modelo MTZ1S1M apenas em função das variáveis originais. Assim pode-se comparar o modelo reformulado MTZRB com o modelo DFJ1S1M.

Queremos mostrar que

$$|S| - 1 \leq \frac{S(J-1)}{J}$$

. Supondo, por absurdo que,

$$|S| - 1 > \frac{S(J-1)}{J} \rightarrow J|S| - J > J|S| - |S| \rightarrow -J > -|S| \rightarrow J < |S|$$

o que é um absurdo, pois por definição $|S| < J$. Portanto, podemos afirmar que o poliedro associado a formulação DFJ1S1M está contido no poliedro associado a formulação MTZ1S1M. O que conclui-se a formulação DFJ1S1M é mais forte que a formulação MTZ1S1M.

SCF1S1M

As restrições de eliminação de subsequências do tipo *single commodity flow* são:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J scf_{jit} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J scf_{ijt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J z_{ijt}, \quad \forall i; \forall t; \quad (3.94)$$

$$\sum_{j=1}^J scf_{i_0jt} \leq J - 1 \quad \forall t; \quad (3.95)$$

$$scf_{ijt} \leq z_{ijt} \quad \forall i, j : i \neq j; \forall t; \quad (3.96)$$

$$scf_{ijt} \geq 0 \quad \forall i, j, t. \quad (3.97)$$

O subproblema primal referente ao modelo SCF1S1M:

$$\min 0scf_{ijt} \quad (3.98)$$

s.a.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J scf_{jit} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J scf_{ijt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \bar{z}_{ijt}, \quad \forall i; \forall t; \quad (3.99)$$

$$\sum_{j=1}^J scf_{i_0jt} \leq J - 1 \quad \forall t; \quad (3.100)$$

$$scf_{ijt} \leq \bar{z}_{ijt} \quad \forall i, j : i \neq j; \forall t; \quad (3.101)$$

$$scf_{ijt} \geq 0 \quad \forall i, j, t. \quad (3.102)$$

A Função objetivo do subproblema dual associado é dado por:

$$\max \sum_t \sum_i \sum_j z_{ijt} \lambda_{ijt}^1 + \sum_t \sum_i \sum_j z_{ijt} \lambda_{ijt}^2 + (J - 1) \sum_t \lambda_t^3 \quad (3.103)$$

Novamente, se com os valores de x_{jt} , I_{jt}^+ , I_{jt}^- , z_{ijt} fixados a solução não tiver subsequências o problema está na solução ótima. Caso contrário temos que obter o corte de raio extremo.

Se $z_{ijt} = 1$, então há troca do item i para o item j no período t . Se a solução tem subsequência significa que existe uma subsequência S com i, j onde $z_{ijt} = 1$ e nessa rota não considera o item fantasma i_0 . De acordo com a propriedade de Padberg e Sung (1991), quando o $z_{ijt} = 1$ para $i, j \in S$ o componente do vetor de raio extremo associado a i, j , $v^{(ij)} = 1$, caso contrário recebe zero. Portanto, o corte de raio extremo será:

$$\sum_i \sum_j \sum_t v^{(ijt)} (z_{ijt} + z_{ijt} + (J-1)) \leq 0 \quad (3.104)$$

Se $i, j \in S$ o corte factível a ser gerado para esse caso terá a seguinte forma:

$$2 \sum_{i,j \in S,t} z_{ijt} + |S|J - |S| \leq 0 \rightarrow 2 \sum_{i,j \in S,t} z_{ijt} z_{ijt} \leq \frac{|S|(1-J)}{2}.$$

Assim o modelo SCF1S1M pode ser reformulado, por:

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} s_{ij} z_{ijt} \quad (3.105)$$

sujeito a:

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad \forall j, \forall t \quad (3.106)$$

$$\sum_{j \in J} p_j x_{jt} + \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt} \leq C_t, \quad \forall t \quad (3.107)$$

$$x_{jt} \leq \frac{C_t}{p_{jt}} \left(\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J z_{ijt} \right), \quad \forall j, \forall t \quad (3.108)$$

$$\sum_{j \in J} z_{i_0jt} \geq \sum_{i=i_0}^J z_{ikt}, \quad \forall k \in J; k \neq i, \forall t \quad (3.109)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^J z_{kjt}, \quad \forall k \in J, \forall t \quad (3.110)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt} \leq 1, \quad \forall i = i_0, 1, \dots, J, \forall t \quad (3.111)$$

$$\sum_{i,j \in S} z_{ijt} \leq \frac{|S|(1-J)}{2} \quad (3.112)$$

$$x_{jt} \geq 0, z_{ijt} = 0/1, \quad \forall i, j; \forall t. \quad (3.113)$$

Assim podemos comparar os poliedros associados aos modelos SCF1S1M e MTZ1S1M.

Queremos provar que

$$\frac{|S|(1-J)}{2} \leq \frac{|S|(J-1)}{J}$$

Supondo, por absurdo, que $\frac{|S|(1-J)}{2} > \frac{|S|(J-1)}{J} \rightarrow \frac{(1-J)}{2} > \frac{(J-1)}{J} \rightarrow J - J^2 >$

$2J - 2 \rightarrow J^2 + J - 2 < 0$, mas como J representa o número de itens, $J \geq 1$, se $J = 1$, ou seja, o menor valor que J pode assumir, temos que $0 < 0$, o que é um absurdo. Então, pode-se afirmar que o poliedro associado a formulação SCF1S1M está contido no poliedro associado a formulação MTZ1S1M, ou seja, a formulação SCF1S1M é mais forte que a formulação MTZ1S1M.

Comparando os poliedros associados aos modelo SCF1S1M e DFJ1S1M, temos:

$$|S| - 1 \geq \frac{|S|(1 - J)}{2}.$$

Ou seja, o poliedro associado ao modelo SCF1S1M é mais forte que o poliedro associado ao modelo DFJ1S1M. Assim podemos afirmar que SCF1S1M é mais forte que o DFJ1S1M que é mais forte que o MTZ1S1M.

MCF1S1M

A restrição de eliminação de subsequência é dada por:

$$\sum_{j \in J} m_{ri_0jt} - \sum_{j \in J} m_{rji_0t} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J z_{jrt}, \quad \forall r, \forall t \quad (3.114)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J m_{rjrt} - \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J m_{rrjt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J z_{jrt}, \quad \forall r, \forall t \quad (3.115)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J m_{rijt} = \sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J m_{rjit}, \quad \forall r, \forall j; j \neq r, \forall t \quad (3.116)$$

$$m_{rijt} \leq z_{ij} \quad \forall i, j = i_0, 1, \dots, J; \forall r; \forall t \quad (3.117)$$

O subproblema primal referente ao modelo MCF1S1M é dado por:

$$\min \sum_t \sum_r \sum_j \sum_i m_{rijt} \quad (3.118)$$

s.a.

$$\sum_{j \in J} m_{ri_0jt} - \sum_{j \in J} m_{rji_0t} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J z_{jrt} \quad \forall r, \forall t \quad (3.119)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J m_{rjrt} - \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J m_{rrjt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J z_{jrt}, \quad \forall r, \forall t \quad (3.120)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J m_{rijt} = \sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J m_{rjit}, \quad \forall r, \forall j; j \neq r, \forall t \quad (3.121)$$

$$m_{rijt} \leq z_{ij} \quad \forall i, j = i_0, 1, \dots, J; \forall r; \forall t \quad (3.122)$$

O subproblema dual será dado por:

$$\max \sum_t \sum_r \sum_j \lambda_{rt}^1 z_{jrt} + \sum_t \sum_r \sum_j \lambda_{rt}^2 z_{jrt} + \sum_t \sum_r \sum_j \sum_i \lambda_{rijt}^3 z_{ijt} \quad (3.123)$$

s.a.

$$\lambda_{rt}^1 z_{jrt} + \lambda_{rt}^2 z_{jrt} + \lambda_{rijt}^3 z_{ijt} + \lambda_{rijt}^4 \leq 0. \quad (3.124)$$

Assim, com os valores de x_{jt} , I_{jt}^+ , I_{jt}^- , z_{ijt} fixados a solução não tiver subsequências o problema está na solução ótima. Caso contrário temos que obter o corte de raio extremo.

Se $z_{ijt} = 1$, então há troca do item i para o item j no período t . Se a solução tem subsequência significa que existe uma subsequência S com i, j onde $z_{ijt} = 1$ e nessa rota não considera o item fantasma i_0 . De acordo com a propriedade de Padberg e Sung (1991), quando o $z_{ijt} = 1$ para $i, j \in S$ o componente do vetor de raio extremo associado a i, j , $v^{(rijt)} = 1$, caso contrário recebe zero. Portanto, o corte de raio extremo para o modelo MCF1S1M será:

$$\sum_r \sum_t \sum_j \sum_i v^{(rijt)} (z_{jrt} + z_{jrt} + z_{ijt}) \leq 0 \quad (3.125)$$

Assim, quando $i, j \in S$ temos que o corte extremo será:

$$3 \sum_{i,j \in S,t} z_{ijt} \leq 0 \quad (3.126)$$

Nessa caso o poliedro associado ao modelo MCF1S1M será o mais relaxado de todos os modelos. Na formulação do caixeiro viajante o lado direito do modelo MCF não depende da variável z_{ijt} , são apenas constantes 1 ou 0. Quando a formulação de multifluxo é aplicada ao problema de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção, o lado direito começou a depender da somatória da variável z . E além de tudo as restrições associadas ao multifluxo vieram na igualdade, o que pode dificultar a ainda mais na resolução dos problemas.

Outras técnicas poderiam ser escolhidas para mostrar a relação entre cada um dos poliedros associados, porém escolheu-se a decomposição de Benders pois pretende-se continuar o estudo de Benders e propor métodos de solução para o PIDS através de Benders.

Assim pode-se afirmar que entre os modelos polinomiais, o modelo SCF1S1M e o modelo MTZ1S1M são os que podem apresentar poliedros mais apertados, mas vale lembrar que todos ainda podem ser iguais.

Capítulo 4

Estudo Computacional

No Capítulo 3, apresentamos novos modelos para o problema integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção. Os modelos, para serem comparados, do ponto de vista teórico, precisam conter os mesmos tipos de variáveis. Para isso, usamos a decomposição de benders para projetar as variáveis que auxiliam na eliminação de subsequência. Assim comparamos os modelos e obtivemos uma hierarquia entre eles do ponto de vista de qualidade matemática. Nesse Capítulo vamos apresentar os resultados computacionais dos modelos propostos.

4.1 Geração das Instâncias

As instâncias usadas foram adaptadas de Almada Lobo et. al (2007). Todos os modelos foram implementados na sintaxe do AMPL e como *solver* de otimização utilizamos o CPLEX 12.6. Os elementos de cada instância foram gerados a partir de uma distribuição uniforme. Os intervalos usados para a geração dos dados são:

Número de Itens J :	$J \in \{15, 25\}$
Número de Períodos T :	$T \in \{5, 10, 15\}$
Custo de Estoque h_j :	$h_j = U[2, 9]$
Custo de Atraso g_j :	$g_j = U[20, 50]$
Custo de Troca s_{ij} :	$s_{ij} = \mu * b_{ij}$, com $\mu \in \{50, 100\}$
Tempo de Produção p_j :	$p_j = 1$
Tempo de Troca b_{ij} :	$b_{ij} = U[5, 10]$
Demanda d_{jt} :	$d_{jt} = U[40, 59]$
Capacidade C_t :	$C_t = \frac{\sum_{j \in J} d_{jt} * p_j}{Cut}$, com $cut \in \{0.6; 0.8\}$

Temos 24 combinações possíveis dos parâmetros $[J, T, \mu, cut]$, o que chamaremos de classe.

Dados	Valor RL	Tempo Computacional				
		MTZ	DL	SD	SCf	MCF
Ex(15,05,0.6,050)	120670	0.234	0.015	0.031	0.016	0.094
Ex(15,05,0.6,100)	120670	0.016	0.016	0.015	0.015	0.109
Ex(15,05,0.8,050)	54163	0.032	0.031	0.016	0.016	0.109
Ex(15,05,0.8,100)	54163	0.016	0.016	0.032	0.016	0.11
Ex(15,10,0.6,050)	443208	0.031	0.031	0.047	0.031	0.187
Ex(15,10,0.6,100)	443208	0.016	0.031	0.031	0.032	0.187
Ex(15,10,0.8,050)	199008	0.032	0.015	0.047	0.032	0.187
Ex(15,10,0.8,100)	199008	0.032	0.031	0.032	0.032	0.187
Ex(15,15,0.6,050)	970691	0.031	0.031	0.046	0.047	0.297
Ex(15,15,0.6,100)	970691	0.031	0.047	0.062	0.031	0.296
Ex(15,15,0.8,050)	435366	0.031	0.031	0.062	0.047	0.297
Ex(15,15,0.8,100)	435366	0.031	0.031	0.063	0.047	0.296
Ex(25,05,0.6,050)	197855	0.032	0.031	0.047	0.031	0.453
Ex(25,05,0.6,100)	197855	0.031	0.031	0.047	0.031	0.421
Ex(25,05,0.8,050)	84633	0.031	0.031	0.062	0.047	0.452
Ex(25,05,0.8,100)	84633	0.031	0.047	0.047	0.031	0.421
Ex(25,10,0.6,050)	721598	0.063	0.484	0.093	0.078	0.889
Ex(25,10,0.6,100)	721598	0.063	0.047	0.094	0.078	0.952
Ex(25,10,0.8,050)	308858	0.063	0.046	0.094	0.078	0.889
Ex(25,10,0.8,100)	308858	0.063	0.063	0.093	0.062	0.874
Ex(25,15,0.6,050)	1574900	0.078	0.078	0.141	0.11	1.341
Ex(25,15,0.6,100)	1574900	0.078	0.078	0.14	0.109	1.341
Ex(25,15,0.8,050)	673549	0.078	0.078	0.172	0.094	1.357
Ex(25,15,0.8,100)	673549	0.078	0.078	0.141	0.109	1.341

Tabela 3: Valor da Relaxação Linear

4.2 Resultados

Os testes foram realizados três tipos de testes: um para analisar o valor da relaxação linear obtida, um segundo teste para analisar o desempenho do modelo no nó raiz; e por fim, um teste no default do CPLEX com tempo de processamento limitado em uma hora. O objetivo dos testes foi analisar a qualidade dos modelos junto com os resultados teóricos e o desempenho computacional.

4.2.1 Relaxação Linear

O primeiro teste realizado foi para obter o valor da relaxação linear de cada instância para cada modelo. A Tabela 4.2.1 apresenta o valor da relaxação linear, observe que só temos uma coluna para todos os modelos, pois todos os exemplares obtiveram o mesmo valor em todos os modelos, porém o tempo computacional envolvido é o que difere de modelo para modelo.

Dados	Valor RL	Tempo				
		MTZ	DL	SD	SCF	MCF
Ex(15,05,0.6,050)	120670	0.234	0.015	0.031	0.016	0.094
Ex(15,05,0.6,100)	120670	0.016	0.016	0.015	0.015	0.109
Ex(15,05,0.8,050)	54163	0.032	0.031	0.016	0.016	0.109
Ex(15,05,0.8,100)	54163	0.016	0.016	0.032	0.016	0.110
Ex(15,10,0.6,050)	443208	0.031	0.031	0.047	0.031	0.187
Ex(15,10,0.6,100)	443208	0.016	0.031	0.031	0.032	0.187
Ex(15,10,0.8,050)	199008	0.032	0.015	0.047	0.032	0.187
Ex(15,10,0.8,100)	199008	0.032	0.031	0.032	0.032	0.187
Ex(15,15,0.6,050)	970691	0.031	0.031	0.046	0.047	0.297
Ex(15,15,0.6,100)	970691	0.031	0.047	0.062	0.031	0.296
Ex(15,15,0.8,050)	435366	0.031	0.031	0.062	0.047	0.297
Ex(15,15,0.8,100)	435366	0.031	0.031	0.063	0.047	0.296
Ex(25,05,0.6,050)	197855	0.032	0.031	0.047	0.031	0.453
Ex(25,05,0.6,100)	197855	0.031	0.031	0.047	0.031	0.421
Ex(25,05,0.8,050)	84633	0.031	0.031	0.062	0.047	0.452
Ex(25,05,0.8,100)	84633	0.031	0.047	0.047	0.031	0.421
Ex(25,10,0.6,050)	721598	0.063	0.484	0.093	0.078	0.889
Ex(25,10,0.6,100)	721598	0.063	0.047	0.094	0.078	0.952
Ex(25,10,0.8,050)	308858	0.063	0.046	0.094	0.078	0.889
Ex(25,10,0.8,100)	308858	0.063	0.063	0.093	0.062	0.874
Ex(25,15,0.6,050)	1574900	0.078	0.078	0.141	0.11	1.341
Ex(25,15,0.6,100)	1574900	0.078	0.078	0.14	0.109	1.341
Ex(25,15,0.8,050)	673549	0.078	0.078	0.172	0.094	1.357
Ex(25,15,0.8,100)	673549	0.078	0.078	0.141	0.109	1.341

As instâncias com os modelos MTZ1S1M, DL1S1M e SD1S1M obtêm a relaxação linear, em média, em 0.050, 0.059 e 0.069 segundos. As instância, quando testadas nos modelos de fluxo, SCF1S1M e MCF1S1M, obtêm a relaxação linear, em média, em 0.050 e 0.54 segundos. O fato do modelo multi commodity demorar tanta para obter a RL, pode ser explicado pelo fato das restrições relacionadas à eliminação de subsequência serem na igualdade, o que pode dificultar a resolução. Quando comparamos os cinco modelos olhando para apenas para o quesito relaxação linear observamos que o modelo MTZ1S1M e SCF1S1M são os que tem os melhores resultados, em termos de desempenho computacional.

O estudo teórico já dizia que os modelos MTZ1S1M e SCF1S1M poderiam apresentar o mesmo espaço de soluções factíveis, e para as instâncias testadas, além de obter o mesmo valor de RL, os modelos tiveram o mesmo desempenho computacional.

Dados	MTZ	DL	SD	SCF	MCF
Ex(15,05,0.6,050)	0.87%	0.61%	1.49%	1.16%	0.76%
Ex(15,05,0.6,100)	1.82%	3.51%	1.93%	1.53%	1.11%
Ex(15,05,0.8,050)	1.21%	1.65%	1.09%	1.11%	1.12%
Ex(15,05,0.8,100)	2.57%	3.68%	39.03%	1.91%	2.34%
Ex(15,10,0.6,050)	1.75%	11.90%	2.40%	1.56%	2.29%
Ex(15,10,0.6,100)	3.15%	2.88%	3.57%	2.71%	2.61%
Ex(15,10,0.8,050)	40.95%	38.78%	6.23%	5.58%	2.62%
Ex(15,10,0.8,100)	10.04%	30.14%	31.46%	7.44%	6.34%
Ex(15,15,0.6,050)	5.12%	2.77%	10.27%	2.00%	9.52%
Ex(15,15,0.6,100)	3.30%	6.48%	13.87%	2.92%	6.72%
Ex(15,15,0.8,050)	3.68%	39.19%	29.41%	4.19%	5.08%
Ex(15,15,0.8,100)	7.97%	12.36%	15.66%	7.52%	15.47%
Ex(25,05,0.6,050)	1.93%	3.43%	24.61%	1.24%	1.02%
Ex(25,05,0.6,100)	1.16%	2.52%	6.75%	1.78%	1.06%
Ex(25,05,0.8,050)	2.99%	1.43%	16.29%	0.76%	0.67%
Ex(25,05,0.8,100)	6.58%	1.83%	10.17%	2.61%	1.51%
Ex(25,10,0.6,050)	1.60%	2.04%	14.69%	1.55%	1.02%
Ex(25,10,0.6,100)	2.56%	2.40%	24.06%	1.89%	1.41%
Ex(25,10,0.8,050)	7.37%	5.43%	52.78%	0.88%	0.93%
Ex(25,10,0.8,100)	56.30%	62.05%	33.87%	6.70%	1.42%
Ex(25,15,0.6,050)	26.61%	20.12%	21.40%	16.92%	1.67%
Ex(25,15,0.6,100)	4.71%	24.08%	26.90%	12.61%	1.42%
Ex(25,15,0.8,050)	44.15%	65.52%	67.49%	25.56%	2.28%
Ex(25,15,0.8,100)	66.13%	56.78%	43.49%	11.02%	2.69%

Tabela 4: Valor do Limite Inferior antes da Ramificação

4.2.2 Limite Inferior Antes da Ramificação

Para avaliar o desempenho dos modelos no nó raiz, utilizamos o melhor valor do limite inferior e o melhor valor do limite superior obtidos antes de começar a ramificação da árvore do *Branch and Bound*, o obtemos o GAP da seguinte maneira:

$$\frac{LS - LI}{LS}$$

O resultado pode ser observado na Tabela 4.2.2.

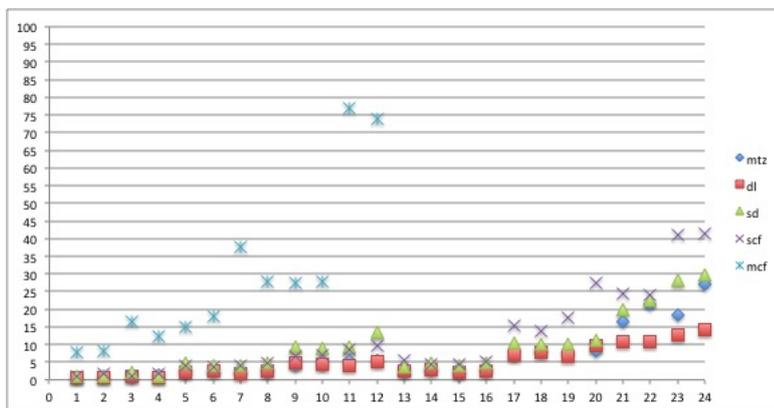
Em 88% das instâncias os modelos de fluxos foram os que obtiveram menor GAP. E em, 71% dos casos em que os modelos de fluxo foram melhores, o modelo MCF1S1M foi o que obteve os melhores valores.

A diferença do valor obtido para o limite inferior, entre cada modelo, antes da ramificação, ou seja, o valor usado para calcular esse GAP é sutil, muitas vezes nula. O que se observa, é

que o valor do GAP é muito melhor para a MCF devido aos limites superiores obtidos, que são muito menores do que com os outros modelos. É difícil determinar o que se pode concluir desses valores, pois não sabemos ao certo quais os mecanismos usados pelo cplex. Mas observa-se no log de solução que o modelo MCF fornece escopo para aplicações de heurísticas e os valores obtidos, sabemos que são os limites superiores. Então quanto mais heurísticas, mas chances de encontrar um limite melhor.

O resultado anterior mostrava que o tempo computacional envolvido para obter os limites inferiores com o modelo MCF1S1M era, em média, 100 vezes maior do que com os outros modelos. Esse comportamento se repete ao longo dos testes. Pois cada vez que o modelo MCF1S1M precisa encontrar um limite inferior o tempo computacional envolvido nesse processo é superior aos demais. Como mostra o Gráfico, que apresenta o tempo computacional utilizado apenas no nó raiz, até ficar pronto para ramificação.

Observe que quando o número de itens aumenta de 15 para 25 (a partir da instância 13) o tempo computacional envolvido para obter os limites com o modelo MCF1S1M é superior à 100 segundos, nos 6 últimos exemplares o modelo MCF1S1M não sai do nó raiz depois de uma hora de processamento.



O tempo computacional com o modelo SCF1S1M é o dobro do que quando usamos os modelos baseados no modelo MTZ1S1M ou o próprio modelo MTZ1S1M. Porém, o GAP obtido é inversamente proporcional, apresentando bons resultados com o modelo SCF1S1M.

Esse resultado é interessante pois mostra o desempenho dos modelos de fluxos, que quando usados em diversas aplicações; problema do caixeiro viajante, dimensionamento de lotes entre outros, são sempre eles que obtêm bons resultados. Pensando em qualidade do modelo, os modelos de fluxo dão mais escopo para a qualidade de solução. Porém o tempo computacional envolvido é muito alto.

EX(J, T, cap, μ)	GAP (%)					tempo (segundos)				
	MTZ	DL	SD	SCF	MCF	MTZ	DL	SD	SCF	MCF
Ex(15,05,0.6,050)	0	0	0	0	0	33,68	22,70	70,11	57,32	161,76
Ex(15,05,0.6,100)	0	0	0	0	0	89,14	91,26	147,44	176,58	907,32
Ex(15,05,0.8,050)	0	0	0	0	0	124,50	70,12	144,61	108,67	1472,20
Ex(15,05,0.8,100)	0	0	0	0	0	43,40	2,18	25,58	21,61	244,25
Ex(15,10,0.6,050)	0	0	0,24	0,05	0,29	2589,60	1874,59	3600	3600	3600
Ex(15,10,0.6,100)	0,21	0,23	0,28	0,24	0,35	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(15,10,0.8,050)	0,27	0,31	0,27	0,42	0,57	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(15,10,0.8,100)	0,34	0,42	0,45	0,61	0,69	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(15,15,0.6,050)	0,45	0,46	0,58	0,49	0,57	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(15,15,0.6,100)	0,58	0,63	0,58	0,59	0,88	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(15,15,0.8,050)	0,65	0,67	0,92	0,80	1,08	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(15,15,0.8,100)	1,04	0,91	0,85	1,04	1,47	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(25,05,0.6,050)	0	0	0	0	0,44	535,55	529,92	1178,62	1155,78	3600
Ex(25,05,0.6,100)	0	0	0	0	0,46	144,18	117,70	373,70	268,95	3600
Ex(25,05,0.8,050)	0	0	0	0	0,54	316,95	251,74	1007,77	290,75	3600
Ex(25,05,0.8,100)	0	0	0	0	0,81	261,29	24,07	687,39	542,92	3600
Ex(25,10,0.6,050)	0,34	0,26	0,53	0,22	0,87	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(25,10,0.6,100)	0,48	0,36	0,64	0,47	1,34	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(25,10,0.8,050)	0,19	0,17	0,27	0,28	0,74	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(25,10,0.8,100)	0,19	0,29	0,78	0,28	1,42	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(25,15,0.6,050)	0,60	0,69	0,80	0,65	1,67	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(25,15,0.6,100)	0,91	0,37	1,01	0,73	1,42	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(25,15,0.8,050)	0,57	0,96	0,98	1,14	2,28	3600	3600	3600	3600	3600
Ex(25,15,0.8,100)	1,35	0,97	1,68	1,63	2,69	3600	3600	3600	3600	3600

Tabela 5: GAP

4.2.3 Limite de Tempo 1 hora - 3600 segundo

No último teste o tempo de resolução das instâncias foi limitado em 3600 segundo (uma hora). A Tabela 4.2.3 apresenta os resultados obtidos. Primeiramente o GAP dentro de cada instância para cada modelo e depois o tempo computacional. Apesar do tempo computacional estourar na maioria dos casos pode-se observar que a média do GAP para cada modelo não ultrapassa os 0,80%.

A Tabela 4.2.3 apresenta o número de nós examinados na árvore do *Branch and Bound*. Enquanto os modelos MTZ1S1M, DL1S1M, SD1S1M e SCF1SM apresentam em média, 386803,71, 352757,29, 256366,83, 216453,17 nós respectivamente, o modelo MCF1S1M examina 25220.54 em média. Para as instâncias mais difíceis (J=25 e T=15) o modelo MCF1S1M consegue diminuir o GAP drasticamente ainda no nó raiz, apresentando um GAP numa média de 2%. Enquanto as outras instâncias analisam muitos nós e o GAP está numa média de 1%.

EX(J, T, cap, μ)	MTZ	DL	SD	SCF	MCF
Ex(15,05,0.6,050)	63407	36972	67937	77284	31246
Ex(15,05,0.6,100)	172586	194925	161143	219467	156866
Ex(15,05,0.8,050)	311187	140477	118974	120126	114238
Ex(15,05,0.8,100)	41781	15224	18024	19306	12614
Ex(15,10,0.6,050)	1272371	829523	448254	768367	96421
Ex(15,10,0.6,100)	908860	966625	521878	493971	77696
Ex(15,10,0.8,050)	862836	821485	849044	413586	24405
Ex(15,10,0.8,100)	813960	695581	474063	463636	20537
Ex(15,15,0.6,050)	560082	533765	410432	341968	28775
Ex(15,15,0.6,100)	518423	560745	353903	304068	25627
Ex(15,15,0.8,050)	454332	393283	298398	279097	5837
Ex(15,15,0.8,100)	513469	468590	275208	221986	4603
Ex(25,05,0.6,050)	394405	449124	433150	452479	2146
Ex(25,05,0.6,100)	90307	84253	94481	85786	2467
Ex(25,05,0.8,050)	323844	347877	661708	271487	832
Ex(25,05,0.8,100)	163722	169285	230015	231280	819
Ex(25,10,0.6,050)	441675	349174	175148	86961	39
Ex(25,10,0.6,100)	353656	356178	149548	106221	101
Ex(25,10,0.8,050)	321933	268642	124179	75586	24
Ex(25,10,0.8,100)	232455	333202	133100	57191	0
Ex(25,15,0.6,050)	152858	112340	49346	33734	0
Ex(25,15,0.6,100)	89793	159994	36031	27763	0
Ex(25,15,0.8,050)	120123	99161	33365	25894	0
Ex(25,15,0.8,100)	105224	79750	35475	17632	0

Tabela 6: Número de nós

Capítulo 5

Aplicação: Fábrica de Refrigerante

Todos os modelos apresentados foram se referem a um contexto genérico, podendo ser aplicado em diversos casos. Uma das aplicações consideradas na literatura é a fabricação de refrigerantes. Uma fábrica de refrigerante pode produzir refrigerantes de diferentes sabores e tamanhos. A produção é feita basicamente em dois estágios principais: a preparação de xarope, chamado Estágio I, e o envase da bebida, chamado Estágio II. No Estágio I são consideradas apenas as quantidades mínimas de produção de xarope para garantir a homogeneidade e a capacidade máxima do tanque. No Estágio I, os ingredientes que formam o xarope, são pré-misturados, e o composto resultante é enviado aos tanques de preparo, onde então recebe o açúcar líquido ou adoçante. Essa mistura é agitada por hélices que tornam o xarope uma mistura homogênea. Para que este composto seja bem misturado, é necessária uma quantidade mínima de xarope no tanque, suficiente para cobrir estas hélices. Um tanque pode abastecer ao mesmo tempo várias linhas de produção, mas uma linha recebe xarope de apenas um tanque por vez. No Estágio II, a bebida é envasada em linhas de produção. Nelas, os vasilhames entram por uma esteira rolante onde são lavados e em seguida, passam por uma máquina que os enche com uma determinada quantidade de xarope e água carbonatada. Os vasilhames são então fechados, rotulados, empacotados e levados para o estoque. A linha de produção (máquina) deve aguardar até que o xarope esteja pronto para ser enviado para o envase. Do mesmo modo, o envio de xarope para a máquina deve ocorrer somente se esta estiver pronta para o envase da bebida, ou seja, deve haver uma sincronia entre os estágios de produção de xarope e envase da bebida.

No Estágio I, somente o problema de dimensionamento de lotes é levado em consideração, pois considera-se que o número de tanques disponível é ilimitado. No Estágio II, entretanto, tratam-se do problema de dimensionamento de lotes e o do sequenciamento da produção. Quando um refrigerante com açúcar é produzida e decide-se trocar para um refrigerante do tipo *diet*, por exemplo, é necessário realizar uma limpeza na máquina. Essa limpeza deve ser realizada minuciosamente, pois em um refrigerante do tipo *diet* não pode haver resíduos de açúcar.

Por isso o tempo necessário para limpar a máquina é bem maior que do que se a produção fosse ao contrário. Portanto a ordem que os itens são produzidos pode alterar o uso da capacidade da máquina e nesse caso deve ser levado em conta o sequenciamento.

O modelo para o estudo de caso do refrigerante é descrito por (5.1) - (5.14) e será denominado *Refrri_{SEC}*, onde a sigla *SEC* será substituída pelo nome da restrição usada como eliminação de subsequência.

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^J \sum_{j=1, j \neq i}^J s_{ij}^{II} z_{ijt}^{II} \quad (5.1)$$

sujeito a:

Estágio I (Xaroparia)

$$\sum_{j \in \gamma_l} r_{lj} x_{jt}^{II} = K^I (w_{lt} - n_{lt}), \quad l \in L; t = 1, \dots, T. \quad (5.2)$$

$$n_{lt} \leq 1 - \left(\frac{q_l}{K^I} \right), \quad l \in L; t = 1, \dots, T. \quad (5.3)$$

$$y_{lt}^I \leq w_{lt} \leq |S_t| y_{lt}^I, \quad l \in L; t = 1, \dots, T. \quad (5.4)$$

$$\sum_{l \in L} w_{lt} \leq |S_t|; \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5)$$

Estágio II (Envase)

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt}^{II} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad j = 1, \dots, J; t = 1, \dots, T. \quad (5.6)$$

$$\sum_{j=1}^J a_j^{II} x_{jt}^{II} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1, j \neq i}^J b_{ij}^{II} z_{ijt}^{II} \leq K_t^{II}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.7)$$

$$a_j^{II} x_{jt}^{II} \leq K_t^{II} \sum_{i=1}^J z_{ijt}^{II}, \quad j = 1, \dots, J; j \neq i; t = 1, \dots, T. \quad (5.8)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i_0}^J z_{i_0 jt}^{II} \geq \sum_{i=1}^J z_{ikt}^{II}, \quad k = 1, \dots, J; k \neq i; t = 1, \dots, T. \quad (5.9)$$

$$\sum_{j=1}^J z_{ijt}^{II} \leq 1, \quad i = 1, \dots, J; i \neq j; t = 1, \dots, T. \quad (5.10)$$

$$\sum_{i=1}^J z_{ikt}^{II} = \sum_{j=1}^J z_{kjt}^{II}, \quad k = 1, \dots, J; k \neq i, j; t = 1, \dots, T. \quad (5.11)$$

$$\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J z_{ijt}^{II} \leq |S_t|, \quad i \neq j; t = 1, \dots, T. \quad (5.12)$$

$$\text{Restrições de Eliminação de Subrotas} \quad (5.13)$$

$$x_{jt}^{II} \geq 0, z_{ijt}^{II}, y_{lt}^I = 0/1, w_{lt} \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq n_{lt}, \quad j = 1, \dots, J; t = 1, \dots, T; l \in L. \quad (5.14)$$

A função objetivo (5.1) minimiza custo de estoque, atraso e troca. As restrições (5.2) garantem que se o tanque está preparado para a produção do xarope l , então haverá produção e a quantidade produzida é igual ao número máximo de tanques do xarope l que podem ser produzidos naquele período. A variável n_{lt} permite o uso parcial do tanque respeitando a quantidade mínima (q_l) necessária para garantir a homogeneidade, como especificado nas restrições (5.3). As restrições (5.4) garantem que só haverá produção do xarope l se o tanque estiver preparado. De acordo com as restrições (5.5), a soma total do número de tanques produzidos no período t deve ser limitada pelo número total de preparos do tanque em t .

As restrições de balanceamento de estoque são representadas por (5.6) e de capacidade por (5.7). As restrições de preparo (5.8) considera o preparo implícito quando $\sum_{j=1}^J z_{ijt}^{II} = 1$. As restrições (5.9) garantem que somente haverá troca de um item i qualquer para um item k qualquer se existir um troca do item inicial i_0 para algum item j no período t , o item i_0 é um item fantasma e para não interferir nos resultados do problema, este item tem os tempos de troca e demanda com valores nulos.

As restrições (5.10) proíbem mais de uma troca a partir de um item i , o que significa que em cada período só pode ser produzido um único lote de cada produto. As restrições (5.11) garantem que se ocorre uma troca de um item i para um item k , então haverá uma troca deste item k para um item j . As restrições (5.12) controlam o número total de trocas que podem ocorrer na máquina no período t .

As restrições (5.9), (5.10) e (5.11) sozinhas podem gerar subrotas, ou seja, no sequenciamento dos itens, subcaminhos desconexos. Desta forma, as restrições (5.13) são consideradas para a proibição dessas subrotas. As restrições (5.14) referem-se ao domínio das variáveis.

Em defalque2010 é apresentado um estudo computacional para a mesma aplicação usando a estratégia *small bucket* (GLSP) em comparação com uma das estratégias *big bucket* (MTZ). O modelo que considera a estratégia *big bucket* (MTZ) apresenta melhores resultados em comparação com o modelo GLSP. Na Seção 5.1 serão apresentados os resultados do estudo computacional realizado para comparar quatro modelos da estratégia *Big Bucket*, *Refri_{MTZ}*, *Refri_{DL}*, *Refri_{DFJ}* e o *Refri_{MCF}*.

5.1 Estudo Computacional

O estudo computacional está dividido em duas etapas, Etapa I e Etapa II. Na Etapa I o estudo computacional foi realizado com o *solver* CPLEX na versão 12.0, no ano de 2011. Nesse estudo são considerados os modelos *Refri_{DL}* e o *Refri_{MTZ}*. Os resultados foram discutidos e apresentados no SBPO 2011 (maldonado2011). Na Etapa II, o *solver* CPLEX estava na

versão 12.5. Os modelos considerados nesse estudo são: $Refri_{MTZ}$, $Refri_{DFJ}$ e o $Refri_{MCF}$. Os resultados da Etapa II foram discutidos no artigo maldonado2014 aceito para publicação. Em ambas etapas os dados são apresentados para uma máquina, que pode produzir 27 itens de diferentes sabores e tamanhos. Dez xaropes diferentes são necessários para produzir este conjunto de itens. A capacidade da xaroparia é de 84000 litros. Foi considerado um horizonte de planejamento de 5 semanas (períodos). O tempo disponível para a produção em cada período é de 6.840 minutos, exceto para o primeiro período, que possui apenas dois dias de produção e, portanto, a capacidade disponível é de apenas 2.280 minutos.

Estudo Computacional - Etapa I

Nessa seção resultados do estudo computacional realizado para os modelos $Refri_{DL}$ e o $Refri_{MTZ}$ é apresentado. Os exemplares utilizados são dados reais obtidos em ferreira2009. Os exemplares, nomeados S1 a S10, representam 10 cenários diferentes de produção. A Tabela 7 apresenta as diferenças entre os exemplares.

Exemplares	Modificações
S1(S6)	Dados Reais
S2(S7)	Capacidade da Máquina de S1(S6) reduzida em 25%
S3(S8)	Custos de Estoque de S1(S6) foram dobrados
S4(S9)	Custo de troca de S2(S7) reduzidos em 1/3
S5(S10)	Custos de estoque de S4(S9) foram dobrados

Tabela 7: Modificações dos exemplares S1-S10 (Ferreira *et. al.* (2010))

Os modelos foram descritos na sintaxe do AMPL, e resolvidos pelo *solver* CPLEX 12.0. Foi utilizado um computador com processador Intel Core i7, com 2,93 GHz e com 1,87 GB de memória RAM, sob a plataforma do Windows XP. Tempo de processamento limitado em três horas. A Tabela 8 mostra a relaxação linear de cada exemplar, a melhor solução encontrada, o GAP, e o tempo em segundos. O (-) significa que a instância usou os 10800 segundos fixados e não obteve a solução ótima. Os resultados apresentados na Tabela 8 mostram que quando aplicamos a projeção reversa nas restrições obtivemos melhores resultados do que com a formulação original.

Ex	RL na raiz	Melhor Solução		GAP (%)		tempo (seg)	
		<i>Refri_{MTZ}</i>	<i>Refri_{DL}</i>	<i>Refri_{MTZ}</i>	<i>Refri_{DL}</i>	<i>Refri_{MTZ}</i>	<i>Refri_{DL}</i>
S1	1793	53014	53014	0.01	0.01	4981.24	2119.41
S2	2114	57152	58847	1.59	6.42	-	-
S3	4229	63938	63938	2.91	2.88	-	-
S4	2114	23148	23148	2.24	2.74	-	-
S5	4229	28612	28612	2.76	2.61	-	-
S6	1209	57211	57211	0.01	0.01	670.60	651.52
S7	1256	64802	64802	4.26	3.76	-	-
S8	2418	64302	64302	0.01	0.01	924.46	407.79
S9	2512	31263	32537	1.56	1.78	-	-
S10	1256	26059	26059	3.47	2.92	-	-

Tabela 8: Estudo Computacional - Etapa I - CPLEX 12.0 - *Refri_{MTZ}* × *Refri_{DL}*

A otimalidade foi provada em três instância (S1, S6 e S8) para os dois modelos, o modelo reformulado é mais rápido nos três casos. Nos outros sete exemplares o modelo *Refri_{DL}* apresenta um GAP menor em quatro instâncias. Os resultados mostram que o modelo *Refri_{DL}* proposto teve resultados satisfatórios.

Estudo Computacional - Etapa II

Na Etapa II além dos 10 exemplares descritos anteriormente (S1 - S10), outros 10 exemplares foram gerados (S11 - S20). Os exemplares S1-S10 tem custos de troca mais alto do que os custos de atraso e estoque, mesmo quando eles são reduzidos em 25% (S7 - S10). Para analisar cenários em que as decisões de sequenciamento são menos importante do que as decisões de dimensionamento, dez novos exemplares foram gerados. Os custos de troca das instâncias S1-S10 foram reduzidos significativamente. Os modelos foram descritos na sintaxe do AMPL e resolvidos pelo *solver* CPLEX 12.5. Todos os testes foram realizados num computador Intel Core i7-2600 CPU, 3,4 GHz, 16 GB RAM. O tempo computacional considerado foi de três horas. Considerando o *default* do CPLEX, em média 3 milhões de nós são examinados para resolver as instâncias do *Refri_{MTZ}* contra 7 mil para as instâncias do modelo *Refri_{MCF}*. Como consequência mais cortes são gerados com as instâncias do modelo *Refri_{MTZ}* (em média 15043 cortes) do que com as instâncias do modelo *Refri_{MCF}* (em média 4392). O fato que as instâncias do *Refri_{MTZ}* podem ser resolvidas facilmente usando o algoritmo *Branch and Cut* do CPLEX está relacionado ao fato de que as relaxações lineares envolvidas são resolvidas 10 vezes mais rápidas do que com as relaxações lineares associadas as instâncias do modelo *Refri_{MCF}*. Tabela 9 apresenta o GAP encontrado, qualidade da solução, que é computada como $((\text{Melhor Solução}) / (\text{Solução Ótima})) \times 100$, em que a Melhor Solução é o valor encontrado da melhor solução inteira viável para *Refri_{MTZ}* ou *Refri_{MCF}*. As três últimas colunas apresentam o tempo computacional em segundos. Os resultados da Tabela 5.1 sugerem a superioridade do modelo *Refri_{DFJ}* quando comparado com os modelos *Refri_{MTZ}* e *Refri_{MCF}*. Para 19 das 20 instâncias foi provado a otimalidade com o modelo *Refri_{DFJ}*.

Ex	GAP		Qualidade Solução		Tempo(segundos)		
	<i>Refri_{MTZ}</i>	<i>Refri_{MCF}</i>	<i>Refri_{MTZ}</i>	<i>Refri_{MCF}</i>	<i>Refri_{MTZ}</i>	<i>Refri_{MCF}</i>	<i>Refri_{DFJ}</i>
S1	0.00	13.99	0.00	6.71	2014.04	10800.00	112.42
S2	1.86	10.14	0.00	3.33	10800.00	10800.00	2368.66
S3	2.54	8.30	0.00	3.47	10800.00	10800.00	6734.79
S4	1.67	9.30	0.00	3.79	10800.00	10800.00	2168.05
S5	2.32	6.55	0.27	2.34	10800.00	10800.00	2488.37
S6	0.00	0.00	0.00	0.00	193.71	948.64	28.16
S7	0.00	7.78	0.00	0.30	4306.11	10800.00	2976.92
S8	0.00	0.00	0.00	0.00	231.13	10800.00	26.13
S9	0.00	4.40	0.00	0.37	7999.69	10800.00	2747.70
S10	1.49	5.14	0.00	0.64	10800.00	10800.00	3167.58
S11	0.00	0.00	0.00	0.00	6.35	722.24	10.67
S12	0.00	0.00	0.00	0.00	6.22	722.30	10.83
S13	0.00	0.00	0.00	0.00	7.77	679.12	11.78
S14	0.00	0.15	0.00	0.00	298.17	10800.00	40.33
S15	0.00	0.15	0.00	0.00	299.08	10800.00	40.03
S16	0.00	0.17	0.00	0.00	143.01	10800.00	31.61
S17	0.01	0.01	0.00	0.00	140.18	311.53	8.97
S18	0.04	0.45	0.07	0.08	10800.01	10798.26	10700.00
S19	0.01	0.15	0.00	0.00	763.20	10798.23	19.36
S20	0.02	0.01	0.00	0.00	10799.95	4721.81	35.22

Tabela 9: Estudo Computacional - Etapa II - CPLEX 12.5 - $Refri_{MTZ} \times Refri_{MCF} \times Refri_{DFJ}$

Se compararmos a convergência do processo de solução usado para resolver as instâncias dos modelos, o modelo $Refri_{MTZ}$ é melhor. A Figura 9 mostra os valores da solução para a instância S3 obtidos quando paramos o teste após 10, 20, 30, 40, 50 e 60 minutos de tempo de cpu. O eixo vertical apresenta o valor da solução e o eixo horizontal mostra o tempo de cpu. A solução $Refri_{MTZ}$, por exemplo, apresenta a solução ótima em 40 minutos mas o gap associado ainda é de 4.82%. Os valores da solução para $Refri_{MCF}$ estão longe da solução ótima e o gap ainda é de 17.58% após uma hora. Os valores da solução para $Refri_{DFJ}$ estão próximos da solução ótima. Contudo, é importante lembrar que essas soluções não são necessariamente viáveis. O modelo $Refri_{DFJ}$ só garante a factibilidade no final do processo de solução.

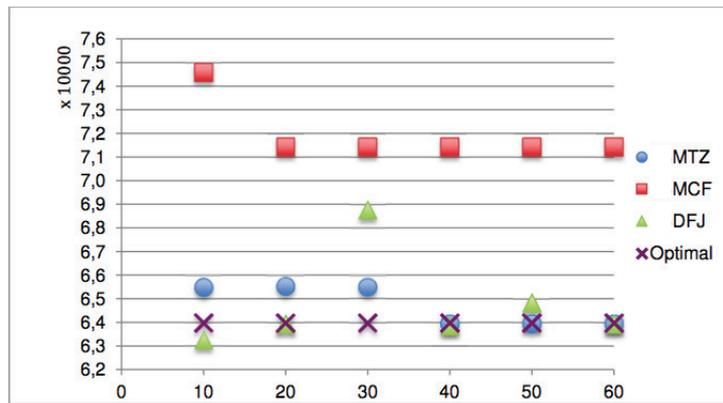


Figura 9: Convergência das Soluções para a instância S3

Conclusão e Perspectivas Futuras

Neste trabalho propomos modelos para o problema integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção. Os modelos são obtidos a partir de inequações fortes para o problema do caixeiro viajante assimétrico propostas na literatura.

Os modelos diferem-se no tipo de restrição de eliminação de subsequência. E muitas vezes foram necessárias, variáveis auxiliares para representar corretamente essas restrições. Com o intuito de descobrir qual o modelo que mais se aproxima do envoltório convexo utilizamos a Decomposição de Benders para projetar as variáveis auxiliares de cada modelo. Descobrimos que o modelo SCF1S1M pode ser considerado mais o apertado teoricamente.

Foram realizados testes computacionais com exemplares gerados a partir de dados da literatura. Os testes foram realizados para observar o comportamento dos modelos e verificar os resultados teóricos obtidos. Os resultados computacionais são compatíveis com os apresentados teoricamente. E quando utilizamos esses modelos com dados de uma fábrica de refrigerante o comportamento se repete. Os modelos de fluxo apresentam mais qualidade matemática, porém em qualidade computacional o modelo MTZ1S1M se destaca.

O modelo MCF1S1M na literatura sempre obteve bons resultados, porém como as restrições associadas a eliminação de subsequência ficaram dependentes da variável de troca, acredita-se que isso dificultou a resolução do modelo, que obteve tempos computacionais superiores que os demais modelos propostos. Porém quando olhamos para o número de nós analisados, número de planos de corte gerados, limite superior obtidos pelas heurísticas do CPLEX, o modelo MCF1S1M apresenta qualidade matemática superior.

A Decomposição de Benders foi escolhida para reformular os modelos pois dela já pode-se obter um método de solução para eles. Assim como trabalho futuro, pretende-se propor um método de solução para cada modelo a partir da Decomposição de Benders.

Observa-se que os modelos foram reformulados apenas na questão de sequenciamento, quando olha-se para as restrições associadas ao dimensionamento, nada foi alterado. Assim, como trabalho futuro, seria interessante abordar formulações alternativas de dimensionamento de lotes para o PIDS em conjunto com as diversas formulações para o sequenciamento.

Referências Bibliográficas

ALMADA-LOBO, B. et al. Single machine multi-product capacitated lot sizing with sequence-dependent setups. *International Journal of Production Research*, v. 45, n. 20, p. 4873–4894, 2007. ISSN 0020-7543.

ARAUJO, S.; ARENALES, M. N.; CLARK, A. Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing with sequence-dependent setups. *Journal of Heuristics*, v. 13, n. 4, p. 337–358, 2007. ISSN 1381-1231.

BAKER, T.; MUCKSTADT, J. The CHES problems. [S.l.], 1989.

BALLAS, E.; CERIA, S.; CORNUEJOLS, G. A lift-and-project cutting plane algorithm for mixed 0-1 programs. *Mathematical Programming*, 1993.

BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variable programming problems. *Numerische Mathematik*, 1962.

BLAZEWICZ, J.; DOR, M.; WEGLARZ, J. Mathematical programming formulations for machine scheduling: A survey. *European Journal of Operational Research*, v. 51, n. 3, p. 283–300, 1991. ISSN 03772217.

BRAHIMI, N. et al. Single item lot sizing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 168, n. 1, p. 1–16, 2006. ISSN 03772217.

CERIA, S. A brief history of lift-and-project. *Operation Research*, 2007.

CLARK, A.; ALMADA-LOBO, B.; ALMEDER, C. Lot sizing and scheduling: industrial extensions and research opportunities. *International Journal of Production Research*, v. 49, n. 9, p. 2457–2461, 2011. ISSN 0020-7543.

CLARK, A.; MAHDIEHB, M.; RANGEL, S. Production lot sizing and scheduling with non-triangular sequence-dependent setup times. *International Journal of Production Research*, 2014 – no prelo.

CLAUS, A. A new formulation for the travelling salesman problem. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, SIAM, v. 5, n. 1, p. 21–25, 1984.

COSTA, A. A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. *Computers Operations Research*, 2005.

CUNHA, A.; CARVALHO, C.; HENRIQUE, R. Um modelo com variáveis indexadas no tempo para a integração do dimensionamento de lotes e sequenciamento em uma máquina com tempos de preparação. In: SBPO - Simposio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2010. Bento Gonçalves-RS.

DANTZIG, G.; FULKERSON, R.; JOHNSON, S. Solution of a large scale traveling salesman problem. Operation Research Society of America, 1954.

DEFALQUE, C.; RANGEL, S.; FERREIRA, D. Usando o atsp na modelagem do problema integrado de produção de bebidas. TEMA, 2010.

DESROCHERS, M.; LAPORTE, G. Improvements and extensions to the miller-tucker-zemlin subtour elimination constraints. Operations Research, v. 10, p. 27–36, 1991.

DREXL, A.; HAASE, K. Production economics proportional and scheduling. International Journal of Production Economics, v. 40, n. 95, p. 73–87, 1995.

DREXL, A.; KIMMS, A. Lotsizing and scheduling - survey and extensions. European Journal of Operational Research, v. 99, p. 221–235, 1997.

ERDIRIK-DOGAN, M.; GROSSMANN, I. E. A decomposition method for the simultaneous planning and scheduling of single-stage continuous multi-product plants. Industrial Engineering Chemistry Research, 2006.

FERREIRA, C. E.; WAKABAYASHI, Y. Combinatoria Poliedrica e Planos de Corte Faciais. [S.l.], 1996.

FERREIRA, D. et al. Single-stage formulations for synchronised two-stage lot sizing and scheduling in soft drink production. Int. J. Production Economics, 2012.

FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. European Journal of Operational Research, v. 196, n. 2, p. 697–706, 2009.

FLEISCHMANN, B.; MEYER, H. The general lotsizing and scheduling problem. OR Spektrum, v. 19, p. 11–21, 1997.

FRANCA, P. M.; LUNA, H. P. L. Solving stochastic transportation - location problems by generalized benders decomposition. Transportation Science, 1982.

GAVISH, B.; GRAVES, S. C. The Travelling Salesman Problem and Related Problems. [S.l.], 1978.

GEOFFRION, A. Generalized benders decomposition. Journal of Optimization Theory and Applications, 1972.

GLOCK, C. H.; GROSSE, E. H.; RIES, J. M. The lot sizing problem: A tertiary study. *Int. J. Production Economics*, 2014.

GUIMARaES, L.; KLABJAN, D.; ALMADA-LOBO, B. Modeling lotsizing and scheduling problems with sequence dependent setups. Preprint submitted to *European Journal of Operational Research*, 2013.

GUPTA, Y. P.; KEUNG, Y. A review of multi-stage lot-sizing. *Operation Production Manag.*, ? HARRIS, F. W. How many parts to make at once. *Factory - Mag. Manag.*, 1913.

JAMES, R. J.; ALMADA-LOBO, B. Single and parallel machine capac- itated lotsizing and scheduling: New iterative mip-based neighbor- hood search heuristics. *Computer Operations Research*, 2011.

JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Modeling industrial lot sizing problems: a review. *International Journal of Production Research*, v. 46, n. 6, p. 1619–1643, 2008. ISSN 0020-7543.

KARIMI, B.; GHOMI, S. F.; WILSON, J. The capacitated lot sizing problem : a review of models and algorithms. *Omega*, v. 31, p. 365 – 378, 2003.

KAWAMURA, M.; RONCONI, D. Aplicacao da heuristica relax and fix no problema de dimensionamento de lotes e producao em maquinas distintas em paralelo. In: *SBPO - Simposio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2010. Bento Goncalves - RS.

KEHA, A. B.; KHOWALA, K.; FOWLER, J. W. Mixed integer programming formulations for single machine scheduling problems. *Computers Industrial Engineering*, Elsevier Ltd, v. 56, n. 1, p. 357–367, 2009. ISSN 0360-8352.

MAES, J.; WASSENHOVE, L. V. Multi-item single-level capacitated dynamic lot-sizing heuristics : A general review. *Journal of the Operational Research Society*, v. 39, n. 11, p. 991–1004, 1988.

MALDONADO, M.; RANGEL, S.; CLARK, A. Lifted inequalities for a soft drink lotsche- duling model. In: *SBPO - Simposio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2011.

MALDONADO, M.; RANGEL, S.; FERREIRA, D. A study of different subsequence eli- mination strategies for the soft drink production planning. *Journal of Applied Research Tech- nology*, 2014.

MILLER, C. E.; TUCKER, A. W.; ZEMLIN, R. A. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *J. ACM*, ACM, New York, NY, USA, v. 7, n. 4, p. 326–329, out. 1960. ISSN 0004-5411. Disponivel em: <<http://doi.acm.org/10.1145/321043.321046>>.

NEMHAUSER, G. L.; WOLSEY, L. A. Integer and combinatorial optimization. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, 1988. ISBN 0-471-82819-X.

ONCAN, T.; ALTINEL, I.; LAPORTE, G. A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations. *Computers Operations Research*, v. 36, n. 3, p. 637–654, 2009. ISSN 03050548.

PINEDO, M. *Scheduling - Theory, Algorithms and Systems*. [S.l.]: Prentice Hall, 1995.
POCHET, Y.; WOLSEY, L. A. *Production planning by mixed integer programming*. [S.l.]: Springer Verlag, 2006. Series em Operations Research and Financial Engineering.

QUADT, D.; KUHN, H. Capacitated lot-sizing with extensions: a review. *4OR*, Springer-Verlag, v. 6, n. 1, p. 61–83, 2008. ISSN 1619-4500. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10288-007-0057-1>>.

SARIN, S.; SHERALI, H.; YAO, L. New formulation for the high multiplicity asymmetric traveling salesman problem with application to the chesapeake problem. *Optimization Letters*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 5, p. 259–272, 2011. ISSN 1862-4472.

SHERALI, H. D.; ADAMS, W. P. A hierarchy of relaxations between the continuous and convex hull representations for zero-one programming problems. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1990.

SHERALI, H. D.; DRISCOLL, P. J. On tightening the relaxations of miller-tucker-zemlin formulations for asymmetric traveling salesman problems. *Operations Research, INFORMS*, v. 50, n. 4, p. 656–669, 2002.

SOX, C. R.; GAO, Y. The capacitated lot sizing problem with setup carry-over. *IIE Transactions*, 1999.

SUNG, C.; MARAVELIAS, C. T. A mixed-integer programming formulation for the general capacitated lot-sizing problem. *Computers and Chemical Engineering*, 2008.

SURIER, C. Modeling of period overlapping setup times. *European Journal of Operational Research*, 2006.

TOLEDO, C. F. M. et al. Um modelo de otimização para o problema integrado de dimensionamento de lotes e programação da produção em fábrica de refrigerante. *Pesquisa Operacional*, v. 27, p. 155–186, 2007.

TOSO, E. A.; MORABITO, R. Otimização do dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção: Estudo de caso numa fábrica de rações. *Gestão e Produção*, v. 12, n. 2, p. 203–217, 2005.

TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, L. J.; MCCLAIN, J. O. Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science*, v. 35, p. 353–366, 1989. ISSN 0025-1909.

VYVE, M. V. A Solution Approach of Production Planning Problems based on Compact

Formulations for single-item Lot-Sizing Models. Tese (Doutorado) — Université Catholique de Louvain Faculté des Sciences Appliquées, 2003.

WAGNER, H.; WHITIN, T. A dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, 1958.

WOLSEY, L. *Integer Programming*. [S.l.]: John Wiley Sons, 1998.

ZHU, X.; WILHELM, W. Scheduling and lot sizing with sequence-dependent setup: A literature review. *IIE Transactions*, v. 38, n. 11, p. 987–1007, 2006. ISSN 0740-817X.

Anexo A

5.1 Modelo GLSP

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t \in T} \sum_{\tau \in N_t} \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} s_{ij} z_{ijt\tau} \quad (5.1)$$

sujeito a:

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + \sum_{\tau \in N_t} x_{jt\tau} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad \forall j, \forall t \quad (5.2)$$

$$\sum_{\tau \in N_t} \sum_{j \in J} p_j x_{jt\tau} + \sum_{\tau \in N_t} \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt\tau} \leq c_t, \quad \forall t \quad (5.3)$$

$$x_{jt\tau} \leq \frac{c_t}{p_j} y_{jt\tau}, \quad \forall j, \forall \tau \in N_t, \forall t \quad (5.4)$$

$$\sum_{j \in J} y_{jt\tau} = 1, \quad \forall \tau \in N_t, \forall t \quad (5.5)$$

$$\sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} z_{ijt\tau} \leq 1, \quad \forall \tau \in N_t, \forall t \quad (5.6)$$

$$y_{it\tau} = 0 \text{ ou } 1; z_{ijt\tau}; I_{jt}; x_{jt\tau} \geq 0; \quad \forall j, t, \tau \in N_t. \quad (5.7)$$

5.2 Modelo MTZ1S1M

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} s_{ij} z_{ijt} \quad (5.8)$$

sujeito a:

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad \forall j, \forall t \quad (5.9)$$

$$\sum_{j \in J} p_j x_{jt} + \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt} \leq C_t, \quad \forall t \quad (5.10)$$

$$x_{jt} \leq \frac{C_t}{p_{jt}} \left(\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J z_{ijt} \right), \quad \forall j, \forall t \quad (5.11)$$

$$\sum_{j \in J} z_{i_0jt} \geq \sum_{i=i_0}^J z_{ikt}, \quad \forall k \in J; k \neq i, \forall t \quad (5.12)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^J z_{kjt}, \quad \forall k \in J, \forall t \quad (5.13)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt} \leq 1, \quad \forall i = i_0, 1, \dots, J, \forall t \quad (5.14)$$

$$u_{jt} \geq u_{it} + 1 - (J)(1 - z_{ijt}); \quad \forall i, \forall j; i \neq j; \forall t \quad (5.15)$$

$$x_{jt} \geq 0, z_{ijt} = 0/1, \quad \forall i, j; \forall t. \quad (5.16)$$

5.3 Modelo DL1S1M

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} s_{ij} z_{ijt} \quad (5.17)$$

sujeito a:

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad \forall j, \forall t \quad (5.18)$$

$$\sum_{j \in J} p_j x_{jt} + \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt} \leq C_t, \quad \forall t \quad (5.19)$$

$$x_{jt} \leq \frac{C_t}{p_{jt}} \left(\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J z_{ijt} \right), \quad \forall j, \forall t \quad (5.20)$$

$$\sum_{j \in J} z_{i_0 jt} \geq \sum_{i=i_0}^J z_{ikt}, \quad \forall k \in J; k \neq i, \forall t \quad (5.21)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^J z_{kjt}, \quad \forall k \in J, \forall t \quad (5.22)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt} \leq 1, \quad \forall i = i_0, 1, \dots, J, \forall t \quad (5.23)$$

$$u_{it} - u_{jt} + (J)z_{ijt} + (J-2)z_{jit} \leq J-1 \quad \forall i, \forall j; i \neq j; \forall t \quad (5.24)$$

$$x_{jt} \geq 0, z_{ijt} = 0/1, \quad \forall i, j; \forall t. \quad (5.25)$$

5.4 Modelo SD1S1M

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} s_{ij} z_{ijt} \quad (5.26)$$

sujeito a:

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad \forall j, \forall t \quad (5.27)$$

$$\sum_{j \in J} p_j x_{jt} + \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt} \leq C_t, \quad \forall t \quad (5.28)$$

$$x_{jt} \leq \frac{C_t}{p_{jt}} \left(\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J z_{ijt} \right), \quad \forall j, \forall t \quad (5.29)$$

$$\sum_{j \in J} z_{i_0jt} \geq \sum_{i=i_0}^J z_{ikt}, \quad \forall k \in J; k \neq i, \forall t \quad (5.30)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^J z_{kjt}, \quad \forall k \in J, \forall t \quad (5.31)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt} \leq 1, \quad \forall i = i_0, 1, \dots, J, \forall t \quad (5.32)$$

$$\sum_{j=1}^J y_{ijt} + (J)z_{i_0t} = u_{it}; \quad \forall i \quad (5.33)$$

$$\sum_{i=1}^J y_{ijt} + 1 = u_{jt}; \quad \forall j \quad (5.34)$$

$$z_{ijt} \leq y_{ijt} \leq (J)z_{ijt}; \quad \forall i, j \quad (5.35)$$

$$u_{jt} + (J-1)z_{ijt} - J(1-z_{jit}) \leq y_{ijt} + y_{jit} \quad \forall i, j \quad (5.36)$$

$$y_{ijt} + y_{jit} \leq u_{it} - (1-z_{jit}) \quad \forall i, j \quad (5.37)$$

$$x_{jt} \geq 0, z_{ijt} = 0/1, \quad \forall i, j; \forall t. \quad (5.38)$$

5.5 Modelo DFJ1S1M

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} s_{ij} z_{ijt} \quad (5.39)$$

sujeito a:

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad \forall j, \forall t \quad (5.40)$$

$$\sum_{j \in J} p_j x_{jt} + \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt} \leq C_t, \quad \forall t \quad (5.41)$$

$$x_{jt} \leq \frac{C_t}{p_{jt}} \left(\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J z_{ijt} \right), \quad \forall j, \forall t \quad (5.42)$$

$$\sum_{j \in J} z_{i_0jt} \geq \sum_{i=i_0}^J z_{ikt}, \quad \forall k \in J; k \neq i, \forall t \quad (5.43)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^J z_{kjt}, \quad \forall k \in J, \forall t \quad (5.44)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt} \leq 1, \quad \forall i = i_0, 1, \dots, J, \forall t \quad (5.45)$$

$$\sum_{i, j \in S_r} z_{ijt} \leq |S_r| - 1 \quad \forall t; S_r \subset \{1, \dots, J\}; 2 \leq |S_r| \leq J - 1 \quad (5.46)$$

$$x_{jt} \geq 0, z_{ijt} = 0/1, \quad \forall i, j; \forall t. \quad (5.47)$$

5.6 Modelo MCF1S1M

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} s_{ij} z_{ijt} \quad (5.48)$$

sujeito a:

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad \forall j, \forall t \quad (5.49)$$

$$\sum_{j \in J} p_j x_{jt} + \sum_{i \in J} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} b_{ij} z_{ijt} \leq C_t, \quad \forall t \quad (5.50)$$

$$x_{jt} \leq \frac{C_t}{p_{jt}} \left(\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J z_{ijt} \right), \quad \forall j, \forall t \quad (5.51)$$

$$\sum_{j \in J} z_{i_0jt} \geq \sum_{i=i_0}^J z_{ikt}, \quad \forall k \in J; k \neq i, \forall t \quad (5.52)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^J z_{ikt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^J z_{kjt}, \quad \forall k \in J, \forall t \quad (5.53)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^J z_{ijt} \leq 1, \quad \forall i = i_0, 1, \dots, J, \forall t \quad (5.54)$$

$$\sum_{j \in J} m_{ri_0jt} - \sum_{j \in J} m_{rj i_0t} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J z_{jrt}, \quad \forall r, \forall t \quad (5.55)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J m_{rjrt} - \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J m_{rrjt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq r}}^J z_{jrt}, \quad \forall r, \forall t \quad (5.56)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J m_{rijt} = \sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^J m_{rjit}, \quad \forall r, \forall j; j \neq r, \forall t \quad (5.57)$$

$$m_{rijt} \leq z_{ij} \quad \forall i, j = i_0, 1, \dots, J; \forall r; \forall t \quad (5.58)$$

$$x_{jt} \geq 0, m_{rijt} \geq 0, z_{ijt} = 0/1 \quad \forall i, j, r; \forall t. \quad (5.59)$$