



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.008/07

BURACOS SÔNICOS EM SUPERFÍCIES ESFÉRICAS

Bruno Bernardes

Orientador

Prof. Dr. George A. E. Matsas

Fevereiro de 2007

Agradecimentos

Agradeço inicialmente aos meus familiares e amigos, em especial minha mãe Denise de Freitas, pelo constante apoio e carinho.

Agradeço também aos professores e colegas do IFT pelos ensinamentos e pelas agradáveis discussões de física e de ciência em geral.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro concedido.

Agradeço especialmente ao professor George Matsas pela excelente orientação, pela atenção e dedicação despendida e pela constante disposição em ensinar.

Resumo

Nesta dissertação estudamos aspectos clássicos dos modelos análogos à Relatividade Geral em matéria condensada visando sobretudo criar uma nova percepção dos efeitos gravitacionais semi-clássicos, tais como a radiação Hawking, afim de melhor compreendê-los. Neste sentido, demonstramos que as ondas sonoras se propagando em um fluido ideal, barotrópico e irrotacional sobre uma esfera S^2 de raio r se comportam como um campo escalar de Klein-Gordon não massivo em um espaço-tempo curvo. Analisamos ao longo desta dissertação diversas propriedades deste espaço-tempo efetivo sentido pelo som, cuja geometria é descrita por uma métrica lorentziana dependente das variáveis hidrodinâmicas do fluxo, como a velocidade do fluido, sua densidade e a velocidade local do som, sempre buscando estabelecer correlações entre os conceitos clássicos da dinâmica dos fluidos e conceitos puramente relativísticos. Feita uma análise mais geral destes espaços-tempos, que denominamos de espaços-tempos acústicos, nos propomos a encontrar soluções das variáveis dinâmicas do fluido, uma vez que são elas que determinam a geometria acústica, capazes de modelar espaços-tempos efetivos dotados de horizontes de eventos e singularidades, criando portanto um buraco mudo/surdo, ou seja, um análogo de um buraco negro e de buraco branco da Relatividade Geral. Discutimos ainda alguns pontos da estrutura causal dos espaços-tempos acústicos construindo assim um diagrama de Carter-Penrose do buraco mudo/surdo com o intuito de evidenciar as possíveis trajetórias nulas deste espaço-tempo. Ademais, mostramos que na aproximação da acústica geométrica, ou também aproximação eikonal, os raios de som seguem geodésicas tipo luz do espaço-tempo acústico. Por fim, calculamos a curvatura escalar deste espaço-tempo verificando a presença da estrutura não plana da esfera S^2 , sobre a qual o fluido se movimenta.

Palavras Chaves: Relatividade geral; análogos gravitacionais; horizonte acústico; horizonte sônico; buracos mudos; buracos surdos.

Área do conhecimento: Relatividade geral; Teoria de campos em espaço-tempo curvo; matéria condensada; acústica.

Abstract

In this dissertation we study the classical aspects of analogue models of General Relativity in condensed matter seeking mainly to create a new perception about semi-classical gravitational effects, such as Hawking radiation, in order to better comprehend them. We demonstrate that sound waves propagating in an ideal barotropic fluid with a non-homogeneous irrotational flow, over a sphere S^2 with radius r behave as a Klein-Gordon massless scalar field in a curved spacetime. Through this dissertation, we analyze several properties of this effective spacetime governing the propagation of sound, whose geometry is described by a Lorentzian metric that depends on the hydrodynamic variables of the flow such as the flow velocity, the density and the local speed of sound, always trying to establish correlations between classical concepts of fluid dynamics and purely relativistic concepts. Once a general analysis of these spacetimes is made, which we denominate acoustic spacetimes, we find solutions of the dynamic variables of the fluid, since they determine the acoustic geometry, capable of modeling effective spacetimes endowed with event horizons and singularities, creating therefore a dumb/deaf hole, i.e., an analogue of a black hole and white hole of the General Relativity. We further discuss some points of the causal structure of the acoustic spacetimes, so constructing a Carter-Penrose diagram of the dumb/deaf hole with the aim of bringing to evidence the possible null trajectories of this spacetime. Furthermore, we show that in the approximation of the acoustic geometry, also called eikonal approximation, the sound rays follow lightlike geodesics of the acoustic spacetime. Finally we calculate the scalar curvature of this spacetime verifying the presence of the non flat structure of the S^2 sphere, over which the fluid moves.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Modelos análogos à Relatividade Geral	1
1.2	Acústica geométrica	2
1.3	Um breve histórico	3
1.4	Motivações	5
1.5	Panorama da dissertação	6
2	Equação de onda sobre uma esfera	8
2.1	Introdução	8
2.2	Equações de fluxo relativísticas	10
2.3	Equação de Klein-Gordon para o som	13
2.3.1	Equação de Bernoulli	13
2.3.2	Perturbações sonoras em fluidos ideais, barotrópicos e irrotacionais	15
2.3.3	Analogia com a Relatividade Geral	17
2.4	Analogia com a escala de Planck	23
3	Espaço-tempo acústico	24
3.1	Introdução	24
3.2	Topologia do espaço-tempo acústico esférico	25
3.3	Métrica acústica esférica	27
3.4	4-velocidade e 4-aceleração do fluido	29
3.5	Base ortonormal	34
3.6	Formalismo ADM	34
3.7	Graus de liberdade	37
3.8	Simetrias	38

3.8.1	Introdução	38
3.8.2	Espaço-tempo acústico esférico estacionário	41
3.8.3	Espaço-tempo acústico esférico estático	43
4	Buracos Mudos/Surdos	47
4.1	Introdução	47
4.2	Buracos Negros	48
4.2.1	Horizonte de eventos acústico	49
4.2.2	Ergoregião acústica	51
4.2.3	Gravidade superficial acústica	51
4.3	Soluções estacionárias	54
4.3.1	Potencial de forças não nulo	54
4.3.2	Casca esférica variável	66
4.4	Soluções não estacionárias	72
5	Estrutura Causal	74
5.1	Introdução	74
5.2	Estabilidade causal do espaço-tempo acústico esférico	75
5.3	Transformação conforme	76
5.4	Diagramas conformes	78
6	Acústica Geométrica	86
6.1	Aproximação eikonal	87
6.2	Raios de som como geodésicas tipo luz do espaço-tempo acústico esférico	88
6.3	A curvatura acústica	89
7	Conclusões	93
7.1	Sumário dos principais resultados	93
7.2	Observações finais	95
7.3	Perspectivas	95

Capítulo 1

Introdução

1.1 Modelos análogos à Relatividade Geral

De modo geral, os modelos análogos sempre desempenharam um importante papel na ciência, facilitando muitas vezes a visualização do problema e até mesmo sugerindo novos caminhos e idéias para sua melhor compreensão. A utilidade dos análogos podem também ser encarada do ponto de vista experimental, uma vez que modelos análogos são quase sempre mais simples de serem construídos. Obviamente um análogo sempre será uma aproximação do sistema em vista e por esta razão, afim de obtermos resultados interessantes, devemos observar um número suficiente de características em comum entre o modelo análogo e o sistema em vista.

Nesta dissertação analisaremos modelos análogos à Relatividade Geral, sobretudo análogos de buracos negros e de buracos brancos. Desde o surgimento do primeiro análogo gravitacional, baseado na propagação de ondas eletromagnéticas em meios dielétricos, muitos outros modelos foram propostos. Entretanto, abordaremos neste trabalho apenas os análogos gravitacionais construídos a partir da matéria condensada, onde certas propriedades do fluido, quando inomogêneas, isto é, dependentes do ponto, e dependentes do tempo, como velocidade e densidade, influenciam na propagação das perturbações sonoras, criando assim uma analogia entre o som e a luz. Essas propriedades podem ainda ser ajustadas para simular a curvatura do espaço-tempo da Relatividade Geral.

Não é difícil deduzir, como veremos na próxima seção, que fluidos supersônicos geram um buraco mudo, o análogo acústico do buraco negro. A analogia, no entanto,

não se concretiza apenas no âmbito geométrico; ela se estende a alguns aspectos referentes à teoria de campos, e por isso podemos dizer que este trabalho abrange mais especificamente a área de teoria de campos em espaço-tempos curvos. Esse ponto será melhor discutido no próximo capítulo.

É importante mencionarmos ainda que o estudo dos análogos gravitacionais pode trazer não apenas grandes resultados para a teoria de campos em espaço-tempos curvos mas também avanços na compreensão da propagação de ondas em fluidos.

1.2 Acústica geométrica

Sabemos que o som se propaga em um fluido em movimento com uma velocidade c_s em relação ao referencial em co-movimento com o fluxo, como se o fluido arrastasse as perturbações sonoras. Para fluxos não uniformes as alterações na direção e na velocidade de propagação do som, com relação ao referencial do laboratório, podem apresentar uma dependência local. Desta forma, dentro de uma região onde o fluxo é supersônico, uma onda sonora caminhando na direção contrária ao fluxo seria incapaz de se propagar para fora desta região, permanecendo aprisionada nela. Em analogia aos buracos negros, denominamos buracos mudos às regiões do fluido a partir das quais o som não consegue escapar.

Esta simples analogia sugere a possibilidade de tratarmos as ondas sonoras como se estivessem sujeitas a uma geometria efetiva gerada pelo movimento do fluido, assim como as trajetórias dos raios de luz seguem a curvatura determinada pela geometria do espaço-tempo. De fato, uma simples análise geométrica da equação de movimento dos raios de som corroboram esta idéia. Considerando $\vec{v}$ a velocidade do fluido e $\vec{n}$ o versor associado à direção dos raios de som com relação ao fluxo, a velocidade do som no referencial do laboratório será

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = c_s \vec{n} + \vec{v} \quad (1.1)$$

que pode ser reescrito de maneira conveniente como

$$-c_s^2 dt^2 + (d\vec{x} - \vec{v} dt)^2 = 0 \quad (1.2)$$

dado que $|\vec{n}|^2 = 1$. Ou ainda,

$$-[c_s^2 - v^2]dt^2 - 2\vec{v} \cdot d\vec{x}dt + d\vec{x} \cdot d\vec{x} = 0 \quad (1.3)$$

Finalmente, esta última expressão nos encoraja a interpretar os raios de som como trajetórias do tipo luz num espaço-tempo munido da métrica efetiva $g_{\mu\nu}$, que é dada, a menos de um fator conforme, por

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \Omega^2 \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v^2) & \vdots & -(v)_j \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ -(v)_i & \vdots & \delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

onde Ω é uma função não nula.

Cria-se assim uma conexão matemática entre um aspecto geométrico da acústica de fluidos e um outro importante aspecto da Relatividade Geral, o que nos permite, conseqüentemente, atribuir ao sistema hidrodinâmico o caráter de modelo análogo. No entanto, esta simples forma de analogia apenas possibilita a construção da estrutura causal do espaço-tempo efetivo, sentido pelas ondas sonoras. A partir da relação (1.3) não é possível determinar, de maneira única, a métrica efetiva $g_{\mu\nu}$, já que não podemos fixar o fator conforme Ω .

Felizmente a analogia entre as duas áreas não se restringe unicamente a este aspecto geométrico da acústica. É possível demonstrar, como veremos no próximo capítulo, que o som propagando-se num fluido barotrópico com fluxo irrotacional pode ser descrito por um campo escalar obedecendo uma equação de Klein-Gordon não massiva para uma métrica bem específica. Chamaremos esta métrica efetiva de métrica acústica pois através dela determinaremos a geometria experimentada pelo som. Graças a esta analogia, a área dos análogos gravitacionais ganhou maior destaque na física atual.

1.3 Um breve histórico

Provavelmente o artigo de W. Gordon [14] tenha sido o primeiro a introduzir métricas efetivas na descrição de modelos análogos. Estudando propagação de ondas eletromagnéticas em meios dielétricos, Gordon estava interessado em descrever estes meios através de uma métrica efetiva $(g_{ef})_{\mu\nu}$, conhecida como métrica de Gordon e expressa por

$$(g_{ef})_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + [1 - n^{-2}]V_\mu V_\nu, \quad (1.5)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, n é o índice de refração e V_μ é a 4-velocidade do meio.

Após esse artigo houve um interesse esporádico no assunto, contando com uma importante contribuição dada por um dos problemas propostos no livro “*The classical theory of fields*” de Landau e Lifshitz [21], onde se sugere o uso de meios dielétricos para descrever campos gravitacionais.

Os análogos acústicos foram introduzidos somente em 1980 por V. Moncrief [26] no estudo da estabilidade de discos de acreção em torno de buracos negros. Moncrief usou como modelo um fluido ideal isentrópico com fluxo irrotacional no espaço-tempo de Schwarzschild. Também merecem destaque os trabalhos de Matarrese com fluidos perfeitos relativísticos [23, 24, 25].

Um grande avanço no estudo dos análogos gravitacionais ocorreu em 1981 com a publicação do artigo “Experimental Black-Hole Evaporation?” [34] de W. G. Unruh. Nesse artigo, partindo das equações clássicas dos fluidos ideais, Unruh foi o primeiro a demonstrar que a propagação do som num fluido barotrópico com fluxo irrotacional pode ser descrita por um campo escalar obedecendo a equação de Klein-Gordon não massiva e para uma métrica efetiva bem específica e determinada pelas variáveis envolvidas na dinâmica do fluido. Além disso, quantizando este campo escalar, ele provou que um buraco negro acústico (“buraco mudo”) emite radiação térmica de fônons da mesma maneira que os buracos negros emitem radiação Hawking.

Ao ser evidenciada a existência de uma radiação térmica também presente nos análogos acústicos, o artigo de 1981 do Unruh contribuiu para que a radiação Hawking passasse a ser encarada não mais como uma propriedade da Relatividade Geral mas sim como um fenômeno fundamental da teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos, ocorrendo sempre que houver a presença de um horizonte num espaço-tempo com uma geometria efetiva.

Apesar da importância do trabalho de Unruh na compreensão de fenômenos envolvidos com a propagação de campos quânticos sobre espaços-tempos curvos, foi necessário quase uma década para que a comunidade científica voltasse suas atenções para este ponto.

Em seu artigo “Black-hole evaporation and ultrashort distances” [16], publicado no começo da década de 90, Jacobson utilizou os resultados do Unruh para investigar os modos trans-Planckianos (modos de comprimento de onda menores

que a escala de Planck), acreditando ser relevante na compreensão do processo de radiação Hawking. Outros artigos que contribuíram nesse sentido foram [17] e [35]. Ainda no começo da década houve a primeira consideração de análogos usando superfluidos [8].

O final dos anos 90 foi marcado por uma explosão de interesse pelos modelos análogos, com novas contribuições por parte do grupo de Jacobson [18, 19, 20, 9, 10] e por Reznik [29, 30]. Noções mais precisas de horizonte, ergoregião e gravidade superficial para modelos análogos [37, 38] foram introduzidas nesse período, além de surgirem discussões sobre as implicações dos modelos análogos na entropia de Bekenstein-Hawking [39, 38]. Finalmente, análogos baseados em acústica relativística foram considerados em [1].

Uma das grandes contribuições feitas no ano de 2000 foi a introdução, por Garay e colaboradores, do uso de condensados de Bose-Einstein na construção dos análogos [12, 13]. Logo depois, em 2001, a análise dos modos normais nos análogos foram estudadas em [2, 3], enquanto que propostas experimentais para os análogos foram consideradas em [4, 31, 40].

Schutzhold e Unruh desenvolveram em 2002 um análogo baseado em ondas de superfície em fluidos ideais [32]. Neste mesmo ano Parentani publicou o artigo “What did we learn from studying acoustic black holes?” [28].

Modelos para a entropia dos buracos negros e para a constante cosmológica inspirados nos análogos [41, 42] e o desenvolvimento de modelos análogos para a geometria FRW [5, 11] foram alguns dos trabalhos realizados nessa área em 2003.

Em 2004 e 2005 Unruh e Schutzhold discutiram a universalidade do efeito Hawking [36] e novas propostas de detecção da radiação Hawking em guias de onda eletromagnéticas [33].

Em resumo, esses e diversos outros artigos publicados no começo desse século deixam claro o crescente interesse da comunidade científica pelos modelos análogos à Relatividade Geral e a vigorosa atividade nessa linha de pesquisa.

1.4 Motivações

Geralmente, quando elaboramos um modelo análogo, a relação estabelecida entre os dois sistemas se restringe a algumas propriedades observadas em ambos.

No entanto, em alguns casos pode ocorrer de aspectos e fenômenos previamente conhecidos do análogo passarem a ser observados também no sistema original, colocados em evidência graças à inspiração obtida através do análogo. Sendo assim, provavelmente a principal motivação encontrada no estudo e no desenvolvimento de modelos análogos provêm da intuição que se cria ao olhar para o problema de um ângulo diferente. A facilidade teórica e experimental que cercam esses modelos podem facilitar a compreensão de alguns aspectos e fenômenos envolvidos em Relatividade Geral e até mesmo sugerir novas idéias que podem ser implementadas e testadas na Teoria da Relatividade. Análogos baseados em matéria condensada, que representam nosso maior interesse, permitem sobretudo compreender melhor a propagação de campos clássicos e quânticos em espaços-tempos curvos fixos, área denominada gravitação semi-clássica. Ademais, experimentos com matéria condensada podem eventualmente apresentar dificuldades técnicas menores para serem colocados em prática quando comparados com experimentos de Relatividade Geral.

Obviamente este fluxo de informação acontece nos dois sentidos de modo que podemos muito bem aproveitar a abordagem de espaço-tempo efetivo dada à propagação do som em fluidos para estudar mais profundamente alguns aspectos de física da matéria condensada.

Provavelmente, um dos propósitos mais ambiciosos desta área de pesquisa consiste em ganhar intuição olhando para os análogos gravitacionais para, ao menos, encontrarmos um ponto de partida para a formulação de uma possível teoria de gravitação quântica.

De modo geral, a construção de modelos análogos acabam sendo pedagógicos, já que, quase sempre, consistem em modelos mais simples e até mesmo mais acessíveis a mente humana. Apesar de não ser essa a principal motivação, os análogos gravitacionais não deixam de ter essa utilidade e muitos conceitos encontrados em Relatividade Geral podem ser facilmente compreendidos se servindo da analogia, como por exemplo, o conceito de horizonte de eventos, ergoregião e estacionaridade de espaços-tempos, como veremos nos próximos capítulos.

1.5 Panorama da dissertação

Nesta dissertação nos concentraremos nos modelos análogos à Relatividade Geral baseados na propagação de ondas sonoras em fluidos ideais. Como vimos na seção

1.3, este modelo de análogo, proposto pela primeira vez por Unruh, não se limita aos aspectos clássicos da Relatividade Geral e já se mostrou capaz de ajudar a melhor compreender efeitos semi-clássicos da gravitação. Contudo, neste trabalho restringir-nos-emos a uma análise clássica deste modelo, sugerindo porém, algumas modificações estruturais com relação ao formato convencional do modelo.

Desta forma, no capítulo 2 deduziremos, a partir das equações hidrodinâmicas de um fluido ideal, a equação de propagação do som sobre uma esfera bidimensional de raio r e estabeleceremos, baseados nisto, a analogia com as propriedades geométricas da Relatividade Geral. No capítulo 3, descreveremos as propriedades gerais dos espaços-tempos experimentados pelas ondas sonoras, apresentando alguns conceitos bastante usuais da Teoria da Relatividade Geral. Já no capítulo 4 estaremos interessados nas soluções destes espaços-tempos capazes de simular buracos negros e buracos brancos. Para isso introduziremos as definições formais de horizonte de evento, ergoesfera e gravidade superficial procurando paralelamente encontrar definições análogas para o caso acústico. Neste ponto, daremos dois diferentes métodos de obter essas soluções. Em um deles supondo um campo de forças externas agindo sobre o fluido e no outro considerando o fluido restrito a uma casca esférica de espessura variável. No capítulo 5, analisamos a estrutura causal do espaço-tempo sentido pelo som. Em um primeiro momento demonstramos que este espaço-tempo não apresenta problemas causais e na última seção do capítulo montamos o diagrama conforme para uma solução específica. No capítulo 6 demonstramos que os raios de som na aproximação eikonal, correspondente ao limite de altas frequências, seguem geodésicas tipo luz do espaço-tempo acústico. Calculamos ainda a curvatura escalar deste espaço-tempo.

Por fim, no capítulo 7, concluímos a dissertação fazendo um resumo dos principais resultados, apontando algumas observações finais e algumas perspectivas do estudo dos análogos gravitacionais.

Capítulo 2

Equação de onda sobre uma esfera

2.1 Introdução

A gravitação semi-clássica, também conhecida como Teoria Quântica de Campos em espaços-tempos curvos (TQCEC) surgiu no final dos anos 60 com L. Parker e Ya. B. Zel'dovich (veja [7] e suas referências). Apesar de ser uma teoria semi-clássica, uma vez que o campo gravitacional não é quantizado, seus avanços desempenharam papel central no esforço da construção de uma teoria inteiramente quântica da gravitação. A idéia central da TQCEC se resume na quantização dos campos sobre um espaço-tempo curvo fixo, cujas propriedades geométricas são definidas pelas equações de Einstein.

A teoria semi-clássica da gravitação tem se destacado por algumas previsões surpreendentes, a exemplo da radiação Hawking. Em 1974 Stephen W. Hawking [15], estudando a quantização de campos no espaço externo ao de estrelas colapsando mostrou que, ao contrário das previsões clássicas, buracos negros irradiam, podendo eventualmente evaporar até seu possível desaparecimento.

Neste contexto, em 1981 Unruh despertou uma nova área de interesse ao propor que um análogo da radiação Hawking poderia ser observado usando matéria condensada [34]. Unruh demonstrou nesse artigo que, utilizando as equações fundamentais da dinâmica dos fluidos [22], ou seja, a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

e a equação de Euler

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{f} \quad (2.2)$$

e impondo ainda que o fluxo seja irrotacional, de modo que possamos escrever a velocidade como $\vec{v} = -\vec{\nabla} \Phi$, e que o fluido seja barotrópico (o que significa que ρ depende apenas de P), a perturbação sonora descrita pelo potencial Φ_1 (onde $\Phi = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1$) satisfaz uma equação de Klein-Gordon não massiva dotada da métrica $g^{\mu\nu}$, chamada de métrica acústica. Ou seja, Unruh mostrou que Φ_1 satisfaz a relação

$$\square \Phi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_1) = 0. \quad (2.3)$$

Implicitamente, esta equação nos diz que podemos encarar os fônons (as perturbações sonoras) como campos escalares não massivos, se propagando sobre o fluido como se estivessem sujeitos a geometria efetiva determinada pela métrica acústica $g_{\mu\nu}$. A geometria acústica depende do campo de velocidades $\vec{v}$ e da densidade ρ , variáveis locais do fluxo. Essa dependência é expressa através da métrica da seguinte forma

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{\rho_0}{c} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & \vdots & -(v_0)_j \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ -(v_0)_i & \vdots & \delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

sendo ρ_0 e $(v_0)_i$ termos não perturbados ($\vec{v} = \vec{v}_0 + \epsilon \vec{v}_1$ e $\rho = \rho_0 + \epsilon \rho_1$), satisfazendo as equações da continuidade e de Euler.

Além disso, quantizando o campo Φ_1 , que descreve os fônons, Unruh conseguiu demonstrar que a teoria prevê um fenômeno análogo à radiação Hawking para o caso do som se propagando em um fluido cujo fluxo é tal que a geometria acústica, determinada por este último, se assemelha ao espaço-tempo de Schwarzschild.

Neste trabalho seguimos os mesmos passos desenvolvidos no artigo de Unruh de 1981, introduzindo, entretanto, algumas inovações que tínhamos em mente com relação ao que já foi feito nessa área até então. Basicamente, a idéia inovadora consiste em criar um análogo tomando como espaço de fundo um espaço curvo, diferentemente do que geralmente se faz. Os análogos gravitacionais em matéria condensada são construídos sobre um espaço euclidiano onde o fluido obedece as equações clássicas da dinâmica. Ao invés disso iremos partir de uma geometria esférica, nos servindo das equações relativísticas da dinâmica dos fluidos de modo a

inserir diretamente nessas equações o caráter não plano do espaço base. Inicialmente, o objetivo de modelarmos um análogo gravitacional sobre uma esfera é criar um buraco mudo e um buraco surdo (correspondentes acústicos do buraco negro e do buraco branco) coexistindo num mesmo espaço compacto e conexo, situados em pólos opostos. Analisamos também as implicações decorrentes dessas modificações sobre as propriedades dos análogos, além de estudar as possíveis soluções para o fluxo sobre a esfera.

Nesse capítulo aplicaremos tais idéias propostas acima com a finalidade de determinarmos a métrica acústica associada a esta abordagem diferenciada. Na última seção discutiremos um pouco sobre o limite dentro do qual podemos falar em fônons ou quantização do som.

2.2 Equações de fluxo relativísticas

De acordo com o trabalho do Unruh, para demonstrarmos que as perturbações sonoras satisfazem uma equação de Klein-Gordon devemos rearranjar as equações da dinâmica dos fluidos de maneira conveniente, introduzindo ainda perturbações em torno de uma solução conhecida $(\rho_0, P_0 \text{ e } \vec{v}_0)$. Assim, o primeiro passo nessa tarefa é evidenciar quais equações regem a dinâmica do fluido em questão. Como foi mencionado na seção anterior, nossa proposta de utilizar uma esfera fazendo o papel de espaço de fundo nos conduziu, devido a facilidades em lidar com geometrias não planas, à escolha das equações de fluxo relativísticas (veja [43] pag. 69)

$$u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + P/c^2) \nabla^\mu u_\mu = 0 \quad (2.5)$$

$$(P/c^2 + \rho) u^\mu \nabla_\mu u_\nu + (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \nabla^\mu P = 0 \quad (2.6)$$

onde c a velocidade da luz e $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, ou então

$$(u^t, u^\theta, u^\phi) = (cdt/d\tau, d\theta/d\tau, d\phi/d\tau),$$

é a 3-velocidade de um elemento de fluido, caracterizando um problema 2 dimensional no espaço. A estrutura esférica envolvida no problema é incorporada nas equações acima simplesmente utilizando como métrica

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.7)$$

Além disso, a geometria esférica estará implicitamente presente na derivada covariante ∇_μ .

É importante nesse ponto não confundir a métrica esférica apontada logo acima, representando o espaço sobre o qual o fluido se move, com a métrica acústica efetiva responsável pela trajetória dos fônons.

Notando $\gamma = dt/d\tau$, podemos reescrever a 3-velocidade u^μ da seguinte forma

$$u^\mu = \gamma(c, v^\theta, v^\phi) \quad (2.8)$$

com $v^\theta = d\theta/dt$ e $v^\phi = d\phi/dt$. Utilizando a igualdade $u^\mu u_\mu = -c^2$ não é difícil verificar que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.9)$$

onde $v^2 = r^2[(v^\theta)^2 + \sin^2 \theta (v^\phi)^2]$.

Uma vez que a velocidade do fluido envolvida no nosso problema é da ordem da velocidade do som, podemos nos restringir ao limite não relativístico, ou seja, podemos considerar $v \ll c$, e portanto $\gamma \approx 1$. Nesse caso $u^\mu \approx v^\mu = (c, v^\theta, v^\phi)$. Fazendo essa aproximação e cortando os termos com $1/c^2$, a equação escalar (2.5) assume a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^\theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + v^\phi \frac{\partial \rho}{\partial \phi} + \rho \left\{ \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\phi}{\partial \phi} + \cot \theta v^\theta \right\} = 0. \quad (2.10)$$

Antes de prosseguirmos na manipulação dessa equação, notemos que (v^θ, v^ϕ) são as componentes do vetor $\vec{v}$ (parte espacial do 3-vetor v^μ) na base coordenada $\{\partial_\theta, \partial_\phi\}$. Como essa base não é normalizada, por vezes convém utilizarmos as componentes $(v^{\hat{\theta}}, v^{\hat{\phi}})$ correspondentes a base ortonormal (base tetrada) $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$. A relação entre elas é dada por

$$\begin{cases} v^\theta = v^{\hat{\theta}}/r \\ v^\phi = v^{\hat{\phi}}/(r \sin \theta) \end{cases}$$

Reescrevendo a Eq. (2.10) com as componentes da base ortonormal teremos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{v^{\hat{\theta}}}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{v^{\hat{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} + \rho \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial v^{\hat{\theta}}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v^{\hat{\phi}}}{\partial \phi} + \frac{\cot \theta}{r} v^{\hat{\theta}} \right\} = 0. \quad (2.11)$$

Finalmente, essa equação pode ser escrita de maneira mais compacta colocando-a na forma vetorial usual

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.12)$$

ou ainda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.13)$$

Essa última equação nada mais é do que a equação da continuidade (que expressa a conservação de massa em mecânica dos fluidos) restrita à esfera bidimensional de raio r .

Aplicando as mesmas aproximações para as três componentes da Eq. (2.6) ($\nu = t, \theta, \phi$, ou seja, considerando γ próximo de 1 e eliminando os termos de ordem superior em $1/c$, obtemos as seguintes equações

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{v^{\hat{\theta}}}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{v^{\hat{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 & (\nu = t) \\ \rho \left[\frac{\partial v^{\hat{\theta}}}{\partial t} + \frac{v^{\hat{\theta}}}{r} \frac{\partial v^{\hat{\theta}}}{\partial \theta} + \frac{v^{\hat{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial v^{\hat{\theta}}}{\partial \phi} - \frac{\cot \theta}{r} (v^{\hat{\phi}})^2 \right] + v^{\hat{\theta}} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} (1 + (v^{\hat{\theta}})^2) + \frac{v^{\hat{\theta}} v^{\hat{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 & (\nu = \theta) \\ \rho \left[\frac{\partial v^{\hat{\phi}}}{\partial t} + \frac{v^{\hat{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial v^{\hat{\phi}}}{\partial \phi} + \frac{v^{\hat{\theta}}}{r} \frac{\partial v^{\hat{\phi}}}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v^{\hat{\phi}} v^{\hat{\theta}} \right] + v^{\hat{\phi}} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} (1 + (v^{\hat{\phi}})^2) + \frac{v^{\hat{\theta}} v^{\hat{\phi}}}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 & (\nu = \phi) \end{cases}$$

Inserindo, então, a primeira das três equações acima nas duas restantes, teremos duas novas equações

$$\begin{cases} \frac{\partial v^{\hat{\theta}}}{\partial t} + \frac{v^{\hat{\theta}}}{r} \frac{\partial v^{\hat{\theta}}}{\partial \theta} + \frac{v^{\hat{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial v^{\hat{\theta}}}{\partial \phi} - \frac{\cot \theta}{r} (v^{\hat{\phi}})^2 + \frac{1}{r \rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial v^{\hat{\phi}}}{\partial t} + \frac{v^{\hat{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial v^{\hat{\phi}}}{\partial \phi} + \frac{v^{\hat{\theta}}}{r} \frac{\partial v^{\hat{\phi}}}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v^{\hat{\phi}} v^{\hat{\theta}} + \frac{1}{r \rho \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Novamente, as equações acima podem ser colocadas num formato vetorial de modo que cada uma delas corresponda, respectivamente, às componentes θ e ϕ da equação vetorial

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho}. \quad (2.15)$$

Escrita dessa forma, fica claro se tratar de uma equação clássica da dinâmica dos fluidos conhecida como equação de Euler. Esta equação pode ser interpretada como a segunda lei de Newton para cada elemento de fluido. Note que, apesar das aproximações não relativísticas, impostas às Eqs. (2.5) e (2.6), terem nos conduzido à equações clássicas da dinâmica dos fluidos, não devemos esquecer que estamos trabalhando sobre uma esfera de raio r e portanto, mesmo sendo idênticas (nessa forma vetorial) às equações tridimensionais, as Eqs. (2.13) e (2.15) devem ser encaradas aqui como restrições destas sobre a esfera de raio r , de maneira que as variáveis ρ , $\vec{v}$ e P dependem apenas de θ e ϕ (pois r é constante) e a componente radial da velocidade é igual a zero. Esta é a razão pela qual a Eq. (2.15) apresenta apenas duas componentes.

Como é conhecido em hidrodinâmica, a equação da continuidade e a equação de Euler descrevem bem a dinâmica dos fluidos ideais.

Carregaremos a notação vetorial das Eqs. (2.13) e (2.15) devido a facilidade operacional, sempre mantendo em mente, no entanto, sob quais condições estão sujeitas.

2.3 Equação de Klein-Gordon para o som

O objetivo central dessa seção é manipular as Eqs. de movimento (2.13) e (2.15) afim de obter a equação de propagação do som, nos moldes de uma equação de Klein-Gordon não massiva, e consequentemente, evidenciar a métrica acústica efetiva sentida pelas ondas sonoras se propagando sobre uma esfera bidimensional. Para realizar isto é necessário reescrever a equação de Euler, deduzida a partir das equações relativísticas (2.5) e (2.6), na forma da equação de Bernoulli. Isto é possível impondo que o fluxo seja irrotacional e o fluido seja barotrópico como veremos a seguir.

2.3.1 Equação de Bernoulli

Ao deduzir a equação de Euler sobre uma esfera na seção anterior, não consideramos possíveis forças externas agindo sobre o sistema. Para levarmos em conta a existência dessas forças devemos adicionar um termo a mais na equação (2.15). Nos restringindo ao caso da força por unidade de massa $\vec{f}$, atuando sobre o fluido, ser derivada de um potencial Ψ , isto é, $\vec{f} = \vec{\nabla}\Psi$, a equação de Euler deve ser reescrita como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{f}. \quad (2.16)$$

Apesar de não alterar a equação de onda para o som, a força externa $\vec{f}$ desempenhará um papel fundamental no momento de determinarmos possíveis soluções das equações de movimento (2.13) e (2.16). Isto ficará mais claro na seção 4.3.

Neste ponto, o procedimento usualmente seguido quando se está lidando com um espaço físico euclidiano 3-dimensional é utilizar a identidade vetorial

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}, \quad (2.17)$$

onde a quantidade $\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ é chamado de vorticidade, para reescrever a Eq. (2.16) da seguinte forma:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}(v^2/2 - \Psi) + \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{v} \times \vec{w} = 0. \quad (2.18)$$

Assim, impondo que o fluxo seja irrotacional, isto é, que $\vec{w} = 0$, o último termo do lado esquerdo da Eq. (2.18) se anula. Entretanto, no nosso caso esférico 2-dimensional a relação (2.17) não é precisa, mesmo porque não faz sentido falarmos em produto vetorial entre vetores de um espaço com duas dimensões. Porém, é possível, utilizando a notação tensorial desenvolvida na seção 2.3.3, estabelecer uma relação análoga à relação (2.17) e impor do mesmo modo uma condição de irrotacionalidade ao fluxo. De acordo com este formalismo tensorial podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= \frac{1}{2} \nabla^i (v^2) \partial_i - (v^k \nabla_k) v^i \partial_i \\ &= [e^{ij} v_k (\nabla_j v^k) - v^k (\nabla_k v^i)] \partial_i \\ &= [v_k (\nabla^i v^k - \nabla^k v^i)] \partial_i \\ &= 2v_k \Omega^{ik} \partial_i, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde o tensor $\Omega^{ik} = (\nabla^i v^k - \nabla^k v^i)/2$ é a taxa de rotação do fluido, ou seja, o correspondente 2-dimensional da vorticidade. Desta forma, impondo que a taxa de rotação do fluxo seja nula *, i.e., que o tensor Ω^{ik} seja igual à zero, teremos que

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2,$$

lembrando que o módulo da velocidade ao quadrado v^2 é, no nosso caso bidimensional, dado por

$$v^2 = (v^\theta)^2 + (v^\phi)^2 = r^2 (v^\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (v^\phi)^2. \quad (2.20)$$

Sob essas condições existirá uma função escalar $\Phi(t; \theta, \phi)$ definida sobre a esfera tal que

$$\vec{v} = -\vec{\nabla} \Phi, \quad (2.21)$$

onde

$$\vec{\nabla} \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (2.22)$$

*Condição a qual chamaremos adiante irrotacionalidade do fluxo, como no caso 3-dimensional.

de modo que

$$v^{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad v^{\hat{\phi}} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}.$$

Se nos remetermos ao final da seção 3.8.3 veremos que a condição necessária para que um vetor definido sobre uma esfera S^2 seja escrito como o gradiente de uma função escalar é dada por $\partial_i v_j - \partial_j v_i = 0$. Esta condição é equivalente a taxa de rotação do fluido ser igual a zero. De fato, se $\Omega^{ik} = 0$ então $2\Omega_{ik} = \nabla_i v_k - \nabla_k v_i = \partial_i v_k - \partial_k v_i = 0$.

Finalmente, impondo a condição de isentropicidade do fluido (para o qual a entropia é constante em toda parte), é válida a relação $\vec{\nabla} P = \rho \vec{\nabla} h^\dagger$, onde $h = u + P/\rho$ é a entalpia por unidade de massa do fluido e u é a energia interna por unidade de massa. Essa relação adicionada a irrotacionalidade do fluxo nos permitem escrever

$$\vec{\nabla} \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \Phi)^2 + h - \Psi \right\} = 0. \quad (2.23)$$

Integrando essa equação concluímos que a quantidade $-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \Phi)^2 + h - \Psi$ é uma função dependente apenas do tempo. Se absorvermos a constante de integração, que depende do tempo, na definição de Φ , a forma da velocidade não sofrerá nenhuma alteração e ainda poderemos escrever

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \Phi)^2 + h - \Psi = 0. \quad (2.24)$$

Essa última equação é conhecida como equação de Bernoulli. Convém lembrar que as variáveis Φ , h e Ψ dependem do tempo t e das coordenadas espaciais esféricas θ e ϕ .

2.3.2 Perturbações sonoras em fluidos ideais, barotrópicos e irrotacionais

Pequenas variações na pressão do fluido causam o deslocamento das moléculas que o compõem alterando a densidade do fluido naquela região. Por sua vez, uma mudança na densidade ocasiona uma nova variação na pressão e assim o ciclo recomeça. De maneira bem superficial, esse processo descreve o fenômeno de propagação do som. O que nos interessa aqui, no entanto, é a compreensão

[†]A primeira lei na termodinâmica na “representação da entalpia”, $dh = Tds + dP/\rho$, implica na relação $\vec{\nabla} P = \rho \vec{\nabla} h$ para fluidos isentrópicos.

do conceito de som como a propagação de pequenas perturbações das quantidades dinâmicas do fluido (ρ, P, Φ) . Matematicamente falando, seja

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \epsilon \rho_1 \\ P &= P_0 + \epsilon P_1 \\ \Phi &= \Phi_0 + \epsilon \Phi_1,\end{aligned}$$

denominamos ondas sonoras como a propagação das perturbações lineares $(\epsilon \rho_1, \epsilon P_1, \epsilon \Phi_1)$ em torno de uma solução exata (ρ_0, P_0, Φ_0) .

Inserindo essas perturbações lineares na equação da continuidade (2.13) e considerando apenas termos de primeira ordem em ϵ obtemos a equação

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1 + \rho_1 \vec{v}_0) = 0, \quad (2.25)$$

onde $\vec{v}_0 = -\vec{\nabla} \Phi_0$ e $\vec{v}_1 = -\vec{\nabla} \Phi_1$.

Impondo que o fluido seja barotrópico (em cujo caso a pressão é função apenas da densidade), podemos descrever a entalpia h como função da pressão P , e assim expandindo em torno de P_0 teremos

$$h(P) = h(P_0) + \left(\frac{dh}{dP} \right)_{P=P_0} (P - P_0) + \mathcal{O}(P^2), \quad (2.26)$$

ou ainda

$$\begin{aligned}h(P) &\simeq h(P_0) + \frac{1}{\rho_0} (P - P_0) \\ &\simeq h(P_0) + \epsilon \frac{P_1}{\rho_0}.\end{aligned} \quad (2.27)$$

Usando este resultado para linearizar a equação de Bernoulli (2.24) obtemos

$$P_1 = \rho_0 (\partial_t \Phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi_1). \quad (2.28)$$

Note que não existe nenhuma contribuição do potencial das forças externas Ψ na equação de Bernoulli linearizada.

Utilizando novamente a condição de barotropicidade imposta ao fluido teremos que

$$\rho_0 + \epsilon \rho_1 = \rho(P) = \rho(P_0) + \left(\frac{d\rho}{dP} \right)_{P=P_0} (P - P_0) + \mathcal{O}(P^2) \quad (2.29)$$

implicando na relação

$$\rho_1 = \left(\frac{d\rho}{dP} \right)_{P=P_0} P_1 = \frac{1}{c_s^2} P_1, \quad (2.30)$$

onde $c_s = \sqrt{(dP/d\rho)_{\rho_0}}$ é a definição da velocidade do som no fluido. Substituindo P_1 da Eq. (2.28) na equação acima obtemos

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{c_s^2}(\partial_t \Phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi_1). \quad (2.31)$$

Introduzindo finalmente a expressão acima para ρ_1 na equação da continuidade linearizada (2.25) e multiplicando tudo por -1, encontramos a relação

$$-\partial_t \left[\frac{\rho_0}{c_s^2}(\partial_t \Phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi_1) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho_0 \vec{\nabla} \Phi_1 - \frac{\rho_0}{c_s^2}(\partial_t \Phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi_1) \vec{v}_0 \right] = 0, \quad (2.32)$$

que pode ser vista como a equação de onda satisfeita pelo potencial escalar Φ_1 . Portanto, dada uma solução exata $(\vec{v}_0, \rho_0, P_0)$ das quantidades dinâmicas do fluxo e conhecida a equação de estado $P = P(\rho)$ do fluido podemos resolver a equação (2.32) e encontrar a solução para Φ_1 , e assim obter $\vec{v}_1 = -\vec{\nabla} \Phi_1$, P_1 através da Eq. (2.28) e ρ_1 a partir da Eq. (2.31), descrevendo completamente a propagação do som.

2.3.3 Analogia com a Relatividade Geral

Mesmo tendo seguido um procedimento aparentemente idêntico ao caso tridimensional ao introduzir as perturbações sonoras nas equações de movimento do fluido, na seção anterior, nosso caso esférico bidimensional (fluido restrito a uma esfera bidimensional) apresenta algumas particularidades como veremos a seguir.

Em primeiro lugar, os vetores que compõem a Eq. (2.32) são vetores definidos sobre a variedade S^2 , cuja geometria é descrita pelo elemento de linha

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.33)$$

O fato de estarmos lidando com uma geometria não plana sugere o uso de todo ferramental de geometria diferencial utilizado em Relatividade Geral. Podemos assim, reescrever a Eq. (2.32) de maneira mais compacta nos servindo do formalismo tensorial. Antes disso, vejamos algumas propriedades geométricas associadas à métrica (2.33) que podem nos ser úteis.

Como já foi brevemente mencionado na seção 2.2, iremos adotar a notação $V^i = (V^\theta, V^\phi)^\dagger$ para as componentes de um vetor qualquer $\vec{V}$, definido sobre a esfera de

[†]Utilizaremos índices latinos para vetores espaciais e índices gregos para vetores espaço-temporais.

raio r , escrito na base coordenada $\{\partial_\theta, \partial_\phi\}$ e $V^{\hat{i}} = (V^{\hat{\theta}}, V^{\hat{\phi}})$ para as componentes deste vetor na base tetrada $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$.

Por definição, a base tetrada $\{\hat{e}_a\}$ de um dado espaço não euclidiano, dotado da métrica g_{ij} , deve satisfazer a relação[§]

$$(\hat{e}_a)^i (\hat{e}_b)_i = g_{ij} (\hat{e}_a)^i (\hat{e}_b)^j = \delta_{ab}. \quad (2.34)$$

É fácil verificarmos que os vetores

$$\begin{aligned} \hat{e}_\theta &= (1/r) \partial_\theta \\ \hat{e}_\phi &= (1/r \sin \theta) \partial_\phi \end{aligned} \quad (2.35)$$

satisfazem a relação (2.34) para a métrica (2.33) e definem, portanto, a base tetrada correspondente a este espaço.

A partir disto é possível determinar as relações entre as componentes de um vetor qualquer $\vec{V}$ nas bases coordenadas e tetradas. Elas são

$$\begin{aligned} V^\theta &= V^{\hat{\theta}}/r \\ V^\phi &= V^{\hat{\phi}}/(r \sin \theta). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Os operadores diferenciais, usualmente conhecidos como gradiente e divergente para o caso plano, aplicados respectivamente a um campo escalar Ψ e a um campo vetorial V^i , podem ser generalizados ao caso não plano reescrevendo-os na forma tensorial $\nabla^i \Psi \partial_i$ e $\nabla_i V^i$, onde ∇_i é a derivada covariante definida como

$$\nabla^i \Psi = \partial^i \Psi \quad (2.37)$$

quando aplicada a um campo escalar e

$$\nabla_i V^j = \partial_i V^j + \Gamma_{ik}^j V^k \quad (2.38)$$

quando aplicada a um vetor. Os coeficientes Γ_{ik}^j são chamados de símbolos de Christoffel e estão relacionados com a curvatura do espaço através de derivadas parciais das componentes da métrica g_{ij} deste espaço. Numa base coordenada, esta relação pode ser expressa como

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{jm} (\partial_i g_{mk} + \partial_k g_{mi} - \partial_m g_{ik}). \quad (2.39)$$

[§]Se estivéssemos considerando o tempo, deveríamos reescrever a relação (2.34) como $g_{\mu\nu} (\hat{e}_\alpha)^\mu (\hat{e}_\beta)^\nu = \eta_{\alpha\beta}$.

Note que, apesar de não estarmos levando em consideração a parte temporal, como é necessário para o caso dos espaços-tempos da Relatividade Geral, o tempo pode ser facilmente incorporado nas fórmulas acima apenas inserindo índices gregos. Por enquanto, pretendemos apenas estender a definição do operador diferencial $\vec{\nabla}$ (que age apenas na parte espacial) para um caso geral, ou seja, para geometrias não planas. Por esta razão, nos interessa apenas analisar a parte espacial do operador generalizado.

Para o espaço definido pela métrica (2.33), associado à esfera de raio r , podemos obter esses operadores diferenciais através de dois caminhos diferentes. O primeiro deles, no qual nos baseamos na seção (2.2), é obtido escrevendo o gradiente e o divergente do espaço euclidiano em coordenadas esféricas e restringindo a expressão total à esfera bidimensional (ou seja, impondo $V^r = 0$ e $r = cte$). Obtemos então

$$\vec{\nabla}\Psi = \left(\frac{1}{r}\partial_\theta\Psi\right)\hat{e}_\theta + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\Psi\right)\hat{e}_\phi \quad (2.40)$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\partial_\theta V^\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi V^\phi + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}V^\theta \quad (2.41)$$

Outra maneira de obtermos essas expressões é colocando em prática o formalismo tensorial exposto acima. No caso do gradiente não encontramos nenhuma dificuldade em verificar a equivalência. De fato

$$\begin{aligned} (\nabla^i\Psi)\partial_i &= (\partial^i\Psi)\partial_i \\ &= (g^{ij}\partial_j\Psi)\partial_i \\ &= \left(\frac{1}{r^2}\partial_\theta\Psi\right)\partial_\theta + \left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi\Psi\right)\partial_\phi \\ &= \left(\frac{1}{r^2}\partial_\theta\Psi\right)r\hat{e}_\theta + \left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi\Psi\right)r\sin\theta\hat{e}_\phi \\ &= \left(\frac{1}{r}\partial_\theta\Psi\right)\hat{e}_\theta + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\Psi\right)\hat{e}_\phi \\ &= \vec{\nabla}\Psi \end{aligned} \quad (2.42)$$

Por outro lado, para estabelecermos a equivalência no caso da divergência é preciso encontrar os Símbolos de Christoffel da métrica (2.33). Com um pouco de cálculo podemos verificar que as únicas componentes não nulas são $\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\cos\theta\sin\theta$

e $\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cos\theta/\sin\theta$. Assim, teremos que

$$\begin{aligned}
\nabla_i V^i &= \partial_i V^i + \Gamma_{ij}^i V^j \\
&= \partial_\theta V^\theta + \partial_\phi V^\phi + \Gamma_{\phi\theta}^\phi V^\theta \\
&= \partial_\theta \left(\frac{V^\theta}{r} \right) + \partial_\phi \left(\frac{V^\phi}{r \sin\theta} \right) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{V^\theta}{r} \\
&= \frac{1}{r} \partial_\theta V^\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi V^\phi + \frac{\cos\theta}{r \sin\theta} V^\theta \\
&= \vec{\nabla} \cdot \vec{V}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

como queríamos demonstrar.

Voltando à Eq. (2.32), vemos que é possível reescrevê-la na forma compacta

$$\partial_t V^t + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \tag{2.44}$$

definindo as quantidades

$$V^t = -\frac{\rho_0}{c_s^2} (\partial_t \Phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi_1) \quad \text{e} \quad \vec{V} = -\frac{\rho_0}{c_s^2} [(\partial_t \Phi_1) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi_1) \vec{v}_0 - c_s^2 \vec{\nabla} \Phi_1].$$

Ou ainda,

$$\begin{cases} V^t = -\rho_0/c_s^2 \left[\partial_t \Phi_1 + (v_0^\theta) \partial_\theta \Phi_1 + (v_0^\phi) \partial_\phi \Phi_1 \right] \\ V^\theta = -\rho_0/c_s^2 \left[(v_0^\theta) \partial_t \Phi_1 + ((v_0^\theta)^2 - c_s^2/r^2) \partial_\theta \Phi_1 + (v_0^\theta)(v_0^\phi) \partial_\phi \Phi_1 \right] \\ V^\phi = -\rho_0/c_s^2 \left[(v_0^\phi) \partial_t \Phi_1 + ((v_0^\phi)^2 - c_s^2/r^2 \sin^2 \theta) \partial_\phi \Phi_1 + (v_0^\theta)(v_0^\phi) \partial_\theta \Phi_1 \right] \end{cases}$$

sendo V^θ e V^ϕ as componentes do vetor $\vec{V}$ na base coordenada. Devido a relação (2.43) é possível ainda colocar a Eq. (2.44) na forma

$$\partial_t V^t + \nabla_i V^i = 0, \tag{2.45}$$

ou então

$$\nabla_\mu V^\mu = 0, \tag{2.46}$$

incluindo o tempo t na derivada covariante.

Ao mesmo tempo, o 3-vetor $V^\mu = (V^t, V^\theta, V^\phi)$ pode ser convenientemente escrito como o produto de uma matriz 3x3 por uma matriz coluna, com componentes iguais as derivadas parciais do campo Φ com relação a t , θ e ϕ

$$\begin{pmatrix} V^t \\ V^\theta \\ V^\phi \end{pmatrix} = \frac{\rho_0}{c_s^2} \begin{pmatrix} -1 & -v_0^\theta & -v_0^\phi \\ -v_0^\theta & [c_s^2/r^2 - (v_0^\theta)^2] & -v_0^\theta v_0^\phi \\ -v_0^\phi & -v_0^\theta v_0^\phi & [c_s^2/(r^2 \sin^2 \theta) - (v_0^\phi)^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \Phi_1 \\ \partial_\theta \Phi_1 \\ \partial_\phi \Phi_1 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

Emprestando novamente o formalismo tensorial, essa multiplicação de matrizes assume a simples forma

$$V^\mu = f^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_1, \quad (2.48)$$

onde consideramos

$$f^{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c_s^2} \begin{pmatrix} -1 & -v_0^\theta & -v_0^\phi \\ -v_0^\theta & [c_s^2/r^2 - (v_0^\theta)^2] & -v_0^\theta v_0^\phi \\ -v_0^\phi & -v_0^\theta v_0^\phi & [c_s^2/(r^2 \sin^2 \theta) - (v_0^\phi)^2] \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Assim, substituindo o vetor V^μ pela quantidade $f^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi$ na Eq. (2.46), obtemos

$$\nabla_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_1) = 0. \quad (2.50)$$

Porém

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_1) &= \partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_1) + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu (f^{\alpha\nu} \partial_\nu \Phi_1) \\ &= \partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_1) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (f^{\theta\nu} \partial_\nu \Phi_1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

já que o único Símbolo de Christoffel relevante aqui é novamente $\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cos \theta / \sin \theta$.

Chamando $h^{\mu\nu} = \sin \theta f^{\mu\nu}$ teremos

$$\begin{aligned} \partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_1) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (f^{\theta\nu} \partial_\nu \Phi_1) &= \partial_\mu \left(\frac{1}{\sin \theta} h^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_1 \right) + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (h^{\theta\nu} \partial_\nu \Phi_1) \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \partial_\mu (h^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_1) - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (h^{\theta\nu} \partial_\nu \Phi_1) + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (h^{\theta\nu} \partial_\nu \Phi_1) \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \partial_\mu (h^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_1) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Portanto

$$\partial_\mu (h^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_1) = 0. \quad (2.53)$$

Finalmente, a semelhança com a Relatividade Geral fica nítida ao definirmos uma outra matriz 3x3, $g^{\mu\nu}$, relacionada com $h^{\mu\nu}$ por

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}, \quad (2.54)$$

onde g é o determinante da matriz inversa de $g^{\mu\nu}$ que chamamos de $g_{\mu\nu}$. Em termos de $g^{\mu\nu}$, a Eq. (2.53) quando multiplicada por $1/\sqrt{-g}$, ganha a forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi_1) = 0. \quad (2.55)$$

Esta última equação é a forma de D’Alambert da equação de Klein-Gordon não massiva $\nabla_\mu\nabla^\mu\Phi_1 = 0$ (veja equação (3.4.10) em [43]) em um espaço-tempo curvo de métrica $g_{\mu\nu}$ (note que aqui ∇_μ é a derivada covariante associada à métrica $g_{\mu\nu}$ e não mais à métrica esférica (2.33)). Isto sugere que podemos encarar o campo Φ_1 como um campo escalar de Klein-Gordon não massivo se propagando em um espaço-tempo efetivo de métrica $g_{\mu\nu}$. Denominaremos este espaço-tempo curvo especial, sentido pelas ondas sonoras de um fluido restrito a uma esfera de raio r , de “espaço-tempo acústico esférico”.

Por definição,

$$\det(h^{\mu\nu}) = \det(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = (\sqrt{-g})^3 \det(g^{\mu\nu}) = -\sqrt{-g}. \quad (2.56)$$

Como $\det(h^{\mu\nu}) = -\rho_0^3 \sin\theta/(r^4 c_s^2)$, concluímos que

$$\det(g_{\mu\nu}) = g = -\frac{\rho_0^6 \sin^2\theta}{r^8 c_s^4}. \quad (2.57)$$

Assim, podemos deduzir da definição (2.56) que as componentes contravariantes $g^{\mu\nu}$ em coordenadas esféricas (t, θ, ϕ) da “métrica acústica esférica” é, em representação matricial, dada por

$$g^{\mu\nu} = \frac{r^4}{\rho_0^2} \begin{pmatrix} -1 & -v_0^\theta & -v_0^\phi \\ -v_0^\theta & [c_s^2/r^2 - (v_0^\theta)^2] & -v_0^\theta v_0^\phi \\ -v_0^\phi & -v_0^\theta v_0^\phi & [c_s^2/(r^2 \sin^2\theta) - (v_0^\phi)^2] \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Para obter as componentes covariantes desta métrica, basta inverter a matriz acima, pois, por definição $g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha$. O resultado é

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho_0^2}{r^4 c_s^2} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & -r^2(v_0^\theta) & -r^2 \sin^2\theta(v_0^\phi) \\ -r^2(v_0^\theta) & r^2 & 0 \\ -r^2 \sin^2\theta(v_0^\phi) & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

lembrando que $v_0^2 = r^2(v_0^\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta(v_0^\phi)^2$. Apesar das componentes da métrica estarem escritas em função das componentes do vetor $\vec{v}_0$ na base coordenada, poderíamos

muito bem expressá-las em função das componentes $(v_0^{\hat{\theta}}, v_0^{\hat{\phi}})$, associadas à base tetrada e relacionadas através das relações (2.36). Isto não implicaria, no entanto, nenhuma alteração da métrica ou da base coordenadas dual $\{dt, d\theta, d\phi\}$ na qual ela está expressa.

É importante ressaltarmos que o espaço-tempo relativístico artificial descrito pela métrica (2.59) serve apenas na descrição das ondas sonoras, através da Eq. (2.55). Em outras palavras, a analogia estabelecida permite decrevermos o comportamento do som classicamente, como é de costume, ou de forma relativística, tratando-o como um campo de Klein-Gordon não massivo se deslocando no espaço-tempo acústico esférico. Por outro lado, a dinâmica do fluido ideal, barotrópico e irrotacional, sobre o qual o som é definido, continua sendo regida pelas equações clássicas da hidrodinâmica, definidas em um espaço-tempo newtoniano, de modo que a dinâmica do próprio espaço-tempo acústico seja controlada pela evolução das quantidades clássicas $(\vec{v}_0, \rho_0, c_s)$, uma vez que a métrica (2.59) é função dessas variáveis. Ou seja, o espaço-tempo acústico esférico não está sujeito às equações de Einstein da Relatividade Geral.

Além desta ressalva, convém mencionarmos que o espaço-tempo acústico esférico é construído mantendo o mesmo sistema de coordenadas (t, θ, ϕ) do espaço-tempo newtoniano, sobre o qual o fluido se encontra. No entanto, podemos cobri-lo com quaisquer outros sistemas de coordenadas compatíveis.

2.4 Analogia com a escala de Planck

Quando lembramos que os sistemas físicos em matéria condensada são compostos de pequenas partículas, os átomos e as moléculas, logo concluímos que a analogia estabelecida na seção anterior entre características destes sistemas com propriedades gravitacionais deve somente ser observada no regime de baixas energias. Na realidade, a escala do comprimento de onda que determina esta ruptura é dada pelo caminho livre médio das moléculas do fluido, pois, para comprimentos de onda menores ou da ordem desta quantidade não faz mais sentido falar em ondas sonoras.

Este cenário é bastante similar ao que se espera que aconteça com a gravidade ao ultrapassar a escala de Planck, quando devemos perder o conceito de espaço-tempo suave, onde os campos relativísticos se propagam.

Capítulo 3

Espaço-tempo acústico

3.1 Introdução

Estabelecida a analogia entre o problema clássico de propagação do som num fluido ideal, barotrópico e irrotacional, restrito à esfera de raio r , e a propagação de campos escalares em espaços-tempos curvos, podemos utilizar todo o ferramental e a terminologia da Relatividade Geral para explorar as propriedades do espaço-tempo acústico, associado à métrica acústica $g_{\mu\nu}$, determinada na seção 2.3.3.

Na seção 3.2 analisaremos a estrutura topológica do espaço-tempo acústico, enquanto que sua estrutura geométrica será discutida na seção 3.3. Outras propriedades do espaço-tempo acústico serão expostas nas demais seções, como a possibilidade de formação de horizontes de evento e ergoregiões acústicas. Decidimos reservar, entretanto, um capítulo a parte (Cap. 5) para detalharmos a estrutura causal do espaço-tempo acústico, exemplificando com algumas soluções encontradas no Cap. 4.

Em todo o texto a seguir, suprimimos o índice 0 das quantidades $\vec{v}_0$, Φ_0 , ρ_0 e P_0 , associadas às soluções exatas das equações clássicas da dinâmica dos fluidos ideais, barotrópicos e irrotacionais. Nos casos que possam gerar qualquer tipo de confusão voltaremos a utilizar o índice.

3.2 Topologia do espaço-tempo acústico esférico

A estrutura mais fundamental da Relatividade Geral, o espaço-tempo, denotado geralmente $(\mathcal{M}, g)$, é definido como sendo uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$ munida de uma métrica lorentziana $g_{\alpha\beta}$. Como veremos na próxima seção, a métrica carrega informações sobre a geometria do espaço-tempo, determinando as distâncias entre os diferentes pontos que compõem a variedade.

De modo grosseiro, uma variedade diferenciável pode ser definida como um espaço topológico dotado de uma atlas maximal. Vemos assim que o espaço topológico, apesar de se tratar de uma estrutura matemática nem sempre lembrada nos problemas de Relatividade Geral, desempenha um papel fundamental na construção dos espaços-tempos e por esta razão daremos um pouco mais de atenção ao espaço topológico de nosso espaço-tempo acústico.

Antes de definirmos formalmente espaço topológico, é necessário definir uma estrutura ainda mais primitiva, a topologia.

Dado um conjunto de pontos X , uma topologia $\mathfrak{T}$ é uma família de subconjuntos de X (chamados de abertos) satisfazendo as três seguintes condições:

- O conjunto X e o conjunto vazio $\emptyset$ pertencem a família
- A intersecção finita de abertos é também um aberto
- A união finita ou infinita de abertos é também um aberto

Para um conjunto de pontos X é possível definir diversas topologias sobre ele, desde que satisfaçam as três condições acima. A família de subconjuntos contendo todos os subconjuntos de X define uma topologia chamada de topologia discreta, enquanto que o conjunto $\mathfrak{T} = \{X, \emptyset\}$ também é uma topologia chamada de topologia indiscreta. Um exemplo de topologia mais interessante é obtido pegando $X = \mathbb{R}$, o conjunto de números reais, e definindo $\mathfrak{T}$ como sendo o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que podem ser expressos como uma união de intervalos abertos (a, b) . Generalizando, para qualquer espaço métrico, incluindo $\mathbb{R}^n$, a coleção de todos os subconjuntos que podem ser expressos como uma união de bolas abertas * engendra uma topologia.

*Note que, para um espaço métrico M de medida m , uma bola aberta B de raio r e centrada em x_0 é definida como $B = \{x | m(x - x_0) < r, x \in M\}$, e portanto a topologia de bolas

Nesse contexto, um espaço topológico $(X, \mathfrak{I})$ consiste no conjunto de pontos X munido da topologia $\mathfrak{I}$.

Se $(X, \mathfrak{I})$ é um espaço topológico e A um subconjunto qualquer de X , podemos transformar A num espaço topológico definindo a topologia $\mathfrak{I} = \{U | U = A \cap O, O \in \mathfrak{I}\}$, construída através da intersecção dos elementos de $\mathfrak{I}$ com o subconjunto A . A topologia $\mathfrak{I}$ é chamada de topologia induzida.

Seja $(X_1, \mathfrak{I}_1)$ e $(X_2, \mathfrak{I}_2)$ dois espaços topológicos. Podemos transformar o espaço produto $X_1 \times X_2 \equiv \{(x_1, x_2) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ num espaço topológico $(X_1 \times X_2, \mathfrak{I})$, definindo $\mathfrak{I}$ como a coleção de todos os subconjuntos de $X_1 \times X_2$ que podem ser obtidos através da união dos subconjuntos da forma $O_1 \times O_2$, onde $O_1 \in \mathfrak{I}_1$ e $O_2 \in \mathfrak{I}_2$. $\mathfrak{I}$ é chamado de topologia produto. Podemos usar essa construção para definir uma topologia para $\mathbb{R}^n$. A topologia de $\mathbb{R}^n$ resultante de n produtos do espaço topológico $(\mathbb{R}, \text{topologia das bolas abertas de } \mathbb{R})$ é a mesma daquela construída com bolas abertas de $\mathbb{R}^n$.

Apenas para exemplificar a importância da topologia na matemática e na física, o conceito de continuidade transcende o conceito de medida e depende apenas da topologia dos espaços onde a função é definida. Seja $(X, \mathfrak{I})$ e $(Y, \mathfrak{I})$ dois espaços topológicos, uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se a imagem inversa, $f^{-1}[O] \equiv \{x \in X | f(x) \in O\}$, de todo aberto de Y for um aberto de X . Para uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, munidos da topologia de bolas abertas, a definição de continuidade apresentada logo acima é equivalente a definição usual com “ ϵ ’s e δ ’s”. Se f é contínua, bijetora e sua inversa contínua, f é chamada de *homeomorfismo* e $(X, \mathfrak{I})$ e $(Y, \mathfrak{I})$ são ditos serem *homeomorfos*. Espaços topológicos homeomorfos apresentam propriedades topológicas idênticas.

Em Relatividade Restrita, assumimos que o espaço-tempo de Minkowski é construído sobre o espaço topológico $(\mathbb{R}^4, \text{topologia das bolas abertas})$. Em mecânica clássica, no entanto, diferente do caso relativístico, o tempo não pode ser tratado como uma coordenada e deve ser visto como um parâmetro absoluto, cuja evolução independe do referencial. Desta forma, não cabe questionarmos qual é a topologia da união do espaço e do tempo clássicos. Podemos apenas definir separadamente a topologia do espaço e a topologia do tempo clássico.

abertas dependerá da medida considerada. Admitiremos a medida de Lebesgue a menos que seja mencionado o contrário.

No caso do espaço-tempo acústico esférico, apesar de termos partido de um sistema hidrodinâmico puramente clássico, o tempo Newtoniano t não pode mais ser “separado” das coordenadas espaciais da esfera no momento em que estabelecemos o espaço-tempo efetivo. Neste ponto o problema passa a ser um problema “relativístico” e portanto devemos considerar a topologia do espaço-tempo acústico esférico como a topologia produto de $\mathbb{R} \times S^2$. Por abuso de linguagem, em algumas ocasiões nos referimos à variedade do espaço-tempo acústico esférico simplesmente como $\mathbb{R} \times S^2$.

3.3 Métrica acústica esférica

Intuitivamente, o próprio nome métrica sugere a noção de distâncias entre diferentes pontos, ou eventos, de um espaço. De fato, a métrica de um espaço-tempo define sua geometria, determinando distâncias infinitesimais entre eventos infinitesimalmente próximos do espaço-tempo. Formalmente falando, uma métrica g é definida como um tensor do tipo $\mathcal{T}(0, 2)$ (covariante de ordem 2)

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (3.1)$$

satisfazendo as seguintes condições:

- A métrica g é simétrica, i.e. dados dois vetores v e u pertencentes ao espaço tangente V_p , o mapeamento bilinear $g : (v, u) \mapsto g(v, u)$ de $V_p \times V_p$ nos reais, definido pela métrica, deve verificar a relação $g(v, u) = g(u, v)$.
- A métrica g é não degenerada, i.e. para qualquer $v \in V_p$, $g(v, u) = 0$ se e somente se $u = 0$.

Desta forma, a quantidade $g(v, u)$ define um produto interno no espaço tangente V_p . Além disso, g pode definir um mapeamento linear entre V_p e V_p^* da seguinte forma. Seja um vetor $v \in V_p$

$$\begin{aligned} v \mapsto g(\cdot, v) &= g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu(\cdot, v^\alpha \partial_\alpha) \\ &= g_{\mu\nu} v^\alpha \delta_\alpha^\nu dx^\mu \\ &= g_{\mu\nu} v^\nu dx^\mu \\ &= v_\mu dx^\mu \in V_p^* \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde definimos $v_\mu = g_{\mu\nu}v^\nu$ como as componentes do vetor dual $v^* = g(\cdot, v)$.

O fato de g ser não degenerado implica que o mapeamento $v \mapsto g(\cdot, v)$ é bijetivo e portanto o mapeamento inverso existe. Esta propriedade da métrica nos permite também definirmos o tensor $\tilde{g}$ do tipo $\mathcal{T}(2, 0)$, dado por

$$\tilde{g} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu, \quad (3.3)$$

onde

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (3.4)$$

Se considerarmos $g_{\mu\nu}$ como componentes de uma matriz, $g^{\mu\nu}$ serão as componentes da matriz inversa. Usando (3.4) podemos facilmente verificar que $v^\mu = g^{\mu\nu}v_\nu$. Assim, $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$ determinam um isomorfismo canônico entre os espaços $V_p \equiv \mathcal{T}(1, 0)$ e $V_p^* \equiv \mathcal{T}(0, 1)$. Podemos ainda generalizar esta afirmação aos espaços $\mathcal{T}(k, l)$ e $\mathcal{T}(k \pm s, l \mp s)$, para $s \leq k, l$. Por exemplo,

$$\mathcal{T}(2, 1) \ni T^{\alpha\beta}{}_\gamma \mapsto T^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv g_{\mu\beta} T^{\alpha\mu}{}_\gamma \in \mathcal{T}(1, 2) \quad (3.5)$$

$$\mathcal{T}(1, 2) \ni T^\alpha{}_{\beta\gamma} \mapsto T^{\alpha\beta}{}_\gamma \equiv g^{\mu\beta} T^\alpha{}_{\mu\gamma} \in \mathcal{T}(2, 1). \quad (3.6)$$

Nestas circunstâncias, vemos que o tensor g , covariante de ordem 2, com componentes $g_{\mu\nu}$ em coordenadas esféricas (t, θ, ϕ) dadas por (2.59), definem bem uma métrica sobre o variedade $\mathbb{R} \times S^2$. De fato, o tensor g satisfaz a condição de simetria exigida, além de que, podemos facilmente demonstrar que a existência da matriz inversa de (2.59) implica na não degenerescência de g . Como já mencionamos na seção 2.3.3, a métrica g definida em (2.59) é chamada de “métrica acústica esférica”.

Uma importante propriedade da métrica é sua *assinatura*. Dada uma métrica $g_{\mu\nu}$ qualquer, sempre podemos encontrar uma base ortonormal $\{e_\mu(x)\}$ em cada espaço tangente de cada ponto x da variedade, chamada de base tetrada, verificando $(e_\mu)^\alpha (e_\nu)_\alpha = 0$ se $\mu \neq \nu$, e $(e_\mu)^\alpha (e_\nu)_\alpha = \pm 1$ se $\mu = \nu$. Chamamos de assinatura da métrica o número de ocorrências de sinais $+$ e $-$. A assinatura é uma propriedade independente da escolha da base ortonormal, sendo igual ao número de autovalores positivos e negativos da matriz $g_{\mu\nu}$. A métrica de um espaço-tempo da Relatividade Geral deve possuir assinatura $(-+++)$ ou $(+---)$, dependendo da convenção utilizada. Métricas com essas assinaturas são chamadas de métricas lorentzianas. Como nosso espaço-tempo acústico conta com apenas duas dimensões espaciais, a

métrica acústica esférica será lorentziana se sua assinatura for $(-++)$ ou $(+--)$, dependendo da convenção. É possível verificar que a métrica acústica esférica tem assinatura $(-++)$ e portanto é lorentziana.

Às vezes utilizamos a notação ds^2 no lugar de g para expressar a métrica. Neste caso damos o nome de elemento de linha a ds^2 e escrevemos

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.7)$$

omitindo o símbolo do produto tensorial $\otimes$ entre dx^μ e dx^ν .

O elemento de linha referente à métrica (2.59) é dado por

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{r^4 c_s^2} [-c_s^2 dt^2 + (dx^i - v^i dt) e_{ij} (dx^j - v^j dt)], \quad (3.8)$$

onde utilizamos a notação e_{ij} para designar as componentes espaciais da métrica esférica (2.33). Na forma extensa, o elemento de linha acima é igual a

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{r^4 c_s^2} [-(c_s^2 - v^2) dt^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2r^2 (v^\theta) dt d\theta - 2r^2 \sin^2 \theta (v^\phi) dt d\phi]. \quad (3.9)$$

A notação do elemento de linha de um espaço-tempo deixa bem claro a idéia da métrica representando distâncias infinitesimais ao quadrado.

3.4 4-velocidade e 4-aceleração do fluido

O movimento de um ponto material P em um espaço-tempo coberto pelas coordenadas[†] $x^\mu = (t, x^i)$ pode ser representado pela curva $x^\mu(\lambda)$, parametrizada por um parâmetro λ qualquer. Essa curva é também conhecida como linha de mundo da partícula material.

Sobre a linha de mundo do ponto material P definimos um campo vetorial u^μ , chamado de 4-velocidade de P :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau), \quad (3.10)$$

onde τ é um parâmetro afim bem específico denominado tempo próprio. Se $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo considerado, o tempo próprio de um ponto material

[†]Iremos considerar aqui a velocidade da luz igual a 1

seguindo a curva $x^\mu(\lambda)$ é dada por

$$\tau = \int_0^\lambda d\lambda' \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{dx^\nu}{d\lambda'}}. \quad (3.11)$$

Em Relatividade Geral, o tempo próprio τ associado a uma linha de mundo $x^\mu(\tau)$ coincide com o tempo marcado pelo relógio de um observador seguindo esta linha de mundo.

A partir da definição (3.11) de tempo próprio é fácil verificarmos que a 4-velocidade u^μ de um ponto material deve sempre satisfazer a relação

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1, \quad (3.12)$$

em todos os pontos da linha de mundo. Isto significa que $u = u^\mu(\tau)\partial_\mu$ é um campo vetorial tipo tempo. Lembre-se que, assumindo a convenção $(-+++)$ da assinatura, um vetor V^μ é tipo tempo se $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu < 0$, tipo luz se $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0$ e tipo espaço quando $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu > 0$.

É bastante comum dizermos que a 4-velocidade de uma partícula é um campo vetorial tangente à sua linha de mundo. À primeira vista, esta afirmação pode parecer um tanto estranha já que vetores são objetos definidos no espaço tangente V_p associado a cada ponto p da variedade, enquanto que a linha de mundo de uma partícula é um conjunto de pontos da variedade formando uma curva. No entanto, falar que a 4-velocidade é tangente a linha de mundo ($x^\mu(\tau)$) no ponto p , significa dizer que o vetor $u^\mu(p)$, definido no espaço tangente V_p , é paralelo ao vetor $dx = dx^\mu(\tau)\partial_\mu$, também definido em V_p , cujas componentes são obtidas pela diferença entre as coordenadas de dois pontos infinitesimalmente próximos, ou seja, $dx^\mu(\tau) = x^\mu(\tau + d\tau) - x^\mu(\tau)$ (onde $x^\mu(\tau)$ é a coordenada do ponto p).

Parametrizando a linha de mundo de uma partícula pelo tempo coordenada t , obtemos o 4-vetor

$$\frac{dx^\mu}{dt}(t) = \left(1, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right) = (1, \vec{V}), \quad (3.13)$$

tangente à linha de mundo, onde o 3-vetor $\vec{V}$ corresponde a velocidade da partícula medida por um observador inercial parado neste sistema de coordenadas (ao menos localmente).

Finalmente, uma partícula se movendo em um espaço-tempo qualquer, tal que sua 4-velocidade seja u^μ , seguirá uma geodésica se sua 4-aceleração a^ν for igual a

zero:

$$a^\nu = u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0. \quad (3.14)$$

Uma vez feita esta análise geral do movimento de um ponto material em um espaço-tempo qualquer, podemos aplicar estes resultados para o caso do espaço-tempo acústico esférico. O objetivo dessa seção é justamente analisar o movimento de uma partícula material, especialmente de um elemento de fluido, se movendo sobre a esfera sob o ponto de vista relativístico do espaço-tempo acústico esférico.

Do ponto de vista clássico, sabemos que um ponto material se movimentando sobre a esfera bidimensional de raio r pode ter sua trajetória descrita pela curva espacial $x^i(t) = (\theta(t), \phi(t))$, parametrizada pelo tempo clássico absoluto t . No caso desta curva descrever o movimento de um elemento de fluido, as derivadas das quantidades $\theta(t)$ e $\phi(t)$ com relação ao tempo devem ser iguais às componentes v^θ e v^ϕ da velocidade do fluido $\vec{v}$, como definido na Sec. 2.3.3. Ou seja, para cada instante de tempo t , teremos

$$v^\theta = \frac{d}{dt}\theta(t); v^\phi = \frac{d}{dt}\phi(t). \quad (3.15)$$

Na óptica relativística do espaço-tempo acústico esférico, a trajetória desse mesmo ponto material se movimentando sobre a esfera deve ser descrita pela curva $x^\mu(\lambda) = (t(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda))$ (definida sobre o espaço-tempo, e não apenas sobre a esfera), parametrizada por um parâmetro qualquer $\lambda^\ddagger$. Escolhendo λ igual a t , as componentes em coordenadas esféricas do 4-vetor $(dx^\mu/dt)(t)$ (na verdade 3-vetor já que o espaço-tempo acústico esférico conta apenas com duas dimensões espaciais), tangente à linha de mundo da partícula, serão

$$\frac{dx^\mu}{dt}(t) = \left(1, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\phi}{dt}\right) = (1; \vec{V}), \quad (3.16)$$

de modo que $\vec{V} = V^\theta \partial_\theta + V^\phi \partial_\phi$ é a velocidade da partícula, no sentido clássico, no referencial do laboratório, o que coincide com o referencial de observadores em repouso com relação a este sistema de coordenadas $(\theta(t), \phi(t) = Cte)$, como foi dito alguns parágrafos acima.

[‡]Note que sob este ponto de vista o tempo t não é mais o tempo clássico absoluto mas apenas uma coordenada

Analisando o “comprimento ao quadrado” deste 4-vetor com relação à métrica acústica esférica (2.59), ou seja,

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} &= g_{00} + 2g_{0i}V^i + g_{ij}V^iV^j \\
&= -\frac{\rho^2}{r^4 c_s^2} [c_s^2 - v^2 + 2(r^2 v^\theta V^\theta + r^2 \sin^2 \theta v^\phi V^\phi) - (r^2 (V^\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (V^\phi)^2)] \\
&= -\frac{\rho^2}{r^4 c_s^2} [c_s^2 - v^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{V} - V^2] \\
&= -\frac{\rho^2}{r^4 c_s^2} [c_s^2 - (\vec{v} - \vec{V})^2],
\end{aligned} \tag{3.17}$$

concluimos que dx^μ/dt , tangente à linha de mundo da partícula, e portanto tangente à curva $x^\mu(t)$ que descreve o movimento da partícula, será *tipo luz* (ou diríamos tipo “som”) no espaço-tempo acústico esférico se o módulo da velocidade relativa da partícula com relação à velocidade do fluido for igual à velocidade do som no meio. Da mesma forma, dx^μ/dt será *tipo espaço* se o módulo da velocidade relativa for maior que a do som e *tipo tempo* se o módulo da velocidade relativa for menor que a do som. Em particular, os vetores tangentes à linha de mundo de um elemento de fluido ($\vec{V} = \vec{v}$) são tipo tempo em todos os pontos do espaço-tempo acústico esférico.

Algumas vezes, ao invés de caracterizarmos os vetores tangentes a uma curva $x^\mu(\lambda)$ como tipo luz, tipo tempo ou tipo espaço, dizemos simplesmente que a curva é tipo luz, tempo ou espaço.

Focando o movimento dos elementos de fluido, podemos aproveitar os resultados obtidos em (3.17) para calcularmos o tempo próprio de um dado elemento de fluido, a partir da definição (3.11), e assim evidenciarmos sua 4-velocidade. Para um elemento de fluido, $\vec{V} = \vec{v}$ em (3.17), de modo que

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = -\frac{\rho^2}{r^4}, \tag{3.18}$$

e portanto

$$d\tau = dt \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} = \frac{\rho}{r^2} dt. \tag{3.19}$$

A 4-velocidade de um elemento de fluido será então

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} (1; \vec{v}) \tag{3.20}$$

ou seja, as componentes u^μ , em coordenadas esféricas (t, θ, ϕ) , da 4-velocidade de um elemento de fluido valem

$$u^\mu = \frac{r^2}{\rho}(1; \vec{v}) = \frac{r^2}{\rho}(1, v^\theta, v^\phi). \quad (3.21)$$

Com um simples cálculo verificamos que, de fato, $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$, como esperávamos. Notamos ainda que u^μ é proporcional a $\nabla^\mu t$:

$$\begin{aligned} \nabla^\mu t &= g^{\mu\nu} \partial_\nu t \\ &= g^{\mu t} \partial_t t \\ &= (g^{tt}, g^{\theta t}, g^{\phi t}) \\ &= -\frac{r^4}{\rho^2}(1, v^\theta, v^\phi) \end{aligned} \quad (3.22)$$

e portanto

$$u^\mu = -\frac{\rho}{r^2} \nabla^\mu t. \quad (3.23)$$

Antes de prosseguirmos, é importante mencionarmos que, apesar do tempo próprio associado a uma linha de mundo de um espaço-tempo da Relatividade Geral ser o tempo medido por um observador seguindo esta linha de mundo, a extensão da definição de tempo próprio ao espaço-tempo efetivo, que chamamos de espaço-tempo acústico esférico, não tem nenhum significado físico. Isto acontece pois, como foi discutido no final da Sec. 2.3.3, o espaço-tempo acústico esférico é sentido apenas pelas ondas sonoras, sem qualquer significado aos observadores físicos de modo geral.

Para encerrarmos a análise do movimento de um elemento de fluido, sob o ponto de vista relativístico do espaço-tempo acústico esférico, vejamos sob quais condições o fluido segue uma geodésica neste espaço-tempo efetivo. Para encontrá-las basta calcularmos a 4-aceleração $a^\nu = u^\mu \nabla_\mu u^\nu$ de um elemento de fluido e verificarmos quando ela se iguala a zero:

$$\begin{aligned} u^\mu \nabla_\mu u^\nu &= -\frac{\rho}{r^2} \nabla^\mu t \nabla_\mu \left(-\frac{\rho}{r^2} \nabla^\nu t \right) \\ &= \frac{\rho}{r^2} \nabla^\mu t \left[\nabla^\nu t \nabla_\mu \left(\frac{\rho}{r^2} \right) + \frac{\rho}{r^2} \nabla_\mu \nabla^\nu t \right] \\ &= \frac{\rho}{r^2} \nabla^\mu t \nabla^\nu t \nabla_\mu \left(\frac{\rho}{r^2} \right) + \frac{\rho^2}{r^4} \nabla^\nu \left(\frac{1}{2} \nabla^\mu t \nabla_\mu t \right) \\ &= \frac{\rho}{r^2} \nabla^\mu t \nabla^\nu t \partial_\mu \left(\frac{\rho}{r^2} \right) - \frac{\rho^2}{2r^4} g^{\nu\mu} \partial_\mu \left(\frac{r^4}{\rho^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^4} \nabla^\mu t \nabla^\nu t \partial_\mu (\rho^2) + \frac{1}{\rho^2} g^{\nu\mu} \partial_\mu (\rho^2) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

o que nos permite concluir que:

- para $\nu = t$, $u^\mu \nabla_\mu u^t = 0$
- para $\nu = i$, $u^\mu \nabla_\mu u^i = [1/(\rho g_{ii})] \partial_i(\rho)$

ou seja, um elemento de fluido segue uma geodésica apenas na região do espaço-tempo acústico esférico onde a densidade do fluido é constante.

3.5 Base ortonormal

Não é difícil verificarmos que em cada espaço tangente V_p , associado a cada ponto p do espaço-tempo acústico esférico, é possível construir uma base ortonormal formada pela 4-velocidade do fluido naquele ponto e por dois outros 4-vetores apontando na direção dos eixos espaciais do sistema de coordenadas esférico. Estes 4-vetores que formam a base ortonormal são:

$$u^\mu = \frac{r^2}{\rho} (1, v^\theta, v^\phi)$$

$$\alpha(\partial_\theta)^\mu = \alpha(0, 1, 0)$$

$$\beta(\partial_\phi)^\mu = \beta(0, 0, 1)$$

onde os fatores de normalização α e β valem respectivamente rc_s/ρ e $rc_s/(\rho \sin \theta)$.

3.6 Formalismo ADM

Podemos verificar que o espaço-tempo acústico esférico, munido da métrica (2.59), é globalmente hiperbólico. Dizemos que um espaço-tempo qualquer $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ é globalmente hiperbólico quando pode ser folheado por hiperfícies tridimensionais tipo espaço chamadas de superfícies de Cauchy. Para que uma hiperfície tipo espaço seja uma superfície de Cauchy ela deve satisfazer algumas propriedades associadas a estrutura causal do espaço-tempo (veja Cap. 8 de [43]). As superfícies de Cauchy, denotadas por Σ_t , são parametrizadas por uma função t que pode ser vista como uma coordenada temporal.

Assim, dado um espaço-tempo globalmente hiperbólico, considere o “sanduíche” de espessura infinitesimal formado por duas destas hiperfícies. A hiperfície inferior Σ_t

correspondendo ao conjunto de eventos com t constante e a hiperfície superior Σ_{t+dt} formada pelo conjunto de eventos com $t + dt$ constante. Segundo o formalismo de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) de divisão de espaços-tempos globalmente hiperbólicos, a geometria 4-dimensional entre o “sanduíche” pode ser completamente determinada definindo 4 ingredientes que apontaremos logo abaixo:

1. A métrica da geometria tridimensional da hiperfície inferior Σ_t

$$g_{ij}(t, x, y, z)dx^i dx^j$$

que nos diz as distâncias ao quadrado entre pontos desta hiperfície.

2. A métrica da hiperfície superior Σ_{t+dt}

$$g_{ij}(t + dt, x, y, z)dx^i dx^j$$

3. A fórmula para o comprimento próprio de um “vetor conector”, ligando as duas hiperfícies, cuja base se situe no ponto (x, y, z) da hiperfície inferior:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{lapso de tempo próprio de um observador} \\ \text{seguindo o vetor conector entre hiperfícies} \\ \text{inferior e superior} \end{array} \right) &= (\text{função lapso})dt \\ &= N(t, x, y, z)dt \end{aligned}$$

4. A fórmula para a coordenada na superfície superior,

$$x_{\text{superior}}^i = x_{\text{inferior}}^i - N^i(t, x, y, z)dt$$

onde o conector deve ser “soldado”. As funções N^i são chamadas de funções de deslocamento.

O intervalo ds^2 entre os pontos $x^\alpha = (t, x^i)$ e $x^\alpha + dx^\alpha = (t + dt, x^i + dx^i)$ deve ser igual a

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\begin{array}{l} \text{distância própria} \\ \text{na 3-geometria da base} \end{array} \right)^2 - \left(\begin{array}{l} \text{tempo próprio entre} \\ \text{a hiperfície inferior e superior} \end{array} \right)^2 \quad (3.25) \\ &= g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - (N dt)^2 \\ &= (g_{ij}N^i N^j - N^2)dt^2 + 2g_{ij}N^i dx^j dt + g_{ij}dx^i dx^j, \end{aligned}$$

determinando assim a geometria 4-dimensional do “sanduíche” infinitesimal formado entre as duas hiperfícies. Esta métrica 4-dimensional $g_{\mu\nu}$ pode ainda ser colocada na forma mais compacta

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (N_i N^i - N^2) & N_k \\ N_j & g_{jk} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

onde as quantidades N_i são as componentes covariantes das funções de deslocamento, obtidas abaixando o índice através da métrica tridimensional g_{ij} , ou seja, $N_i = g_{ij} N^j$. Note que a 4-geometria dependerá da escolha da função lapso e das funções deslocamento.

Sem muita dificuldade, podemos verificar que a métrica inversa de (3.26) é dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1/N^2) & (N^k/N^2) \\ (N^j/N^2) & (g^{jk} - N^k N^j/N^2) \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Desta forma, conhecida a geometria do espaço-tempo que preenche a camada infinitesimal entre as duas hiperfícies, podemos encontrar o 4-vetor unitário n , tipo tempo evidentemente, perpendicular à hiperfície inferior Σ_t . Como t é constante nesta superfície, é intuitivo que o 4-vetor n seja proporcional ao 4-vetor gradiente da função tempo. Matematicamente, queremos dizer que

$$\begin{aligned} n^\mu &\propto \nabla^\mu t \\ &\propto g^{\mu\nu} \partial_\nu t = g^{\mu t} = (-1/N^2, N^i/N^2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

A condição de normalização $n^2 = -1$ nos permite determinar o 4-vetor unitário, tangente à Σ_t como sendo igual a

$$n^\mu = (1/N, -N^i/N). \quad (3.29)$$

Assim, podemos interpretar o “vetor conector” ligando as duas hiperfícies, cujo comprimento próprio foi definido acima em 3, como o 4-vetor proporcional ao vetor tangente n , com componentes

$$(dt, -N^i dt),$$

verificando, como esperado, a definição do comprimento próprio $d\tau = N dt$.

Comparando agora (3.25) com o elemento de linha da nossa métrica acústica esférica (3.8), é possível identificarmos a geometria tridimensional, a função lapso e as funções deslocamento correspondentes ao espaço-tempo acústico esférico. Essas quantidades são, respectivamente, iguais a

$$g_{ij} = \frac{\rho^2}{r^4 c_s^2} e_{ij}, \quad N = \frac{\rho}{r^2} \text{ e } N^i = -v^i.$$

Note que isto concorda com o fato do “tempo próprio” de um elemento de fluido ser dada pela expressão (3.19), de modo que, a quantidade $dx^\mu = u^\mu d\tau$, sendo u^μ é a 4-velocidade do fluido (3.21), coincide com o “vetor conector” das hipersuperfícies tridimensionais. Concluimos portanto, que a geometria acústica esférica pode ser vista como aquela experimentada por observadores seguindo elementos de fluido, com relógios fornecendo o “tempo” dado por (3.19) e imersos em uma esfera de raio r deformada pelo fator conforme $\rho^2/(r^4 c_s^2)$.

3.7 Graus de liberdade

Em geral, a métrica de um espaço-tempo 4-dimensional da Relatividade Geral possui 6 graus de liberdade para cada ponto do espaço-tempo, que corresponde a dez graus de liberdade por ser uma matriz 4×4 simétrica menos quatro graus por fixar as coordenadas do ponto. Para um espaço-tempo tridimensional, como é o nosso caso acústico, a métrica tem geralmente 3 graus de liberdade seguindo o mesmo raciocínio.

No caso da métrica acústica esférica, podemos pensar que a princípio ela tem também três graus de liberdade, já que ela fica completamente determinada pelos três escalares $\Phi(t; \vec{x})$, $\rho(t; \vec{x})$ e $c_s(t; \vec{x})$. No entanto, a equação da continuidade (2.13) fornece um vínculo entre as quantidades dinâmicas $\Phi(t; \vec{x})$ e $\rho(t; \vec{x})$, de maneira que, podemos concluir que a métrica acústica esférica (2.59) possui na verdade dois graus de liberdade para cada ponto do espaço-tempo acústico esférico.

3.8 Simetrias

3.8.1 Introdução

A análise das simetrias envolvidas em um problema físico sempre desempenharam um papel importante na compreensão e na resolução do problema. Nesta seção iremos nos concentrar no estudo das simetrias temporais dos espaços-tempos acústicos esféricos, evocando para isso a noção de espaços-tempos estacionários e estáticos. Antes disso, entretanto, vejamos alguns conceitos da Relatividade Geral importantes na identificação das simetrias dos espaços-tempos e das suas quantidades conservadas.

Certamente, um dos conceitos mais relevantes neste propósito é o conceito de isometria. Para apresentarmos a definição exata de isometria, devemos ter em mente o conceito de “pull back” e “push forward” de tensores.

Seja $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ um mapeamento C^∞ entre duas variedades $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$. Através de ϕ podemos definir um mapeamento $\phi^* : V_p \rightarrow V_{\phi(p)}$, entre vetores pertencentes aos espaços tangentes dos pontos p e $\phi(p)$, da seguinte forma[§]: para $v \in V_p$, definimos $\phi^*v \in V_{\phi(p)}$ por

$$(\phi^*v)(f) = v(f \circ \phi). \quad (3.30)$$

O mapeamento ϕ^* é chamado de “push forward”. Note que ϕ^* é linear e que para sistemas de coordenadas x^ν e y^μ definidos em p e $\phi(p)$, as componentes dos vetores ϕ^*v e v , nas respectivas bases coordenadas, são relacionados pela equação

$$(\phi^*v)^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu. \quad (3.31)$$

De forma similar podemos usar ϕ para mapear vetores duais entre os espaços duais. Definimos o mapeamento $\phi_* : V_{\phi(p)}^* \rightarrow V_p^*$, denominado “pull back”, como[¶]

$$(\phi_*\lambda)_\mu v^\mu = \lambda_\mu (\phi^*v)^\mu. \quad (3.32)$$

Finalmente, se ϕ for um difeomorfismo podemos generalizar a noção de “push forward” (usando o fato que $(\phi^{-1})^*$ leva de $V_{\phi(p)}$ a V_p) para um tensor T qualquer

[§]Lembre-se que um vetor $v \in V_p$ pode ser visto como uma forma linear $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ obedecendo a regra de Leibnitz $v(fg) = f|_p v(g) + g|_p v(f)$, onde $f, g \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ é o conjunto das funções C^∞ de $\mathcal{M}$ em $\mathbb{R}$

[¶]Lembre-se que um vetor dual $\lambda \in V_p^*$ é uma forma linear $\lambda : V_p \rightarrow \mathbb{R}$.

do tipo (k, l) definindo:

$$(\phi^* T)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} (\lambda_1)_{\mu_1} \dots (\lambda_k)_{\mu_k} (t_1)^{\nu_1} \dots (t_l)^{\nu_l} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} (\phi_* \lambda_1)_{\mu_1} \dots ([\phi^{-1}]^* t_l)^{\nu_l} \quad (3.33)$$

Da forma análoga, podemos também generalizar o conceito de “pull back” para um tensor qualquer.

Sendo assim, dado um espaço-tempo $(\mathcal{M}, g)$, chamamos de isometria o difeomorfismo ϕ , da variedade $\mathcal{M}$ sobre ela mesma, tal que ϕ^* aplicada à métrica g é igual a identidade, ou seja, $(\phi^* g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Neste caso ϕ^* define uma simetria sobre a métrica. Em outras palavras, uma transformação que preserva a métrica.

Seja agora ϕ_t um grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos, definido como sendo um mapeamento C^∞ de $\mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, tal que para cada parâmetro $t \in \mathbb{R}$ fixo, $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é um difeomorfismo, e para todo $t, s \in \mathbb{R}$, temos $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ (implicando que $\phi_{t=0}$ é igual a identidade). Para cada ponto $p \in \mathcal{M}$, $\phi_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ é uma curva, chamada de órbita de ϕ_t . Podemos então gerar um campo vetorial v a partir de ϕ_t tal que $v|_p$ seja tangente à órbita de $\phi_t(p)$ em $t = 0$, o que significa dizer que o campo v deve satisfazer, para qualquer que seja $f \in \mathcal{F}$ (onde $\mathcal{F}$ é o conjunto das funções C^∞ , a relação $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$)

$$v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t(p))|_{t=0}. \quad (3.34)$$

Desta forma, sendo v um campo vetorial gerado por um grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos ϕ_t , como descrito acima, definimos o operador diferencial $\mathcal{L}_v$, chamado de derivada de Lie com respeito a v , como

$$(\mathcal{L}_v T)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{(\phi_{-t}^* T)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} - T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}}{t} \right\}. \quad (3.35)$$

Note que a aplicação de $\mathcal{L}_v$ a um tensor de ordem (k, l) leva a um tensor de mesma ordem. Além disso podemos verificar que $\mathcal{L}_v$ satisfaz a regra de Leibnitz, o que significa que, para quaisquer que sejam os tensores T_1 e T_2 , $\mathcal{L}_v(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{L}_v T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\mathcal{L}_v T_2)$. Para um tensor $T = c(T_1 \otimes T_2)$, obtido pela contração de dois tensores, é válido a relação $\mathcal{L}_v(c(T_1 \otimes T_2)) = c((\mathcal{L}_v T_1) \otimes T_2) + c(T_1 \otimes (\mathcal{L}_v T_2))$.

Com um pouco de trabalho é possível demonstrar a partir da definição (3.35) que, para $f \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{L}_v(f) = v(f), \quad (3.36)$$

e que para um vetor u

$$(\mathcal{L}_v u)^\mu = [v, u]^\mu, \quad (3.37)$$

onde $[v, u]$ é o comutador entre os vetores v e u , que para numa base coordenada $\{\partial/\partial x^\mu\}$ é dado por

$$[v, u]^\mu = \left(v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} - u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \right).$$

Assim, usando apenas (3.36), (3.37) e a regra de Leibnitz, satisfeita por $\mathcal{L}_v$, podemos demonstrar, por indução, que para um tensor qualquer de ordem (k, l) ,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_v T)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} &= v^\alpha \nabla_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} - \sum_{i=1}^k T^{\mu_1 \dots \beta \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \nabla_\beta v^{\mu_i} \\ &\quad + \sum_{j=1}^l T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \beta \dots \nu_l} \nabla_{\nu_j} v^\beta. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Quando $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é um grupo a 1-parâmetro de isometrias, verificando portanto $\phi_t^* g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, o campo vetorial ξ^μ gerado por ϕ_t recebe o nome de “campo de Killing”. Da definição (3.35) podemos então concluir que uma condição necessária e suficiente para ϕ_t ser um grupo a 1-parâmetro de isometrias é $(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = 0$. Da Eq. (3.38) temos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} &= \xi^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu v^\alpha + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu v^\alpha \\ &= \nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu, \end{aligned} \quad (3.39)$$

já que, por definição, $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Sendo assim, ξ^μ é um campo de Killing se e somente se satisfazer a equação

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad (3.40)$$

conhecida como *equação de Killing*.

Uma das propriedades mais importantes dos campos de Killing está contida na seguinte proposição:

Proposição 3.8.1.1. *Seja ξ^μ um campo de Killing e u^μ o vetor tangente a uma geodésica γ . Então o escalar $\xi_\mu u^\mu$ é uma constante ao longo da curva γ .*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} u^\alpha \nabla_\alpha (\xi_\mu u^\mu) &= u^\alpha u^\mu \nabla_\alpha \xi_\mu + \xi_\mu u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

já que o primeiro termo $u^\alpha u^\mu \nabla_\alpha \xi_\mu = 1/2 u^\alpha u^\mu (\nabla_\alpha \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\alpha)$, e portanto igual a zero devido a equação de Killing, enquanto que o segundo termo se anula em razão da equação da geodésica. $\square$

Utilizando todas as definições apresentadas acima e os resultados obtidos nessa subseção, introduziremos nas próximas duas subseções a noção de estacionaridade e estaticidade dos espaços-tempos da relatividade geral, aplicando esses conceitos para o caso do espaço-tempo acústico esférico. Ao final, iremos comparar as condições encontradas para que o espaço-tempo acústico esférico seja estacionário com o conceito clássico de fluxo estacionário.

3.8.2 Espaço-tempo acústico esférico estacionário

Dizemos que um espaço-tempo $(\mathcal{M}, g)$ é estacionário quando é possível definir sobre $\mathcal{M}$ um grupo a 1-parâmetro de isometrias, ϕ_s , cujas órbitas são curvas tipo tempo. Isto equivale, como vimos anteriormente, à existência de um campo de Killing T^μ tipo tempo. Este grupo de isometrias está relacionado à simetria de translação temporal dos espaços-tempos. De fato, como o campo de Killing T^μ , gerado por ϕ_s , é tipo tempo, podemos escolher um sistema de coordenadas tal que os pontos constituintes de uma órbita de ϕ_s qualquer sejam rotulados pelas mesmas coordenadas espaciais e tal que a coordenada temporal t de cada ponto coincida com o parâmetro s . Sendo assim, neste sistema de coordenadas as componentes do campo de Killing são iguais à $T^\mu = (\partial_t)^\mu$. Calculando a derivada de Lie (com respeito ao campo de Killing $T = \partial_t$) da métrica $g_{\mu\nu}$, escrita neste novo sistema de

coordenadas, teremos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\partial_t} g)_{\mu\nu} &= \nabla_\mu(\partial_t)_\nu + \nabla_\nu(\partial_t)_\mu \\
&= g_{\nu\alpha} \nabla_\mu(\partial_t)^\alpha + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu(\partial_t)^\alpha \\
&= g_{\nu\alpha} \Gamma_{\mu t}^\alpha + g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu t}^\alpha \\
&= g_{\nu\alpha} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda t} + \partial_t g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu t}) \right] + g_{\mu\alpha} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\nu g_{\lambda t} + \partial_t g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu t}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \delta_\nu^\lambda (\partial_\mu g_{\lambda t} + \partial_t g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu t}) + \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda (\partial_\nu g_{\lambda t} + \partial_t g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu t}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu t} + \partial_t g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu t}) + \frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\mu t} + \partial_t g_{\nu\mu} - \partial_\mu g_{\nu t}) \\
&= \partial_t g_{\mu\nu} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Portanto, este cálculo nos permite concluir que as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$, escritas nesse sistema de coordenadas específico, são independentes da coordenada temporal t , de modo que transformações do tipo $t \rightarrow t + cte$ (translação temporal) deixam a métrica invariante. Outra consequência direta deste resultado é que observadores seguindo as curvas integrais de T^μ , ou seja, em repouso com relação a este sistema de coordenadas, não sentem nenhuma alteração na métrica do espaço-tempo. Assim, para os espaços-tempos estacionários, podemos pensar na noção de tempo absoluto, restando apenas a tarefa de fixar a origem do parâmetro s , ou equivalentemente, do tempo t .

Considere agora o espaço-tempo acústico esférico dotado da métrica (2.59). Dos resultados anteriores, sabemos que $(\partial_t)^\mu$ (considere doravante t o tempo coordenada Newtoniano utilizado deste o início para cobrir o espaço-tempo acústico esférico junto com as coordenadas θ e ϕ) será um campo de Killing se e somente se $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$. Porém, a norma deste campo é igual a

$$(\partial_t)_\mu (\partial_t)^\mu = \frac{\rho^2}{r^4 c_s^2} (v^2 - c_s^2), \tag{3.43}$$

e portanto $(\partial_t)^\mu$ será um campo tipo tempo somente quando o fluxo for subsônico, ou seja, quando $|\vec{v}| < c_s$. Consequentemente, o espaço-tempo acústico esférico será estacionário, segundo a noção relativística de estacionaridade, quando forem verificadas duas condições:

- independência temporal das componentes da métrica (2.59) ($\partial_t g_{\mu\nu} = 0$)
- fluxo subsônico ($|\vec{v}| < c_s$)

Comparando com a noção usual de estacionaridade em hidrodinâmica (velocidade e densidade do fluido independentes do tempo), notamos que é necessário, no caso relativístico, acrescentar a condição de que o fluxo seja subsônico para que $(\partial_t)^\mu$ seja tipo tempo.

Para encerrar esta subseção, supondo o espaço-tempo acústico esférico estacionário, se calcularmos o produto $u_\mu(\partial_t)^\mu$ entre o campo de Killing $(\partial_t)^\mu$ e a 4-velocidade de um elemento de fluido, encontraremos

$$u_\mu(\partial_t)^\mu = -\frac{\rho}{r^2}. \quad (3.44)$$

No entanto, de acordo com a proposição 3.8.1.1, a quantidade $u_\mu(\partial_t)^\mu$ deve ser uma constante ao longo da curva integral de u^μ quando esta for uma geodésica. Por outro lado, como foi visto no final da Sec. 3.4, a 4-velocidade u^μ de um elemento de fluido será uma geodésica quando a densidade ρ do fluido for constante, o que torna o resultado (3.44) acima coerente.

3.8.3 Espaço-tempo acústico esférico estático

A existência de um campo de Killing ξ^μ tipo tempo definido sobre um espaço-tempo estacionário não implica na existência de hiperfícies Σ tipo espaço ortogonais à ξ^μ . Assim, dizemos que um espaço-tempo é estático quando possuir tais hiperfícies ortogonais ao campo de Killing ξ^μ . Perceba que um espaço-tempo estático será necessariamente estacionário, enquanto que o contrário nem sempre é verificado.

Se o espaço-tempo for estático podemos encontrar um sistema de coordenadas (t, x^1, x^2, x^3) tal que a métrica, neste sistema de coordenadas, é escrita como

$$ds^2 = -F^2(x^1, x^2, x^3)dt^2 + h_{ij}(x^1, x^2, x^3)dx^i dx^j, \quad (3.45)$$

onde $F^2 = -\xi^\mu \xi_\mu$. Note que, neste sistema de coordenadas, as componentes da métrica não dependem da coordenada temporal t e portanto $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$ é um campo de Killing tipo tempo. A inexistência de termos cruzados do tipo $dt dx^i$, na métrica (3.45), expressa a ortogonalidade entre ξ^μ e as hiperfícies tipo espaço, definida por $t = cte$, que denotaremos Σ_t .

Através da forma geral, (3.45), da métrica de um espaço-tempo estático podemos ver que o difeomorfismo definido por $t \rightarrow -t$ (ou seja, o mapeamento que leva cada ponto da hipersfície Σ_t para o ponto com as mesmas coordenadas espaciais em Σ_{-t}) é uma isometria. De fato, essa transformação não altera em nada o elemento de linha (3.45). Desta forma, além de possuir a simetria de translação temporal $t \rightarrow t + cte$, um espaço-tempo estático é simétrico por reflexão temporal.

Supondo o espaço-tempo acústico esférico estacionário, o elemento de linha (3.8) pode ser colocado na forma

$$ds^2 = \frac{\rho^2(\vec{x})}{r^4 c_s^2(\vec{x})} [-(c_s^2(\vec{x}) - v^2(\vec{x}))dt^2 - 2e_{ij}(\vec{x})v^i(\vec{x})dx^j dt + e_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j], \quad (3.46)$$

onde $\vec{x}$ faz referência às coordenadas espaciais (θ, ϕ) . Além da dependência apenas espacial das componentes da métrica, devemos supor $|\vec{v}| < c_s$ para que a estacionaridade seja satisfeita.

Impondo então que o vetor $\vec{v}/(c_s^2 - v^2)$ seja integrável, podemos definir uma nova coordenada temporal

$$d\tau = dt + \frac{e_{ij}v^i dx^j}{c_s^2 - v^2} = dt + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{x}}{c_s^2 - v^2}. \quad (3.47)$$

O elemento de linha (3.46) nessas novas coordenadas é dado por

$$ds^2 = \frac{\rho^2(\vec{x})}{r^4 c_s^2(\vec{x})} \left[-(c_s^2(\vec{x}) - v^2(\vec{x}))d\tau^2 + e_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j + \frac{(e_{ij}(\vec{x})v^i(\vec{x})dx^j)^2}{c_s^2(\vec{x}) - v^2(\vec{x})} \right]. \quad (3.48)$$

Podemos facilmente verificar que o campo $(\partial_\tau)^\mu$ é um campo de Killing global tipo tempo. Além disso, a métrica acústica esférica, nessas coordenadas, assume o formato da métrica (3.45), indicando que o espaço-tempo acústico esférico é estático desde que $\vec{v}/(c_s^2 - v^2)$ seja integrável.

Para analisarmos a questão da integrabilidade de $\vec{v}/(c_s^2 - v^2)$, convém utilizarmos o formalismo das formas diferenciais (veja pag. 158 de [27] para uma introdução às formas diferenciais). Isto ficará mais claro ao longo dos próximos parágrafos. Também por uma questão de conveniência chamaremos $\vec{V} = \vec{v}/(c_s^2 - v^2)$.

Sendo assim, para que $\vec{V}$ seja integrável é necessário que ele possa ser escrito como o gradiente de uma função escalar $F = F(\theta, \phi)$, que no formalismo tensorial é expresso por

$$V^i = \nabla^i F = e^{ij} \partial_j F. \quad (3.49)$$

Lembrando que, como estamos lidando com vetores sobre a esfera S^2 , devemos utilizar a métrica (2.33), cujas componentes, em coordenadas esféricas, são expressos por e_{ij} . Na base coordenada deste sistema de coordenadas, a Eq. (3.49) corresponde a

$$(V^\theta, V^\phi) = \left(\frac{1}{r^2} \partial_\theta F, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi F \right). \quad (3.50)$$

Um outro modo equivalente de expressar essa condição é dizer que a derivada exterior da 1-forma $V^* = V_i dx^i$ relacionada ao vetor $\vec{V}$ (que para fins práticos é igual ao dual do vetor $\vec{V}$ e portanto $V_i = e_{ij} V^j$) é igual a zero. A equivalência entre as duas afirmações é evidenciada pelo lema de Poincaré que diz que toda forma fechada é localmente exata. Assim, se V^* é fechada ($dV^* = 0$) então existe, ao menos localmente, uma função escalar F tal que $V^* = dF$ (forma exata). Essa última relação corresponde à

$$(V_\theta, V_\phi) = (\partial_\theta F, \partial_\phi F), \quad (3.51)$$

que é equivalente à Eq. (3.50).

Resumindo, no formalismo das formas diferenciais, a condição para que $\vec{V}$ seja integrável e que portanto o espaço-tempo acústico esférico seja estático é condensada na relação $dV^* = 0$. Expandindo-a teremos

$$\begin{aligned} dV^* &= d(V_\theta d\theta + V_\phi d\phi) \\ &= dV_\theta \wedge d\theta + dV_\phi \wedge d\phi \\ &= (\partial_\phi V_\theta) d\phi \wedge d\theta + (\partial_\theta V_\phi) d\theta \wedge d\phi \\ &= (\partial_\phi V_\theta - \partial_\theta V_\phi) d\phi \wedge d\theta \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Acabamos então com a condição

$$\partial_\phi V_\theta = \partial_\theta V_\phi \quad (3.53)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{v_\theta}{c_s^2 - v^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{c_s^2 - v^2} \right) \quad (3.54)$$

onde v_θ e v_ϕ , como visto anteriormente, são as componentes covariantes da velocidade do fluido $\vec{v}$. Esta última relação é satisfeita se

$$v_\theta \propto \partial_\theta (c_s^2 - v^2)$$

$$v_\phi \propto \partial_\phi(c_s^2 - v^2)$$

com a mesma constante de proporcionalidade para v_θ e v_ϕ , o que corresponde portanto à $v^i \propto \nabla^i(c_s^2 - v^2)$. Finalmente, isto significa dizer que quando o fluxo o $\vec{v}$ for normal às superfícies de $(c_s^2 - v^2)$ constante, então o espaço-tempo acústico esférico será estático.

Capítulo 4

Buracos Mudos/Surdos

4.1 Introdução

Ao longo de todo o capítulo anterior nos interessamos no estudo das propriedades do espaço-tempo acústico esférico, sem nos preocupar em fixar uma solução para as variáveis dinâmicas $\vec{v}(t, \vec{x})$, $\rho(t, \vec{x})$ e $c_s(t, \vec{x})$, mantendo assim a métrica (2.59) na sua forma mais geral possível. Neste capítulo pretendemos encontrar e analisar algumas soluções bem específicas para essas variáveis, visando modelar um análogo de um buraco negro (que chamamos de buraco mudo) e de um buraco branco (um buraco surdo), coexistindo simultaneamente em pólos opostos da esfera S^2 .

Na primeira seção introduziremos alguns conceitos básicos envolvendo os buracos negros da Relatividade Geral, como ergoregião e horizonte de eventos. Expandindo posteriormente esses conceitos ao caso acústico.

As duas últimas seções deste capítulo são consagradas à busca por soluções das variáveis $\vec{v}(t, \vec{x})$, $\rho(t, \vec{x})$ e $c_s(t, \vec{x})$, que satisfaçam as condições necessárias para modelarmos um buraco mudo/surdo. Na primeira delas, procuraremos por soluções estacionárias, independentes do tempo, enquanto que na última seção estaremos interessados nas soluções dependentes do tempo.

4.2 Buracos Negros

Em Relatividade Geral, poderíamos ingenuamente definir um buraco negro como sendo uma região do espaço-tempo onde a gravidade é tão forte que qualquer partícula ou raio de luz que adentrasse nessa região nunca mais poderia deixá-la. No entanto, logo vemos que esta definição não captura exatamente a noção de buracos negros que temos em mente. Definido desta forma, o futuro causal $J^+(\mathcal{A})$, de qualquer subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ do espaço-tempo poderia ser chamado de buraco negro.

Para espaços-tempos assintoticamente planos, a região do espaço-tempo a partir da qual é impossível alcançar o “future null infinity”, $\mathcal{J}^+$, fornece uma apropriada caracterização de buraco negro. Entretanto, é necessário adicionar um outro ingrediente extra ao espaço-tempo para que se tenha uma definição de buraco negro mais condizente com o que esperamos observar. Para isto, seja um espaço-tempo $(\mathcal{M}, g)$ assintoticamente plano associado ao espaço-tempo não físico $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ (veja Cap. 11 de [43]). Dizemos que $(\mathcal{M}, g)$ é “strongly asymptotically predictable” se existir uma região $\tilde{\mathcal{V}} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ dentro do espaço-tempo não físico associado a ele, verificando $\overline{\mathcal{M} \cap J^-(\mathcal{J}^+)} \subset \tilde{\mathcal{V}}$, tal que $(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{g})$ é globalmente hiperbólico. Assim, uma definição mais rigorosa de buraco negro é dada aos espaços-tempos “strongly asymptotically predictable” como veremos a seguir.

Definição 4.2.0.1. Dizemos que um espaço-tempo $(\mathcal{M}, g)$ “strongly asymptotically predictable” contém um buraco negro se $\mathcal{M}$ não estiver contido em $J^-(\mathcal{J}^+)$. Assim, a região do buraco negro[†], denotada $\mathcal{B}$, é definida como $\mathcal{B} = [\mathcal{M} - J^-(\mathcal{J}^+)]$, e sua borda em $\mathcal{M}$, $\mathcal{H} = \dot{J}^-(\mathcal{J}^+) \cap \mathcal{M}$, é chamada de horizonte de evento de $\mathcal{B}$.

É possível mostrar que nos espaços-tempos “strongly asymptotically predictable” todos os observadores fora do buraco negro ou sobre o horizonte de evento não conseguem “ver” qualquer singularidade surgida em um tempo finito. Por outro

*Para um espaço-tempo $(\mathcal{M}, g)$ orientável, definimos o futuro causal de um subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, denotado $J^+(\mathcal{A})$, como sendo o conjunto de eventos do espaço-tempo que podem ser atingidos por curvas causais dirigidas ao futuro iniciando em algum ponto $p \in \mathcal{A}$. Uma definição análoga pode ser obtida para o passado causal $J^-(\mathcal{A})$.

[†]A região de um espaço-tempo “strongly asymptotically retrodictable” é definida de forma similar, trocando $J^-(\mathcal{J}^+)$ por $J^+(\mathcal{J}^-)$.

lado, espaços-tempos assintoticamente planos que não satisfazem a condição de “*strongly asymptotically predictable*” possuem *naked singularity*. Evidências de que *naked singularity* não ocorrem são encontradas no estudo de perturbações lineares do espaço-tempo de Schwarzschild.

Apesar de termos definido buraco negro apenas em espaços-tempos “*strongly asymptotically predictable*”, e portanto assintoticamente planos, podemos afrouxar essas condições afim de expandir o conceito de buraco negro para outras classes de espaços-tempos, introduzindo, por vezes, noções convenientes de infinito.

No âmbito dos análogos gravitacionais em matéria condensada, os espaços-tempos acústicos nem sempre se enquadram na categoria dos espaços-tempos “*strongly asymptotically predictable*”. Entretanto, como veremos a seguir, podemos adotar definições muito simples, no caso acústico, de superfície de aprisionamento (*trapped surface*), horizonte de eventos e ergoregião. Por conta disto, nos restringiremos à tais definições na descrição dos buracos negros e buracos brancos acústicos, também conhecidos respectivamente como buracos mudos e buracos surdos.

4.2.1 Horizonte de eventos acústico

Ao estudar singularidades, buracos negros e buracos brancos em Relatividade Geral, um conceito importante que tiramos deste estudo é o horizonte de eventos aparente. Apesar de ser definido simplesmente como sendo a borda da região de aprisionamento, é preciso desenvolver todo um ferramental teórico, como por exemplo a expansão de congruências de geodésicas tipo luz, antes de definir formalmente uma superfície de aprisionamento e então uma região de aprisionamento em Relatividade Geral ordinária (veja Cap. 9 e 12 de [43]).

Porém, é possível assumir, no caso dos análogos acústicos, uma definição muito mais simples de superfície de aprisionamento, sem a necessidade de recorrer às técnicas mais aperfeiçoadas utilizadas em Relatividade Geral.

Definição 4.2.1.1. *Chamamos de superfície de aprisionamento acústica a superfície bidimensional fechada, contida em uma superfície de Cauchy Σ do espaço-tempo acústico, onde a velocidade do fluido é em todo ponto dirigida para dentro e tal que sua componente normal à superfície é sempre maior que a velocidade do som local.*

Esta definição pressupõe um espaço-tempo acústico 4-dimensional. No caso do

espaço-tempo acústico esférico, as superfícies de aprisionamento devem ter apenas uma dimensão.

Uma propriedade imediata das superfícies de aprisionamento acústicas é que ondas sonoras sempre serão varridas, pelo fluxo do fluido, para o interior desta superfície fechada, mesmo que seu sentido de propagação seja contrário. O som permanece então aprisionado na região interna à superfície de aprisionamento. Superfícies de anti-aprisionamento acústicas podem ser definidas de forma similar exigindo, no entanto, que a velocidade do fluido sobre esta superfície seja em todo ponto dirigida para fora.

Definimos agora a região de aprisionamento acústico, $\mathcal{T}$, de uma superfície de Cauchy Σ do espaço-tempo acústico, como sendo a união de todas as superfícies de aprisionamento acústicas desta superfície de Cauchy. Finalmente, o horizonte (futuro) de eventos aparente acústico, $\mathcal{A}$, é a borda da região de aprisionamento acústico, ou seja, $\mathcal{A} = \dot{\mathcal{T}}$. Pela continuidade da função Φ que descreve o campo de velocidades, podemos concluir que o horizonte de eventos aparente acústico é uma superfície 2-dimensional sobre a qual a componente da velocidade do fluido normal a esta superfície é, em todo ponto, igual a velocidade do som c_s . Estas definições adaptadas ao caso da analogia acústica são melhor justificadas notando que os raios de som seguem geodésicas tipo luz no espaço-tempo acústico (como veremos no Cap. 6).

O horizonte de eventos (horizonte absoluto), $\mathcal{H}$, já definido de forma mais rigorosa no começo desta seção, pode ser grosseiramente visto como a fronteira da região do espaço-tempo da qual as geodésicas tipo luz não podem escapar para o infinito plano. Este na verdade é o horizonte de eventos futuro. Da mesma forma, podemos definir o horizonte de eventos passado como a fronteira da região do espaço-tempo que não pode ser alcançada pelas geodésicas tipo luz. Esta definição pode ser estendida ao espaço-tempo acústico lembrando mais uma vez que, neste espaço-tempo efetivo, as geodésicas tipo luz são as curvas traçadas pelos raios de som. Diferentemente do horizonte de eventos aparente (que é uma superfície fechada de uma superfície de Cauchy), o horizonte absoluto é uma hipersuperfície tipo luz do espaço-tempo total, gerada por uma congruência de geodésicas também tipo luz. Para espaços-tempos estacionários, o conceito de horizonte de eventos aparente e absoluto podem ser confundidos, no entanto, a diferença entre eles é muito importante quando não

houver estacionaridade.

Sendo assim, dizemos que um espaço-tempo acústico possui um buraco sônico (podendo ser um buraco mudo ou um buraco surdo) se ele possuir um horizonte acústico.

4.2.2 Ergoregião acústica

Como é definido em Relatividade Geral, a ergoesfera de um buraco negro com rotação (buraco negro carregado de Kerr) é a região do espaço-tempo onde o campo de Killing $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$, tipo tempo na região assintoticamente plana em torno do buraco, torna-se tipo espaço. Ela é chamada assim pois um observador que se encontra na ergoesfera deveria andar mais rápido que a luz para poder seguir uma órbita de ξ^μ e portanto, nenhuma partícula física conseguirá permanecer em repouso com relação aos observadores inerciais no infinito plano, mesmo estando fora do buraco negro. Em outras palavras, todos os observadores físicos presentes na ergoesfera são forçados a rodar na direção da rotação do buraco negro. Além disso é possível mostrar que as intersecções desta região com as hipérfaces tipo espaço $t = cte$ tem a topologia de uma esfera.

Para os espaços-tempos acústicos com fluxo estacionário, o campo vetorial $(\partial_t)^\mu$ é um campo de Killing tipo tempo onde $|\vec{v}| < c_s$, tipo luz quando $|\vec{v}| = c_s$ e tipo espaço na região onde $|\vec{v}| > c_s$ (veja (3.43) no caso do espaço-tempo acústico esférico). Esta propriedade do campo de Killing $(\partial_t)^\mu$ nos permite definir, de maneira análoga, a ergoregião (evitamos chamar de ergoesfera pois as equações da hidrodinâmica parecem não fixar a topologia desta região) do espaço-tempo acústico como sendo a região onde o fluxo é supersônico. Esta definição de ergoregião pode ainda ser generalizada para fluxos não estacionários.

4.2.3 Gravidade superficial acústica

Como foi brevemente mencionado na Sec. 4.2.1, podemos demonstrar a partir da definição 4.2.0.1, que o horizonte de evento $\mathcal{H}$, é uma hipérface tipo luz gerada por uma congruência de geodésicas tipo luz inextensíveis apontando para o futuro e sem cústicas, isto é, as geodésicas nunca convergem até se encontrarem em um ponto. Sendo assim, o campo vetorial χ^μ associado a estas geodésicas deve ser

tipo luz no horizonte e portanto satisfazer a igualdade $\chi_\mu \chi^\mu = 0$ nesta hiperfície. Como vetores perpendiculares a uma hiperfície tipo luz são também paralelos a ela, podemos concluir que o vetor $\nabla^\mu(\chi_\nu \chi^\nu)$, normal ao horizonte (já que $\chi_\nu \chi^\nu$ é uma constante sobre $\mathcal{H}$) é proporcional ao vetor χ^μ . Deste modo, existe uma função κ , definida no horizonte, tal que

$$\nabla^\mu(\chi_\nu \chi^\nu)|_{\mathcal{H}} = -2\kappa \chi^\mu|_{\mathcal{H}} . \quad (4.1)$$

Aplicando a derivada de Lie $\mathcal{L}$ à Eq. (4.1), com respeito ao campo χ^μ , descobrimos que se χ^μ for um campo de Killing, então

$$\mathcal{L}_\chi \kappa = \chi^\mu \partial_\mu \kappa = 0 \quad (4.2)$$

e portanto κ é uma constante ao longo de cada órbita de χ^μ . Neste caso, podemos demonstrar também (veja [43] pags. 331 e 332) que κ é escrito como

$$\kappa = \lim(Va) , \quad (4.3)$$

onde o limite é tomado no horizonte. Além disso $V = \sqrt{-\chi_\mu \chi^\mu}$ e

$$a = \sqrt{(\chi^\nu \nabla_\nu \chi^\mu)(\chi^\nu \nabla_\nu \chi_\mu) / (\chi_\mu \chi^\mu)} .$$

Para buracos negros estáticos (buraco negro de Schwarzschild) χ^μ é igual ao campo de Killing $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$ e a quantidade Va é igual à força exercida por alguém no infinito plano, transmitida, por exemplo, através de uma corda ideal, para manter um objeto de massa unitária seguindo a órbita de $(\partial_t)^\mu$, isto é, em repouso com relação a esse sistema de coordenadas. Assim, κ é o limite desta força quando a massa se aproxima do horizonte e por isso é chamado de *gravidade superficial*. Para buracos negros com rotação é impossível manter uma massa teste em repouso com relação aos observadores inerciais no infinito plano, como vimos na seção anterior. No entanto, continuaremos nos referindo à κ como gravidade superficial.

Para determinar a expressão da gravidade superficial de um buraco mudo estacionário definido no espaço-tempo acústico esférico, é preciso, antes de tudo, encontrar um campo vetorial capaz de gerar o horizonte de eventos acústico. Para isto, seja uma hiperfície $\Sigma_t \cap \mathcal{H}$, para um t qualquer. Decompondo a velocidade do fluido $\vec{v}$ em uma componente paralela e outra ortogonal a esta hiperfície,

$$\vec{v}|_{\mathcal{H}} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel , \quad (4.4)$$

vemos que o 4-vetor L^μ , cujo valor no horizonte é

$$L^\mu|_{\mathcal{H}} = (1, \vec{v}_\parallel) , \quad (4.5)$$

é sempre tipo luz no horizonte. De fato, lembrando que $\vec{v}_\perp \cdot \vec{v}_\parallel = r^2 v_\perp^\theta v_\parallel^\theta + r^2 \sin^2 \theta v_\perp^\phi v_\parallel^\phi$ e considerando $g_{\mu\nu}$ a métrica acústica esférica (2.59), teremos

$$\begin{aligned} L_\mu L^\mu|_{\mathcal{H}} &= g_{\mu\nu} L^\mu L^\nu|_{\mathcal{H}} \\ &= -\frac{\rho^2}{r^4 c_s^2} (c_s^2 - v_\perp^2)|_{\mathcal{H}} \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (4.6)$$

já que no horizonte $|\vec{v}_\perp| = c_s$. Deste modo, o campo L^μ é tangente ao horizonte de eventos acústico e suas curvas integrais são geradoras desta hiperfície.

Inserindo o campo L^μ na Eq. (4.1), obtemos as equações

$$\frac{1}{\rho^2} v^i \partial_i \left[\frac{\rho^2}{c_s^2} (v_\perp^2 - c_s^2) \right] \Big|_{\mathcal{H}} = 2\kappa \quad (4.7)$$

e

$$\frac{1}{\rho^2} \left\{ c_s^2 e^{ij} \partial_j \left[\frac{\rho^2}{c_s^2} (v_\perp^2 - c_s^2) \right] - v^i v^j \partial_j \left[\frac{\rho^2}{c_s^2} (v_\perp^2 - c_s^2) \right] \right\} \Big|_{\mathcal{H}} = -2\kappa v_\parallel^i|_{\mathcal{H}} \quad (4.8)$$

onde e^{ij} são as componentes contravariantes da métrica espacial (2.33). Substituindo a Eq. (4.7) em (4.8) e lembrando que no horizonte $(v_\perp^2 - c_s^2) = 0$, teremos

$$2\kappa v_\perp^i|_{\mathcal{H}} = e^{ij} \partial_j (v_\perp^2 - c_s^2)|_{\mathcal{H}}. \quad (4.9)$$

Esta equação pode ser escrita na forma vetorial como (veja início da Sec. 2.3.3)

$$2\kappa \vec{v}_\perp|_{\mathcal{H}} = \vec{\nabla} (v_\perp^2 - c_s^2)|_{\mathcal{H}}. \quad (4.10)$$

Sabendo que, no horizonte, $\vec{v}_\perp$ e $\vec{\nabla} (v_\perp^2 - c_s^2)$ são vetores de mesma direção e mesmo sentido, podemos extrair da expressão acima o valor da gravidade superficial acústica

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{|\vec{\nabla} (v_\perp^2 - c_s^2)|}{|\vec{v}_\perp|} \Big|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{\nabla} (v_\perp^2 - c_s^2)|}{c_s} \Big|_{\mathcal{H}}. \quad (4.11)$$

Notamos assim que a gravidade superficial acústica é independente do fator $\rho^2/r^4 c_s^2$ que multiplica a métrica. Ademais, a temperatura do espectro planckiano de fônons do buraco mudo, dada pela equação

$$T = \frac{\hbar}{2\pi k} \left(\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \right)_{\text{no horizonte}} \quad (4.12)$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck e k é a constante de Boltzman, obtida por W. Unruh, é proporcional à gravidade superficial acústica.

Se o campo L^μ for um campo de Killing sobre o horizonte, é possível mostrar que as curvas integrais de L^μ são geodésicas tipo luz contidas em $\mathcal{H}$. De fato, se $L^\mu = \xi^\mu$, este campo deve satisfazer a relação $\nabla_\mu L_\nu + \nabla_\nu L_\mu = 0$. Multiplicando esta última equação por L^μ obtemos

$$L^\mu \nabla_\mu L_\nu + L^\mu \nabla_\nu L_\mu = 0 \quad (4.13)$$

e portanto, devido a Eq. (4.1)

$$\begin{aligned} L^\mu \nabla_\mu L_\nu &= -\frac{1}{2} \nabla_\nu (L^\mu L_\mu) \\ &= \kappa L_\nu, \end{aligned} \quad (4.14)$$

lembrando que todas essas expressões estão avaliadas no horizonte $\mathcal{H}$. Finalmente, a última equação corresponde a equação da geodésica para uma parametrização não afim (veja pag. 41 de [43]).

4.3 Soluções estacionárias

4.3.1 Potencial de forças não nulo

Como discutimos na seção anterior, horizontes sônicos, os análogos acústicos dos horizontes de eventos da Relatividade Geral, podem ser gerados modelando convenientemente o movimento de um fluido clássico ideal e barotrópico. Deste modo, nessa seção e na seguinte estaremos interessados em encontrar soluções das equações da hidrodinâmica para um fluido ideal e barotrópico restrito a esfera bidimensional, capazes de reproduzir um buraco mudo e um buraco surdo no espaço-tempo acústico esférico.

No Cap. 2 vimos que as equações que governam a dinâmica de um fluido ideal, vinculado a uma esfera de raio r , são

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 & \text{Equação da continuidade,} \\ \partial \vec{v} / \partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P / \rho + \vec{f} & \text{Equação de Euler,} \end{cases} \quad (4.15)$$

que, apesar de serem idênticas ao caso tridimensional quando colocadas nesse formato vetorial, não devemos esquecer que o gradiente e o divergente sobre a esfera S^2 são dados por (2.42) e (2.43), respectivamente.

É fácil notarmos que se trata de um sistema de 3 equações para 4 variáveis ($\vec{v}(t, \theta, \phi) = -\vec{\nabla}\Phi(t, \theta, \phi)$, $\rho(t, \theta, \phi)$ e $P(t, \theta, \phi)$), considerando que a força externa $\vec{f} = \vec{\nabla}\Psi$ seja conhecida. Porém, a condição de barotropicidade imposta ao fluido nos fornece uma quarta equação, $P = P(\rho)$, chamada de equação de estado, de onde obtemos a velocidade do som local $c_s = \sqrt{dP/d\rho}$.

Em algumas situações, entretanto, é válido pensar no potencial das forças externas, Ψ , como uma variável do sistema a ser determinada. Neste caso devemos assumir que alguma outra variável, $\vec{v}$, ρ ou P , seja um dado do problema para que o sistema tenha uma única solução. Este modo de ver o problema pode ser interessante no momento em que é desejado que uma certa variável se comporte de uma maneira bem específica. O lado ruim desta história é que as dificuldades práticas de criar um potencial Ψ qualquer podem ser imensuráveis. De qualquer forma, passaremos a nos referir à Ψ também como uma variável.

Até certo ponto, nosso problema se identifica com essa abordagem, na medida em que pretendemos modelar um horizonte de eventos acústico, e, conseqüentemente, almejamos que em uma região do fluxo, a velocidade atinja limites supersônicos. Para ser mais exato, nossa intenção é que o campo de velocidades sobre a esfera seja dividido em três partes: Duas regiões supersônicas, uma com o fluxo apontado pra fora (criando assim um buraco surdo) e outra com o fluxo direcionado pra dentro (gerando um buraco mudo), e uma terceira região subsônica entre as outras duas.

Deste modo, o campo de velocidades, $\vec{v}(t, \theta, \phi)$, procurado, deve ter um formato muito específico e por esta razão, como veremos mais a frente, estaremos mais preocupados em encontrar a solução de ρ , P e Ψ para um dado $\vec{v}$, proposto convenientemente. Um detalhe interessante nisso tudo, como mostraremos adiante, é que para que $\vec{v}$ seja igual a velocidade do som c_s em alguns pontos, o potencial Ψ deve ser necessariamente não nulo em algumas regiões.

Antes de entrarmos mais a fundo nisso, é importante mencionarmos que o sistema de equações diferenciais parciais (4.15) é totalmente não trivial e portanto é extremamente necessário impormos algumas condições extras ao problema de modo a facilitar a resolução de (4.15). Sendo assim, conforme o próprio nome da seção sugere, iremos

impor soluções estacionárias, isto é, suporemos que as variáveis $\vec{v}$, ρ e P , e portanto Ψ , sejam independentes do tempo.

Somente esta imposição já facilitaria bastante nosso problema, no entanto, iremos supor também simetria axial. Isto significa que as variáveis citadas acima também não dependerão da coordenada ϕ .

Finalmente, nos restringiremos às equações de estado do tipo

$$P = \frac{a^2}{n} \rho^n, \quad (4.16)$$

onde a e $n \neq 0$ são constantes reais. De fato, estas equações de estado descrevem quase todos os fluidos interessantes em física: Fluido perfeito ($n = 1$); Condensado de Bose-Einstein ($n = 2$); gás de Chaplygin $n = -1$. Note que, uma vez fixada a equação de estado, a pressão P é completamente determinada pela densidade ρ , de forma que, é absolutamente plausível deixarmos a pressão de lado, nos concentrando apenas nas variáveis $\vec{v}$, ρ e Ψ , soluções de (4.15), como será feito a partir de agora.

Buraco mudo/surdo sem rotação

Neste contexto, sob as condições impostas até o momento (que nos parecem bem aceitáveis), as variáveis $\vec{v}$, ρ e Ψ são funções apenas da coordenada espacial θ , ou seja

$$\vec{v} = \vec{v}(\theta), \rho = \rho(\theta), \Psi = \Psi(\theta). \quad (4.17)$$

Inicialmente, adicionaremos uma última condição, referente ao campo de velocidades $\vec{v}$, que já é suposto depender apenas de θ , impondo que $\vec{v}$ tenha componente apenas na direção ∂_θ . Em outras palavras, teremos

$$\vec{v} = v^\theta(\theta) \partial_\theta = v^{\hat{\theta}} \hat{e}_\theta. \quad (4.18)$$

Em um momento posterior, afrouxaremos essa condição afim de incluir rotação ao buraco mudo/surdo. Até que isso aconteça, chamaremos $v^{\hat{\theta}} = v$, omitindo o índice “ $\hat{\theta}$ ” da componente da velocidade na base tetrada, de modo a não carregar demais a notação. Apesar de termos mantido a preferência, até este ponto da dissertação, pelas componentes da velocidade na base coordenada, é conveniente, nesta etapa, escrevermos as equações (4.15) com as componentes da velocidade na base tetrada, $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$, para que nestas equações não apareça o raio r .

Desta forma, inserindo a velocidade $\vec{v}$ e a densidade ρ , sujeitas a estas imposições, na equação da continuidade, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) &= (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{v} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{1}{r} (\partial_\theta \rho) v + \rho \left(\partial_\theta v + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} v \right) \\ &= 0 .\end{aligned}\tag{4.19}$$

Já que ρ e v dependem apenas de θ podemos substituir as derivadas parciais por derivadas totais e reescrever a expressão acima na forma

$$\frac{d}{d\theta}(\rho v) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}(\rho v) = 0 .\tag{4.20}$$

Esta equação diferencial ordinária admite uma solução igual a

$$\rho(\theta)v(\theta) = \rho_e v_e \csc \theta ,\tag{4.21}$$

onde ρ_e e v_e são constantes de integração que podem ser interpretadas como o valor da densidade e da velocidade avaliadas no equador ($\theta = \pi/2$). A Eq. (4.21) corresponde a uma equação algébrica, não diferencial, relacionando diretamente a densidade ρ e a única componente não nula, $v = v^\theta$, da velocidade.

Analisando agora a equação de Euler (segunda relação da Eq. (4.15)) sob as condições impostas, vemos que apenas uma das duas equações é relevante. Enquanto que a componente ϕ é trivial ($0 = 0$), a componente θ da equação de Euler fornece a equação

$$v \frac{dv}{d\theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\theta} + \frac{d\Psi}{d\theta} .\tag{4.22}$$

Considerando o caso $n = 1$ para a equação de estado (4.16) (fluido perfeito), a velocidade do som c_s será, por definição, igual a a , e portanto, uma constante. Nesse caso, a equação (4.22) assume a forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta}(v^2) = -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta} + \frac{d\Psi}{d\theta} ,\tag{4.23}$$

que pode ainda ser reescrita como

$$\frac{d}{d\theta}(v^2) = \frac{d}{d\theta}(2\Psi - 2c_s^2 \ln \rho) .\tag{4.24}$$

Integrando esta equação diferencial obtemos

$$v^2(\theta) = 2\Psi(\theta) - 2c_s^2 \ln[\rho(\theta)/\rho_c] ,\tag{4.25}$$

onde ρ_c é uma constante de integração.

Temos então duas equações, Eq. (4.21) e Eq. (4.25), envolvendo três variáveis, v , ρ e Ψ (lembrando que, no caso em questão, $c_s = a$ é uma constante e a pressão é determinada pela densidade através da relação $P = c_s^2 \rho$). Como sugerimos no início da seção, podemos escrever duas dessas variáveis em função da terceira. Nos interessa aqui, como já foi discutido, escrever o potencial e a densidade como funções da velocidade. Teremos assim:

$$\begin{cases} \rho(v) = \frac{\rho_e v_e \csc \theta}{v} \\ \Psi(v) = c_s^2 \ln \left[\frac{\rho_e v_e \csc \theta}{\rho_c v} \right] + \frac{v^2}{2} \end{cases} \quad (4.26)$$

É importante notar que, apesar de escrevermos ρ e Ψ como funções de v , esta dependência é apenas pontual, no sentido que para cada ponto, ou melhor, para cada θ existe uma relação diferente entre essas variáveis.

Um outro resultado interessante que podemos extrair dessas duas equações é obtido derivando novamente a última equação em relação a θ . Desta operação obtemos

$$v \frac{dv}{d\theta} = \frac{d\Psi}{d\theta} + c_s^2 \left[\cot \theta + \frac{1}{v} \frac{dv}{d\theta} \right], \quad (4.27)$$

e portanto

$$\frac{dv}{d\theta} = v \left[\frac{d\Psi/d\theta + c_s^2 \cot \theta}{v^2 - c_s^2} \right]. \quad (4.28)$$

Assim, lembrando que a função $\cot \theta$ só se anula em $\pi/2$, concluímos a partir da última relação que é necessário que a força externa $\vec{f}$ (gradiente do potencial Ψ) seja não nula em algumas regiões da esfera para que se forme um horizonte de eventos acústico (onde $v = c_s$) em $\theta \neq \pi/2$. Caso contrário, se $\vec{f}$ for nula sobre toda a esfera, a derivada da velocidade $dv/d\theta$ diverge para $v = c_s$, gerando uma singularidade nesse ponto. Isto explica a importância de admitirmos a existência de forças externas agindo sobre o sistema hidrodinâmico.

As condições de continuidade e positividade que devem ser satisfeitas pela densidade ρ , e de diferenciabilidade pelo potencial Ψ nos indicam exatamente o quão livres somos na escolha da velocidade v . Essas condições, aliadas ao formato de velocidade desejado nos guia na escolha da função que descreverá v .

Relembrando nossa intenção de criarmos um buraco mudo e um buraco surdo situados em pólos opostos da esfera, não é difícil concluirmos que a estacionaridade e

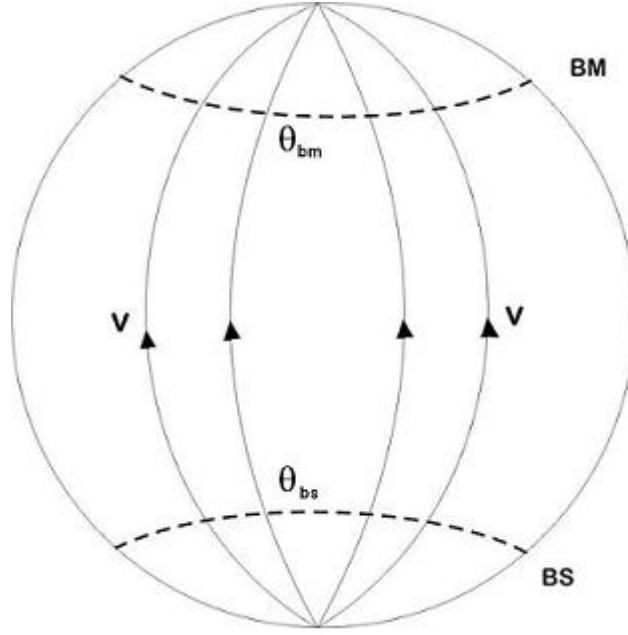


Figura 4.1: Esfera

a simetria axial imposta ao nosso problema hidrodinâmico, forçaram os horizontes de eventos acústicos[‡], associados ao buraco mudo e ao buraco surdo, a serem hiperfícies do tipo $\theta = cte$, descritas respectivamente por $\theta = \theta_{bm}$ e $\theta = \theta_{bs}$, onde θ_{bm} e θ_{bs} são, evidentemente, constantes. A função descrevendo a velocidade v , procurada neste caso, deve assumir valores maiores que c_s nas regiões $\{0 \leq \theta < \theta_{bs}\}$ e $\{\theta_{bm} < \theta \leq \pi\}$ da esfera e valores inferiores à velocidade do som na região $\{\theta_{bs} < \theta < \theta_{bm}\}$ como mostra a fig. 4.3.1.

O campo de velocidades dado por

$$v(\theta) = v_e \sqrt{\csc \theta} \quad (4.29)$$

se encaixa bem no perfil visado, desde que o módulo da constante v_e seja estritamente menor que a velocidade do som c_s e diferente de zero. Neste caso a velocidade v se iguala a velocidade do som c_s para dois valores de θ distintos, correspondentes aos valores de θ_{bm} e θ_{bs} que definem a hiperfície do horizonte de eventos acústico do

[‡]Note que aqui as intersecções, $\mathcal{H} \cap \Sigma_t$, do horizonte de eventos absoluto com as hiperfícies de t constante se confundem com o horizonte de eventos aparente $\mathcal{A}$, e portanto, iremos nos referir a estas hiperfícies simplesmente como horizontes de eventos.

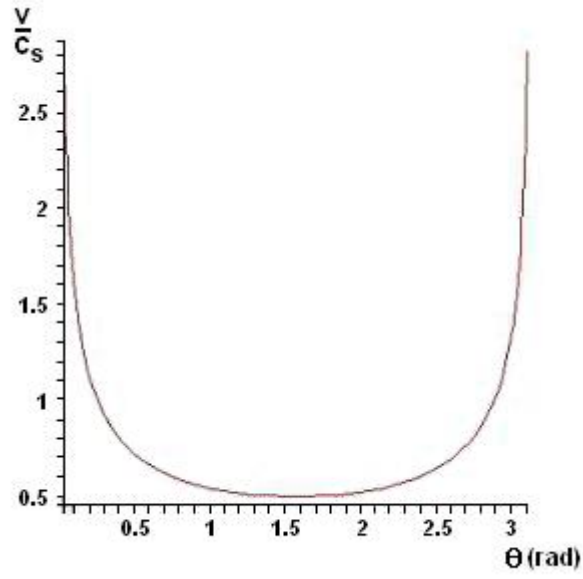


Figura 4.2: Gráfico da velocidade $v = v_e \sqrt{\csc \theta}$ pela velocidade do som c_s em função da coordenada θ , para $v_e = c_s/2$

buraco mudo e do buraco surdo. Supondo v_e positivo, é fácil verificarmos que

$$\theta_{bm} = \pi - \arcsin(v_e^2/c_s^2)$$

$$\theta_{bs} = \arcsin(v_e^2/c_s^2)$$

Além disso, inserindo esta solução de v , (4.29), nas Eqs. (4.26) veremos que a densidade e o potencial Ψ assumirão a forma

$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= \rho_e \sqrt{\csc \theta} \\ \Psi(\theta) &= c_s^2 \ln \left[\frac{\rho_e}{\rho_c} \sqrt{\csc \theta} \right] + \frac{v_e^2 \csc \theta}{2} \end{aligned}$$

A métrica acústica do espaço-tempo acústico esférico modelado por um fluxo descrito pela velocidade (4.29) e pela densidade mostrada logo acima, é igual a

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho_e^2 \csc \theta}{r^4 c_s^2} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v_e^2 \csc \theta) & -rv_e \sqrt{\csc \theta} & 0 \\ -rv_e \sqrt{\csc \theta} & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

de forma que o elemento de linha correspondente é dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\rho_e^2 \csc \theta}{r^4 c_s^2} \left[-(c_s^2 - v_e^2 \csc \theta) dt^2 - 2rv_e \sqrt{\csc \theta} dt d\theta + r^2 (d\theta^2 + \sin \theta d\phi^2) \right] \\ &= \frac{\rho^2}{r^4 c_s^2} \left[-(c_s^2 - v^2) dt^2 - 2rv dt d\theta + r^2 (d\theta^2 + \sin \theta d\phi^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

De modo geral, para uma solução qualquer de v e ρ , podemos fazer uma transformação de coordenada descrita por

$$d\tau = rc_s \left[dt + \frac{rv}{(c_s^2 - v^2)} d\theta \right], \quad (4.32)$$

desde que $rv/(c_s^2 - v^2)$ seja integrável, tal que o elemento de linha (4.31) se transforma em

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{r^4 c_s^2} \left[-\frac{(c_s^2 - v^2)}{r^2 c_s^2} d\tau^2 + \frac{r^2 c_s^2}{(c_s^2 - v^2)} d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (4.33)$$

Como no caso da métrica de Schwarzschild em coordenadas esféricas, temos a impressão de que o espaço-tempo efetivo descrito pelo elemento de linha acima apresenta uma singularidade em $v = c_s$. Entretanto este é um problema relacionada à escolha do sistema de coordenadas. No Cap. (6), ao calcular a curvatura sentida pelos raios de som veremos quais condições sobre o fluxo são necessárias para que exista uma verdadeira singularidade, isto é, para que a curvatura escalar exploda.

Um outro possível formato de v capaz de gerar dois horizontes de evento acústico é a velocidade

$$v(\theta) = (v_p - v_e) \cos^2 \theta + v_e, \quad (4.34)$$

desde que a constante v_p , correspondente à velocidade do fluido nos pólos, satisfaça a condição: $|v_p| > c_s$ e tenha o mesmo sinal da constante v_e .

Neste caso

$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= \rho_e v_e \frac{\csc \theta}{(v_p - v_e) \cos^2 \theta + v_e} \\ \Psi(\theta) &= c_s^2 \ln \left[\frac{\rho_e v_e}{\rho_c} \frac{\csc \theta}{(v_p - v_e) \cos^2 \theta + v_e} \right] + \frac{((v_p - v_e) \cos^2 \theta + v_e)^2}{2} \end{aligned}$$

Além disso, assumindo v_e e v_p positivos, os horizontes acústicos do buraco mudo e do buraco surdo serão representados conforme discutimos acima por

$$\begin{aligned} \theta_{bm} &= \pi - \arccos \sqrt{(c_s + v_e)/(v_p - v_e)} \\ \theta_{bs} &= \arccos \sqrt{(c_s + v_e)/(v_p - v_e)} \end{aligned}$$

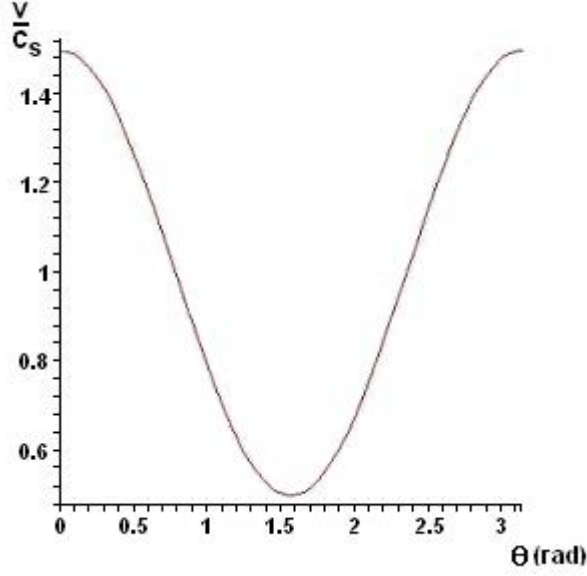


Figura 4.3: Gráfico da velocidade $v = (v_p - v_e) \cos^2 \theta + v_e$ pela velocidade do som c_s em função da coordenada θ , para $v_e = c_s/2$ e $v_p = 3c_s/2$

A grande diferença com relação a solução anterior reside no fato de que esta última solução não explode nos pólos ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$), se mantendo sempre inferior à quantidade v_p . Esta diferença implica na inexistência de singularidades, o que pode ser comprovado utilizando a Eq. (6.21) da curvatura escalar do espaço-tempo acústico esférico.

Podemos pensar agora em soluções para outras categorias de fluidos, para os quais $n \neq 1$. Ao contrário da situação $n = 1$, a velocidade do som não é mais uma constante e dependerá da densidade através da relação

$$c_s = |a| \sqrt{\rho^{n-1}}. \quad (4.35)$$

Por outro lado, enquanto que a Eq. (4.20) referente à equação da continuidade permanece inalterada, mantendo (4.21) válido, a equação de Euler (4.22) para um fluxo estacionário, na direção θ e com simetria axial, assume a forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (v^2) = -\frac{a^2}{n-1} \frac{d\rho^{n-1}}{d\theta} + \frac{d\Psi}{d\theta}. \quad (4.36)$$

Esta equação pode ser facilmente integrada, resultando na relação

$$v^2(\theta) = -\frac{2}{n-1}c_s^2(\theta) + 2\Psi(\theta). \quad (4.37)$$

A constante de integração não aparece na equação acima pois ela pode ser englobada pelo potencial Ψ sem alterar a força externa $\vec{f}$.

Usando as Eqs. (4.21), (4.35) e (4.37) podemos escrever, como anteriormente, a densidade ρ , a velocidade do som c_s e o potencial Ψ em função da velocidade v . Teremos assim

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(v) = \frac{\rho_e v_e \csc \theta}{v} \\ c_s(v) = |a| \left(\frac{\rho_e v_e \csc \theta}{v} \right)^{\frac{n-1}{2}} \\ \Psi(v) = \frac{a^2}{n-1} \left(\frac{\rho_e v_e \csc \theta}{v} \right)^{n-1} + \frac{v^2}{2} \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Um ponto interessante do caso $n \neq 1$ é que a partir da segunda equação de (4.38), descrevendo a dependência da velocidade do som com a velocidade do fluido na direção θ , v , e com a própria coordenada θ , podemos extrair a velocidade do fluido no horizonte (que chamaremos de v_h) em função do ponto onde o horizonte se forma. De fato, a formação de um horizonte sônico acontece quando $c_s(v_h) = v_h$, da onde tiramos que

$$v_h = [a^2(\rho_e v_e \csc \theta)^{n-1}]^{\frac{1}{n+1}}. \quad (4.39)$$

Outro aspecto interessante nesse mesmo sentido é observado calculando a derivada parcial do potencial Ψ com relação a v . Não requer muito esforço para verificarmos que esta derivada aplicada ao horizonte se anula, ou seja

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right|_{v_h} = 0.$$

O que significa que o potencial assume um valor extremo com relação a variação da velocidade no horizonte sônico.

Com o intuito de comparar alguns resultados, considere $v = v_e \sqrt{\csc \theta}$ como feito no caso $n = 1$. Para tal velocidade vemos que $c_s = |a|(\rho_e \sqrt{\csc \theta})^{\frac{n-1}{2}} = |a|\rho^{\frac{n-1}{2}}$, de modo que se $n > 1$ a velocidade do som cresce a medida que se aproxima dos pólos, divergindo em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, enquanto que para $n < 1$ a velocidade do som se

comporta de maneira completamente diferente, diminuindo até atingir o valor nulo nas extremidades.

Igualando a função v com a função c_s que representa a velocidade do som obtemos a equação

$$\sin \theta = \left[\frac{v_e}{|a|\rho_e^{\frac{n-1}{2}}} \right]^{\frac{4}{3-n}}, \quad (4.40)$$

de onde tiramos a condição sobre as constantes v_e , ρ_e e a para a existência de horizontes de eventos sônicos:

$$0 < |v_e| < |a|\rho_e^{\frac{n-1}{2}}$$

Verificada esta condição, os valores de θ solução de (4.40) definirão os horizontes do buraco mudo e do buraco surdo do espaço-tempo acústico esférico.

Lembremos que no caso anterior, $n = 1$, a velocidade do som era uma constante e a única condição exigida para a existência de horizontes de eventos era $|v_e| < c_s$.

Buraco mudo/surdo com rotação

Visando agora adicionar rotação ao buraco mudo/surdo, recuperaremos a componente ϕ da velocidade do fluido, que antes impusemos ser nula. Por conta disso, é importante recuperar também (ao menos provisoriamente para não ocasionar nenhum tipo de confusão) o índice “ $\hat{\theta}$ ” da componente na direção θ da velocidade, que havíamos simplesmente ocultado anteriormente por questões de praticidade. A velocidade é portanto escrita como

$$\vec{v} = v^{\hat{\theta}}\hat{e}_{\theta} + v^{\hat{\phi}}\hat{e}_{\phi}.$$

Manteremos porém a estacionaridade e a simetria axial do problema de forma que a componente $v^{\hat{\phi}}$ será uma função apenas da coordenada θ , isto é, $v^{\hat{\phi}} = v^{\hat{\phi}}(\theta)$.

Neste ponto, desfeita qualquer fonte de confusão, utilizaremos novamente uma notação mais simplificada para não carregar muitos índices sobre as equações. Assim, chamaremos mais uma vez $v^{\hat{\theta}} = v$ enquanto que para a componente ϕ da velocidade escreveremos $v^{\hat{\phi}} = w$.

Por consequência de w não depender da coordenada ϕ a equação da continuidade continua sendo escrita como (4.20), admitindo ainda a solução (4.21), que envolve

apenas a componente v da velocidade. Por outro lado, como w não é mais identicamente nulo as duas equações correspondentes às componentes θ e ϕ da equação vetorial de Euler serão não triviais e respectivamente iguais a (veja (2.14))

$$v \frac{dv}{d\theta} - w^2 \cot \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\theta} + \frac{d\Psi}{d\theta} \quad (4.41)$$

$$v \frac{dw}{d\theta} + vw \cot \theta = 0 , \quad (4.42)$$

onde levamos em conta o fato das variáveis v , w , ρ e P dependerem apenas de θ , consequência da estacionaridade e da simetria axial impostas ao problema.

Na realidade, apenas a imposição do sistema ser axialmente simétrico não exige diretamente que o potencial Ψ dependa somente da coordenada θ . Poderíamos pensar numa força externa não nula e constante na direção ϕ , de modo que o potencial teria uma dependência linear com a coordenada ϕ sem no entanto quebrar a simetria axial do sistema físico. Neste caso teríamos $\Psi = \Psi_1(\theta)\Psi_2(\phi)$, com $\partial\Psi_2(\phi)/\partial\phi = cte$. Além disso deveríamos reconsiderar o termo $(\sin \theta)^{-1} \partial\Psi/\partial\phi$ do lado esquerdo da Eq. (4.42). Entretanto, a partir da Eq. (4.41) é possível obter o seguinte resultado:

$$\Psi_2(\phi) = \left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta} \right)^{-1} \left[v \frac{dv}{d\theta} - w^2 \cot \theta + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\theta} \right] = cte , \quad (4.43)$$

já que nenhum dos termos da expressão no meio da equação depende da coordenada ϕ . Este resultado nos mostra que, indiretamente, a simetria axial e a estacionaridade impõem que o potencial Ψ tenha uma dependência apenas em θ .

Voltando às equações (4.41) e (4.42), nos restringiremos à análise do caso $n = 1$, para o qual $P = a^2 \rho$. Nesse caso essas equações podem ser reescritas como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (v)^2 - w^2 \cot \theta = -c_s^2 \frac{d}{d\theta} (\ln \rho) + \frac{d\Psi}{d\theta} \quad (4.44)$$

$$\frac{dw}{d\theta} = -w \cot \theta . \quad (4.45)$$

A última equação é idêntica a (4.20) e admite, portanto, a solução

$$w = w_e \csc \theta .$$

Note assim que a solução da componente w , referente a direção ϕ da velocidade do fluido sobre a esfera, é definida independentemente das outras variáveis como um resultado apenas da geometria esférica.

Reescrevendo convenientemente a Eq. (4.45) na forma $1/2(dw^2/d\theta) = -w^2 \cot \theta$ e introduzindo-a na Eq. (4.44), teremos

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\theta}(v)^2 + \frac{d}{d\theta}(w)^2 \right] = -c_s^2 \frac{d}{d\theta}(\ln \rho) + \frac{d\Psi}{d\theta}, \quad (4.46)$$

que pode ser facilmente integrada, resultando em

$$\frac{1}{2} (v^2 + w^2) = -c_s^2 \ln \rho + \Psi.$$

Comparando com o caso sem rotação verificamos que o potencial encontrado aqui é diferente do anterior, sem rotação, apenas pela adição de um termo igual a $1/2(w_e \csc \theta)^2$.

Como discutimos na seção 4.2, a fronteira da ergoregião dos buracos sônicos é definida como sendo a região onde $|\vec{v}| = c_s$. Sabendo que $w = w_e \csc \theta$, a componente v da velocidade na fronteira da ergoregião acústica vale portanto

$$v = \sqrt{c_s^2 - w_e^2 \csc^2 \theta}.$$

Não é difícil verificarmos que todos as conclusões apontadas acima para o buraco mudo/surdo com rotação podem também ser aplicadas ao caso $n \neq 1$. A única alteração que acontece é a substituição do termo $-c_s^2 \frac{d}{d\theta}(\ln \rho)$ da Eq. (4.44) por $-\frac{a^2}{n-1} \frac{d}{d\theta}(\rho^{n-1})$. Esta observação corrobora ainda mais nossa afirmação de que a componente w da velocidade é definida pela geometria da esfera.

4.3.2 Casca esférica variável

Apesar de termos concentrado esforços para encontrar os potenciais de forças externas adequados ao nosso objetivo, capazes de gerar fluxos convenientes na descrição de análogos de buracos negros e buracos brancos, sabemos que do ponto de vista experimental a construção desses potenciais pode se tornar um imenso problema.

Para fluxos unidimensionais de um fluido restrito a um tubo, uma maneira prática de simular a ação de forças externas sobre o fluido é variar a seção transversal do tubo, como é feito no conhecido “Bocal de Laval”. Podemos adaptar esta idéia ao caso esférico considerando não mais uma esfera bidimensional mas sim uma casca esférica de espessura variável.

Evidentemente, para não nos distanciarmos muito da nossa proposta inicial é exigido que as dimensões da espessura da casca esférica seja muito menor que a dimensão da própria esfera, de modo que o fluxo possa ainda ser considerando bidimensional, ou seja, independente do raio variando entre a superfície mais interna e mais externa da casca esférica. Visando novamente simplificar o problema suporemos mais uma vez estacionaridade e simetria axial das quantidades físicas envolvidas. Além dessas condições, iremos considerar que o fluxo tenha componente apenas na direção θ . Desta forma poderemos descrever a velocidade como $\vec{v} = v^{\hat{\theta}}(\theta)\hat{e}_{\theta} = v(\theta)\hat{e}_{\theta}$. Note que, como anteriormente, denotaremos a componente $v^{\hat{\theta}}$ da velocidade do fluido apenas por v .

As equações regendo a dinâmica do fluido deste novo sistema físico devem ser obtidas levando em consideração essa nova estrutura do espaço no qual o fluido está confinado. Lembrando que o fluido em questão é um fluido clássico, suposto ideal e barotrópico, seguiremos uma análise clássica do seu movimento, sempre atento ao vínculo imposto (fluido restrito à casca esférica).

Em primeiro lugar, a lei de conservação do fluxo de massa que dá origem a equação da continuidade é escrita na sua forma mais geral como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{\mathcal{M}} \rho dV \right\} = - \int_{\partial\mathcal{M}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{\Sigma} . \quad (4.47)$$

Traduzindo esta equação, ela nos diz que a taxa de variação no tempo da massa localizada no volume $\mathcal{M}$ fixo no referencial inercial é igual à taxa de transporte líquido através da fronteira $\partial\mathcal{M}$. A quantidade $d\vec{\Sigma}$ representa os elementos de superfície infinitesimais perpendiculares à $\partial\mathcal{M}$. Aplicando esta equação a uma faixa da casca esférica delimitada pelos ângulos θ_1 e θ_2 (veja fig. 4.3.2), o lado esquerdo da equação se anula em virtude do carácter estacionário da densidade ρ . Além disso, devido ao fato da velocidade ter apenas componentes na direção θ a integral de superfície do lado direito da Eq. (4.47) é não nula apenas sobre as superfícies Σ_{θ_1} e Σ_{θ_2} , intersecções das superfícies $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ com a casca esférica. Não é difícil visualizarmos que Σ_{θ_1} e Σ_{θ_2} são ortogonais à velocidade $\vec{v}$. Levando em conta tudo isto a Eq. (4.47) assume a forma

$$\int_{\partial\mathcal{M}_1} \rho(\theta_1)v(\theta_1)d\Sigma_{\theta_1} = \int_{\partial\mathcal{M}_2} \rho(\theta_2)v(\theta_2)d\Sigma_{\theta_2} . \quad (4.48)$$

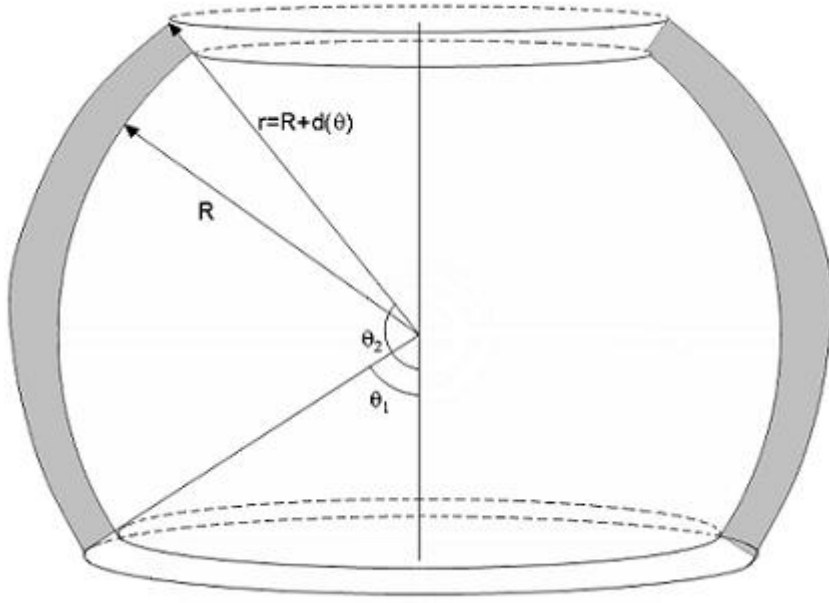


Figura 4.4: Casca esférica entre os ângulos θ_1 e θ_2

Como o integrando é uma constante sobre as superfícies de integração, a equação acima pode ser reescrita como

$$\rho(\theta_1)v(\theta_1)A(\theta_1) = \rho(\theta_2)v(\theta_2)A(\theta_2) , \quad (4.49)$$

onde $A(\theta_1)$ e $A(\theta_2)$ são as áreas das superfícies Σ_{θ_1} e Σ_{θ_2} , respectivamente.

Considerando que a casca esférica, que denotaremos doravante por $\mathcal{C}$, seja delimitada por uma esfera interna de raio R e por uma superfície externa, S_e , descrita em coordenadas esféricas por $S_e = \{r = R + d(\theta), \theta, \phi\}$, onde $d(\theta)$ é uma função determinando a espessura da casca, podemos mostrar com geometria e cálculo elementar que a área $A(\theta)$ das superfícies Σ_θ (que são segmentos de cone como podemos ver na fig. 4.3.2) será uma função de θ dada por

$$A(\theta) = \pi d(\theta) \sin \theta [2R + d(\theta)] . \quad (4.50)$$

Assim, a Eq. (4.49) nos diz que o produto $\rho v A$ é uma quantidade conservada ao longo de θ , e portanto

$$\frac{d}{d\theta} \{ \rho(\theta) v(\theta) A(\theta) \} = 0 , \quad (4.51)$$

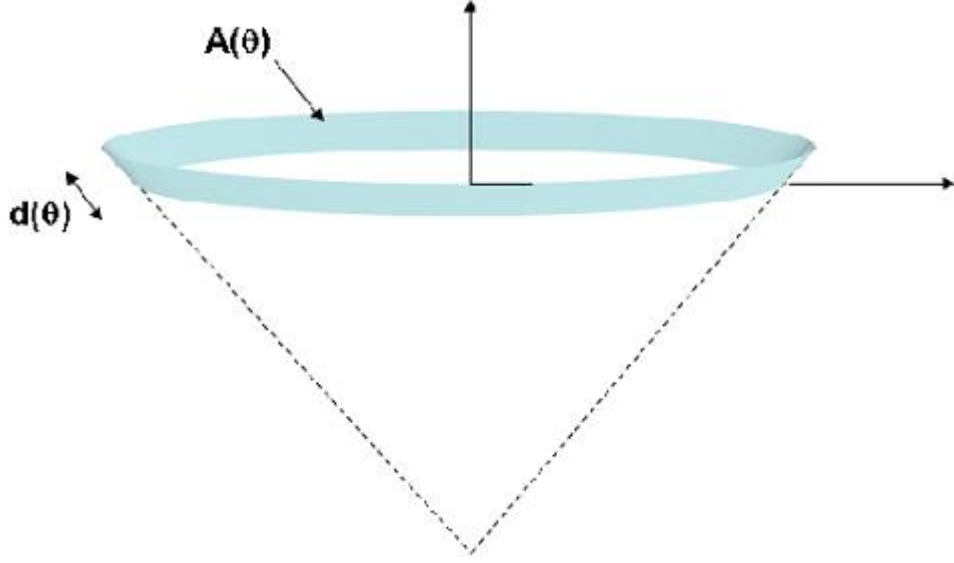


Figura 4.5: Área da superfície Σ_θ

que pode ser vista como a equação da continuidade da casca esférica $\mathcal{C}$. Definindo a função $D(\theta) = \pi d(\theta)[2R + d(\theta)]$, a Eq. (4.51) é reescrita como

$$\frac{d}{d\theta}[\rho(\theta)v(\theta)D(\theta)] + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \rho(\theta)v(\theta)D(\theta) = 0 , \quad (4.52)$$

que é uma equação diferencial semelhante às Eqs. (4.20) e (4.45). As duas últimas equações admitem como solução

$$\rho(\theta)v(\theta)A(\theta) = \alpha , \quad (4.53)$$

onde α é uma constante. Ou ainda

$$\rho(\theta)v(\theta)D(\theta) = \alpha \csc \theta. \quad (4.54)$$

Por outro lado, sob as condições impostas até o momento de estacionaridade, simetria axial e fluxo apenas na direção θ , a análise da conservação do fluxo de momento nos conduz ao mesmo resultado obtido para o caso bidimensional do fluido restrito à esfera, de modo que o fluido dentro da casca esférica obedece a equação de Euler

$$v \frac{dv}{d\theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\theta} + \frac{d\Psi}{d\theta} \quad (4.55)$$

idêntica ao caso anterior. Porém, uma vez que o objetivo deste modelo é justamente tentar encontrar um modo de simular geometricamente a presença de forças externas,

iremos considerar $d\Psi/d\theta = 0$. Isto implica que

$$v^2 = \begin{cases} -2c_s^2 \ln(\rho/\rho_c) & \text{se } n = 1 \\ -\frac{2a^2}{n-1} \rho^{n-1} + \beta & \text{se } n \neq 1 \end{cases} \quad (4.56)$$

sendo ρ_c e β constantes de integração.

Analisando esses resultados vemos que o fator geométrico do problema, representado pela função $D(\theta)$ relacionada com a espessura da casca esférica, aparece somente na equação da continuidade, ao contrário do que acontece com o potencial das forças externas Ψ no caso bidimensional, que aparece apenas na equação de Euler. Em razão disto é impossível estabelecer, de modo geral, uma relação de equilíbrio entre os potenciais Ψ do caso bidimensional e as as funções $d(\theta)$ (ou equivalentemente as funções $D(\theta)$) do modelo da casca esférica variável. Em outras palavras, não existe uma relação geral identificando cada potencial Ψ capaz de gerar o mesmo fluxo, ou seja, os mesmos ρ e v , gerados por uma dada função $d(\theta)$. Entretanto, podemos apontar a dependência da área A das seções da casca esférica e da densidade ρ com relação a velocidade v , de forma similar ao que foi feito para o caso do potencial não nulo.

Mantendo a mesma seqüência lógica seguida até agora, vejamos em primeiro lugar a situação $n = 1$. Da primeira equação de (4.56) temos que

$$\rho = \rho_c e^{-\frac{v^2}{2c_s^2}}, \quad (4.57)$$

deixando claro que a densidade é limitada pelo valor da constante ρ_c . Introduzindo esta última equação em (4.53) obtemos

$$A = \frac{\alpha}{\rho_c v} e^{\frac{v^2}{2c_s^2}}, \quad (4.58)$$

ou em termos da função D

$$D = \frac{\alpha}{\rho_c v \sin \theta} e^{\frac{v^2}{2c_s^2}}. \quad (4.59)$$

Como vemos acima a dependência de A e ρ com relação a v é global, ou seja, não depende do ponto. O mesmo não podemos afirmar para a função D .

Seja agora $n \neq 1$. A Eq. (4.56) nos diz que neste caso a densidade é dada por

$$\rho = \left[\frac{n-1}{2a^2} (\beta - v^2) \right]^{\frac{1}{n-1}}. \quad (4.60)$$

Desta relação mais geral podemos obter a densidade em função da velocidade do fluido para os casos particulares mais relevantes, como $n = 2$ (Condensado de Bose-Einstein) e $n = -1$ (gás de Chaplygin):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho = \frac{1}{2a^2}[\beta - v^2] & n = 2 \\ \rho = \frac{|a|}{\sqrt{v^2 - \beta}} & n = -1 \end{array} \right. \quad (4.61)$$

No primeiro caso, exigindo que a densidade seja estritamente positiva, vemos que o quadrado da velocidade deve ser menor que a constante de integração β . Para o caso $n = -1$ acontece o contrário, o quadrado da velocidade deve ser maior que β .

A função D , que descreve a espessura da casca esférica, é para cada um desses casos uma função dependente de v e de θ igual a

$$\left\{ \begin{array}{ll} D = \frac{2\alpha a^2}{\sin \theta} \frac{1}{v[\beta - v^2]} & n = 2 \\ D = \frac{\alpha}{|a| \sin \theta} \frac{\sqrt{v^2 - \beta}}{v} & n = -1 \end{array} \right. \quad (4.62)$$

Apesar das dificuldades em tirar desses resultados conclusões gerais referentes à existência de horizontes de eventos, já que para cada caso temos uma equação bem específica relacionando a densidade, a área A (ou igualmente a função D) e a velocidade e impondo diferentes restrições a essas variáveis, podemos retornar às equações diferenciais (4.51) e (4.55) reescrevendo-as convenientemente como veremos a seguir. De (4.51) temos que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{A} \frac{dA}{d\theta} - \frac{1}{v} \frac{dv}{d\theta}.$$

Usando então (4.55) (lembrando que supomos $d\Psi/d\theta = 0$), $\rho^{-1}(d\rho/d\theta) = -v/c_s^2(dv/d\theta)$ e portanto a equação acima assume a forma

$$\frac{v}{c_s^2} \frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{A} \frac{dA}{d\theta} + \frac{1}{v} \frac{dv}{d\theta},$$

ou ainda

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{v} \frac{dv}{d\theta} (M^2 - 1), \quad (4.63)$$

onde $M = v/c_s$ é o número de Mach. A equação (4.63) pode ser usada na análise das condições de formação de um horizonte acústico, isto é, da superfície verificando $M = 1$, que separa a região subsônica ($M < 1$) da região supersônica ($M > 1$).

Assumindo que na vizinhança do horizonte sônico v , $dv/d\theta$ e A são finitos e não nulos, podemos ver claramente através da Eq. (4.63) que o horizonte se forma para um extremo da área A (área da superfície formada pela intersecção da casca esférica com a superfície de θ constante).

4.4 Soluções não estacionárias

Apesar das soluções estacionárias representarem por si só uma importante fonte de informação, capaz de fornecer diversos resultados tanto clássicos como no escopo da gravitação semi-clássica, soluções dependentes do tempo podem ser bastante interessantes. Não entraremos em muitos detalhes quanto a isto, mas podemos ver em [6] que através de simulações numéricas com soluções desse tipo podemos produzir um espectro térmico assim como a radiação Hawking na formação de um buraco negro. Desta forma, estamos interessados nesta seção em encontrar uma solução não estacionária cuja dependência temporal simule a formação de horizontes sônicos, de forma que em $t = -\infty$ não haja horizonte algum e no limite $t = \infty$ a solução tenda para uma solução estacionária.

Como pudemos ver nas seções passadas, mesmo as soluções estacionárias requerem uma série de imposições sobre o sistema para facilitar a resolução das equações da dinâmica dos fluidos ideais. Logicamente a introdução do tempo nas variáveis deixa o problema ainda mais complexo do ponto de vista matemático e por isso assumiremos várias hipóteses em torno das variáveis $\vec{v}$, ρ , c_s e Ψ . Além da axisimetria do sistema (e portanto da independência com relação a coordenada ϕ) e da imposição de $\vec{v}$ possuir apenas componente na direção θ de modo que utilizaremos a notação $v = v^{\hat{\theta}}$, iremos supor um fluido perfeito, tal que $P = c_s^2 \rho$ onde c_s é uma constante, e suporemos também a separação de variáveis

$$\begin{cases} v(t, \theta) = T_1(t) \bar{v}(\theta) \\ \rho(t, \theta) = T_2(t) \bar{\rho}(\theta) \end{cases} \quad (4.64)$$

Sob essas condições a equação da continuidade e a equação de Euler sobre a esfera assumem a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v \rho) + v \rho \cot \theta \right] = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2r} \frac{\partial v^2}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Psi - c_s^2 \ln \rho),$$

ou ainda

$$\bar{\rho} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{T_1 T_2}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{v} \bar{\rho}) + \bar{v} \bar{\rho} \cot \theta \right] = 0 \quad (4.65)$$

$$\bar{v} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{T_1^2}{2r} \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\Psi - c_s^2 \ln(T_2 \bar{\rho})]. \quad (4.66)$$

Note que temos aqui duas equações para 5 variáveis o que nos deixa três graus de liberdade que devem ser fixados através de outras suposições. Impondo então que a parte espacial da densidade e da velocidade sejam iguais a primeira solução estacionária proposta, ou seja

$$\begin{cases} \bar{v}(\theta) = v_e \sqrt{\csc \theta} \\ \bar{\rho}(\theta) = \rho_e \sqrt{\csc \theta} \end{cases} \quad (4.67)$$

vemos a partir da equação da continuidade (4.65) que a densidade é uma constante no tempo, isto é, $\partial T_2 / \partial t = 0$ e portanto podemos englobar a constante T_2 na constante ρ_e e escrever $\rho(t, \theta) = \rho_e \sqrt{\csc \theta}$.

Ademais, de acordo com o que foi comentado no início da seção, esperamos que a velocidade v simule a formação de horizontes sônicos associados ao buraco mudo e ao buraco surdo. Para que isto aconteça a função T_1 descrevendo a parte temporal da velocidade deve tender a zero em $t = -\infty$ e tender a 1 para $t = \infty$. Uma função representando bem este formato é dada por

$$T_1(t) = \frac{1}{2}(\tanh t + 1).$$

Tomando isto como uma imposição ficamos apenas com uma equação, a Eq. (4.66), e uma variável, o potencial de forças Ψ , sendo assim possível determiná-lo considerando todas as suposições feitas.

Para esta solução proposta, a velocidade do fluido na direção θ (única componente não nula) é descrita pela função

$$v(t, \theta) = \frac{v_e}{2}(\tanh t + 1)\sqrt{\csc \theta}. \quad (4.68)$$

Não é difícil verificar que os horizontes sônicos associados a este perfil de velocidade, tendo em vista que a velocidade do som c_s é uma constante, surgem nos pólos da esfera em $t = -\infty$, vão se aproximando do equador da esfera à medida que o tempo passa, tendendo finalmente a $\theta_{bm} = \pi - \arcsin(v_e^2/c_s^2)$ e $\theta_{bs} = \arcsin(v_e^2/c_s^2)$ no limite de $t = \infty$.

Capítulo 5

Estrutura Causal

5.1 Introdução

A estrutura causal do espaço-tempo da Relatividade Restrita é representada simplesmente por cones de luz alinhados na mesma direção, associados a cada evento p do espaço-tempo, indicando globalmente (devido ao fato de ser plano) os eventos futuros e eventos passados de p . Atribuímos o rótulo “futuro de p ” aos eventos pertencentes ao cone superior e “passado de p ” aos eventos do cone inferior. Os eventos no interior do cone de luz futuro representam os eventos que podem ser influenciados por p , ou seja, que podem ser alcançados por uma partícula material partindo de p .

Em Relatividade Geral, entretanto, apesar da estrutura causal ser localmente da mesma natureza que a estrutura causal do espaço-tempo plano de Minkowski, diferenças significativas podem ocorrer do ponto de vista global em razão de topologias não triviais, singularidades ou o desalinhamento, ponto a ponto, da direção dos cones de luz.

Neste contexto, estaremos interessados neste capítulo na análise de alguns aspectos da estrutura causal do espaço-tempo acústico esférico. Assim, na seção 5.2 mostraremos que o espaço-tempo acústico esférico é causalmente “bem comportado” enquanto que as seções 5.3 e 5.4 são destinadas à construção dos diagramas conformes deste espaço-tempo. Os diagramas conformes, como veremos, podem ser práticos e úteis na compreensão da estrutura global do espaço-tempo.

5.2 Estabilidade causal do espaço-tempo acústico esférico

Um dos problemas relacionados à estrutura causal que pode surgir em espaços-tempos diversos da Relatividade Geral, em virtude de topologias não triviais, singularidades ou o desalinhamento, ponto a ponto, da direção dos cones de luz, é a existência de curvas causais fechadas. Espaços-tempos que possuem curvas causais fechadas levam a paradoxos físicos e portanto são considerados não realísticos.

Entretanto, um espaço-tempo que não apresenta curvas causais fechadas pode estar a beira de violar a causalidade como exemplificado na fig. 5.2. Assim, uma condição capaz de eliminar qualquer tipo de patologia causal é a chamada *causalidade estável*. Dizemos que um espaço-tempo $(\mathcal{M}, g)$ é causalmente estável se existir um campo vetorial tipo tempo t^μ contínuo e não nulo tal que o espaço-tempo $(\mathcal{M}, \tilde{g})$, onde

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - t_\mu t_\nu,$$

não possui nenhuma curva tipo tempo fechada. De fato, é possível verificar que $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é também uma métrica Lorentziana. Além disso, para cada ponto $p \in \mathcal{M}$, os cones de luz de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ são estritamente mais largos que os cones de $g_{\mu\nu}$, isto é, todo vetor tipo luz ou tipo tempo de $g_{\mu\nu}$ é um vetor tipo tempo de $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Assim, se $(\mathcal{M}, g)$ está na beira de ter curvas causais fechadas então o espaço-tempo $(\mathcal{M}, \tilde{g})$ terá curvas tipo tempo fechadas.

O seguinte teorema (cuja prova podemos ver na pag. 198 de [43]) diz que a causalidade estável é equivalente à existência de uma “função tempo global” definida no espaço-tempo.

Teorema 5.2.0.1. *Um espaço-tempo $(\mathcal{M}, g)$ é causalmente estável se e somente se existir uma função diferenciável f definida sobre $\mathcal{M}$ tal que $\nabla^\mu f$ é um campo vetorial tipo tempo direcionado ao passado.*

No espaço-tempo acústico esférico o tempo Newtoniano t do referencial do laboratório é uma função que verifica essa propriedade. Podemos ver que o campo $\nabla^\mu t = g^{\mu\nu} \partial_\nu t = -r^4/\rho^2(1, v^\theta, v^\phi)$ é sempre tipo tempo,

$$\nabla_\mu t \nabla^\mu t = -\frac{r^4}{\rho^2} < 0$$

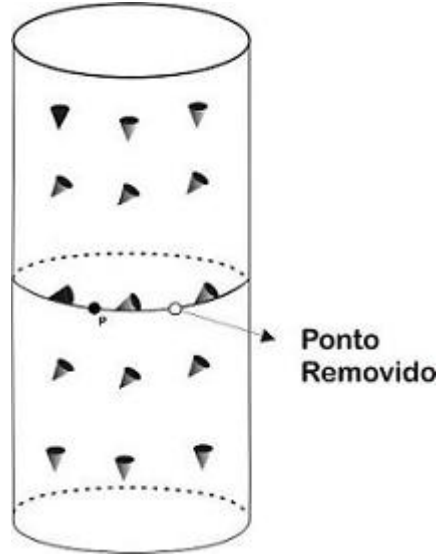


Figura 5.1: Não existem curvas causais fechadas neste espaço-tempo, porém existem curvas passando por p muito próximas de se intersectarem

e dirigido ao passado já que

$$g(\partial_t, \nabla^\mu t \partial_\mu) = 1 > 0$$

onde o vetor ∂_t é obviamente dirigido ao futuro. Podemos assim dizer que o espaço-tempo acústico esférico é casualmente estável e portanto não apresenta problemas de causalidade.

5.3 Transformação conforme

A idéia central dos diagramas conformes, ou diagramas de Carter-Penrose, é mapear um espaço-tempo físico $(\mathcal{M}, g)$ em um espaço-tempo não físico $(\mathcal{M}, \tilde{g})$, conformalmente relacionado ao primeiro, isto é, verificando a relação $\tilde{g} = \Omega^2 g$. Apesar da métrica do espaço-tempo não físico $\tilde{g}$ não satisfazer as equações de Einstein, g e $\tilde{g}$ guardam algumas propriedades em comum, que serão expostas ao longo desta seção, suficientes para atender aos objetivos desejados na construção dos diagramas conformes, os quais veremos na seção seguinte.

O primeiro ponto em comum que podemos apontar é decorrente do fato que $\Omega^2 > 0$. É fácil verificarmos que devido a isto a estrutura causal dos dois espaços-tempos é mantida a mesma, o que significa dizer que se um vetor v é tipo tempo,

tipo luz ou tipo espaço para g , ele será respectivamente tipo tempo, tipo luz ou tipo espaço para $\tilde{g}$. Ou ainda, $g(v, v) \geq 0$ implica que $\tilde{g}(v, v) \geq 0$.

Além disso, seja u uma geodésica tipo luz do espaço-tempo físico $(\mathcal{M}, g)$. Sendo assim, devemos verificar

$$D_u u = u^\mu \nabla_\mu u = 0 \quad \text{e} \quad g(u, u) = 0.$$

Calculemos agora a quantidade $\tilde{D}_u u$:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_u u &= u^\mu (\tilde{\nabla}_\mu u^\nu) \partial_\nu \\ &= u^\mu (\partial_\mu u^\nu + \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^\nu u^\alpha) \partial_\nu \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^\nu &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{\nu\sigma} (\partial_\mu \tilde{g}_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha \tilde{g}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \tilde{g}_{\mu\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \Omega^{-2} g^{\nu\sigma} [\partial_\mu (\Omega^2 g_{\sigma\alpha}) + \partial_\alpha (\Omega^2 g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma (\Omega^2 g_{\mu\alpha})] \\ &= \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + \frac{1}{2} \Omega^{-2} g^{\nu\sigma} [g_{\sigma\alpha} \partial_\mu (\Omega^2) + g_{\mu\sigma} \partial_\alpha (\Omega^2) - g_{\mu\alpha} \partial_\sigma (\Omega^2)] \\ &= \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + \Omega^{-1} [\delta_\alpha^\nu \partial_\mu \Omega + \delta_\mu^\nu \partial_\alpha \Omega - g^{\nu\sigma} g_{\mu\alpha} \partial_\sigma \Omega], \end{aligned} \tag{5.2}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \tilde{D}_u u &= D_u u + \Omega^{-1} u^\mu u^\alpha [\delta_\alpha^\nu \partial_\mu \Omega + \delta_\mu^\nu \partial_\alpha \Omega - g^{\nu\sigma} g_{\mu\alpha} \partial_\sigma \Omega] \partial_\nu \\ &= D_u u + [2u^\nu u^\alpha \partial_\alpha (\ln \Omega) - g(u, u) \partial^\nu (\ln \Omega)] \partial_\nu. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Lembrando que $D_u u$ e $g(u, u)$ são por definição iguais a zero, teremos

$$\tilde{D}_u u = 2u^\alpha \partial_\alpha (\ln \Omega) u. \tag{5.4}$$

Notando que $2u^\alpha \partial_\alpha (\ln \Omega)$ é uma função definida sobre a curva integral de u , a equação acima é claramente a equação da geodésica para uma parametrização não afim (veja pag. 41 de [43]). De fato, sendo $x^\mu(\lambda)$ a curva integral de u , parametrizada pelo parâmetro não afim λ , sabemos que o vetor u é dado por

$$u = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

de forma que a Eq. (5.4) é reescrita como

$$\tilde{D}_u u = 2 \left(\frac{d}{d\lambda} \ln \Omega \right) u. \tag{5.5}$$

Se reparametrizarmos a curva $x^\mu(\lambda)$ pelo parâmetro $t = t(\lambda)$ dado por

$$\frac{dt}{d\lambda} = cte \cdot \Omega^2,$$

então a equação (5.5) que para $u = d/d\lambda$ se escreve como $\tilde{D}_u u = 2d/d\lambda(\ln \Omega)u$, se transforma* em $\tilde{D}_u u = 0$ para $u = d/dt$.

Concluimos assim que métricas relacionadas por uma transformação conforme além de manterem a mesma estrutura causal ainda preservam as geodésicas tipo luz.

5.4 Diagramas conformes

Como mencionado no início da seção anterior, a idéia central dos diagramas conformes consiste basicamente em mapear de forma conveniente um espaço-tempo físico $(\mathcal{M}, g)$ em um espaço-tempo não físico $(\mathcal{M}, \tilde{g})$ conformalmente relacionado. Pretende-se com isto mapear o espaço-tempo físico em um espaço-tempo de geometria compacta, com bordas representando pontos do infinito. Por motivos óbvios, a este processo damos o nome de compactificação.

Porém, isto é feito quando o espaço-tempo $(\mathcal{M}, g)$ pode ser reduzido (sobretudo por motivos de simetria) à uma variedade $1 + 1$, de modo que é possível mapeá-lo em um espaço-tempo compacto bidimensional que por sua vez é plausível de ser representado por um figura plana em uma folha de papel, dando origem ao que chamamos de diagrama conforme. Finalmente, o interesse em tudo isto reside no fato da estrutura causal global do espaço-tempo $\tilde{g}$, e portanto de g de acordo com a seção anterior, estar simbolizada em um simples diagrama, permitindo uma visualização mais clara e ampla dos aspectos causais destes espaços-tempos.

Para realizar isto, entretanto, é necessário encontrar transformações de coordenadas convenientes que tragam o infinito para valores finitos. Em seu artigo de 1970 [44], Walker sistematizou e generalizou as técnicas envolvidas na compactificação e na construção dos diagramas conformes dos espaços-tempos dotados de métricas que podem ser colocadas na forma

$$ds^2 = -Fdt^2 + \frac{1}{F}dr^2. \quad (5.6)$$

*Para demonstrar isso use o fato que $\tilde{D}_u u = \tilde{D}_{\frac{d}{d\lambda}}(\frac{d}{d\lambda}) = \tilde{D}_{\frac{dt}{d\lambda} \frac{d}{dt}}(\frac{dt}{d\lambda} \frac{d}{dt}) = \frac{d^2 t}{d\lambda^2} \frac{d}{dt} + (\frac{dt}{d\lambda})^2 \tilde{D}_{\frac{d}{dt}}(\frac{d}{dt})$ e imponha que $\frac{d^2 t}{d\lambda^2} \frac{d}{dt}$ seja igual a $\tilde{D}_{\frac{d}{d\lambda}}(\frac{d}{d\lambda}) = \frac{d}{d\lambda} \ln \Omega^2 \frac{d}{d\lambda}$.

Desta forma, baseando-se neste artigo (sendo possível, quando necessário, recorrer a ele para maiores detalhes), iremos empregar tais técnicas visando construir o diagrama conforme do espaço-tempo acústico esférico associado a solução axialmente simétrica e estacionária descrita pela velocidade (4.29). A simetria axial deste espaço-tempo nos permite reduzi-lo, sem nenhuma perda de generalidade, a um espaço-tempo 1+1 (tomando $\phi = cte$), descrito pelas coordenadas t e θ . Obviamente este espaço-tempo é espacialmente compacto já que a coordenada espacial θ varia de 0 a π , contudo a parte temporal se encarrega de torná-lo não compacto, o que ainda sugere o emprego de transformações de coordenadas convenientes afim de compactificá-lo. Apesar desta diferença, seguiremos na medida do possível e com as devidas adaptações o procedimento proposto no artigo do Walker na elaboração do diagrama de Carter-Penrose do espaço-tempo acústico esférico. Antes disso no entanto, nos preocuparemos em colocar a métrica acústica (4.31) na forma (5.6).

Introduzindo as coordenadas nulas [†]

$$\begin{aligned} du &= dt - \frac{rd\theta}{c_s + v} \\ dw &= dt + \frac{rd\theta}{c_s - v} \end{aligned}$$

a métrica acústica (4.31) assume a forma

$$ds^2 = -\Omega^2[c_s^2 - v^2]dudw, \quad (5.7)$$

onde $\Omega^2 = \rho^2/r^4c_s^2$.

Definindo novas coordenadas τ e χ , relacionadas com as coordenadas nulas através das relações diferenciais

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{2}(dw + du) = dt + \frac{v}{c_s^2 - v^2}rd\theta \\ d\chi &= \frac{1}{2}(dw - du) = \frac{c_s}{c_s^2 - v^2}rd\theta \end{aligned}$$

o elemento de linha (5.7) é escrito como

$$ds^2 = \Omega^2(c_s^2 - v^2)(-d\tau^2 + d\chi^2) \quad (5.8)$$

ou ainda

$$ds^2 = \Omega^2[-(c_s^2 - v^2)d\tau^2 + \frac{1}{(c_s^2 - v^2)}dx^2] \quad (5.9)$$

[†]utilizando a notação $v = v^\theta$

onde a coordenada x é definida por $x = rc_s\theta$.

Esta última métrica é conformalmente relacionada à métrica

$$d\tilde{s}^2 = -F(x)d\tau^2 + \frac{1}{F(x)}dx^2 \quad (5.10)$$

com $F(x) = c_s^2(x) - v^2(x)$. Note que $-\infty < \tau < \infty$ enquanto que $0 < x < rc_s\pi$. Ao contrário da coordenada r (é importante não confundi-la com a constante r da métrica acústica) que aparece na métrica (5.6), a coordenada x da métrica acima assume apenas valores finitos, porém isto não impede de seguir a partir deste ponto a sistemática desenvolvida no recém citado artigo de Walker.

De acordo com o esquema proposto pelo Walker neste artigo devemos separar o espaço-tempo relacionado a métrica (5.10) em três diferentes regiões descritas por $T_i = \{(\tau, x) | -\infty < \tau < \infty, a_i \leq x \leq a_{i+1}\}$, onde $a_1 = rc_s \arcsin(v_e^2/c_s^2)$ e $a_2 = rc_s[\pi - \arcsin(v_e^2/c_s^2)]$ são as raízes da função F , que definem também o horizonte do buraco surdo e do buraco mudo respectivamente, e $a_0 = 0$ e $a_3 = rc_s\pi$ são os valores para os quais F diverge associados também as singularidades do nosso espaço-tempo acústico. Para cada uma dessas três regiões definimos novas coordenadas

$$\begin{aligned} u_i &= \tau + \int_{x_i}^x \frac{dw}{F(w)} \\ v_i &= \tau - \int_{x_i}^x \frac{dw}{F(w)} \end{aligned}$$

fixando x_1 entre a_1 e a_2 , $x_0 = a_0$ e $x_2 = a_3$. Para tais coordenadas o elemento de linha de cada região T_i é escrito como $ds^2 = -F du_i dv_i$, o que indica que u_i e v_i são coordenadas nulas sobre cada uma das regiões T_i do espaço-tempo, relacionadas aos raios de som indo e vindo na direção x (ou equivalentemente na direção θ). É importante ressaltar que os limites de cada par de coordenada (u_i, v_i) é $-\infty < u_i < \infty$ e $-\infty < v_i < \infty$.

Finalmente, é possível mapear cada uma das regiões em blocos compactos por meio das coordenadas

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \tan^{-1} u_i \\ \psi_i &= \tan^{-1} v_i. \end{aligned}$$

De fato a função $\tan^{-1}$ tende aos valores finitos $\pi/2$ e $-\pi/2$ no limite do argumento indo para ∞ e $-\infty$ respectivamente.

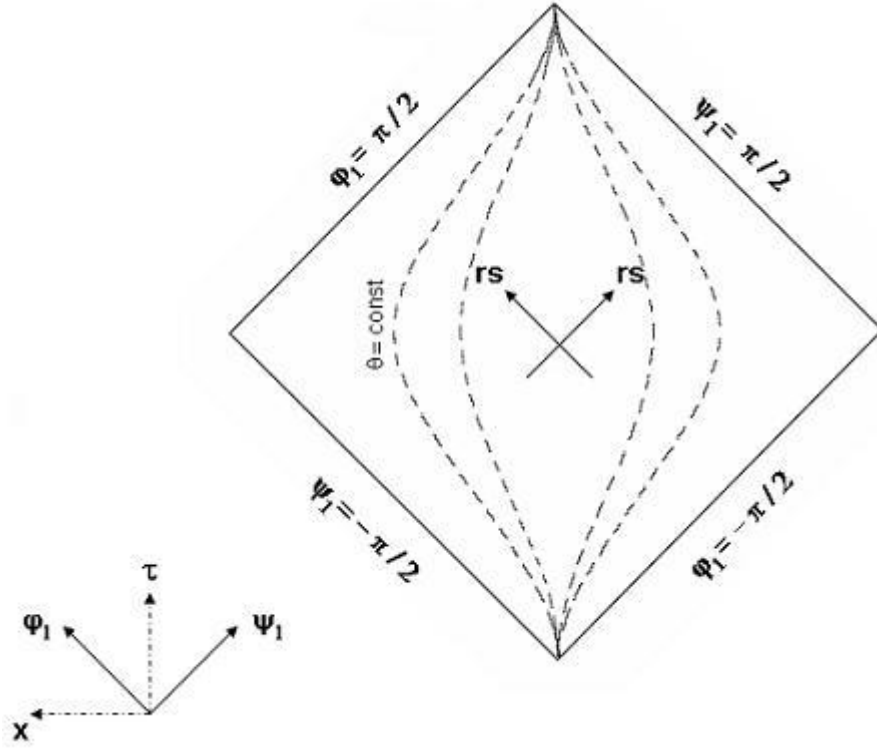


Figura 5.2: Bloco central T_1

Vejamos em primeiro lugar a região central T_1 entre os dois horizontes sônicos do buraco mudo/surdo. Escolhendo $x_1 = rc_s(\pi/2)$, esta região do espaço-tempo acústico conforme (5.10) é representada pelo bloco mostrado na fig. 5.4, mapeado pelas coordenadas φ_1 e ψ_1 . Como u_1 e v_1 são coordenadas nulas, os raios de som seguirão curvas definidas por $du_1 = 0$ e $dv_1 = 0$, que correspondem a linhas retas na direção de φ_1 e ψ_1 , como representado pelas retas RS (significando “raios de som”) da fig. 5.4.

As linhas tracejadas indicam as órbitas do campo de Killing $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$ deste espaço-tempo estacionário (veja 3.8.2), dadas por $\theta = const$. Essas curvas, descritas nas coordenadas φ_1 e ψ_1 pela equação

$$\tan \varphi_1 = \tan \psi_1 + const \quad (5.11)$$

são obtidas impondo $d\theta = 0$. Esta imposição implica que $du_1 = dv_1$. Por outro lado, como $du_1 = \sec^2(\varphi_1)d\varphi_1$ e $dv_1 = \sec^2(\psi_1)d\psi_1$, teremos $\sec^2(\varphi_1)d\varphi_1 = \sec^2(\psi_1)d\psi_1$, obtendo finalmente (5.11) através da integração desta última equação. Note que a

forma das curvas $\theta = \text{const}$ não dependem da velocidade v , diferente do que acontece com as curvas de t constante, como veremos mais adiante.

Outro ponto interessante à ressaltar observando a fig. 5.4 diz respeito às fronteiras desta figura. Vemos que sobre as bordas do lado esquerdo do bloco, definidas por $(\varphi_1 = \pi/2, -\pi/2 < \psi_1 < \pi/2)$ e $(-\pi/2 < \varphi_1 < \pi/2, \psi_1 = -\pi/2)$, $\theta = \arcsin(v_e^2/c_s^2)$, o que indica que tais bordas representem pontos do horizonte do buraco surdo. Da mesma maneira, as bordas à direita da figura, definidas por $(-\pi/2 < \varphi_1 < \pi/2, \psi_1 = \pi/2)$ e $(\varphi_1 = -\pi/2, -\pi/2 < \psi_1 < \pi/2)$, representam pontos do horizonte do buraco mudo uma vez que sobre esta superfície $\theta = \pi - \arcsin(v_e^2/c_s^2)$.

No caso das regiões supersônicas T_0 e T_2 , os blocos mapeados pelas coordenadas (φ_0, ψ_0) e (φ_2, ψ_2) apresentam diferenças consideráveis com relação ao bloco T_1 , devido ao fato de $F < 0$ e principalmente por F ser singular dentro dessas regiões. Primeiramente, como

$$u_i + v_i = 2\tau \quad \text{e} \quad u_i - v_i = 2 \int_{x_i}^x \frac{dw}{F(w)}$$

e $x_0 = a_0$ e $x_2 = a_3$ são os limites de abrangência da coordenada x , a integral $\int_{x_0}^x \frac{dw}{F(w)}$ será sempre negativa enquanto que $\int_{x_2}^x \frac{dw}{F(w)}$ será sempre positiva. Deste resultado é fácil verificarmos que $(\varphi_0 - \psi_0) < 0$ e $(\varphi_2 - \psi_2) > 0$. Em virtude desses vínculos, estas coordenadas cobrem apenas metade do quadrado $(-\pi/2 < \varphi < \pi/2, -\pi/2 < \psi < \pi/2)$, de modo que os blocos correspondentes às regiões T_0 e T_2 formam um triângulo retângulo assim como podemos ver na fig. 5.4.

Para cada um dos dois blocos as linhas escuras, descritas pelas equações $\varphi_0 = \psi_0$ e $\varphi_2 = \psi_2$, representam pontos das singularidades $\theta = 0$ (no bloco T_0) e $\theta = \pi$ (no bloco T_2).

O mesmo raciocínio utilizado para a região T_1 pode ser empregado aqui para determinar as curvas de θ constante. Estas curvas são novamente representadas na fig. 5.4 por linhas tracejadas. Um outro ponto em comum são as trajetórias nulas percorridas pelos raios de som, que se mantêm curvas do tipo $\varphi_i = \text{const}$ ou $\psi_i = \text{const}$.

Como anteriormente podemos ver que a fronteira superior de T_0 definida por $(\varphi_0 = -\pi/2, -\pi/2 < \psi_0 < \pi/2)$ e $(-\pi/2 < \varphi_0 < \pi/2, \psi_0 = \pi/2)$ são pontos do horizonte do buraco surdo onde $\theta = \arcsin(v_e^2/c_s^2)$, ao mesmo tempo que sobre a fronteira inferior de T_2 , dada por $(\varphi_2 = \pi/2, -\pi/2 < \psi_2 < \pi/2)$ e $(-\pi/2 < \varphi_2 <$

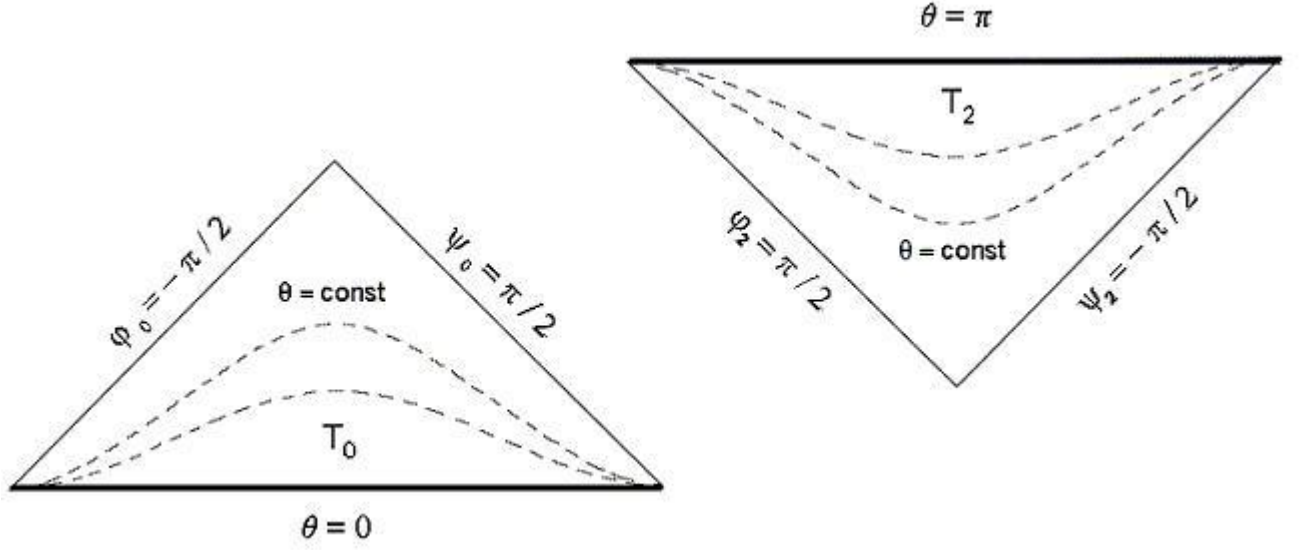


Figura 5.3: Blocos T_0 e T_2

$\pi/2, \psi_0 = -\pi/2$), $\theta = \pi - \arcsin(v_e^2/c_s^2)$, representando pontos do buraco mudo. Note que, em comparação com a região central, os valores das coordenadas (φ_i, ψ_i) na fronteiras não singulares de T_0 e T_2 aparecem com os sinais invertidos em razão de $F < 0$.

Por fim, encaixando de maneira apropriada todos os três blocos T_0 , T_1 e T_2 , montamos o diagrama de Carter-Penrose, ou diagrama conforme, do espaço-tempo acústico esférico associado à solução (4.29). Este diagrama pode ser visto na fig. 5.4.

As linhas atravessando todos os blocos representam as curvas de t constante[‡]. Como dissemos a alguns parágrafos acima, essas curvas dependem do forma da velocidade v e não são facilmente obtidas como as curvas de θ constante. Para obtê-las impomos que $dt = 0$ e buscamos pela equação que deve ser satisfeita por cada par de coordenadas (φ_i, ψ_i) para que isso seja verdade. Vejamos um pouco mais a fundo.

A imposição $dt = 0$ implica na relação

$$(c_s^2 - v^2)d\tau - rvd\theta = 0$$

[‡]Devido a problemas numéricos não foi possível estender essas curvas próximo das fronteiras. A linha pontilhada sugere a possível extensão

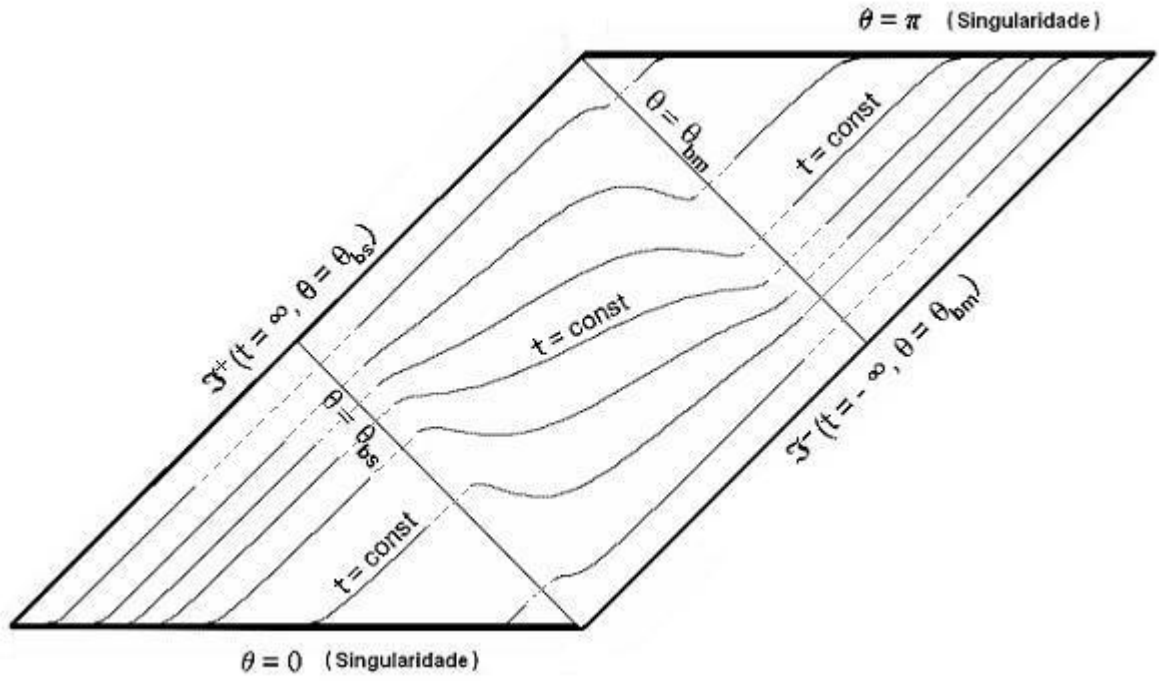


Figura 5.4: Diagrama de Carter-Penrose do espaço-tempo acústico modelado pela velocidade $v = v_e \sqrt{\csc \theta}$. As constantes θ_{bs} e θ_{bm} representam respectivamente $\theta = \arcsin(v_e^2/c_s^2)$ e $\theta = \pi - \arcsin(v_e^2/c_s^2)$

entre as coordenadas τ e θ . Supondo então $r = 1$, esta equação diferencial é reescrita nas coordenadas u_i e v_i como [§]

$$(c_s^2 - v^2) \frac{1}{2} (du_i + dv_i) - v \frac{F}{2} (du_i - dv_i) = 0,$$

ou ainda

$$(1 - v) du_i + (1 + v) dv_i = 0$$

já que $F = (c_s^2 - v^2)$. Finalmente, nas coordenadas φ_i e ψ_i essa equação diferencial equivale a

$$\sec^2 \varphi_i (1 - v) d\varphi_i + \sec^2 \psi_i (1 + v) d\psi_i = 0, \quad (5.12)$$

demonstrando a dependência das curvas t constante com a velocidade do fluido.

Como a dependência de v com relação às coordenadas φ_i e ψ_i não é nada trivial decidimos utilizar cálculo numérico para encontrar as soluções da equação (5.12) e portanto as curvas de t constante.

Para encerrar este capítulo convém mencionar que após todas essas discussões somos capazes de traçar todas as trajetórias relevantes percorridas pelas ondas sonoras se propagando no fluido em questão apenas visualizando o diagrama conforme 5.4, como por exemplo raios de som saindo de um ponto infinitesimalmente próximo do horizonte $\theta = \pi - \arcsin(v_e^2/c_s^2)$ no infinito passado $t = -\infty$ e chegando infinitesimalmente próximo do horizonte $\theta = \pi - \arcsin(v_e^2/c_s^2)$ no infinito futuro $t = \infty$. Vemos também a partir do diagrama 5.4 que qualquer raio de som produzido dentro da região T_2 , ou seja, do buraco mudo não é capaz de escapar, colapsando sempre na singularidade em $\theta = \pi$.

Do ponto de vista clássico, pensando no som sendo arrastado pelo fluxo do fluido, essas trajetórias são um tanto quanto intuitivas, permitindo até mesmo andar na contra mão utilizando essa intuição para entender melhor os próprios diagramas conformes.

[§]É importante não confundir a coordenada nula v_i com a velocidade do fluido v

Capítulo 6

Acústica Geométrica

Apesar de termos demonstrado logo no início desta dissertação que ondas sonoras se propagando em um fluido ideal, barotrópico e irrotacional, restrito a uma esfera de raio r , se comportam como campos de Klein-Gordon não massivos sujeitos a uma geometria efetiva, estabelecendo assim uma analogia entre a dinâmica clássica das ondas sonoras e a dinâmica relativística dos campos escalares não massivos, em nenhum ponto foi realmente demonstrado que os raios de som, por serem tratados como campos não massivos no modelo análogo, devem percorrer geodésicas tipo luz neste espaço-tempo efetivo que chamamos de espaço-tempo acústico esférico.

Desta forma, nos propomos ao longo deste capítulo verificar esta propriedade dos raios de som, utilizando para isso a aproximação eikonal, também conhecida como acústica geométrica. Pretendemos também calcular explicitamente a curvatura escalar do espaço-tempo acústico esférico sentido pelas ondas sonoras.

6.1 Aproximação eikonal

A forma mais realística de descrever uma onda é considerar uma superposição de ondas planas:

$$\Phi(t, \vec{x}) = \int A(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} dk_x dk_y dk_z \quad (6.1)$$

ao que damos o nome “pacote de onda”. Assim, podemos construir uma onda localizada em uma região do espaço e tempo escolhendo $A(\vec{k})$ suficientemente concentrado em torno do centro $\vec{k}_0 = \int \vec{k} |A(\vec{k})|^2 d^3k$. Neste caso vale a aproximação em primeira ordem

$$\Omega(\vec{k}) \simeq \omega_0 + \vec{V}_g \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0), \quad (6.2)$$

com

$$(V_g)_j = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial k^j} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_0} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \omega(\vec{k}_0), \quad (6.3)$$

onde $\omega = \Omega(\vec{k})$, conhecida como relação de dispersão, determina a forma como a frequência ω depende do vetor de onda $\vec{k}$. Substituindo (6.2) no pacote de onda (6.1) teremos

$$\Phi(t, \vec{x}) \simeq e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{V}_g - \omega_0)t} \Phi(0, \vec{x} - \vec{V}_g t)$$

e portanto

$$|\Phi(t, \vec{x})|^2 \simeq |\Phi(0, \vec{x} - \vec{V}_g t)|^2.$$

Esta equação mostra que a distribuição de energia da onda sonora, $|\Phi|^2$, se propaga a uma velocidade $\vec{V}_g$ que chamamos de “velocidade de grupo”.

Quando a amplitude e a direção de propagação de uma onda variarem pouco ao longo de tempos e distâncias da ordem do período e do comprimento de onda, o que pode ser observado no limite de altas frequências, podemos ignorar alguns aspectos de natureza ondulatória e introduzir o conceito de raios, isto é, curvas no espaço-tempo cujos vetores tangentes a elas apontam na mesma direção e sentido de propagação. Chamamos de aproximação eikonal, ou de acústica geométrica, o estudo das leis de propagação do som sob tais condições.

Neste limite um campo escalar complexo $\Phi(t, \vec{x})$ pode ser escrito na forma

$$\Phi(t, \vec{x}) = A(t, \vec{x}) e^{i\varphi(t, \vec{x})} \quad (6.4)$$

onde A é uma amplitude e φ é uma fase chamada de eikonal. Definimos em qualquer ponto do espaço e do tempo o vetor de onda $\vec{k}$ e a frequência angular ω como sendo

$$\vec{k}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla}\varphi \quad \text{e} \quad \omega(t, \vec{x}) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

6.2 Raios de som como geodésicas tipo luz do espaço-tempo acústico esférico

Considere o campo Φ descrevendo as ondas sonoras no limite da acústica geométrica se propagando em um fluido ideal, barotrópico e irrotacional sobre uma esfera de raio r . Sendo assim, de acordo com o que foi discutido na seção anterior, o campo Φ pode ser colocado na forma (6.4). Por outro lado, do capítulo 2 sabemos que Φ satisfaz a equação de onda de Klein-Gordon $\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = 0$. Substituindo então (6.4) nesta última equação teremos

$$\nabla_\mu A \nabla^\mu \varphi = -\frac{1}{2} A \nabla_\mu \nabla^\mu \varphi \quad (6.5)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A - (\nabla^\mu \varphi \nabla_\mu \varphi) A = 0 \quad (6.6)$$

correspondentes respectivamente à parte imaginária e a parte real da equação de KG. Como no limite da acústica geométrica a amplitude A é suposta variar muito pouco ao longo de tempos e distâncias da ordem do período e do comprimento de onda, a quantidade $\nabla_\mu \nabla^\mu A$ é considerada desprezível e a Eq. (6.6) se rescreve como

$$\nabla^\mu \varphi \nabla_\mu \varphi = 0, \quad (6.7)$$

chamada de equação do eikonal.

Definindo $k^\mu = \nabla^\mu \varphi$, podemos verificar que este vetor é o gerador das curvas associadas aos raios de som. De fato, essas curvas são geradas pelos vetores que apontam na direção de propagação da onda que por sua vez são perpendiculares às frentes de onda definidas pelas superfícies $\Phi = \text{const}$. Como estamos considerando que a amplitude A varia pouco, essas superfícies são determinadas por $\varphi = \text{const}$ e portanto fica claro que o vetor $k^\mu = \nabla^\mu \varphi$ (ortogonal às superfícies de φ constante) é perpendicular às frentes de onda.

Finalmente, derivando covariantemente a equação do eikonal (6.7) obtemos

$$0 = \nabla_\nu (\nabla^\mu \varphi \nabla_\mu \varphi) = 2(\nabla^\mu \varphi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi) = 2k^\mu \nabla_\mu k_\nu, \quad (6.8)$$

demonstrando que as curvas integrais de k^μ , e portanto os raios de som, são geodésicas tipo luz no espaço-tempo acústico esférico.

Expandindo a equação (6.7) em termos das componentes da métrica acústica inversa (2.58) teremos

$$\begin{aligned}
\nabla^\mu \varphi \nabla_\mu \varphi &= g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \\
&= g^{00} (\partial_t \varphi)^2 + 2g^{0i} \partial_t \varphi \partial_i \varphi + g^{ij} \partial_i \varphi \partial_j \varphi \\
&= -\frac{r^4}{\rho^2} \left[(\partial_t \varphi)^2 + 2v^i \partial_i \varphi \partial_t \varphi - \frac{c_s^2}{r^2} (\partial_\theta \varphi)^2 - \frac{c_s^2}{r^2 \sin^2 \theta} (\partial_\phi \varphi)^2 + v^i v^j \partial_i \varphi \partial_j \varphi \right] \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Usando as definições das quantidades clássicas $\vec{k}$ e ω dadas no final da seção passada, esta equação pode ser reescrita na forma vetorial como

$$\omega^2 - 2(\vec{v} \cdot \vec{k})\omega + [(\vec{v} \cdot \vec{k})^2 - c_s^2 k^2] = 0 , \tag{6.10}$$

implicando na relação de dispersão

$$\Omega = \vec{v} \cdot \vec{k} + c_s k . \tag{6.11}$$

Lembrando da equação (6.3), concluímos que a velocidade de grupo associada a relação de dispersão acima é

$$\vec{V}_g = \vec{v} + c_s \hat{k} . \tag{6.12}$$

Este resultado nos diz que os raios de som visto pelos observadores no referencial do laboratório viajam a uma velocidade correspondente a soma vetorial da velocidade do fluxo do fluido com a velocidade do som com relação aos observadores comóveis com o fluxo, o que é bastante consistente com toda nossa teoria.

6.3 A curvatura acústica

Pretendemos nesta seção calcular explicitamente a curvatura sentida pelos raios de som, isto significa calcular a curvatura escalar R do espaço-tempo acústico esférico. Porém, como já vimos no capítulo 5 as geodésicas tipo luz são invariantes por transformação conforme e por esta razão, afim de facilitar os cálculos, iremos

descartar o fator conforme $\rho^2/(c_s^2 r^4)$ da métrica acústica (2.59), trabalhando portanto com a métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & -r^2(v_0^\theta) & -r^2 \sin^2 \theta(v_0^\phi) \\ -r^2(v_0^\theta) & r^2 & 0 \\ -r^2 \sin^2 \theta(v_0^\phi) & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

cujas inversa é

$$g^{\mu\nu} = c_s^{-2} \begin{pmatrix} -1 & -v_0^\theta & -v_0^\phi \\ -v_0^\theta & [c_s^2/r^2 - (v_0^\theta)^2] & -v_0^\theta v_0^\phi \\ -v_0^\phi & -v_0^\theta v_0^\phi & [c_s^2/(r^2 \sin^2 \theta) - (v_0^\phi)^2] \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Além disso iremos considerar apenas o caso de um fluido perfeito onde a velocidade do som c_s é uma constante, de modo que possamos, sem perda de generalidade, considerar $c_s = 1$.

Sabendo que a curvatura envolve termos dependentes os Símbolos de Christoffel e de suas derivadas, nosso primeiro passo é calcular esses objetos que representam a conexão de Levi-Civita, dados por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}). \quad (6.15)$$

Apesar de não termos feito distinção alguma na subseção 2.3.3, convêm utilizarmos aqui $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ para denotar os Símbolos de Christoffel* associados à métrica esférica e_{ij} (representada pelo elemento de linha (2.33)) e $\hat{\nabla}$ sua respectiva derivada covariante afim de não gerar nenhuma confusão. Isto porque os Símbolos de Christoffel da métrica acústica esférica dependerão em diversos momentos, como veremos a seguir, dos coeficientes $\hat{\Gamma}_{ij}^k$. Assim, a partir da Eq. (6.15) podemos obter o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= D_{ij} - v_k \hat{\Gamma}_{ij}^k \\ \Gamma_{00}^0 &= v^i v^j D_{ij} + \frac{1}{2} v^j v_i v_k \partial_j e^{ik} \\ \Gamma_{0i}^0 &= -v^j D_{ij} - \frac{1}{2} v_j v_k \partial_i e^{jk} \\ \Gamma_{jk}^i &= v^i D_{jk} - v^i v_l \hat{\Gamma}_{jk}^l + \hat{\Gamma}_{jk}^i \\ \Gamma_{00}^i &= -\partial_t v^i - e^{ij} v^k \partial_j v_k + v^i v^j v^k D_{jk} + \frac{1}{2} v^i v^j v_k v_l \partial_j e^{kl} - \frac{1}{2} e^{ij} v_k v_l \partial_j e^{kl} \\ \Gamma_{0j}^i &= -v^i v^k D_{kj} + e^{ik} \Omega_{kj} - \frac{1}{2} v^i v_l v_k \partial_j e^{lk}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

*Note que utilizamos apenas índices latinos pois o tempo não tem signifiça neste caso.

onde

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad \text{e} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j - \partial_j v_i)$$

Lembrando que os índices espaciais das componentes da velocidade v^i são abaixados e levantados pela métrica esférica e_{ij} , isto é, $v_i = e_{ij}v^j$ e $v^i = e^{ij}v_j$. Entretanto, é possível demonstrar que

$$v_j v_k \partial_i e^{jk} = -2v^j v_k \hat{\Gamma}_{ij}^k,$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= D_{ij} - v_k \hat{\Gamma}_{ij}^k \\ \Gamma_{00}^0 &= v^i v^j (D_{ij} - v_k \hat{\Gamma}_{ij}^k) \\ \Gamma_{0i}^0 &= -v^j (D_{ij} - v_k \hat{\Gamma}_{ij}^k) \\ \Gamma_{jk}^i &= v^i (D_{jk} - v_l \hat{\Gamma}_{jk}^l) + \hat{\Gamma}_{jk}^i \\ \Gamma_{00}^i &= -\partial_t v^i - e^{ij} v^k (\partial_j v_k - v_l \hat{\Gamma}_{jk}^l) + v^i v^j v^k (D_{jk} - v_l \hat{\Gamma}_{jk}^l) \\ \Gamma_{0j}^i &= -v^i v^k (D_{jk} - v_l \hat{\Gamma}_{jk}^l) + e^{ik} \Omega_{kj} . \end{aligned} \tag{6.17}$$

Esses coeficientes podem ainda ser reescritos de uma forma mais compacta dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \hat{D}_{ij} \\ \Gamma_{00}^0 &= v^i v^j (\hat{D}_{ij}) \\ \Gamma_{0i}^0 &= -v^j (\hat{D}_{ij}) \\ \Gamma_{jk}^i &= v^i (\hat{D}_{jk}) + \hat{\Gamma}_{jk}^i \\ \Gamma_{00}^i &= -\partial_t v^i - e^{ij} v^k \hat{\nabla}_j v_k + v^i v^j v^k (\hat{D}_{jk}) \\ \Gamma_{0j}^i &= -v^i v^k (\hat{D}_{jk}) + e^{ik} \hat{\Omega}_{kj} , \end{aligned} \tag{6.18}$$

onde

$$\hat{D}_{ij} = \hat{\nabla}_{\{i} v_{j\}} = D_{ij} - v_k \hat{\Gamma}_{ij}^k \quad \text{e} \quad \hat{\Omega}_{ij} = \hat{\nabla}_{[i} v_{j]} = \Omega_{ij}$$

são a taxa de deformação e a taxa de rotação do fluido respectivamente.

Uma vez obtido os coeficientes da conexão podemos calcular a curvatura escalar R do nosso espaço-tempo acústico contraindo adquadamente os índices do tensor de Riemann $R_{\mu\alpha\nu}{}^\sigma$. Mais especificamente, sabemos que R é igual ao traço do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, ou seja, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. As componentes do tensor de Ricci por sua vez são calculadas a partir do tensor de Riemann da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha.$$

Como as componentes do tensor de Riemann são dadas por

$$R_{\mu\alpha\nu}{}^{\sigma} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\alpha}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\sigma},$$

a forma mais geral da curvatura escalar em função dos Símbolos de Christoffel do espaço-tempo considerado é

$$R = g^{\mu\nu}[\partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\alpha}]. \quad (6.19)$$

Aplicando essa relação para os coeficientes dados em (6.18) obtemos após um cálculo extenso e trabalhoso o seguinte resultado:

$$R = 2[\partial_t(\hat{\nabla}_i v^i) + v^i \hat{\nabla}_i(\hat{\nabla}_k v^k)] + (\hat{\nabla}_i v^i)^2 + e^{ik}e^{jl}\hat{D}_{kl}\hat{D}_{ij} - v^i v^j \hat{R}_{ij} + \hat{R}, \quad (6.20)$$

onde $\hat{R}$ e $\hat{R}_{ij}$ representam respectivamente a curvatura escalar e o tensor de Ricci da métrica esférica e_{ij} .

Relacionando os termos dessa expressão com o formato vetorial discutido na subseção 2.3.3, a curvatura escalar é reescrita como

$$R = 2\frac{d}{dt}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^2 + (\hat{D})^2 - v^i v^j \hat{R}_{ij} + \hat{R}. \quad (6.21)$$

Neste formato é possível compararmos a curvatura encontrada aqui para o espaço-tempo acústico esférico com a curvatura do espaço-tempo acústico construído sobre um espaço 3-dimensional euclidiano (veja pag. 88 de [45]). Vemos que os termos adicionais $-v^i v^j \hat{R}_{ij}$ e $\hat{R}$ são justamentes associados à curvatura da esfera S^2 .

Capítulo 7

Conclusões

7.1 Sumário dos principais resultados

Buscando verificar a validade dos resultados já conhecidos na área dos análogos gravitacionais em matéria condensada para o caso no qual o próprio fluido está imerso em um espaço de geometria não plana, demonstramos que as ondas sonoras se propagando em um fluido ideal, barotrópico e irrotacional, vinculado a uma esfera S^2 de raio r , podem ser descritas como um campo escalar de Klein-Gordon não massivo sujeito a uma geometria efetiva. Em outras palavras, isto significa dizer que o campo Φ associado à velocidade das perturbações sonoras satisfaz a equação de Klein-Gordon não massiva para uma métrica efetiva $g_{\mu\nu}$, denominada métrica acústica esférica.

Esta métrica efetiva, (2.59), que descreve a geometria do espaço-tempo acústico esférico experimentado pelo som é uma métrica lorentziana cujas componentes dependem da velocidade do som local c_s , da densidade do fluido ρ e da velocidade $\vec{v}$ do fluxo. Desta forma, a dinâmica da métrica e portanto da geometria do espaço-tempo acústico esférico é governada não pelas equações relativísticas de Einstein, mas pelas equações clássicas da hidrodinâmica.

Com respeito ao espaço-tempo acústico esférico, vimos que este espaço-tempo de topologia $\mathbb{R} \times S^2$, e portanto espacialmente compacto, é globalmente hiperbólico de modo que pode ser folheado pelas hipersuperfícies tridimensionais tipo espaço Σ_t , chamadas de superfícies de Cauchy. Ademais, segundo a noção relativística de estacionaridade e estaticidade, verificamos que o espaço-tempo acústico esférico será

estacionário quando as componentes da métrica acústica forem independentes do tempo ($\partial_t g_{\mu\nu} = 0$) e o fluxo for subsônico ($|\vec{v}| < c_s$), enquanto que o mesmo será estático se for estacionário e o fluxo $\vec{v}$ for normal às superfícies de $(c_s^2 - v^2)$ constante.

Apesar de não ser possível simular exatamente a métrica de um buraco negro de Schwarzschild, mesmo porque o espaço-tempo acústico esférico é espacialmente compacto, propusemos no Cap. 4 algumas soluções para as variáveis hidrodinâmicas $(\vec{v}, \rho, c_s)$, capazes de modelar espaços-tempos dotados de horizontes sônicos e ergoregiões (como definido no próprio capítulo), produzindo um buraco mudo/surdo, ou seja, um análogo de um buraco negro e de um buraco branco.

Para obter tais soluções foram consideradas duas situações distintas. Em uma delas supusemos o fluido sobre a esfera S^2 submetido a forças externas conservativas, descritas pelo potencial Ψ . Em um outro momento, tendo em vista as dificuldades práticas de confeccionar um potencial de forças qualquer, supusemos o fluido livre de forças externas, confinado entretanto, a uma casca esférica de espessura variável. Apesar da impossibilidade de estabelecer uma relação de equivalência entre uma situação e a outra, os dois métodos empregados fornecem soluções interessantes.

No que concerne à estrutura causal, verificamos que o espaço-tempo acústico esférico é causalmente estável, não apresentando assim nenhuma patologia causal capaz de gerar um paradoxo físico. Referente ainda a este assunto, construímos o diagrama de Carter-Penrose, ou diagrama conforme, do espaço-tempo acústico esférico associado à uma solução específica de $(\vec{v}, \rho, c_s)$, modelando um buraco mudo e um buraco surdo estacionário. O diagrama conforme deste espaço-tempo efetivo, constituído de três diferentes blocos separados pelos horizontes sônicos do buraco mudo e do buraco surdo, permitiu a visualização global das trajetórias percorridas pelos raios de som.

No Cap. 6 mostramos que no limite da acústica geométrica os raios de som seguem geodésicas tipo luz do espaço-tempo efetivo. Este resultado era esperado uma vez que as ondas sonoras se comportam como um campo não massivo neste espaço-tempo. Ainda neste capítulo calculamos a curvatura escalar deste espaço-tempo acústico, verificando que a mesma depende de derivadas espaciais e temporais da velocidade e além da dependência, implícita e explicitamente, da curvatura da esfera.

7.2 Observações finais

É extremamente importante apontarmos ao fim desta dissertação que, talvez por ser um trabalho essencialmente teórico, tenhamos nos afastado em alguns momentos da realidade prática dos modelos hidrodinâmicos apresentados aqui, sobretudo ao propor, no Cap. 4, soluções para as equações da dinâmica dos fluidos (a equação da continuidade e a equação de Euler).

Sabemos que o modelo utilizado para encontrar essas soluções é ideal e não leva em conta o problema da estabilidade das soluções e nem considera o aparecimento de frentes de choque das soluções supersônicas. Além disso, algumas soluções propostas divergem nos pólos da esfera, algo certamente não realístico.

Contudo, esperamos que essas dificuldades práticas que acabamos de ressaltar não tirem os créditos deste trabalho de mestrado. Não pretendíamos com ele viabilizar a construção destes modelos em laboratório, mas apenas apresentar as possibilidades que a teoria nos oferece.

Deixando de lado toda essa discussão teórica-experimental, como foi mencionado logo na introdução desta dissertação e comprovado ao longo dela, os modelos análogos em matéria condensada, por mais ideais que sejam e difíceis de serem colocados em prática, constituem um excelente modelo didático. De fato, podemos nos servir de toda a intuição clássica que temos para compreendermos melhor alguns conceitos da Relatividade Geral, como por exemplo estacionaridade, horizontes de eventos e ergoesfera.

7.3 Perspectivas

Os análogos gravitacionais em matéria condensada constituem um ótimo exemplo de sistemas cujas propriedades geométricas são descritas por métricas lorentzianas mas cuja dinâmica não é governada pelas equações de Einstein. Este fato nos faz refletir profundamente sobre o grau de conexão entre a cinemática da Relatividade Geral e a sua dinâmica, isto é, o quão dependente a geometria lorentziana é do princípio de equivalência de Einstein, das suas equações e da gravidade. Neste sentido, talvez experiências futuras com sistemas de matéria condensada possam nos guiar em direção a respostas mais concretas sobre a independência de certas leis

da Relatividade Geral com relação à forma das equações de Einstein.

Além disso, no mesmo contexto da discussão desenvolvida na seção 2.4, quando comparamos o limite das altas energias para os sistemas em matéria condensada com a escala de Planck para a gravitação, o estudo dos análogos estão fornecendo importantes pistas de como modelos teóricos de diferentes fenômenos gravitacionais podem mudar levando em conta os conhecimentos prévios que temos da estrutura microscópica da matéria. Um exemplo disto é visto na proposta das relações de dispersão modificadas na tentativa de resolver o problema das frequências trans-planckianas que surge na radiação Hawking.

Referências Bibliográficas

- [1] Bilic, N., “Relativistic Acoustic Geometry”, *Class. Quantum Grav.*, **16**, 3953-3964, (1999).
- [2] Barceló, C., Liberati, S., and Visser, M., “Analog gravity from field theory normal modes?”, *Class. Quantum Grav.*, **18**, 3595-3610, (2001).
- [3] Barceló, C., Liberati, S., and Visser, M., “Refringence, field theory, and normal modes”, *Class. Quantum Grav.*, **19**, 2961-2982, (2002).
- [4] Barceló, C., Liberati, S., and Visser, M., “Towards the Observation of Hawking Radiation in Bose-Einstein Condensates”, *Int. J. Mod. Phys. A*, **18**, 3735-1-11, (2003).
- [5] Barceló, C., Liberati, S., and Visser, M., “Analogue Models for FRW cosmologies”, *Int. J. Mod. Phys. D*, **12**, 1641-1650, (2003).
- [6] Barceló, C., Liberati, S., Sonego, S., and Visser, M., “Hawking-like radiation does not require a trapped region”, (2006). <http://arXiv.org/abs/gr-qc/0607008>.
- [7] Birrel, N.D. e Davies, P.C.W., “Quantum Field Theory in Curved Space”, *Cambridge University Press*, Cambridge, 1982.
- [8] Comer, G.L., “Superfluid analog of the Davies-Unruh effect”, (1992). URL (cited on 31 May 2005): <http://arXiv.org/abs/gr-qc/0505005>.
- [9] Corley, S., Jacobson, T.A., “Hawking Spectrum and High Frequency Dispersion”, *Phys. Rev. D*, **54**, 1568-1586, (1996).

- [10] Corley, S., Jacobson, T.A., “Black Holes Lasers”, *Phys. Rev. D*, **59**, 124011-1-12, (1999).
- [11] Dumin, Y.V., “Topological defect density in 1D FRW cosmological model: Corrections inferred from MJJL experiment”, (2003).
- [12] Garay, L.J., Anglin, J.R., Cirac, J.I., and Zoller, P., “Sonic Analog of Gravitational Black Holes in Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 4643-1-5, (2000).
- [13] Garay, L.J., Anglin, J.R., Cirac, J.I., and Zoller, P., “Sonic black holes in dilute Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A*, **63**, 023611-1-13, (2001).
- [14] Gordon, W., “Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie”, *Ann. Phys. (Leipzig)*, **72**, 421-456, (1923).
- [15] Hawking, S.W., *Nature*, **248**, 30 (1974); Hawking, S.W., *Commun. Math. Phys.*, **43**, 199 (1975).
- [16] Jacobson, T.A., “Black hole evaporation and ultrashort distances”, *Phys. Rev. D*, **44**, 1731-1739, (1991).
- [17] Jacobson, T.A., “Black hole radiation in the presence of a short distance cutoff”, *Phys. Rev. D*, **48**, 728-741, (1993).
- [18] Jacobson, T.A., “Introduction to Black Hole Microscopy”, in Macías, A., Quevedo, H., Obregón, O., and Matos, T., eds., *Recent Developments in Gravitation and Mathematical Physics*, Proceedings of the First Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics, Guanajuato, Mexico, 12-16 December 1994, (World Scientific, Singapore; River Edge, USA, 1996).
- [19] Jacobson, T.A., “On the origin of the outgoing black hole modes”, *Phys. Rev. D*, **53**, 7082-7088, (1996)
- [20] Jacobson, T.A., Mattingly, D., “Hawking radiation on a falling lattice”, *Phys. Rev. D*, **61**, 024017-1-10, (2000).
- [21] Landau, L.D., and Lifshitz, E.M., “The classical theory of fields”, (*Pergamon Press*, Oxford, UK; New York, USA, 1971), 3rd edition.

- [22] Landau, L.D., and Lifshitz, E.M., “Fluids Mechanics”, (*Pergamon; Addison-Wesley*, London, U.K.; Reading, U.S.A., 1959).
- [23] Materrese, S., “On the classical and quantum irrotational motions of a relativistic perfect fluid: I. Classical Theory”, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **401**, 53-66, (1985).
- [24] Materrese, S., “Perturbations of an irrotational perfect fluid”, in Fabbri, R., and Modugno, M., eds, *Atti del VI Convegno Nazionale di Relatività Generale e Fisica della Gravitazione*, Proceedings of the 4th Italian conference on general relativity and the physics of gravitation, Florence, Italy, 10-13 October 1984, 283-287, (Pitagora Editrice, Bologna, Italy, 1986).
- [25] Materrese, S., “Phonons in a relativistic perfect fluid”, in Ruffini, R., ed., *The Fourth Marcel Grossmann Meeting on recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation and relativistic field theories*, Proceedings of the meeting held at the University of Rome “La Sapienza”, 17-21 June, 1985, 1591-1595, (North-Holland; Elsevier, Amsterdam, Netherlands; New York, USA, 1986).
- [26] Moncrief, V., “Stability of stationary, spherical accretion onto a Schwarzschild black hole”, *Astrophys. J.*, **235**, 1038-1046, (1980)
- [27] Nakahara, M., “Geometry, Topology and Physics”, (*Institute of Physics Publishing*, Bristol and Philadelphia, 1990)
- [28] Parentani, R., “What did we learn from studying acoustic black holes?”, *Int. J. Mod. Phys. A*, **17**, 2721-2726, (2002).
- [29] Reznik, B., “Trans-Planckian tail in a theory with a cutoff”, *Phys. Rev. D*, **55**, 2152-2158, (1997).
- [30] Reznik, B., “Origin of the thermal radiation in a solid-state analogue of a black hole”, *Phys. Rev. D*, **62**, 044044-1-7, (2000).
- [31] Sakagami, M., and Ohashi, A., “Hawking Radiation in Laboratories”, *Prog. Theor. Phys.*, **107**, 1267-1272, (2002).

- [32] Schutzhold, R., and Unruh, W.G., “Gravity wave analogues of black holes”, *Phys. Rev. D*, **66**, 044019-1-13, (2002).
- [33] Schutzhold, R., and Unruh, W.G., “Hawking Radiation in an Electromagnetic Waveguide?”, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 031301-1-4, (2005).
- [34] Unruh, W.G., “Experimental Black-Hole Evaporation?”, *Phys. Rev. Lett.*, **46**, 1351-1353, (1981).
- [35] Unruh, W.G., “Sonic analogue of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation”, *Phys. Rev. D*, **51**, 2827-2838, (1994).
- [36] Unruh, W.G., and Schutzhold, R., “Universality of the Hawking effect”, *Phys. Rev. D*, **71**, 024028-1-11, (2005).
- [37] Visser, M., “Acoustic black holes: Horizons, ergospheres and Hawking radiation”, *Class. Quantum Grav.*, **15**, 1767-1791, (1998).
- [38] Visser, M., “Acoustic black holes”, (1999). URL (cited on 31 May 2005): <http://arXiv.org/abs/gr-qc/9901047>.
- [39] Visser, M., “Hawking radiation without black hole entropy”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 3436-3439, (1998).
- [40] Visser, M., Barceló, C., and Liberati, S., “Analogue models of and for gravity”, *Gen. Relativ. Gravit.*, **34**, 1719-1734, (2002).
- [41] Volovik, G.E., “What can the quantum liquid say on the brane black hole, the entropy of extremal black hole and the vacuum energy?”, *Found. Phys.*, **33**, 349-368, (2003).
- [42] Volovik, G.E., and Zelnikov, A.I., “On temperature corrections to Einstein equations”, *J. Exp. Theor. Phys. Lett.*, **78**, 751-756, (2003).
- [43] Wald, R.M., “General Relativity”, (*University of Chicago Press*, Chicago, U.S.A., 1984).
- [44] Walker, M., “Block Diagrams and the Extension of Timelike Two-Surfaces”, *J. Math. Phys.*, **11**, 2280-2286, (1970).

- [45] Zolnerkevic, I., “Acústica de fluidos ideais análoga à Gravitação”, Dissertação de Mestrado, *IFT*-D.005/04