



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Uma Introdução ao Estudo de Fibrados Vetoriais

Eliete Grasiela Both

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Matemática Universitária do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
como requisito parcial para a obtenção do tí-
tulo de Mestre

Orientador
Prof. Dr. João Peres Vieira

2012

512.523	Both, Eliete Grasiela
B749i	Uma Introdução ao Estudo de Fibrados Vetoriais/ Eliete Grasiela Both. - Rio Claro: [s.n.], 2012. 69 f. : il., figs. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas Orientador: João Peres Vieira 1. Espaços Vetoriais. 2. Variedades Suaves. 3. Espaços Quociente de Grupos. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Eliete Grasiela Both

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE FIBRADOS VETORIAIS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Peres Vieira
Orientador

Prof. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade
IBILCE - Unesp - São José do Rio Preto

Prof. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis
IGCE - Unesp - Rio Claro

Rio Claro, 21 de março de 2012

*A meus pais Alfredo e Salete
e a meus irmãos Bruna e Cássio*

Agradecimentos

A Deus por sempre ter me iluminado e protegido permitindo-me chegar até aqui.

Ao meu orientador, professor Dr. João Peres Vieira, pela oportunidade de crescimento científico e intelectual, pelo incentivo, paciência e confiança em mim depositada.

Aos meus pais por seus ensinamentos, valores e conselhos que em nenhuma instituição poderia obter. Por me apoiarem em todas as minhas escolhas, estarem presentes em todas as etapas de minha vida e por terem me dado o melhor exemplo de amor e carinho.

Aos meus irmãos por serem meus melhores amigos e pessoas nas quais sempre irei me espelhar.

Ao professor e amigo Ms. Daniel da Silveira Guimarães que sempre acreditou em mim e me incentivou a chegar até aqui.

Aos meus amigos pelo companheirismo, pelas conversas e por deixarem esta etapa mais prazerosa.

A todos os professores do programa de pós graduação em Matemática Universitária do IGCE da UNESP de Rio Claro, por contribuírem em minha formação.

*Do mesmo modo que na matemática uma reta pode ser uma curva,
o homem pode ser o que quiser, independente de sua origem.*

Maytê Moraes M.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma breve introdução à teoria de variedades diferenciáveis de classe C^∞ e seus espaços tangentes, estudamos e construímos alguns fibrados vetoriais a partir de fibrados dados e consideramos alguns exemplos de espaços quocientes de grupo.

Palavras-chave: Espaços Vetoriais, Variedades Suaves, Espaços Quociente de Grupos.

Abstract

In this work we present a brief introduction to the theory of differentiable of class C^∞ manifolds and its tangent spaces, we study and constructing new vector bundles out of old and we consider some examples of factor spaces of groups.

Keywords: Vector Spaces, Smooth Manifolds, Factor Spaces of Groups.

Lista de Figuras

1.1	O espaço tangente a M em x	21
2.1	Espaço total do fibrado linha canônico sobre P^1	31
2.2	Seção não nula do fibrado tangente do círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$	32
3.1	Imersão do círculo no plano.	39
4.1	3-frame transladado ao longo de v_1	51

Sumário

Introdução	17
1 Variedades Suaves	19
2 Fibrados Vetoriais	27
2.1 Fibrados Vetoriais Euclidianos	33
3 Construção de Fibrados a Partir de Fibrados Dados	35
4 Espaços Quociente de Grupos	43
4.1 Espaços Quociente de Grupos	46
4.2 Translações de Espaços Quociente	46
4.3 Grupos Transitivos	47
4.4 O Teorema da Estrutura Fibrada	48
4.5 Aplicações do Teorema da Estrutura Fibrada	50
4.5.1 Grupos Ortogonais	50
4.5.2 Variedades de Stiefel	51
4.5.3 Variedades de Grassmann	52
Referências	55
A Apêndice 1	57
A.1 Categorias	57
A.2 Funtores	58
B Apêndice 2	59
B.1 Quatérnions	59
C Apêndice 3	61
C.1 Aplicação r -linear	61
C.2 Aplicação Simétrica	61
D Apêndice 4	63
D.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt	63

E	Apêndice 5	65
E.1	Idéia da prova da observação 3.10	65
F	Apêndice 6	67
F.1	Módulos	67
F.2	Módulo Livre Gerado por um Conjunto e Propriedade Universal para Módulos Quocientes	67
F.3	Produto tensorial	68

Introdução

Na Topologia Diferencial, um assunto de interesse é o estudo da teoria de variedades diferenciáveis de classe C^∞ e de seus espaços tangentes, bem como o estudo e a construção de alguns fibrados vetoriais.

No primeiro capítulo é apresentada uma breve introdução à teoria de variedades diferenciáveis de classe C^∞ e seus espaços tangentes.

O segundo capítulo traz o conceito de fibrados vetoriais, bem como alguns resultados relevantes para este estudo. Finalizando o capítulo, apresentamos um estudo de fibrados vetoriais nos quais cada fibra tem a estrutura de um espaço vetorial Euclidiano.

As construções básicas envolvendo fibrados vetoriais são apresentadas no terceiro capítulo deste texto.

Para finalizar o trabalho, apresentamos, no capítulo quatro, o conceito de fibrado coordenado e consideramos vários exemplos de espaços quocientes de grupo.

1 Variedades Suaves

Este capítulo contém uma breve introdução à teoria das variedades suaves e seus espaços tangentes.

Denotemos por $\mathbb{R}^n$ o espaço coordenado consistindo de todas as n -uplas $x = (x_1, \dots, x_n)$ de números reais. Para o caso especial $n = 0$ consideremos que $\mathbb{R}^0$ consiste de um único ponto. O conjunto dos números reais será denotado por $\mathbb{R}$.

A palavra “suave” será usada como um sinônimo para “diferenciável de classe C^∞ ” e “ s -suave” será usada como um sinônimo para “diferenciável de classe C^s ”. Assim uma função definida em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^k$ é suave se suas derivadas parciais de todas as ordens existem e são contínuas e é s -suave se suas derivadas parciais até a ordem s existem e são contínuas.

Para alguns propósitos é conveniente usar um espaço coordenado $\mathbb{R}^A$, o qual pode ser de dimensão infinita. Seja A qualquer conjunto de índices e denotemos por $\mathbb{R}^A$ o espaço vetorial que consiste de todas as funções x de A em $\mathbb{R}$. O valor de um vetor $x \in \mathbb{R}^A$ sobre $a \in A$ será denotado por x_a e chamado a a -ésima coordenada de x . De maneira similar, para qualquer função $f : Y \rightarrow \mathbb{R}^A$, a a -ésima coordenada de $f(y)$ será denotada por $f_a(y)$.

Uma topologia é dada a este espaço $\mathbb{R}^A$ como um produto cartesiano de cópias de $\mathbb{R}$, a saber, a topologia produto. Para qualquer subconjunto $M \subset \mathbb{R}^A$ é dada a topologia relativa. Assim uma função $f : Y \rightarrow M \subset \mathbb{R}^A$ é contínua se e somente se cada função coordenada $f_a : Y \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Aqui Y pode ser um espaço topológico arbitrário.

Definição 1.1. Se $U \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^A$ é dita suave se cada função coordenada $f_a : U \rightarrow \mathbb{R}$ for suave. Se f é suave, então as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ podem ser definidas como funções suaves de U em $\mathbb{R}^A$ cuja a -ésima coordenada é $\frac{\partial f_a}{\partial u_i}$, para $i = 1, \dots, n$.

O mais clássico e familiar exemplo de variedades suaves são as curvas e as superfícies no espaço coordenado $\mathbb{R}^3$. Generalizando a clássica descrição de curvas e superfícies, nós consideraremos objetos n -dimensionais em um espaço $\mathbb{R}^A$.

Definição 1.2. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^A$ é uma variedade suave de dimensão $n \geq 0$ se para cada $x \in M$ existe uma função suave $h : U \rightarrow \mathbb{R}^A$ definida em um conjunto

aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

1. h é um homeomorfismo de U sobre uma vizinhança V de x em M , e
2. para cada $u \in U$ a matriz $\left[\frac{\partial h_a(u)}{\partial u_j} \right]$ possui posto n . (Em outras palavras, os n vetores $\frac{\partial h}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial u_n}$, avaliados em u devem ser linearmente independentes.)

A imagem $h(U) = V$ dessa aplicação será chamada vizinhança coordenada de M , e a terna (U, V, h) será chamada uma parametrização local de M .

Teorema 1.3. Teorema da Função Inversa: *Seja f uma aplicação s -suave ($s \geq 1$) do conjunto aberto $R \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e suponha $J_f(p_0) \neq 0$, onde J_f é o jacobiano de f . Então existem vizinhanças U de p_0 e U' de $q_0 = f(p_0)$, tais que f é aplicação injetora de U em U' e f^{-1} , considerada em U' somente, é s -suave, com $J_{f^{-1}}(q_0) \neq 0$.*

Teorema 1.4. Teorema (Forma Local das Imersões): *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ de classe C^k ($k \geq 1$). Suponha que exista $x_0 \in U$ tal que $f'(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é injetiva. Então existe um difeomorfismo de classe C^k , $h : Z \rightarrow V \times W$, de uma vizinhança Z de $f(x_0)$ sobre um aberto $V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, ($x_0 \in V, 0 \in W, f(V) \subset Z$) tal que $h(f(x)) = (x, 0)$, $\forall x \in V$.*

Corolário 1.5. *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é de classe C^k ($k \geq 1$) e $f'(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é injetiva para algum $x_0 \in U$ então, em uma vizinhança V de x_0 , $f : V \rightarrow f(V)$ é um homeomorfismo, cujo inverso $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$ é a restrição de uma aplicação de classe C^k , $\phi : Z \rightarrow V$, onde Z é uma vizinhança de $f(x_0)$*

Observação 1.6. Consideremos uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M \subset \mathbb{R}^A$. Sempre que nos referirmos à imagem inversa de M por f usaremos a notação $f^{-1}(M)$, já quando nos referirmos à imagem direta de M pela função inversa de f , utilizaremos a notação $f^{-1}(M)$.

Lema 1.7. *Sejam (U, V, h) e (U', V', h') duas parametrizações locais de M tais que $V \cap V'$ é não-vazia. Então a correspondência $u' \mapsto h^{-1}(h'(u'))$ define uma aplicação suave do conjunto aberto $(h')^{-1}(V \cap V') \subset \mathbb{R}^n$ no conjunto aberto $h^{-1}(V \cap V') \subset \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $\bar{x} = h(\bar{u}) = h'(\bar{u}')$ um ponto arbitrário de $V \cap V'$. Escolhamos índices $a_1, \dots, a_n \in A$ de modo que a matriz $\left[\frac{\partial h_{a_i}}{\partial u_j} \right]$ de ordem $n \times n$, com valores em $\bar{u}$, seja não-singular. Então, pelo Teorema da Função Inversa, pode-se escrever $u_1, \dots, u_n$ como funções suaves $u_j = f_j(h_{a_1}(u), \dots, h_{a_n}(u))$ para u em alguma vizinhança de $\bar{u}$. Escrevendo esta equação em notação vetorial na forma $u = f(h_{a_1}(u), \dots, h_{a_n}(u))$ e definindo $h(u) = h'(u')$, segue que a função $u' \mapsto h^{-1}(h'(u')) = f(h'_{a_1}(u'), \dots, h'_{a_n}(u'))$ é suave para alguma vizinhança de u' . Isto completa a prova. $\square$

Seja $\bar{x}$ um ponto fixado de M e seja $(-\varepsilon, \varepsilon) = \{t \in \mathbb{R}; -\varepsilon < t < \varepsilon\}$. Um caminho suave em M e passando por $\bar{x}$ é determinado por uma função suave $p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow$

$M \subset \mathbb{R}^A$, definida em algum intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p(0) = \bar{x}$. O vetor velocidade de tal caminho em $t = 0$ é definido como sendo o vetor $\frac{dp}{dt}|_{t=0} \in \mathbb{R}^A$ cuja a -ésima componente é $\frac{dp_a(0)}{dt}$. Observe a Figura 1.1.

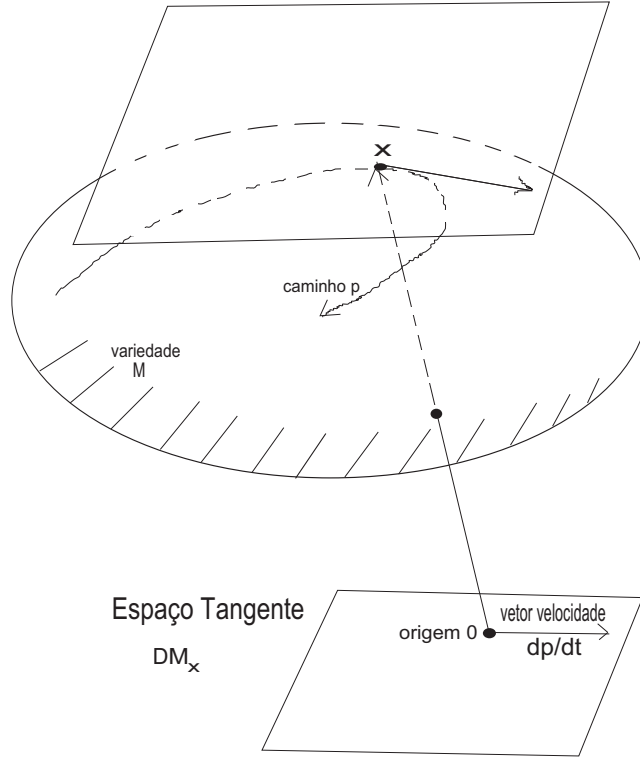


Figura 1.1: O espaço tangente a M em x

Definição 1.8. Um vetor $v \in \mathbb{R}^A$ é tangente a M em x se pode ser expresso como o vetor velocidade de algum caminho suave através de x em M . O conjunto de todos estes vetores tangentes será chamado o espaço tangente a M em x , e será denotado por DM_x .

Em termos de uma parametrização local (U, V, h) com $h(\bar{u}) = \bar{x}$, o espaço tangente pode ser descrito como segue.

Lema 1.9. Um vetor $v \in \mathbb{R}^A$ é tangente a M em $\bar{x}$ se e somente se v pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $\frac{\partial h}{\partial u_1}(\bar{u}), \dots, \frac{\partial h}{\partial u_n}(\bar{u})$. Assim, $DM_{\bar{x}}$ é um espaço vetorial n -dimensional sobre os números reais.

Demonstração. Consideremos a curva $p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^A$ e a função $h : U \rightarrow V \subset M$, onde (U, V, h) é uma parametrização local de M em torno de $\bar{x}$, de modo que $p(t) = h(u_1(t), \dots, u_n(t))$. Como v é tangente a M em $\bar{x}$ temos

$$v = \frac{d}{dt}(p(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(h(u_1(t), \dots, u_n(t)))|_{t=0} = \frac{\partial h}{\partial u_1}(\bar{u}) \frac{du_1}{dt}|_{t=0} + \dots + \frac{\partial h}{\partial u_n}(\bar{u}) \frac{du_n}{dt}|_{t=0}.$$

Então v pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $\frac{\partial h}{\partial u_1}(\bar{u}), \dots, \frac{\partial h}{\partial u_n}(\bar{u})$.

Por outro lado, tomemos $v = \alpha_1 \frac{\partial h}{\partial u_1}(\bar{u}) + \dots + \alpha_n \frac{\partial h}{\partial u_n}(\bar{u})$ e definamos a curva $p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^A$, dada por $p(t) = h(u_1(t), \dots, u_n(t))$, com $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\bar{u} \in U$ e $u_1(t) = u_1 + t\alpha_1, \dots, u_n(t) = u_n + t\alpha_n$. Então temos

$$\frac{dp}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial h}{\partial u_1}(\bar{u}) \frac{du_1}{dt}\bigg|_{t=0} + \dots + \frac{\partial h}{\partial u_n}(\bar{u}) \frac{du_n}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial h}{\partial u_1}(\bar{u})\alpha_1 + \dots + \frac{\partial h}{\partial u_n}(\bar{u})\alpha_n = v.$$

Então v é tangente a M em $\bar{x}$.

Desse modo, como $\frac{\partial h}{\partial u_1}(\bar{u}), \dots, \frac{\partial h}{\partial u_n}(\bar{u})$ geram $DM_{\bar{x}}$ e, pela Definição 1.2, são linearmente independentes, então formam uma base para $DM_{\bar{x}}$. Logo, $DM_{\bar{x}}$ é um espaço vetorial n -dimensional sobre os números reais. □

O fibrado tangente de M é definido como sendo o subespaço $DM \subset M \times \mathbb{R}^A$ consistindo de todos os pares (x, v) com $x \in M$ e $v \in DM_x$. Segue pelo Lema 1.9 que DM , considerado como um subconjunto de $\mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^A$, é uma variedade suave de dimensão $2n$.

Consideremos agora duas variedades suaves $M \subset \mathbb{R}^A$ e $N \subset \mathbb{R}^B$, e uma função $f : M \rightarrow N$. Seja $\bar{x}$ um ponto de M e (U, V, h) uma parametrização local de M com $\bar{x} = h(\bar{u})$.

Definição 1.10. A função f é dita suave em $\bar{x}$ se a composta $f \circ h : U \rightarrow N \subset \mathbb{R}^B$ é suave em alguma vizinhança de $\bar{u}$.

Segue do Lema 1.7 que esta definição não depende da escolha da parametrização local.

Definição 1.11. A função $f : M \rightarrow N$ é suave se é suave em x para todo $x \in M$. A função $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo se é bijetora, e se f e a sua inversa f^{-1} são ambas suaves.

Lema 1.12. A aplicação identidade de M é sempre suave. Além disso, a composição $f \circ g : M \rightarrow M''$ de duas aplicações suaves, $f : M' \rightarrow M''$ e $g : M \rightarrow M'$, é suave.

Demonstração. Temos pela Definição 1.10 que a aplicação identidade $Id : M \rightarrow M$ é sempre suave.

Agora, seja $x \in M$ qualquer e tomemos (U, V, h) e (U', V', h') parametrizações locais de M e M' , respectivamente. Consideremos $g : M \rightarrow M'$ e $f : M' \rightarrow M''$ duas funções suaves e tomemos $x' = g(x) \in V' \subset M'$, para $x \in V \subset M$. Pela Definição 1.11 se g é suave em M , então g é suave em x e se f é suave em M' , então f é suave em x' . Agora, pela Definição 1.10, f suave em x' implica $f \circ h'$ suave em alguma vizinhança de u' tal que $h'(u') = x'$ e g suave em x implica $g \circ h$ suave em alguma vizinhança de u , tal que $h(u) = x$. Logo, $(f \circ g) \circ h = (f \circ h') \circ h'^{-1} \circ (g \circ h)$ é suave em alguma vizinhança de u , tal que $h(u) = x$. Então $f \circ g$ é suave em $x = h(u)$, ou seja, $f \circ g$ é suave em M . □

Qualquer aplicação $f : M \rightarrow N$ que é suave em x determina uma aplicação linear Df_x do espaço tangente DM_x no espaço tangente $DN_{f(x)}$ como segue: dado $v \in DM_x$, v é expresso como o vetor velocidade $v = \frac{dp}{dt}|_{t=0}$ de algum caminho suave p em M passando por x , e define $Df_x(v)$ como o vetor velocidade $\frac{d(f \circ p)}{dt}|_{t=0}$, a imagem do caminho $f \circ p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$.

Note que esta definição não depende da escolha de p (conforme observamos na demonstração do Lema 1.9), e que Df_x é uma aplicação linear.

De fato, em termos de uma parametrização local (U, V, h) , possui uma fórmula explícita $Df_x(\sum c_i \frac{\partial h}{\partial u_i}) = \sum c_i \frac{\partial(f \circ h)}{\partial u_i}$, para quaisquer números reais $c_1, \dots, c_n$.

Definição 1.13. A transformação linear Df_x é chamada a “derivada”, ou o “Jacobi-ano” de f em x .

Agora, suponha que $f : M \rightarrow N$ é suave. Assim, obtemos uma função $Df : DM \rightarrow DN$ colocando $Df(x, v) = (f(x), Df_x(v))$.

Lema 1.14. D é um funtor da categoria¹ de variedades suaves e aplicações suaves em si mesma.

Em outras palavras:

- (1) Se M é uma variedade suave, então DM é uma variedade suave.
- (2) Se f é uma aplicação suave de M em N , então Df é uma aplicação suave de DM em DN .
- (3) Se I é a aplicação identidade de M , então DI é a aplicação identidade de DM .
- (4) Se a composição $f \circ g$ de duas aplicações suaves está definida, então $D(f \circ g) = (Df) \circ (Dg)$.

Demonstração. (1) Se M é uma variedade suave, digamos de dimensão $n \geq 0$, então, para cada $x \in M$ existe uma função suave $h : U \rightarrow \mathbb{R}^A$ definida em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

1. h é um homeomorfismo de U em uma vizinhança V de x em M , e
2. para cada $u \in U$ a matriz $\left[\frac{\partial h_a(u)}{\partial u_j} \right]$ possui posto n .

Assim,

1. se $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V$ é uma parametrização de M , defina $\bar{h} : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow DM$ por $\bar{h}(u, v) = (h(u), h'(u) \cdot v)$. Logo $\bar{h}$ é um homeomorfismo sobre a imagem e pelo Teorema da Forma Local das Imersões, existe $\varphi : W \subset \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave tal que $V \subset W$ e $\varphi|_V = h^{-1}$. Defina $\bar{\varphi} : DV \subset \mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^A \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ por $\bar{\varphi}(p, w) = (h^{-1}(p), \varphi'(p) \cdot w)$.

Então, $\bar{h} \circ \bar{\varphi}(p, w) = \bar{h}(h^{-1}(p), \varphi'(p) \cdot w) = (p, h'(h^{-1}(p)) \cdot \varphi'(p) \cdot w)$. Mas $h^{-1}(p) = \varphi(p)$ e assim $\bar{h} \circ \bar{\varphi}(p, w) = (p, (h \circ \varphi)'(p) \cdot w) = (p, w)$ desde que $h \circ \varphi = Id$.

Ainda, $\bar{\varphi} \circ \bar{h}(u, v) = \bar{\varphi}(h(u), h'(u) \cdot v) = (u, \varphi'(h(u)) \cdot h'(u) \cdot v) = (u, (\varphi \circ h)'(u) \cdot v) = (u, v)$ desde que $\varphi \circ h = Id$.

¹As definições de funtor e categoria encontram-se em A Apêndice 1

2. para cada $(u, v) \in U \times \mathbb{R}^A$ a matriz $\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial h_a(u)}{\partial u_j} \right] & 0 \\ 0 & \left[\delta_{ij} \right] \end{bmatrix}$ possui posto $2n$ pois $\left[\frac{\partial h_a(u)}{\partial u_j} \right]$ possui posto n e $\left[\delta_{ij} \right]$ é a matriz identidade (δ_{ij} é o delta de Kronecker).
- (2) Seja (x, v) qualquer em DM . Temos que $Df(x, v) = (f(x), Df_x(v))$, onde f e Df_x são ambas suaves. Logo, Df é suave em (x, v) , para todo $(x, v) \in DM$.
- (3) Seja (x, v) qualquer em DM . Temos que $DI(x, v) = (I(x), DI_x(v)) = (x, v)$, pois $DI_x = I$. Logo, DI é a aplicação identidade de DM .
- (4) Seja (x, v) qualquer em DM . Temos que $D(f \circ g)(x, v) = ((f \circ g)(x), D(f \circ g)_x(v)) = (f(g(x)), Df_{g(x)}(Dg_x(v))) = D(f)(g(x), Dg_x(v)) = (Df \circ Dg)(x, v)$. Portanto, $D(f \circ g) = Df \circ Dg$.

□

Uma consequência imediata é a seguinte: se f é um difeomorfismo de M em N , então Df é um difeomorfismo de DM em DN , pois Df_x é um isomorfismo e nesse caso, $(Df)^{-1}(y, u) = (f^{-1}(y), (Df_x)^{-1}(u))$, onde $y = f(x)$.

Observação 1.15. De acordo com nossas definições, o espaço tangente $D\mathbb{R}_x^n$ do espaço coordenado $\mathbb{R}^n$ em x é o próprio espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Em particular, para qualquer número real u , o espaço tangente $D\mathbb{R}_u$ é igual a $\mathbb{R}$. Assim se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave a valores reais, então a derivada $Df_x : DM_x \rightarrow D\mathbb{R}_{f(x)} = \mathbb{R}$ pode ser pensada como um elemento do espaço vetorial dual $Hom_{\mathbb{R}}(DM_x, \mathbb{R})$, em outras palavras, Df_x é um funcional linear sobre DM_x .

Este elemento Df_x do espaço dual, algumas vezes é chamado o “diferencial total” de f em x e usualmente é denotado por $df(x)$. Note que a regra de Leibniz é satisfeita: $D(fg)_x = f(x)Dg_x + Df_x g(x)$, onde fg representa o produto de funções $x \mapsto f(x)g(x)$.

Para qualquer vetor tangente $v \in DM_x$, o número real $Df_x(v)$ é chamado a derivada direcional de f na direção de v . Se mantivermos (x, v) fixo mas variarmos f ao longo do espaço vetorial $C^\infty(M, \mathbb{R})$ consistindo de todas as funções suaves em M a valores reais, então um operador linear diferencial $X : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser definido pela fórmula $X(f) = Df_x(v)$.

Agora a regra de Leibniz assume a forma $X(fg) = f(x)X(g) + X(f)g(x)$.

Em muitas exposições sobre o assunto, o vetor tangente (x, v) é identificado com este operador linear X .

Um defeito da apresentação acima é que a “suavidade” da variedade M depende de alguns mergulhos particulares de M em um espaço de coordenadas. É possível, no entanto, embutir canonicamente qualquer variedade suave M num espaço coordenado que se queira.

Definição 1.16. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e injetora, onde X e Y são espaços topológicos. Seja Z o conjunto imagem $f(X)$, considerado como um subespaço

de Y . Então a função $f' : X \rightarrow Z$, obtida restringindo-se a imagem de f , é bijetora. Se f' for um homeomorfismo de X em Z , nós dizemos que a aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um mergulho topológico, ou simplesmente, um mergulho de X em Y .

Dada uma variedade suave $M \subset \mathbb{R}^A$, denote $F = C^\infty(M, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções suaves de M no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Defina o mergulho $i : M \rightarrow \mathbb{R}^F$ por $i(x)(f) = f(x)$. Seja M_1 a imagem $i(M) \subset \mathbb{R}^F$.

Lema 1.17. *Esta imagem M_1 é uma variedade suave em $\mathbb{R}^F$, e a aplicação canônica $i : M \rightarrow M_1$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. (1) Se M é uma variedade suave, digamos de dimensão $n \geq 0$, então, para cada $x \in M$ existe uma função suave $h : U \rightarrow \mathbb{R}^A$ definida em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

1. h é um homeomorfismo de U em uma vizinhança V de x em M , e
2. para cada $u \in U$ a matriz $\left[\frac{\partial h_a(u)}{\partial u_j} \right]$ possui posto n .

Assim, para cada $i(x) \in M_1$ considere a função suave $i \circ h : U \rightarrow \mathbb{R}^F$ definida no conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então:

1. $i \circ h$ é um homeomorfismo de U na vizinhança $i(V)$ de $i(x)$ em M_1 , pois $h : U \rightarrow V$ e $i : V \rightarrow i(V)$ são homeomorfismos.

2. para cada $u \in U$ a matriz $\left[\frac{\partial (i \circ h)_f(u)}{\partial u_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_a(u)}{\partial u_j} \\ 0 \end{bmatrix}$ e portanto possui posto n .

Ainda, $i : M \rightarrow M_1$ é um difeomorfismo, pois i é bijetora, e i e sua inversa i^{-1} são suaves, uma vez que $i \circ h$ e $i^{-1} \circ (i \circ h) = h$ são suaves. $\square$

Assim, qualquer variedade suave tem um mergulho canônico em um espaço coordenado associado.

Isso sugere a definição a seguir.

Seja M um conjunto e seja F uma coleção de funções de M em $\mathbb{R}$ que separam pontos (isto é, dados $x, y \in M$ com $x \neq y$ existe $f \in F$ com $f(x) \neq f(y)$). Então M pode ser identificada com sua imagem via o mergulho canônico $i : M \rightarrow \mathbb{R}^F$.

Definição 1.18. *A coleção F é dita uma estrutura suave sobre M se o subconjunto $i(M) \subset \mathbb{R}^F$ é uma variedade suave e se F é exatamente o conjunto de todas as funções suaves a valores reais sobre esta variedade suave.*

Finalizamos este capítulo com a seguinte definição:

Definição 1.19. *Seja $M \subset \mathbb{R}^A$ uma variedade suave. Por uma subvariedade suave de M entendemos um subconjunto $N \subset M$ tal que $N \subset \mathbb{R}^A$ é uma variedade suave.*

2 Fibrados Vetoriais

Neste capítulo apresentamos um estudo, baseado em Milnor e Stasheff [1], sobre fibrados vetoriais, em particular um estudo sobre fibrados vetoriais cuja fibra tem a estrutura de um fibrado vetorial euclidiano.

Denotemos B um espaço topológico fixo, que será chamado o *espaço base*.

Definição 2.1. *Um fibrado vetorial real ξ sobre B consiste do seguinte:*

- (1) *um espaço topológico $E = E(\xi)$ chamado o **espaço total**,*
- (2) *uma aplicação (contínua e sobrejetora) $\pi : E \rightarrow B$ chamada **aplicação projeção**, e*
- (3) *para cada $b \in B$, uma estrutura de um espaço vetorial sobre os números reais no conjunto $\pi^{-1}(b)$.*

Estes devem satisfazer a seguinte condição:

Condição de trivialidade local. Para cada ponto $b \in B$ existirá uma vizinhança $U \subset B$, um inteiro $n \geq 0$, e um homeomorfismo $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que, para cada $b \in U$, a correspondência $x \mapsto h(b, x)$ define um isomorfismo entre o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e o espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$.

O par (U, h) será chamado um **sistema de coordenadas locais para ξ sobre b** . Se for possível escolher U igual ao espaço base todo, então ξ será chamado **fibrado trivial**.

O espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ é chamado a **fibra** sobre b . Ele pode ser denotado por F_b ou $F_b(\xi)$. Note que F_b nunca é vazio, embora possa consistir de um único ponto. A dimensão n de F_b é permitida ser uma função (localmente constante) de b ; mas na maioria dos casos de interesse esta função é constante. Nesse caso nos referiremos a um **fibrado n -plano**, ou simplesmente um **$\mathbb{R}^n$ -fibrado**.

O conceito de um **fibrado vetorial suave** pode ser definido analogamente. Isso exige que B e E sejam variedades suaves, que π seja uma aplicação suave, e que, para cada $b \in B$, exista um sistema de coordenadas locais (U, h) com $b \in U$ tal que h é um difeomorfismo.

Definição 2.2. *Seja G um grupo e seja X uma variedade. Por uma ação de G sobre X entendemos uma aplicação $\cdot : G \times X \rightarrow X$, que a cada par (g, x) com $g \in G$ e $x \in X$, associa um elemento $g \cdot x$ satisfazendo:*

- a) Para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $x \in X$, temos $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$.
- b) se e é o elemento identidade de G , então $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$.

Definição 2.3. Seja G um grupo de Lie¹ agindo sobre uma variedade X . Dizemos que G é grupo estrutural de um fibrado (E, B, π) com fibra X , se (E, B, π) tem um sistema de coordenadas locais $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in J}$, $\phi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times X$, tal que, sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, para $i, j \in J$,

$$\psi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times X \rightarrow (U_i \cap U_j) \times X$$

é dado por

$$\psi_{ij}(u, x) = (u, \gamma_{ij}(u) \cdot x), \forall x \in X, \forall u \in U_i \cap U_j$$

onde a aplicação $\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, é suave e chamada aplicação de cociclo.

Observação 2.4. Um $\mathbb{R}^n$ -fibrado é um exemplo muito especial de um fibrado vetorial. Na terminologia de Steenrod [2], um $\mathbb{R}^n$ -fibrado é um fibrado vetorial com fibra $\mathbb{R}^n$ e com grupo estrutural igual ao grupo linear completo L_n , isto é, o grupo das transformações lineares inversíveis de $\mathbb{R}^n$.

Agora considere dois fibrados vetoriais ξ e η sobre o mesmo espaço base B .

Definição 2.5. ξ é isomorfo a η , escreve-se $\xi \cong \eta$, se existir um homeomorfismo $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ entre os espaços totais que aplica cada espaço vetorial $F_b(\xi)$ isomorficamente sobre o espaço vetorial correspondente $F_b(\eta)$.

Exemplo 2.6. O fibrado trivial com espaço total $B \times \mathbb{R}^n$ com aplicação projeção $\pi(b, x) = b$ e com as estruturas de espaços vetoriais nas fibras definidas por $t_1(b, x_1) + t_2(b, x_2) = (b, t_1 x_1 + t_2 x_2)$, será denotado por ε_B^n . Note que um $\mathbb{R}^n$ -fibrado sobre B é trivial se, e somente se, é isomorfo a ε_B^n .

Exemplo 2.7. O fibrado tangente τ_M de uma variedade suave M . O espaço total de τ_M é a variedade DM , consistindo de todos os pares (x, v) com $x \in M$ e v tangente a M em x . A aplicação projeção $\pi : DM \rightarrow M$ é definida por $\pi(x, v) = x$; e a estrutura de espaço vetorial em $\pi^{-1}(x)$ é definida por $t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1 v_1 + t_2 v_2)$.

A condição de trivialidade local não é difícil de verificar.

De fato, para todo $x \in M$ existe uma função suave $h : U \rightarrow \mathbb{R}^A$ definida num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que h é um homeomorfismo de U em uma vizinhança V de x em M , e para cada $u \in U$ a matriz $\left[\frac{\partial h_a(u)}{\partial u_j} \right]$ possui posto n .

Definamos então $h' : V \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(V)$ por $h'(x, y) = (x, y_1 \frac{\partial h_a}{\partial u_1}(u) + \dots + y_n \frac{\partial h_a}{\partial u_n}(u))$, onde $x = h(u) \in V$ com $u = (u_1, \dots, u_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Assim, h' é

¹Um grupo de Lie é uma variedade suave que admite uma estrutura de grupo, onde as operações multiplicação e inversão são diferenciáveis.

contínua e $(h')^{-1} : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$, dada por $(h')^{-1}(x, v) = (h')^{-1}(x, \alpha_1 \frac{\partial h_a}{\partial u_1}(u) + \dots + \alpha_n \frac{\partial h_a}{\partial u_n}(u)) = (x, (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$ é a inversa contínua de h' . Desse modo, temos que h' é um homeomorfismo de $V \times \mathbb{R}^n$ em $\pi^{-1}(V)$. Agora, para cada $x \in V$, a correspondência $y \rightarrow h'(x, y)$ define um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e $\pi^{-1}(x)$, pois é uma transformação linear cuja matriz dada por $\left[\frac{\partial h_a(u)}{\partial u_j} \right]$ possui posto n .

Note que τ_M é um exemplo de um fibrado vetorial suave.

Se τ_M é um fibrado trivial, então a variedade M é chamada **paralelizável**. Por exemplo, suponha que M é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Então DM é igual a $M \times \mathbb{R}^n$ e M é, obviamente, paralelizável.

Exemplo 2.8. O fibrado normal ν de uma variedade suave $M \subset \mathbb{R}^n$ é obtido como segue: O espaço total $E \subset M \times \mathbb{R}^n$ é o conjunto de todos os pares (x, v) tais que v é ortogonal ao espaço tangente DM_x . A aplicação projeção $\pi : E \rightarrow M$ e a estrutura de espaço vetorial em $\pi^{-1}(x)$ são definidas, como nos Exemplos 2.6 e 2.7, pelas fórmulas $\pi(x, v) = x$ e $t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1 v_1 + t_2 v_2)$. Neste momento não vamos demonstrar a condição de trivialidade local, mas mais adiante provaremos que de fato este fibrado é um fibrado vetorial.

Exemplo 2.9. O espaço projetivo real P^n pode ser definido como o conjunto de todos os pares não-ordenados $\{x, -x\}$ onde x varia ao longo da esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$; e tem a topologia do espaço quociente $\frac{S^n}{x \sim -x}$.

Alternativamente, P^n pode ser definido como o conjunto das retas pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$. Estas definições são equivalentes, uma vez que cada reta corta S^n em dois pontos antípodas.

Seja $E(\gamma_n^1)$ o subconjunto de $P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ consistindo de todos os pares $(\{\pm x\}, v)$ tal que o vetor v é um múltiplo de $x \in S^n$. Defina $\pi : E(\gamma_n^1) \rightarrow P^n$ por $\pi(\{\pm x\}, v) = \{\pm x\}$. Assim cada fibra $\pi^{-1}(\{\pm x\})$ pode ser identificada com a reta através de x e $-x$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. A cada uma dessas retas, deve ser dada a sua estrutura usual de espaço vetorial. O fibrado vetorial resultante γ_n^1 será chamado o **fibrado linha canônico** sobre P^n .

Provemos que γ_n^1 é localmente trivial. Seja $U \subset S^n$ um conjunto aberto qualquer, suficientemente pequeno, de modo a não conter nenhum par de pontos antípodas, e seja U_1 a imagem de U em P^n . Então um homeomorfismo $h : U_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(U_1)$ é definido cumprindo a exigência que $h(\{\pm x\}, t) = (\{\pm x\}, tx)$ para cada $(x, t) \in U \times \mathbb{R}$. Evidentemente (U_1, h) é um sistema de coordenadas locais; logo, γ_n^1 é localmente trivial.

Apresentaremos agora o conceito de seção de um fibrado vetorial, o qual será utilizado na demonstração do Teorema 2.11 que virá em seguida.

Definição 2.10. Dado um fibrado vetorial $(E(\xi), B, \pi)$, uma seção s de ξ é uma função contínua $s : B \rightarrow E(\xi)$ tal que $\pi \circ s(b) = b$, para cada $b \in B$. Diremos que s é não-nula se $s(b)$ é um vetor **não-nulo na fibra** $F_b(\xi) = \pi^{-1}(b)$, para cada $b \in B$.

(Uma seção do fibrado tangente de uma variedade suave M é usualmente chamada um campo vetorial tangente a M .)

Evidentemente um $\mathbb{R}^m$ -fibrado trivial possui uma seção que é não-nula, a saber $s : B \rightarrow \mathbb{R}^m \times B$ dada por $s(b) = (e_1, b)$. Veremos que o fibrado γ_n^1 não possui seção não-nula.

Relembremos agora o Teorema do Valor Intermediário que nos diz: Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua do espaço conexo X em $\mathbb{R}$. Se a e b são dois pontos de X e se r é um número real entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um elemento $c \in X$ tal que $f(c) = r$.

Teorema 2.11. *O fibrado γ_n^1 sobre P^n não é trivial, para $n \geq 1$.*

Demonstração. Seja $s : P^n \rightarrow E(\gamma_n^1)$ uma seção qualquer, e consideremos a composição $S^n \xrightarrow{\rho} P^n \xrightarrow{s} E(\gamma_n^1)$, que leva cada $x \in S^n$ em algum par $(\{\pm x\}, t(x)x) \in E(\gamma_n^1)$, onde $\rho(x) = \{\pm x\}$. Note que $t(x)$ é uma função contínua a valores reais de x , pois $s \circ \rho$ é contínua e $t(-x) = -t(x)$, pois de $\rho(x) = \rho(-x)$ segue que $s \circ \rho(x) = s \circ \rho(-x)$, ou equivalentemente, $(\{\pm x\}, t(x)x) = (\{\pm x\}, -t(-x)x)$ e portanto $t(-x) = -t(x)$.

Se $t(x) = 0$, s se anula na fibra e portanto o fibrado γ_n^1 sobre P^n não é trivial.

Se $t(x) > 0$ então $t(-x) < 0$. Por S^n ser conexo, segue pelo Teorema do Valor Intermediário que $t(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in S^n$. Logo, $s(\{\pm x_0\}) = (\{\pm x_0\}, 0)$.

Portanto, para qualquer seção s , s se anula na fibra e daí o fibrado γ_n^1 sobre P^n não é trivial. $\square$

É interessante estudarmos o espaço $E(\gamma_1^1)$ para o caso especial $n = 1$. Neste caso cada ponto $e = (\{\pm x\}, v)$ de $E(\gamma_1^1)$ pode ser escrito como $e = (\{\pm(\cos\theta, \sin\theta)\}, t(\cos\theta, \sin\theta))$, com $0 \leq \theta \leq \pi$, $t \in \mathbb{R}$. Esta representação é única, exceto que o ponto $(\{\pm(\cos 0, \sin 0)\}, t(\cos 0, \sin 0))$ é igual ao ponto $(\{\pm(\cos \pi, \sin \pi)\}, -t(\cos \pi, \sin \pi))$, para cada t . Em outras palavras, $E(\gamma_1^1)$ pode ser obtida da faixa $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ no plano (θ, t) identificando-se o lado esquerdo $\{0\} \times \mathbb{R}$ com o lado direito $\{\pi\} \times \mathbb{R}$, via a correspondência $(0, t) \mapsto (\pi, -t)$. Assim $E(\gamma_1^1)$ é uma faixa aberta de Möbius. Veja a Figura 2.1.

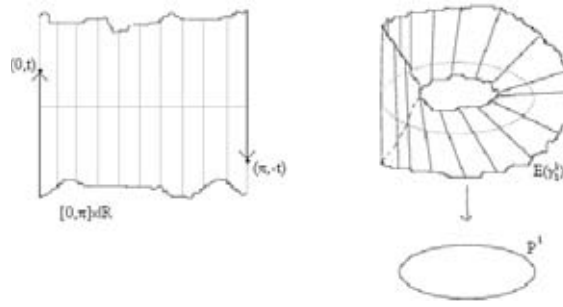


Figura 2.1: Espaço total do fibrado linha canônico sobre P^1

Esta descrição fornece uma prova alternativa que γ_1^1 é não trivial, uma vez que a faixa de Möbius é não-homeomorfa ao cilindro $P^1 \times \mathbb{R}$.

Agora consideremos uma coleção $\{s_1, \dots, s_n\}$ de seções de um fibrado vetorial ξ .

Definição 2.12. *As seções $s_1, \dots, s_n$ são linearmente independentes se, para cada $b \in B$, os vetores $s_1(b), \dots, s_n(b)$ são linearmente independentes.*

Lema 2.13. *Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre B e seja $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ uma função contínua que leva cada espaço vetorial $F_b(\xi)$ isomorficamente no espaço vetorial correspondente $F_b(\eta)$. Então f é necessariamente um homeomorfismo. Logo ξ é isomorfo a η .*

Demonstração. Se $e \in E(\eta)$ então $e \in F_{b'}(\eta)$ onde $b' = \pi_\eta(e)$. Como $f : F_{b'}(\xi) \rightarrow F_{b'}(\eta)$ é um isomorfismo, existe $x \in F_{b'}(\xi)$ tal que $f(x) = e$. Se $e_1 \neq e_2 \in E(\xi)$ são tais que $\pi_\xi(e_1) = \pi_\xi(e_2) = b$, como $f : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta)$ é um isomorfismo segue que $f(e_1) \neq f(e_2)$. Portanto existe f^{-1} .

Dado qualquer $b_0 \in B$, escolhamos um sistema de coordenadas locais (U, g) para ξ e (V, h) para η , com $b_0 \in U \cap V$. Então mostremos que a composição $h^{-1} \circ f \circ g : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo. Escrevendo $h^{-1}(f(g(b, x))) = (b, y)$, observe que $y = (y_1, \dots, y_n)$ pode ser expresso da forma $y_i = \sum_j f_{ij}(b)x_j$, onde $[f_{ij}(b)]$ denota uma matriz não-singular de números reais. Além disso, as entradas $f_{ij}(b)$ dependem continuamente de b . Seja $[F_{ji}(b)]$ a matriz inversa. Então $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h(b, y) = (b, x)$, onde $x_j = \sum_i F_{ji}(b)y_i$. Desde que os números $F_{ji}(b)$ dependem continuamente da matriz $[f_{ij}(b)]$, eles dependem continuamente de b . Assim $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h$ é contínua.

Desde que dadas duas funções ϕ e ψ , sempre que $\phi \circ \psi$ é contínua e ϕ é homeomorfismo implica que ψ é contínua e sempre que $\phi \circ \psi$ é contínua e ψ é homeomorfismo implica que ϕ é contínua, segue que f e f^{-1} são contínuas. Então f é necessariamente um homeomorfismo e ξ é isomorfo a η . $\square$

Teorema 2.14. *Um $\mathbb{R}^n$ -fibrado ξ é trivial se, e somente se, ξ admite n seções $s_1, \dots, s_n$ que são linearmente independentes.*

Demonstração. Sejam $s_1, \dots, s_n$ seções de ξ que são linearmente independentes. Definamos $f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)$, por $f(b, x) = x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b)$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Então f é contínua e leva cada fibra do fibrado trivial ε_B^n isomorficamente na fibra correspondente de ξ . Logo, pelo Lema 2.13, f é um isomorfismo de fibrados e ξ é trivial.

Reciprocamente, suponha que ξ é trivial, com sistema de coordenadas (B, h) .

Definindo $s_i(b) = h(b, e_i) \in F_b(\xi)$ onde $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ com 1 na i -ésima coordenada, é evidente que $s_1, \dots, s_n$ são seções linearmente independentes desde que a correspondência $x \rightarrow h(b, x)$ define um isomorfismo entre o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e o espaço vetorial $F_b(\xi)$. Isto completa a prova. $\square$

Como uma ilustração, o fibrado tangente do círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ admite uma seção não nula, como ilustrado na Figura 2.2. (As setas indicadas levam $x \in S^1$ em $x + v$, onde $s(x) = (x, v) = ((x_1, x_2), (-x_2, x_1))$). Logo, S^1 é paralelizável. Similarmente a 3-esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ admite três campos de vetores linearmente independentes $s_i(x) = (x, \overline{s}_i(x))$, onde $\overline{s}_1(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$, $\overline{s}_2(x) = (-x_3, x_4, x_1, -x_2)$ e $\overline{s}_3(x) = (-x_4, -x_3, x_2, x_1)$.

Logo S^3 é paralelizável. (Estas fórmulas vem da multiplicação dos quatérnions em $\mathbb{R}^4$.²)

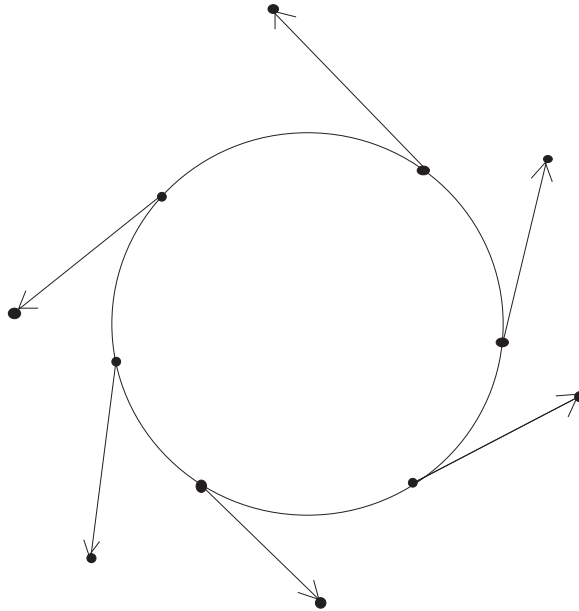


Figura 2.2: Seção não nula do fibrado tangente do círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$

²O processo de dedução das fórmulas dos quatérnions encontra-se em B Apêndice 2.

2.1 Fibrados Vetoriais Euclidianos

Para alguns propósitos é importante estudarmos fibrados vetoriais em que cada fibra tem a estrutura de um espaço vetorial Euclidiano.

Recordemos que uma função μ a valores reais em um espaço vetorial V , de dimensão finita, é **quadrática** se μ pode ser expressa da forma $\mu(v) = \sum l_i(v)l'_i(v)$, onde cada l_i e cada l'_i é linear. Cada função quadrática determina uma aplicação bilinear e simétrica³ $(v, w) \mapsto v \cdot w$ de $V \times V$ em $\mathbb{R}$, onde $v \cdot w = \frac{1}{2}(\mu(v + w) - \mu(v) - \mu(w))$.

Note que $v \cdot v = \frac{1}{2}(\mu(v + v) - \mu(v) - \mu(v)) = \frac{1}{2}(\mu(2v) - 2\mu(v))$ e como $\mu(2v) = \sum l_i(2v)l'_i(2v) = \sum 2l_i(v)2l'_i(v) = \sum 4l_i(v)l'_i(v) = 4\sum l_i(v)l'_i(v) = 4\mu(v)$, segue que $v \cdot v = \frac{1}{2}(4\mu(v) - 2\mu(v)) = \frac{1}{2}(2\mu(v)) = \mu(v)$.

A função quadrática μ é chamada **estritamente positiva** se $\mu(v) > 0$, para $v \neq 0$.

Definição 2.15. *Um **espaço vetorial Euclidiano** é um espaço vetorial real V com uma função quadrática estritamente positiva $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$.*

O número real $v \cdot w$ será chamado o **produto interno** dos vetores v e w . O número $v \cdot v = \mu(v)$ também pode ser denotado por $|v|^2$. Este produto interno induz agora uma métrica.

Definição 2.16. *Um **fibrado vetorial Euclidiano** é um fibrado vetorial real ξ com uma função contínua $\mu : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que a restrição de μ para cada fibra de ξ é quadrática e estritamente positiva. A função μ será chamada uma **métrica Euclidiana** no fibrado vetorial ξ .*

No caso do fibrado tangente τ_M de uma variedade suave, uma métrica Euclidiana $\mu : DM \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma **métrica Riemanniana**, e M junto com μ é chamada **variedade Riemanniana**. (Na prática, geralmente requer-se que μ seja uma função suave. A notação $\mu = ds^2$ é frequentemente usada para uma métrica Riemanniana.)

Exemplo 2.17. O fibrado trivial ε_B^n possui a métrica Euclidiana $\mu(b, x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Desde que o fibrado tangente de $\mathbb{R}^n$ é trivial, segue que a variedade suave $\mathbb{R}^n$ possui uma métrica Riemanniana padrão. Para qualquer variedade suave $M \subset \mathbb{R}^n$ a composição $DM \subset D\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$ torna M uma variedade Riemanniana.

Lema 2.18. *Seja ξ um fibrado vetorial trivial de dimensão n sobre B , e seja μ qualquer métrica Euclidiana em ξ . Então existem n seções $s_1, \dots, s_n$ de ξ que são ortonormais no sentido de que $s_i(b) \cdot s_j(b) = \delta_{ij}$, para cada $b \in B$.*

Demonstração. Sejam $s'_1, \dots, s'_n$ quaisquer n -seções que são linearmente independentes. Aplicando o processo de Gram-Schmidt⁴ para $s'_1(b), \dots, s'_n(b)$, obtemos uma base ortonormal $s_1(b), \dots, s_n(b)$ para $F_b(\xi)$. Desde que as funções resultantes $s_1, \dots, s_n$ são claramente contínuas, isto completa a prova. $\square$

³As definições de aplicação r -linear e simétrica encontram-se em C Apêndice 3

⁴O Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt encontra-se em D Apêndice 4

3 Construção de Fibrados a Partir de Fibrados Dados

Este capítulo descreverá algumas construções básicas envolvendo fibrados vetoriais.

- (a) **Restrições.** Seja ξ um fibrado vetorial com projeção $\pi : E \rightarrow B$ e seja $\overline{B}$ um subconjunto de B . Definindo $\overline{E} = \pi^{-1}(\overline{B})$ e colocando $\overline{\pi} : \overline{E} \rightarrow \overline{B}$ a restrição de π a $\overline{E}$, obtém-se um novo fibrado vetorial que será denotado por $\xi|_{\overline{B}}$ e chamado a restrição de ξ a $\overline{B}$. Cada fibra $F_b(\xi|_{\overline{B}})$ é igual a fibra correspondente $F_b(\xi)$, e tem a mesma estrutura de espaço vetorial.

Se (U, h) é um sistema de coordenadas locais para ξ , então $(U \cap \overline{B}, h|_{U \cap \overline{B}})$ é um sistema de coordenadas locais para $\xi|_{\overline{B}}$.

Como um exemplo, se M é uma variedade suave e V é um subconjunto aberto de M , então o fibrado tangente τ_V é igual a $\tau_M|_V$.

Mais geralmente tem-se a seguinte construção:

- (b) **Fibrados Induzidos.** Seja ξ como acima e seja B_1 um espaço topológico arbitrário. Dada qualquer aplicação $f : B_1 \rightarrow B$ é possível construir o fibrado induzido $f^*\xi$ sobre B_1 . O espaço total E_1 de $f^*\xi$ é o subconjunto $E_1 \subset B_1 \times E$ consistindo de todos os pares $(b, e) \in B_1 \times E$ com $f(b) = \pi(e)$. A aplicação projeção $\pi_1 : E_1 \rightarrow B_1$ é definida por $\pi_1(b, e) = b$. Assim, tem-se um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\widehat{f}} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

onde $\widehat{f}(b, e) = e$. A estrutura de espaço vetorial em $\pi_1^{-1}(b)$ é definida por

$$t_1(b, e_1) + t_2(b, e_2) = (b, t_1e_1 + t_2e_2),$$

onde $t_1e_1 + t_2e_2$ é a estrutura de espaço vetorial em $\pi^{-1}(f(b))$.

Assim $\widehat{f}$ leva cada espaço vetorial $F_b(f^*\xi)$ isomorficamente sobre o espaço vetorial $F_{f(b)}(\xi)$.

Se (U, h) é um sistema de coordenadas locais para ξ , defina $U_1 = f^{-1}(U)$ e $h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(U_1)$ por $h_1(b, x) = (b, h(f(b), x))$. Então (U_1, h_1) é certamente um sistema de coordenadas locais para $f^*\xi$. Isto prova que $f^*\xi$ é localmente trivial. (Se ξ for trivial, segue-se que $f^*\xi$ é trivial.)

Observação 3.1. Se ξ é um fibrado vetorial suave e f uma aplicação suave, então E_1 é uma subvariedade suave de $B_1 \times E$, e $f^*\xi$ é um fibrado vetorial suave. Vide Lima [3].

O diagrama comutativo acima sugere o seguinte conceito que, a priori, é mais geral. Sejam ξ e η fibrados vetoriais.

Definição 3.2. Uma aplicação fibrada de η em ξ é uma função contínua $g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ que leva cada espaço vetorial $F_b(\eta)$ isomorficamente sobre um dos espaços vetoriais $F_{b'}(\xi)$.

Definindo $\bar{g}(b) = b'$, temos que a função resultante $\bar{g} : B(\eta) \rightarrow B(\xi)$ é contínua.

Lema 3.3. Se $g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ é uma aplicação fibrada e se $\bar{g} : B(\eta) \rightarrow B(\xi)$ é a aplicação correspondente de espaços bases, então η é isomorfo ao fibrado induzido $\bar{g}^*\xi$.

Demonstração. Defina $h : E(\eta) \rightarrow E(\bar{g}^*\xi)$ por $h(e) = (\pi(e), g(e))$, onde π denota a aplicação projeção de η . Desde que h é contínua e aplica cada fibra $F_b(\eta)$ isomorficamente na fibra correspondente $F_b(\bar{g}^*\xi)$, segue do Lema 2.13 que h é um homeomorfismo e portanto η é isomorfo a $\bar{g}^*\xi$. $\square$

(c) **Produtos Cartesianos.** Dados dois fibrados vetoriais ξ_1, ξ_2 com aplicações projeção $\pi_i : E_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$, o produto cartesiano $\xi_1 \times \xi_2$ é definido como sendo o fibrado com aplicação projeção $\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$; onde a cada fibra $(\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(b_1, b_2) = F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$ é dada a estrutura de espaço vetorial usual. Claramente $\xi_1 \times \xi_2$ é localmente trivial, desde que se (U_1, h_1) e (U_2, h_2) são sistemas de coordenadas locais para ξ_1 e ξ_2 , respectivamente, então $(U_1 \times U_2, h_1 \times h_2)$ é um sistema de coordenadas locais para $\xi_1 \times \xi_2$.

Como um exemplo, se $M = M_1 \times M_2$ é um produto de variedades suaves, então o fibrado tangente τ_M é isomorfo a $\tau_{M_1} \times \tau_{M_2}$.

(d) **Somas de Whitney.** Consideremos dois fibrados ξ_1 e ξ_2 sobre o mesmo espaço base B . Definamos $d : B \rightarrow B \times B$ por $d(b) = (b, b)$. O fibrado $d^*(\xi_1 \times \xi_2)$ sobre B é chamado a **soma de Whitney** de ξ_1 e ξ_2 ; e será denotada por $\xi_1 \oplus \xi_2$.

Note que cada fibra $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ é canonicamente isomorfa a soma direta $F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$.

Definição 3.4. Considere dois fibrados vetoriais ξ e η sobre o mesmo espaço base B com $E(\xi) \subset E(\eta)$; então ξ é um subfibrado de η (escreve-se $\xi \subset \eta$) se cada fibra $F_b(\xi)$ é um subespaço vetorial da fibra correspondente $F_b(\eta)$.

Lema 3.5. *Sejam ξ_1 e ξ_2 subfibrados de η tais que cada espaço vetorial $F_b(\eta)$ é igual a soma direta dos subespaços $F_b(\xi_1)$ e $F_b(\xi_2)$. Então η é isomorfo a soma de Whitney $\xi_1 \oplus \xi_2$.*

Demonstração. Defina $f : E(\xi_1 \oplus \xi_2) \rightarrow E(\eta)$ por $f(b, (e_1, e_2)) = e_1 + e_2$. Desde que f é contínua e leva cada espaço vetorial $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ isomorficamente em seu espaço vetorial correspondente $F_b(\eta)$, segue pelo Lema 2.13 que f é um homeomorfismo e portanto $\xi_1 \oplus \xi_2$ é isomorfo a η . $\square$

(e) **Complementos Ortogonais.** Considere a seguinte questão: Dado um subfibrado $\xi \subset \eta$ existe um subfibrado complementar ν de η de modo que η é isomorfo a uma soma de Whitney $\xi \oplus \nu$?

Para respondermos a esta questão necessitamos das Definições e Observação que seguem:

Definição 3.6. *Uma cobertura aberta de um espaço topológico B é uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos abertos de B tal que a união dos elementos de $\mathcal{A}$ é igual a B .*

Definição 3.7. *Um refinamento aberto de uma cobertura aberta $\mathcal{A}$ de um espaço topológico B é uma cobertura aberta $\mathcal{B}$ de B tal que para cada elemento X de $\mathcal{B}$, existe um elemento A de $\mathcal{A}$ contendo X .*

Definição 3.8. *Uma cobertura aberta $\mathcal{A}$ de um espaço topológico B é localmente finita se todo ponto de B admite uma vizinhança aberta que intersecta apenas um número finito de elementos de $\mathcal{A}$.*

Definição 3.9. *Um espaço B é paracompacto se é de Hausdorff e se toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de B tem um refinamento aberto, localmente finito, $\mathcal{B}$, que cobre B .*

Observação 3.10. Se o espaço base $B(\eta)$ é paracompacto, então η admite uma métrica Euclidiana.¹

Desse modo, se η está munido com uma métrica Euclidiana, então um tal somando complementar pode ser construído como segue:

Denotemos $F_b(\xi^\perp)$ o subespaço de $F_b(\eta)$ consistindo de todos os vetores v , tais que $v \cdot w = 0$, para todo $w \in F_b(\xi)$. Denotemos $E(\xi^\perp) \subset E(\eta)$ a união de $F_b(\xi^\perp)$ e consideremos $\pi| : E(\xi^\perp) \rightarrow B$ a restrição de $\pi : E(\eta) \rightarrow B$.

Definição 3.11. $\xi^\perp$ será chamado complemento ortogonal de ξ em η .

Teorema 3.12. $E(\xi^\perp)$ é o espaço total de um subfibrado $\xi^\perp \subset \eta$. Além disso, η é isomorfo a soma de Whitney $\xi \oplus \xi^\perp$.

¹Uma idéia da construção dessa métrica encontra-se em E Apêndice 5.

Demonstração. Da Álgebra Linear, cada espaço vetorial $F_b(\eta)$ é a soma direta dos subespaços $F_b(\xi)$ e $F_b(\xi^\perp)$, pois $F_b(\xi^\perp) = F_b(\xi)^\perp$. Então o único problema a provar é que $\xi^\perp$ satisfaz a condição de trivialidade local.

Dado qualquer ponto $b_0 \in B$, seja U uma vizinhança suficientemente pequena de b_0 , de modo que $\xi|U$ e $\eta|U$ sejam ambos triviais. Sejam $s_1, \dots, s_m$ seções ortonormais de $\xi|U$ e $s'_1, \dots, s'_n$ seções ortonormais de $\eta|U$; onde m e n são as respectivas dimensões dos fibrados (compare com o Lema 2.18). Assim, a matriz $m \times n$, $\begin{pmatrix} s_i(b_0) \cdot s'_j(b_0) \end{pmatrix}$ tem posto m . Reenumerando o s'_j , se necessário, podemos assumir que as m primeiras colunas são linearmente independentes.

Então existe $V \subset U$ contendo b_0 , tal que para quaisquer pontos $b \in V$, as primeiras m colunas da matriz $\begin{pmatrix} s_i(b) \cdot s'_j(b) \end{pmatrix}$ são linearmente independentes. Então as n seções $s_1, s_2, \dots, s_m, s'_{m+1}, \dots, s'_n$ de $\eta|U$ são linearmente independentes em qualquer ponto de V , pois caso contrário, existiria uma combinação linear não-nula de $s_1(b), \dots, s_m(b)$ igual a uma combinação linear de $s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)$, e portanto ortogonal a $s'_1(b), \dots, s'_m(b)$, acarretando que as primeiras m colunas da matriz $\begin{pmatrix} s_i(b) \cdot s'_j(b) \end{pmatrix}$ seriam linearmente dependentes, o que é uma contradição. Aplicando o processo de Gram-Schmidt a esta sequência de seções, obtemos uma seção ortonormal $s_1, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n$ de $\eta|V$.

Agora um sistema de coordenadas locais $h : V \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \pi^{-1}(V)$ para $\xi^\perp$ é dado pela fórmula $h(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) = x_1 s_{m+1}(b) + \dots + x_{n-m} s_n(b)$.

A aplicação $h^{-1}(e) = (\pi e, (e \cdot s_{m+1}(\pi e), \dots, e \cdot s_n(\pi e)))$ mostra que h é um homeomorfismo, e completa a prova. $\square$

Suponha que $M \subset N \subset \mathbb{R}^A$ sejam variedades suaves, e suponha que N está munida com uma métrica Riemanniana. Então o fibrado tangente τ_M é um subfibrado da restrição $\tau_N|_M$.

Definição 3.13. O complemento ortogonal $\tau_M^\perp \subset \tau_N|_M$ é chamado o fibrado normal ν de M em N .

Assim temos:

Corolário 3.14. Para qualquer subvariedade suave M de uma variedade Riemanniana suave N o fibrado normal ν está definido e $\tau_M \oplus \nu \cong \tau_N|_M$.

Demonstração. Nas condições do enunciado do Corolário segue da Definição 3.13 que o fibrado normal ν está definido. Ainda, $E(\nu) = E(\tau_M^\perp)$ é o espaço total de um subfibrado $\nu = \tau_M^\perp \subset \tau_N|_M$ e, pelo Teorema 3.12, $\tau_N|_M$ é isomorfo a soma de Whitney $\tau_M \oplus \nu$. $\square$

Definição 3.15. Uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ entre variedades suaves é chamada uma imersão se o Jacobiano $Df_x : DM_x \rightarrow DN_{f(x)}$ aplica o espaço tangente DM_x injetivamente (isto é, com núcleo zero) para cada $x \in M$.

Uma imersão típica do círculo no plano é ilustrada na Figura 3.1, a seguir.

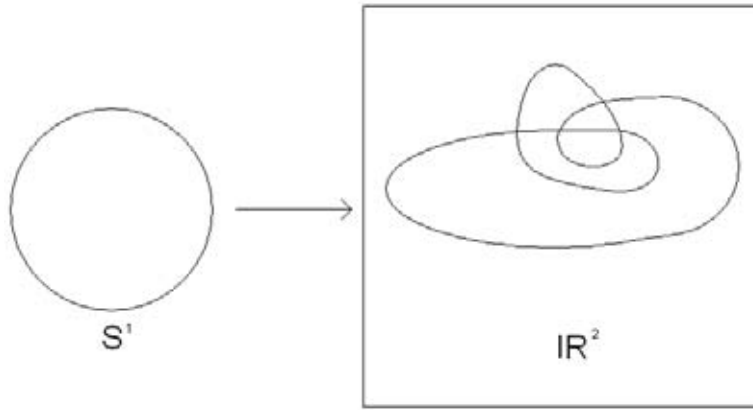


Figura 3.1: Imersão do círculo no plano.

Suponha que N é uma variedade Riemanniana. Então para cada $x \in M$, o espaço tangente $DN_{f(x)}$ se decompõe como uma soma direta da imagem $Df_x(DM_x)$ e seu complemento ortogonal.

Correspondentemente o fibrado induzido $f^*\tau_N$ sobre M é isomorfo a soma de Whitney de um subfibrado isomorfo a τ_M e um subfibrado complementar ν_f . Assim:

Corolário 3.16. *Para qualquer imersão $f : M \rightarrow N$, com N Riemanniana, existe uma decomposição em soma de Whitney $f^*\tau_N \cong \tau_M \oplus \nu_f$.*

Este fibrado ν_f será chamado o fibrado normal da imersão f .

(f) **Funtores Contínuos de Espaços Vetoriais em Fibrados Vetoriais.**

A operação soma direta é possivelmente o mais importante método para construir novos espaços vetoriais a partir de outros, mas muitas outras tais construções desempenham um papel importante na Geometria Diferencial.

Por exemplo, para qualquer par V, W de espaços vetoriais reais pode-se associar o **produto tensorial**² $V \otimes W$.

Ainda, dado um espaço vetorial real V podemos construir o **espaço vetorial dual** $\text{Hom}(V, \mathbb{R})$.

²A construção do produto tensorial encontra-se em F Apêndice 6

Denote $\mathcal{O}$ a categoria cujos objetos são todos os espaços vetoriais de dimensão finita e cujas aplicações são todos os isomorfismos entre tais espaços vetoriais. Lembremos que por funtor (covariante³) $T : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ entende-se uma operação que associa:

- (1) para cada par $V, W \in \mathcal{O}$ de espaços vetoriais, um espaço vetorial $T(V, W) \in \mathcal{O}$; e
- (2) para cada par $f : V \rightarrow V', g : W \rightarrow W'$ de isomorfismos, um isomorfismo $T(f, g) : T(V, W) \rightarrow T(V', W')$; de modo que

$$(2.1) \quad T(\text{identidade}_V, \text{identidade}_W) = \text{identidade}_{T(V, W)} \text{ e}$$

$$(2.2) \quad T(f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2) = T(f_1, g_1) \circ T(f_2, g_2).$$

Um tal funtor será chamado contínuo se $T(f, g)$ depende continuamente de f e g . Isto faz sentido, desde que o conjunto de todos os isomorfismos de um espaço vetorial de dimensão finita em outro tem uma topologia usual.

O conceito de um funtor contínuo $T : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \cdots \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ em k variáveis é definido analogamente. Note que o produto tensorial é um exemplo de funtor contínuo de duas variáveis e que o espaço vetorial dual é um exemplo de funtor contínuo de uma variável.

Seja $T : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \cdots \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ um tal funtor contínuo de k variáveis, e sejam $\xi_1, \dots, \xi_k$ fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B . Então um novo fibrado vetorial sobre B é construído como segue:

Para cada $b \in B$ seja $F_b = T(F_b(\xi_1), \dots, F_b(\xi_k))$. Denotemos E a união disjunta dos espaços vetoriais F_b e definamos $\pi : E \rightarrow B$ por $\pi(F_b) = b$.

Definição 3.17. *O fibrado cujo espaço total é E , munido com projeção π e com fibras F_b , nas condições acima, será denotado por $T(\xi_1, \dots, \xi_k)$.*

Por exemplo, começando com o funtor produto tensorial, esta construção define o produto tensorial $\xi \otimes \eta$ de dois fibrados vetoriais. Começando com o funtor soma direta, obtém-se a soma de Whitney $\xi \oplus \eta$ de dois fibrados vetoriais. Começando com o funtor dualidade $V \mapsto \text{Hom}(V, \mathbb{R})$, obtém-se o funtor $\xi \mapsto \text{Hom}(\xi, \varepsilon^1)$, que atribui para cada fibrado vetorial seu fibrado vetorial dual.

Teorema 3.18. *Existe uma topologia usual para E , tal que E é o espaço total de um fibrado vetorial com projeção π e com fibras F_b .*

Demonstração. Faremos apenas um esboço da demonstração. Sejam $(U, h_1), \dots, (U, h_k)$ um sistema de coordenadas locais para $\xi_1, \dots, \xi_k$, respectivamente, todos usando o mesmo conjunto aberto U . Para cada $b \in U$, defina $h_{ib} : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow F_b(\xi_i)$ por $h_{ib}(x) = h_i(b, x)$. Então o isomorfismo $T(h_{1b}, \dots, h_{kb}) : T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k}) \rightarrow F_b$ está definido. A

³A distinção entre funtor covariante e contravariante não é importante aqui, desde que nós trabalhamos somente com isomorfismos.

correspondência $(b, x) \mapsto T(h_{1b}, \dots, h_{kb})(x)$ define a função injetora $h : U \times T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k}) \rightarrow \pi^{-1}(U)$.

Afirmamos que existe uma topologia em E de modo que cada tal h é um homeomorfismo e de modo que cada $\pi^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto de E .

Com efeito, é necessário somente observar que se dois tais “ sistemas de coordenadas locais ” (U, h) e (U', h') são justapostos, então a transformação $(U \cap U') \times T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k}) \xrightarrow{h^{-1} \circ h'} (U \cap U') \times T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k})$ é contínua. Isto segue da continuidade de T .

Agora, note que $\pi : E \rightarrow B$ é contínua, e que o fibrado vetorial resultante $T(\xi_1, \dots, \xi_k)$ satisfaz a condição de trivialidade local. $\square$

4 Espaços Quociente de Grupos

O texto utilizado para o desenvolvimento deste capítulo foi Steenrod [2]. Porém para mais detalhes o leitor pode consultar também Husemoller [4].

Até o presente momento temos a seguinte definição de fibrado vetorial:

Definição 4.1. *Seja B um espaço topológico fixo, que será chamado o espaço base.*

Um fibrado vetorial real ξ sobre B consiste do seguinte:

- (1) um espaço topológico $E = E(\xi)$ chamado o **espaço total**,*
- (2) uma aplicação (contínua e sobrejetora) $\pi : E \rightarrow B$ chamada **aplicação projeção**, e*
- (3) para cada $b \in B$, o conjunto $\pi^{-1}(b)$ tem a estrutura de um espaço vetorial sobre os números reais.*

Estes devem satisfazer a seguinte condição:

Condição de trivialidade local. Para cada ponto $b \in B$ existirá uma vizinhança $U \subset B$, um inteiro $n \geq 0$, e um homeomorfismo $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que, para cada $b \in U$, a correspondência $x \mapsto h(b, x)$ define um isomorfismo entre o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e o espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$.

O espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ é chamado a **fibra** sobre b . Ele pode ser denotado por F_b ou $F_b(\xi)$.

No entanto, a definição acima de fibrado não é suficientemente restritiva quando se trata de Espaços Quocientes de Grupos. Para tanto será necessário que um fibrado carregue uma estrutura adicional envolvendo um grupo G de homeomorfismos de F_b chamado o “Grupo do Fibrado”.

É necessário imaginar G e sua topologia dentro da definição do fibrado. Isto será obtido através da noção intermediária de um **fibrado vetorial com sistemas de coordenadas** (ou simplesmente: “Fibrado Coordenado”).

Definição 4.2. *Um **grupo topológico** G é um conjunto que tem uma estrutura de grupo e uma topologia tal que:*

- (a) A aplicação $G \rightarrow G$ dada por $g \rightarrow g^{-1}$ é contínua.*
- (b) A aplicação $G \times G \rightarrow G$ dada por $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2$ é contínua quando $G \times G$ tem a topologia usual de um espaço produto.*

Se G é um grupo topológico, e F_b é um espaço topológico, dizemos que G é um **grupo de transformação topológica de F_b relativo a uma aplicação $\eta : G \times F_b \rightarrow F_b$** se:

- (i) η é contínua,
- (ii) $\eta(e, y) = y$, onde e é a identidade de G , e
- (iii) $\eta(g_1 g_2, y) = \eta(g_1, \eta(g_2, y))$, para todos g_1, g_2 em G e y em F_b .

Abreviaremos $\eta(g, y)$ por $g \cdot y$. Então (ii) fica $e \cdot y = y$ e (iii) fica $(g_1 g_2) \cdot y = g_1 \cdot (g_2 \cdot y)$. Para qualquer g fixado, $y \rightarrow g \cdot y$ é um homeomorfismo de F_b em F_b ; pois tem inversa contínua $y \rightarrow g^{-1} \cdot y$. Dessa forma η produz um homomorfismo de G no grupo de homeomorfismos de F_b dado por $g \rightarrow (y \rightarrow g \cdot y)$.

Dizemos que G é **efetivo** se $g \cdot y = y$, para todo y , implica $g = e$. Então G é isomorfo a um grupo de homeomorfismos de F_b . Neste caso, pode-se identificar G com um grupo de homeomorfismos, no entanto, podemos frequentemente permitir que o mesmo grupo G opere em vários espaços.

A menos que o contrário seja estabelecido, um grupo de transformações será assumido ser efetivo.

Assim a partir de agora consideraremos a seguinte definição de Fibrados Coordenados:

Definição 4.3. *Um **fibrado coordenado** $\mathcal{B}$ é uma coleção como segue:*

- (1) *um espaço E chamado o **espaço fibrado**,*
- (2) *um espaço B chamado o **espaço base**,*
- (3) *uma aplicação (contínua e sobrejetora) $\pi : E \rightarrow B$ chamada **aplicação projeção**,*
- (4) *um espaço F chamado **a fibra**,*
- (5) *um grupo de transformação topológico efetivo G de F chamado o **grupo do fibrado**,*
- (6) *uma família $\{V_j\}$ de conjuntos abertos recobrindo B , indexada por um conjunto J , os V_j 's são chamados **vizinhanças coordenadas**, e*
- (7) *para cada j em J , um homeomorfismo $\phi_j : V_j \times F \rightarrow \pi^{-1}(V_j)$ chamada a **função coordenada**.*

As funções coordenadas devem satisfazer as seguintes condições:

- (8) $\pi \circ \phi_j(b, y) = b$, para $b \in V_j$, $y \in F$,

- (9) se a aplicação $\phi_{j,b} : F \rightarrow \pi^{-1}(b)$ é definida por $\phi_{j,b}(y) = \phi_j(b, y)$, então, para cada par i, j em J , e cada $b \in V_i \cap V_j$, o homeomorfismo $\phi_{j,b}^{-1} \circ \phi_{i,b} : F \rightarrow F$ coincide com a translação por um elemento de G (é único desde que G é efetivo), e
- (10) para cada par i, j em J , a aplicação $g_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow G$ definida por $g_{ji}(b) = \phi_{j,b}^{-1} \circ \phi_{i,b}$ é contínua.

Como na Definição 4.1, denotamos $\pi^{-1}(b)$ por F_b e a chamamos a **fibra sobre b** .

As funções g_{ji} definidas em (10) são chamadas as **transformações coordenadas** do fibrado. Uma consequência imediata da definição é que, para quaisquer i, j, k em J ,

$$(11) \quad g_{kj}(b)g_{ji}(b) = g_{ki}(b), \quad b \in V_i \cap V_j \cap V_k.$$

Se colocamos $i = j = k$, então,

$$(12) \quad g_{ii}(b) = \text{identidade de } G, \quad b \in V_i.$$

Agora tomando $i = k$ em (11) e aplicando (12) obtemos:

$$(13) \quad g_{jk}(b) = [g_{kj}(b)]^{-1}, \quad b \in V_j \cap V_k.$$

É conveniente introduzirmos a aplicação

$$(14) \quad \pi_j : \pi^{-1}(V_j) \rightarrow F \text{ definida por } \pi_j(a) = \phi_{j,b}^{-1}(a), \text{ onde } b = \pi(a).$$

Então π_j satisfaz as identidades:

$$(14') \quad \begin{aligned} \pi_j \circ \phi_j(b, y) &= y, \quad \phi_j(\pi(a), \pi_j(a)) = a, \\ g_{ji}(\pi(a)) \cdot \pi_i(a) &= \pi_j(a), \quad \pi(a) \in V_i \cap V_j. \end{aligned}$$

Definição 4.4. Dois fibrados coordenados $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são ditos **equivalentes no sentido estrito** se eles tem o mesmo espaço fibrado, espaço base, projeção, fibra e grupo e suas funções coordenadas $\{\phi_j\}, \{\phi'_k\}$ satisfazem a condição que

$$(15) \quad \bar{g}_{jk}(b) = \phi'_{k,b}{}^{-1} \circ \phi_{j,b}, \quad b \in V_j \cap V'_k$$

coincide com a translação por um elemento de G , e a aplicação $\bar{g}_{kj} : V_j \cap V'_k \rightarrow G$ assim obtida é contínua.

Definição 4.5. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ dois fibrados coordenados tendo a mesma fibra e o mesmo grupo. Por uma **aplicação fibrada** $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ entendemos uma aplicação contínua $h : E \rightarrow E'$ tendo as seguintes propriedades:

$$(16) \quad h \text{ leva cada fibra } F_b \text{ de } E \text{ homeomorficamente sobre uma fibra } F_{b'} \text{ de } E', \text{ induzindo portanto uma aplicação contínua } \bar{h} : B \rightarrow B' \text{ tal que } \pi' \circ h = \bar{h} \circ \pi,$$

$$(17) \quad \text{se } b \in V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k), \text{ e } h_b : F_b \rightarrow F_{b'} \text{ é a aplicação induzida por } h(b' = \bar{h}(b)), \text{ então a aplicação } \bar{g}_{kj}(b) = \phi'_{k,b'}{}^{-1} \circ h_b \circ \phi_{j,b} = \pi'_k \circ h_b \circ \phi_{j,b} \text{ de } F \text{ em } F \text{ coincide com a operação de um elemento de } G, \text{ e}$$

$$(18) \quad \text{a aplicação } \bar{g}_{kj} : V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k) \rightarrow G \text{ assim obtida é contínua.}$$

4.1 Espaços Quociente de Grupos

Definição 4.6. *Seja B um grupo topológico e seja G um subgrupo fechado e normal de B . Uma classe lateral a esquerda de G em B é um conjunto da forma bG . Qualquer tal conjunto é fechado, e quaisquer dois tais conjuntos ou coincidem ou não tem ponto em comum. Denotemos B/G o conjunto cujos elementos são as classes laterais a esquerda de G em B . Defina a **aplicação natural** $p : B \rightarrow B/G$ por $p(b) = bG$.*

Um subconjunto U de B/G é dito ser aberto se $p^{-1}(U)$ é um conjunto aberto de B . É facilmente verificado que estes conjuntos abertos definem uma topologia em B/G . O conjunto B/G com esta topologia é chamado o **espaço quociente** (ou **espaço das classes laterais**) **de B por G** . Claramente p é contínua, por definição, e a topologia de B/G é maximal com respeito a esta propriedade.

Se U é um conjunto aberto em B então $p^{-1}p(U) = UG$ (isto é, o conjunto de produtos ug). Mas este conjunto é aberto em B e portanto, $p(U)$ é aberto em B/G e p é uma **aplicação aberta**. Se x, x' são pontos distintos de B/G , escolha $b \in p^{-1}(x)$, $b' \in p^{-1}(x')$. Então $b^{-1}b'$ não está em G . Seja W uma vizinhança de $b^{-1}b'$ com $W \cap G = \emptyset$. Sejam U, V vizinhanças de b, b' , respectivamente, tais que $U^{-1}V \subset W$. Então $p(U), p(V)$ são vizinhanças de x, x' e não tem ponto em comum, pois se x'' é um tal ponto e $p(b'') = x''$, existem elementos $g, g' \in G$ tais que $b''g \in U$ e $b''g' \in V$. Isto implica $(b''g)^{-1}(b''g') = g^{-1}g' \in W$ o qual é impossível. Portanto B/G é um espaço de Hausdorff.

Observe que a transformação $B \rightarrow B$, enviando cada b em seu inverso, aplica cada classe lateral a esquerda de G em B numa classe lateral a direita de G em B e vice-versa. Esta induz um homeomorfismo entre os espaços das classes laterais à esquerda e à direita.

4.2 Translações de Espaços Quociente

Se $x \in B/G$ e $b \in B$, defina a **translação a esquerda de x por b** por

$$b \cdot x = p(bp^{-1}(x)). \quad (4.1)$$

Notemos que $\cdot$ é bem definida, pois se $b_1, b_2 \in p^{-1}(x)$ então $b_1G = x = b_2G$ e portanto $p(bb_1) = (bb_1)G = b(b_1G) = b(b_2G) = (bb_2)G = p(bb_2)$.

Ainda, desde que $b_2 \cdot x = p(b_2p^{-1}(x))$, segue que $b_1 \cdot (b_2 \cdot x) = p(b_1p^{-1}(b_2 \cdot x)) = p(b_1(b_2p^{-1}(x))) = p((b_1b_2)p^{-1}(x)) = (b_1b_2) \cdot x$ de modo que B é um grupo de transformações de B/G via a operação (4.1), isto é, para cada $b \in B$, $b : B/G \rightarrow B/G$ dada por $x \rightarrow b \cdot x$ é contínua.

Observemos também que B é **transitivo**, isto é, para qualquer par $x, x' \in B/G$, existe um $b \in B$ tal que $b \cdot x = x'$ (basta tomar $b = b'(p^{-1}(x))^{-1}$, onde $x' = b'G$).

Se U é aberto em B/G , então $p^{-1}(U)$, $bp^{-1}(U)$, e $p(bp^{-1}(U))$ são também abertos. Portanto $b \cdot U$ é aberto. Além disso, para cada $b \in B$, $b : B/G \rightarrow B/G$ dada por

$x \rightarrow b \cdot x$ é bijetora com inversa $b^{-1} : B/G \rightarrow B/G$ dada por $x \rightarrow b^{-1} \cdot x$. Assim B é um grupo de homeomorfismos de B/G , isto é, para cada $b \in B$, $b : B/G \rightarrow B/G$ dada por $x \rightarrow b \cdot x$ é um homeomorfismo.

Defina G_0 como sendo a interseção de todos os subgrupos bGb^{-1} conjugados de G por B . Então G_0 é um subgrupo fechado invariante de B , e é o maior subgrupo de G que é invariante de B . Se $g \in G_0$, então $gbG = b(b^{-1}gb)G = bG$. Assim cada elemento de G_0 atua como a transformação identidade em B/G . Reciprocamente, se $cbG = bG$ para todo b , então $cb \in bG$ ou $c \in bGb^{-1}$ para todo b . Logo $c \in G_0$.

Assim o grupo quociente B/G_0 atua efetivamente em B/G pois se $cG_0 \cdot bG = bG$, para todo $bG \in B/G$ então $cbG = bG$ e portanto $c \in G_0$. Assim $cG_0 = eG_0$.

Seja $p_0 : B \rightarrow B/G_0$ a aplicação natural.

Suponha agora que $h \in B/G_0$, $x \in B/G$ e $h \cdot x = p(p_0^{-1}(h)p^{-1}(x))$ está no conjunto aberto U . Escolha $b_1 \in p_0^{-1}(h)$, $b \in p^{-1}(x)$. Então $b_1b \in p^{-1}(U) = U'$. Escolha vizinhanças V' e W' de b_1 e b , respectivamente, tais que $V'W' \subset U'$. Desde que p e p_0 são aplicações abertas, $V = p_0(V')$, $W = p(W')$ são vizinhanças de h e x , respectivamente. Segue que $h' \in V$, $x' \in W$ implica $h' \cdot x' \in U$. Isto prova que B/G_0 é um grupo de transformação topológica de B/G .

4.3 Grupos Transitivos

Suponha que B é um grupo de transformação topológica transitivo de X (isto é, para quaisquer $x, x' \in X$ existe $b \in B$ tal que $b \cdot x = x'$). Escolha um ponto base $x_0 \in X$. Defina $p' : B \rightarrow X$ por $p'(b) = b \cdot x_0$. É claro que p' é contínua. Seja G o subgrupo dos elementos b de B tais que $b \cdot x_0 = x_0$. Então G é um subgrupo fechado, no sentido de que se $g_1, g_2 \in G$ então $g_1g_2 \in G$ e, para cada $x \in X$, $p'^{-1}(x)$ é uma classe lateral a esquerda de G em B , a saber, bG onde $b \in B$ é tal que $b \cdot x_0 = x$ (note que tal b existe pois B é transitivo). Isto define uma aplicação bijetora $q : B/G \rightarrow X$ tal que $q \circ p(b) = p'(b)$ para todo b .

Primeiro observemos que q é bem definida pois se $p(b_1) = p(b_2)$ então $b_2^{-1}b_1 \in G$ e portanto $(b_2^{-1}b_1) \cdot x_0 = x_0$, ou equivalentemente, $b_1 \cdot x_0 = b_2 \cdot x_0$ ou ainda $p'(b_1) = p'(b_2)$. Também é injetora pois, se $q \circ p(b_1) = q \circ p(b_2)$ então $p'(b_1) = p'(b_2)$. Logo $b_1 \cdot x_0 = b_2 \cdot x_0$ e portanto $(b_2^{-1}b_1) \cdot x_0 = x_0$. Assim, $b_2^{-1}b_1 \in G$ e portanto $p(b_1) = p(b_2)$. Ainda, é sobrejetora, pois dado $x \in X$, como B é transitivo, existe $b \in B$ tal que $b \cdot x_0 = x$. Assim $q \circ p(b) = p'(b) = b \cdot x_0 = x$.

Se U é aberto em X , $p'^{-1}(U)$ é aberto em B . Este último conjunto coincide com $p^{-1} \circ q^{-1}(U)$. Logo $q^{-1}(U)$ é aberto em B/G . Segue que q é contínua.

Em geral, q^{-1} não é contínua. Existem circunstâncias sob as quais q^{-1} é contínua e que ocorrem frequentemente.

Por exemplo, se B é compacto, também o é B/G ; e pode-se aplicar o bem conhecido resultado que uma aplicação contínua e bijetora de um espaço compacto num espaço

de Hausdorff é um homeomorfismo (veja Munkres[[5], Theorem 5.6, p.167]).

Suponha q^{-1} contínua. Se U é aberto em B , segue que $p'(U) = q \circ p(U)$ é aberto em X , pois $q(p(U)) = (q^{-1})^{-1}(p(U))$. Logo, p' é uma aplicação aberta. Reciprocamente, se p' é uma aplicação aberta e V é aberto em B/G , temos $q(V) = p' \circ p^{-1}(V)$ é aberto em X . Isso significa que q^{-1} é contínua, pois $(q^{-1})^{-1}(V) = q(V)$.

Resumindo, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.7. *Se B é compacto, ou se $p' : B \rightarrow X$ é uma aplicação aberta, então a aplicação natural $q : B/G \rightarrow X$ é um homeomorfismo, e as aplicações p' e $p : B \rightarrow B/G$ são topologicamente equivalentes, isto é, p' é obtida de p a menos de um homeomorfismo.*

4.4 O Teorema da Estrutura Fibrada

Sejam B um grupo topológico e H, G subgrupos fechados e normais em B com H subgrupo de G .

Introduzamos as aplicações naturais:

$$\begin{array}{ccc} & B/H & \\ p_1 \nearrow & \downarrow p & \\ B & & B/G \\ p_2 \searrow & & \end{array}$$

onde p_1 e p_2 são as projeções naturais e p leva cada classe lateral bH em bG .

Desejamos provar que B é um fibrado sobre B/G com respeito a projeção p_2 . Ou, mais geralmente, se H é um subgrupo fechado de G então B/H é um fibrado sobre B/G com projeção p .

Seja G um subgrupo fechado e normal de B . Então G é um ponto $x_0 \in B/G$. Uma seção local de G em B é uma função f aplicando uma vizinhança V de x_0 continuamente em B e tal que $p_2 \circ f(x) = x$ para cada $x \in V$. Se B é um fibrado sobre B/G , é claro que uma tal f deve existir.

Teorema 4.8. *Se o subgrupo fechado e normal G de B admite uma seção local f , se H é um subgrupo fechado e normal de G e $p : B/H \rightarrow B/G$ é a aplicação induzida pela inclusão de classes laterais, então podemos associar uma estrutura fibrada para B/H relativa a p . A fibra do fibrado é G/H e o grupo do fibrado é G/H_0 atuando em G/H como translações a esquerda onde H_0 é o maior subgrupo de H invariante em G . Além disso, quaisquer duas seções conduzem a fibrados estritamente equivalentes. Finalmente, as translações a esquerda de B/H por elementos de B são aplicações fibradas deste fibrado nele próprio.*

Demonstração. Consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & B/H & \\ p_1 \nearrow & & \downarrow p \\ B & & B/G \\ p_2 \searrow & & \end{array}$$

Como observado na Seção 4.1, p_1 e p_2 são aplicações contínuas. Se U é aberto em B/G , então, por definição, $p_2^{-1}(U)$ é aberto em B . Desde que $p \circ p_1 = p_2$, temos $p_2^{-1}(U) = p_1^{-1} \circ p^{-1}(U)$. Isto significa que $p^{-1}(U)$ é aberto em B/H , e, portanto, p é contínua. É claro que $G/H \subset B/H$ e $p(G/H) = x_0$. Denotaremos elementos de G/H por y e elementos de B/H por z .

Construímos o fibrado coordenado como segue. O conjunto indexado J é apenas o conjunto B . Para cada $b \in B$, defina a vizinhança coordenada V_b em B/G por $V_b = b \cdot V$ (f é definida em V). Defina $f_b : V_b \rightarrow B$ por $f_b(x) = bf(b^{-1} \cdot x)$. Então f_b é contínua e desde que $p_2 \circ f(b^{-1} \cdot x) = b^{-1} \cdot x$ segue que $p_2 \circ f_b(x) = p_2(bf(b^{-1} \cdot x)) = b \cdot (b^{-1} \cdot x) = x$. Para quaisquer $x \in V_b$ e $y \in G/H$ defina a função coordenada ϕ_b por:

$$\phi_b(x, y) = f_b(x) \cdot y. \quad (4.2)$$

Como provado na Seção 4.2, a translação a esquerda de B/H por um elemento de B é contínua em ambas as variáveis. Portanto ϕ_b é contínua em (x, y) . Desde que p_1 aplica G sobre G/H , podemos escolher $g \in G$ tal que $p_1(g) = y$. Então $p_1(f_b(x)g) = f_b(x) \cdot y$ e $p_2(f_b(x)g) = p_2 \circ f_b(x) = x$. Desde que $p \circ p_1 = p_2$, segue que $p \circ \phi_b(x, y) = p(f_b(x) \cdot y) = p \circ p_1(f_b(x)g) = p_2(f_b(x)g) = x$.

Defina $p_b : p^{-1}(V_b) \rightarrow G/H$ por:

$$p_b(z) = [f_b(p(z))]^{-1} \cdot z. \quad (4.3)$$

Claramente p_b é contínua, $p_b \circ \phi_b(x, y) = p_b(f_b(x) \cdot y) = [f_b(p(f_b(x) \cdot y))]^{-1} \cdot (f_b(x) \cdot y) = [f_b(x)]^{-1} \cdot (f_b(x) \cdot y) = ([f_b(x)]^{-1} f_b(x)) \cdot y = y$, e $\phi_b(p(z), p_b(z)) = f_b(p(z)) \cdot p_b(z) = f_b(p(z)) \cdot ([f_b(p(z))]^{-1} \cdot z) = (f_b(p(z)) [f_b(p(z))]^{-1}) \cdot z = z$. A existência das aplicações contínuas p e p_b com estas propriedades mostra que ϕ_b aplica $V_b \times G/H$ homeomorficamente sobre $p^{-1}(V_b)$, com inversa $\phi_b^{-1} : p^{-1}(V_b) \rightarrow V_b \times G/H$ dada por $\phi_b^{-1}(z) = (p(z), p_b(z))$.

Agora suponha $x \in V_b \cap V_c$, então $p_c \circ \phi_b(x, y) = p_c(f_b(x) \cdot y) = [f_c(p(f_b(x) \cdot y))]^{-1} \cdot (f_b(x) \cdot y) = [f_c(x)]^{-1} \cdot [f_b(x) \cdot y] = [f_c(x)]^{-1} f_b(x) \cdot y$ é uma translação a esquerda de y pelo elemento

$$g_{cb}(x) = f_c(x)^{-1} f_b(x). \quad (4.4)$$

Desde que $p_2 \circ f_c = p_2 \circ f_b$, $g_{cb}(x)$ está em G pois $p_2(g_{cb}(x)) = p_2(f_c(x)^{-1} f_b(x)) = p_2(f_c(x))^{-1} p_2(f_b(x)) = p_2(f_b(x))^{-1} p_2(f_b(x)) = eG$. A continuidade de f_c , f_b e das inversas implica a continuidade de g_{cb} .

Como observado na Seção 4.2, o grupo que opera efetivamente em G/H é G/H_0 . A imagem de g_{cb} pela aplicação natural $G \rightarrow G/H_0$ é a transformação coordenada em $V_b \cap V_c$. Isto completa a construção do fibrado coordenado.

Agora, sejam f, f' duas seções locais definidas em vizinhanças V, V' de x_0 . Defina $V'_b, f'_b, \phi'_b, p'_b$ como acima usando f', V' em vez de f, V . Então $\bar{g}_{cb}(x) \cdot y = (f'_c(x)^{-1} f_b(x)) \cdot y = [f'_c(x)]^{-1} \cdot (f_b(x) \cdot y) = [f'_c(p(f_b(x) \cdot y))]^{-1} \cdot (f_b(x) \cdot y) = p'_c(f_b(x) \cdot y) = p'_c \circ \phi_b(x, y) = \phi'_{c,x} \circ \phi_{b,x}(y)$, $x \in V_b \cap V'_c$.

Desde que $f'_c(x)$ e $f_b(x)$ ambas pertencem a classe lateral a esquerda de G sobre x , $\bar{g}_{cb}(x) = f'_c(x)^{-1} f_b(x)$ está em G . Ela é claramente contínua. Portanto, pela Definição 4.4 as duas estruturas fibradas baseadas em f e f' são equivalentes.

Para provar a última afirmação, seja $b_1 \in B$. A translação a esquerda de B por b_1 não altera as relações de inclusão entre as classes laterais a esquerda de G e H . Portanto, $b_1 \cdot p(z) = p(b_1 \cdot z)$ para cada $z \in B/H$. Sejam $x \in V_b$, $x' = b_1 \cdot x \in V_c$, $y \in G/H$.

Então a aplicação transformação $\bar{g}_{cb}(x)$ é dada por $\bar{g}_{cb}(x) \cdot y = \phi_{c,x'}^{-1}(b_1 \cdot \phi_{b,x}(y)) = p_c(b_1 \cdot \phi_{b,x}(y)) = [f_c(p(b_1 \cdot \phi_{b,x}(y)))]^{-1} \cdot (b_1 \cdot \phi_{b,x}(y)) = [f_c(b_1 \cdot p(\phi_{b,x}(y)))]^{-1} \cdot (b_1 \cdot \phi_{b,x}(y)) = f_c(b_1 \cdot x)^{-1} b_1 f_b(x) \cdot y = f_c(x')^{-1} b_1 f_b(x) \cdot y$.

Logo $\bar{g}_{cb}(x)$ é a imagem em G/H_0 do elemento $f_c(x')^{-1} b_1 f_b(x)$ de G . Desde que a última é contínua em x , assim também o é a primeira. Tendo verificado as condições da Definição 4.5, segue que b_1 é uma aplicação fibrada. □

Tomando $H = \{e\}$, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.9. *Se G tem uma seção local em B , então B é um fibrado vetorial sobre B/G relativo a projeção p que associa a cada b a classe lateral bG . A fibra do fibrado é G e o grupo é G atuando sobre a fibra por translações a esquerda.*

4.5 Aplicações do Teorema da Estrutura Fibrada

Veremos nesta seção alguns exemplos de espaços quocientes de grupos.

4.5.1 Grupos Ortogonais

Denotemos O_n o grupo de transformações ortogonais reais no n -espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Observemos que O_n é um grupo transitivo sobre a $(n-1)$ -esfera unitária S^{n-1} , pois dados dois pontos $x_0, x_1 \in S^{n-1}$ existe uma rotação que leva x_0 em x_1 . Se $x_0 \in S^{n-1}$, o subgrupo H deixando x_0 fixado é apenas um grupo ortogonal O_{n-1} . Para ver isto, complete o conjunto linearmente independente $\{x_0\}$ de $\mathbb{R}^n$ a uma base de $\mathbb{R}^n$ e veja H como o subgrupo de O_n consistindo das transformações ortogonais reais cuja matriz

nesta base é dada por $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{11} & \cdots & x_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n-11} & \cdots & x_{n-1n-1} \end{pmatrix}$ onde $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-11} & \cdots & x_{n-1n-1} \end{pmatrix}$ é

uma matriz ortogonal real de ordem $n-1$. Pela Seção 4.3 podemos fazer a identificação $S^{n-1} = O_n/O_{n-1}$, e pela Seção 4.4, O_n é um fibrado sobre S^{n-1} com fibra e grupo O_{n-1} .

4.5.2 Variedades de Stiefel

Um k -frame, v^k , em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto ordenado de k vetores linearmente independentes. Seja L_n o grupo linear completo. Qualquer k -frame fixado v_0^k pode ser transformado em qualquer outro v^k por um elemento de L_n . Denotemos $V'_{n,k}$ o conjunto de todos os k -frames. Então L_n é um grupo transitivo sobre $V'_{n,k}$ e se $L_{n,k}$ é o subgrupo de L_n deixando fixado cada vetor de v_0^k , segue pela seção 4.3 que podemos identificar $V'_{n,k} = L_n/L_{n,k}$.

O espaço $V'_{n,k}$ é chamado a **variedade de Stiefel** de k -frames no n -espaço.

Se restringirmos nossa atenção aos k -frames nos quais os vetores são unitários e dois a dois ortogonais (abreviadamente: um k -frame ortogonal), o conjunto destes, $V_{n,k}$, é um subespaço de $V'_{n,k}$. O grupo O_n aplica $V_{n,k}$ em si mesmo e é transitivo sobre $V_{n,k}$. O subgrupo deixando fixado um v_0^k é apenas o grupo ortogonal O_{n-k} atuando no espaço ortogonal a todos os vetores de v_0^k . Assim $V_{n,k} = O_n/O_{n-k}$.

Se transladarmos qualquer v^k ao longo de seu primeiro vetor até a sua extremidade em S^{n-1} obtemos um $(k-1)$ -frame de vetores tangentes a um ponto de S^{n-1} . O processo é claramente reversível. Assim podemos interpretar $V_{n,k}$ como a variedade de $(k-1)$ -frames ortogonais tangentes a S^{n-1} . Em particular, quando $k=2$, $V_{n,2}$ é a variedade de vetores unitários tangentes sobre S^{n-1} .

Exemplo 4.10. Considerando o 3-frame em $\mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3\}$, e transladando v_2 e v_3 ao longo de v_1 , até sua extremidade em S^2 , obtemos um 2-frame de vetores tangentes a um ponto de S^2 . Veja a Figura 4.1.

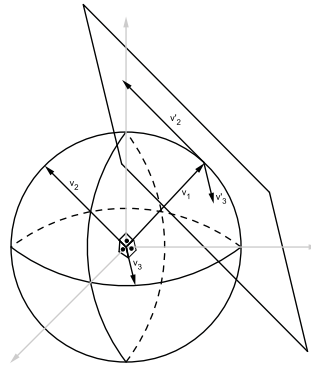


Figura 4.1: 3-frame transladado ao longo de v_1 .

Para uma outra interpretação, seja S^{k-1} a esfera unitária no plano dos vetores v_0^k . Uma aplicação ortogonal de S^{k-1} em S^{n-1} corresponde exatamente a uma aplicação de v_0^k em um outro v^k . Assim $V_{n,k}$ é a variedade de aplicações ortogonais de S^{k-1} em S^{n-1} .

Seja v_0^n um n -frame ortogonal fixado em $\mathbb{R}^n$, e denote v_0^k os k primeiros vetores de v^n . Seja O_{n-k} o subgrupo deixando v_0^k fixado. Então $O_{n-k} \supset O_{n-k-1}$. Passando ao quociente O_n por estes subgrupos e introduzindo as projeções naturais (inclusão de classes laterais) obtemos uma cadeia de variedades de Stiefel e projeções

$$O_n = V_{n,n} \rightarrow V_{n,n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow V_{n,2} \rightarrow V_{n,1} = O_n/O_{n-1} = S^{n-1}.$$

Cada projeção ou qualquer composição delas é uma aplicação fibrada. Pelo Teorema 4.8, a fibra de $V_{n,n-k+1} \rightarrow V_{n,n-k}$ é o espaço das classes laterais $O_k/O_{k-1} = S^{k-1}$ e o grupo do fibrado é O_k .

Qualquer fibrado cuja fibra é uma k -esfera e o grupo é o grupo ortogonal, é chamado um k -fibrado em esfera. Portanto a variedade de Stiefel produz uma cadeia de fibrados em esfera ligando O_n e S^{n-1} .

Qualquer $(n-1)$ -frame ortogonal no n -espaço pode ser completado a um n -frame ortogonal de apenas duas maneiras pela adição do n -ésimo vetor. Isto corresponde ao fato que $V_{n,n} \rightarrow V_{n,n-1}$ tem uma 0-esfera como fibra. Este não é um recobrimento duplo no sentido estrito, $V_{n,n} = O_n$ é um espaço tendo duas componentes conexas - o subgrupo R_n de matrizes de determinante $+1$ (o grupo de rotação de S^{n-1}), e uma segunda componente de matrizes de determinante -1 .

Agora O_1 é um grupo de dois elementos e o determinante do elemento não trivial é -1 . Portanto $V_{n,n} \rightarrow V_{n,n-1}$ aplica cada componente de O_n topologicamente sobre $V_{n,n-1}$. Assim podemos identificar $V_{n,n-1}$ com o grupo de rotação R_n de S^{n-1} . Portanto a projeção $O_n \rightarrow V_{n,k}$ aplica R_n sobre $V_{n,k}$. Isto produz a identificação $V_{n,k} = R_n/R_{n-k}$, $k < n$.

Um fibrado cuja fibra é uma esfera e o grupo é o grupo de rotação, é chamado um **fibrado em esfera orientável**. Segue da observação acima que $V_{n,n-k} \rightarrow V_{n,n-k-1}$ é um k -fibrado em esfera orientável.

4.5.3 Variedades de Grassmann

Denotemos $M_{n,k}$ o conjunto de subespaços lineares k -dimensionais (k -planos pela origem) de $\mathbb{R}^n$. Qualquer elemento de O_n leva um k -plano em um k -plano, e portanto, O_n é transitivo sobre $M_{n,k}$. Se $\mathbb{R}^k$ é um k -plano fixado e $\mathbb{R}^{n-k}$ é seu complemento ortogonal, o subgrupo de O_n aplicando $\mathbb{R}^k$ sobre si mesmo é dado pelo produto direto $O_k \times O'_{n-k}$ de dois subgrupos ortogonais o primeiro dos quais deixa $\mathbb{R}^{n-k}$ fixado e o segundo deixa $\mathbb{R}^k$ fixado. Segue que podemos identificar $M_{n,k} = O_n/O_k \times O'_{n-k}$.

O conjunto $M_{n,k}$ com esta estrutura é chamado a **variedade de Grassmann** de k -planos no n -espaço.

Um dos subgrupos O_k, O'_{n-k} contém um elemento de determinante -1 , portanto a projeção $O_n \rightarrow M_{n,k}$ aplica o grupo de rotação R_n sobre $M_{n,k}$. Sejam R_k e R'_{n-k} os subgrupos de rotação de O_k, O'_{n-k} . Defina $\tilde{M}_{n,k} = R_n/R_k \times R'_{n-k}$.

Então $\tilde{M}_{n,k}$ é chamado *a variedade de k -planos orientados do n -espaço*. A projeção natural $\tilde{M}_{n,k} \rightarrow M_{n,k}$ é um recobrimento duplo (ambos os espaços são conexos e a fibra é uma 0 -esfera).

Se identificarmos a variedade de Stiefel $V_{n,k}$ com O_n/O'_{n-k} segue pelo Teorema 4.8 que $V_{n,k}$ é um fibrado sobre $M_{n,k}$ com fibra e grupo O_k . Passando aos grupos de rotação, obtemos que $V_{n,k}$ é um fibrado sobre $\tilde{M}_{n,k}$ com fibra R_k .

A correspondência entre qualquer k -plano e seu $(n-k)$ -plano ortogonal define uma bijeção $M_{n,k} \longleftrightarrow M_{n,n-k}$. O espaço de retas pela origem, $M_{n,1}$, ou pares de pontos antipodais sobre S^{n-1} , é apenas o $(n-1)$ -espaço projetivo; e $\tilde{M}_{n,1} = S^{n-1}$.

Referências

- [1] MILNOR, J. W.; STASHEFF, J. D. *Characteristic Classes*. 1. ed. New Jersey: Princeton University Press, 1974.
- [2] STEENROD, N. *Topology of Fibre Bundles*. 1. ed. New Jersey: Princeton University Press, 1951.
- [3] LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [4] HUSEMOLLER, D. *Fibre Bundles*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1975.
- [5] MUNKRES, J. R. *Topology a First Course*. 1. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [6] BISHOP, R. L.; CRITTENDEN, R. *Geometry of Manifolds*. 1. ed. New York: Academic Press, 1964.
- [7] EILENBERG, S.; STEENROD, N. *Foundations of Algebraic Topology*. 1. ed. New Jersey: Princeton University Press, 1952.
- [8] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1971.
- [9] HU, S. T. *Introduction to Homological Algebra*. 1. ed. San Francisco: Hlden-Day, Inc., 1968.
- [10] LANG, S. *Algebra*. 3. ed. New York: Springer, 2002.
- [11] LIMA, E. L. *Análise no Espaço R^n* . 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [12] LIMA, E. L. *Curso de Análise - Volume 2*. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [13] WHITNEY, H. *Geometric Integration Theory*. 1. ed. New Jersey: Princeton University Press, 1957.
- [14] DUGUNDJI, J. *Topology*. 1. ed. Massachusetts: Allyn and Bacon, Inc., 1966.

A Apêndice 1

A.1 Categorias

Definição A.1. Um conjunto $\mathcal{C}$ de elementos $\{\gamma\}$ é chamado um **sistema multiplicativo** se, para algum par $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}$, um **produto** $\gamma_1\gamma_2 \in \mathcal{C}$ está definido. Um elemento $\varepsilon \in \mathcal{C}$ é chamado uma **identidade** (ou uma **unidade**) se $\varepsilon\gamma_1 = \gamma_1$ e $\gamma_2\varepsilon = \gamma_2$, sempre que $\varepsilon\gamma_1$ e $\gamma_2\varepsilon$ estão definidos.

O sistema multiplicativo é chamado uma **categoria abstrata** se os seguintes axiomas são satisfeitos:

Axioma A.2. O produto triplo $\gamma_3(\gamma_2\gamma_1)$ está definido se, e somente se, $(\gamma_3\gamma_2)\gamma_1$ está definido. Quando ambos estão definidos a propriedade associativa $\gamma_3(\gamma_2\gamma_1) = (\gamma_3\gamma_2)\gamma_1$ vale. O produto triplo será escrito como $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$

Axioma A.3. O produto triplo $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$ está definido sempre que ambos os produtos $\gamma_3\gamma_2$ e $\gamma_2\gamma_1$ estão definidos.

Axioma A.4. Para cada $\gamma \in \mathcal{C}$ existem identidades $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{C}$ tais que $\gamma\varepsilon_1$ e $\varepsilon_2\gamma$ estão definidos.

Lema A.5. Para cada $\gamma \in \mathcal{C}$, as identidades ε_1 e ε_2 tais que $\gamma\varepsilon_1$ e $\varepsilon_2\gamma$ estão definidos, são únicas.

Demonstração. Suponha que $\gamma\varepsilon_1$ e $\gamma\varepsilon'_1$ estão ambas definidas com $\varepsilon_1, \varepsilon'_1$ ambas identidades. Então $(\gamma\varepsilon_1)\varepsilon'_1 = \gamma\varepsilon'_1$ está definida. Logo $\varepsilon_1\varepsilon'_1$ está definida e $\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon'_1 = \varepsilon'_1$. Analogamente, ε_2 é único. $\square$

Definição A.6. Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste de uma coleção $\{C\}$ de elementos chamados **objetos** e uma coleção $\{\gamma\}$ de elementos chamados **aplicações**. As aplicações formam uma **categoria abstrata** no sentido da Definição A.1. Os objetos estão em correspondência um a um $C \rightarrow i_C$ com o conjunto de identidades da categoria abstrata. Assim, para cada aplicação γ existe em correspondência únicos objetos C_1 e C_2 tais que γi_{C_1} e $i_{C_2}\gamma$ estão definidos. Os objetos C_1, C_2 são chamados o **domínio** e a **imagem** de γ , respectivamente; notações: $C_1 = \text{Dom}(\gamma)$, $C_2 = \text{Im}(\gamma)$ e $\gamma : C_1 \rightarrow C_2$.

A.2 Funtores

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e seja D uma função que aplica objetos de $\mathcal{C}$ em objetos de $\mathcal{D}$ e, ainda, determina para cada aplicação $f \in \mathcal{C}$ uma aplicação $D(f) \in \mathcal{D}$. A aplicação D é chamada um funtor covariante (de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$) se forem satisfeitas as seguintes condições:

(1^a) Se $f : C_1 \rightarrow C_2$, então $D(f) : D(C_1) \rightarrow D(C_2)$.

(2^a) $D(i_C) = i_{D(C)}$.

(3^a) Se $f_2 \circ f_1$ está definida, então $D(f_2 \circ f_1) = D(f_2) \circ D(f_1)$.

A aplicação D será chamada um funtor contravariante se as seguintes condições forem satisfeitas:

(1^a) Se $f : C_1 \rightarrow C_2$, então $D(f) : D(C_2) \rightarrow D(C_1)$.

(2^a) $D(i_C) = i_{D(C)}$.

(3^a) Se $f_2 \circ f_1$ está definida, então $D(f_2 \circ f_1) = D(f_1) \circ D(f_2)$.

A primeira condição pode ser reescrita como: $D(\text{Dom} f) = \text{Dom}(Df)$ e $D(\text{Im} f) = \text{Im} D(f)$. Assim, D é um funtor covariante se ele comuta com as operações da categoria.

Tendo em vista a segunda condição, um funtor D é completamente determinado pela função $D(f)$ definida para uma aplicação f somente. Assim, um funtor covariante D é, essencialmente, um homomorfismo da categoria abstrata associada a $\mathcal{C}$ na categoria abstrata de $\mathcal{D}$, sujeito à condição que aplica a identidade na identidade. Um funtor contravariante, por sua vez, é um anti-homomorfismo das categorias abstratas.

Se D é um funtor de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ e D' é um funtor de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{E}$, estes podem ser compostos e também formam um funtor $D'D$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{E}$. Se DD' tem a mesma (oposta) variância, então DD' é covariante (contravariante).

B Apêndice 2

B.1 Quatérnions

Um quatérnion q é um elemento da forma $q = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$, onde x_1, x_2, x_3 e x_4 são números reais; que pode ser identificado com a quádrupla (x_1, x_2, x_3, x_4) (um vetor de $\mathbb{R}^4$) onde i, j, k são tais que: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ji = k$, $ij = -k$, $kj = i$, $jk = -i$, $ik = j$ e $ki = -j$.

Multiplicando o elemento q pelos vetores i, j, k , respectivamente, temos:

- (a) $qi = (x_1 + x_2i + x_3j + x_4k)i = x_1i + x_2i^2 + x_3ji + x_4ki = -x_2 + x_1i - x_4j + x_3k \equiv (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$.
- (b) $qj = (x_1 + x_2i + x_3j + x_4k)j = x_1j + x_2ij + x_3j^2 + x_4kj = -x_3 + x_4i + x_1j - x_2k \equiv (-x_3, x_4, x_1, -x_2)$.
- (c) $qk = (x_1 + x_2i + x_3j + x_4k)k = x_1k + x_2ik + x_3jk + x_4k^2 = -x_4 - x_3i + x_2j + x_1k \equiv (-x_4, -x_3, x_2, x_1)$.

Observação B.1. O símbolo $\equiv$ indica a identificação do quatérnion $y_1 + y_2i + y_3j + y_4k$ com a quádrupla de números reais (y_1, y_2, y_3, y_4) .

C Apêndice 3

C.1 Aplicação r –linear

Sejam $E_1, E_2, \dots, E_r, U$ espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e f uma aplicação de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_r$ em U ; $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_r \rightarrow U$. Se a aplicação f for linear em cada uma das variáveis ξ_k , isto é: $f(\xi_1, \dots, \xi_k + \eta, \dots, \xi_r) = f(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_r) + f(\xi_1, \dots, \eta, \dots, \xi_r)$ e $f(\xi_1, \dots, \alpha \xi_k, \dots, \xi_r) = \alpha f(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_r)$, onde $\xi_1 \in E_1$, $\xi_k, \eta \in E_k$, $\xi_r \in E_r$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então f é dita ser r –linear. Se $r = 2$, dizemos que f é bilinear.

C.2 Aplicação Simétrica

Definição C.1. *Seja f uma aplicação bilinear em um espaço vetorial V . Dizemos que f é simétrica se $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$, para todos os vetores α, β em V .*

D Apêndice 4

D.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Teorema D.1. *Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos é linearmente independente.*

Demonstração. Seja S um conjunto ortogonal finito, ou infinito, de vetores não-nulos em um dado espaço com produto interno. Suponha que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ são vetores distintos em S e que $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m$. Então $(\beta|\alpha_k) = (\sum_j c_j\alpha_j|\alpha_k) = \sum_j c_j(\alpha_j|\alpha_k) = c_k(\alpha_k|\alpha_k)$. Desde que $(\alpha_k|\alpha_k) \neq 0$, segue que $c_k = \frac{(\beta|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}$, $1 \leq k \leq m$. Assim quando $\beta = 0$, cada $c_k = 0$, então S é um conjunto independente. $\square$

Teorema D.2. *Seja V um espaço com produto interno e sejam $\beta_1, \dots, \beta_n$ quaisquer vetores linearmente independentes em V . Então pode-se contruir vetores ortogonais $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em V tais que para cada $k = 1, 2, \dots, n$ o conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ é uma base para o subespaço gerado por $\beta_1, \dots, \beta_k$.*

Demonstração. Os vetores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ serão obtidos por meio de uma construção conhecida como o **processo de ortogonalização de Gram-Schmidt**. Primeiro seja $\alpha_1 = \beta_1$. Os outros vetores são dados indutivamente como segue: Suponha $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ($1 \leq m < n$) tenham sido escolhidos tais que, para todo k , $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, $1 \leq k < m$, é uma base ortogonal para o subespaço de V que é gerado por $\beta_1, \dots, \beta_k$.

Para construir o próximo vetor α_{m+1} , seja

$$\alpha_{m+1} = \beta_{m+1} - \sum_{k=1}^m \frac{(\beta_{m+1}|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k \quad (\text{D.1})$$

Então $\alpha_{m+1} \neq 0$. Por outro lado, β_{m+1} é uma combinação linear de $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ e logo, uma combinação linear de $\beta_1, \dots, \beta_m$. Além disso, se $1 \leq j \leq m$, então $(\alpha_{m+1}|\alpha_j) = (\beta_{m+1}|\alpha_j) - \sum_{k=1}^m \frac{(\beta_{m+1}|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} (\alpha_k|\alpha_j) = (\beta_{m+1}|\alpha_j) - (\beta_{m+1}|\alpha_j) = 0$.

Portanto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}\}$ é um conjunto ortogonal consistindo de $m+1$ vetores não-nulos no subespaço gerado por $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$. Pelo Teorema D.1, ele é uma base para

este subespaço. Assim os vetores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ podem ser construídos um após o outro de acordo com a equação (D.1).

□

Corolário D.3. *Todo espaço de dimensão finita com produto interno tem uma base ortonormal.*

Demonstração. Sejam V um espaço de dimensão finita com produto interno e $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ uma base para V . Aplicando-se o processo de Gram-Schmidt obtemos uma base ortogonal $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Então para obter uma base ortonormal, simplesmente substitua cada vetor α_k por $\alpha_k / \|\alpha_k\|$.

□

E Apêndice 5

E.1 Idéia da prova da observação 3.10

Definição E.1. *Uma partição da unidade num espaço topológico X é uma coleção $p_\alpha, \alpha \in \Lambda$, satisfazendo*

1. $p_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ é contínua para todo $\alpha \in \Lambda$.
2. Para qualquer $x \in X$, existe uma vizinhança V de x tal que $p_\alpha(y) = 0$ para todo $y \in V$, exceto para um número finito de índices α .
3. Para todo $x \in X$, $\sum_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x) = 1$

Definição E.2. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então o suporte de f , denotado por $\text{supp} f$, é o fecho do conjunto de todos os elementos $x \in X$ para os quais $f(x) \neq 0$.*

Definição E.3. *Dado um recobrimento $U_\alpha, \alpha \in \Lambda$, diremos que uma partição da unidade $p_\alpha, \alpha \in \Lambda$ é subordinada a este recobrimento se $\text{supp } p_\alpha \subset U_\alpha$*

Necessitaremos do Teorema seguinte que pode ser encontrado em Dugundji [14].

Teorema E.4. *Se X é paracompacto e $U_\alpha, \alpha \in \Lambda$, é um recobrimento de X então existe uma partição da unidade $p_\alpha, \alpha \in \Lambda$, subordinada a este recobrimento.*

Teorema E.5. *Dado um fibrado η , se $B(\eta)$ for paracompacto então η admite uma métrica Euclidiana.*

Demonstração. Se U_α é um recobrimento de $B(\eta)$ que realiza uma trivialização local, cada $\pi^{-1}(U_\alpha)$ tem uma métrica euclidiana $\omega_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\omega_\alpha(e) = \mu \circ h_\alpha^{-1}(e)$, onde $\mu : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\mu(b, v) = |v|^2$. Seja p_α uma partição da unidade subordinada ao recobrimento U_α , dada pelo Teorema E.4. Então $\theta : E(\eta) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\theta(v) = \sum_{\alpha} p_\alpha(\pi(v))\omega_\alpha(v)$ é a métrica Euclidiana procurada. $\square$

F Apêndice 6

Em todo este Apêndice R denota um anel comutativo com unidade $1 \neq 0$.

F.1 Módulos

Por um módulo sobre R , entendemos um grupo abeliano aditivo X , junto com uma função $\mu : R \times X \rightarrow X$ do produto cartesiano $R \times X$ em X , que satisfaz as três condições abaixo:

(M1) A função μ é bi-aditiva; isto é,

$$\begin{aligned}\mu(\alpha + \beta, x) &= \mu(\alpha, x) + \mu(\beta, x), \\ \mu(\alpha, x + y) &= \mu(\alpha, x) + \mu(\alpha, y)\end{aligned}$$

para todos α, β em R e todos x, y em X .

(M2) Para quaisquer α, β em R e qualquer x em X , temos

$$\mu[\alpha, \mu(\beta, x)] = \mu(\alpha\beta, x).$$

(M3) Para todo elemento x em X , temos

$$\mu(1, x) = x.$$

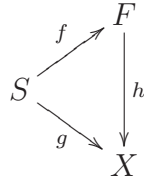
A função μ é chamada a multiplicação escalar do módulo X .

Observação F.1. Todo espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ é um módulo sobre $\mathbb{R}$.

F.2 Módulo Livre Gerado por um Conjunto e Propriedade Universal para Módulos Quocientes

Definição F.2. Dado um conjunto S , um módulo F sobre R e uma aplicação $f : S \rightarrow F$, então (F, f) tem a propriedade universal para S se para qualquer módulo X sobre

R e qualquer aplicação $g : S \rightarrow X$, existe um único homomorfismo $h : F \rightarrow X$, com $g = h \circ f$



Quando isto acontece, também dizemos que F é o módulo livre sobre os geradores $f(S)$.

Se A é um módulo sobre $\mathbb{R}$ e B é um submódulo de A , então podemos definir um módulo quociente A/B , e uma aplicação quociente $p : A \rightarrow A/B$. Esta é caracterizada pela propriedade abaixo:

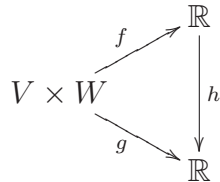
Para qualquer homomorfismo $\psi : A \rightarrow G$ tal que $\psi(B) = 0$, existe um (único) homomorfismo $\phi : A/B \rightarrow G$ com $\psi = \phi \circ p$. Compare com a propriedade universal de módulos livres definida acima.

F.3 Produto tensorial

Se V, W são módulos sobre $\mathbb{R}$, denotamos por $L^2(V, W; \mathbb{R})$ o espaço das aplicações bilineares $f : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$.

Relembramos que uma aplicação bilinear é uma aplicação que é linear (isto é, $\mathbb{R}$ -linear) em cada variável.

Podemos ver as aplicações bilineares de um conjunto fixado de módulos V, W sobre $\mathbb{R}$ como os objetos de uma categoria. Com efeito, se $f : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ são aplicações bilineares, definimos um morfismo $f \rightarrow g = h \circ f$ onde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um homomorfismo que torna o seguinte diagrama comutativo:



Um objeto universal nessa categoria é chamado um produto tensorial de V, W (sobre $\mathbb{R}$).

Agora provaremos que um produto tensorial existe, e de fato, construiremos um, de um modo natural.

Seja M o módulo livre gerado pelo conjunto de todos os pares (x, y) , $x \in V$, $y \in W$, isto é, gerado pelo conjunto $V \times W$. Seja N o submódulo gerado por todos os elementos do seguinte tipo: $(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y)$, $(ax, y) - a(x, y)$, para todos $x_1, x_2, x \in V$,

$y \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Temos a inclusão canônica $V \times W \rightarrow M$ de $V \times W$ sobre o módulo gerado por ele.

Compomos esta aplicação com a aplicação canônica $M \rightarrow M/N$ sobre o módulo quociente, para obter uma aplicação $\varphi : V \times W \rightarrow M/N$.

Afirmamos que φ é bilinear e é um produto tensorial.

Observe que φ é bilinear, pois nossa definição foi ajustada para este propósito. Seja $f : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear. Por definição de módulo livre gerado por $V \times W$ temos uma aplicação linear induzida $M \rightarrow \mathbb{R}$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow & \downarrow \\ V \times W & & \mathbb{R} \\ & \searrow f & \end{array}$$

Desde que f é bilinear, a aplicação induzida $M \rightarrow \mathbb{R}$ assume o valor zero em N . Então, pela propriedade universal de módulos quocientes, a aplicação induzida $M \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser fatorada através de M/N , e temos um homomorfismo $f_* : M/N \rightarrow \mathbb{R}$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & M/N \\ & \nearrow \varphi & \downarrow f_* \\ V \times W & & \mathbb{R} \\ & \searrow f & \end{array}$$

Desde que a imagem de φ gera M/N , segue que a aplicação induzida f_* é unicamente determinada. Isto prova o que queríamos.

O módulo M/N será denotado por $V \otimes W$, e será chamado o produto tensorial de V, W . Se $x \in V$ e $y \in W$, escrevemos $\varphi(x, y) = x \otimes y = x \otimes_{\mathbb{R}} y$.

Temos, para todo $x \in V, y \in W, ax \otimes y = a(x \otimes y)$ e $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$, para $x_1, x_2 \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.