

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

Estudo da propagação de feixes acústicos no oceano

Laura Helena Pozzo

Prof.Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Rio Claro (SP)

2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Laura Helena Pozzo

Estudo da propagação de feixes acústicos no oceano

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel e Licenciado em Física.

Rio Claro - SP

2017

530 Pozzo, Laura Helena
P894e Estudo da propagação de feixes acústicos no oceano / Laura Helena
Pozzo. - Rio Claro, 2017
45 f. : il., figs.

Trabalho de conclusão de curso (licenciatura e bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Ricardo Egidio de Carvalho

1. Física. 2. Propagação de feixes acústicos. 3. Oceano. 4. Propagação
do som. 5. Caos. 6. Espaço de fases. I. Título.

Estudo da propagação de feixes acústicos no oceano

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel e Licenciado em Física.

Comissão Examinadora


Prof. Adj. Ricardo Egydio de Carvalho (orientador)

Prof. Adj. Ricardo Paupitz B. dos Santos

Prof. Dr. Alexandre Mesquita

Rio Claro, 17 de Novembro de 2017.


Assinatura da aluna


Assinatura do orientador

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e minha irmã por me incentivarem em todos esses anos de faculdade, por todo apoio, carinho e por acreditarem em mim.

As minhas amigas Patricia Mescolotti, Luiza Gualter, Maria Fernanda, Taís Salles e Marry Delatorre, por me acolherem na República Sinta a Liga e me fazerem sentir que Rio Claro era o meu novo lar.

A todos os meus amigos, em especial ao Danilo Santos, Guilherme Toso, Laura Borelli, Murilo Ferriolli e Rodrigo Baroni por me ajudarem direta ou indiretamente a concluir este trabalho e por me apoiarem durante a graduação, vocês são amigos incríveis.

Ao Henrique Reatto Porcel, por estar ao meu lado durante todos esses anos, nos bons e maus momentos, você me fez acreditar em mim mesma, me fez acreditar que eu sou capaz de alcançar qualquer coisa neste mundo.

Aos meus professores do Colégio Amorim, tenho um carinho muito grande por cada um de vocês.

Aos professores do Departamento da Física, pela paciência e por partilhar os conhecimentos que levaremos para toda a vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho, por toda atenção, dedicação e ensinamentos que possibilitaram a realização deste trabalho.

A todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos de mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena.

“Não sei como o mundo me vê, mas eu me sinto como um garoto brincando na praia, contente em achar aqui e ali, uma pedra mais lisa ou uma concha mais bonita, mas tendo sempre diante de mim, ainda por descobrir, o grande oceano da verdade”.

(Isaac Newton)

RESUMO

Este trabalho consiste em um estudo sobre a propagação de feixes acústicos no oceano. Investigamos algumas características típicas do oceano para entendermos o comportamento da velocidade de propagação do som. Descrevemos um modelo para as propriedades do som no oceano e desenvolvemos as equações da propagação de feixes acústicos, o formalismo Hamiltoniano e o estudo de caos de feixes de som. Investigamos numericamente a dinâmica dos feixes acústicos, onde variamos os valores da amplitude de perturbação ε e do coeficiente de dissipação α para os casos de preservação e contração da área no espaço de fases.

Palavras chaves: Oceano. Propagação do som no oceano. Caos. Espaço de fases.

ABSTRACT

This work consists on a study of the acoustic propagation sound beams in the ocean. We investigate some typical characteristics of the ocean in order to understand the behavior of the sound speed propagation. We describe a model for the properties of the sound on the ocean and we develop the equations of the acoustics beams propagation, the Hamiltonian formalism and the study of ray chaos. We investigate numerically the dynamics of the acoustic beams by varying the perturbation amplitude ε and the dissipation coefficient α for the cases of area preservation and area contraction in the phase space.

Keywords: Ocean. Sound propagation in the ocean. Chaos. Phase space.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- A temperatura da superfície média dos oceanos	13
Figura 2- Comportamento da salinidade na camada superficial.. . . .	14
Figura 3- Relação da velocidade do som com a profundidade.	17
Figura 4 – Diagrama da estrutura de velocidade sonora assumida (esquerda) e das trajetórias de feixe (direita).	28
Figura 5- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.01$	30
Figura 6- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.05$	31
Figura 7- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.1$	31
Figura 8- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.2$	32
Figura 9- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.3$	32
Figura 10- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.4$	33
Figura 11- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.5$	33
Figura 12 - Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.1$ e $\alpha=0.0001$	36
Figura 13- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.1$ e $\alpha=0.001$	36
Figura 14- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.1$ e $\alpha=0.01$	37
Figura 15- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.1$ e $\alpha=0.1$	37
Figura 16- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.2$ e $\alpha=0.0001$	38
Figura 17- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.2$ e $\alpha=0.001$	39
Figura 18- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.2$ e $\alpha=0.01$	39
Figura 19- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.2$ e $\alpha=0.1$	40

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.	9
2. AS PROPRIEDADES TÍPICAS DA ÁGUA DO MAR.	11
2.1. Temperatura.	12
2.2. Salinidade.	13
2.3. Densidade.	14
3. PROPAGAÇÃO DO SOM.	16
3.1. Propagação de feixes acústicos.	17
3.2. Equações básicas	19
3.2.1. Equação de Helmholtz.	20
3.2.2. Equação parabólica.	21
3.3. Formalismo Hamiltoniano	22
4. CAOS.	25
4.1. Caos de feixes acústicos.	26
4.2. Uma investigação da dinâmica de feixes acústicos.	26
4.2.1. Mapeamento de preservação de área.	29
4.2.2 Coeficiente de restituição.	35
5. CONCLUSÃO	42
REFERÊNCIAS.	44

1. INTRODUÇÃO

O mar sempre representou mistérios, desafios e indagações para o homem. Os povos primitivos contemplavam-no e o viam como um meio difícil de entender e enfrentar, repleto de seres fantásticos e monstruosos. Com o tempo o mar passou a proporcionar alimentação, transporte e geração de renda para a população e difundiu uma importância ecológica, econômica, política e sociocultural.

O primeiro pensador que estudou o oceano utilizando uma metodologia científica foi o filósofo grego, Aristóteles. Mas, a ciência oceanográfica delongou mais de dois mil anos para que viesse de fato existir. Com os estudos pode-se entender que os oceanos possuem uma grande influência nas condições climáticas, e por isso, são fundamentais para a sobrevivência de todos os seres vivos do planeta.

A oceanografia é a ciência que estuda os oceanos, de sua interação com os continentes e com a atmosfera, estuda sua descrição física até a interpretação de seus fenômenos. Esta ciência requer conhecimentos gerais de matérias como biologia, física, geologia, matemática e química [1].

Neste trabalho trataremos apenas a parte da oceanografia física, estudando algumas características típicas do oceano relevantes para o estudo da propagação do som em feixes acústicos.

O período em que o estudo da acústica subaquática se tornou uma ciência quantitativa ocorreu durante a Segunda Guerra Mundial, o uso do método de óptica geométrica se tornou um dos instrumentos mais eficientes para o estudo de campos sonoros no oceano. A vantagem de compreender o comportamento de feixes é pelo fato de fornecer uma visão extensa sobre a mecânica básica de propagação do som em um ambiente complicado e é adequado para derivar estimativas analíticas.

Pesquisas sobre a propagação de som de longo alcance no oceano foram realizadas por várias décadas, de modo que, por volta de 1980 os cientistas consideraram o assunto bem compreendido. Mas foi analisada a existência de um fator, estudado nas duas últimas décadas, que possui uma grande influência na estrutura do campo sonoro em longas distâncias, este fator é o fenômeno de feixe de som num contexto em que dinâmica caótica pode ocorrer [2].

Assim, este trabalho de conclusão de curso estrutura-se em três partes. Na primeira, serão definidas algumas características típicas do oceano como a temperatura, a salinidade e a densidade, com o intuito de relacioná-las com a

velocidade da propagação do som. Na segunda parte serão discutidos brevemente os principais conceitos do modelo que descreverá as características da propagação do som, a partir disto estudaremos as equações da propagação de feixes acústicos e o formalismo Hamiltoniano associado. Por fim, na terceira parte, abordaremos o estudo de caos e será feita investigação da dinâmica de feixes acústicos para os casos de preservação e contração da área no espaço de fases.

2. AS PROPRIEDADES TÍPICAS DA ÁGUA DO MAR

Antes de se iniciar o estudo da propagação de som no oceano, é necessário entender as características gerais do oceano, mais especificamente, as características físicas.

A oceanografia física tem como objetivo compreender e descrever os processos descritos pelas leis da física e podem ser ditos como sistemas físicos. Assim, podem-se fazer estimativas da evolução destes sistemas e prever as suas implicações. Estas implicações não são só físicas, pois a oceanografia é uma matéria interdisciplinar em que a oceanografia física representa uma parte fundamental.

Os oceanos são extensões de água salgada que ocupam 71% da superfície terrestre [3] e pode-se dividi-los em três partes verticalmente, a primeira parte é uma camada superficial definida por forte homogeneidade de temperatura e salinidade; a segunda parte é uma intermediária definida por grandes gradientes verticais de temperatura, salinidade e densidade e a terceira parte é uma camada profunda, na qual as propriedades variam lentamente com a profundidade. As características das camadas podem ser obtidas por meio do comportamento vertical da temperatura, salinidade e densidade [4].

A camada superficial dos oceanos se prolonga até 200 metros de profundidade, é a primeira divisão vertical, conhecida como camada de mistura ou camada isotermal. Essa é a camada oceânica que está relacionada diretamente com a atmosfera. Desempenha um papel vital nas alterações climáticas e também no ecossistema marinho [5].

Abaixo da camada de mistura, região em que a temperatura da água não sofre variação ao longo da vertical, se encontra uma região com o máximo gradiente de temperatura, a termoclina, zona de variação rápida da temperatura com a profundidade, se localiza entre 200 m a 1000 m de profundidade, tratando-se de uma zona de estabilidade elevada. A termoclina é a camada que separa águas superficiais de águas profundas. Funciona como uma barreira à passagem de águas e propriedades verticalmente.

A terceira divisão vertical é a camada profunda que se situa abaixo da termoclina, localizada entre os 1000 metros até o fundo do mar, onde podem ser

encontradas águas mais frias e densas. A temperatura varia lentamente com a profundidade [6,7,8].

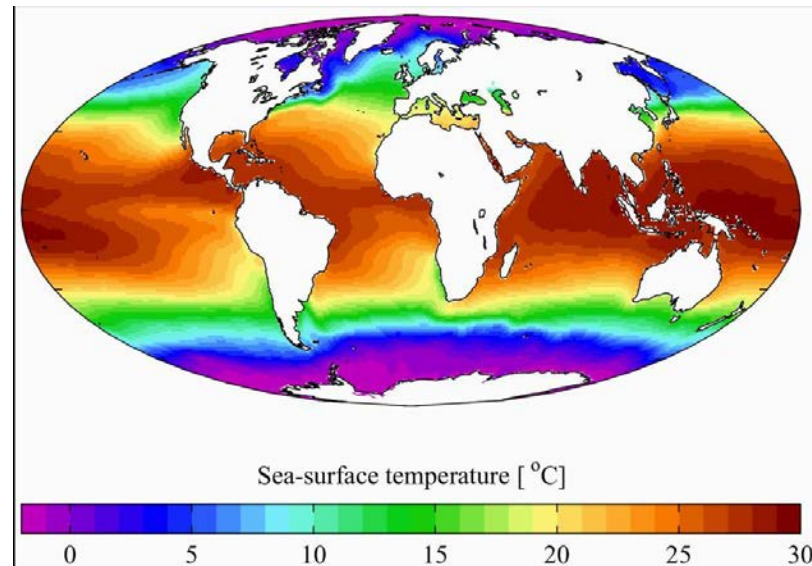
Sendo assim, as propriedades físicas da água do mar relevantes para o estudo são a pressão, a temperatura, a salinidade e a densidade, as quais serão explicadas em sequência.

2.1 Temperatura

A temperatura é a medida do grau de agitação das moléculas de um meio, uma grandeza física que define o equilíbrio térmico entre sistemas. A temperatura da água do mar apresenta variação tanto na escala vertical quanto na horizontal, mas as alterações na escala horizontal são menores que na vertical. As variações horizontais da temperatura superficial dos oceanos formam-se através de regiões de mesma temperatura denominadas de isotermas. As temperaturas superficiais decrescem de aproximadamente 28°C em baixas latitudes para até -2°C, aproximadamente, em altas latitudes. Nas regiões temperadas os gradientes são maiores do que nas regiões tropicais e polares. De forma geral a temperatura altera-se em média 0,5°C para cada grau de latitude percorrido como apresentado na figura 1.

Em relação as três divisões (camada de mistura, termoclina e a camada profunda), é possível descrever sobre o comportamento da temperatura nas mesmas. A camada de mistura possui temperaturas equivalentes às da superfície do mar devido aos processos de mistura ocasionadas pela ação dos ventos, ondas e correntes; a termoclina, a temperatura diminui acentuadamente com a profundidade; e a camada profunda, a temperatura varia suavemente a partir de 1000 metros até o fundo do mar [9]. Pode-se observar o comportamento da temperatura com a profundidade como será mostrado posteriormente.

Figura 1- A temperatura da superfície média dos oceanos.



Fonte:

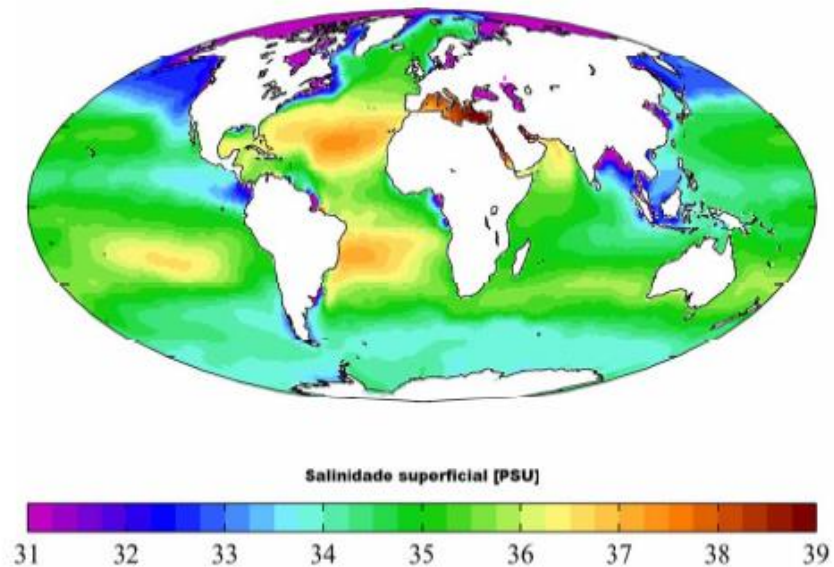
https://pt.wikipedia.org/wiki/Temperatura_da_superf%C3%ADcie_do_mar#/media/File:Wiki_plot_03.png

2.2 Salinidade

A água do mar contém em sua massa 3,5 % de sais, mas também contém gases, substâncias orgânicas e material particulado. Se a quantidade de sais for maior que 3,5% ocorre uma interferência em algumas propriedades físicas da água do mar como a densidade, compressibilidade, ponto de congelamento e temperatura da densidade máxima [10].

De uma maneira ideal, como descrito por Stewart [11], a salinidade é a quantidade total de material dissolvido em gramas em um quilograma de água do mar. A salinidade varia com a profundidade, na camada superficial apresenta uma forte homogeneidade (figura 2), na região da termoclina ocorre um decaimento em função da temperatura e nas camadas mais profundas do oceano a salinidade passa a ter um valor praticamente constante.

Figura 2- Comportamento da salinidade na camada superficial.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Salinidade#/media/File:Wiki_plot_04.png

2.3 Densidade

A densidade da água do mar aumenta com a salinidade e com a pressão e diminui com o aumento de temperatura. Essa dependência é conhecida como a Equação de Estado da água do mar.

A equação de estado para um gás ideal foi dada por

$$p = \rho RT \quad (1)$$

onde R é constante do gás, T é a temperatura, p a pressão e ρ é a densidade. A água do mar não é um gás ideal, mas quando submetida a pequenas variações de temperatura se torna bem parecida a um. Uma função que trata de todos os aspectos de temperatura (T), salinidades (S) e pressões (p) encontradas nos oceanos pode ser descrita como,

$$\rho = \rho(T, S, p) \quad (2)$$

As determinações mais fundamentais para estabelecer essa equação foram feitas em 1902 por Knudsen e Ekman. A equação encontrada foi obtida com as unidades de medida do C.G.S. Contudo a Equação Internacional do Estado utiliza-se das unidade do sistema internacional (S.I) e foi obtida em 1980 [12]. Assim, uma densidade de 1.025 g/cm^3 obtida pela equação (2) corresponde a uma densidade de 1025 kg/m^3 na Equação Internacional do Estado.

3. PROPAGAÇÃO DO SOM

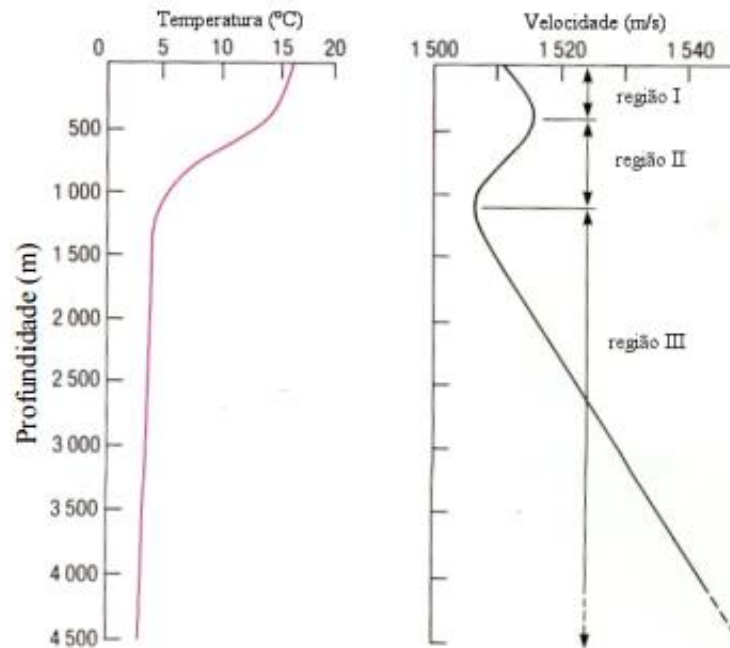
As principais formas de comunicação utilizadas para transmitir informações são feitas através de luz e som. Na atmosfera terrestre, o som é atenuado em distâncias bem mais curtas que a luz. O contrário ocorre nos oceanos, enquanto a luz se propaga em algumas centenas de metros em água, o som pode percorrer distâncias muito grandes na mesma.

A velocidade do som no mar, dada por c , é uma função da temperatura, da salinidade e da pressão e varia entre 1400 m/s e 1600 m/s. A combinação desses três parâmetros com a profundidade produz um perfil de velocidade do som com um mínimo bem marcado em profundidades intermediárias (termoclina), a temperatura diminui rapidamente nos primeiros 1000 metros, logo a velocidade do som decai com a profundidade. Na região de camada profunda, ou seja, abaixo dos 1000 metros, as mudanças de temperatura nessa faixa se tornam muito pequenas e assim, a velocidade do som começa a ser determinada pelo aumento da pressão, consequentemente sua velocidade aumenta.

Mudanças verticais de salinidade são muito pequenas comparadas com a pressão para ter uma influência sobre a velocidade do som, porém se o valor da velocidade for baixa, têm-se um baixo valor para a salinidade média, caso a velocidade seja alta, a salinidade média será alta [13].

Analisando-se a figura 3, a velocidade do som aumenta em relação à profundidade na camada de mistura, região I, pois a temperatura e a salinidade são praticamente constantes, e assim a velocidade do som é determinada em grande parte pela pressão. A região II coincide com a termoclina permanente, onde c é largamente controlado pela temperatura e salinidade. Abaixo da termoclina permanente, região III, a velocidade do som é quase inteiramente controlada pela pressão [14].

Figura 3- Relação da velocidade do som com a profundidade.



Fonte: http://w3.ualg.pt/~prelvas/OceanogFisica/Prop_som.pdf

3.1. Propagação de feixes acústicos

Uma aproximação para a propagação ondulatória do som é considerá-lo se propagando em feixes que carregam a mesma energia associada às ondas. As leis que descrevem os comportamentos da óptica geométrica, que é um ramo da óptica baseado na noção de um feixe de luz, podem ser aplicadas para a propagação do som, desta forma, pode-se realizar o estudo de feixes acústicos.

Um guia de onda é uma estrutura orientada que é utilizada para o transporte de informação e energia. Mas o oceano não é homogêneo, possui correntes, redemoinhos, turbulências, e isso afeta a propagação de informação, no caso do estudo, afeta a propagação do som no oceano.

Um estudo detalhado desses fatores (correntes, redemoinhos, etc.) e sua influência na propagação de longo alcance do som é um problema difícil de resolver.

Consideraremos um modelo que descreverá as principais características da propagação do som em grandes distâncias em guias de ondas.

Esse modelo será embasado em duas suposições principais. A primeira será de que o oceano pode ser tratado como um meio homogêneo. A mobilidade das ondas oceânicas e da massa de água quando comparados com a velocidade do som no oceano são muito lentas, desta forma, seja qual for a heterogeneidade do campo da velocidade do som ela se manterá “congelada” durante a propagação das ondas acústicas.

A segunda consiste em desconsiderar a refração horizontal das ondas sonoras. A propagação do som é descrita em duas dimensões. Assim é possível utilizar um modelo simétrico axialmente, em que a velocidade do som c é uma função de duas coordenadas, a profundidade z e o alcance r . Admitimos que o eixo z é direcionado para baixo e que a superfície da água se encontra na profundidade em que $z = 0$ [2].

Na medida em que se aumenta a profundidade no oceano, a velocidade c do som atinge um valor mínimo a uma determinada profundidade, que chamaremos de z_a , onde é formado um canal de som subaquático (USC – Underwater Sound Channel). Atribui-se como um eixo do USC a profundidade z_a . A propagação do som encaminha-se em direção a regiões em que a mesma tende a possuir menor velocidade, e as ondas de som são refratadas em direção ao eixo USC, conforme a lei de Snell. Confinadas no USC, as ondas sonoras se propagam em longas distâncias com pouca atenuação.

Desta forma, o som consegue se propagar por milhares de quilômetros. Em experimentos realizados foi observada que essa pequena atenuação possuía valores de alguns decibéis em 1000 km com frequências próximas de 100 Hz. Já para experimentos com frequências acima de 1000 Hz, a qualidade do sinal da onda sonora era inferior e havia uma maior atenuação.

Um dos fatores para localizar o eixo USC deriva do intervalo de tempo que o oceano é aquecido pela luz solar assim, sua localização difere em diferentes regiões geográficas. Em baixas latitudes, sua profundidade estende-se até 2000 m e aumenta de 100 m à 500 m nas latitudes altas [15,16].

Os canais USC próximos à superfície são característicos de regiões de latitude elevadas, como o Ártico e a Antártida e, em algumas regiões nos trópicos onde a camada de mistura com valores praticamente constantes de temperatura e

salinidade, é influenciada devido à mistura do vento ou convecção. Os canais próximos à superfície ocorrem se o eixo z_a também estiver próximo à superfície, assim a velocidade do som aumenta continuamente até uma determinada profundidade.

Os USC localizados em regiões profundas ocorrem tipicamente em regiões de águas rasas. Em um mar raso, a água é aquecida praticamente até o fundo e a salinidade aumenta devido à evaporação, assim a velocidade do som pode diminuir com o aumento da profundidade [2].

3.2. Equações básicas

O modelo determina uma função $\bar{c}(z)$, que é o campo de velocidade do som, o modelo pressupõe algumas características gerais da propagação do som no guia de onda e retrata a apreensão da energia sonora dentro do volume de água. Uma função mais efetiva do campo de velocidade do som tem a forma dada pela equação (3), onde $\delta c(r, z)$ é uma perturbação que depende do alcance de $\bar{c}(z)$,

$$c(r, z) = \bar{c}(z) + \delta c(r, z) \quad (3)$$

o índice de refração é definido por $n(r, z)$, sendo que c_0 é a velocidade do som em um meio de referência homogêneo.

$$n(r, z) = \frac{c_0}{c(r, z)} \quad (4)$$

Admitiremos que c_0 satisfaz o requisito de que $|c(r, z) - c_0| \ll c_0$. Desta forma, o índice de refração $n(r, z)$ está próximo da unidade. Desde que o módulo da perturbação seja muito menor que c_0 , o índice de refração pode ser dado por,

$$n(r, z) = \bar{n}(z) + \delta n(r, z) \quad (5)$$

onde $\bar{n}(z)$ é uma componente não perturbada dada pelo quociente de c_0 por $\bar{c}(z)$ e $\delta n(r, z)$ é uma perturbação dependente do alcance, dado por

$$\delta n(r, z) \simeq -\frac{\delta c(r, z)}{c_0}. \quad (6)$$

A perturbação $\delta c(r, z)$ se acumula com a profundidade e influencia em diferentes heterogeneidades do volume de água do oceano. A perturbação é vista

como a principal causa do movimento caótico de feixes de som em intervalos de grandes distâncias.

3.2.1. Equação de Helmholtz

No estudo da propagação do som em longas distâncias no oceano, assume-se que a equação que define a pressão sonora $\tilde{v}(r, z, t)$ é definida pela equação (7), onde Δ é o Laplaciano.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tilde{v} = 0 \quad (7)$$

Como descrito na primeira suposição do modelo, o oceano pode ser tratado como um meio “congelado” assim qualquer heterogeneidade do campo de velocidade do som c permanece congelada durante a transmissão das ondas acústicas. Desta forma, assumimos que o campo de velocidade do som varia no espaço, mas não no tempo.

Podemos reescrever a equação (7) assumindo um modelo bidimensional em coordenadas cilíndricas, assim

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

Ao substituirmos $\tilde{v}(\vec{r}, t) = v(r, z)e^{-i\Omega t}$, onde Ω é uma frequência angular, a dependência temporal da amplitude é dada por $e^{-i\Omega t}$ e o número de onda no meio de referência k_0 é dado pelo quociente de Ω por c_0 , desta forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(r, z)v = 0. \quad (9)$$

Para a condição do limite superior, onde $z=0$, o campo de onda desaparece na superfície do oceano, assim $v(r, 0) = 0$. Para a condição do limite inferior,

considerando as ondas confinadas no canal de som subaquático, podemos usar a condição idealizada para $v(r, z \rightarrow \infty) = 0$.

3.2.2 Equação parabólica

Como somente as ondas confinadas no USC e que se propagam em ângulos suficientemente pequenos alcançam intervalos de longas distâncias. Segundo Makarov et al.(2010, p.8), existe uma aproximação parabólica que consegue retratar estas ondas. Nela, a amplitude complexa da onda é interpretada pela equação (10), sendo $u(r, z)$ uma função envelope.

$$v(r, z) = r^{-\frac{1}{2}}u(r, z)e^{ik_0 r} \quad (10)$$

Assim, a equação parabólica padrão, que tem o formato de uma equação diferencial parcial, pode ser dada por,

$$2ik_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2k_0^2 [U(z) + V(r, z)]u = 0 \quad (11)$$

sendo que,

$$U(z) = \frac{1}{2}(1 - \bar{n}^2(z)) \simeq \frac{\Delta c(z)}{c_0} \quad (12)$$

onde $\Delta c(z) = \bar{c}(z) - c_0$ e

$$V(r, z) = \frac{[\bar{n}^2(z) - n^2(r, z)]}{2} \simeq \frac{\delta c(r, z)}{c_0}. \quad (13)$$

A equação parabólica é utilizada na teoria da propagação de ondas. As principais características da velocidade sonora em canais de som subaquáticos são retratadas adequadamente pela equação parabólica.

3.3. Formalismo Hamiltoniano

Com a utilização da aproximação da óptica geométrica (limite de pequenos comprimentos de ondas), será possível estabelecer equações para o feixe de som, semelhantes às equações de Hamilton. No método da óptica geométrica, uma solução para equação parabólica (11) é expressa pela equação (14).

$$u = Ae^{ik_0 S} \quad (14)$$

Sendo que A e S são funções desconhecidas, a primeira se refere a uma função de amplitude e a segunda de uma equação eikonal e K_0 é um parâmetro.

Uma equação eikonal é obtida através da óptica ondulatória, é uma equação diferencial parcial não linear, representa o papel da equação característica de Hamilton na mecânica clássica e ela é muito importante, pois fornece a relação entre a óptica ondulatória com a óptica geométrica [17].

Substituindo a equação (14) na equação (11) obtemos a equação eikonal

$$\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + U + V = 0 \quad (15)$$

e a equação de transporte

$$\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{2} A \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0. \quad (16)$$

Pela equação (15) observa-se que a mesma possui o mesmo formato do que a equação de Hamilton-Jacobi de mecânica clássica [18], o eikonal é equivalente a função principal de Hamilton. Na acústica, esta quantidade tem uma interpretação física importante, o eikonal determina os tempos de viagem do pulso de som acústico.

Restringiremos as equações diferenciais parciais (15) e (16) para as equações diferenciais ordinárias, que retratam as trajetórias dos feixes através do método das características [19]. No formalismo Hamiltoniano, em cada ponto de distância r a trajetória do feixe é identificada pela coordenada z e pelo momento canônico p , onde

$$p = \frac{\partial S}{\partial z} \quad (17)$$

sendo que o momento canônico está vinculado ao ângulo de inclinação do feixe χ que pode ser descrito da forma

$$p = \tan \chi \quad (18)$$

O desenvolvimento do feixe é dado pela Hamiltoniana que está associada ao eikonal S conhecido por

$$H = -\frac{\partial S}{\partial r}. \quad (19)$$

Substituindo as equações (17) e (19) na equação (15) obteremos uma expressão da Hamiltoniana, em que é dependente do alcance r , da profundidade z e do momento canônico p .

$$H(r, p, z) = H_0(p, z) + V(r, z) \quad (20)$$

Sendo que,

$$H_0(p, z) = \frac{p^2}{2} + U(z) \quad (21)$$

e o termo V descrito na equação (20) é estabelecido pela equação (13). As trajetórias dos feixes são definidas pelas equações de Hamilton dados por

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\partial H}{\partial z} \quad (22)$$

e

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (23)$$

Utilizaremos as funções $p(r, p_0, z_0, r_0)$ e $z(r, p_0, z_0, r_0)$ para descrever o momento e a profundidade de uma trajetória de feixe no alcance r , p_0 e z_0 são valores referentes ao momento e profundidade iniciais em $r = r_0$. Quando o momento e a profundidade estiverem sem o argumentos estarão se referindo ao feixe momentâneo. Desta forma, a trajetória do feixe será dada por

$$p = p(r, p_0, z_0, r_0) \quad (24)$$

e

$$z = z(r, p_0, z_0, r_0) \quad (25)$$

4. CAOS

O conceito de caos nos diz que uma pequena mudança inicial em um evento qualquer pode trazer grandes consequências e desconhecimento no futuro, ou seja, tem-se perda de previsibilidade no sistema, embora ele seja ainda determinístico. Se observarmos nosso dia a dia veremos diferentes fenômenos que não podem ser descritos ou previstos pelas leis matemáticas. A essas ocorrências damos o nome de fenômenos caóticos.

Foi o meteorologista Edward Lorenz quem iniciou os estudos de fenômenos caóticos. Ele desenvolveu um modelo que reproduzia o desenvolvimento das condições climáticas que fornecia valores iniciais de ventos e temperaturas. Nas simulações, imaginava-se que quando ocorressem pequenas modificações nas condições originais, as alterações também seriam pequenas na evolução dos valores obtidos. Mas o que se obteve foi o contrário, as pequenas modificações nas condições iniciais provocaram efeitos desproporcionais.

Lorenz verificou que para intervalos curtos, no caso do experimento refere-se a alguns dias, os efeitos produzidos eram insignificantes, mas para intervalos longos de tempo, ou seja, no decorrer de um mês, os efeitos produziam resultados completamente diferentes. Chegou-se a essa conclusão após digitar um dos números dos cálculos com algumas casas decimais a menos, esperava-se que o resultado não tivesse muitas alterações, mas a pequena alteração de casas decimais provocou uma grande mudança nos efeitos produzidos nas massas de ar.

Com o decorrer dos anos, cientistas verificaram que a mesma imprevisibilidade que Lorenz constatou em suas simulações aparecia em quase tudo, dos batimentos cardíacos às cotações da Bolsa de Valores [20,21].

Neste trabalho, faremos uma investigação da dinâmica dos feixes sonoros no volume oceânico, para isso é necessário sabermos o conceito de espaço de fases.

O espaço de fase é a representação das variáveis dinâmicas relevantes de um sistema, neste trabalho as variáveis dinâmicas que serão analisadas são os

ângulos ρ e ϕ . Uma trajetória no espaço de fase reproduz o desenvolvimento temporal do sistema.

Conforme transcorre o tempo, o sistema evolui e passa a ser representado por outro ponto no espaço. Os estados ocupados ao longo do tempo traçam uma linha e definem aquilo a que chamamos uma órbita, e isso ocorre pelo fato do tempo ser contínuo. A equação diferencial que descreve o sistema governa a construção de todas as órbitas.

4.1. Caos de feixes acústicos

Segundo Makarov et al.(2010, p.67), constatou-se que as oscilações da velocidade do som interferem no campo de onda fortemente, isso foi verificado por experimentos sobre propagação de som de longas distâncias no oceano . No estudo sobre acústica no oceano pressupõe-se que a fonte predominante que define a variação do campo de som em distâncias de 10^6 metros são as ondas internas aleatórias. Verificou-se que as oscilações da velocidade do som conduzidas pelas ondas internas ocasionam instabilidade nos caminhos dos feixes, e essa instabilidade é uma das características fundamentais do caos do feixe [2].

4.2. Uma investigação da dinâmica de feixes acústicos

A dinâmica de feixes será estudada através de mapeamentos que preservam área no espaço de fase e também com dissipação. Para o mapeamento conservativo foi utilizado como referência o artigo de Michael G. Brown [22]. Alguns estudos sobre a dinâmica subaquática dos raios acústicos foram realizados por

alguns cientistas [23,24,25] que estudaram a preservação de área em mapeamentos para problemas envolvendo interações de fronteiras na dinâmica de feixes.

Como as equações dos feixes acústicos possuem o formalismo Hamiltoniano, a dinâmica dos feixes pode ser estudada por sistemas Hamiltonianos integráveis ou não integráveis.

Quando o sistema é não integrável, não admite solução algébrica, pode-se simular sua evolução temporal com o auxílio do computador, realizando uma integração numérica e representar essa evolução no espaço de fase.

As equações de feixes acústicos coerentes com a Equação Parabólica são dadas pelas equações (22) e (23), sendo que a Hamiltoniana será dada por:

$$H(z, p, r) = \frac{1}{2}p^2 + V(z, r) \quad (26)$$

r e z descrevem o alcance e a profundidade, respectivamente, e p é o momento canônico. E o potencial é da forma (27), sendo que g e h são constantes positivas.

$$V(r, z) = \begin{cases} gz \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cos(kr)\right), & z > 0 \\ -hz, & z < 0 \end{cases} \quad (27)$$

Vamos supor que a fonte sonora está localizada no eixo do canal do som, desta forma, $z_a=0$. Por considerarmos a origem $z=0$ coincidindo com o eixo do canal de som, o potencial, $V(r, z)$, não influenciará no Hamiltoniano. Para $z > 0$, pelas equações de feixes acústicos e do potencial obtemos,

$$\frac{dz}{dr} = p_0 - g(r - r_0) - \frac{\varepsilon g}{2}(\sin kr - \sin kr_0) \quad (28)$$

derivando a equação (28),

$$z = z_0 + p_0(r - r_0) - \frac{1}{2}g(r - r_0)^2 + \frac{\varepsilon g}{2k^2}(\cos kr - \cos kr_0) + \frac{\varepsilon g}{2k}(-r_0)\sin kr_0 \quad (29)$$

para $z < 0$ as expressões são semelhantes. Os ângulos de feixe em relação ao eixo horizontal, que serão denominados de θ , serão admitidos como ângulos muito pequenos, assim

$$p = \frac{dz}{dr} = \tan \theta = \theta. \quad (30)$$

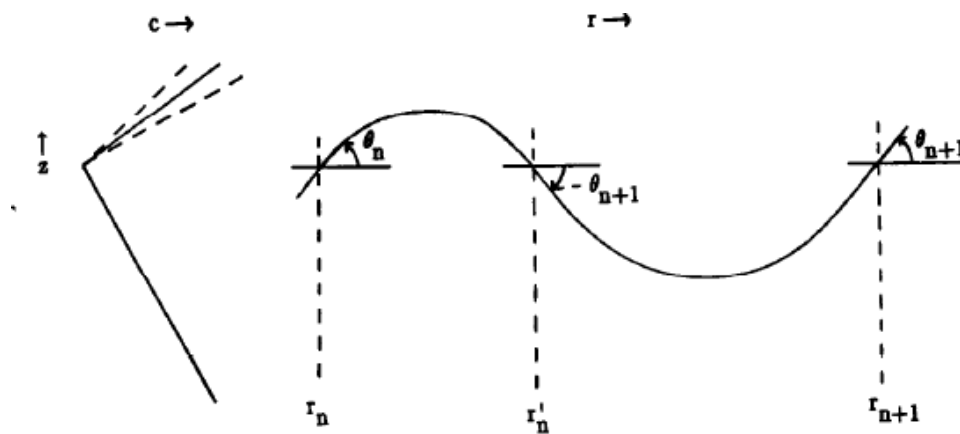
Pela figura 4, temos que $\theta(r'_n) = \theta_{n+1}$ e $z(r'_n) = 0$, logo as equações (28) e (29) nos fornece,

$$\theta_{n+1} = -\theta_n + g(r'_n - r_n) + \frac{\varepsilon g}{2k} (\sin kr'_n - \sin kr_n) \quad (31)$$

e

$$k(r'_n - r_n) = \frac{2k}{g} \theta_n + \varepsilon \sin kr_n + \frac{\varepsilon}{k(r'_n - r_n)} [\cos kr'_n - \cos kr_n]. \quad (32)$$

Figura 4 – Diagrama da estrutura de velocidade sonora assumida (esquerda) e das trajetórias de feixe (direita).



Fonte: G.BROWN, Michael; D.TAPPERT, Frederick; GOÑI, Gustavo. An investigation of sound ray dynamics in the ocean volume using an area preserving mapping. **Elsevier**, Miami, v. 14, p.93-99, ago. 1991.

Observando a figura 4, a contribuição do ciclo mais baixo é da forma,

$$r_{n+1} = r'_n + \frac{2}{h} \theta_n \quad (33)$$

Admitiremos que a escala horizontal da perturbação é pequena, assim as equações (31) e (32) obedecem os requisitos de

$$[k(r'_n - r_n)]^2 \approx \left(\frac{2k\theta_n}{g}\right)^2 \gg \varepsilon \quad (34)$$

E pode-se então reescrever a equação (32) da forma

$$k(r'_n - r_n) = \frac{2k\theta_n}{g} + \varepsilon \sin kr_n. \quad (35)$$

Realizando a substituição da equação (35) na equação (31) e utilizando a equação (34), temos que

$$\frac{2k}{g} \theta_{n+1} = \frac{2k}{g} \theta_n + \varepsilon (\sin kr_n + \sin kr'_n) \quad (36)$$

em relação as variáveis adimensionais temos

$$\phi_n = \frac{2k}{g} \theta_n; \quad (37)$$

$$\rho_n = kr_n; \quad (38)$$

$$\gamma = \frac{g}{h}. \quad (39)$$

4.2.1. Mapeamento de preservação de área

Quando relacionamos a equação (36) com a equação (37), obtemos a expressão

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \varepsilon (\sin kr_n + \sin kr'_n) \quad (40)$$

Conhecendo-se a equação (35) e utilizando as equações (37) e (38), temos

$$kr'_n = kr_n + \frac{2k}{g} \theta_n + \varepsilon \sin kr_n \quad (41)$$

reescrevendo.

$$kr'_n = \rho_n + \phi_n + \varepsilon \sin \rho_n \quad (42)$$

Substituindo a equação (42) na equação (40).

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \varepsilon (\sin \rho_n + \sin(\rho_n + \phi_n + \varepsilon \sin \rho_n)) \quad (43)$$

Esta é a primeira equação do mapeamento. Relacionando agora a equação (33) com a equação (35), temos que

$$k(r_{n+1} - \frac{2}{h}\theta_{n+1}) = kr_n + \frac{2k}{g}\theta_n + \varepsilon \sin kr_n \quad (44)$$

reescrevendo.

$$kr_{n+1} = k\frac{2}{h}\theta_{n+1} + kr_n + \frac{2k}{g}\theta_n + \varepsilon \sin kr_n \quad (45)$$

Substituindo as equações (37) e (38) na equação (45) obtemos a relação

$$\rho_{n+1} = \frac{g}{k}k\frac{2}{h}\theta_{n+1} + \rho_n + \phi_n + \varepsilon \sin \rho_n \quad (46)$$

relacionando com a equação (39) adquirimos a segunda equação do mapeamento.

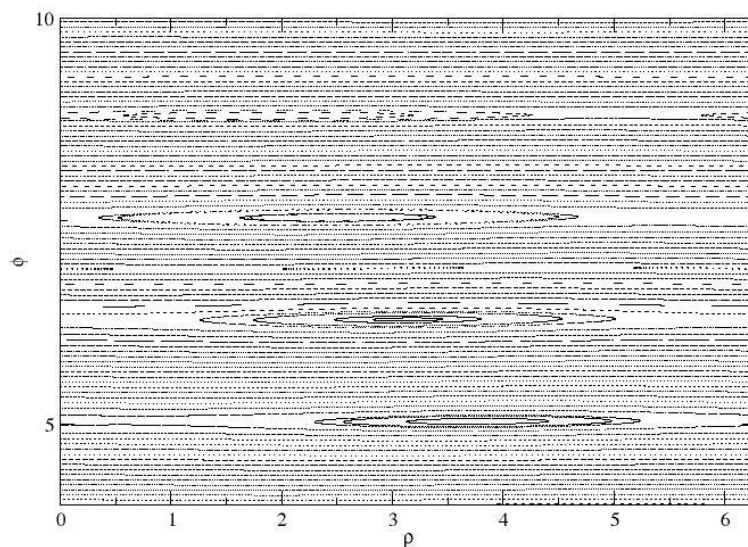
$$\rho_{n+1} = \gamma\phi_{n+1} + \rho_n + \phi_n + \varepsilon \sin \rho_n \quad (47)$$

O mapeamento será dado por

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = \phi_n + \varepsilon(\sin \rho_n + \sin(\rho_n + \phi_n + \varepsilon \sin \rho_n)) \\ \rho_{n+1} = \gamma\phi_{n+1} + \rho_n + \phi_n + \varepsilon \sin \rho_n \end{cases} \quad (48)$$

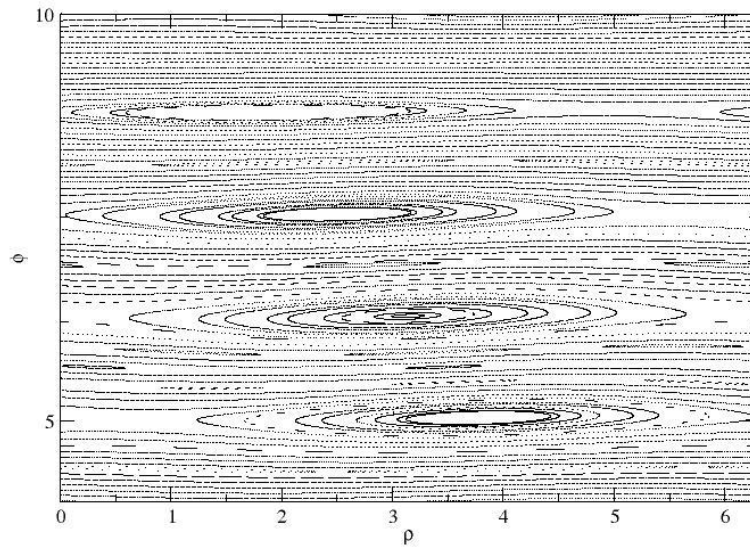
Pelo mapeamento (48), pode-se adquirir as figuras abaixo (5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11), que representam os espaços de fases com diferentes valores do parâmetro adimensional ε .

Figura 5- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaços de fases para $\varepsilon = 0.01$.



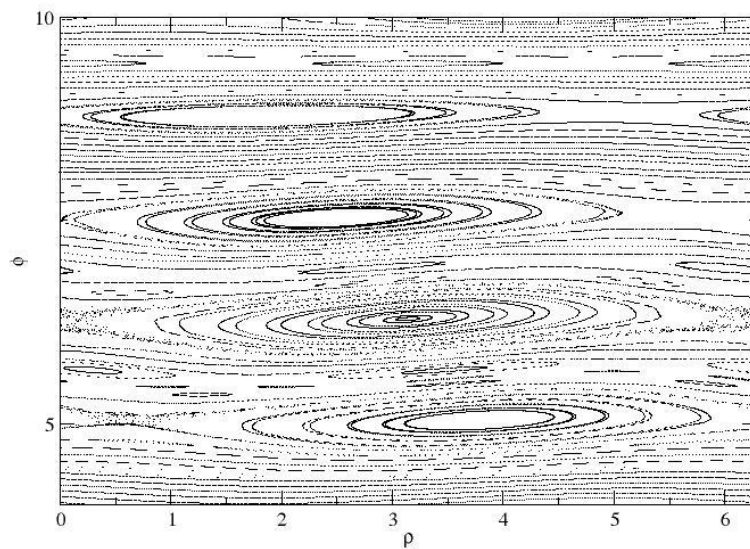
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 6- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.05$.



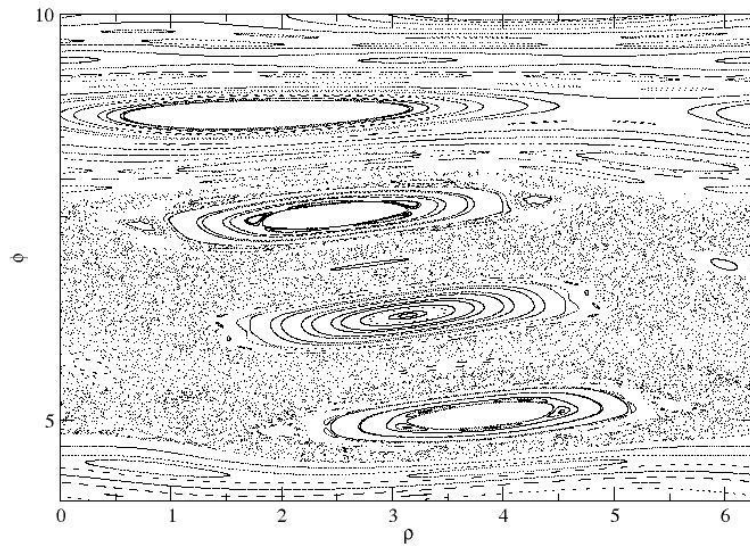
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 7- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.1$.



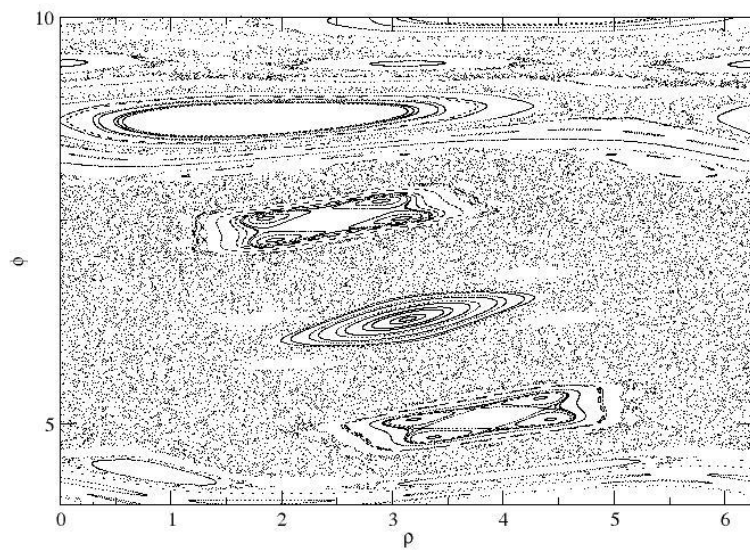
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 8- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.2$



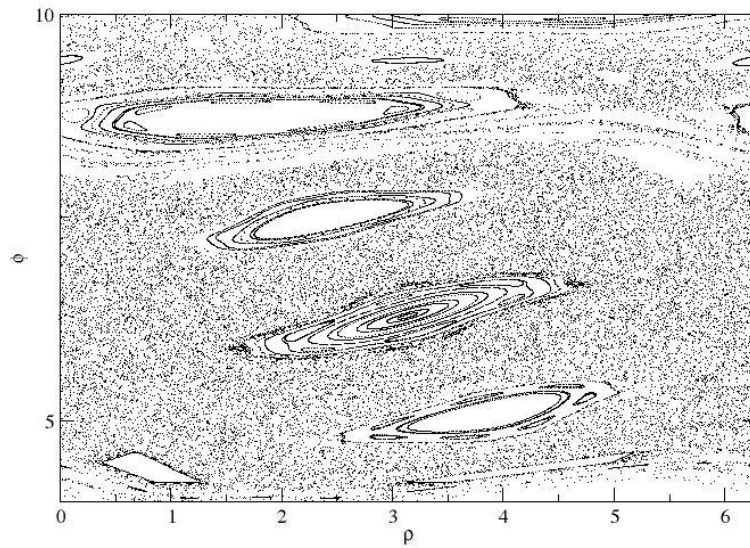
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 9- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.3$.



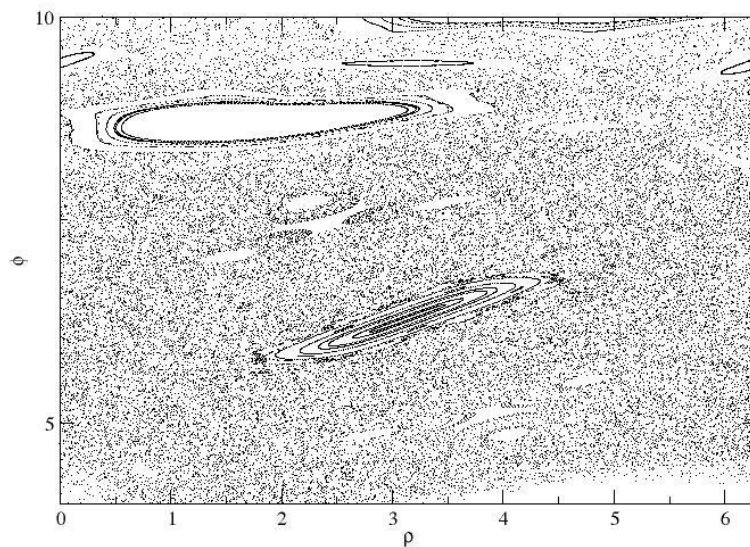
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 10- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.4$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 11- Análise dos ângulos ρ e ϕ nos espaço de fases para $\varepsilon=0.5$.



Fonte: Elaborado pela autora.

O mapeamento depende de dois parâmetros adimensionais, γ e ε . Os dois parâmetros realizam ações diferentes no mapeamento, γ é um parâmetro que está relacionado com a velocidade da propagação do som e ε está relacionado com a amplitude. Quando $\varepsilon = 0$, independentemente do valor de γ , o mapeamento será linear e as trajetórias dos feixes são regulares. Mas quando $\varepsilon \neq 0$, o mapeamento não é linear, então o movimento se torna cada vez mais caótico à medida que ε é aumentado.

Pelo Teorema de Liouville, pode-se determinar se o espaço de fase apresenta um mapeamento dissipativo, repulsivo ou se preserva a sua área. Podemos determiná-lo através do determinante do Jacobiano, assim,

$$\det J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \rho_n} \\ \frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \phi_n} & \frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \rho_n} \end{pmatrix} \quad (49)$$

derivando as equações (40) e (41), obtemos as relações a seguir.

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \varepsilon \cos(\rho_n + \phi_n + \varepsilon \sin \rho_n) \quad (50.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \rho_n} = \varepsilon \cos \rho_n + \varepsilon \cos(\rho_n + \phi_n + \varepsilon \sin \rho_n) + \varepsilon^2 \cos \rho_n \cos(\rho_n + \phi_n \\ + \varepsilon \sin \rho_n) \end{aligned} \quad (50.b)$$

$$\frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \gamma + \gamma \varepsilon \cos(\rho_n + \phi_n + \varepsilon \sin \rho_n) \quad (50.c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \rho_n} = 1 + \gamma \varepsilon \cos \rho_n + \gamma \varepsilon \cos(\rho_n + \phi_n + \varepsilon \sin \rho_n) \\ + \gamma \varepsilon^2 \cos \rho_n \cos(\rho_n + \phi_n + \varepsilon \sin \rho_n) + \varepsilon \cos \rho_n \end{aligned} \quad (50.d)$$

Quando realizamos o cálculo do determinante do Jacobiano obtemos,

$$\det J = 1. \quad (51)$$

Mostramos, dessa forma, que ocorre a preservação de área no espaço de fases.

4.2.2. Coeficiente de restituição

Agora, será realizado o mapeamento das equações (43) e (47), mas será acrescentado um termo $(1-\alpha)$, o coeficiente de restituição, na equação (47), sendo que α é um coeficiente de dissipação. A equação (47) ficará da forma,

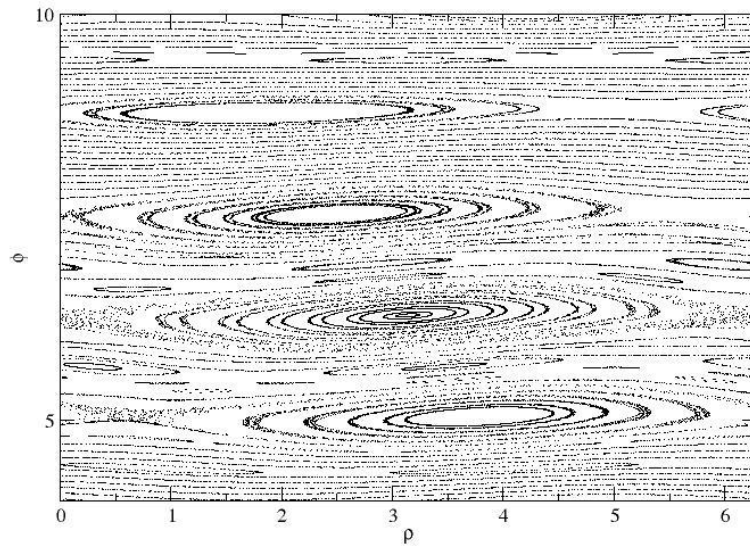
$$\rho_{n+1} = (1 - \alpha)\rho_n + \gamma\phi_{n+1} + \phi_n + \varepsilon\sin\rho_n \quad (52)$$

assim, obtemos o seguinte mapeamento.

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = \phi_n + \varepsilon(\sin\rho_n + \sin(\rho_n + \phi_n + \varepsilon\sin\rho_n)) \\ \rho_{n+1} = (1 - \alpha)\rho_n + \gamma\phi_{n+1} + \phi_n + \varepsilon\sin\rho_n \end{cases} \quad (53)$$

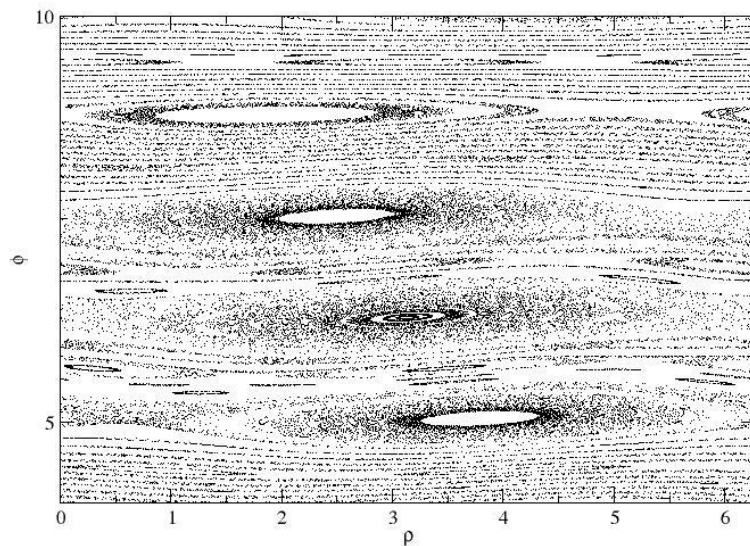
Pelo mapeamento (53), pode-se adquirir as figuras abaixo (12, 13, 14, 15), que representam os espaços de fases com diferentes valores de α para $\varepsilon = 0.1$.

Figura 12 - Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.1$ e $\alpha=0.0001$.



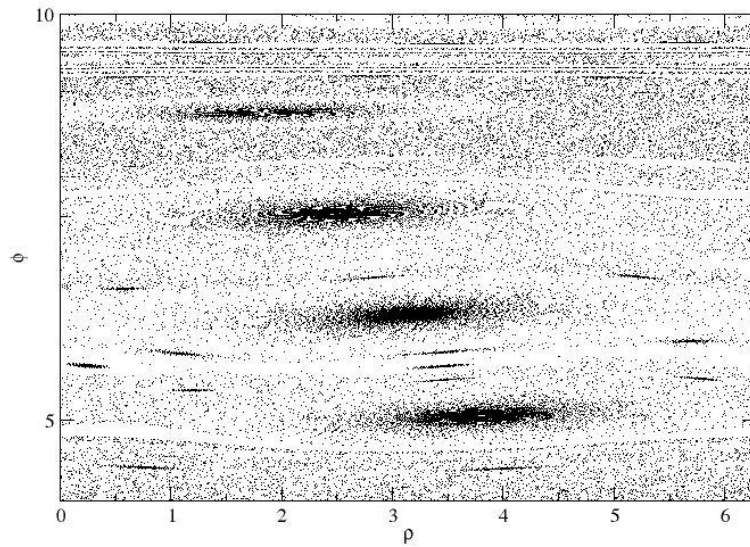
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 13- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.1$ e $\alpha=0.001$.



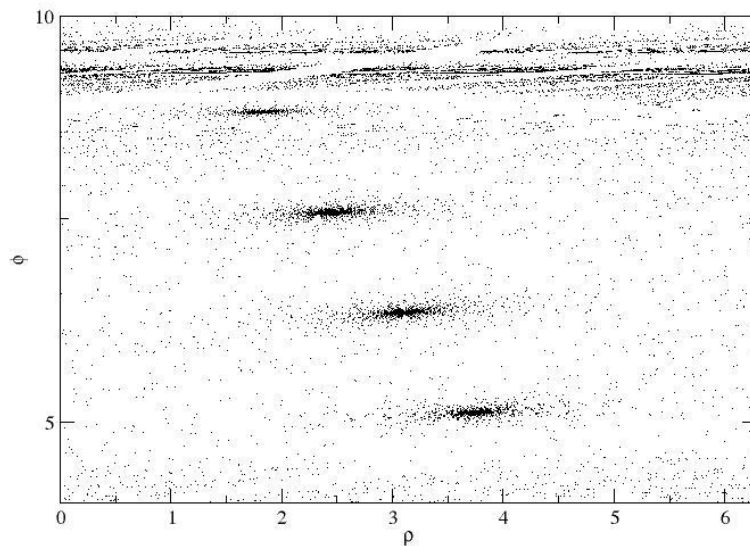
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 14- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.1$ e $\alpha=0.01$.



Fonte: Elaborado pela autora.

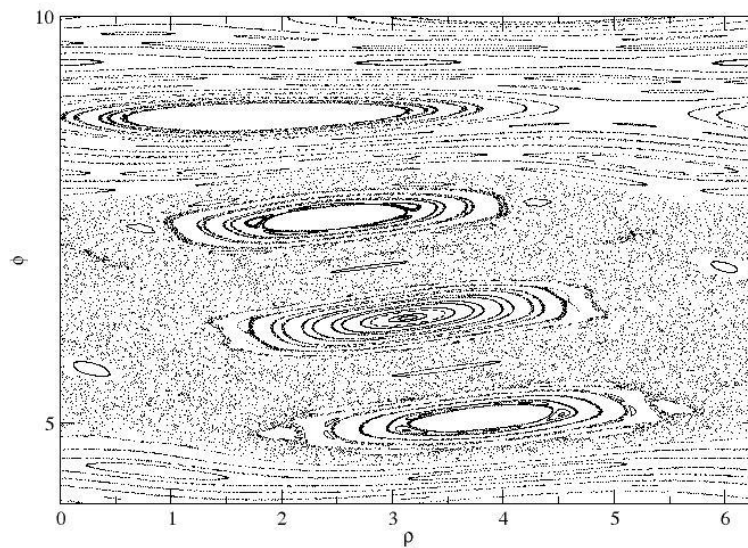
Figura 15- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.1$ e $\alpha=0.1$.



Fonte: Elaborado pela autora.

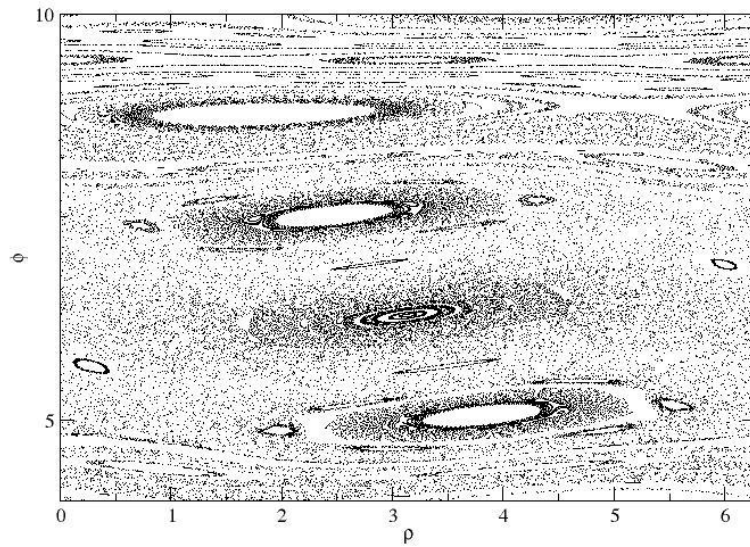
Se fixarmos agora o parâmetro $\varepsilon = 0.2$ e realizando a iteração do mapeamento (53), obtemos as figuras (16,17,18 e 19), que representam os espaços de fases para diferentes valores de α .

Figura 16- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.2$ e $\alpha=0.0001$.



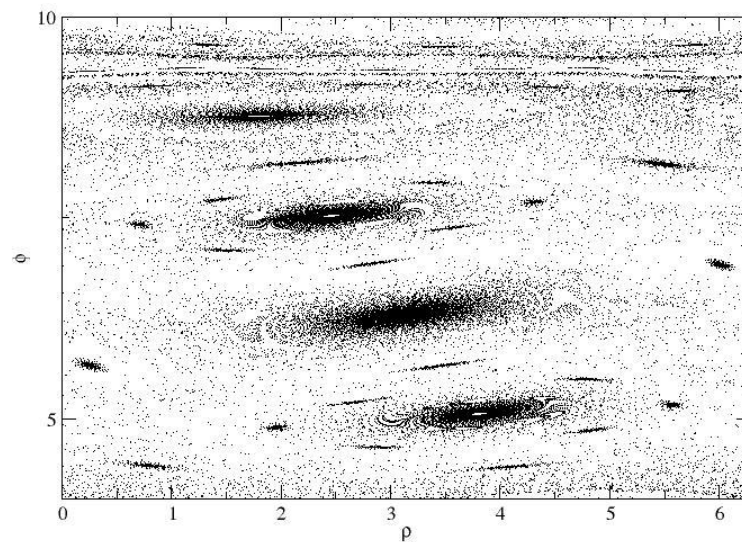
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 17- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.2$ e $\alpha=0.001$.



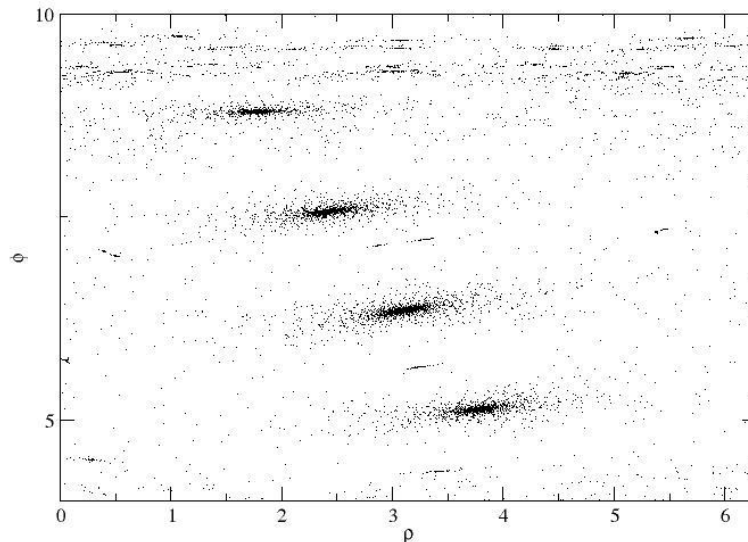
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 18- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.2$ e $\alpha=0.01$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 19- Análise dos ângulos ρ e ϕ no espaço de fases para os parâmetros $\varepsilon=0.2$ e $\alpha=0.1$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Pode-se observar que o comportamento do espaço de fase varia quando acrescentamos o termo $(1-\alpha)$, inicialmente os espaços de fase possuem um conjunto de ilhas de estabilidade, elas são perceptíveis para valores de $\alpha=0$ até $\alpha = 0.001$, mas a partir do momento em que o coeficiente dissipativo, α , deixa de ser nulo, as condições iniciais do sistema passam a convergir para um ponto, formando assim atratores no espaço de fase.

Quanto maior o coeficiente de dissipação mais nítidos são os atratores no espaço de fase. E isso ocorre para os dois casos mostrados, independentemente do valor de ε .

Pelo Teorema de Liouville, pode-se determinar se o espaço de fase apresenta um mapeamento dissipativo, repulsivo ou se preserva a sua área. Podemos determiná-lo pela determinante do Jacobiano, dada pela equação (49), assim quando derivamos cada termo obtemos as seguintes relações.

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \epsilon \cos(\rho_n + \phi_n + \epsilon \sin \rho_n) \quad (54.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \rho_n} = \epsilon \cos \rho_n + \epsilon \cos(\rho_n + \phi_n + \epsilon \sin \rho_n) + \epsilon^2 \cos \rho_n \cos(\rho_n + \phi_n \\ + \epsilon \sin \rho_n) \end{aligned} \quad (54.b)$$

$$\frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \gamma + \gamma \epsilon \cos(\rho_n + \phi_n + \epsilon \sin \rho_n) \quad (54.c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \rho_n} = (1 - \alpha) + \gamma \epsilon \cos \rho_n + \gamma \epsilon \cos(\rho_n + \phi_n + \epsilon \sin \rho_n) \\ + \gamma \epsilon^2 \cos \rho_n \cos(\rho_n + \phi_n + \epsilon \sin \rho_n) + \epsilon \cos \rho_n \end{aligned} \quad (54.d)$$

Quando realizamos o cálculo da determinante do Jacobiano obtemos,

$$\det J = 1 - \alpha [1 + \epsilon \cos(\rho_n + \phi_n + \epsilon \sin \rho_n)] \quad (55)$$

mostramos, dessa forma que,

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \rightarrow \det J = 1 \\ \alpha > 0 & \rightarrow \det J < 1 \end{cases} \quad (56)$$

assim, quando $\det J = 1$, ocorre preservação da área do espaço de fase e quando $\det J < 1$ há dissipação no espaço de fase, formando atratores no sistema.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada inicialmente uma descrição sobre as características típicas do oceano relevantes para o trabalho, com elas podem-se observar suas influências em relação à velocidade de propagação do som no oceano. Foi mostrado que os comportamentos da ótica geométrica de feixes de luz podem ser aplicados para a propagação do som, assim foi realizado o estudo da propagação de feixes acústicos.

Para compreender o comportamento da propagação do som em longos alcances no guia de onda considerou-se um modelo que consegue descrever as principais características do feixe acústico negligenciando as heterogeneidades do sistema e com isso, o trabalho abordou as equações necessárias para interpretar a velocidade do som na água do mar e também os desenvolvimentos sucintos das equações de Helmholtz e da equação parabólica para determinar o formalismo Hamiltoniano.

Tendo como base o desenvolvimento teórico, pode-se adentrar no estudo da dinâmica de feixes acústicos e para isso foi necessário a compreensão da teoria de caos.

A dinâmica foi analisada através de mapeamento conservativo e dissipativo. Pode-se observar que no primeiro caso, quando o mapeamento é dado pelas equações (48) há a dependência de dois parâmetros adimensionais, quando ε possui o valor nulo o mapeamento tem trajetórias dos feixes regulares, mas a partir do momento que ε passa a ter um valor, o mapeamento deixa de ser linear e passa a ter ilhas de estabilidade e se torna mais caótico à medida que o parâmetro é aumentado. Pelo Teorema de Liouville, foi determinado que o espaço de fase apresenta um mapeamento de preservação de área, ou seja, o valor da determinante do Jacobiano é 1.

Para o segundo caso, quando o mapeamento é dado pelas equações (53), ocorre a variação do parâmetro dissipativo α para as duas situações em que o parâmetro ε é fixado em 0.1 e 0.2, respectivamente. Neste caso pode-se observar que para α igual a zero voltamos aos mapeamentos do primeiro caso, mas quando α

começa a portar um valor, passa-se a formar atratores no espaço de fase. Pelo Teorema de Liouville, foi determinado que o espaço de fase apresenta um mapeamento de preservação de área quando α é nulo e ocorre dissipação quando α adquire valores maiores que zero, formando atratores no espaço de fases.

REFERÊNCIAS

- [1] Oceanografia. Disponível em: <<https://www.aoceano.org.br/oceanografia>> Acesso em: setembro de 2017
- [2] Makarov, D. et al. Ray and wave chaos in ocean acoustics. New Jersey. World Scientific, 2010. v.1.
- [3] CARVALHO JUNIOR, Oldemar de Oliveira. **Introdução à Oceanografia Física**. Rio de Janeiro: Interciência, 2014.
- [4] PICKARD, George L.; EMERY, William J. (Org.). **Descriptive Physical Oceanography: An Introduction**. 5. ed. Pergamom Press, 1990.
- [5] LIE, Heung-jae et al. Changes in Marine Environment by a Large Coastal Development of the Saemangeum Reclamation Project in Korea. **Ocean And Polar Research**, [s.l.], v. 30, n. 4, p.475-484, 30 dez. 2008. Korea Ocean Research and Development Institute. <http://dx.doi.org/10.4217/opr.2008.30.4.475>.
- [6] BIGG, Grant R.. Regional oceanography: An introduction, Matthias Tomczak and J. Stuart Godfrey, Pergamon (Oxford), 1994. No. of pages. **International Journal Of Climatology**, [s.l.], v. 15, n. 5, p.587-587, maio 1995. Wiley-Blackwell. <http://dx.doi.org/10.1002/joc.3370150511>.
- [7] MONTÉGUT, Clément de Boyer et al. Mixed layer depth over the global ocean: An examination of profile data and a profile-based climatology. **Journal Of Geophysical Research**, [s.l.], v. 109, n. 12, p.1-20, dez. 2004. Wiley-Blackwell. <http://dx.doi.org/10.1029/2004jc002378>.
- [8] RABELO, Leila Baganha. **ESTUDO DA VARIABILIDADE DA ESTRUTURA VERTICAL DA TEMPERATURA DA ÁGUA E DA PROFUNDIDADE DA TERMOCLINA NA REGIÃO DA CONFLUÊNCIA BRASIL-MALVINAS**. 2010. 154 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Sistemas Costeiros e Oceânicos, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, Pontal do Paraná, 2010.
- [9] Temperatura ,Disponível em:<<http://www.mares.io.usp.br/iof201/c2.html>> Acesso em: maio de 2017.
- [10] Salinidade,Disponível em: <<http://www.physocean.icm.csic.es/IntroOc/lecture03-pt.html#p0>> .Acesso em: maio de 2017.
- [11] STEWART, Robert H.. **Introduction to Physical Oceanography**. University Press Of Florida, 2009.
- [12] Densidade,Disponível em: <<http://www.incois.gov.in/Tutor/IntroOc/por/notes/lecture03.html>>. Acesso em: maio de 2017.
- [13] Propagação do som ,Disponível em:<<http://www.physocean.icm.csic.es/IntroOc/lecture05-pt.html>>. Acesso em: maio de 2017.

- [14] Propagação do som ,Disponível em:
<http://w3.ualg.pt/~prelvas/OceanogFisica/Prop_som.pdf> . Acesso em: maio de 2017.
- [15] BREKHOVSKIKH, L. M.. **Waves in Layered Media**. 2. ed. Academic Press, 1980.
- [16] BREKHOVSKIKH, Leonid Maksimovich; TYNYANOV, Yury. **Fundamentals of Ocean Acoustics**. 2. ed. Springer-verlag Berlin Heidelberg, 1991.
- [17] Equação eikonal. Disponível em:
<<http://efisica.if.usp.br/optica/universitario/raios/eikonal/>>. Acesso em: setembro de 2017.
- [18] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M.. **Mechanics: Course of Theoretical Physics**. 3. ed. Moscow: Butterworth-heinemann, 1976. 224 p.
- [19] [Kravtsov e Orlov (1990); Abdullaev e Zaslavsky (1991); Jensen et al. (1994)]
- [20] SILVA, Domiciano Correa Marques da. "Teoria do Caos"; *Brasil Escola*. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/fisica/teoria-caos.htm>>. Acesso em 12 de setembro de 2017.
- [21] Gleick, James. **Caos: a criação de uma nova ciência**. 18.d. Rio de Janeiro: Elsevier, 1989.
- [22] G.BROWN, Michael; D.TAPPERT, Frederick; GOÑI, Gustavo. An investigation of sound ray dynamics in the ocean volume using an area preserving mapping. **Elsevier**, Miami, v. 14, p.93-99, ago. 1991.
- [23] F.D. Tappert, M.G. Brown and G.J. Goni, "Weak chaos in an area preserving mapping for sound ray propagation", *Phys. Lett. A* 153, 181-185 (1991).
- [24] D.R. Palmer, M.G. Brown, F.D. Tappert and H.F.Bezdek, "Classical chaos in nonseparable wave propagation problems", *Geophys. Res. Lett.* 15(6), 569-572 (1988).
- [25] S.S. Abdullaev and G.M. Zaslavskii, "Fractals and ray dynamics in a longitudinally inhomogeneous medium", *Sov. Phys. Acoust.* 34(4), 334-336 (1989).