

UNIVERSIDADE ESTADUAL JÚLIO DE MESQUITA FILHO - UNESP
CÂMPUS DE RIO CLARO

Propriedades estatísticas de bilhares abertos

MATHEUS HANSEN FRANCISCO

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP, Câmpus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Rio Claro, 2015

531.11 Francisco, Matheus Hansen
F835p Propriedades estatísticas de bilhares abertos / Matheus Hansen Francisco. - Rio Claro, 2015
62 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Edson Denis Leonel

1. Dinâmica. 2. Bilhares clássicos. 3. Mapeamentos discretos. 4. Caos. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

MATHEUS HANSEN FRANCISCO

Propriedades estatísticas de bilhares abertos

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP, Câmpus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel - UNESP Rio Claro

Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira - UNESP São João da Boa Vista

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho - UNESP Rio Claro

Rio Claro, 2015

Agradecimentos

Em primeiro lugar, aos meus pais, por terem acreditado em mim e em meu sonho, por terem sempre apoiado minhas escolhas e decisões, por me cobrarem sempre para tentar ser o meu melhor e por tornar todo esse sonho possível.

Ao meu amigo e orientador Prof. Edson Denis Leonel, por ter confiado em mim, pela oportunidade oferecida, pelas valiosas discussões, ensinamentos e por ser um exemplo de pesquisador e professor a ser seguido por mim.

Aos meus familiares, que me deram apoio de alguma forma.

Ao meu grande amigo Diogo Ricardo da Costa, por ter tido paciência e sempre estar pronto para me ajudar quando necessário.

Aos amigos do Grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear da UNESP de Rio Claro, que possui como líder o Prof. Dr. Edson Denis Leonel.

Esta pesquisa tornou-se possível graças aos recursos computacionais disponibilizados pelo Núcleo de Computação Científica (NCC/GridUNESP) da Universidade Estadual Paulista (UNESP) e ao cluster computacional do grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear, adquirido pelos projetos FAPESP 2012/23688-5, 2008/57528-9 e 2005/56253-8.

Aos amigos, que de alguma forma colaboraram no desenvolvimento deste trabalho e por terem tornado esse caminho mais divertido.

À CAPES, pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Obrigado a todos!
Matheus Hansen Francisco

Resumo

Bilhares são sistemas dinâmicos onde uma partícula de massa m se move, livre de qualquer potencial externo, no interior de uma região limitada por uma fronteira estática ou perturbada, com a qual sofre diversas colisões. Quando a partícula atinge a fronteira, ela sofre uma reflexão especular. Sua velocidade é mantida constante se a fronteira do bilhar for estática ou pode alterar em módulo se o bilhar tiver perturbação temporal na fronteira. No presente trabalho, vamos estudar o caso do bilhar ovóide com fronteira estática e com a fronteira oscilante com o tempo, através da utilização de mapeamentos discretos. Demonstramos de forma detalhada todo o formalismo para a obtenção das equações que descrevem a dinâmica para as duas versões do bilhar. Na versão estática, apresentamos as propriedades do espaço de fases. Em particular mostramos que ele é do tipo misto. É possível encontrar um mar de caos que geralmente envolve ilhas de estabilidade. Também observamos curvas invariantes do tipo *spanning*. Analisamos o comportamento do mar de caos via expoentes de Lyapunov. Ainda no modelo estático, introduzimos um orifício na fronteira do bilhar e estudamos a probabilidade de sobrevivência e escape das partículas. Verificamos que existe um decaimento da probabilidade de sobrevivência de forma exponencial, e que o valor de seu expoente é da ordem da extensão do buraco divido pelo comprimento total da fronteira. Para a versão do bilhar ovóide com a fronteira dependente do tempo, fazemos a introdução novamente de um orifício na fronteira oscilante e estudamos a probabilidade de sobrevivência e escape para as partículas. Observamos, assim como na versão estática que, o decaimento da probabilidade é de forma exponencial, e que o valor do expoente também é dado pela razão entre a extensão do buraco pelo comprimento total da fronteira.

Palavras-chave: Bilhares clássicos, Mapeamentos Discretos, Caos.

Abstract

Billiards are dynamical systems where a classical particle of mass m moves confined inside a boundary ∂Q to which suffers specular collisions. When the boundary is static, the kinetic energy of the particle is constant, hence its velocity. On the other hand, when a time perturbation is introduced in the boundary, depending on the phase of the moving wall as well the velocity, the particle can gain or lose energy upon collision. In this work, we study the oval billiard considering either the static as well as the time perturbation in the boundary. For the static boundary, the dynamics is described by a two dimensional, nonlinear mapping for the variables θ, corresponding to the polar angle and α denoting the angle the trajectory of the particle does with the tangent at the point of collision. We confirm the phase space is mixed containing both chaos, periodic islands as well as invariant spanning curves corresponding to the so called whispering gallery orbits. The chaotic sea is characterised via Lyapunov exponents. We concentrate particularly on the escape of particles from a hole in the boundary. We give convincing arguments the survival probability is described by an exponential function for short n and may change for a slower decay at larger n due to the stickiness phenomenon. The slope of the exponential decay scales with the relative size of the hole of the boundary. For the time dependent perturbation, the dynamics is described by a four dimensional and nonlinear mapping for the two previous angle variables plus the velocity of the particle and the time. The survival probability is also described by an exponential function for short n and, occasionally, a dynamical trapping produced by stickiness is observed too, therefore slowing down the speed of the decay of the survival probability.

Keywords: Classic Billiards, Discrete Mapping, Chaos.

Sumário

Lista de Figuras **vi**

1 Introdução **1**

2 Bilhar Ovóide com fronteira estática **4**
2.1 Resumo 4
2.2 O modelo e o mapeamento 4
2.3 Espaço de fases 9
2.4 Expoentes de Lyapunov 11
2.5 Propriedades estatísticas: Escape por um orifício 18
2.6 Propriedades estatísticas: Escape por dois orifícios 27

3 Bilhar Ovóide com fronteira dependente do tempo **31**
3.1 Resumo 31
3.2 Modelo e mapeamento 31
3.3 Propriedades estatísticas: Escape por um orifício 38
3.4 Propriedades estatísticas: Escape por dois orifícios 45

4 Conclusões e perspectivas **48**

Referências **50**

Lista de Figuras

2.1 Esboço de diferentes geometrias da fronteira, para as combinações de parâmetros: (a) $\epsilon = 0$ e $p = 0$; (b) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (d) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$. O eixo horizontal representa $X(\theta_n) = R(\theta_n, \epsilon, p)\cos(\theta_n)$ e vertical $Y(\theta_n) = R(\theta_n, \epsilon, p)\sin(\theta_n)$. . 5

2.2 Ilustração da descrição dos ângulos feitos pela partícula e sua trajetória. 6

2.3 Espaço de fases gerado pela Eq.(2.11), para os parâmetros $\epsilon = 0,1$ e $p = 2$. 10

2.4 Espaço de fases gerado pela Eq.(2.11), para os parâmetros $\epsilon = 0,21$ e $p = 2$. 11

2.5 Ilustração esquemática para os eixos de j_{11}, j_{22} e o ângulo β. . . . 15

2.6 Convergência dos expoentes de Lyapunov para os parâmetros $p = 2$ e $\epsilon = 0,1$. 17

2.7 Convergência dos expoentes de Lyapunov para os parâmetros $p = 2$ e $\epsilon = 0,21$. 17

2.8 Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide através do orifício centrado em $\theta_{ct} = \pi/60$ para os parâmetros dados por: (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$ . . . 19

2.9 Análise do histograma de escape das partículas por iterada. 20

2.10 (a)Análise da probabilidade de sobrevivência das partículas por iterada; (b) Ampliação da região do decaimento exponencial demonstrado nas curvas em (a). 21

2.11 Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide através do orifício centrado em $\theta_{ct} = \pi/4$ para os parâmetro dados por (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$ 22

2.12 Análise do histograma de escape das partículas por iterada. 23

2.13 (a)Análise da probabilidade de sobrevivência das partículas por iterada; (b) Ampliação da região do decaimento exponencial demonstrado nas curvas em (a); (c) a evidencia de *stickiness* no sistema, sendo eles circulados em vermelho. 24
2.14 Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide através do orifício centrado em $\theta_{ct} = 3\pi/4$ para os parâmetro dados por (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$ 25
2.15 Análise do histograma de frequência de escape das partículas por iterada. 26
2.16 (a)Análise da probabilidade de sobrevivência das partículas por iterada; (b) Ampliação da região do decaimento exponencial demonstrado nas curvas em (a). 27
2.17 Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide com dois orifícios centrados em $\theta_{ct} = \pi/4$ e $\theta_{ct} = 3\pi/4$ para os parâmetro dados por (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$ . . . 28
2.18 (a)Análise de H(n) por iterada; (b) A probabilidade de sobrevivência por iterada; (c) Ampliação da região do decaimento exponencial demonstrado nas curvas em (b). 29
2.19 (a)Análise de H(n) por iterada; (b) A probabilidade de sobrevivência por iterada; (c) Ampliação da região do decaimento exponencial demonstrado nas curvas em (b). 29

3.1 Esboço de algumas formas geométricas da fronteira, para $a = 0,8$: (a) $\epsilon = 0$ e $p = 0$; (b) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (d) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$. O eixo horizontal representa $X(\theta_n) = R_f(\theta, \epsilon, p, t)\cos(\theta_n)$ e vertical $Y(\theta_n) = R_f(\theta, \epsilon, p, t)\sin(\theta_n)$. 32
3.2 Ilustração esquemática sobre o referencial móvel e fixo. 36
3.3 Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide através do orifício centrado em $\theta_{ct} = \pi/4$ para os parâmetro dados por (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$ com $V_0 = 0,1$ e $a = 0,8$. 39
3.4 Análise do histograma de escape das partículas por iterada. 40
3.5 As figuras (a), (c) e (e) são as probabilidade de sobrevivência P(n) por iterada, para os parâmetros indicados. As figuras (b), (d) e (f) são apliações feitas nas curvas (a), (c) e (e) respectivamente. . . . 41
3.6 Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide através do orifício proposto no caso (i) para os parâmetro dados por (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$ com $V_0 = 0,1$ e $a = 0,8$. 42
3.7 Análise do histograma de escape das partículas por iterada. 43

3.8 As figuras (a), (c) e (e) são as probabilidade de sobrevivência P(n) por iterada, para os parâmetros indicados. As figuras (b), (d) e (f) são apliações feitas nas curvas (a), (c) e (e) respectivamente. . . . 44
3.9 Análise do histograma de escape das partículas por iterada. 45
3.10 As figuras (a), (c) e (e) são as probabilidade de sobrevivência P(n) por iterada, para os parâmetros indicados. As figuras (b), (d) e (f) são apliações feitas nas curvas (a), (c) e (e) respectivamente. . . . 46

Capítulo 1

Introdução

Na física, muitas vezes desejamos descrever a evolução de alguns fenômenos dinâmicos. Para isso precisamos definir uma regra matemática, tal como uma função, equações diferenciais, entre outras, que nos ajude a compreender e prever a evolução do fenômeno analisado. Na literatura, esses fenômenos evolutivos são chamados de sistemas dinâmicos. Atualmente sistemas dinâmicos descritos por mapeamentos discretos tem sido amplamente estudados durante vários anos [1]. Um mapeamento discreto, consiste em analisar a dinâmica de uma partícula a partir de seus estados numa sequência discreta de tempos $\{t_0, t_1, t_2...\}$. Neste trabalho, vamos estudar um sistema dinâmico denominado bilhar.

Os bilhares são sistemas em que uma partícula é confinada a se mover em uma região delimitada por uma fronteira, sendo essa fixa ou móvel. A partícula é lançada em uma determinada posição na região delimitada pela fronteira com uma velocidade definida. A partícula viaja ao logo de uma trajetória, geralmente retilínea, até sofrer uma colisão com a fronteira do bilhar [2]. As colisões podem ser elásticas ou inelásticas. Em uma colisão elástica observa-se a preservação do *momentum* e energia cinética ao passo que em uma colisão inelástica a partícula tem uma perda fracional de energia. Após a colisão, a partícula experimenta uma reflexão especular com a fronteira, ou seja, o ângulo de incidência na colisão com a fronteira do bilhar é igual ao ângulo de reflexão em relação à superfície normal da fronteira, desta forma dando origem a uma nova direção por onde a partícula deve seguir. É importante ressaltar que a velocidade da partícula,

após a colisão, se mantém constante, caso a fronteira seja estática. Porém, se a fronteira tiver uma dependência temporal, é possível observar um aumento ou redução da velocidade.

Em termos matemáticos, um bilhar [3] é formado por uma região $Q \subset R^D$, com fronteira $\partial Q \subset R^{D-1}$, a qual separa ∂Q de suas componentes. Se definirmos o conjunto ∂Q constante no tempo, a fronteira não troca energia com a partícula, ou seja, temos o caso da fronteira fixa [4-12]. No caso de $\partial Q = \partial Q(t)$, o sistema possui fronteira com dependência temporal [13-22] e a energia da partícula pode mudar após as colisões com a fronteira.

O espaço de fases de um bilhar, está diretamente ligado à geometria da fronteira. Definimos o espaço de fases como o conjunto de todos os estados acessíveis do sistema. Ao evoluir a partícula a partir de um estado inicial, o sistema passa por pontos no espaço de fases. O conjunto de pontos percorridos no espaço de fases é definido como sendo uma órbita. Desta forma o espaço de fases é definido como sendo o conjunto de todas as órbitas possíveis do sistema. É bem conhecido na literatura que a estrutura do espaço de fases depende de propriedades individuais e que são características de cada sistema. Basicamente, os sistemas podem ser classificados em três diferentes grupos: (i) integráveis, (ii) ergódicos e (iii) mistos. No caso (i) o espaço de fases consiste num conjunto de pontos fixos e de curvas invariantes. Um exemplo típico é o bilhar circular [23,24], cuja integrabilidade vem da conservação do momento angular e da energia. No caso (ii), os sistemas ergódicos têm apenas uma componente caótica e que preenche todo o espaço de fases acessível. Tal estrutura pode ser vista por exemplo no bilhar estádio de Bunimovich [5] e no gás de Lorentz [25]. Finalmente, o caso (iii) corresponde a maioria dos casos. Uma propriedade importante de sistemas mistos [26-29] é a existência de um mar de caos que geralmente envolve um conjunto de ilhas de estabilidade e ainda está confinado por curvas invariantes do tipo *spanning*. Essas curvas separaram regiões caóticas no espaço de fases e são invariantes por iteradas.

No presente trabalho, vamos estudar inicialmente o bilhar ovóide para fronteira estática e posteriormente, a fronteira com dependência temporal. Nossos objetivos ao estudar esse tipo de bilhar são: (i) entender as propriedades do espaço de fases; (ii) introduzir um orifício no bilhar com fronteira estática ou com

dependência temporal e injetar partículas através do mesmo e invertigar qual a taxa de partículas que sobrevivem, ou seja, permanecem dentro da fronteira após um número N de choques e qual a taxa de partículas que escapam da fronteira através do buraco introduzido, após o mesmo número N de choques.

Discutiremos todas as etapas para construir o mapeamento discreto que descreve a dinâmica do sistema, tanto para a versão estática quanto para a dependente do tempo.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no Capítulo 2 vamos discutir as propriedades do espaço de fases do bilhar ovóide na formulação estática. Construiremos as equações do modelo que conduzem ao mapeamento discreto bidimensional, estudaremos a sensibilidade do sistema utilizando os expoentes de Lyapunov e por fim, analisaremos as estatísticas de escape e sobrevivência de partículas para um orifício introduzido na fronteira. No Capítulo 3 vamos discutir as equações para a formulação do problema com a dependência temporal. Obteremos o mapeamento discreto quadrimensional. A partir disso, introduziremos um orifício na fronteira oscilante e analisaremos as estatísticas de sobrevivência e escape de partículas injetadas pelo buraco. Por fim, no Capítulo 4 apresentaremos nossas conclusões e discutiremos as perspectivas.

Capítulo 2

Bilhar Ovóide com fronteira estática

2.1 Resumo

Apresentaremos agora todas as etapas para a construção do mapeamento discreto para o bilhar ovóide, com fronteira estática. Após a obtenção do mapa, vamos estudar algumas propriedades do espaço de fases da dinâmica incluindo a estabilidade, através dos expoentes de Lyapunov. Por último, vamos introduzir um orífico na fronteira, por onde injetaremos partículas e estudaremos a probabilidade de sobrevivência e escape das mesmas.

2.2 O modelo e o mapeamento

Nesse capítulo nos concentraremos em modelar o problema de uma partícula clássica de massa m unitária se movendo no interior de uma região fechada no plano, que não sofre influência de nenhum potencial externo, limitada por uma fronteira ∂Q. A partícula move-se no interior dessa região sofrendo colisões especulares com a fronteira. Desse modo, sua velocidade varia de sentido e direção, porém, preservando o módulo. A geometria da região permitida para o movimento da partícula, é uma deformação de um círculo, cujo raio é dado em coordenadas polares por [30]

$$R(\theta, \epsilon, p) = 1 + \epsilon \cos(p\theta), \tag{2.1}$$

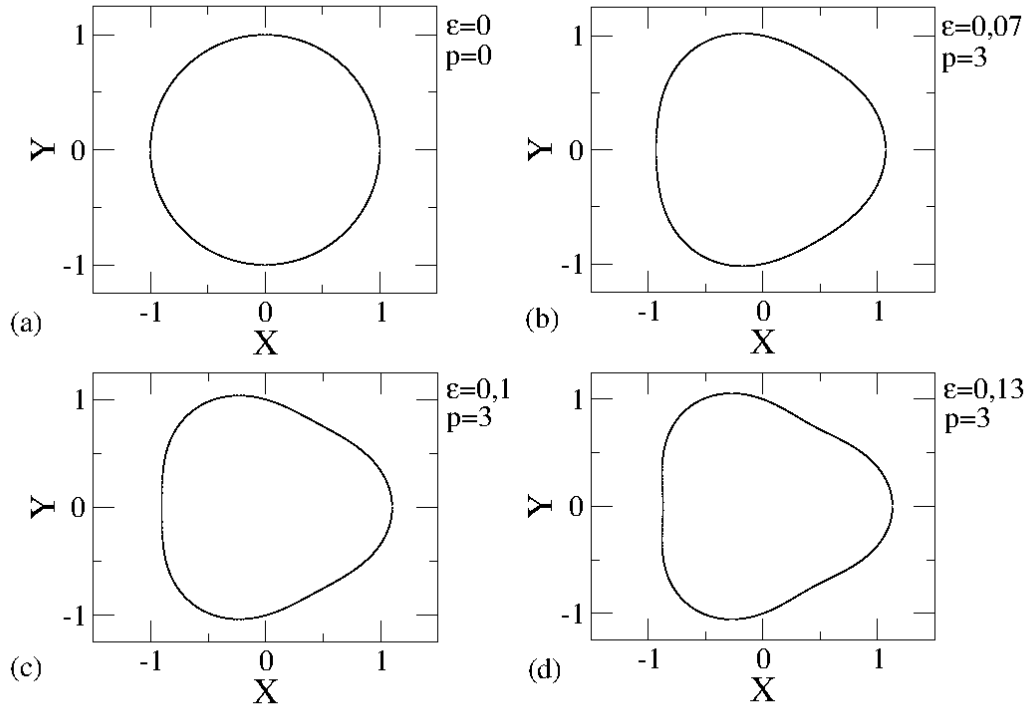


Figura 2.1: Esboço de diferentes geometrias da fronteira, para as combinações de parâmetros: (a) $\epsilon = 0$ e $p = 0$; (b) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (d) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$. O eixo horizontal representa $X(\theta_n) = R(\theta_n, \epsilon, p)\cos(\theta_n)$ e vertical $Y(\theta_n) = R(\theta_n, \epsilon, p)\sin(\theta_n)$.

onde $\epsilon \in [0, 1)$ é o parâmetro que controla a deformação do círculo. É interessante observar que para $\epsilon = 0$ recuperamos o raio para a construção do bilhar circular. $\theta \in [0, 2\pi]$ é a coordenada angular e p é um número inteiro não negativo. Mostramos na Fig.(2.1) várias possíveis geometrias para a fronteira do bilhar ovóide, utilizando diferentes combinações de parâmetros de controle para a Eq.(2.1).

A dinâmica é descrita por um mapeamento discreto, bidimensional, não linear, em termos de duas variáveis dinâmicas, denominadas por θ_n e α_n. Aqui θ_n representa a posição angular da partícula e α_n é o ângulo que a trajetória da partícula faz com o vetor tangente à fronteira na posição angular θ_n. Ilustramos

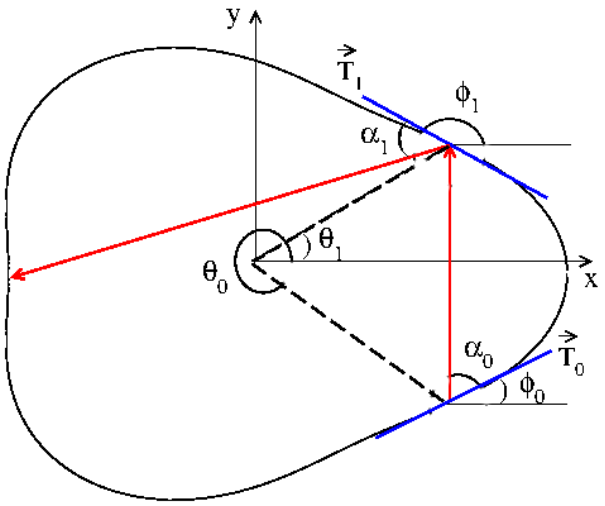


Figura 2.2: Ilustração da descrição dos ângulos feitos pela partícula e sua trajetória.

esses ângulos através do exemplo esquemático da Fig.(2.2). Após a definição de (θ_n, α_n), procuramos uma transformação Z, tal que, $Z(\theta_n, \alpha_n) = Z(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1})$, onde o índice n representa a enésima colisão com a fronteira. Munidos dessas informações, podemos escrever as coordenadas $X(\theta_n)$ e $Y(\theta_n)$ em função do raio dado pela Eq.(2.1), como sendo

$$\begin{aligned} X(\theta_n) &= R(\theta_n, \epsilon, p)\cos(\theta_n) \\ &= [1 + \epsilon\cos(p\theta_n)]\cos(\theta_n), \qquad (2.2) \\ Y(\theta_n) &= R(\theta_n, \epsilon, p)\sin(\theta_n) \\ &= [1 + \epsilon\cos(p\theta_n)]\sin(\theta_n). \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Definido o ângulo inicial θ_n, podemos observar que o ângulo que a reta tangente à fronteira no ponto de colisão, que é identificado pelos pontos $X(\theta_n)$ e

$Y(\theta_n)$, faz com a horizontal é definido por

$$\phi_n = \arctan\left[\frac{Y'(\theta_n)}{X'(\theta_n)}\right], \tag{2.4}$$

onde $X'(\theta_n)$ e $Y'(\theta_n)$ são as derivadas de $X(\theta_n)$ e $Y(\theta_n)$ respectivamente em relação a θ_n, que podem ser expressas por

$$X'(\theta_n) = \frac{dX(\theta_n)}{d\theta_n} = \frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n}\cos(\theta_n) - R(\theta_n)\sin(\theta_n), \tag{2.5}$$

$$Y'(\theta_n) = \frac{dY(\theta_n)}{d\theta_n} = \frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n}\sin(\theta_n) + R(\theta_n)\cos(\theta_n), \tag{2.6}$$

onde

$$\frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n} = -\epsilon p \sin(p\theta_n). \tag{2.7}$$

Como a força externa é nula, a partícula se move livremente entre as colisões. A trajetória da partícula é dada pela equação da reta que liga a partícula entre a colisões n e $n+1$ com a fronteira, sendo escrita como

$$Y(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) = \tan(\alpha_n + \phi_n)[X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)]. \tag{2.8}$$

Aqui $\tan(\alpha_n + \phi_n)$ é o coeficiente angular da reta, $X(\theta_{n+1})$ e $Y(\theta_{n+1})$ são as novas coordenadas da colisão $n+1$, em função do ângulo θ_{n+1}. Este ângulo é obtido através da solução numérica da equação transcendental Eq.(2.8). Após encontrar θ_{n+1}, podemos obter ϕ_{n+1}, com uma expressão semelhante a usada na Eq.(2.4), porém, agora esta equação é avaliada em θ_{n+1}, desta forma sendo escrita como

$$\phi_{n+1} = \arctan\left[\frac{Y'(\theta_{n+1})}{X'(\theta_{n+1})}\right]. \tag{2.9}$$

Após realizar os cálculos acima, podemos encontrar o ângulo α_{n+1}, que a trajetória da partícula faz com a reta tangente no ponto de colisão θ_{n+1}. Esse ângulo é descrito como

$$\alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n). \tag{2.10}$$

Com isso podemos escrever o mapeamento que modela a dinâmica como sendo

$$Z : \begin{cases} F(\theta_{n+1}) & = R(\theta_{n+1})\sin(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) - \tan(\alpha_n + \phi_n)\times \\ & \times[R(\theta_{n+1})\cos(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)] \\ \alpha_{n+1} & = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n) \end{cases} , \tag{2.11}$$

podemos obter θ_{n+1} usando o método da bisseção, fazendo $F(\theta_{n+1}) = 0$.

A matriz Jacobiana é dada por

$$J = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} , \tag{2.12}$$

onde

$$j_{11} = \frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial\theta_n}, \qquad j_{12} = \frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial\alpha_n}, \qquad j_{21} = \frac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial\theta_n}, \qquad j_{22} = \frac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial\alpha_n},$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial\theta_n} &= \frac{[1 + \tan^2(\phi_n + \alpha_n)\frac{\partial\phi_n}{\partial\theta_n} \triangle X + Y'(\theta_n) - \tan(\phi_n + \alpha_n)X'(\theta_n)]}{\psi}, \\ \frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial\alpha_n} &= \frac{\triangle X[1 + \tan^2(\phi_n + \alpha_n)]}{\psi}, \\ \frac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial\theta_n} &= \frac{\partial\phi_{n+1}}{\partial\theta_{n+1}}\frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial\theta_n} - \frac{\partial\phi_n}{\partial\theta_n}, \\ \frac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial\alpha_n} &= \frac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial\theta_{n+1}}\frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial\alpha_n} - 1. \end{aligned}$$

As variáveis auxiliares são

$$\begin{aligned} \triangle X &= R(\theta_{n+1})\cos(\theta_{n+1}) - X(\theta_n), \\ \psi &= \frac{\partial R(\theta_{n+1})}{\partial\theta_{n+1}}[\sin(\theta_{n+1}) - \tan(\phi_n + \alpha_n)\cos(\theta_{n+1})] + \\ &+ R(\theta_{n+1})[\cos(\theta_{n+1} + \tan(\phi_n + \alpha_n)\sin(\theta_{n+1}))], \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial\theta_n} &= \left[1 + \left[\frac{Y'(\theta)}{X'(\theta)}\right]^2\right]^{-1}\left[\frac{Y'(\theta)}{X'(\theta)} - \frac{Y'(\theta)X''(\theta)}{[X'(\theta)]^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Os termos $X'(\theta)$, $Y'(\theta)$, $X''(\theta)$ e $Y''(\theta)$ são dados por

$$\begin{aligned} X'(\theta) &= \frac{dR(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - R(\theta)\sin(\theta), \\ Y'(\theta) &= \frac{dR(\theta)}{d\theta}\sin(\theta) + R(\theta)\cos(\theta), \\ X''(\theta) &= \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2}\cos(\theta) - 2\frac{dR(\theta)}{d\theta}\sin(\theta) - R(\theta)\cos(\theta), \\ Y''(\theta) &= \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2}\sin(\theta) + 2\frac{dR(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - R(\theta)\sin(\theta). \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{dR(\theta)}{d\theta} &= -\epsilon p\sin(p\theta), \\ \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2} &= -\epsilon p^2\cos(p\theta). \end{aligned}$$

O determinante da matriz Jacobiana é dado por

$$det(J) = -\frac{Y'(\theta_n) - X'(\theta_n)\tan(\phi_n + \alpha_n)}{Y'(\theta_{n+1}) - X'(\theta_{n+1})\tan(\phi_n + \alpha_n)}. \tag{2.14}$$

2.3 Espaço de fases

Nesta seção vamos discutir as propriedades do espaço de fases. O espaço de fases, para o bilhar ovóide, proposto pela Eq.(2.11), para os parâmetros $\epsilon = 0,1$ e $p = 2$ é mostrado na Fig.(2.3).

Podemos observar na Fig.(2.3) que o espaço de fases é misto, com a existência de um mar de caos que é limitado por curvas invariantes do tipo *spanning*, além de um conjunto de ilhas de estabilidade. O termo ilha de estabilidade é dado quando encontramos pontos fixos do tipo elípticos no espaço de fases. Essa classificação é caracterizada através da análise dos dois autovalores $\lambda'_{1,2}$ obtidos a partir da solução da equação $det(J - \lambda' I) = 0$, ou seja,

$$det\begin{pmatrix} j_{11} - \lambda' & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} - \lambda' \end{pmatrix} = 0,$$

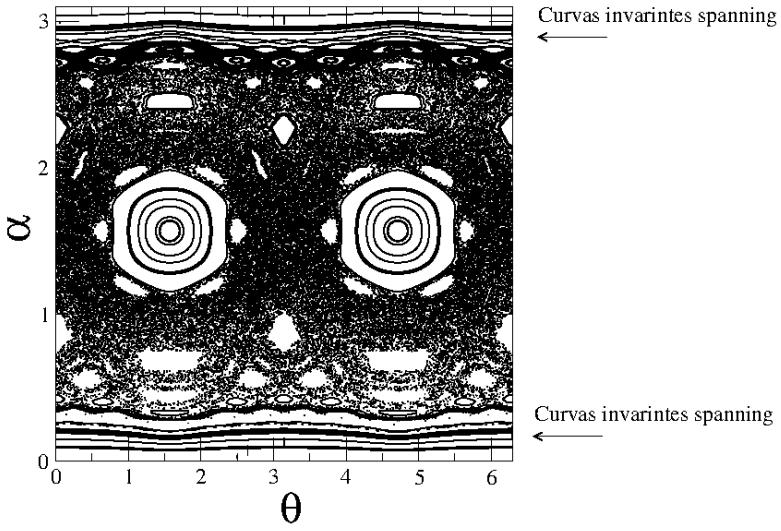


Figura 2.3: Espaço de fases gerado pela Eq.(2.11), para os parâmetros $\epsilon = 0,1$ e $p = 2$.

através do determinante encontramos

$$\lambda'_{1,2} = \frac{(j_{11} + j_{22}) \pm \sqrt{(j_{11}j_{22})^2 - 4(j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21})}}{2}.$$

Se encontramos autovalores imaginários, temos pontos fixos elípticos [31,32]. Ao variarmos o parâmetro ϵ de maneira que assuma um valor maior que ϵ_c [3,33,34], sendo ϵ_c escrito como

$$\epsilon_c = \frac{1}{1+p^2}, \qquad p \geq 1, \tag{2.15}$$

acarreta na destruição de todas as curvas invariantes *spanning* do espaço de fases. Podemos observar esse fato na Fig.(2.4).

A explicação para essa destruição das curvas invariantes pode ser dada pela curvatura da fronteira ∂Q do bilhar. Podemos ver, por exemplo, na Fig.(2.1), que o parâmetro ϵ é responsável por variar a forma geométrica da fronteira.

Desta forma, uma região com um $\epsilon < \epsilon_c$, tem forma côncava para a fronteira,

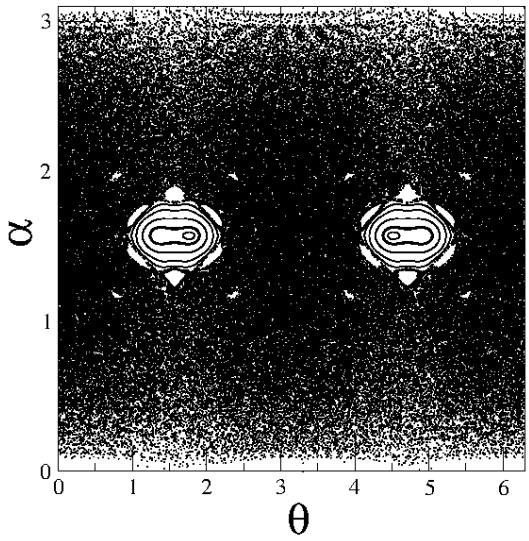


Figura 2.4: Espaço de fases gerado pela Eq.(2.11), para os parâmetros $\epsilon = 0,21$ e $p = 2$.

enquanto que para valores de $\epsilon > \epsilon_c$ implica em uma curvatura negativa, ou seja, convexa. A mudança na concavidade da fronteira é a responsável pela destruição das órbitas chamadas *whispering gallery orbits*.

As órbitas do tipo *whispering gallery orbits* produzem, no espaço de fases, um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning* que correspondem a trajetórias no bilhar que margeiam a fronteira. São órbitas quase-periódicas (sem período), porém, percorrem todos os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$, para uma faixa restrita de α. A Fig.(2.3) ilustra tais órbitas no espaço de fases.

2.4 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov [35] são utilizados como indicadores de caos. Eles mostram se a dinâmica é sensível ou não às condições iniciais, ou seja, se duas órbitas com condições iniciais próximas divergem exponencialmente, ou não, com o passar do tempo.

A ideia do expoente de Lyapunov é medir o afastamento entre duas órbitas próximas. Se a distância média entre as órbitas sofrer uma divergência exponencial, isso é suficiente para caracterizar caos. Caso as órbitas permanecerem próximas ou divergirem de forma linear, dizemos que as órbitas são regulares.

Nosso objetivo é utilizar o expoente de Lyapunov para caracterizar o comportamento caótico da dinâmica. Para compreender o funcionamento do expoente de Lyapunov, vamos demonstar primeiramente para o caso unidimensional e em seguida para o caso bidimensional.

Para o modelo unidimensional, onde x é a variável dinâmica, vamos supor um mapa dado por

$$x_{n+1} = G(x_n), \tag{2.16}$$

onde x_0 é uma condição inicial e G é uma função não linear qualquer. Mediremos a distância d entre duas condições iniciais na enésima iteração, tal que uma seja x_0 e a outra $x_0 + \xi$, sendo ξ uma pequena variação, ou seja

$$d = |G^{(n)}(x_0 + \xi) - G^{(n)}(x_0)|. \tag{2.17}$$

Tomando a Eq.(2.17) e dividindo por ξ, encontramos a distância relativa,

$$\frac{d}{\xi} = \left| \frac{G^{(n)}(x_0 + \xi) - G^{(n)}(x_0)}{\xi} \right|. \tag{2.18}$$

Considerando o limite em que $\xi \to 0$

$$\frac{d}{\xi} = \lim_{\xi \to 0} \left| \frac{G^{(n)}(x_0 + \xi) - G^{(n)}(x_0)}{\xi} \right|, \tag{2.19}$$

podemos observar que a expressão da Eq.(2.19) corresponde a própria definição de derivada. Vamos agora por hipótese supor que

$$|G'^{(n)}(x_0)| = e^{\lambda n}. \tag{2.20}$$

Tomando o logaritmo de ambos os lados, temos

$$\ln e^{\lambda n} = \ln |G'^{(n)}(x_0)|,$$

$$\lambda n = \ln |G'^{(n)}(x_0)|,$$
$$\lambda = \frac{1}{n} \ln |G'^{(n)}(x_0)|. \tag{2.21}$$

Considerando o limite em que $n \to \infty$, temos

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |G'^{(n)}(x_0)|. \tag{2.22}$$

Desta forma, a Eq.(2.22) fornece o expoente de Lyapunov para o caso unidimensional.

Para o caso bidimensional [35], a expressão para os expoentes de Lyapunov é dada por

$$\lambda_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^i|, \qquad j = 1, 2; \tag{2.23}$$

onde o termo Λ_j^i corresponde aos autovalores da matriz M, sendo esta escrita como M=$\prod_{i=1}^{n} J_i(\theta_i, \alpha_i)$ e J_i é a matriz Jacobiana do mapeamento na órbita (θ_i, α_i).

Para obter os expoentes de Lyapunov, utilizaremos o algoritmo de triangularização proposto por Eckmann-Ruelle [35]. Este método consiste em escrever a matriz Jacobiana a partir do produto de uma matriz ortogonal O por uma matriz triangular superior T. Portanto

$$J = OT. \tag{2.24}$$

Sabemos por propriedades de matrizes [36] que uma matriz é ortogonal quando sua transposta é igual a sua inversa, ou seja

$$O^{-1} = O^t. \tag{2.25}$$

Desta forma, podemos escrever a matriz triangular como

$$T = O^{-1}J. \tag{2.26}$$

A matriz M é escrita pelo produto

$$M = J_n J_{n-1} .... J_2 J_1. \tag{2.27}$$

Vamos introduzir nessa matriz uma identidade da forma $O_1 O_1^{-1}$, desta forma teremos

$$M = J_n J_{n-1} .... J_2 O_1 O_1^{-1} J_1. \tag{2.28}$$

Como vimos na Eq.(2.26) o termo $O_1^{-1} J_1$ corresponde a matriz triangular T_1 e o termo $J_2 O_1$ é reescrito como $J_2^{'}$, portanto

$$M = J_n J_{n-1} .... J_2^{'} T_1. \tag{2.29}$$

Aplicando mais uma vez a identidade, porém, sendo ela agora $O_2 O_2^{-1}$, temos

$$M = J_n J_{n-1} .... J_3 O_2 O_2^{-1} J_2^{'} T_1, \tag{2.30}$$

$$M = J_n J_{n-1} .... J_3^{'} T_2 T_1. \tag{2.31}$$

Realizando esse processo, teremos o produto de matrizes triangulares que resulta em uma nova matriz triangular, portanto, encontramos os autovalores como sendo os elementos T_{11} e T_{22} da diagonal principal da matriz triangular T.

Para encontrar os valores da diagonal principal da matriz T, ou seja, T_{11} e T_{22}, escolheremos a matriz ortogonal O como

$$O = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

$$O^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

A matriz triangular superior T representada por

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Como vimos na Eq.(2.26), podemos escrever a matriz T como sendo

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

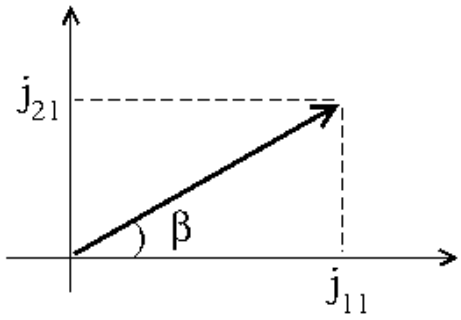


Figura 2.5: Ilustração esquemática para os eixos de j_{11}, j_{22} e o ângulo β.

aplicando o produto da matriz O^{-1} por J temos,

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11}\cos(\beta) + j_{21}\sin(\beta) & j_{12}\cos(\beta) + j_{22}\sin(\beta) \\ -j_{11}\sin(\beta) + j_{21}\cos(\beta) & -j_{12}\sin(\beta) + j_{22}\cos(\beta) \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Desenvolvendo essas equações temos

$$T_{11} = j_{11}\cos(\beta) + j_{21}\sin(\beta), \tag{2.37}$$
$$T_{12} = j_{12}\cos(\beta) + j_{22}\sin(\beta), \tag{2.38}$$
$$0 = -j_{11}\sin(\beta) + j_{21}\cos(\beta), \tag{2.39}$$
$$T_{22} = -j_{12}\sin(\beta) + j_{22}\cos(\beta). \tag{2.40}$$

A partir da Eq.(2.39), encontramos

$$0 = -j_{11}\sin(\beta) + j_{21}\cos(\beta), \tag{2.41}$$

$$j_{11}\sin(\beta) = j_{21}\cos(\beta), \tag{2.42}$$

$$\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{j_{21}}{j_{11}}. \tag{2.43}$$

Podemos representar a Eq.(2.43) através de vetores, mostramos isso na Fig.(2.5). Vemos que da Fig.(2.5) que o módulo do vetor é

$$h = \sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}. \tag{2.44}$$

Desta forma sabemos que

$$\sin(\beta) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \qquad \cos(\beta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \tag{2.45}$$

Transportando a expressão da Eq.(2.44) para as Eq.(2.37) e Eq.(2.40), os elementos da diagonal da matriz, são

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \\ T_{22} &= \frac{j_{22}j_{11} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Desta forma uma expressão para os expoentes de Lyapunov é

$$\lambda_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |T_{jj}^{(n)}|, \qquad j = 1, 2, \tag{2.47}$$

onde T_{jj} é o elemento da diagonal da matriz triangular superior $T^{(n)}$.

Uma informação importante é que para sistemas conservativos, os expoentes de Lyapunov aparecem aos pares, porém, com sinais contrários. Portanto, quando somamos os expoentes correspondentes a um par, obtemos zero. No caso dissipativo, os expoentes de Lyapunov também aparecem aos pares com sinais trocados. Porém, ao somarmos os elementos de cada par, obtemos um valor negativo.

Tendo essas informações sobre os expoentes de Lyapunov podemos caracterizar se uma órbita é caótica. Para confirmar nossa afirmação da existência de um mar de caos que foi abordado no estudo do espaço de fases das Fig.(2.3) e Fig.(2.4) utilizaremos condições iniciais que estão dentro do mar de caos. Seguiremos suas órbitas analisando os expoentes de Lyapunov em função de n. Para realizar esta tarefa primeiro vamos começar pela Fig.(2.3), escolhendo θ variando de 0 a $0,5$ e $\alpha = 2$.

A partir dessas informações, construímos cinco curvas para os expoentes de Lyapunov para a região escolhida, e depois de 10^5 iterações para cada curva, con-

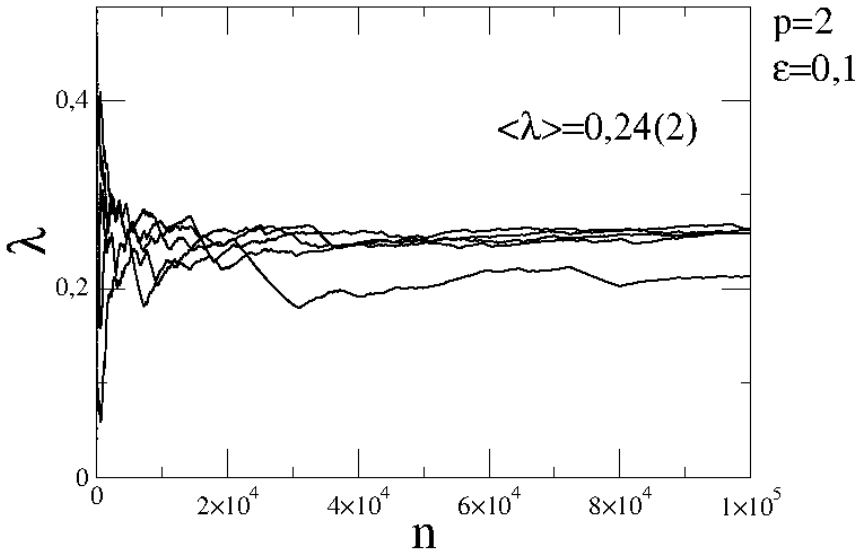


Figura 2.6: Convergência dos expoentes de Lyapunov para os parâmetros $p = 2$ e $\epsilon = 0,1$.

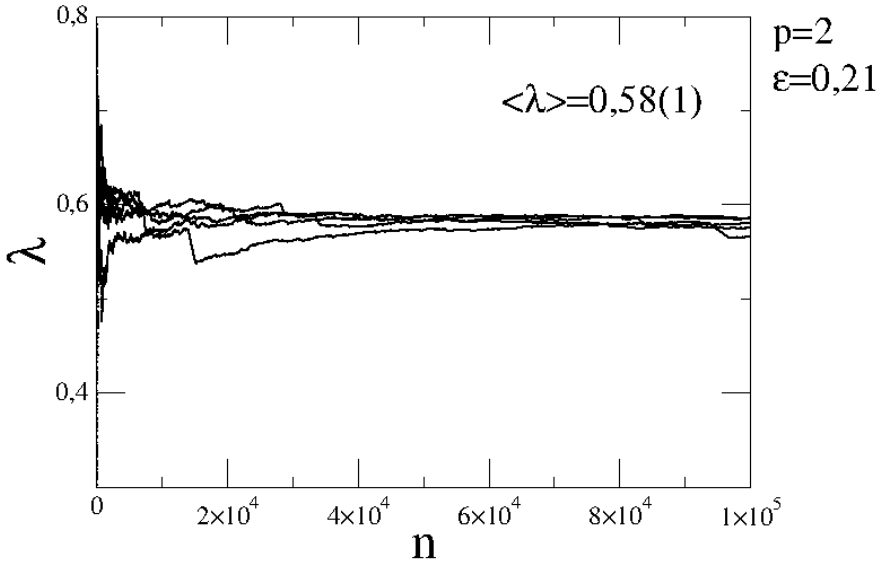


Figura 2.7: Convergência dos expoentes de Lyapunov para os parâmetros $p = 2$ e $\epsilon = 0,21$.

seguimos um expoente equivalente a $< \lambda >= 0,24(2)$. Esse resultado corresponde a comportamento caótico, ou seja, confirmando a existência de caos no espaço de fases. As curvas dos expoentes de Lyapunov e o valor do expoente médio para o espaço de fases da Fig.(2.3) são apresentados na Fig.(2.6).

De forma semelhante, podemos fazer a mesma análise para o espaço de fases da Fig.(2.4), onde definimos novamente condições dentro da região de mar de caos, sendo elas, θ variando de 0 a $0,5$ e $\alpha = 2$, após isso, repetimos o processo já descrito acima. Encontramos para essa análise um expoente equivalente a $< \lambda >= 0,58(1)$, o que novamente confirma o comportamento caótico, dessa forma, demonstrando a existência de um mar de caos. Esses resultados podem ser vistos na Fig.(2.7)

2.5 Propriedades estatísticas: Escape por um orifício

Vamos agora, discutir algumas propriedades estatísticas observadas no bilhar ovóide com fronteira estática. Nossa análise consiste em observar a taxa de partículas que escapam, por iterada, em um orifício introduzido na fronteira ∂Q e a probabilidade das partículas sobreviverem, ou seja, permanecerem dentro da região delimitada pela fronteira após um número N de colisões.

Para iniciar nossos estudos nesta seção, primeiramente temos que definir a posição do orifício a ser inserido na fronteira ∂Q. O orifício nada mais é que um determinado deslocamento angular que deve ser acrescido sobre uma posição θ_{ct}, definida como sendo o centro do buraco. Neste trabalho vamos padronizar que a extensão do orifício será $h = 0,1$, e θ_{ct} assumirá os seguintes valores: (i) $\theta_{ct} = \pi/60$, (ii) $\theta_{ct} = \pi/4$ e (iii) $\theta_{ct} = 3\pi/4$. Definimos estas diferentes configurações para o orífico para que a partícula experimente diferentes formas de trajetória no bilhar e assim, poder interpretar as estatísticas de modo geral. Tomando essas informações, podemos moldar a fronteira com o orifício para várias configurações de ϵ e p.

Após definir toda a parametrização discutida acima, vamos iniciar o estudo estatístico injetando partículas dentro da região ∂Q do bilhar ovóide através do

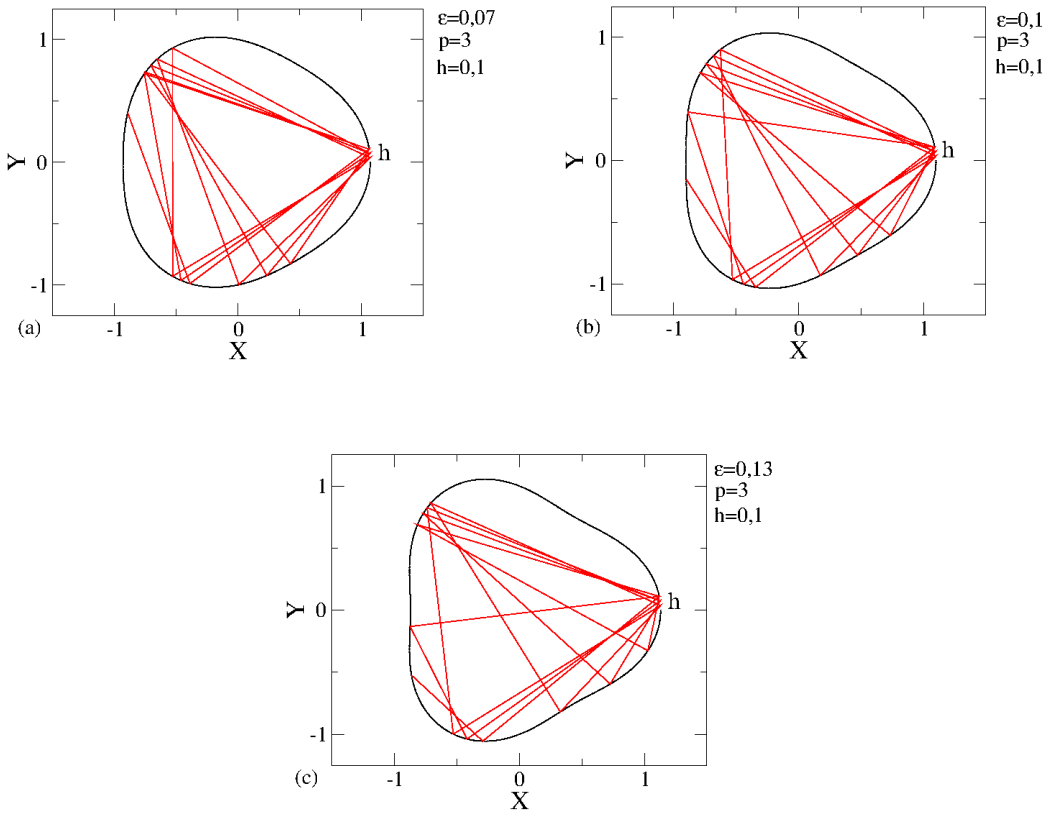


Figura 2.8: Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide através do orifício centrado em $\theta_{ct} = \pi/60$ para os parâmetros dados por: (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$.

buraco introduzido e deixar a dinâmica evoluir ao longo de um número de iteradas desejadas. A Fig.(2.8)(a-c) ilustra a situação proposta para a injeção de partículas através do orifício da fronteira centrado em $\theta_{ct} = \pi/60$ para os parâmetros ϵ e p indicados nas figuras.

Um fato de extrema importância que deve ser levado em consideração para construção das estatísticas, é que as partículas não devem escapar através do buraco na primeira iterada. Se tal ação ocorrer, estaremos injetando partículas pelo orifício como desejamos, porém, estaremos direcionando-as para fora do bilhar. Isso influencia diretamente na estatística do problema, pois não estaríamos analisando se a partícula pode escapar do sistema, estaríamos na verdade forçando

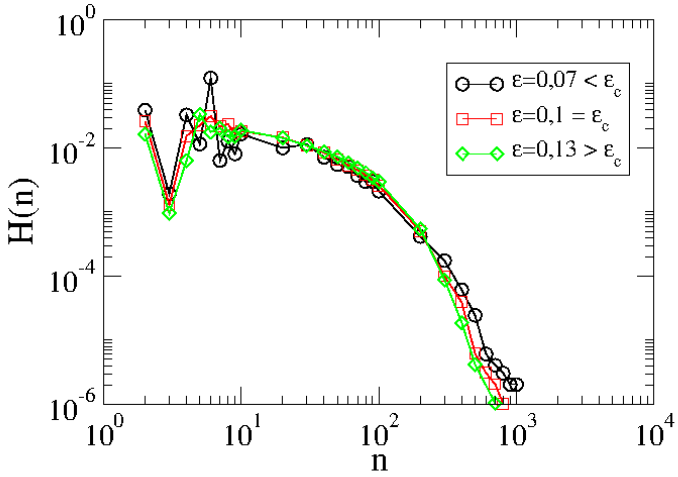


Figura 2.9: Análise do histograma de escape das partículas por iterada.

para que ela o fizesse já na primeira iterada.

Munidos de todas essas informações, criamos um ensemble de 10^6 condições iniciais, onde 10^3 θ_0 são uniformemente distribuídas sobre um $\theta_0 \in (0, h)$ enquanto 10^3 diferentes condições iniciais de α_0 são distribuídas uniformemente por $\alpha_0 \in (0, \pi)$, onde h é a extensão do buraco, como definimos acima. Cada uma das condições iniciais são iteradas ao longo de 10^6 colisões com a fronteira, caso não escapem antes.

Quando uma partícula visita a região do buraco pela primeira vez, nós registramos o número da colisão e definimos que ocorreu um escape. Após isso, uma nova condição inicial é disparada, e o processo é repetido novamente até todas as condições do ensemble serem utilizadas na dinâmica.

A primeira análise que podemos fazer é o histograma H(n) da frequência de escape de partículas por iterada referente a $\theta_{ct} = \pi/60$. Essa informação é apresentada na Fig.(2.9), para três diferentes conjuntos de parâmetros de controle, sendo eles $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$, $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$, $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$.

Podemos observar na Fig.(2.9) que nosso resultado está de acordo com o que propomos inicialmente, ou seja, não existe escape na primeira iterada. Podemos

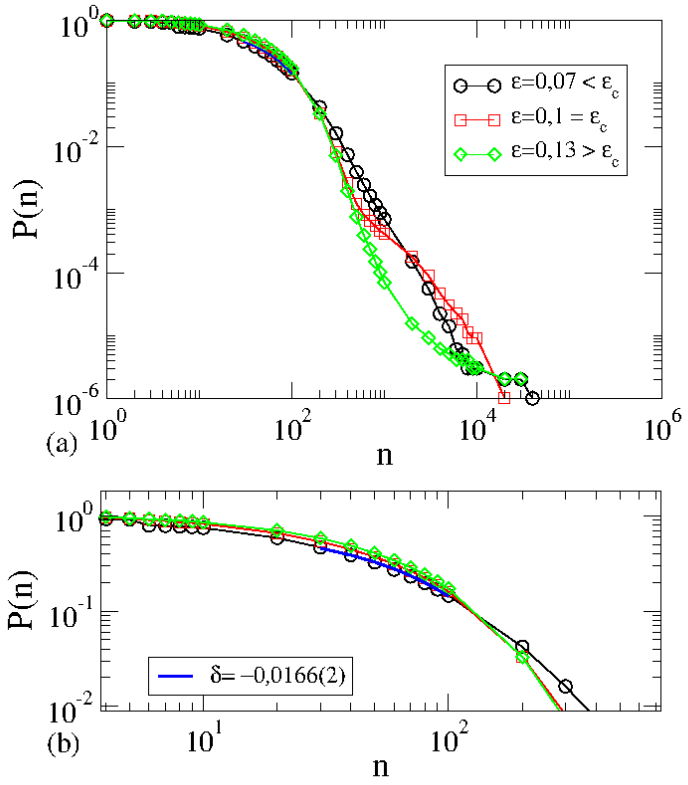


Figura 2.10: (a)Análise da probabilidade de sobrevivência das partículas por iterada; (b) Ampliação da região do decaimento exponencial demonstrado nas curvas em (a).

também olhar agora a questão da probabilidade de sobrevivência das partículas no bilhar, a Fig.(2.10)(a) demostra esse comportamento. Podemos definir a probabilidade de sobrevivência P(n) como sendo

$$P(n) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} N_{rec}(n) \tag{2.48}$$

onde o somatório é tomado ao longo do ensemble de $N = 10^6$ diferentes condições iniciais e $N_{rec}(n)$ representa o número de condições iniciais que não escaparam pelo buraco.

É importante explicar que a medida dessa probabilidade está normalizada a 1, é que o procedimento adotado para a realização desta medida, foi o registro

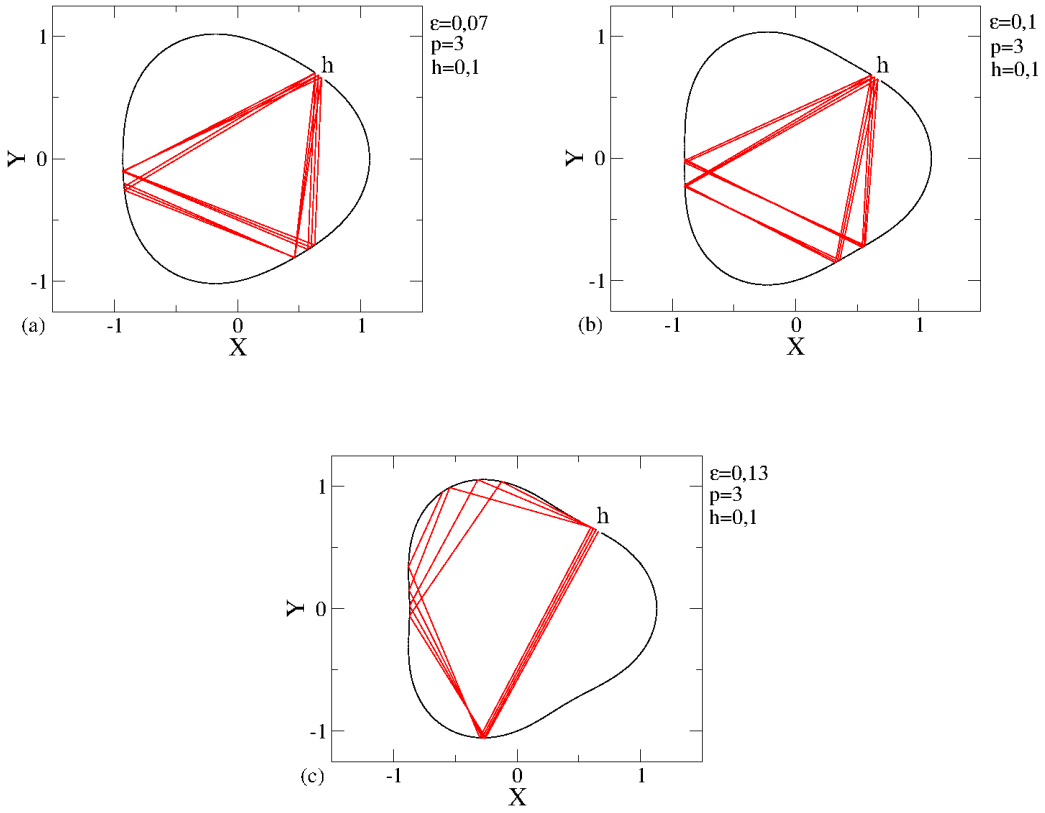


Figura 2.11: Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide através do orifício centrado em $\theta_{ct} = \pi/4$ para os parâmetro dados por (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$.

do número de condições iniciais que não escapavam, ou seja, sobreviviam por iterada.

Podemos ver que a probabilidade P(n) está em acordo com o fato de não ocorrer escapes na iterada 1, ou seja, temos uma probabilidade de 1 ou 100% de que as partículas não escapam na primeira colisão com a fronteira do bilhar.

É interessante observar que existe um comportamento de decaimento exponencial na probabilidade de sobrevivência, que pode ser dado pela expressão

$$P(n) = P_0 e^{n\delta}, \tag{2.49}$$

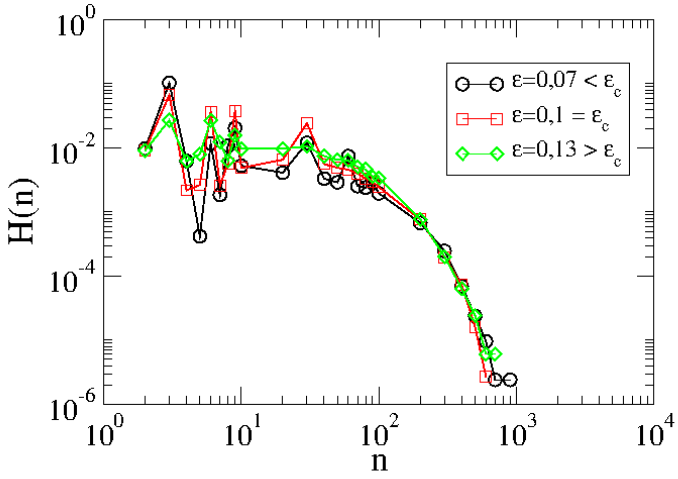


Figura 2.12: Análise do histograma de escape das partículas por iterada.

onde a constante P_0 e o expoente de decaimento δ podem ser extraídos através de um ajuste numérico adequado das curvas e n é o número de colisões.

A Fig.(2.10)(b), apresenta uma ampliação da Fig.(2.10)(a), onde observamos que uma parte da curva pode ser moldada por um ajuste numérico de decaimento exponencial. O expoente δ representa a razão entre a extensão h do buraco e o comprimento total da fronteira, tal razão tem o valor aproximado de

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{0,1}{2\pi} = 0,015915 \quad , \tag{2.50}$$

que comparado ao valor obtido através do ajuste numérico exponencial tem um erro relativo percentual de $4,3\%$.

Prosseguindo com nosso estudo, vamos agora abordar o caso (ii), onde repetiremos o procedimento descrito acima, porém, agora introduzindo o buraco na fronteira ∂Q, de forma que o centro do buraco θ_{ct} é posto em $\pi/4$. Definido assim, vamos considerar um orifício de extensão $h = 0,1$ centrado em θ_{ct}. A Fig.(2.11), ilustra a configuração para as novas injeções de partículas no bilhar ovóide.

Novamente construímos um ensemble do mesmo tamanho do descrito para

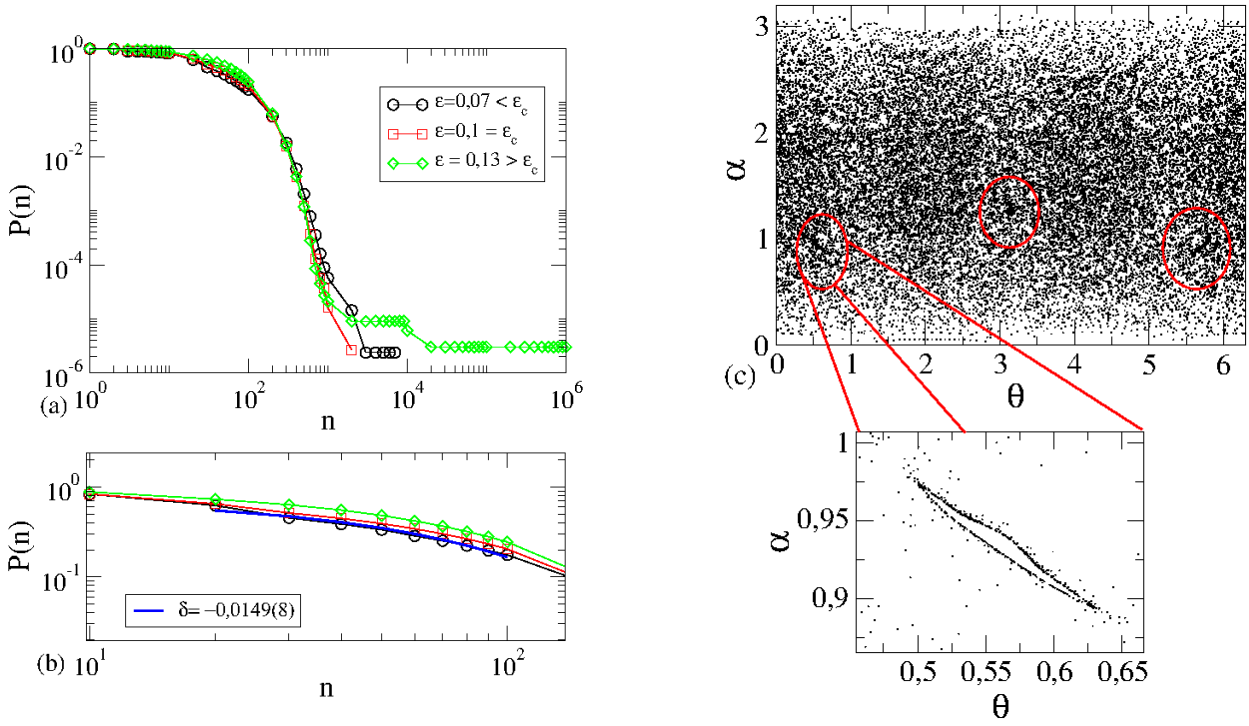


Figura 2.13: (a)Análise da probabilidade de sobrevivência das partículas por iterada; (b) Ampliação da região do decaimento exponencial demonstrado nas curvas em (a); (c) a evidencia de *stickiness* no sistema, sendo eles circulados em vermelho.

$\theta_{ct} = \pi/60$, obviamente sempre tomando o cuidado de não injetar uma partícula diretamente para fora do buraco, ocasionando o escape na primeira iterada. A partir disso, podemos analisar o histograma de escape H(n) por iterada, para essa configuração do bilhar, essa informação é apresenta na Fig.(2.12). Podemos observar novamente que não existe o escape na primeira iterada, como desejamos.

Olhando agora para a probabilidade de sobrevivência P(n) por iterada da partícula, podemos observar um comportamento semelhante ao caso $\theta_{ct} = \pi/60$, conforme mostrado na Fig.(2.13)(a). O que difere a Fig.(2.13)(a) da Fig.(2.10)(a), é o fato de que a curva verde, construída para o parâmetro $\epsilon = 0,13$, tende a 0 para $\theta_{ct} = \pi/60$, enquanto para $\theta_{ct} = \pi/4$, ela tende a um platô. Este platô, é criado devido a presença de *stickiness*. O fenômeno de *stickiness* ocorre quando uma dada condição passa muito próxima de uma ilha de estabilidade. A partícula

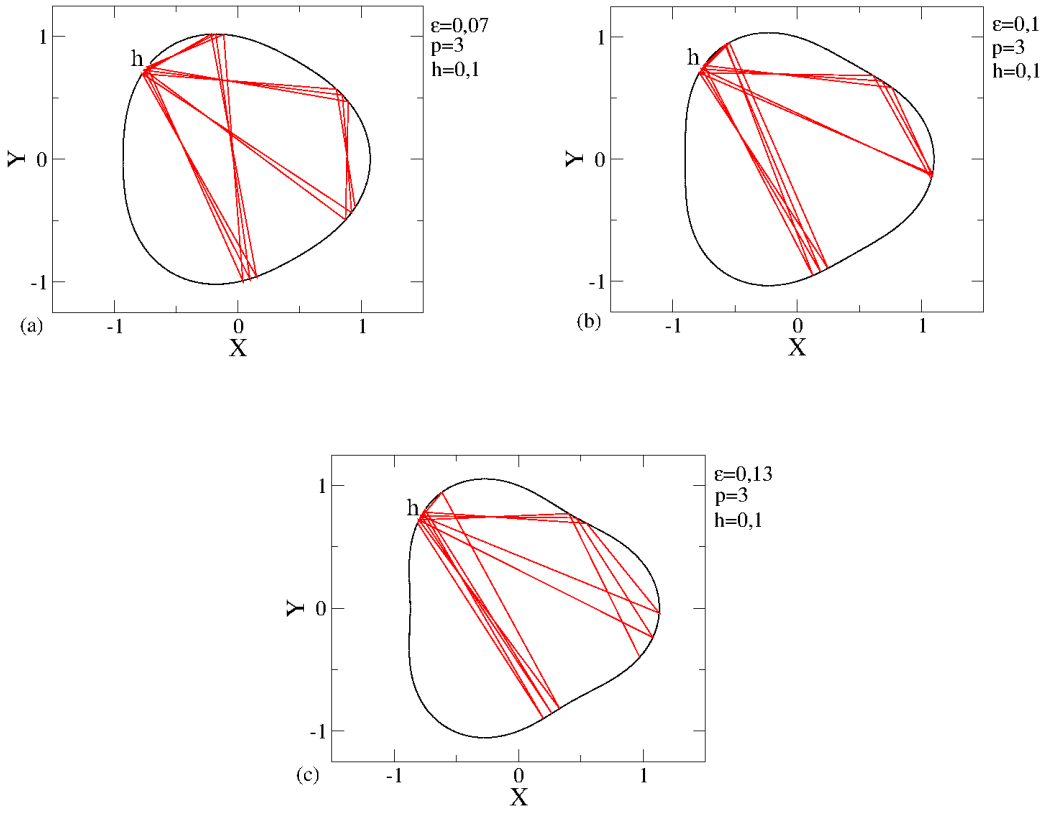


Figura 2.14: Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide através do orifício centrado em $\theta_{ct} = 3\pi/4$ para os parâmetro dados por (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$.

fica presa por um tempo suficientemente grande em torno desta ilha, assim fazendo com que a probabilidade P(n) não decaia a zero num primeiro instante. A Fig.(2.13)(c) ilustra a ocorrência de um evento de *stickiness*. Podemos ver no espaço de fases que existem 3 regiões de *stickiness*, que destacamos em círculos vermelhos, desta forma explicando a diferença entre as Fig.(2.13)(a) e Fig.(2.10)(a).

Vemos também que podemos ajustar numericamente um decaimento exponencial para as curvas mostradas em Fig.(2.13)(a), apresentamos esse ajuste na Fig.(2.13)(b), que novamente representa uma ampliação da região em questão. Observamos novamente que o valor do expoente é aproximadamente ao valor dado pela relação da Eq.(2.50).

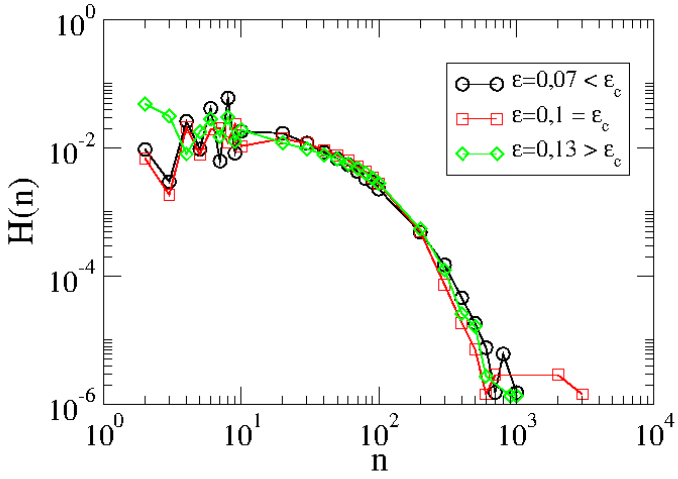


Figura 2.15: Análise do histograma de frequência de escape das partículas por iterada.

Por fim chegamos ao caso (iii), onde mais uma vez vamos repetir todo o procedimento descrito para os casos anteriores, porém, agora tomando o orifício na fronteira ∂Q tendo seu centro em $\theta_{ct} = 3\pi/4$, e extensão $h = 0,1$. Apresentamos na Fig.(2.14) as configurações para o lançamento em questão.

Reproduzindo as mesmas condições acima para a construção da estatística, obtemos os resultados do histograma de escape H(n) por iterada e o apresentamos na Fig.(2.15). As informações sobre a probabilidade de sobrevivência P(n) por iterada são demonstradas na Fig.(2.16)(a). Podemos notar novamente para a configuração estabelecida, que existe a influência de *stickiness* sobre a estatística da probabilidade de sobrevivência para a curva preta de parâmetro $\epsilon = 0,07$, novamente observamos o platô que P(n) converge a partir de uma determinada iterada.

Ainda observando a Fig.(2.16)(a), um ajuste numérico exponencial explica o decaimento das curvas. Tal ajuste pode ser visualizado na Fig.(2.16)(b), que é a ampliação da região das curvas estudadas. Observamos que o valor do expoente encontrado numericamente, é aproximadamente igual ao dado pela relação da

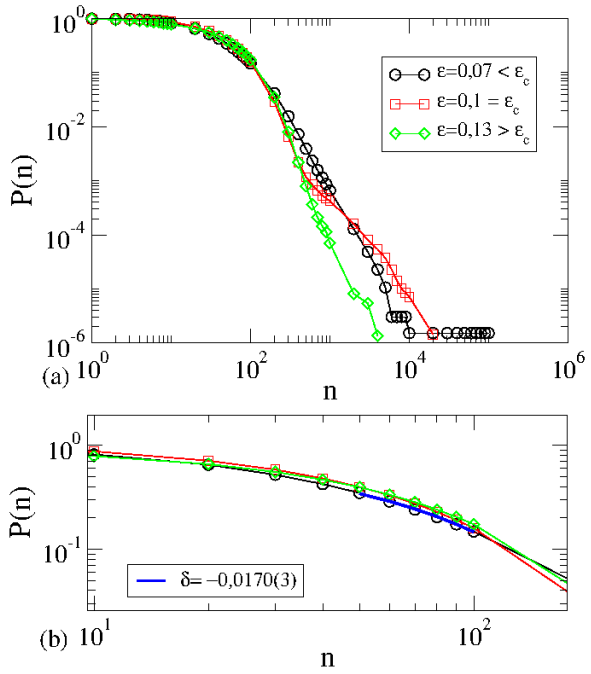


Figura 2.16: (a)Análise da probabilidade de sobrevivência das partículas por iterada; (b) Ampliação da região do decaimento exponencial demonstrado nas curvas em (a).

Eq.(2.50).

2.6 Propriedades estatísticas: Escape por dois orifícios

Munidos dessas estatísticas e da confirmação numérica da Eq.(2.50), podemos extrapolar nossa hipótese para o caso em que introduzimos dois orifícios na fronteira ∂Q com a mesma extensão $h = 0,1$ para ambos os buracos, totalizando um valor final de $2h$. Devemos encontrar um valor tal como o da Eq.(2.50), porém, agora sendo o dobro, ou seja, um valor aproximado de

$$2 \times \frac{h}{2\pi} = \frac{0,2}{2\pi} = 0,031831. \tag{2.51}$$

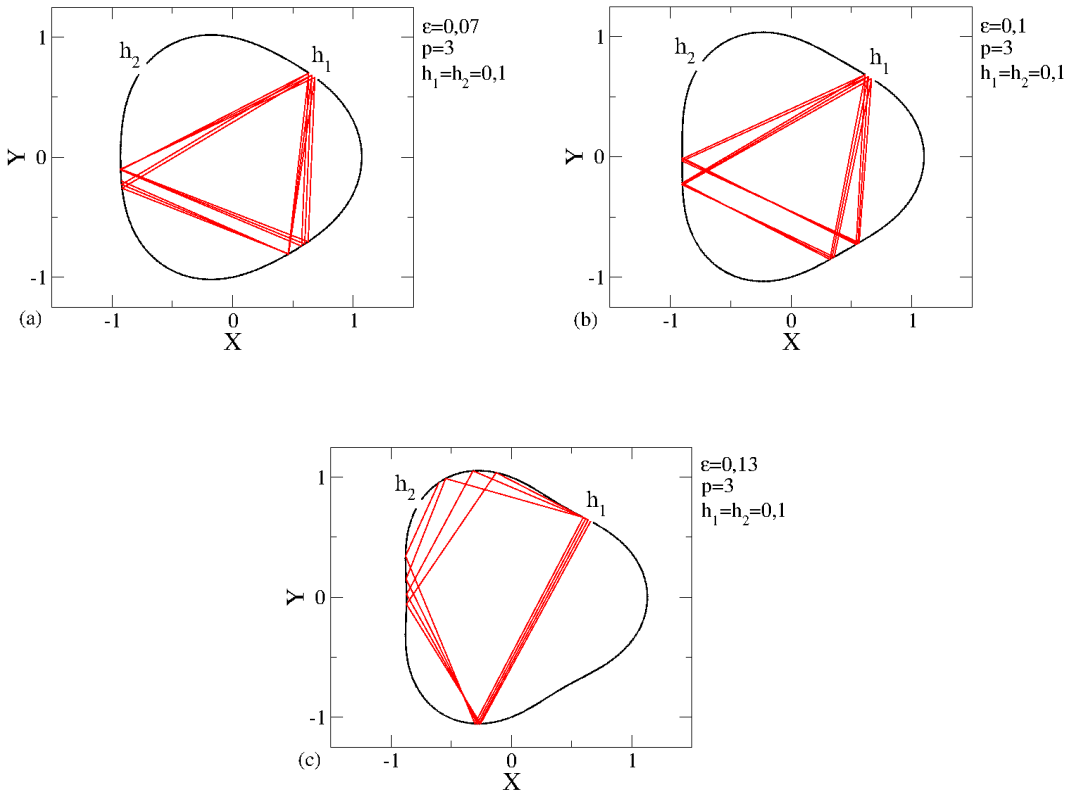


Figura 2.17: Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide com dois orifícios centrados em $\theta_{ct} = \pi/4$ e $\theta_{ct} = 3\pi/4$ para os parâmetro dados por (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$.

Para verificar essa suposição, vamos construir novamente a fronteira do bilhar, porém, agora com dois orifícios, sendo eles h_1 e h_2. O primeiro com seu centro localizado em $\theta_{ct} = \pi/4$ e o segundo em $\theta_{ct} = 3\pi/4$, novamente em torno de cada um deles um orífico de extensão $h = 0,1$. Vamos primeiramente fazer a injeção de partículas através do buraco h_1, tomando o cuidado de não lançar partículas diretamente nos buracos h_1 e h_2 na iterada 1. Um exemplo esquemática é apresentado na Fig.(2.17).

Vamos realizar os lançamentos seguindo a mesma estrutura no ensemble usada para as fronteira com apenas um orifício, como foi estudado acima. Os resultados estatísticos podem ser vistos na Fig.(2.18), observamos que o comportamento de

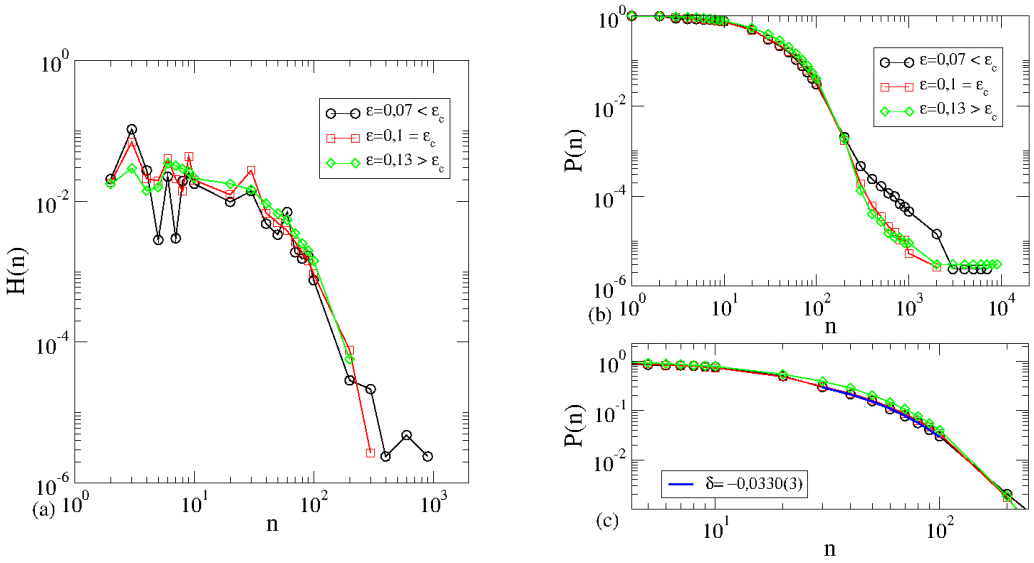


Figura 2.18: (a)Análise de H(n) por iterada; (b) A probabilidade de sobrevivência por iterada; (c) Ampliação da região do decaimento exponencial demonstrado nas curvas em (b).

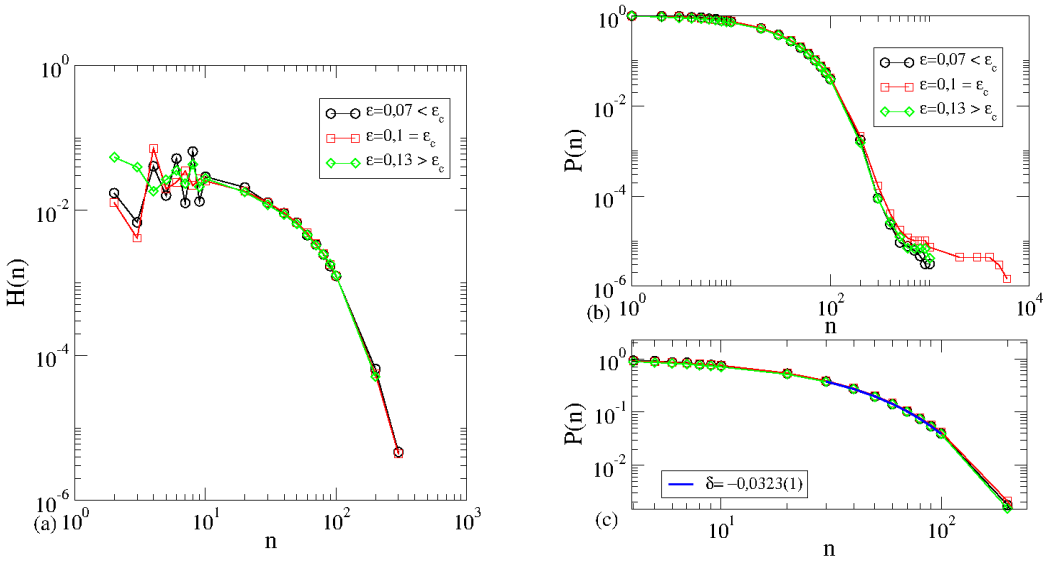


Figura 2.19: (a)Análise de H(n) por iterada; (b) A probabilidade de sobrevivência por iterada; (c) Ampliação da região do decaimento exponencial demonstrado nas curvas em (b).

H(n) na Fig.(2.18)(a) é semelhante ao observado nos demais resultados apresentados e que novamente a probabilidade P(n) na Fig.(2.18)(b) para os parâmetros $\epsilon = 0,07$ e $\epsilon = 0,13$ decaem até convergir para um platô. Esse fato pode ser explicado pelas mesmas razão citadas acima para os casos da fronteira com apenas uma buraco. Podemos utilizar um ajuste numérico expoencial pra descrever a decaimento das curvas de P(n), tal ajuste é mostrado na Fig.(2.18)(c).

Através do ajuste exponencial que fizemos numericamente, encontramos um valor de expoente dado por $\delta = -0,330(3)$, sendo em módulo, próximo da Eq.(2.51). Se fizermos agora o mesmo estudo para o caso dos dois orifícios na fronteira ∂Q como foi feito acima, porém, agora fazendo os lançamentos de partículas através do buraco h_2, vamos encontrar o mesmo comportamento do expoente δ encontrado acima, mostramos isso nas Fig.(2.19)(a-c).

A partir dos resultados obtidos numericamente acima, vimos que ao introduzir dois orifícios separados ao longo da fronteira do bilhar com extensão $h_1 = 0,1$ e $h_2 = 0,1$, encontramos como valor do expoente de decaimento de P(n) um resultado ao equivalente de substituir os dois orifícios por apenas um novamente, porém, com extensão $h = 0,2$. Esse resultado corrobora a proposta da Eq.(2.51), como era esperado.

Capítulo 3

Bilhar Ovóide com fronteira dependente do tempo

3.1 Resumo

Apresentaremos agora o bilhar ovóide com fronteira dependente do tempo. Vamos estudar todas as equações que nos levam ao mapeamento discreto quadrimensional e também obter as propriedades estatísticas da sobrevivência e escape para partículas injetadas através de um orífício introduzido na fronteira oscilante.

3.2 Modelo e mapeamento

Nesta seção, vamos estudar o caso do bilhar ovóide introduzindo uma perturbação na fronteira $\partial Q = \partial Q(t)$, tal que esta perturbação faz com que a fronteira oscile no tempo. Vimos que o raio da fronteira para o caso estático era dado pela Eq.(2.1) como sendo

$$R(\theta, \epsilon, p) = 1 + \epsilon \cos(p\theta).$$

Introduzindo uma perturbação temporal no parâmetro ϵ da forma $\epsilon \mapsto \epsilon[1 + a\cos(t)]$, onde a corresponde a amplitude de oscilação da fronteira, podemos ex-

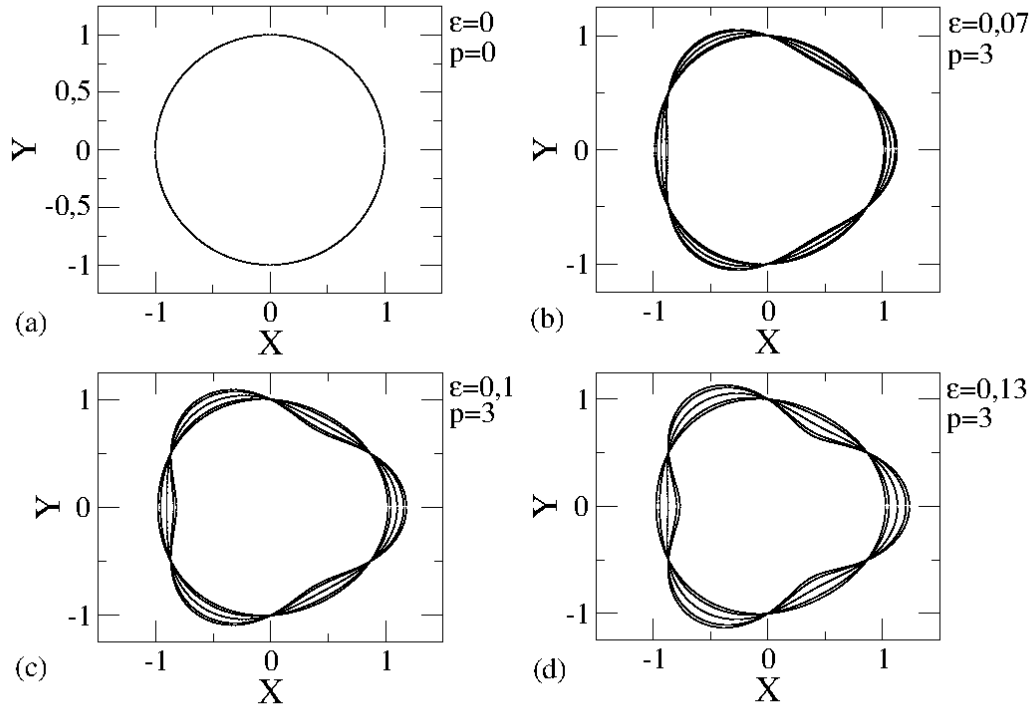


Figura 3.1: Esboço de algumas formas geométricas da fronteira, para $a = 0,8$: (a) $\epsilon = 0$ e $p = 0$; (b) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (d) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$. O eixo horizontal representa $X(\theta_n) = R_f(\theta, \epsilon, p, t)\cos(\theta_n)$ e vertical $Y(\theta_n) = R_f(\theta, \epsilon, p, t)\sin(\theta_n)$.

pressar o novo formato do raio da fronteira R_f como [30]

$$R_f(\theta, \epsilon, p, t) = 1 + \epsilon[1 + a\cos(t)]\cos(p\theta). \tag{3.1}$$

Podemos ver que para $\epsilon = 0$ recuperamos o formato do bilhar circular estático. Para $\epsilon \neq 0$ fazendo a amplitude de oscilação da fronteira como sendo igual a zero, recuperamos o formato do ovóide estático. A Fig.(3.1), monstra diversas geometrias da fronteira para diferentes configurações de parâmetros.

A introdução de perturbação temporal na fronteira acarreta na adição de duas novas variáveis dinâmicas no sistema, sendo elas a velocidade da partícula V e o tempo t. Desta forma, procuramos uma transformação Z, tal que, $Z(\theta_n, \alpha_n, V_n, t_n)$

$= Z(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}, V_{n+1}, t_{n+1})$.

Para descrever o modelo acima vamos assumir o mesmo tratamento feito para o caso estático, ou seja, θ_n como sendo a posição angular da partícula, α_n o ângulo que a trajetória da partícula faz em relação a um vetor tangente à fronteira com posição angular θ_n, como foi descrito com o auxílio da Fig.(2.2), V_n é a velocidade da partícula e t_n o instante da colisão n. Tendo essas informações podemos escrever as componentes cartesianas da posição da partícula em termos de coordenadas polares, como sendo

$$\begin{aligned} X(\theta_n, t_n) &= R_f(\theta_n, \epsilon, p, t_n)\cos(\theta_n) \\ &= [1 + \epsilon[1 + a\cos(t_n)]\cos(p\theta_n)]\cos(\theta_n), \qquad (3.2) \\ Y(\theta_n, t_n) &= R(\theta_n, \epsilon, p, t_n)\sin(\theta_n) \\ &= [1 + \epsilon[1 + a\cos(t_n)]\cos(p\theta_n)]\sin(\theta_n). \qquad (3.3) \end{aligned}$$

Após definir as posições angulares θ_n e α_n, podemos medir o ângulo feito no ponto de colisão da partícula com a fronteira, com a seguinte relação

$$\phi_n = \arctan\left[\frac{Y'(\theta_n, t_n)}{X'(\theta_n, t_n)}\right], \qquad (3.4)$$

onde $X'(\theta_n, t_n)$ e $Y'(\theta_n, t_n)$ são as derivadas em relação a θ_n, que podem ser expressas por

$$\begin{aligned} X'(\theta_n, t_n) &= \frac{dX(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} = \frac{dR_f(\theta_n, t_n)}{d\theta_n}\cos(\theta_n) - R_f(\theta_n, t_n)\sin(\theta_n), \qquad (3.5) \\ Y'(\theta_n, t_n) &= \frac{dY(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} = \frac{dR_f(\theta_n, t_n)}{d\theta_n}\sin(\theta_n) + R_f(\theta_n, t_n)\cos(\theta_n), \qquad (3.6) \end{aligned}$$

com

$$\frac{dR_f(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} = -\epsilon p[1 + a\cos(t)]\sin(p\theta_n). \qquad (3.7)$$

Como sabemos a posição angular de θ_n e o ângulo α_n, a inclinação da trajetória em relação ao eixo positivo X pode ser expressa por $\tan(\phi_n + \alpha_n)$. Assim o vetor

velocidade da partícula é dado por

$$\vec{V}_n = |\vec{V}_n|[\cos(\phi_n + \alpha_n)\hat{i} + \sin(\phi_n + \alpha_n)\hat{j}], \tag{3.8}$$

onde $\hat{i}$ e $\hat{j}$ são os versores dos eixos X e Y respectivamente. Como conhecemos a velocidade da partícula, podemos agora encontrar sua trajetória em termos de suas componentes, X_p e Y_p, sendo elas

$$X_p(t) = X(\theta_n) + |\vec{V}_n|\cos(\phi_n + \alpha_n)[t - t_n], \tag{3.9}$$

$$Y_p(t) = Y(\theta_n) + |\vec{V}_n|\sin(\phi_n + \alpha_n)[t - t_n]. \tag{3.10}$$

Podemos medir a distância da partícula em relação a origem do sistema, simplesmente através da relação

$$R_p = \sqrt{X_p^2(t) + Y_p^2(t)}. \tag{3.11}$$

Desta forma, vamos encontrar θ_{n+1}, quando a condição $R_f(\theta_{n+1}, t_{n+1}) = R_p(\theta_{n+1}, t_{n+1})$ for satisfeita. O procedimento para resolver essa equação é numérico, similar ao método de dinâmica molecular, com uma precisão de 10^{-12}.

Conhecendo θ_{n+1}, podemos encontrar uma expressão para descrever os tempos subsequentes da partícula para a próxima colisão, sendo ela dado por

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\sqrt{(\triangle X(\theta))^2 + (\triangle Y(\theta))^2}}{|\vec{V}_n|}, \tag{3.12}$$

onde

$$\triangle X(\theta) = X_p(\theta_{n+1}) - X_p(\theta_n),$$

$$\triangle Y(\theta) = Y_p(\theta_{n+1}) - Y_p(\theta_n).$$

Como através da Eq.(3.12) conhecemos o tempo t_{n+1}, podemos agora encontrar também a velocidade da fronteira no instante t_{n+1}, simplesmente fazendo as derivadas das Eq.(3.2) e Eq.(3.3), em relação a t_{n+1}. A equação para a velocidade

da fronteira é descrita como

$$\vec{V}_f(\theta_{n+1}, t_{n+1}) = \frac{dR_f(\theta_{n+1}, t_{n+1})}{dt_{n+1}}[\cos(\theta_{n+1})\hat{i} + \sin(\theta_{n+1})\hat{j}], \tag{3.13}$$

onde

$$\frac{dR_f(\theta_{n+1}, t_{n+1})}{dt_{n+1}} = -a\epsilon \sin(\theta_{n+1})\cos(p\theta_{n+1}). \tag{3.14}$$

Uma vez conhecido θ_{n+1}, podemos encontrar ϕ_{n+1}, basta utilizarmos a Eq.(3.4), porém, agora tomando o cuidado de avaliar a expressão na colisão $n+1$. Ao determinarmos a quantidade ϕ_{n+1}, o vetor tangente $\vec{T}$ e o vetor normal $\vec{N}$, alimentados com o valor de ϕ_{n+1}, são dados por

$$\vec{T}_{n+1} = \cos(\phi_{n+1})\hat{i} + \sin(\phi_{n+1})\hat{j}, \tag{3.15}$$

$$\vec{N}_{n+1} = -\sin(\phi_{n+1})\hat{i} + \cos(\phi_{n+1})\hat{j}. \tag{3.16}$$

Munidos destes dados, podemos encontrar as componentes normal e tangencial do vetor velocidade da partícula imediatamente antes da colisão na posição θ_{n+1}, desta forma, a componente tangencial do vetor velocidade é descrita como

$$\vec{V}_n \cdot \vec{T}_{n+1} = |\vec{V}_n|[\cos(\phi_n + \alpha_n)\cos(\phi_{n+1}) + \sin(\phi_n + \alpha_n)\sin(\phi_{n+1})], \tag{3.17}$$

e a componente normal da velocidade é dada por,

$$\vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} = |\vec{V}_n|[-\cos(\phi_n + \alpha_n)\sin(\phi_{n+1}) + \sin(\phi_n + \alpha_n)\cos(\phi_{n+1})]. \tag{3.18}$$

A partir da conservação do *momentum*, podemos, no instante da colisão, determinar a velocidade da partícula no referencial da fronteira, como sendo

$$\vec{V}'_n = \vec{V}_n - \vec{V}_f(t_{n+1}), \tag{3.19}$$

onde $\vec{V}_n$ é a velocidade da partícula antes da colisão, observada no referencial da fronteira e $\vec{V}_f(t_{n+1})$ é a velocidade da fronteira. Após ocorrer a colisão, a velocidade da partícula no referencial da fronteira, passa a ser

$$\vec{V}'_{n+1} = \vec{V}_{n+1} - \vec{V}_f(t_{n+1}). \tag{3.20}$$

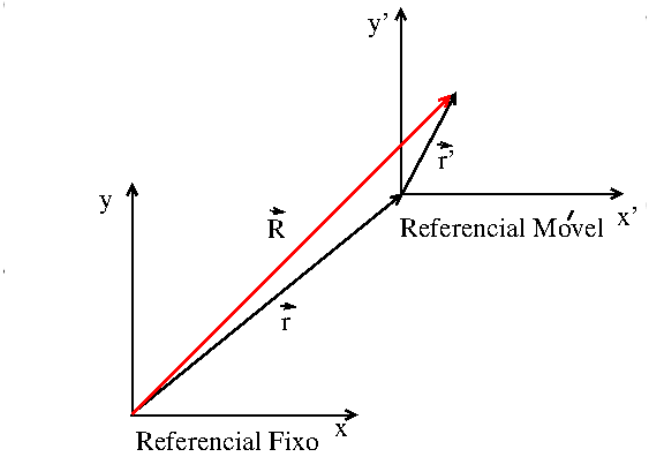


Figura 3.2: Ilustração esquemática sobre o referencial móvel e fixo.

No momento em que ocorre a colisão com a fronteira, segundo nossa formulação do problema, as seguintes condições devem ser satisfeitas

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \vec{V}'_{n} \cdot \vec{T}_{n+1}, \tag{3.21}$$

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\vec{V}'_{n} \cdot \vec{N}_{n+1}. \tag{3.22}$$

Essas são as leis de reflexão que adotamos nesse Capítulo. A partir da Eq.(3.21), podemos ver que a componente tangencial da velocidade não sofre alterações após a colisão, desta forma, voltando para o referencial inercial, encontramos novamente a Eq.(3.17). Entretanto, a componente normal da velocidade, observamos que ela não se conserva. A velocidade da partícula é obtida novamente recorrendo à conservação do *momentum* no referencial da fronteira móvel. A Fig.(3.2), mostra uma ilustração sobre os referenciais móvel e fixo.

Com o auxílio da Fig.(3.2), podemos tirar as seguintes conclusões

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}',$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{R}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}, \\
\frac{d\vec{r}'}{dt} &= \frac{d\vec{R}}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt}, \\
\vec{V}_p' &= \vec{V}_p - \vec{V}_f. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

onde $\vec{R}$ é definido como a posição da partícula medido no referencial fixo, $\vec{r}'$ é o vetor posição da partícula medido no referencial móvel e $\vec{r}$ é a distância entre os dois referenciais. As quantidades $\vec{V}_p$, $\vec{V}_p'$ e $\vec{V}_f$ são respectivamente a velocidade partícula no referencial fixo, a velocidade da partícula no referencial móvel e a velocidade da fronteira.

Vamos agora definir que após o choque, temos um $\vec{V}_{pc}' = -\vec{V}_p'$, desta forma

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{pc}' &= -[\vec{V}_p - \vec{V}_f], \qquad (3.24) \\
\vec{V}_{pc}' &= \vec{V}_f - \vec{V}_p. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Voltando agora para o referencial fixo

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{pc} &= \vec{V}_{pc}' + \vec{V}_f, \qquad (3.26) \\
\vec{V}_{pc} &= \vec{V}_f - \vec{V}_p + \vec{V}_f, \qquad (3.27) \\
\vec{V}_{pc} &= 2\vec{V}_f - \vec{V}_p. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Desta forma temos que a componente normal da velocidade, olhando no referencial de repouso é fornecida por

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} + 2\vec{V}_f \cdot \vec{N}_{n+1}, \qquad (3.29)$$

onde

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} &= |\vec{V}_n|[\cos(\phi_n + \alpha_n)\sin(\phi_{n+1}) - \sin(\phi_n + \alpha_n)\cos(\phi_{n+1})] + \\
&+ 2\vec{V}_f \cdot \vec{N}_{n+1}, \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\vec{V}_f \cdot \vec{N}_{n+1} = \frac{dR_f(\theta_{n+1}, t_{n+1})}{dt_{n+1}}[\cos(\theta_{n+1})\sin(\phi_{n+1}) + \sin(\theta_{n+1})\cos(\phi_{n+1})], \qquad (3.31)$$

sendo $dR_f(\theta_{n+1}, t_{n+1})/dt_{n+1}$ dado pela Eq.(3.14).

Tomando o módulo da velocidade após o choque, encontramos

$$\vec{V}_{n+1} = \sqrt{[\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}]^2 + [\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}]^2}, \tag{3.32}$$

sendo o ângulo de partícula, dado por

$$\alpha_{n+1} = \arctan\left[\frac{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}}{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}}\right]. \tag{3.33}$$

Após todo o tratamento discutido acima, conseguimos descrever o modelo do bilhar ovóide com fronteira dependente do tempo. Estamos aptos agora a discutir o comportamento e algumas de suas propriedades dinâmicas.

3.3 Propriedades estatísticas: Escape por um orifício

Nesta seção, vamos estudar as propriedades estatísticas de escape e sobrevivência de partículas injetadas por um orifício introduzido na fronteira do bilhar ovóide, porém, agora temos uma fronteira oscilante no tempo. O processo para introduzir o buraco na fronteira ∂Q do bilhar é semelhante ao visto no caso estático. Por simplicidade, nesta seção vamos manter a extensão do orifício como sendo $h = 0,1$ e considerar o buraco inicialmente disposto com a seguinte configuração: (i) o centro do buraco localizado em $\theta_{ct} = \pi/4$, (ii) o centro do buraco localizado em $\theta_{ct} = 3\pi/4$, e (iii) a fronteira contendo os dois buracos, sendo o centro do orifício h_1 localizado em $\theta_{ct} = \pi/4$ e o centro do orifício h_2 em $\theta_{ct} = 3\pi/4$.

Começando pelo caso (i), sempre tomando o cuidado para que não estejamos injetando partículas para fora do bilhar no primeiro lançamento, a Fig.(3.3) ilustra a dinâmica do caso (i) para os parâmetros indicados nas figuras. É interessante observar que a Fig.(3.3) apresenta as colisões com a fronteira, para diferentes tempos t, ou seja, para diferentes formas geométricas da fronteira. Vamos montar um ensemble de 10^6 condições iniciais, onde 10^3 θ_0 são uniformemente distribuídas sobre um $\theta_0 \in (0, h)$ enquanto 10^3 diferentes condições inciais de α_0 são dis-

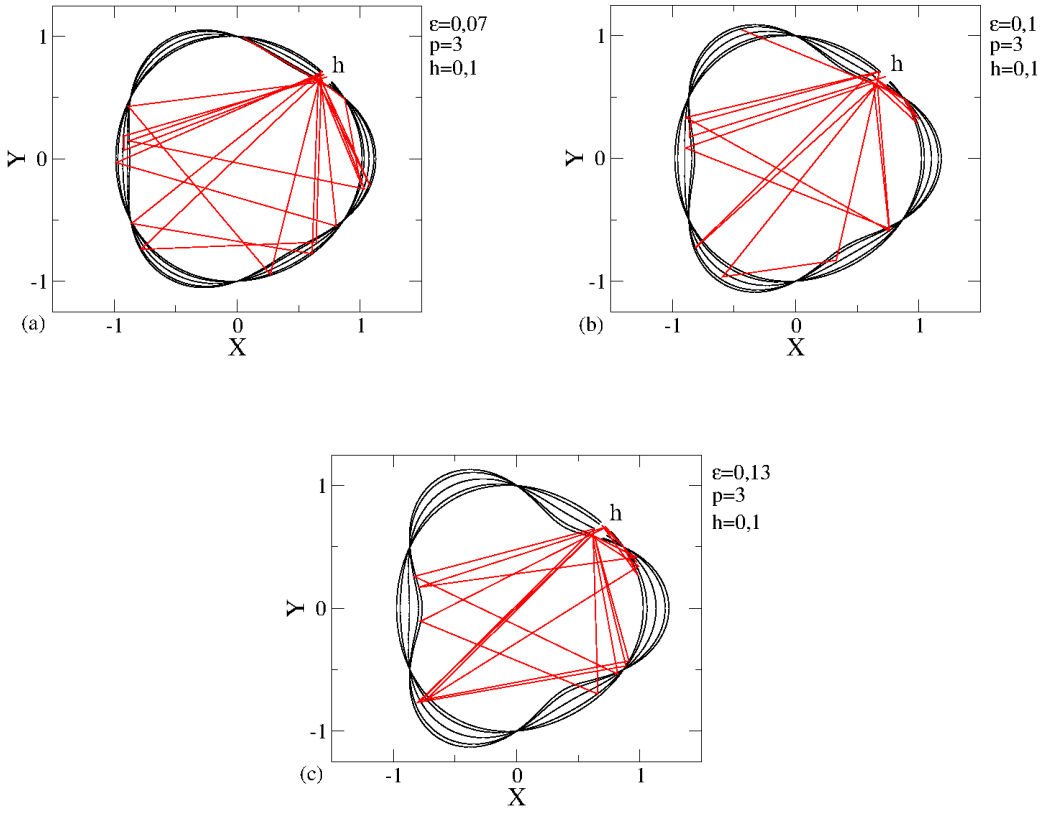


Figura 3.3: Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide através do orifício centrado em $\theta_{ct} = \pi/4$ para os parâmetro dados por (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$ com $V_0 = 0,1$ e $a = 0,8$.

tribuídas uniformemente por $\alpha_0 \in (0, \pi)$. Vamos também definir uma velocidade inicial V_0 para a injeção de cada condição inicial no bilhar e definir um valor para a amplitude de oscilação a da fronteira. Cada uma das condições iniciais é iterada por até 10^6 colisões com a fronteira, caso não ocorra o escape antes. Adotamos $a = 0,1$ e as velocidades iniciais são indicadas na legenda da figura.

Após efetuarmos as simulações propostas acima, podemos apresentar a frequência de escape H(n) por iterada e o comportamento da probabilidade de sobrevivência P(n) por iterada. Podemos ver que na Fig.(3.4), nos garante que não ocorre o escape de partículas na iterada 1.

Analisando agora as curvas de probabilidade P(n), para $\epsilon = 0,07$, observamos

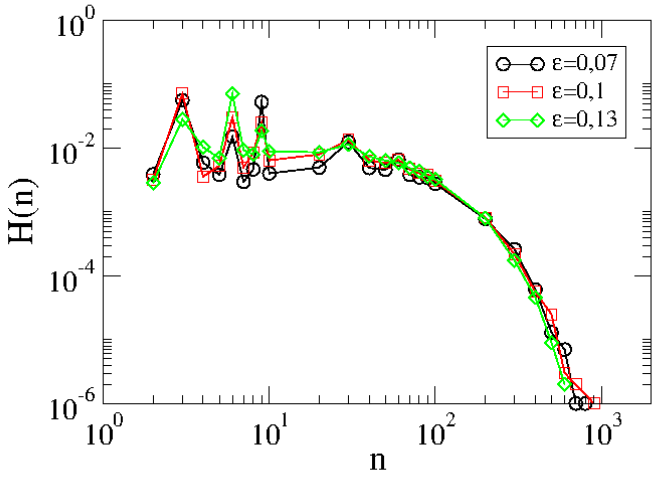


Figura 3.4: Análise do histograma de escape das partículas por iterada.

que para as velocidades iniciais $V_0 = 0,1$ e $V_0 = 10$, temos órbitas aprisionadas por algumas iteradas. Como foi discutido anteriormente, isso se deve à *stickiness*, conforme mostrado na Fig.(3.5)(a). Para $\epsilon = 0,1$, observamos comportamento semelhante para as três velocidades iniciais $V_0 = 0,1$, $V_0 = 1$ e $V_0 = 10$, conforme mostrado na Fig.(3.5)(c). Podemos ver que apenas a curva indicada pela cor preta, que corresponde a $V_0 = 0,1$ decai de forma mais lenta, comparada as demais. Por último, para $\epsilon = 0,13$, observamos que as curvas de P(n) decaem exponencialmente uma curva sobre a outra, como é demonstrado na Fig.(3.5)(e).

Fazendo agora uma análise quanto ao decaimento das curvas de P(n), podemos novamente observar que nossos resultados são bem representados através de um ajuste numérico exponencial. O expoente de decaimento é dado (aproximadamente) pela relação da Eq.(2.50). Ao estudar o valor do expoente de decaimento δ, para os três casos de $\epsilon = 0,07$, $\epsilon = 0,1$ e $\epsilon = 0,13$, encontramos um valor muito próximo ao proposto pela nossa Eq.(2.50). De fato o valor do expoente do decaimento δ é aproximadamente igual ao valor da extensão do orifício dividido pelo comprimento total da fronteira. Podemos comparar os valores dos ajustes numéricos indicados nas Fig.(3.5)(b), Fig.(3.5)(d) e Fig.(3.5)(f) com a relação da-

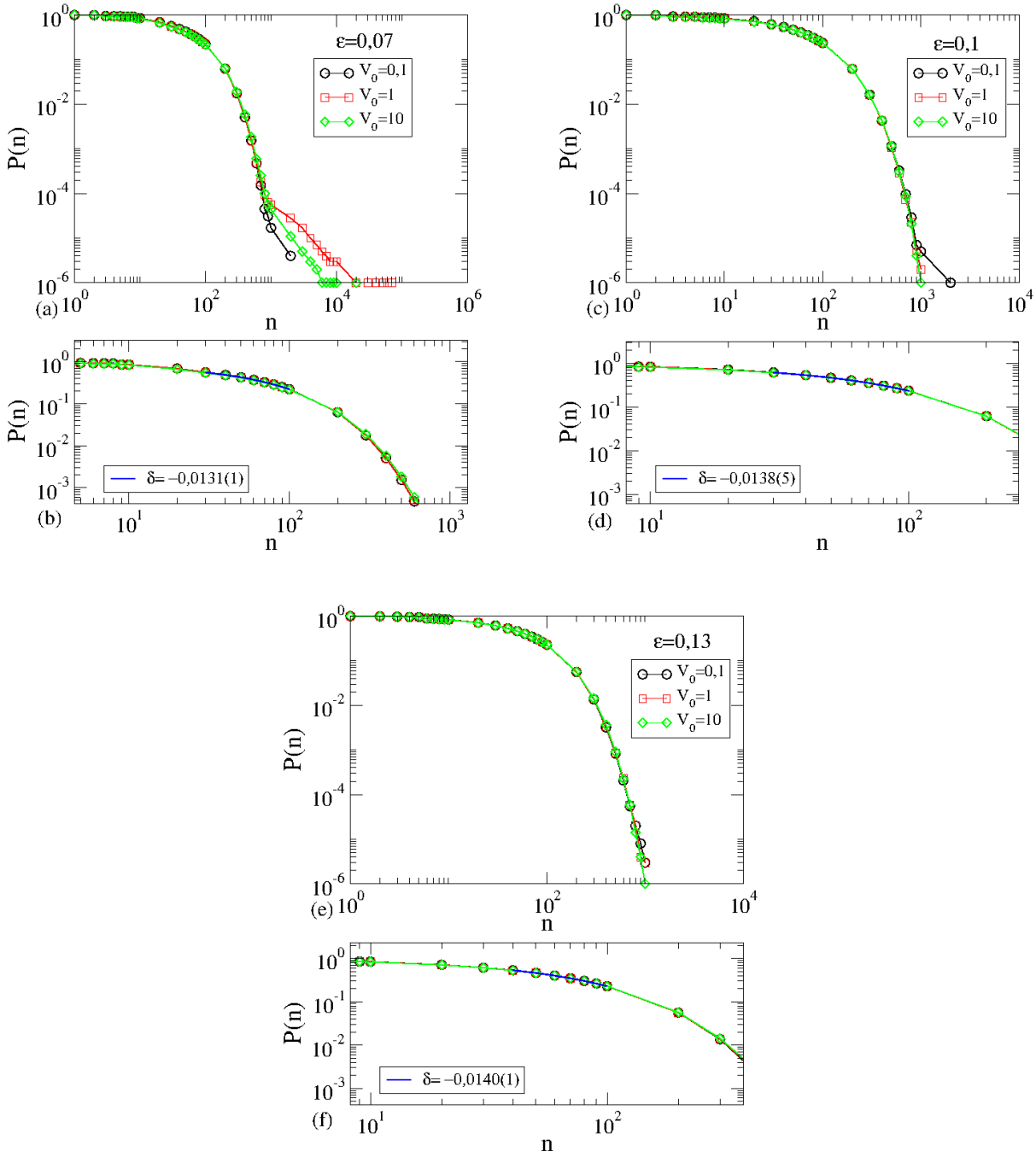


Figura 3.5: As figuras (a), (c) e (e) são as probabilidade de sobrevivência P(n) por iterada, para os parâmetros indicados. As figuras (b), (d) e (f) são apliações feitas nas curvas (a), (c) e (e) respectivamente.

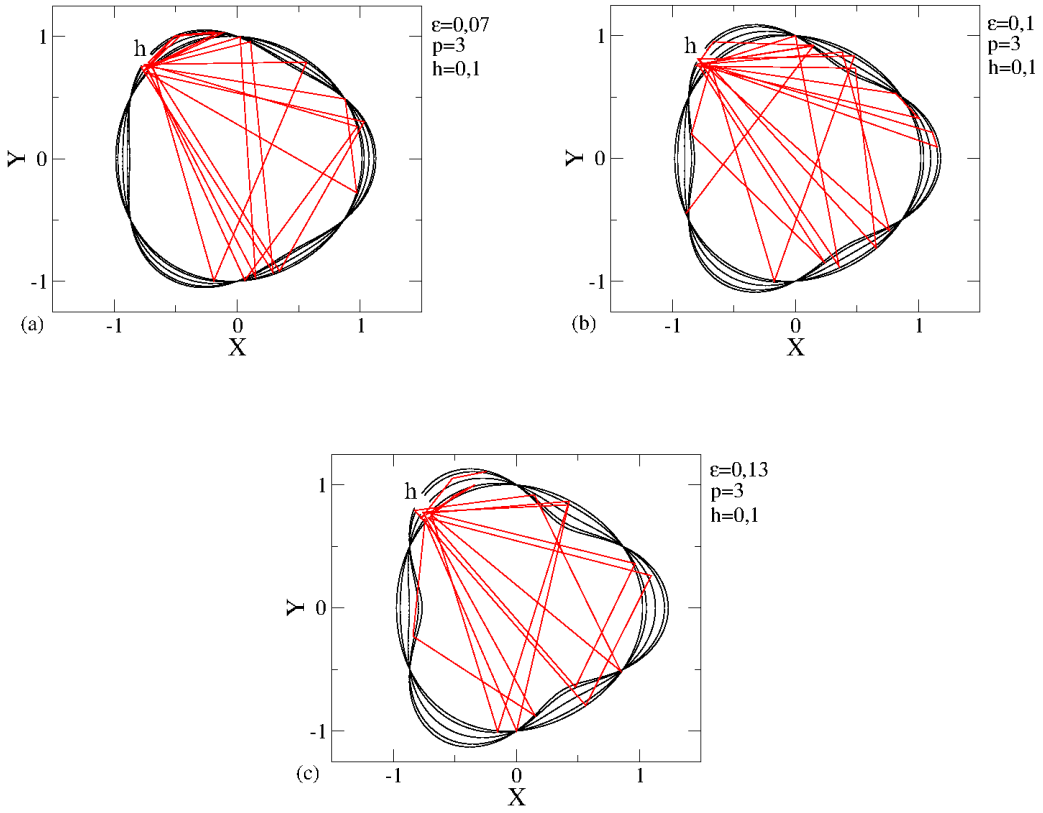


Figura 3.6: Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide através do orifício proposto no caso (i) para os parâmetro dados por (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$ com $V_0 = 0,1$ e $a = 0,8$.

do pela Eq.(2.50), onde o modelo apresenta valores próximos ao esperado. Partindo agora para o caso (ii), estudaremos o orifício centrado em $\theta_{ct} = 3\pi/4$. A ilustração sobre como os lançamentos das condições iniciais através do buraco, pode ser vista na Fig.(3.6).

O estudo sobre os resultados da frequência de escape H(n) por iterada e a probabilidade de sobrevivência P(n) por iterada são apresentados na Fig.(3.7) e Fig.(3.8) respectivamente.

Podemos ver que temos uma grande mudança no comportamento das probabilidades P(n). Notamos que para o caso em que $\epsilon = 0,07$ ocorre um decaimento muito rápido. A probabilidade P(n) independe do valor das velocidades iniciais

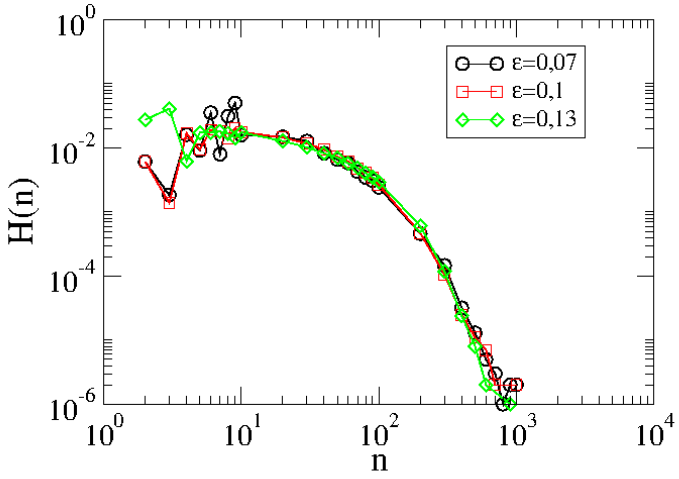


Figura 3.7: Análise do histograma de escape das partículas por iterada.

e decai a zero muito rapidamente, com um pouco mais de 100 iteradas. Para $\epsilon = 0,1$, temos um decaimento da probabilidade bem mais lento, se comparado com a Fig.(3.8)(a). Tomando agora o parâmetro $\epsilon = 0,13$, temos também um decaimento menos rápido comparado a $\epsilon = 0,07$. Vemos claramente que ambos os comportamento das probabilidades são muito semelhantes. Apenas a curva verde para $V_0 = 10$, gasta um tempo maior para escapar, quando comparada as demais.

Olhando paras as probabilidades P(n) indicadas na Fig.(3.8), podemos ver que é possível ajustar o decaimento da probabilidade de sobrevivência por um ajuste numérico exponencial. Estudando o valor dos expoentes de decaimento, indicados nas Fig.(3.8)(b), Fig.(3.8)(d) e Fig.(3.8)(f), temos um valor ligeiramente maior para os dois primeiros, quando comparado em relação ao esperado pela relação da Eq.(2.50). Para os expoentes encontrados em Fig.(3.8)(b), Fig.(3.8)(d), isso pode ser explicado pelo fato do decaimento mais rápido nas probabilidades. Para um decaimento rápido como este, deve-se observar um aumento no valor do seu expoente. Para Fig.(3.5)(f), podemos ver novamente um valor próximo ao esperado, fornecido pela relação da Eq.(2.50).

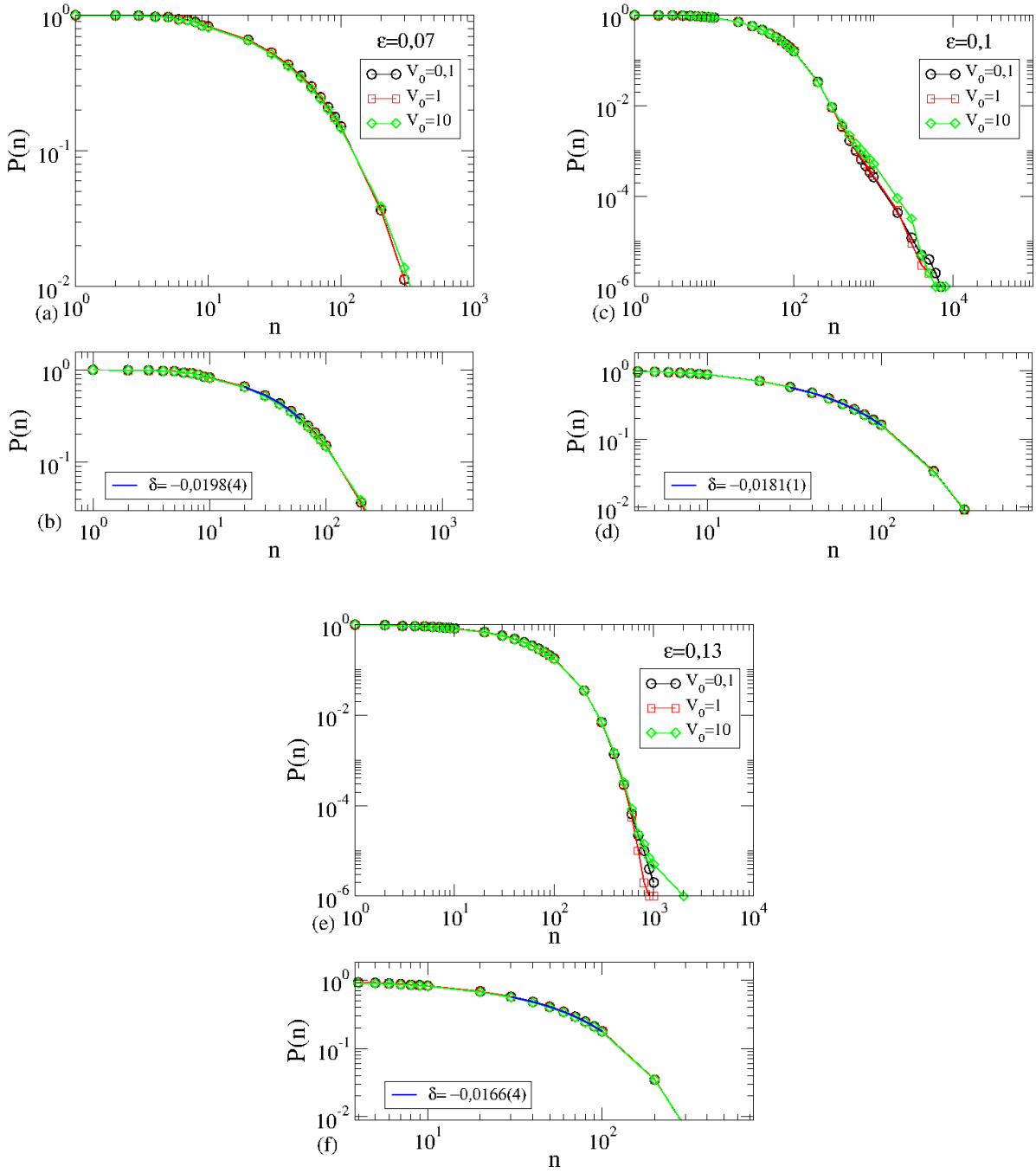


Figura 3.8: As figuras (a), (c) e (e) são as probabilidade de sobrevivência P(n) por iterada, para os parâmetros indicados. As figuras (b), (d) e (f) são apliações feitas nas curvas (a), (c) e (e) respectivamente.

3.4 Propriedades estatísticas: Escape por dois orifícios

Para o caso (iii), introduziremos dois orifícios na fronteira oscilante com o tempo $\partial Q(t)$, como explicamos no início deste Capítulo. O modo como vamos realizar nossas simulações é bem semelhante ao caso estático, quando introduzimos os dois buracos h_1 e h_2. Vamos apresentar aqui apenas os lançamentos de condições iniciais, através buraco h_1, centrado em $\theta_{ct} = \pi/4$. Os passos para se contruir o ensemble é o mesmo adotado acima, sempre tomando o cuidado para não iniciar o lançamento de partículas diretamente nos buracos h_1 ou h_2.

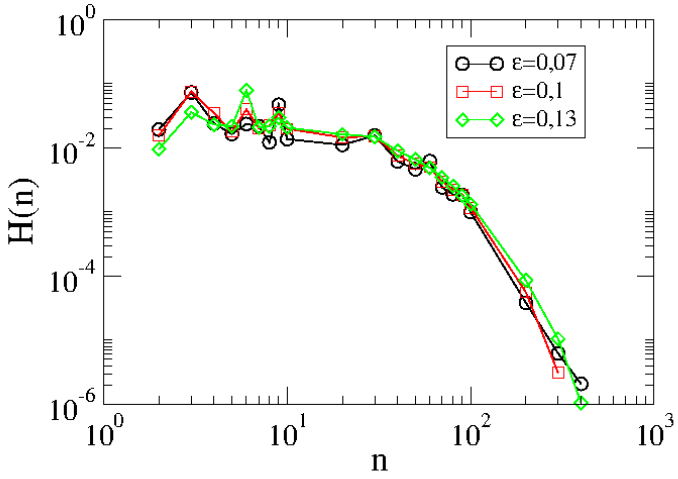


Figura 3.9: Análise do histograma de escape das partículas por iterada.

Os resultados referentes a frequência de escape H(n) das partículas por iterada, pode ser verificado na Fig.(3.9), podemos ver que a condição para que não ocorra escape na primeira iterada é obedecida, assim como para todos os caso que estudamos até agora.

As probabilidades de sobrevivência P(n) por iterada, são apresentadas na Fig.(3.10). Podemos observar que na Fig.(3.10)(a), em aproximadamente $n = 310$ as condições visitam regiões onde ficam presas por mais tempo, até decairem a

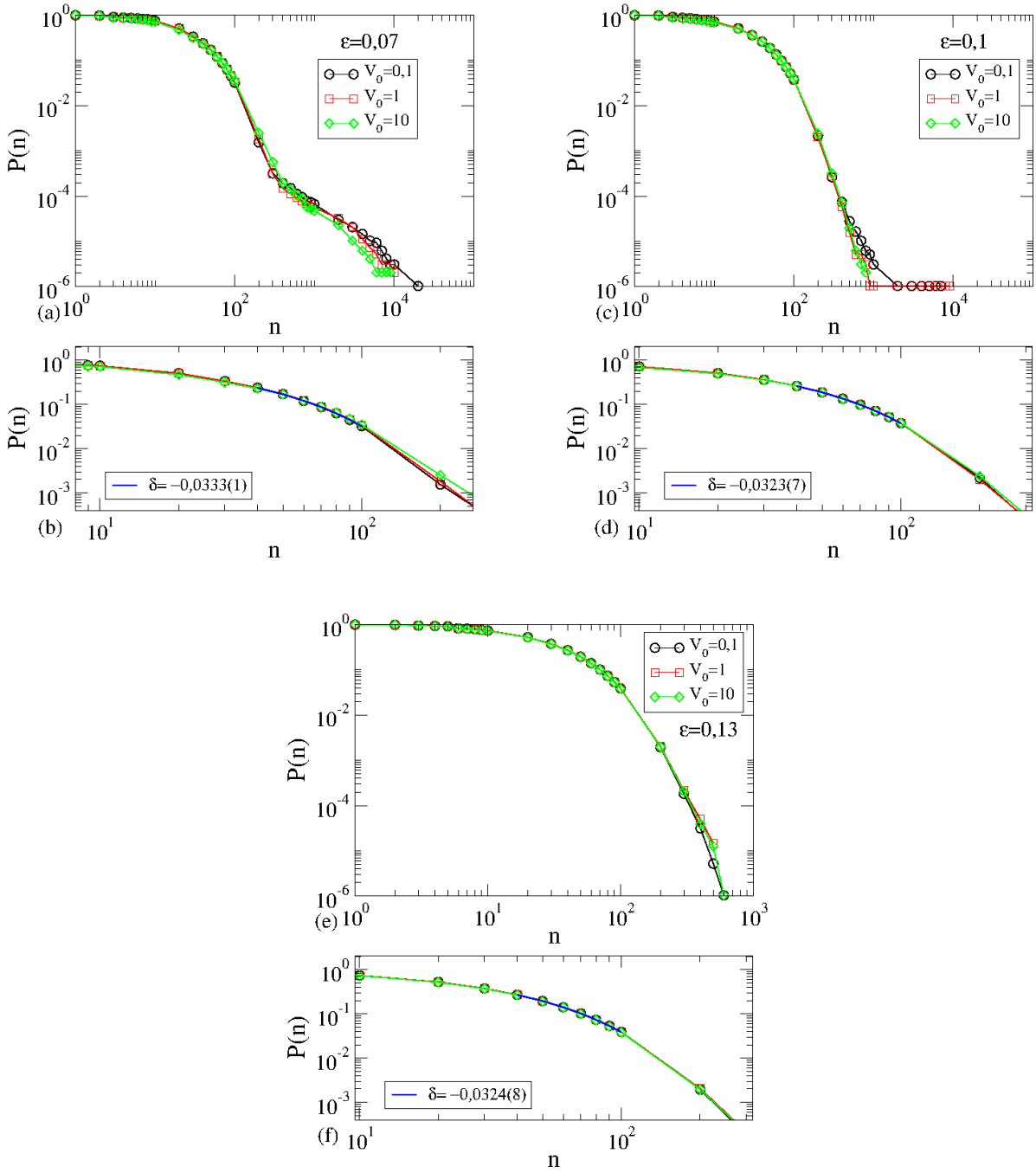


Figura 3.10: As figuras (a), (c) e (e) são as probabilidade de sobrevivência P(n) por iterada, para os parâmetros indicados. As figuras (b), (d) e (f) são apliações feitas nas curvas (a), (c) e (e) respectivamente.

zero. Olhando agora para a Fig.(3.10)(c) observamos que para as velocidades iniciais $V_0 = 0,1$ e $V_0 = 1$, temos algumas poucas órbitas que ficam presas durante um tempo maior, quando comparado a curva construída para $V_0 = 10$. Observando a Fig.(3.10)(e) podemos ver que o decaimento para as velocidades iniciais indicadas são paraticamente iguais. O comportamento não é idêntico apenas por poucas condições de $V_0 = 1$ e $V_0 = 10$ gastarem um pouco mais de tempo para decair, quando comparadas aos resultados de $V_0 = 0,1$.

Fazendo análise agora, para o decaimento das probabilidades, podemos ver que o ajuste numérico exponencial pode mais uma vez descrever bem nossas curvas, indicamos esses ajustes numéricos nas Fig.(3.10)(b), Fig.(3.10)(d) e Fig.(3.10)(f). Olhando para o valor dos ajustes, notamos que eles são bem próximos ao valor esperado, dado pela Eq.(2.51).

Capítulo 4

Conclusões e perspectivas

No presente trabalho, estudamos o bilhar ovóide inicialmente, com fronteira estática e posteriormente com uma perturbação temporal na fronteira. Para ambos os casos descrevemos detalhadamente o método para a obtenção do mapeamento discreto que descreve a evolução da dinâmica.

Para o caso da fronteira estática, construímos o espaço de fases através da iteração do mapa discreto. Observamos que o espaço de fases é misto. Dependendo da configuração dos parâmetros de controle escolhidos e condições iniciais, podemos observar ilhas de estabilidade, mar de caos que normalmente está envolvendo estas ilhas de estabilidade e também é possível encontrar curvas invariantes do tipo *spanning*. Estudamos o comportamento dos expoentes de Lyapunov para algumas configurações de parâmetros de controle e caracterizamos algumas órbitas caóticas no espaço de fases. Ainda no caso estático, fizemos estatísticas sobre sobrevivência e escape de partículas através de um orifício introduzido na fronteira do bilhar. Ao longo deste estudo definimos diversas posições para a localização do orifício e para todas essas configurações, observamos que o decaimento da probabilidade P(n) da sobrevivência de partículas por iterada é dado por um ajuste numérico exponencial, onde o valor do expoente é dado pela razão entre a extensão do orifício e o comprimento total da fronteira.

Ao introduzirmos a dependência temporal na fronteira do bilhar ovóide, duas novas variáveis dinâmicas surgem e o mapeamento que descreve a dinâmica é quadrimensional. Nesta configuração do bilhar, apresentamos novamente diversas

estatísticas envolvendo a sobrevivência e o escape de partículas através de um orifício colocado na fronteira do bilhar. Observamos que a probabilidade P(n) de sobrevivência das partículas, também pode ser descrita por um ajuste numérico exponencial, onde o expoente de decaimento é dado pela razão entre a extensão do orifício e o comprimento total da fronteira.

Como perspectivas, pretendemos dar prosseguimento ao estudo do bilhar ovóide, em particular, para o caso com dependência temporal. Esperamos evidenciar o fenômeno de Aceleração de Fermi [37], que consiste no crescimento ilimitado de energia de uma partícula sofrendo colisões do tipo elástica com uma parede ou fronteira com dependência temporal.

Referências

[1] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*, Appl. Math. Sci. **38**, Springer-Verlag, New York.(1992).

[2] G. D. Birkhoff, Dynamical Systems Amer. Math. Soc. Colloquim Publ. 9. Providence: American Mathematical Society. (1927).

[3] D.F.M. Oliveira, E.D. Leonel, On the dynamical properties of an elliptical-oval billiard with static boundary. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **15**, 1092 (2010).

[4] Ya. G. Sinai, Dynamical systems with elastic reflections. *Russ. Math. Surveys.*, **25**, 137 (1970).

[5] L. A. Bunimovich, On Ergodic Properties of Certain Billiards. *Funct. Anal. Appl.*, **8**, 254 (1974).

[6] L. A. Bunimovich, On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. *Commun. Math. Phys.*, **65**, 295 (1979).

[7] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatteres. *Commun. Math. Phy*, **78**, 479 (1981).

[8] Ya. G. Sinai, Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersive billiards. *Russ. Math. Surveys.*, **25**, 141 (1970).

[9] L. A. Bunimovich, Conditions of stochasticity of two-dimensional billiards. *Chaos.*, **1**, 187 (1991).

[10] R. Markarian, Ergodic properties of plane billiards with symmetric potencials. *Nonlinearity.*, **6**, 819 (1993).

[11] M. Robnik, Classical dynamics of a family of billiards with analytic boundaries. *J. Phys. A.*, **16**, 3971 (1983).

[12] M. Henon, J. Wisdom, The Benettin-Strelcyn oval billiard revisited. *Physica D.*, **8**, 157 (1983).

[13] L. G. Akinshin, A. Loskutov, Dynamical properties of some two-dimensional billiards with perturbed boundaries. *Physical Ideas of Russia*, **2**, 67 (1997).

[14] L. G. Akinshin, K. A. Vasiliev, A. Loskutov, A. B. Ryabov, Dynamical of billiards with perturbed boundaries and the problem of Fermi acceleration. *Physical Ideas of Russia*, **2**, 87 (1997).

[15] A. Loskutov, A. B. Ryabov, L. G. Akinshin, Mechanism of Fermi acceleration in dispersing billiards with perturbed boundaries. *J. Exp. and Theor. Physics*, **89**, 966 (1999).

[16] A. Loskutov, A. B. Ryabov, L. G. Akinshin, Properties of some chaotic billiards with time-dependet boundaries. *J. Physics A*, **33**, 7973 (2000).

[17] A. Loskutov, A. B. Ryabov, Chaotic time-dependent billiards. *Int. J. of Comp. Anticipatory Syst.*, **8**, 336 (2001).

[18] A. Loskutov, A. B. Ryabov, A. N. Sobolevsky, Dynamics of billiards with periodically time-dependent boundaries. *Applied Nonlin. Dynamics.*, **9**, 50 (2001).

[19] A. Loskutov, A. B. Ryabov, Particle dynamical in time-dependent stadium-like billiard. *J. Stat. Phys.*, **108**, 995 (2002).

[20] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, R. H. Cohen, Fermi acceleration revisited. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **1**, 291 (1980).

[21] M. A. Lieberman, K. Y. Tsang, Transient Chaos in Dissipatively Perturbed, Near-Integrable Hamiltonian Systems. *Phys. Rev. Lett*, **55**, 908 (1985).

[22] D. G. Ladeira, J. K. L. da Silva, Time-dependent properties of a simplified Fermi-Ulam accelerator model. *Phys. Rev. E*, **73**, 1 (2006).

[23] C. Nikolai, R. Markarian, Chaotic Billiards, *American Mathematical Society*, (2006).

[24] D. R. da Costa, C. P. Dettmann, E. D. Leonel, Circular, elliptic and oval billiards in a gravitational field. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat*, **22**, 731 (2014).

[25] D. F. M. Oliveira, J. Vollmer, E. D. Leonel, Fermi acceleration and its suppression in a time-dependent Lorentz gas *Physica D*, **240**, 389 (2011).

[26] M. Robnik, M. V. Berry, Classical Billiards in magnetic fields *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18**, 1361 (1985).

[27] R. Markarian, S. O. Kamphorst, S. P. de Carvalho, Chaotic properties of the elliptical stadium *Commun. Math. Phys.*, **174**, 661 (1996).

[28] V. Lopac, I. Mrkonjić, D. Radić, Chaotic dynamics and orbit stability in the parabolic oval billiard *Phys. Rev. E*, **66**, 1 (2002).

[29] V. Lopac, I. Mrkonjić, N. Pavin, D. Radić, Chaotic dynamics of the elliptical stadium billiard in the full parameter space *Physica D*, **217**, 88 (2006).

[30] E. D. Leonel, C. P. Dettmann, Recurrence of particles in static and time varying oval billiards. *Phys. Lett. A.*, **376**, 1669 (2012).

[31] N. Ferrara, C. do Prado, Caos uma introdução, *Edgard Blucher* , **1ED**, (1995).

[32] S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, *Westview Press* , **1ED**, (2001).

[33] D.F.M. Oliveira, Bilhares Dependentes do Tempo: Um Mecanismo para Suprimir Aceleração de Fermi, (2009)

[34] R. A. Bizão, Dissipação via arrasto viscoso como mecanismo de supressão da aceleração de Fermi o bilhar elíptico-ovóide com fronteira dependente do tempo, (2013).

[35] J.-P. Eckmann, D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 617 (1985).

[36] P. Boulos, I. de Camargo, Geometria analítica, um tratamento vetorial, *Pearson Education*, **2ED**, (2003)

[37] E. Fermi, On the origins of the cosmic Radiation, *Phy. Rev.*, **75**, 1169 (1949).