

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/00

OK

Equações de Schwinger-Dyson e Quebra Dinâmica de Simetrias

Arlene Cristina Aguilar

Orientador

Prof. Dr. Adriano A. Natale



Fevereiro de 2000

Agradecimentos

Estou em débito com muitos amigos e professores que durante anos foram fonte de inspiração e encorajamento. Todos de uma forma ou outra contribuíram muito para a minha formação.

Sou grata ao meu orientador, Adriano, pela ajuda inestimável e fundamental para o desenvolvimento deste trabalho através de discussões, comentários e conselhos que sempre foram dados com muita atenção e bom humor.

Agradeço ao professor Rogério Rosenfeld por suas sugestões durante as reuniões de grupo.

Gostaria também de agradecer ao apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp).

Para ajudar a construção e a escrita dessa dissertação muitos amigos participaram e sou especialmente grata ao Emerson e Mickel pelas várias discussões que permitiram compreender e aprender vários tópicos, a eles também devo várias correções e dicas feitas nesta tese, valeu!

Sou também grata ao meu ilustríssimo amigo Marcel, o Bacharel, pelas incontáveis ajudas e pelo carinho, também gostaria de agradecer ao Marcos de coração (já que ele é o discípulo mais fiel do Gauchito) pelo incentivo e dedicação e ao Victo, o eterno sofredor, pelos vários socorros prestados durante esses dois anos aqui no IFT, vê se muda de time, rapaz! Com o Santos e Guarani você não vai chegar em lugar algum!

Mesmo tendo certeza que é inevitável deixar de mencionar vários amigos que foram e são extremamente importantes para a minha vida, devido a falta de espaço, não posso deixar de lembrar do Brenno Vallilo, Cristiane Roldão, José Varalda, Leonardo Maia, Lúcio C. Costa e Ricardo Bentin.

Agradeço, em especial, ao meu namorado Alexandre pelo carinho, compreensão e paciência durante esses últimos anos de convívio.

E para finalizar sou extremamente grata pelo apoio e amor da minha mãe, Neide, e de minhas irmãzinhas Andréa, Adriana e do meu pequenino irmão José.

Resumo

Calculamos a constante de acoplamento crítica para a quebra dinâmica de simetria quirial em alguns modelos da QCD, onde a forma do propagador do glúon na região infravermelha é descrita por “ansatze” baseados na função δ de Dirac.

Aplicando a teoria de bifurcação para a equação de Schwinger-Dyson truncada do propagador do quark, mostramos que a quebra dinâmica de simetria nesses modelos ocorre sempre para uma constante de acoplamento menor do que a determinada em várias análises da QCD.

Palavras Chaves: Equações de Schwinger-Dyson; Quebra dinâmica de simetria quirial; Cromodinâmica quântica; Global Color model.

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos, Fenomenologia de Partículas Elementares.

Abstract

Índice

We compute the critical coupling constant for the dynamical chiral symmetry breaking in some QCD models, where the gluon propagator form in the infrared region is described by ansätze inspired in the δ Dirac function.

1	Introdução	1
	Aplicando bifurcação teoria a um truncado Schwinger-Dyson equation for the quark propagator, we show that dynamical symmetry breaking in these models occurs always for a coupling constant smaller than the one determined in some QCD analysis.	
	Auto-energia do Elétron	5
1.1.2	Propagador Completo do Fóton	7
1.1.3	Vértice	9
1.1.4	Equações Integrais para a Auto-Energia	9
1.2	Equações de Schwinger-Dyson para QCD	11
1.2.1	Introdução	11
3	Simetria Quiral e Mecanismos de Quebra	13
3.1	Formalismo Básico	13
3.2	Simetria Quiral Aproximada em QCD	17
3.3	Quebra de Simetria	18
3.3.1	Quebra Dinâmica e o Modelo de Nambu e Jona-Lasinio	19
3.4	Quebra Dinâmica de Simetria Quiral na QCD	23
3.4.1	Acoplamento Crítico para a Quebra Dinâmica da Simetria Quiral	24
3.4.2	Correção Infravermelha	27
3.4.3	Correção Ultravioleta	28
4	"Global Color Model"	31
4.1	Da QCD ao Global Color Model	32
4.2	Propagadores Vetoriais do Quark e Gluon	33

Índice

1	Introdução	1
2	Equações de Schwinger-Dyson	4
2.1	Formalismo das Equações de Schwinger-Dyson	5
2.1.1	Auto-Energia do Elétron	5
2.1.2	Propagador Completo do Fóton	7
2.1.3	Vértice	9
2.1.4	Equações Integrais para a Auto-Energia	9
2.2	Equações de Schwinger-Dyson para QCD	11
2.2.1	Aproximação “Rainbow”	11
3	Simetria Quiral e Mecanismos de Quebra	13
3.1	Formalismo Básico	13
3.2	Simetria Quiral Aproximada em QCD	17
3.3	Quebra de Simetria	18
3.3.1	Quebra Dinâmica e o Modelo de Nambu e Jona-Lasinio	19
3.4	Quebra Dinâmica de Simetria Quiral na QCD	23
3.4.1	Acoplamento Crítico para a Quebra Dinâmica da Simetria Quiral	24
3.4.2	Corte Infravermelho	27
3.4.3	Corte Ultravioleta	28
4	“Global Color Model”	31
4.1	Da QCD ao Global Color Model	32
4.2	Propagadores Vestidos do Quark e Glúon	34

4.2.1	Comportamento Assintótico da QCD	34
4.2.2	Modelos Confinantes	37
5	Bifurcação da Auto-Energia dos Quarks	40
5.1	Quebra de Simetria para Modelos Confinantes	41
5.2	Um Modelo Gaussiano para a Região Infravermelha	45
6	Conclusões	49
A	Notações e Convenções	52
A.1	Unidades	52
A.2	Quadrivetores	52
A.3	Matrizes de Dirac	53
A.4	Propriedades do Traço e Identidades envolvendo γ	55
B	A Função Hipergeométrica $F(a, b; c; x)$	56
	Referências	57

Capítulo 1

Introdução

A candidata mais natural para a descrição de interações fortes, que é uma teoria de gauge não-abeliana, é conhecida como Cromodinâmica Quântica [QCD], uma vez que ela apresenta propriedades importantes para a descrição desta interação, tais como a liberdade assintótica e o fato de ser um modelo renormalizável.

Entretanto a maior dificuldade no estudo da QCD está no fato de que para a região de baixas energias a constante de acoplamento é grande e a teoria de perturbação não pode ser aplicada. No entanto, acredita-se que os fenômenos mais interessantes da física hadrônica ocorrem neste regime não-perturbativo, um exemplo é o confinamento, e outro, a quebra de simetria quiral, que é responsável pela geração de massa para os hádrons. Logo, para investigar a física hadrônica da perspectiva da QCD, é necessário desenvolver métodos de cálculos não-perturbativos.

Dentre as poucas abordagens possíveis, vamos destacar as equações de Schwinger-Dyson [ESD] que se tornou uma ferramenta importante para o estudo de quebra dinâmica de simetria quiral [QDSQ].

Na física de partículas, muitos modelos são propostos para entender a quebra de simetria quiral. Um destes modelos, que possui a vantagem de não introduzir partículas que ainda não foram observadas, propõe que o estado fundamental (vácuo) seja rearranjado dinamicamente pela interação do campo.

A primeira teoria física na qual a quebra dinâmica de simetria foi encontrada, foi a teoria de Bardeen-Cooper-Schrieffer [BCS] para a supercondutividade, onde o rearranjo dinâmico do estado fundamental resulta no emparelhamento dos férmions.

Nambu foi o responsável por trazer esse mecanismo à física de partículas, interpretando o emparelhamento dos férmions como geração da massa, ele juntamente com Jona-Lasinio construíram o primeiro modelo em teoria de campos quânticos, no qual a QDSQ tem um papel fundamental, e até hoje esse modelo é tido como referência.

A idéia de que os quarks obtêm massa através do mecanismo de QDSQ vem sendo estudada com freqüência, e uma das técnicas mais comumente empregada para analisar a geração dinâmica de massa é olhar as soluções da ESD do propagador fermiônico para ver se detectamos bifurcações de soluções triviais para as não-triviais em um determinado valor crítico da constante de acoplamento, ou seja, estamos procurando uma transição de uma fase simétrica (que possui simetria quiral) para um outro estado, onde a simetria quiral foi quebrada dinamicamente.

Nessas análises que utilizam a ESD para o quark, o propagador do glúon desempenha um papel fundamental, e estudos em paralelo têm sido feitos, no sentido de obter um modelo que descreva o comportamento não-perturbativo do propagador do glúon, e dentre eles destacamos o “Global Color Model” [GCM].

O GCM supõe para toda a região de momentos, propagadores efetivos e confiáveis para o glúon, sendo que um destes é descrito, na região infravermelha, por uma função delta $\delta^4(p)$, onde existem cálculos recentes de observáveis hadrônicos exemplificando o sucesso deste procedimento.

No caso do propagador do glúon possuir apenas o termo na forma da delta descrita acima, a quebra de simetria quiral ocorre para qualquer valor da constante de acoplamento. Entretanto, no caso da QCD, a auto-energia fermiônica apresenta um solução que quebra a simetria quiral para uma constante de acoplamento que é $O(1)$.

Então, o intuito deste trabalho, é verificar se existe ou não um valor crítico para a constante de acoplamento onde a simetria quiral é quebrada, quando supomos que para a região infravermelha, o propagador do glúon é descrito dentro do GCM e além disso acrescentamos um termo previsto pela QCD, para descrever a região ultravioleta.

Para isso, veremos no capítulo 2, uma introdução ao formalismo das ESD, começando com uma discussão para teorias de gauge abelianas, mais especificamente para a Eletrodinâmica Quântica [QED], e logo após, de uma maneira simples, estenderemos nossas discussões para QCD.

No capítulo 3 será vista uma introdução á simetria quiral e a mecanismos de quebra, onde nos concentraremos em QDSQ, que será introduzida a partir do modelo de Nambu e Jona-Lasinio e logo após teremos um exemplo de como a ESD para o quark pode ser utilizada em seu estudo.

Em seguida, no capítulo 4, daremos uma breve introdução ao GCM, apresentando e discutindo sua lagrangiana e seus aspectos fundamentais. E, no capítulo 5, examinaremos a possibilidade da existência de uma constante de acoplamento crítica para QDSQ, onde o glúon tem seu propagador descrito na região infravermelha pelo GCM e a parte ultravioleta descrita pela QCD.

Para finalizar, no capítulo 6, faremos uma análise detalhada dos resultados obtidos.

2.1 Formalismo das Equações de Schwinger-Dyson

Capítulo 2

Equações de Schwinger-Dyson

Para estudarmos as propriedades dos sistemas hadrônicos é necessário utilizar métodos não-perturbativos, já que precisamos conectar os fenômenos de altas energias, que são tratados perturbativamente utilizando QCD, com os de baixas energias, que devem ser abordados de uma maneira não-perturbativa.

Uma das possíveis maneiras de estudar os fenômenos não-perturbativos é através de simulações de Teoria de Gauge numa rede, que se valem de uma abordagem discreta de QCD. Esse método vem apresentando resultados relevantes para o estudo das propriedades hadrônicas à medida em que novos algoritmos e técnicas computacionais são implantados [1]. No entanto, algumas dificuldades surgem quando fazemos o limite da rede para um espaço-tempo contínuo. Desta maneira, torna-se importante desenvolver em paralelo uma abordagem contínua para o estudo destes fenômenos, o que pode ser feito utilizando uma torre infinita de equações, conhecida como Equações de Schwinger-Dyson [ESD].

As ESD são um conjunto de equações integrais acopladas, que relacionam todas as funções de Green da teoria. Se fossemos capazes de resolvê-las sem aproximações, poderíamos determinar todas as funções de Green de n -pontos, e assim, teríamos uma teoria completamente definida para estados não-ligados.

Vários estudos de quebra de simetria quiral utilizam as ESD, como por exemplos as Ref. [2]-[8]. Será útil então, para o desenvolvimento das seções seguintes, darmos uma introdução ao seu formalismo.

2.1 Formalismo das Equações de Schwinger-Dyson

Nesta seção, desenvolveremos uma introdução às ESD, baseada no estudo apresentado por Bjorken e Drell [9], para teorias de gauge abelianas, onde nossas considerações se restringem ao elétron e ao fóton, ou seja, a QED.

2.1.1 Auto-Energia do Elétron

Da teoria de perturbação, sabemos que a função de dois pontos do elétron é dada por

$$iS'_F(x - x') = \langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(x'))|0\rangle, \tag{2.1}$$

onde S'_F é o propagador completo do férmion* que pode ser representado pela soma dos diagramas da Fig.[2.1].



Fig.[2.1] Termos da expansão do propagador completo do elétron.

O primeiro diagrama da Fig.[2.1] é o propagador do campo livre a nível de árvore e o gráfico logo em seguida é a segunda ordem de perturbação conhecida como auto-energia do elétron, que é discutido em vários livros textos, como por exemplo [9] e [10].

Para obter uma expressão para o propagador completo do elétron, que está representado na Fig.[2.2], precisamos introduzir uma série de nomenclaturas necessárias para classificar e analisar os gráficos de Feynman.



Fig.[2.2] Propagador completo do elétron.

*Neste capítulo, por questões de conveniência, vamos utilizar a notação ' nos propagadores completos, para diferenciar dos propagadores a nível de árvore, mas a partir do capítulo 3 essa notação será abandonada.

Vamos iniciar pela definição dos gráficos conexos que compõem a parte oval em branco da Fig.[2.2]. Os gráficos conexos, são aqueles que não possuem nenhuma parte ou subgráficos que não estejam conectados de alguma maneira com as linhas externas que estão entrando em x' ou saindo em x .

Os gráficos conexos que fazem parte da expansão do propagador completo S'_F , podem ser divididos em duas categorias: os próprios que são os diagramas que não podem ser separados em dois, através da remoção de uma linha de férmion; e os impróprios que são aqueles que se transformam em dois gráficos através de um corte na linha de férmion. Para ilustrar, mostramos na Fig.[2.3] alguns exemplos de gráficos próprios e impróprios.

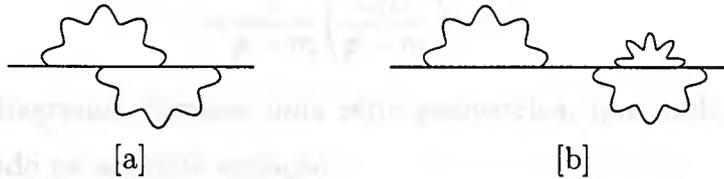


Fig.[2.3] Exemplos de gráficos: [a] próprio; [b] impróprio.

A soma de todos os gráficos próprios e conexos será denotada por $i\Sigma(p)$. Essa soma é conhecida como a auto-energia própria do elétron, podendo ser representada pictoricamente como mostra a Fig.[2.4].

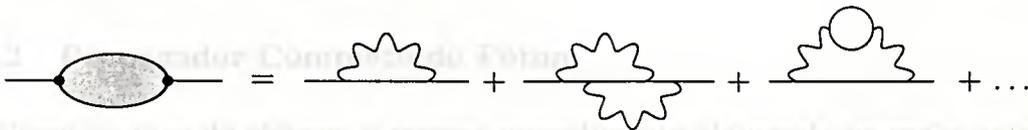


Fig.[2.4] Auto-energia própria: Soma de todos os gráficos conexos e próprios.

Embora todos os gráficos que pertencem à soma de $i\Sigma(p)$ possuam duas linhas externas de férmions, os propagadores de Feynman para essas linhas não são incluídos na definição de $\Sigma(p)$.

Então podemos dizer que o propagador completo do elétron é uma soma de uma série de auto-energias próprias, representada na Fig.[2.5], e escrita como

$$iS'_F(p) = iS_F(p) + iS_F(p)[-i\Sigma(p)]iS_F(p) + iS_F(p)[-i\Sigma(p)]iS_F(p)[-i\Sigma(p)]iS_F(p) + \dots, \quad (2.2)$$

$$iS'_F = iS_F + iS_F[-i\Sigma]iS_F + iS_F[-i\Sigma]iS_F[-i\Sigma]iS_F + \dots$$

Fig.[2.5] Representação esquemática da série do propagador completo do elétron.

onde $S_F(p)$ é o propagador do elétron a nível de árvore expresso por:

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m}. \tag{2.3}$$

Assim das equações (2.2) e (2.3) obtemos:

$$iS'_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} \left(\frac{\Sigma(p)}{\not{p} - m} \right) + \frac{i}{\not{p} - m} \left(\frac{\Sigma(p)}{\not{p} - m} \right)^2 + \dots \tag{2.4}$$

logo, a soma dos diagramas formam uma série geométrica, que pode ser somada facilmente, resultando na seguinte equação:

$$iS'_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)}. \tag{2.5}$$

A nível de árvore podemos notar que o propagador do elétron possui um polo simples em $p^2 = m^2$, já no caso do propagador completo $S'_F(p)$, o polo foi deslocado de m por uma quantidade $\Sigma(p)$.

2.1.2 Propagador Completo do Fóton

Como no caso do elétron, o mesmo procedimento elaborado na seção anterior é válido para o fóton. Começamos novamente pela expansão dos termos que fazem parte da função de dois pontos

$$iD'^{\mu\nu}(x - x') = \langle 0|T(A^\mu(x)A^\nu(x'))|0\rangle + \text{termos de gauge e Coulomb}, \tag{2.6}$$

onde o propagador completo $D'^{\mu\nu}(x - x')$ é a soma que inclui todos os gráficos que possuam duas pernas externas de fóton e que são conexos. Um dos termos que contribuem para essa soma está representado na Fig.[2.6] e é conhecido como o diagrama de polarização do vácuo.



Fig.[2.6] Polarização do vácuo: Termo de segunda ordem de perturbação.

A soma de todos os gráficos próprios, que nesse caso são somente aqueles diagramas que não podem ser separados pela remoção de uma linha de fóton, e cujas duas pernas externas de fótons foram removidas, estão pictoricamente representados na parte oval, em cinza, da Fig.[2.7] e são definidos como a auto-energia própria do fóton ou tensor de polarização do vácuo $\Pi^{\mu\nu}$.



Fig.[2.7] Tensor de polarização do vácuo.

Utilizando essa definição e lembrando que o propagador do fóton no gauge de Feynman é dado por

$$D_F^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2}, \tag{2.7}$$

podemos escrever e esquematizar, Fig.[2.8], a função exata de dois pontos para o fóton como:

$$iD'_F{}^{\mu\nu} = iD_F^{\mu\nu} + iD_F^{\mu\lambda}[ie_0^2\Pi_{\lambda\sigma}]iD_F^{\sigma\nu} + iD_F^{\mu\lambda}[ie_0^2\Pi_{\lambda\sigma}]iD_F^{\sigma\omega}[ie_0^2\Pi_{\omega\tau}]iD_F^{\tau\nu} + \dots$$

Fig.[2.8] Série para o propagador completo do fóton.

$$iD'_F{}^{\mu\nu}(q) = iD_F^{\mu\nu}(q) + iD_F(q)^{\mu\lambda}[ie_0^2\Pi_{\lambda\sigma}]iD_F(q)^{\sigma\nu} + \dots$$

$$D'_{F\mu\nu}(q) = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{e_0^2}{q^2}\Pi_{\mu\lambda}(q)D'^{\lambda}_{F\nu}(q). \tag{2.8}$$

Logo, podemos escrever

$$[q^2 g_{\mu\lambda} - e_0^2 \Pi_{\mu\lambda}(q)]D'^{\lambda}_{F\nu}(q) = -g_{\mu\nu}. \tag{2.9}$$

A equação (2.9) é bastante similar a expressão (2.5), onde $\Pi_{\mu\lambda}(q)$ tem um papel análogo ao $\Sigma(p)$ para o propagador completo do fóton.

2.1.3 Vértice

Analogamente aos dois casos acima apresentados, podemos definir o vértice próprio como a soma de todos os gráficos conexos e próprios que possuam duas pernas externas de férmions e uma de fóton. É usual denotar essa soma no espaço dos momentos por $\Gamma_\mu(p', p)$, onde p' é o momento que está saindo e p o momento que está entrando.

A nível de árvore, sabemos que $\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu$, mas levando em conta as outras ordens de perturbação, podemos escrever o vértice de uma maneira mais geral, ou seja

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p', p), \tag{2.10}$$

onde $\Lambda_\mu(p', p)$ carrega as contribuições de ordens mais altas de perturbação.

2.1.4 Equações Integrais para a Auto-Energia

Nas seções anteriores vimos que para determinar os propagadores completos da teoria precisamos definir as auto-energias próprias do elétron $\Sigma(p)$, do fóton $\Pi^{\mu\nu}(p)$ e o vértice próprio $\Gamma^\mu(p', p)$. Essas quantidades que foram definidas podem ser determinadas a partir da construção de um conjunto de equações integrais que relacionam os propagadores completos do elétron, fóton e o vértice próprio. Uma dessas equações integrais, a da auto-energia do elétron, está representada pictoricamente na Fig.[2.9], e pode ser escrita como

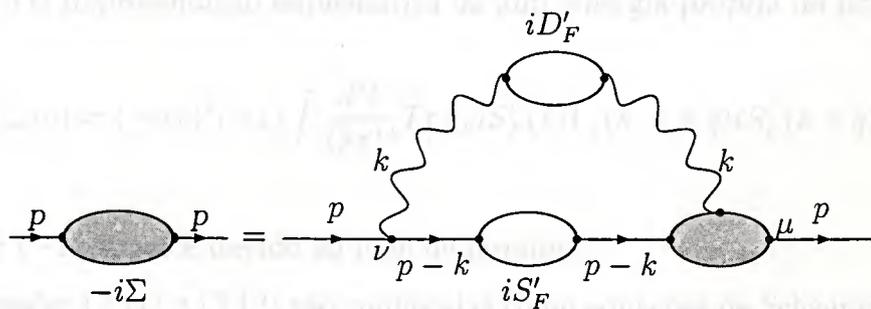


Fig.[2.9] Equação de Schwinger-Dyson para a auto-energia própria do elétron.

$$-i\Sigma(p) = (-ie_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD'_F(k)_{\mu\nu} \Gamma^\mu(p, p-k) iS'_F(p-k) \gamma^\nu. \quad (2.11)$$

Com o objetivo de verificar se a equação (2.11) engloba todos os gráficos que contribuem para a auto-energia fermiônica, vamos começar a analisar o diagrama [2.9] partindo do vértice ν , onde acontece a primeira interação. A partir desse ponto, o elétron e o fóton precisam se propagar de todas as maneiras possíveis, sendo necessário um propagador completo para ambos até o vértice μ , onde temos que computar todos os tipos de vértices próprios que possuam duas linhas de férmions e uma de fóton. Vale a pena notar que não colocamos um vértice próprio em ν , pois senão estaríamos contando duas vezes o diagrama da Fig.[2.10].

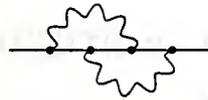


Fig.[2.10] Termo que contribui para $\Sigma(p)$.

Da mesma maneira, podemos construir a equação integral e esquematizar um diagrama, Fig.[2.11], para a auto-energia do fóton, assim temos

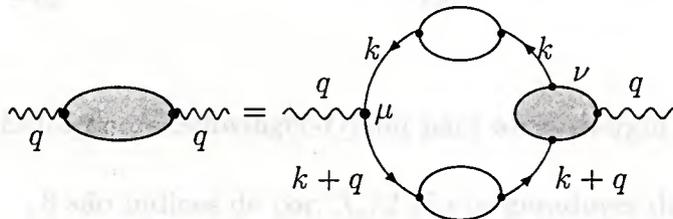


Fig.[2.11] Representação esquemática da auto-energia própria do fóton.

$$ie_0^2 \Pi_{\mu\nu}(q) = (-ie_0)^2 (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \gamma_\mu iS'_F(k) \Gamma_\nu(k, k+q) iS'_F(k+q), \quad (2.12)$$

onde o fator (-1) aparece devido ao loop de férmions.

As expressões (2.11) e (2.12) são conhecidas como equações de Schwinger-Dyson para QED. Essas equações, juntamente com a equação para o vértice, formam um conjunto de equações integrais acopladas para as funções de Green. Na prática essas

equações são muito complexas para serem resolvidas, tornando-se necessário o uso de algumas aproximações nessas funções. Isto deve ser feito de uma maneira criteriosa, para que sejam preservadas as simetrias da teoria.

2.2 Equações de Schwinger-Dyson para QCD

Nessa seção faremos algumas modificações nas ESD para aplicá-las na QCD. Essas modificações são necessárias, uma vez que QCD é uma teoria não-abeliana baseada na representação fundamental do grupo $SU(3)$ de cor.

Para obter a ESD para a auto-energia do quark, vamos utilizar um procedimento análogo ao realizado para auto-energia do elétron. Aplicando as regras de Feynman, para teorias de gauge não-abelianas, no diagrama da Fig.[2.12], podemos escrever

$$-i\Sigma(p) = g_s^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D'_F(k)_{\mu\nu}^{ab} \Gamma^\mu(p, p-k) \frac{\lambda^a}{2} S'_F(p-k) \gamma^\nu \frac{\lambda^b}{2}, \quad (2.13)$$

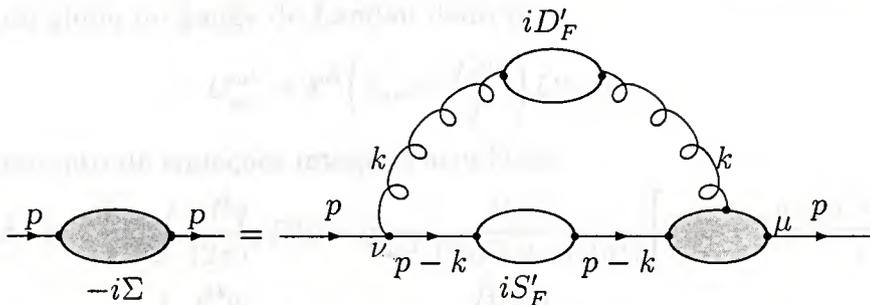


Fig.[2.12] Equação de Schwinger-Dyson para auto-energia do quark.

onde $a, b = 1, 2, \dots, 8$ são índices de cor, $\lambda_a/2$ são os geradores do grupo $SU(3)$ de cor e g_s^2 é a constante de acoplamento forte.

2.2.1 Aproximação “Rainbow”

Para estudar as ESD, algumas aproximações são necessárias [8], uma vez que elas formam um conjunto complexo de equações acopladas. Uma das aproximações, que em geral é muito utilizada, é conhecida como aproximação “rainbow” ou escada que consiste em utilizar o vértice próprio em nível de árvore, ou seja

$$\Gamma_\mu(p, p-k) = \gamma_\mu. \quad (2.14)$$

Quando utilizamos essa aproximação em conjunto com o propagador do glúon em nível de árvore (conhecida por aproximação “quenched”), temos a vantagem de conseguir desacoplar as ESD, e desta maneira podemos estudá-las separadamente. Porém essa aproximação traz algumas consequências não muito boas, como perda de invariância de gauge e propagadores de férmions com singularidades não-físicas. Entretanto para um estudo aproximado, essa simplificação tem sido utilizada [3, 4] para indicar o comportamento qualitativo do problema.

Um outro artifício que é usual e facilita o desenvolvimento dos cálculos, é escrever o propagador completo $S'_F(p)$ no espaço Euclidiano em termos de duas funções escalares que dependam quadraticamente do momento, ou seja

$$S'_F(p)^{-1} = i\gamma \cdot p A(p^2) + B(p^2). \quad (2.15)$$

Se utilizarmos a equação (2.13) na aproximação “rainbow”, juntamente com o propagador do glúon no gauge de Landau dado por

$$D'^{ab}_{\mu\nu} = \delta^{ab} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) D(q^2), \quad (2.16)$$

obtemos o conjunto de equações integrais acopladas.

$$\begin{aligned} [A(p^2) - 1]p^2 &= \frac{4}{3}g_s^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D(p-q) \frac{A(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)} \left[p \cdot q + 2 \frac{q \cdot (p-q)(p-q) \cdot p}{(p-q)^2} \right] \\ B(p^2) &= 4g_s^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D(p-q) \frac{B(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde usamos que $\sum_a \frac{\lambda^a \lambda^a}{4} = 4/3$.

Quando trabalhamos na aproximação “quenched”, tomamos

$$D(q^2) = \frac{1}{q^2} \quad (2.18)$$

na equação (2.16), isto leva a integração angular da primeira equação de (2.17) a

$$\int d\Omega_4 \frac{1}{(p-q)^2} \left[p \cdot q + 2 \frac{q \cdot (p-q)(p-q) \cdot p}{(p-q)^2} \right] = 0, \quad (2.19)$$

onde

$$\int d\Omega_4 = \int_0^\pi d\omega \sin^2 \omega \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi, \quad (2.20)$$

implicando que $A(p^2) = 1$.

Com $A(p^2) = 1$, podemos então estudar isoladamente a segunda equação de (2.17).

Capítulo 3

Simetria Quiral e Mecanismos de Quebra

Neste capítulo, vamos estudar algumas propriedades básicas da simetria quiral, como por exemplo, sua inclusão no formalismo lagrangeano e sua conexão com a geração de massa.

Abordaremos de uma maneira sucinta, como uma simetria pode ser quebrada (explicitamente, espontaneamente ou dinamicamente), onde nos concentraremos mais especificamente sobre a quebra dinâmica de simetria, cujas idéias essenciais serão introduzidas com o auxílio do modelo de Nambu e Jona-Lasinio, já que este foi o primeiro modelo a englobar a QDSQ.

Para finalizar este capítulo, apresentaremos um exemplo de como a ESD para o quark pode ser utilizada para o estudo da QDSQ.

3.1 Formalismo Básico

Vamos iniciar esse estudo apresentando, de uma maneira simples, o formalismo básico para o estudo da simetria quiral. Para isso, vamos recordar a definição de quiralidade como sendo o autovalor da matriz γ_5 . Se o autovalor de γ_5 , aplicado em um spinor, for $+1$, então dizemos que este spinor é de mão direita, e se o autovalor for -1 ele é de mão esquerda [11], ou seja:

$$\begin{aligned}\gamma_5\psi_R &= \psi_R, & \bar{\psi}_R\gamma_5 &= -\bar{\psi}_R, \\ \gamma_5\psi_L &= -\psi_L, & \bar{\psi}_L\gamma_5 &= \bar{\psi}_L,\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde ψ_R e ψ_L são os spinores de Dirac com somente duas componentes indepen-

dentos. Assim podemos escrever o bi-spinor como:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Os spinores ψ_R e ψ_L podem ser obtidos através do spinor de quatro componentes ψ , utilizando as projeções:

$$\begin{aligned} \psi_R &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5)\psi, & \bar{\psi}_R &= \bar{\psi}\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5), \\ \psi_L &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5)\psi, & \bar{\psi}_L &= \bar{\psi}\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde esse “ $\mathbf{1}$ ” representa a matriz identidade 4×4 .

É importante notar que podemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &= \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L, \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde retornaremos a essas equações mais tarde.

A equação de Dirac para uma partícula massiva com quadrimomento $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ pode ser escrita como

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi = E\psi, \quad E = (p^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Utilizando a identidade $\boldsymbol{\alpha} = \gamma_5\boldsymbol{\sigma}$, onde $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ são dados no apêndice (A.12), podemos reescrever a equação (3.5) da forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi_R &= \frac{E}{p}\psi_R - \frac{m}{p}\beta\psi_L, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi_L &= -\frac{E}{p}\psi_L + \frac{m}{p}\beta\psi_R, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde foi utilizado o fato que γ_5 comuta com $\boldsymbol{\sigma}$ e $p \equiv |\mathbf{p}|$.

Vale a pena notar que essas equações estão acopladas através do termo de massa, entretanto se quisermos estudar o caso em que $m = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi_L &= -\psi_L, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi_R &= \psi_R. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Analisando essas equações podemos notar que, para uma partícula sem massa movendo-se com um momento bem definido, essas soluções correspondem a ter o spin anti-alinhado com a direção do momento, para o caso das partículas de mão esquerda, e alinhado para as de mão direita.

Logo, para partículas sem massa, a quiralidade é o mesmo que helicidade, entretanto, para antipartículas a quiralidade é o oposto da helicidade, devido à troca de sinal de E na equação (3.5).

Podemos incorporar a quiralidade dentro do formalismo lagrangiano de uma maneira simples, uma vez que ela pode ser introduzida como uma simetria formal e contínua da lagrangiana de Dirac sem massa [12]. Podemos escrever essa lagrangiana, incluindo um campo de gauge abeliano, como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu - ig A_\mu) \psi, \quad (3.8)$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

Note que, a densidade de lagrangiana \mathcal{L} é invariante sobre a transformação de fase global do tipo

$$\psi \rightarrow e^{-i\eta} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\eta}, \quad (3.9)$$

que, através do Teorema de Noether está conectada com uma corrente conservada que leva a conservação do número fermiônico.

Também existe uma simetria adicional para teorias sem massa, associada com a invariância de (3.8) sobre a transformação

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha \gamma^5} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha \gamma^5}, \quad (3.10)$$

onde a fase α é uma constante real e arbitrária.

Essa invariância é devida ao fato que a exponencial se cancela por causa da relação de anticomutação $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.

A lagrangiana (3.8) pode ser escrita em termos dos campos quirais, ou seja:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R, \quad (3.11)$$

onde

$$\mathcal{L}_{L,R} = \bar{\psi}_{L,R} i\gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu) \psi_{L,R}, \quad (3.12)$$

foi obtida utilizando a segunda equação de (3.4).

É importante notar que se tivéssemos um termo de massa nessa lagrangiana, ele seria do tipo $m\bar{\psi}\psi$. Observando novamente a equação (3.4), vemos que termos desse tipo não são invariantes pela transformação da equação (3.10), uma vez que eles acoplam os spinores de mãos distintas, não permitindo assim, reescrever a lagrangiana da forma (3.11).

Podemos concluir então, que os termos cinéticos e de gauge não misturam as duas representações (mão esquerda e direita) possíveis para um spinor, entretanto termos de massa quebram a simetria quiral.

Com o objetivo de ilustração, podemos analisar o caso em que todos os quarks não possuem massa, isso acarretaria um “alto grau” de simetria associado com a QCD. Entretanto se $m \neq 0$, podemos associar algumas simetrias quando dois ou mais quarks possuem massas iguais. Para escolher essas simetrias, podemos utilizar o fato que os quarks u , d e s são leves e possuem massas aproximadamente iguais. O mesmo não acontece com os quarks c , b e t pois eles são pesados e possuem massas bem distintas uns dos outros.

Se considerarmos $m_u = m_d$, obtemos uma das mais bem sucedidas simetrias, a que leva a conservação de isospin, uma vez que, nesse limite o nêutron e o próton terão a mesma massa e os píons (π^\pm, π^0) também.

A transformação de campo que leva a essa conservação é dada por

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}; \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\sigma \cdot \theta} \psi, \quad (3.13)$$

onde σ^i com $i = 1, 2, 3$ são os geradores do grupo $SU(2)$, ou seja, as matrizes de Pauli, e θ_i são as componentes de um vetor arbitrário.

Podemos associar com essa invariância $SU(2)$ de sabor, a existência de três correntes de Noether

$$J_\mu^i = \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\sigma^i}{2} \psi. \quad (3.14)$$

A simetria de isospin é quebrada pela diferença de massa dos quarks u e d , pelo eletromagnetismo e também pela interação fraca. Podemos estender esta simetria incluindo o quark s , passando a ter então, a simetria representada pelo grupo $SU(3)$

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}; \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\theta \cdot \lambda} \psi, \quad (3.15)$$

onde $\lambda^a (a = 1, 2, \dots, 8)$ são os geradores do grupo $SU(3)$, conhecida como as matrizes de Gell-Mann.

3.2 Simetria Quiral Aproximada em QCD

Partindo da lagrangiana

$$\mathcal{L}_{QCD}|_{m=0} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}_L \not{D} \psi_L + \bar{\psi}_R \not{D} \psi_R \quad (3.16)$$

percebemos, como foi dito anteriormente, que se a massa dos quarks for nula, essa lagrangiana possui uma simetria adicional, pois nesse limite os campos quirais estão desacoplados, e eles são invariantes separadamente, ou seja, para os quarks u e d sem massa, podemos escrever sua transformação como

$$\begin{aligned} \psi_L &\rightarrow e^{-i\theta_L \cdot \sigma} \psi_L = L \psi_L \\ \psi_R &\rightarrow e^{-i\theta_R \cdot \sigma} \psi_R = R \psi_R \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde ψ_L e ψ_R são as projeções quirais do dubleto (3.13) e θ_L e θ_R são vetores arbitrários.

Uma outra maneira de escrever essas operações de simetria é expressá-las como uma transformação vetor-axial de isospin dadas por

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{-i\theta_V \cdot \sigma} \psi \\ \psi &\rightarrow e^{i\theta_A \cdot \sigma \gamma_5} \psi, \end{aligned} \quad (3.18)$$

com $\theta_V = \frac{(\theta_L + \theta_R)}{2}$ e $\theta_A = \frac{(\theta_L - \theta_R)}{2}$.

Estas invariâncias são referidas como $SU(2)$ quiral ou $SU(2)_L \times SU(2)_R$ e serão quebradas quando $m_u = m_d \neq 0$, uma vez que os campos quirais não são mais

invariantes separadamente, entretanto, a única que não é quebrada nesse caso é a invariância de isospin vetorial.

Da mesma forma que foi feito anteriormente, podemos estender essa simetria através da adição do quark s , e supondo que os três não possuem massa, temos então a simetria $SU(3)$ quiral ou $SU(3)_L \times SU(3)_R$.

3.3 Quebra de Simetria

A simetria de uma lagrangiana pode ser manifestada de diferentes maneiras, dentre essas maneiras podemos destacar [13]:

- Simetria exata - A conservação do número de bárions menos o número de léptons através de uma transformação global e a simetria de cor $SU(3)$ da QCD são exemplos de simetria exatas.
- Simetria explicitamente quebrada - A lagrangiana, neste caso, contém termos (que podem ser pequenos) que não são invariantes sob a transformação que leva essa simetria. Um exemplo desse caso é a simetria de isospin que é quebrada, como nós já vimos, pela diferença da massa dos quarks leves e também por termos da interação eletromagnética.
- Simetria oculta - Neste caso a lagrangiana é invariante a uma transformação que gera determinada simetria, entretanto essa simetria não é vista no espectro dos estados físicos, uma vez que, o estado fundamental (vácuo) não possui essa invariância. Esse fato se deve a mecanismos físicos distintos, como por exemplo:
 1. O valor esperado do vácuo assume um valor diferente de zero através da introdução de um campo escalar, e desse modo a **simetria é espontaneamente quebrada**. Isso é por exemplo o que acontece com a interação eletrofraca que quebra a invariância $SU(2)_L$ através do campo de Higgs.

2. Mesmo na ausência de campos escalares, a **simetria é dinamicamente quebrada** por efeitos quânticos. Esse mecanismo é um dos candidatos a explicar a quebra da simetria quiral $SU(2)_L \times SU(2)_R$ nas interações fortes, onde o primeiro modelo na qual a simetria quiral é quebrada dinamicamente, foi proposto por Nambu e Jona-Lasinio [NJL]. Esse modelo, não-renormalizável, será tratado com um pouco mais de detalhes na próxima seção.

3.3.1 Quebra Dinâmica e o Modelo de Nambu e Jona-Lasinio

Nas discussões sobre quebra de simetria, o modelo de NJL [14] é sempre abordado, já que historicamente esse modelo foi o primeiro construído na física de partículas em que a quebra dinâmica de simetria tem o papel central na geração das massas.

Nesse modelo, que é anterior ao surgimento da QCD, vamos notar que a quebra de simetria ocorre devido a interação “direta” entre núcleon-núcleon*, em analogia a idéia de atração efetiva elétron-elétron responsável pela formação dos pares de Cooper na Teoria da Supercondutividade.

Nesta seção temos como objetivo dar uma breve introdução a dinâmica e as idéias principais desse modelo [14]-[16].

Vamos iniciar esse estudo, partindo da densidade de lagrangiana que representa esse modelo

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + g_0[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2], \quad (3.19)$$

onde ψ são os campos spinoriais do núcleon e g_0 é a constante de acoplamento com dimensão de $[massa]^{-2}$, confirmando, portanto que o modelo de NJL não é renormalizável.

Essa lagrangiana é invariante sobre transformações quirais do tipo (3.10), já que

*Vale a pena mencionar que nessa época acreditava-se que a interação forte era a interação dos hádrons mediada pela troca de mésons.

os tensores transformam-se da seguinte maneira:

Vetor	$i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \rightarrow i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi;$	(3.20)
Vetor Axial	$i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \rightarrow i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi;$	
Escalar	$\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi \cos(2\alpha) + i\bar{\psi}\gamma_5\psi \sin(2\alpha);$	
Pseudoescalar	$i\bar{\psi}\gamma_5\psi \rightarrow i\bar{\psi}\gamma_5\psi \cos(2\alpha) - \bar{\psi}\psi \sin(2\alpha);$	
Tensor	$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi \rightarrow \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi \cos(2\alpha) + i\bar{\psi}\gamma_5\sigma_{\mu\nu}\psi \sin(2\alpha).$	(3.20)

Utilizando as transformações acima, podemos fazer explicitamente a transformação (3.10) na lagrangiana (3.19) obtendo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= -\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' + g_0[(\bar{\psi}'\psi')^2 - (\bar{\psi}'\gamma_5\psi')^2] \\
 &= -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + g_0 \left\{ (\bar{\psi}\psi)^2 \cos^2(2\alpha) + 2i\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\gamma_5\psi \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) + \right. \\
 &\quad \left. - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 \sin^2(2\alpha) - [(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 \cos^2(2\alpha) + (\bar{\psi}\psi)^2 \sin^2(2\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + 2i\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\gamma_5\psi \cos(2\alpha) \sin(2\alpha)] \right\} \\
 &= -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + g_0[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2] \\
 &= \mathcal{L}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Essa densidade de lagrangiana pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \tag{3.22}$$

onde \mathcal{L}_0 é a lagrangiana livre dada por

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \tag{3.23}$$

e \mathcal{L}_I é a interação de quatro férmions do tipo escalar + pseudoescalar dada por

$$\mathcal{L}_I = g_0[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2], \tag{3.24}$$

que será tratada como uma perturbação.

Se introduzirmos um termo de auto-energia na lagrangiana, denominado \mathcal{L}_S , podemos reescrevê-la

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) + (\mathcal{L}_I - \mathcal{L}_S) \\
 &= \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_I.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

A massa física pode ser introduzida na lagrangiana (3.25) supondo que

$$\mathcal{L}_S = -m\bar{\psi}\psi. \tag{3.26}$$

Lembrando que uma partícula real de Dirac precisa satisfazer a equação

$$i\not{p} + m_0 + \Sigma(p) = 0, \tag{3.27}$$

para que $i\not{p} + m = 0$.

Logo, temos que

$$m - m_0 = \Sigma(p)|_{i\not{p}+m=0}. \tag{3.28}$$

A principal suposição do modelo de NJL é que mesmo com a massa nua (m_0) igual a zero, a massa física (m) é diferente de zero, uma vez que se espera que a auto-interação ocasione o surgimento de uma massa dinâmica não nula. Assim para o caso em que $m_0 = 0$, temos

$$m = \Sigma(p)|_{i\not{p}+m=0}, \tag{3.29}$$

onde $\Sigma(p)$ é a auto-energia fermiônica. É conveniente ressaltar que essa equação é usualmente chamada de equação auto-consistente.

Na ordem mais baixa (primeira ordem de perturbação da constante de acoplamento g_0), os diagramas que irão contribuir estão representados pictoricamente na Fig.[3.1].

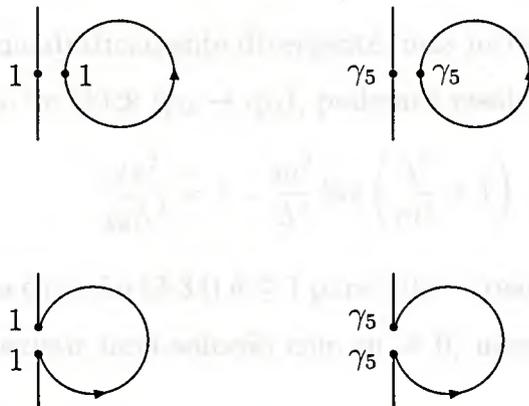


Fig.[3.1] Diagramas de ordem mais baixa para interação de quatro férmions.

Esses diagramas são divergentes, e para regularizá-los precisamos utilizar um corte Λ , para que o lado direito da equação (3.29) se torne finito.

Podemos escrever a equação (3.29) no espaço das coordenadas como

$$m = 2g_0 \left[\text{Tr} S_F(0) - \gamma_5 \text{Tr} \gamma_5 S_F(0) - \frac{1}{2} \gamma_\mu \text{Tr} \gamma_\mu S_F(0) + \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \text{Tr} \gamma_\mu \gamma_5 S_F(0) \right], \quad (3.30)$$

com

$$S_F(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{\not{p} - im}, \quad (3.31)$$

onde os dois últimos termos da equação (3.30) representam os dois últimos diagramas da Fig.[3.1] transformados pela identidade de Fierz (A.21).

O único termo que contribui para a equação (3.29) é o representado pelo primeiro diagrama da Fig.[3.1], uma vez que o segundo e o quarto são nulos, devido as propriedades do traço das matrizes de Dirac (A.20), e o terceiro termo se anula por razões de simetria. Assim obtemos

$$m = -\frac{8g_0 im}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{p^2 + m^2}. \quad (3.32)$$

Como não estamos interessados na solução trivial ($m = 0$), vamos supor que $m \neq 0$, então temos que

$$1 = -\frac{8g_0 i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{p^2 + m^2}. \quad (3.33)$$

Essa integral é quadraticamente divergente, mas introduzindo um corte Λ e efetuando uma rotação de Wick ($p_0 \rightarrow ip_0$), podemos resolvê-la e chegar a condição

$$\frac{2\pi^2}{g_0 \Lambda^2} = 1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \log \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right). \quad (3.34)$$

O lado direito da equação (3.34) é ≤ 1 para valores reais de Λ/m . Então podemos concluir que pode existir uma solução com $m \neq 0$, mesmo no caso onde $m_0 = 0$, somente se

$$0 \leq \frac{2\pi^2}{g_0 \Lambda^2} \leq 1. \quad (3.35)$$

Por completeza, vale a pena mencionar que neste mesmo artigo [14], Nambu e Jona-Lasinio demonstraram a existência de estados coletivos que se manifestam como uma partícula estável e de massa nula. Eles verificaram a existência desses estados ligados de férmion-antiférmion através da análise da equação de Bethe-Salpeter na aproximação escada (ordem mais baixa), onde a análise e os cálculos que envolvem esse estudo são um tanto complicados e estão além do objetivo deste trabalho.

Uma vez que o vácuo quebra a simetria quiral (que é contínua) quando a condição (3.35) é obedecida, o Teorema de Goldstone nos garante que partículas sem massa precisam necessariamente estar presentes na teoria. Então no modelo de NJL esses estados ligados, com massa nula, nada mais são que os bósons de Goldstone e podem ser identificados como os píons, uma vez que eles são as partículas mais leves no espectro hadrônico, e tem uma massa muito pequena quando comparada com a de outros hádrons ($m_\pi/m_n = 0,14$).

As mesmas idéias são utilizadas nos estudos da QCD para tentar descrever os píons, não mais como um estado coletivo de núcleons, mas como um estado ligado de quarks.

Na próxima seção, daremos um exemplo de como esses estudos podem ser elaborados utilizando o formalismo das ESD para a QCD.

3.4 Quebra Dinâmica de Simetria Quiral na QCD

A QDSQ, além de explicar a geração de massa na QCD, também pode ser vista como um método alternativo ao mecanismo de Higgs para gerar massa aos férmions e bósons vetoriais em Teorias de Gauge, uma vez que a inclusão de campos escalares acarretam alguns problemas como a naturalidade e a falta de corroboração experimental, já que até então esse tipo de campo não foi observado na natureza.

A idéia básica para gerar massas na QCD está na procura de soluções não-triviais para as ESD dos propagadores.

Uma metodologia bastante utilizada para estudar a QDSQ, se vale do uso da Teoria de Bifurcação para procurar sinais que indiquem a transição de fase de um

estado em que a simetria quiral existe para um outro em que ela está quebrada, quando um “parâmetro de controle” é variado. No caso mais comum, a QDSQ pode ocorrer somente se a constante de acoplamento da QCD é maior que um certo valor crítico. É nesse ponto de bifurcação que ocorre a transição de uma fase com solução trivial (massa dinâmica nula) para uma outra fase com solução não-trivial (massa dinâmica $\neq 0$).

Entretanto, para utilizarmos as ESD, precisamos saber as formas das funções de Green completas da teoria, mas isso não é possível, já que os propagadores e vértices não são conhecidos em todo espectro de momento. Na prática, recorreremos a aproximações, onde na maioria dos casos utiliza-se apenas um propagador vestido e o vértice, e os demais propagadores, nus.

Na próxima seção vamos apresentar o procedimento dessa metodologia para o estudo da QDSQ na QCD baseado especificamente no artigo de Atkinson [3], que aplicou essa abordagem em diversos trabalhos como [2], [4]-[7].

3.4.1 Acoplamento Crítico para a Quebra Dinâmica da Simetria Quiral

A ESD para a auto-energia do quark sempre possui a solução trivial para o operador de massa, que reflete a existência de uma fase simétrica, ou seja, uma fase com simetria quiral. Nesse trabalho [3], Atkinson estudou o comportamento da constante de acoplamento para determinar um valor crítico em que a simetria é quebrada, quando utilizava a aproximação em que o vértice completo e o propagador do glúon estão no nível de árvore.

A ESD para o propagador do quark no espaço de Minkowski é da forma

$$S_F^{-1}(p) = \not{p} - \frac{i\lambda}{(2\pi)^4} \int d^4p' \gamma_\mu S_F(p') \gamma_\nu D_F^{\mu\nu}(p' - p), \quad (3.36)$$

onde λ é o quadrado da constante de acoplamento forte, g_s^2 , vezes o fator de cor, $C_2(r)$, $D_F^{\mu\nu}$ o propagador do glúon no gauge de Landau e S_F o propagador fermiônico, onde ambos, no espaço de Minkowski, são dados respectivamente por

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \left[-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 + i\epsilon}, \quad (3.37)$$

e

$$S_F^{-1}(p) = A(p^2)\not{p} - B(p^2). \quad (3.38)$$

Lembrando que, para o propagador do glúon, podemos identificar $D(q^2)$ da equação (2.16) como $1/q^2$, que quando substituído na equação (2.17) resulta em uma integral angular nula como indica a equação (2.19), implicando que a função $A(p^2) = 1$.

Desse modo, podemos partir diretamente à segunda equação de (2.17) substituindo $A(p^2) = 1$, fazendo uma rotação de Wick e a integração angular, obtemos

$$B(x) = \frac{3\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dy}{x_{max}} \frac{yB(y)}{y + B^2(y)}, \quad (3.39)$$

onde foi utilizada a notação $p^2 \rightarrow x$, $p'^2 \rightarrow y$ e $x_{max} = \max(x, y)$.

A equação (3.39) sempre tem solução trivial, $B(x) = 0$, mas estamos interessados em determinar um valor para a constante de acoplamento de forma que ocorra a QDSQ, ou seja, precisamos determinar o valor de λ_c para que a equação (3.39) comece a ter soluções não-triviais.

Esse valor crítico da constante de acoplamento, λ_c , é conhecido como ponto de bifurcação, uma vez que, para valores de $\lambda < \lambda_c$ existe somente a solução trivial e a partir do ponto $\lambda = \lambda_c$ ocorre uma transição de fase de um estado em que a simetria quiral existe para um estado em que ela está quebrada, isto é, a auto-energia do quark começa a ter solução não-trivial, como ilustra a Fig.[3.2].

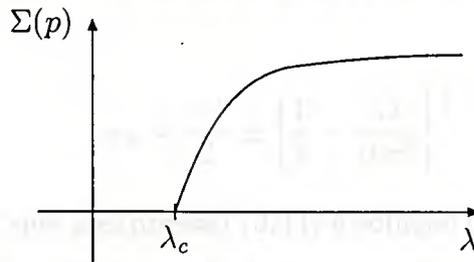


Fig.[3.2] Representação esquemática da transição de uma fase que possui simetria quiral para outra fase onde ela está quebrada.

Para determinar esse ponto de transição, vamos aplicar o método de bifurcação, que nos permite trocar o estudo de uma equação integral não-linear como a equação

(3.39), para uma linear, que pode ser obtida utilizando a derivada de Fréchet [2], que consiste na diferenciação funcional de B calculada no ponto $B(y) = 0$. Então a bifurcação da solução $B(x) = 0$ para uma solução não-trivial, ocorre no menor valor da constante de acoplamento para qual a equação linearizada

$$\delta B(x)|_{B(x)=0} \equiv f, \quad (3.40)$$

$$f(x) = \frac{3\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dy}{x_{max}} f(y), \quad (3.41)$$

tem solução não-trivial.

A equação integral (3.41), pode ser escrita na forma diferencial utilizando a fórmula de Leibnitz da diferenciação de uma integral, que é dada por

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} dx + f[h(\alpha), \alpha] \frac{dh(\alpha)}{d\alpha} - f[g(\alpha), \alpha] \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}, \quad (3.42)$$

o que resulta na equação diferencial

$$[x^2 f'(x)]' + \frac{3\lambda}{16\pi^2} f(x) = 0, \quad (3.43)$$

que tem como solução geral a expressão

$$f(x) = Cx^{\gamma_+} + Dx^{\gamma_-}, \quad (3.44)$$

onde γ_{\pm} pode ser determinado através da equação indicial do método de Frobenius, resultando em

$$\gamma_{\pm} = \frac{-1}{2} \pm \left[\frac{1}{4} - \frac{3\lambda}{16\pi^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.45)$$

Podemos observar que a expressão (3.44) é solução da equação (3.41) para qualquer λ real maior que zero com C e D arbitrários. Isso implica em que para λ positivo a solução não-trivial sempre existe, ou seja, não há nenhum ponto crítico $\lambda_c > 0$ para o qual somente a solução trivial existe para $0 < \lambda < \lambda_c$.

Esse caso não leva, portanto, a QDSQ, uma vez que não existe um ponto com valor positivo em que a solução do tipo $f(x) = 0$ bifurca para soluções com $f(x) \neq 0$.

Como queremos que ocorra QDSQ na QCD, precisamos tornar as aproximações que foram utilizadas mais realísticas. Existem diversas alterações possíveis que foram aplicados por Atkinson e colaboradores, desde alterações na forma do vértice a inserções de corte infravermelho e ultravioleta.

Seguindo a mesma metodologia do trabalho [3], vamos introduzir os cortes infravermelho e ultravioleta na tentativa de se observar a QDSQ.

3.4.2 Corte Infravermelho

Como foi dito anteriormente, uma das possíveis modificações na aproximação da ESD é alterar a estrutura de integração através da introdução de um corte infravermelho. A maneira mais simples de inserir tal corte é supor que devido à auto-interação do campo de glúons, eles adquirem uma massa efetiva que evita a divergência na integral (3.41) quando $x_{max} \rightarrow 0$.

Se introduzirmos um propagador massivo para o glúon na equação (3.36), a integração sobre p' se torna difícil de ser efetuada. Entretanto, uma maneira simples de introduzir essa massa é trocando o fator x_{max} , na equação (3.39), por $x_{max} \rightarrow x_{max} + m^2$, onde nessa aproximação temos

$$B(x) = \frac{3\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dy}{x_{max} + m^2} \frac{yB(y)}{y + B^2(y)}. \quad (3.46)$$

Linearizando e impondo $B = 0$ chegamos em

$$f(x) = \frac{3\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dy}{x_{max} + m^2} f(y). \quad (3.47)$$

Analogamente a seção anterior, podemos escrever a equação diferencial correspondente,

$$[(x + m^2)^2 f'(x)]' + \frac{3\lambda}{16\pi^2} f(x) = 0, \quad (3.48)$$

onde a solução geral é dada por

$$f(x) = C(x + m^2)^{\gamma_+} + D(x + m^2)^{\gamma_-}, \quad (3.49)$$

com γ_\pm dado pela equação (3.45). A introdução do corte infravermelho impõe uma condição de contorno ($f'(0) = 0$), que vincula as constantes C e D . Logo, podemos

dizer que a solução da equação diferencial (3.48), a menos de uma constante de normalização, é expressa por

$$f(x) = \gamma_- \left[\frac{x + m^2}{m^2} \right]^{\gamma_+} - \gamma_+ \left[\frac{x + m^2}{m^2} \right]^{\gamma_-}. \quad (3.50)$$

Apesar dessa solução depender arbitrariamente do parâmetro de normalização, existe solução não-trivial para qualquer $\lambda > 0$, ou seja, de novo não temos nenhum ponto de bifurcação onde ocorra a QDSQ.

3.4.3 Corte Ultravioleta

Uma outra tentativa de modificar os resultados anteriores é introduzir um corte ultravioleta através da prescrição de Pauli-Villars, mantendo o corte infravermelho, podemos escrever a equação (3.39) da seguinte forma:

$$B(x) = \frac{3\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty dy \left[\frac{1}{x_{max} + m^2} - \frac{1}{x_{max} + \Lambda^2} \right] \frac{yB(y)}{y + B^2(y)}, \quad (3.51)$$

onde Λ é o corte de Pauli-Villars.

Utilizando novamente o método de bifurcação, para obter a equação linearizada, temos:

$$f(x) = \frac{3\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty dy \left[\frac{1}{x_{max} + m^2} - \frac{1}{x_{max} + \Lambda^2} \right] f(y). \quad (3.52)$$

A equação (3.52) é uma equação integral do tipo Fredholm homogênea [17]. Para obtermos soluções fisicamente aceitáveis, precisamos nos limitar às soluções quadraticamente integráveis (L^2), que restringem o conjunto de auto-valores, λ , possíveis.

Esse problema foi resolvido por Atkinson através da determinação de uma função que majora $f(x)$, onde admitimos que essa função é limitada no intervalo $(0, \infty)$. Então da equação (3.52) podemos obter:

$$|f(x)| \leq \frac{3\lambda}{16\pi^2} (\Lambda^2 - m^2) \sup_{0 < y < \infty} |f(y)| \int_0^\infty \frac{dy}{(x_{max} + m^2)(x_{max} + \Lambda^2)} < \frac{C}{(x + m^2)}, \quad (3.53)$$

onde C depende de Λ, m e f .

Segue da equação (3.53) a desigualdade

$$|f(x)|(x + m^2) < C. \quad (3.54)$$

Considere o espaço das funções contínuas e limitadas, com norma expressa por

$$\|g\| = \sup_{0 < x < \infty} [|g(x)|(x + m^2)^\beta], \quad (3.55)$$

para um β fixo $\in (0, 1)$.

A equação (3.54) nos diz que a solução de (3.52) pertence a este espaço, e portanto podemos escrever:

$$|f(x)| \leq \frac{3\lambda}{16\pi^2} \|f\| \int_0^\infty \frac{dy}{(y + m^2)^\beta} \left[\frac{1}{x_{max} + m^2} - \frac{1}{x_{max} + \Lambda^2} \right]. \quad (3.56)$$

Assim

$$|f(x)| \leq \frac{3\lambda}{16\pi^2} \|f\| \left[\int_0^x \frac{dy}{(y + m^2)^\beta(x + m^2)} + \int_x^\infty \frac{dy}{(y + m^2)^{1+\beta}} \right]. \quad (3.57)$$

Podemos resolver facilmente as integrais de (3.57), resultando para a primeira

$$\int_0^x \frac{dy}{(y + m^2)^\beta(x + m^2)} = \frac{(x + m^2)^{-\beta}}{(1 - \beta)} - \frac{(m^2)^{-\beta+1}}{(x + m^2)(1 - \beta)}, \quad (3.58)$$

e para segunda

$$\int_x^\infty \frac{dy}{(y + m^2)^{1+\beta}} = \frac{(x + m^2)^{-\beta}}{\beta}. \quad (3.59)$$

Somando os resultados de (3.58) e (3.59), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{(x + m^2)^{-\beta}}{(1 - \beta)} - \frac{(m^2)^{-\beta+1}}{(x + m^2)(1 - \beta)} + \frac{(x + m^2)^{-\beta}}{\beta} &< \frac{(x + m^2)^{-\beta}}{(1 - \beta)} + \frac{(x + m^2)^{-\beta}}{\beta} \\ &< \frac{(x + m^2)^{-\beta}}{\beta(1 - \beta)}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Substituindo o resultado de (3.60) na equação (3.57), temos

$$|f(x)| \leq \frac{3\lambda}{16\pi^2} \|f\| \frac{(x + m^2)^{-\beta}}{\beta(1 - \beta)}. \quad (3.61)$$

Utilizando a equação (3.55),

$$\frac{3\lambda}{16\pi^2} \|f\| \geq \beta(1 - \beta) \|f\|, \quad (3.62)$$

e se $f(x)$ não for identicamente nula, temos a relação

$$\frac{3\lambda}{16\pi^2} \geq \beta(1 - \beta), \quad (3.63)$$

para qualquer β no intervalo de $(0, 1)$.

O valor máximo para o lado direito da desigualdade (3.63) é obtido quando β assume o valor $\beta = \frac{1}{2}$, assim

$$\frac{3\lambda}{16\pi^2} \geq \frac{1}{4}, \quad (3.64)$$

nos dá o limite inferior para λ , ou seja, o ponto de bifurcação λ_c .

Vale a pena notar que, a ESD na aproximação em que o vértice e o propagador do glúon estão no nível de árvore, a simetria quiral é quebrada em algum valor de $\lambda_c > 0$ se, e somente se, os cortes infravermelho e ultravioleta são introduzidos simultaneamente. Podemos notar também, através da equação (3.64), que esse resultado é independente do corte ultravioleta Λ , inclusive no limite em que $\Lambda \rightarrow \infty$, mesmo que a constante C , da equação (3.53), seja divergente neste limite.

Nessa seção mostramos como o método de bifurcação pode ser aplicado e como ele simplifica a análise do problema, uma vez que não precisamos trabalhar com equações não-lineares.

Entretanto, nem sempre conseguimos que o kernel possa ser expresso de uma maneira conveniente, e a função que majora a solução, possa ser encontrada tão facilmente como foi mostrado aqui. Na maioria dos casos, temos que transformar a equação integral em uma equação diferencial e estudar suas soluções em torno do valor crítico da constante de acoplamento, mas isso nem sempre pode ser aplicado com frequência, já que, devido a complexidade das ESD existem casos em que somente a solução numérica pode ser obtida.

Capítulo 4

“Global Color Model”

Como vimos nos capítulos anteriores, as ESD formam um conjunto de equações integrais acopladas, que relacionam as funções de Green de n -pontos umas com as outras (usualmente essas funções são referidas como funções de Schwinger).

Esse conjunto de equações vem-se mostrando muito útil, pois recentemente foram feitos cálculos teóricos utilizando o modelo que vamos discutir neste capítulo [18, 19], que conseguiram, juntamente com as equações de Bethe-Salpeter, descrever muito bem os resultados experimentais da física hadrônica de baixas energias, como por exemplo a constante de decaimento e a massa dos pseudoescalares.

Um outro método que pode ser empregado para a obtenção de informações sobre as funções de Schwinger é conhecido como Teoria de Gauge na Rede para QCD. Porém, esse método discreto apresenta alguns problemas, pois precisamos fixar um gauge para conseguir estabelecer o limite para o contínuo e recuperar as simetrias globais da QCD, mas a escolha de um gauge leva a estatísticas mais pobres, e ainda existem problemas para trabalhar com férmions nessas simulações.

Deste modo podemos dizer que as ESD servem para obter as funções de Schwinger (propagadores do quark e glúon) de uma forma relativamente segura. Mas, como já foi dito no capítulo 2, as ESD só podem ser tratadas quando a torre de equações é truncada e algumas aproximações são feitas, principalmente quando queremos trabalhar na região infravermelha que só pode ser tratada não-perturbativamente.

Esse caráter não-perturbativo para baixas energias, nos força a utilizar modelos aproximados para descrever a escala de baixos momentos, e um desses modelos é conhecido como “Global Color Model” [GCM], que foi revisto por Tandy [18].

O GCM é um modelo de teoria de campos para quarks no qual a interação entre as correntes de quarks são mediadas por um propagador efetivo para o glúon, onde a forma desse propagador na região infravermelha é o elemento fenomenológico do modelo.

Neste capítulo, vamos descrever as características básicas desse modelo, que servirá de motivação aos propagadores que serão utilizados no próximo capítulo.

4.1 Da QCD ao Global Color Model

Utilizando os métodos funcionais usuais, a ação do GCM pode ser obtida partindo da ação de QCD [18, 20].

O funcional gerador para QCD é dado por

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = N \int D\bar{q}DqD\bar{w}DwDA \exp\{(-S[\bar{q}, q, A] - S_{gf}[A] - S_g[\bar{w}, w]) + \int d^4x(\bar{\eta}q + \bar{q}\eta)\}, \quad (4.1)$$

onde $S[\bar{q}, q, A]$ é a ação da QCD dada por

$$S[\bar{q}, q, A] = \int d^4x \left(\bar{q}(\not{\partial} + m + ig\frac{\lambda^a}{2}A^a)q + \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right) \quad (4.2)$$

com $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ e $S_{gf}[A]$ e $S_g[\bar{w}, w]$ são, respectivamente, os termos de fixação de gauge e a ação de Faddeev-Popov para os fantasmas.

Se utilizarmos a notação

$$\exp(W[J]) = \int DA \exp \left[- \int d^4x \left(\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} - J_\mu^a A^{a\mu} \right) \right], \quad (4.3)$$

com $J_\mu^a = ig\bar{q}(x)\frac{\lambda^a}{2}\gamma_\mu q(x)$. Podemos escrever o funcional gerador como

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = N \int D\bar{q}Dq \exp \left[\int d^4x (-\bar{q}(\not{\partial} + m)q + \bar{\eta}q + \bar{q}\eta) \right] \exp \left(W \left[ig\bar{q}\frac{\lambda^a}{2}\gamma_\mu q \right] \right). \quad (4.4)$$

O funcional $W[J]$ é o gerador das funções de n-pontos conexas do glúon, onde não são levados em consideração loops de quarks.

Esse gerador do glúon pode ser escrito como [20]

$$W[J] = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J^{a\mu}(x) D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) J^{a\nu}(y) + W_R[J], \quad (4.5)$$

onde

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = \int D\bar{w}DwDAA_{\mu}^a(x)A_{\nu}^b(y) \exp \left[-\frac{1}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - S_{gf}[A] - S_g[\bar{w}, w] \right], \quad (4.6)$$

é o propagador do glúon exato, que inclui todas as suas auto-interações e também as interações glúon-fantasma.

A principal característica do GCM é devida ao fato que mantemos somente o primeiro termo da equação (4.5) e desprezamos o termo $W_R[J]$ que carrega consigo informações de funções de três pontos e ordens maiores.

Entretanto, o sucesso dessa aproximação, que só pode ser estudada na prática, vai depender do modelo fenomenológico proposto para o propagador $D_{\mu\nu}^{ab}(x-y)$, uma vez que a forma exata desse propagador não é bem conhecida até o momento, mas naturalmente o comportamento não-abeliano da teoria, que foi perdido com essa aproximação, tem que ser englobado na forma desse propagador e ainda, esperamos que ele exiba propriedades de liberdade assintótica e escravidão infravermelha.

Nessa aproximação podemos escrever o gerador funcional como

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \exp \left(W_R \left[ig \frac{\delta}{\delta\eta} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_{\mu} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} \right] \right) Z_{GCM}[\bar{\eta}, \eta], \quad (4.7)$$

onde substituímos os campos dos quarks por suas respectivas derivadas funcionais em relação à fonte e fatorizamos o gerador funcional do GCM que é dado por

$$Z_{GCM}[\bar{\eta}, \eta] = N \int D\bar{q}Dq \exp(-S_{GCM}[\bar{q}, q] + \bar{\eta}q + q\eta), \quad (4.8)$$

onde $S_{GCM}[\bar{q}, q]$ é dado por

$$S_{GCM}[\bar{q}, q] = \int d^4x \bar{q}(x)(\not{\partial} + m)q(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y j^{a\mu}(x) g^2 D_{\mu\nu}(x-y) j^{a\nu}(x), \quad (4.9)$$

com $j_{\mu}^a = \bar{q}(x) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_{\mu} q(x)$.

Então, vemos que a ação $S_{GCM}[\bar{q}, q]$ difere da ação da QCD pela aproximação feita acima, e o caráter não-perturbativo vai ser incluído através de um modelo efetivo para o glúon na região infravermelha. Existem vários modelos propostos na literatura para descrever a região infravermelha, alguns desses modelos serão discutidos na próxima seção.

4.2 Propagadores Vestidos do Quark e Glúon

Antes de iniciar a discussão de modelos para a função de dois pontos do glúon, vale a pena comentar alguns aspectos (uma discussão um pouco mais detalhada, pode ser encontrada em [8]) do comportamento assintótico dos propagadores do glúon e quark na QCD.

4.2.1 Comportamento Assintótico da QCD

Partindo da ESD para o propagador do quark, que já foi vista no capítulo 2, podemos reescrever essa mesma equação, incluindo agora uma massa nua, m_0 , e as constantes de renormalização, como

$$S^{-1}(p) = Z_2[i\not{p} + m_0(\Lambda)] + Z_1 \frac{4}{3} \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} g^2 D^{\mu\nu}(p-k) \gamma_\mu S(k) \Gamma_\nu^g(k, p), \quad (4.10)$$

onde Λ é o parâmetro de regularização da integral e o propagador vestido do glúon, $D_{\mu\nu}(q)$, juntamente com o vértice completo quark-glúon, $\Gamma_\mu^g(k, p)$, são quantidades renormalizadas, que estão vinculadas entre si através das ESD.

Lembrando que Z_1 é a constante de renormalização do vértice quark-glúon, Z_2 e Z_3 são, respectivamente, os parâmetros de renormalização para os campos do quark e glúon, podemos escrever

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= Z_2 S_\Lambda^{-1}(p), \\ D_{\mu\nu}^{-1}(q) &= Z_3 D_{\mu\nu\Lambda}^{-1}(q), \\ \Gamma_\nu^g &= Z_1 \Gamma_{\nu\Lambda}^g, \\ g &= \frac{Z_2 \sqrt{Z_3}}{Z_1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

No espaço Euclidiano, o propagador do glúon, no gauge de Landau, é expresso por

$$g^2 D_{\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) D(k^2), \quad (4.12)$$

onde

$$D(k^2) = \frac{g^2}{k^2[1 + \Pi(k^2)]} \quad (4.13)$$

e $\Pi(k^2)$ é a polarização do vácuo do glúon.

Se fizermos a aproximação [20] em que $Z_1 = Z_2$, temos como consequência que para baixas energias as contribuições dos fantasmas não são importantes. Essa aproximação pode ser considerada razoável, já que estudos utilizando a ESD [21] mostraram que no gauge de Landau os fantasmas não modificam qualitativamente os propagadores do quark e glúon e quantitativamente seus efeitos são menores que 10%.

Logo, nessa aproximação a constante de acoplamento efetiva g^2 , da equação (4.13), satisfaz a mesma equação que a “running coupling” $\alpha(q^2)$ da QCD. Então temos que o propagador vestido no gauge de Landau pode ser escrito como

$$g^2 D_{\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{4\pi\alpha(k^2)}{k^2}. \quad (4.14)$$

Esta aproximação ($Z_1 = Z_2$) é comumente referida como aproximação abeliana, uma vez que em QED (que é uma teoria abeliana) a identidade de Ward força à igualdade $Z_1 = Z_2$.

A expressão obtida pelo grupo de renormalização em nível de dois loops para a “running coupling” sofre pequenas correções ($\sim 10\%$) das ordens mais altas, para vetores tipo-espaço, onde $q^2 > 1\text{GeV}^2$, então podemos afirmar que, esta região pode ser descrita com uma boa precisão. Entretanto, para $q^2 < 1\text{GeV}^2$, $\alpha(q^2)$ só pode ser calculado não-perturbativamente, e é neste ponto que entram os modelos fenomenológicos para o propagador do glúon baseados no estudo de sua ESD.

Para a região em que $q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, em “running coupling” a nível de um loop é dada por

$$\alpha(q^2) = \frac{d\pi}{\ln(q^2/\Lambda_{QCD}^2)}, \quad (4.15)$$

onde $d = 12/(33 - 2N_f)$ é a dimensão anômala da massa, N_f é o número de sabores dos quarks e $\Lambda_{QCD} \approx 0.20\text{GeV}$ é o parâmetro de escala da QCD.

Como já foi visto nos capítulos anteriores, podemos escrever o propagador completo em termos de duas funções escalares, ou seja

$$S'(p) = \frac{1}{i\not{p}A(p^2) + B(p^2) + m_0}, \quad (4.16)$$

onde m_0 é a massa nua do quark.

O comportamento do propagador completo para a região ultravioleta é bem conhecido, pois os métodos perturbativos são válidos nessa região e diferentes abordagens foram utilizadas, como por exemplo, as equações do grupo de renormalização, expansão de produtos de operadores (que só pode ser empregada nessa região) e as regras de soma de QCD [22].

Para $q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, a massa física é definida como

$$M = \frac{(B + m_0)}{A}, \quad (4.17)$$

é dada por

$$M(q^2) = \frac{\hat{m}}{\left[\frac{1}{2} \ln(q^2/\Lambda_{QCD}^2)\right]^d}, \quad (4.18)$$

onde \hat{m} é um parâmetro invariante de escala, que será escolhido através da equação

$$S^{-1}(p)|_{p^2=\mu^2} = i\not{p} + m, \quad (4.19)$$

impondo que

$$m = M(\mu^2), \quad (4.20)$$

onde μ é o ponto de renormalização escolhido.

A equação (4.18) só será empregada quando $m_0 \neq 0$, ou seja, quando existe um termo de massa na lagrangiana que quebra explicitamente a simetria quiral.

Para o caso em que $m_0 = 0$, como foi discutido no capítulo 3, temos uma simetria quiral exata que leva à conservação de uma corrente vetor-axial, resultando na seguinte expressão para a massa

$$M(q^2)|_{q^2 \rightarrow \infty} = \frac{\kappa}{q^2 \left[\ln(q^2/\Lambda_{QCD}^2)\right]^{1-d}}, \quad (4.21)$$

onde κ é uma constante que deve independe de μ , já que quantidades físicas são independentes do ponto de renormalização. Assim podemos escrevê-la como

$$\kappa \simeq \frac{4\pi^2 d}{3} \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{[\ln(q^2/\Lambda_{QCD}^2)]^d}, \quad (4.22)$$

implicando que o condensado de quark é

$$\langle \bar{q}q \rangle \sim [\ln(q^2/\Lambda_{QCD}^2)]^d. \quad (4.23)$$

Podemos ver das equações (4.18) e (4.20), que o termo $m\langle \bar{q}q \rangle$ não depende da escala de renormalização, ou seja $m\langle \bar{q}q \rangle$ é uma quantidade invariante.

Quando não temos um termo que quebra espontaneamente a simetria quiral, os condensados de quarks, $\langle \bar{q}q \rangle$, nos fornecem uma medida da QDSQ. Podemos escrever esse condensado como

$$\langle \bar{q}q \rangle_\mu = - \lim_{x \rightarrow 0^+} Tr_{sc} S_0(x) = -12 \int^\mu \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{B_0(p^2)}{p^2 A_0^2(p^2) + B_0^2(p^2)}, \quad (4.24)$$

onde $S_0(x)$ é o propagador do quark da equação (4.16) com $m = 0$, ou seja é o propagador no limite quiral, e Tr_{sc} é o traço sobre spin e cor.

4.2.2 Modelos Confinantes

Nesta seção, vamos utilizar um dos propagadores propostos pelo GCM para o glúon, em conjunto com a ESD para o quark. Esse modelo para a função de dois pontos do glúon foi primeiramente proposto por Munczek e Nemirovsky [24], e como veremos mais tarde, esse propagador efetivo leva ao confinamento de quarks e glúons através do critério de falta de polos reais nos propagadores [23, 25].

Esse modelo confinante é definido pelo uso de uma função delta $\delta^4(q)$, de forma que o propagador no gauge de Feynman pode ser escrito no espaço Euclidiano como

$$D_{\mu\nu}(q) = \delta_{\mu\nu} 3\pi^4 \beta \delta^4(q), \quad (4.25)$$

onde β é um parâmetro a ser ajustado. Para obter esse mesmo propagador no gauge de Landau, basta trocar $\delta_{\mu\nu}$ da equação acima, por $\frac{4}{3} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$.

Os modelos que serão discutidos aqui originaram-se de estudos que previam um propagador do glúon do tipo $D(q^2) = 1/q^4$, onde o comportamento singular desse propagador na região infravermelha fez necessária a introdução de um pequeno parâmetro de regularização, originando a forma $1/(q^2)^{2+\epsilon}$ que em um dado limite de ϵ gera a função $\delta^4(q)$

Esse "ansatz" fenomenológico, para o propagador do glúon, tenta descrever via uma singularidade integrável a região infravermelha, uma vez que não estão incluídos termos que descrevem a região de altos momentos e portanto, o comportamento assintótico, previsto pela QCD para a região ultravioleta, é desprezado nesse modelo. Essa característica de superestimar a região de baixos momentos neste modelo confinante é razoável, já que é esperado que o confinamento seja um efeito predominantemente infravermelho.

Fazendo uso das equações acopladas (2.17), descritas no capítulo 2, juntamente com o propagador tipo delta, temos que a ESD se reduz a equações algébricas e que sua solução é dada por

$$\begin{aligned} A(p^2) &= \begin{cases} 2 & p^2 \leq \frac{g_s^2\beta}{4} \\ \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 + \frac{2g_s^2\beta}{p^2}\right)^{1/2}\right] & p^2 \geq \frac{g_s^2\beta}{4} \end{cases} \\ B(p^2) &= \begin{cases} (g_s^2\beta - 4p^2)^{1/2} & p^2 \leq \frac{g_s^2\beta}{4} \\ 0 & p^2 \geq \frac{g_s^2\beta}{4}, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.26)$$

mostrando que a QDSQ sempre ocorre.

Para o caso em que $p^2 \leq \frac{g_s^2\beta}{4}$, podemos ver que a função de massa é dada por $M(p^2) = \frac{g_s^2\beta}{4} - p^2$. Neste ponto, torna-se claro o fato desse modelo ser considerado confinante, pois o polo do propagador, que é dado por $p^2 + M^2 \neq 0$ para qualquer p^2 , ou seja, não existe nenhuma camada de massa para propagadores dessa forma.

Um outro "ansatz" que foi inspirado no modelo da delta, para a função de dois pontos do glúon na região infravermelha é dado por uma gaussiana [26]

$$g^2 D(q^2) = 3\pi^2 \left(\frac{\chi}{\Delta}\right)^2 \exp\left(\frac{-q^2}{\Delta}\right), \quad (4.27)$$

já que no limite em que $\Delta \rightarrow 0$ na equação (4.27) o propagador tipo delta é recuperado.

Existem também, outros modelos dentro do GCM, que em geral incluem o comportamento assintótico do propagador do glúon previsto pela QCD. Um desses modelos, que teve bastante sucesso na descrição dos mésons leves, como por exemplo o π , ρ/ω e f_1 , é dado por [27]

$$D(q) = \frac{3\pi^2\chi^2}{\Delta^2} \exp(-q^2/\Delta) + \frac{16\pi^2}{11q^2 \ln(1 + \epsilon + q^2/\Lambda^2)}, \quad (4.28)$$

com $\Lambda = 0.19$ GeV, $\Delta = 0.002$ GeV², $\chi = 1.14$ GeV e $\epsilon = 2,0$. Onde o primeiro termo é responsável pela descrição da região infravermelha e do confinamento, enquanto que o segundo termo é o resultado do grupo de renormalização para a região ultravioleta.

Frank e Roberts [19] criaram um outro modelo que utiliza um único parâmetro, que conseguiu descrever com bastante precisão os observáveis dos mésons π e ρ . Nesse modelo o propagador fenomenológico para o glúon é dado por

$$D(q^2) = 4\pi^2 d \left[4\pi^2 m_t^2 \delta^4(q) + \frac{1 - \exp(-q^2/4m_t^2)}{q^2} \right], \quad (4.29)$$

onde $d = 12/(33 - 2N_f)$, com $N_f = 3$, ou seja, somente os três quarks mais leves são considerados. A escala de massa m_t pode ser interpretada como o parâmetro que faz a transição da região perturbativa para a não-perturbativa.

Naturalmente, existem outras variações desses modelos, que incluem termos que tentam também descrever a região de baixos momentos e outros para o comportamento de altos momentos [28]. Mas, como veremos no próximo capítulo, o estudo da QDSQ vai independer da forma do propagador para a região ultravioleta quando utilizamos o propagador tipo delta $\delta^4(q)$.

Capítulo 5

Bifurcação da Auto-Energia dos Quarks

No capítulo anterior descrevemos brevemente as idéias principais do GCM, e vimos que a física hadrônica de baixa energia pode ser descrita através de modelos fenomenológicos propostos para o propagador do glúon, uma vez que o comportamento não-perturbativo da QCD nos força a fazer uso desses modelos aproximados.

No entanto, o estudo feito da QDSQ dentro do GCM, apresentado no capítulo 4, considerou somente o comportamento infravermelho do propagador do glúon, e nesse caso não existe dúvida que este modelo é inconsistente com os estudos analíticos e numéricos da ESD dentro da QCD, que prevêem a QDSQ quando a constante de acoplamento ($\alpha_s = g_s^2/4\pi$) é da $O(1)$ [2]-[7], [29, 30] e [12, 31]. Esses estudos também foram feitos utilizando potenciais efetivos e corroborados com as simulações da teoria de gauge na rede. Deste modo, é válido questionar se este resultado seria diferente quando incluimos nesse modelo uma parte ultravioleta para descrever o propagador do glúon.

Assim, o intuito deste capítulo é aplicar as técnicas usuais, explicadas no capítulo 3, da teoria de bifurcação para a ESD truncada e determinar a existência ou não de um valor crítico para a constante de acoplamento, na qual ocorra a QDSQ em modelos que o comportamento infravermelho da função de dois pontos são descritos por termos fenomenológicos motivados dentro do GCM e que a parte ultravioleta é descrita pelo propagador perturbativo.

5.1 Quebra de Simetria para Modelos Confinantes

Já vimos ao longo dos capítulos anteriores, que o estudo da quebra de simetria quiral em Teoria de Campos Quânticos requer o uso de técnicas não-perturbativas e o método que é comumente empregado é resolver a ESD dentro de algumas aproximações.

No capítulo 4 vimos também, através do formalismo ESD/GCM, que utilizando o propagador infravermelho do glúon dado por uma função delta, a simetria quiral é sempre quebrada [vide equação (4.26)]. Entretanto, no caso do propagador perturbativo $1/q^2$, os estudos utilizando a ESD [2]-[7], [29, 30], potenciais efetivos [12, 31] e simulações na rede [32], verificaram que a simetria quiral é quebrada quando a constante de acoplamento é da $O(1)$. Portanto, é interessante perguntar se existe ou não um acoplamento crítico quando a função de dois pontos do glúon, no gauge de Landau, é descrita no espaço de Minkowski por

$$D_F^{\mu\nu}(q) = \left[g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \beta \delta^4(q) + \left[-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \frac{1}{q^2}, \quad (5.1)$$

ou seja, todo o espectro de momentos está representado nesse modelo, onde a parte ultravioleta é descrita pelo segundo termo e o parâmetro β , que aparece no primeiro termo, é uma constante a ser ajustada.

É importante notar que, como nos capítulos anteriores, vamos novamente supor g_s^2 como uma constante de acoplamento fixa, e vamos trabalhar com o vértice na aproximação “rainbow”, já que o comportamento qualitativo tem uma boa concordância com os cálculos que utilizam vértices mais elaborados, como por exemplo Curtis-Pennington [7].

Utilizaremos o método de bifurcação para examinar a possibilidade de uma solução não-trivial. Para aplicar esse método é importante notar que através da equação (2.17), a expressão linearizada para $B(p^2)$ depende de $B(p^2)$ em primeira ordem, entretanto a equação linearizada para $A(p^2)$ tem uma dependência de segunda ordem em $B(p^2)$. Esse fato é importante, uma vez que, após a derivação substituímos $B(p^2) = 0$, ou seja, o lado direito da equação (2.17) é nulo. Portanto, sem perda de generalidade, podemos substituir $A(p^2) = 1$ na equação linearizada de

$B(p^2)$, já que a equação linearizada não irá trazer nenhuma nova informação sobre seu comportamento. A substituição do propagador tipo delta na ESD (primeiro termo da equação (5.1)), com $A(p^2) = 1$ nos leva a

$$B(p^2) = \frac{4g_s^2\beta}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{B(q^2)\delta^4(q-p)}{q^2 + B^2(q^2)}, \quad (5.2)$$

que integrando resulta em

$$B(p^2) = \frac{4g_s^2\beta}{(2\pi)^4} \frac{B(p^2)}{p^2 + B^2(p^2)}. \quad (5.3)$$

É válido mencionar que, em alguns trabalhos, a constante de acoplamento g_s^2 é absorvida pelo parâmetro β . Supondo que g_s^2 pode ser sempre fatorizada de β .

Utilizando o resultado da equação (5.3) e substituindo o propagador do glúon (5.1) na equação para $B(p^2)$ de (2.17), chegamos em

$$B(x) = \frac{g_s^2}{4\pi^2} \left(\frac{\kappa B(x)}{x + B^2(x)} + \int_0^\infty \frac{dy}{x_{max}} \frac{yB(y)}{y + B^2(y)} \right), \quad (5.4)$$

com $x = p^2$, $y = q^2$, $x_{max} = \max(x, y)$ e $\kappa = \frac{\beta}{\pi^2}$.

Aplicando o método de bifurcação, ou seja, fazendo a derivada funcional da equação (5.4), calculada em $B(x) = 0$, e utilizando a notação $\delta B = f$, obtemos:

$$f(x) = \frac{g_s^2}{4\pi^2} \left(\frac{kf(x)}{x} + \int_0^\infty dy \frac{f(y)}{x_{max}} \right). \quad (5.5)$$

Definindo $\alpha = g_s^2/4\pi^2$, a equação integral (5.5) é equivalente a

$$x(x - \alpha k)f''(x) + 2xf'(x) + \alpha f(x) = 0, \quad (5.6)$$

com mais duas condições de contorno, a infravermelha $xf(x)|_{x \rightarrow 0} = 0$ e a outra válida na região ultravioleta $f(x)|_{x \rightarrow \infty} = 0$.

A equação (5.6) pode ser escrita como uma equação hipergeométrica através da transformação $f(\alpha ky) = yh(\alpha ky)$, onde definimos que $y = \frac{x}{\alpha k}$. Através destas substituições obtemos:

$$y(1-y)h''(y) + (2-4y)h'(y) - (2+\alpha)h(y) = 0. \quad (5.7)$$

A equação diferencial e algumas propriedades que iremos utilizar da função hipergeométrica podem ser encontradas no apêndice B.

As constantes que definem a função hipergeométrica são dadas por

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}, \\ b &= \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}, \\ c &= 2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Assim a solução da equação diferencial de (5.6) é dada por [33]

$$f(x) = \frac{x}{\alpha k} AF\left(a, b; 2; \frac{x}{\alpha k}\right) + B \frac{x}{\alpha k} \left\{ F\left(a, b; 2; \frac{x}{\alpha k}\right) \log \frac{x}{\alpha k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \left(\frac{x}{\alpha k}\right)^n \left[H(a, n) + H(b, n) - H(c, n) - H(1, n) \right] \right\}, \tag{5.9}$$

onde

$$H(a, n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a + k + 1}, \tag{5.10}$$

e

$$\begin{aligned} (a)_n &= a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1) \quad n \geq 1, \\ (a)_0 &= 1, \quad a \neq 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Como temos x multiplicando todos os termos da equação (5.9) a condição de contorno infravermelha é automaticamente satisfeita. Para que a equação (5.6) tenha uma solução não-trivial, a condição ultravioleta também tem que ser satisfeita, portanto precisamos estudar o comportamento assintótico de (5.9).

Quando x assume valores altos, o segundo termo de (5.9) irá divergir, já que todos os termos da soma em n são importantes, portanto, é necessário impor que $B = 0$ para que a condição ultravioleta seja obedecida .

Então, nos resta obter o comportamento assintótico do primeiro termo da solução (5.9), ou seja, de

$$f(x) = \frac{x}{\alpha k} AF\left(a, b; 2; \frac{x}{\alpha k}\right). \tag{5.12}$$

Portanto, temos que analisar o sistema em três regimes diferentes do parâmetro α , isto é, $0 < \alpha < \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{4}$ e $\alpha > \frac{1}{4}$, para ver em quais casos podemos utilizar a relação (B.5) para obter o comportamento assintótico de $f(x)$.

Para o caso em que $\alpha < \frac{1}{4}$, a relação (B.5) pode ser utilizada juntamente com (B.4), nos levando a seguinte expressão

$$f(x)|_{x \rightarrow \infty} = A' \left(-\frac{x}{\alpha k} \right)^{-1/2+\sigma} + B' \left(-\frac{x}{\alpha k} \right)^{-1/2-\sigma}, \quad (5.13)$$

onde definimos $\sigma = (\frac{1}{4} - \alpha)^{1/2}$, que nesse caso é um número real positivo e menor do que 1/2. Assim, quando x assume altos valores em (5.13) $f(x) \rightarrow 0$ e a condição ultravioleta é satisfeita, e portanto (5.12) é a solução no caso $0 < \alpha < \frac{1}{4}$.

Já para o caso $\alpha = 1/4$, notamos que o parâmetro $\sigma = 0$, ou seja, as constantes a e b são iguais e portanto a relação (B.5) não pode ser utilizada.

Uma outra maneira de obter o comportamento assintótico para este caso e fazer o limite de altos momentos ($x \rightarrow \infty$) na equação diferencial (5.6) é resolvê-la. Assim quando fazemos esse limite obtemos

$$f''(x) + \frac{2}{x}f'(x) + \frac{1}{4x^2}f(x) = 0, \quad (5.14)$$

onde a solução pode ser encontrada em [6] que é dada por

$$f(x)|_{x \rightarrow \infty} = (x)^{-1/2}(C + D \ln x). \quad (5.15)$$

Podemos notar que nesse caso a condição ultravioleta também é satisfeita quando x é grande, ou seja, a equação (5.12) também é solução quando $\alpha = 1/4$. Para $\alpha > 1/4$, precisamos fazer uma substituição nos parâmetros a e b da equação (5.12) de $\sigma \rightarrow i\rho$ com ρ definido como $(\alpha - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$.

Para obter o comportamento assintótico para esse caso, utilizamos novamente a fórmula (B.5) e a relação (B.4), obtendo assim

$$f(x)|_{x \rightarrow \infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Re \left[2^{2i\rho} \frac{\Gamma(i\rho)}{\Gamma(\frac{3}{2} + i\rho)} \left(-\frac{x}{\alpha k} \right)^{-\frac{1}{2} + i\rho} \right], \quad (5.16)$$

que é válida para $x \gg \alpha k$.

A equação (5.16) possui um conjunto infinito de zeros, localizados em $x = -\alpha k x_n$ e podemos determiná-los, através do mesmo procedimento utilizado por Atkinson e Johnson em [4].

A parte real da equação (5.16) pode ser escrita como

$$\exp \left\{ \ln \left[2^{2i\rho} \frac{\Gamma(i\rho)}{\Gamma(\frac{3}{2} + i\rho)} x_n^{-\frac{1}{2} + i\rho} \right] \right\}, \quad (5.17)$$

lembrando que $\ln z = \ln |z| + i(\arg z \pm 2n\pi)$, onde z é um número complexo e $n = 0, 1, 2, \dots$. Os zeros desta função ocorrem quando

$$\ln(x_n) \sim \frac{1}{\rho} \left[2n\pi - 2\rho \ln 2 - \arg \left(\frac{\Gamma(i\rho)}{\Gamma(\frac{3}{2} + i\rho)} \right) \right], \quad (5.18)$$

para $n = 1, 2, \dots$. Como essa relação foi obtida para $x \gg \alpha k$, o caso $n = 0$ foi excluído para encontrarmos somente valores positivos na expressão (5.18).

Portanto, quando trocamos o propagador do glúon por uma delta mais o propagador perturbativo $1/q^2$, verificamos que a simetria quiral é quebrada para qualquer valor da constante de acoplamento. Esse resultado indica que a introdução da função $\delta^4(q)$ modifica totalmente o que é obtido no caso de termos apenas o propagador perturbativo.

Na próxima seção estudaremos, através de um propagador na forma gaussiana, a possibilidade desse resultado ser modificado, quando a parte perturbativa do propagador é diferente de $1/q^2$ ou quando utilizamos a “running coupling” ou ainda uma massa dinâmica para o glúon [2, 34].

5.2 Um Modelo Gaussiano para a Região Infravermelha

Como vimos no capítulo do GCM, a estrutura do propagador do glúon é desconhecida na região de baixos momentos e portanto existem vários modelos que tentam descrever o comportamento nessa região. Em um desses modelos, que é freqüentemente utilizado [26, 27], o propagador tem a seguinte forma

$$D_{\mu\nu}^{ab}(q) = \delta^{ab} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] 3\pi^2 \frac{\chi^2}{\Delta^2} \exp \left[\frac{-q^2}{\Delta} \right], \quad (5.19)$$

onde χ é o parâmetro de intensidade e Δ é a largura da gaussiana. Vale a pena notar que, quando fazemos o limite de $\Delta \rightarrow 0$ recuperamos o propagador delta da seção anterior.

Para determinar as soluções da ESD do quark quando o propagador do glúon é dado pela equação (5.19), vamos estudar a equação linearizada. A linearização da substituição da equação (5.19) em (2.17), nos leva a seguinte equação para $\delta B(x) = f$

$$\delta B(x) = f(x) = \frac{3}{4}g_s^2 \frac{\chi^2}{\Delta^2} \left[\int_0^x dy f(y) \exp\left[\frac{-x}{\Delta}\right] + \int_x^\infty dy f(y) \exp\left[\frac{-y}{\Delta}\right] \right], \quad (5.20)$$

onde x e y são, respectivamente, p^2 e q^2 , consideramos $A(p^2) \approx 1$ e fizemos a chamada “aproximação de ângulo” no propagador do glúon. Essa aproximação pode ser feita utilizando a relação

$$D((p - q)^2) \approx \theta(p^2 - q^2)D(p^2) + \theta(q^2 - p^2)D(q^2), \quad (5.21)$$

que introduz um erro de aproximadamente 10% nos cálculos [30].

A equação (5.20) é uma equação homogênea do tipo Fredholm com kernel dado por

$$K_1(x, y) = \exp\left[-\frac{x}{\Delta}\right] \theta(x - y) + \exp\left[-\frac{y}{\Delta}\right] \theta(y - x). \quad (5.22)$$

A norma de (5.22) pode ser facilmente calculada resultando em

$$\|K_1\|^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy K^2(x, y) = \frac{\Delta^2}{2}, \quad (5.23)$$

ou seja, o kernel K_1 é quadraticamente integrável.

A equação integral (5.20) para $\delta B(x)$ apresentará soluções não-triviais e L^2 quando o menor valor da constante de acoplamento g_s^2 satisfizer [17]

$$g_s^2 \geq \frac{4\Delta^2}{3\chi^2} \frac{1}{\|K_1\|}. \quad (5.24)$$

A igualdade da equação (5.24) determina o valor crítico da constante de acoplamento g_c^2 . Ou seja, podemos ver que

$$g_c^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{\Delta}{\chi^2} \quad (5.25)$$

onde o valor crítico do acoplamento pode ser obtido substituindo os valores fenomenológicos de χ e Δ na equação (5.25).

É fácil ver que no limite de $\Delta \rightarrow 0$, recuperamos o resultado do propagador delta mostrado na seção anterior, isto é, neste limite a simetria quiral é quebrada para qualquer valor da constante de acoplamento.

Não vamos nos concentrar aqui, em determinar um valor numérico para a constante de acoplamento crítico, mas estudaremos um modelo que é fenomenologicamente mais interessante para o propagador do glúon, quando adicionamos a equação (5.19) um termo proporcional a $4\pi^2 d/q^2 \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)$, resultando em [35]

$$D_{\mu\nu}^{ab}(q) = \delta^{ab} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] 3\pi^2 \frac{\chi^2}{\Delta^2} \exp\left[\frac{-q^2}{\Delta}\right] + \delta^{ab} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \frac{4\pi^2 d}{q^2 \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)}. \quad (5.26)$$

Denominaremos de K_2 , o kernel resultante da substituição do segundo termo do propagador (5.26), que descreve a parte perturbativa na ESD (2.17) linearizada. Note que mesmo que o kernel proveniente do segundo termo da equação (5.26) não seja L^2 , podemos transformá-lo em um kernel quadraticamente integrável, através de uma escolha criteriosa de limites. Para esse kernel K_2 , foi mostrado que a auto-energia do quark apresenta um valor de acoplamento crítico para o início da QDSQ [5, 30], ou seja, g_s satisfaz

$$g_s^2 \geq \frac{1}{\|K_2\|}. \quad (5.27)$$

Analogamente, se quisermos estudar o comportamento da constante de acoplamento quando o propagador é dado pela equação (5.26), a equação integral não-linear passa a ter soluções não-nulas quando

$$g_s^2 \left\| \frac{3\chi^2}{4\Delta^2} K_1 + K_2 \right\| = 1, \quad (5.28)$$

onde K_1 é a norma do kernel da equação (5.20) após a fatoração do termo g_s^2 .

Utilizando a desigualdade triangular

$$\|K_1 + K_2\| \leq \|K_1\| + \|K_2\|, \quad (5.29)$$

juntamente com a equação (5.23), obtemos

$$g_s^2 \left(\frac{3\sqrt{2}\chi^2}{8\Delta} + \|K_2\| \right) \geq 1, \quad (5.30)$$

onde $\| K_2 \| \sim 0,09$ se fizermos uso dos resultados da Ref.[30].

Note que fatoramos de ambos propagadores a constante de acoplamento g_s^2 , e já saturamos o valor de K_2 .

A condição (5.30) nos fornece então, o ponto onde começamos a ter a QDSQ que é dado por

$$g_c^2 = \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{\chi^2}{\Delta} + \| K_2 \| \right)}. \quad (5.31)$$

Podemos também notar que o valor crítico da constante de acoplamento se aproxima de zero, quando tomamos o limite $\Delta \rightarrow 0$, ou seja, confirmamos o resultado da seção anterior que utilizava o propagador tipo $\delta^4(q)$.

Um fato interessante que deve ser observado, é que a constante de acoplamento sempre será menor que o valor obtido quando estudamos QDSQ utilizando exclusivamente o propagador perturbativo. Logo, podemos afirmar que enquanto a parte perturbativa do propagador do glúon leva a uma solução não-trivial para a auto-energia do quark, a inclusão de um “ansatz” infravermelho diminui o valor crítico da constante de acoplamento.

Capítulo 6

Conclusões

Começamos este trabalho apresentando uma introdução ao formalismo das ESD aplicadas para QED e, de uma maneira muito simples, estendemos para a QCD nossas discussões da ESD para o férmion.

Expusemos também, de uma maneira geral, as dificuldades que envolvem o estudo das ESD, uma vez que elas constituem um complexo conjunto de equações acopladas, que para serem resolvidas é indispensável a utilização de esquemas de aproximações.

Em especial, abordamos uma aproximação para o vértice conhecida como “rainbow”, que em geral não respeita a invariância de gauge. Entretanto, estudos [7] mostraram, no caso da QED, que o uso dessa aproximação tem uma boa concordância qualitativa em comparação com a utilização de vértices mais elaborados, como por exemplo o Curtis-Pennington, onde é inevitável o uso de simulações numéricas. Portanto, em nossos cálculos sempre trabalhamos com o vértice próprio expresso por $\Gamma^\mu(p, q) = \gamma^\mu$, juntamente com a aproximação “quenched” para o propagador do glúon, o que nos permitiu desacoplar as ESD, facilitando nossos cálculos.

A ESD para o quark foi empregada no estudo da QDSQ no capítulo 3. Nesse capítulo, mostramos algumas propriedades básicas da simetria quiral e seu vínculo com a geração de massa para os férmions.

Com o intuito de introduzir as idéias principais da QDSQ fizemos um pequeno comentário sobre os possíveis mecanismos de quebra de simetria e logo após, aprofundamos nossas discussões sobre QSDQ expondo desde o modelo de NJL [14] até

os trabalhos em QCD desenvolvidos por Atkinson *et al.* [2]-[7].

Como o comportamento não-perturbativo do propagador do glúon é desconhecido, mostramos no capítulo 4, que existem modelos que tentam descrever a região infravermelha dos momentos, dentre eles foi destacado o GCM [18], cuja principal característica é propor um modelo fenomenológico para o propagador do glúon que exiba propriedades esperadas pela QCD, tais como liberdade assintótica e confinamento.

Um das propostas bem sucedidas dentro do GCM, que foi discutida neste trabalho, é supor o propagador do glúon para a região infravermelha descrito por uma função delta $\delta^4(p)$, e como vimos na seção 4.2.2, este tipo de propagador leva os quarks ao confinamento, uma vez que a solução da ESD, equação (4.26), acarreta em ausência de polos no propagador, ou seja, não temos uma camada de massa pois, $p^2 + M^2 \neq 0$ para qualquer p^2 .

Entretanto, quando estudamos a QDSQ para esse propagador representado pela função $\delta^4(p)$, vimos que ela sempre ocorre independentemente do valor da constante de acoplamento (vide equação 4.26).

O fato desse propagador desprezar o comportamento ultravioleta nos levou à dúvida se esse resultado se modificaria quando acrescentássemos um termo no propagador do glúon que descrevesse a região perturbativa, já que vários trabalhos mostraram [2]-[7], [30] que para o propagador perturbativo a QDSQ ocorre para um determinado valor crítico da constante de acoplamento, g_c .

No capítulo 5, portanto, aplicamos as técnicas usuais de teoria de bifurcação para ESD e através da solução da equação diferencial, equação (5.6), verificamos que, para um propagador descrito por uma função $\delta^4(p)$ mais uma parte perturbativa $1/p^2$, equação (5.1), a QDSQ sempre ocorre para qualquer valor positivo da constante de acoplamento.

Apesar desse modelo, proposto pelo GCM, para o propagador do glúon na região infravermelha conseguir descrever muito bem propriedades hadrônicas, esse estudo da auto-energia dos quarks nos mostrou que a não existência de uma constante de acoplamento crítica, g_c , para que ocorra a QDSQ está em desacordo com o que é

previsto pela QCD através dos estudos analíticos e numéricos da ESD [2]-[7], [29, 30], que foram confirmados com o uso de potenciais efetivos [12, 31] e simulações da teoria de gauge na rede [32].

Mas mesmo utilizando o modelo para o propagador do glúon dado pela equação (5.1), poderíamos questionar se esse resultado modificaria quando outros modelos que descrevem o propagador perturbativo, motivados dentro da QCD, fossem utilizados. Para isso, vimos na seção 5.2, com a ajuda de um outro modelo para o propagador do glúon na região infravermelha, inspirado na função delta, equação (5.19), que o valor da constante de acoplamento crítico, onde a QDSQ começa a ocorrer, é sempre menor que o valor previsto quando utilizamos somente o termo perturbativo motivado pela QCD, equação (5.30). Isto nos indica que enquanto a parte perturbativa do propagador do glúon leva a uma solução não-trivial para a auto energia do quark, a inclusão do propagador que descreve a região infravermelha diminui o valor da constante de acoplamento, logo o ponto de bifurcação da auto-energia do quark pode variar para diferentes modelos da região infravermelha da QCD.

Nesta mesma seção pudemos recuperar o resultado obtido com modelo da função $\delta^4(p)$ apresentado na seção 5.1, quando tomamos o limite $\Delta \rightarrow 0$ na equação (5.30). Neste limite é possível ver que, não importa qual seja a contribuição da parte perturbativa, temos sempre $g_c \rightarrow 0$, ou seja a QDSQ ocorre para todos os valores da constante de acoplamento.

Apêndice A

Notações e Convenções

Vamos seguir a mesma convenção adotada por Bjorken e Drell [9].

A.1 Unidades

Durante os capítulos usamos as chamadas unidades naturais, onde

$$\hbar = c = 1. \quad (\text{A.1})$$

Neste sistema,

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

A massa, m , de uma partícula é portanto igual a sua energia de repouso, mc^2 , e é o inverso do comprimento de onda de Compton, mc/\hbar .

A.2 Quadrivetores

As coordenadas do espaço-tempo $(t, x, y, z) \equiv (t, \mathbf{x})$ são denotadas por um quadrivector contravariante

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z). \quad (\text{A.3})$$

O quadrivector covariante x_μ pode ser obtido através de

$$x_\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, -x, -y, -z) = g_{\mu\nu}x^\nu, \quad (\text{A.4})$$

com

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Os índices gregos correm de 0, 1, 2, 3 ou t, x, y, z , enquanto que os índices romanos i, j, k denotam as três componentes espaciais. Índices repetidos são somados em todos os casos. Trivetores são denotados em negrito, e o produto escalar é definido por

$$x^2 = x_\mu x^\mu = t^2 - \mathbf{x}^2. \quad (\text{A.6})$$

O quadrimomento é definido analogamente como

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z) \quad (\text{A.7})$$

e o seu produto escalar é dado por

$$p_1^\mu p_{2\mu} = E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2. \quad (\text{A.8})$$

O operador do momento, no espaço das coordenadas, é escrito como

$$p^\mu = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left(i \frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{i} \nabla \right) \equiv i \partial^\mu. \quad (\text{A.9})$$

A.3 Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac, γ , satisfazem a relação de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.10})$$

onde essas matrizes estão relacionados com α e β por

$$\gamma^i = \beta \alpha^i, \quad \gamma_0 = \beta, \quad (\text{A.11})$$

com $(\gamma^0)^2 = 1$ e $\alpha = \gamma_5 \sigma$, onde temos que

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Na representação padrão essas matrizes são dadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade 2×2 e σ^i são as três matrizes de Pauli dadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

A matriz γ^5 é definida como

$$\gamma^5 = \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.15})$$

e sua matriz, na representação padrão, é dada por

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

As seguintes relações são válidas

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (\text{A.17})$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{A.18})$$

O produto escalar de uma matriz γ_μ por um quadri vetor A^μ é dado por

$$\gamma_\mu A^\mu \equiv \not{A} = \gamma_0 A_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}. \quad (\text{A.19})$$

A.4 Propriedades do Traço e Identidades envolvendo γ

$$\text{Tr}(I) = 4,$$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA),$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu) = 0,$$

$$\text{Tr}(\text{número ímpar de } \gamma' \text{'s}) = 0,$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu},$$

$$\text{Tr}(ab) = 4a \cdot b,$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4[g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}],$$

$$\text{Tr}(\gamma_5) = 0,$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu) = 0,$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) = 0,$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = 0,$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{A.20})$$

A identidade de Fierz é dada por

$$\delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\rho} - \gamma_5^{\alpha\beta} \gamma_5^{\gamma\rho} = \frac{1}{2} \gamma_\mu^{\alpha\rho} \gamma_\mu^{\gamma\beta} - \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_5)^{\alpha\rho} (\gamma_\mu \gamma_5)^{\gamma\beta}. \quad (\text{A.21})$$

O ângulo sólido em quatro dimensões é expresso por

$$\int d\Omega_4 = \int_0^\pi d\omega \sin^2 \omega \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi^2. \quad (\text{A.22})$$

Apêndice B

A Função Hipergeométrica $F(a, b; c; x)$

A função hipergeométrica, também conhecida como função de Gauss, é definida como

$$F(a, b; c; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j} x^j, \quad (\text{B.1})$$

onde o símbolo de Pochhammer $(a)_n$ é dado por

$$\begin{aligned} (a)_n &= a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), \quad n \geq 1 \\ (a)_0 &= 1, \quad a \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

A função hipergeométrica é também denotada como ${}_2F_1(a, b; c; x)$, onde 2 e 1 são os números de parâmetros no numerador e denominador respectivamente.

Abaixo citamos algumas propriedades importantes

- $F(a, b; c; z)$ é simétrica pela troca de a por b ;
- Ela satisfaz a equação diferencial

$$\left[z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{d}{dz} - ab \right] F(a, b; c; z) = 0; \quad (\text{B.3})$$

- Obedece as relações

$$F(a, b; c; 0) = 1, \quad (\text{B.4})$$

e

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F(a, 1+a-c; 1+a-b; z^{-1}) \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F(1+b-c, b; 1+b-a; z^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Referências

- [1] Proceedings of the XVI International Symposium on Lattice Field Theory; Nucl. Phys. (Proc. Suppl) **B73**, (1999).
- [2] D. Atkinson, J. Math. Phys. **28** 10, (1987).
- [3] D. Atkinson e P.W. Johnson, Phys. Rev. **D35** 1943, (1987).
- [4] D. Atkinson e P.W. Johnson, Phys. Rev. **D37** 2290, (1988).
- [5] D. Atkinson e P. W. Johnson, Phys. Rev. **D37** 2296, (1988).
- [6] D. Atkinson, P.W. Johnson e K. Stam, Phys.Lett. **B201** 105, (1988).
- [7] D. Atkinson, V.P. Gusynin e P. Maris, Phys. Lett. **B303** 157, (1993).
- [8] C. D. Roberts e A.G. Williams, Prop. Part. Nucl. Phys. **33** 477, (1994).
- [9] Bjorken, James D., Drell, Sidney D. *Relativistic Quantum Fields*. McGraw-Hill, (1965).
- [10] Peskin, Michael E., Schroeder, Daniel V. *An Introduction Field Theory*. Addison-Wesley, (1995).
- [11] Huang, Kerson, *Quarks, Leptons and Gauge Fields*. World Scientific (1992) (2nd Edition).
- [12] Peskin, Michael E. Les Houches, Session XXXIX, (1982) - *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics* p.217.
- [13] Donoghue, J. F., Golowich E. e Holstein, B. R. *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge University Press, (1994).

- [14] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122** 345, (1961).
- [15] Lurié, David *Particles and Fields* John Wiley and Sons p.447, (1968) .
- [16] Miransky, V. A. *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories.* World Scientific, (1993).
- [17] Tricomi, F. G. *Integral Equations* Interscience Publishers, Inc. (1957).
- [18] P. C. Tandy, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **39** 117, (1997).
- [19] M. R. Frank e C. D. Roberts, *Phys. Rev.* **C53** 390, (1996).
- [20] R. T. Cahill e C.D. Roberts, *Phys Rev.* **D32** 2419, (1985).
- [21] N. Brown e M. R. Pennington, *Phys. Lett.* **B202** 257, (1988);
Phys. Rev. **D38** 2266, (1988);
Phys. Rev. **D39** 2723, (1989).
- [22] H. D. Politzer, *Nucl. Phys.* **B117** 397, (1982);
J. Gasser e H. Leutwyler *Phys. Rep.* **87** 77, (1982);
L. J. Reinders, H. Rubinstein e S. Yazaki, *Phys. Rep.* **127** 1, (1985).
- [23] H. Pagels, *Phys. Rev.* **D14** (1976); **D15** 2991, (1977).
- [24] H. J. Munczek e A. M. Nemirovsky, *Phys. Rev.* **D28** 181, (1983).
- [25] D. W. McKay e H. J. Munczek, *Phys. Rev.* **D55** 2455, (1997).
- [26] L.S.Kisslinger e T. Meissner, *Phys. Rev.* **C57** 1528, (1998).
- [27] J. Praschifka, R. T. Cahill e C. D. Roberts, *Intern. J. Mod. Phys.* **A4** 4929, (1989);
C. J. Burden, R. T. Cahill e J. Praschifka, *Aust. J. Phys.* **42** 147, (1989);
R. T. Cahill, C. D. Roberts e J. Praschifka, *Aust. J. Phys.* **42** 129, (1989);
L. C. L. Hollenberg, C. D. Roberts e B. H. J. Mckellar, *Phys. Rev.* **C46** 2057, (1992)

- [28] A. A. Natale and P. S. Rodrigues da Silva, Phys. Lett. **B442** 369, (1998).
- [29] P. I. Fomin, V. P. Gusynin, V. A. Miransky e Yu. A. Sitenko, Riv. Nuovo Cim. **6** 1, (1983);
V. A. Miransky, Sov. J. Nucl. Phys. **38** 280, (1983);
Phys. Lett. **B165** 401, (1985);
K. Higashijima, Phys. Rev. **D29** 1228, (1984).
- [30] C. D. Roberts e B. H. J. McKellar, Phys. Rev. **D41** 672, (1990).
- [31] A. A. Natale, Nucl. Phys. **B226** 365, (1983);
A. Barducci *et al.*, Phys. Rev. **D38** 238, (1988).
- [32] J. Kogut, M. Stone, H. W. Wyld, J. Shigemitsu, S. H. Shenker and D. K. Sinclair, Phys. Rev. Lett. **48** 1140, (1982).
- [33] Rainville, Earl D. *Special Functions*. The Macmillan Company, (1960).
- [34] A. A. Natale e P. S. Rodrigues da Silva, Phys Lett **B392** 444, (1997).
- [35] M. R. Frank and T. Meissner, Phys. Rev. **C53** 2410, (1996);
P. Maris and P. C. Tandy, nucl-th/9905056 (1999);
L. S. Kisslinger, M. Aw, A. Harey and O. Linsuain, hep-ph/9906457 (1999).

