



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Existência de soluções normalizadas para a equação de Schrödinger não linear

Raul Moises Villalba Salazar

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, setembro de 2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Existência de soluções normalizadas para a equação de Schrödinger não linear

Raul Moises Villalba Salazar

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, setembro de 2024

S161e Salazar, Raul Moises Villalba
Existência de soluções normalizadas para a equação de Schrödinger não linear / Raul Moises Villalba Salazar. -- Presidente Prudente, 2024
62 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

1. Equações de Schrödinger não lineares. 2. Soluções normalizadas.
3. Conjunto de Pohozaev. 4. Métodos variacionais. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Existência de soluções normalizadas para equações de Schrödinger não linear

AUTOR: RAUL MOISES VILLALBA SALAZAR

ORIENTADOR: MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA (Participação Virtual)
Departamento de Matematica e Computacao / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente - FCT/Unesp

Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR (Participação Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente - FCT/Unesp

Prof. Dr. GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Universidade de Brasília

Presidente Prudente, 13 de março de 2024

Agradeço a Deus, cuja graça e orientação foram constantes durante esta jornada acadêmica, iluminando meu caminho e fortalecendo minha determinação.

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus mais profundos agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho, pois sem o apoio e encorajamento delas, este feito não teria sido possível.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me conceder saúde, força e determinação ao longo desta jornada acadêmica.

Aos meus queridos pais, Julia e Raul, por seu amor incondicional, apoio constante e incentivo incansável. Suas palavras de encorajamento foram minha fonte de inspiração.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão às minhas irmãs Julia e Julieth, bem como aos meus queridos sobrinhos William, James e Emma. Seu amor, apoio e incentivo ao longo desta jornada acadêmica foram inestimáveis e fundamentais para mim. Além disso, não posso deixar de reconhecer o papel crucial que Brenda e Valentina desempenharam. Sem o apoio incansável delas, seria muito mais desafiador alcançar o término deste mestrado. Seu apoio constante e carinho foram meu porto seguro durante todo o mestrado. Agradeço do fundo do coração por estarem sempre presentes e por tornarem esta jornada tão especial.

Aos meus amigos peruanos, Leandro, Eddy, Cristhian e Jhon, pela amizade sincera, pelo apoio mútuo e por compartilharem comigo momentos especiais ao longo dessa jornada.

Agradeço também aos meus colegas de turma e pós-graduação aqui no Brasil. Em especial, expresso minha gratidão ao meu amigo Renan, por sua presença constante, pelos ensinamentos compartilhados e pelas incontáveis noites de estudo juntos. Você será sempre lembrado com carinho em meu coração.

Ao meu amigo Maycon, pela amizade sincera e pela disposição em ajudar, mesmo diante das milhões de perguntas que eu tinha. Sua paciência e apoio foram inestimáveis.

Agradeço a todos os amigos geógrafos que compartilharam comigo seus conhecimentos sobre o Brasil e suas pesquisas. Cada um de vocês deixou uma marca indelével em minha jornada acadêmica, contribuindo significativamente para o desenvolvimento deste trabalho.

Especialmente, agradeço ao meu amigo geógrafo Fernando, por sua orientação constante, conselhos sábios e por me ensinar a valorizar as pequenas coisas da vida. Seu apoio foi uma bênção inestimável durante meu mestrado.

Além disso, quero expressar minha gratidão à minha amiga geógrafa Luana, por sua alegria contagiante e por sempre me lembrar da importância de apreciar a felicidade ao nosso redor.

Também, expresso minha gratidão aos meus amigos da sinuca, Mitsuo, Enrico, Leo, Eduardo, Thiago, Thomaz e Johel, por proporcionarem momentos de descontração e diversão, aliviando as tensões do estudo.

Assim, também agradeço à minha amiga pedagoga Ananda por sua generosidade em me ajudar a aprimorar meu português. Sua alegria contagiante e energia positiva foram uma fonte constante de inspiração. Agradeço pela amizade sincera e pela disposição em conversar sobre qualquer assunto.

Ao meu amigo Matheus Stapenhorst pela inestimável ajuda ao longo do desenvolvimento desta dissertação. Seu apoio e o tempo que dedicou para resolver minhas dúvidas foram essenciais para o progresso deste trabalho. Sua orientação durante nossos encontros foi essencial e sua influência em minha trajetória acadêmica foi de valor incalculável.

Ao meu amigo Yino, devo uma imensa gratidão por seu apoio e orientação que tornaram possível minha jornada até o Brasil. Suas dicas e conselhos sobre a convivência no país foram inestimáveis, e sua amizade foi um verdadeiro presente.

Expresso minha sincera gratidão à minha amiga Larissa, cujo apoio e gentileza foram excepcionais. Desde questões sobre o idioma até sua admiração pela matemática, sou imensamente grato por tê-la conhecido.

Ao Prof. Alex Armando Cruz Huallpara, que tive a honra de ter como professor durante a graduação, e que com sua dedicação e entusiasmo, me ajudou e motivou a seguir o caminho do mestrado no Brasil. Sua orientação foi essencial para que eu acreditasse no meu potencial e continuasse trilhando o caminho acadêmico. Sou profundamente grato pelo apoio e incentivo que recebi.

Não posso deixar de agradecer também ao professor Elard Juarez, cuja presença em minha vida foi verdadeiramente valiosa. Agradeço por seus inúmeros conselhos, pelas longas conversas sobre matemática e política, e por me ensinar lições que vão além dos livros. Ele sempre será uma inspiração e um modelo de pessoa que admiro.

Agradeço também ao meu orientador, professor Marcos Pimenta, pela sua orientação e apoio ao longo deste processo. Suas reuniões, conselhos e ensinamentos foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho e para o meu crescimento como matemático e pessoa.

Não poderia deixar de expressar minha gratidão aos professores da POSMAC, que contribuíram significativamente para a minha formação não apenas como matemático, mas também como pessoa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“A beleza da matemática só se mostra para
os seguidores mais pacientes.”*
Maryam Mirzakhani

Resumo

Nesta dissertação, estudamos resultados de existência de solução para uma equação de Schrödinger não linear, com não-linearidade dada pela soma de potências e com uma massa pré-determinada nos dados do problema. Mais especificamente, estudaremos o seguinte problema:

$$-\Delta u = \lambda u + \mu |u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad N \geq 1,$$

com massa prescrita

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = a^2.$$

Estudaremos os casos L^2 —subcrítico, L^2 —crítico e L^2 —supercrítico. Em cada um deles, como veremos, o funcional energia apresenta diferentes geometrias, o que exige a utilização de técnicas diversas.

Palavras-Chave: *Equações de Schrödinger não lineares, Soluções normalizadas, Conjunto de Pohozaev, Métodos variacionais.*

Abstract

In this dissertation, we study existence results for a nonlinear Schrödinger equation, where the nonlinearity is given by the sum of powers and with a predetermined mass in the problem data. More specifically, we will study the following problem:

$$-\Delta u = \lambda u + \mu |u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad N \geq 1,$$

with prescribed mass

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = a^2.$$

We will investigate the L^2 –subcritical, L^2 –critical, and L^2 –supercritical cases. In each of them, as we will see, the energy functional exhibits different geometries, necessitating the use of diverse techniques.

Keywords: *Nonlinear Schrödinger equations, Normalized solutions, Pohozaev manifold, Variational methods.*

Índice de Notações

- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é continuamente } k \text{ vezes diferenciável}\};$
- $C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k; \text{supp}(u) \text{ é compacto}\};$
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\};$
- $H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ (i \in \{1, \dots, n\}) \right\};$
- $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma do espaço $H^1(\Omega)$;
- $u_n \rightarrow u$ denota a convergência forte (em norma);
- $u_n \rightharpoonup u$ denota a convergência fraca;
- ∇u denota o gradiente de uma função diferenciável u :

$$\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \dots, \partial_{x_n} u);$$

- Δu denota o operador Laplaciano de u , ou seja,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2};$$

- 2^* denota o expoente crítico da imersão de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ se } N \geq 3 \text{ e } 2^* = +\infty \text{ se } N = 1, 2;$$

- Para qualquer $1 \leq q < \infty$, escrevemos $L^q(\mathbb{R}^N)$ como o espaço de Lebesgue usual munido com a norma

$$|u|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q := \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx = |u|_q^q;$$

- $H^1 := H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$;
- $H := H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$;
- S denota a melhor constante na desigualdade de Sobolev, ver (2.2.1);
- 0^+ denota a aproximação do zero pela direita;
- 0^- denota a aproximação do zero pela esquerda.

Sumário

Resumo	9
Abstract	11
Índice de Notações	13
Sumário	15
1 Introdução	17
2 Preliminares	21
2.1 Teoria de pontos críticos	21
2.2 Espaços de Sobolev	23
2.3 O espaço $H_{rad}^1(R^N)$	24
2.4 Simetrização de Schwarz	25
2.5 O lema de concentração e compacidade	26
3 Soluções normalizadas para a equação de Schrödinger não linear	29
3.0.1 Motivação física	30
3.0.2 Ondas estacionárias	30
3.1 Equação de Schrödinger não linear homogênea	31
3.1.1 Tratamento variacional para uma equação de Schrödinger não linear homogênea	32
4 Estudo do caso L^2-crítico	35
5 Estudo do caso L^2-supercrítico	47
5.1 Conjunto de Pohozaev	47
5.2 Comportamento de E_μ em relação ao reescalonamento	48
5.3 Convergência de sequências Palais - Smale em problemas de energia supercríticos	48
5.4 Caso L^2 -supercrítico com perturbação subcrítica	54
5.4.1 Existência de um minimizante local.	58
5.4.2 Existência de um segundo ponto crítico	59
Referências	63

Introdução

A principal motivação para estudar a existência de soluções normalizadas é a equação de Schrödinger não linear (NLS). Uma de suas formas mais gerais é a equação

$$i\psi_t = -\Delta\psi + V(x,t)\psi + g(x,t)|\psi|^{2\sigma}\psi, \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (1.0.1)$$

com $\sigma \in \mathbb{R}$. Esta é uma das equações mais importantes da Física Matemática, pois aparece na modelagem de muitos fenômenos físicos com aplicações em diferentes campos, como Física de Semicondutores, Óptica Não Linear, Mecânica Quântica, para citar apenas alguns exemplos.

Por outro lado, uma solução de onda estacionária é uma solução da forma

$$\psi(x,t) = e^{-i\lambda t}u(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.0.2)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função independente do tempo. Se substituirmos ψ em (1.0.1), obtemos

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda u + g(|u|^2)u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (1.0.3)$$

Em [14], encontramos o primeiro artigo onde o autor estuda a existência de soluções normalizadas para uma grande classe de equações de Schrödinger do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + g(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2, \end{cases}$$

com $N \geq 2$, onde a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento subcrítico que satisfaz algumas condições técnicas.

Em [4], os autores estudaram o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u - g(u) = \lambda u, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad \int_{\mathbb{R}^N} u^2 = 1, & \lambda \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $N \geq 2$. Aqui g é superlinear, subcrítica, possivelmente não homogênea. Estudaram o caso em que o funcional associado não é limitado inferiormente na L^2 -esfera unitária onde mostra-se que existem infinitas soluções.

O presente trabalho foi motivado pelo o artigo [18], onde o autor mostrou que a interação entre não linearidades subcríticas, críticas e supercríticas afeta fortemente a geometria do funcional, bem como a existência e as propriedades das soluções de energia mínima com o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda u + f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2, & u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1.0.4)$$

onde $N \geq 1$, $a > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro desconhecido que vai aparecer como um multiplicador de Lagrange. $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Vamos considerar f como sendo uma função do tipo:

$$f(t) = \mu|t|^{q-2}t + |t|^{p-2}t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.0.5)$$

onde

$$2^* = \frac{2N}{N-2} \quad \text{se } N \geq 3 \quad \text{e} \quad 2^* = +\infty \quad \text{se } N = 1, 2.$$

Além disso, $\mu \in \mathbb{R}$ e $2 < q \leq 2 + \frac{4}{N} \leq p < 2^*$, $q \neq p$.

Substituindo (1.0.5) em (1.0.4), obtemos

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-2}u + \mu|u|^{q-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2 & u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1.0.6)$$

Recentemente, alguns autores (por exemplo, [2, 19]) consideraram o problema (1.0.4) com f na forma (1.0.6), porém com $p = 2^*$. Isso implica que f tem um crescimento crítico no sentido de Sobolev.

O objetivo principal deste trabalho é aprimorar o entendimento e oferecer uma abordagem mais detalhada e elucidativa dos resultados de [18]. No primeiro resultado, estudamos o caso L^2 -crítico do problema (1.0.6). O referido teorema é caracterizado pela escolha $p = \bar{p} = 2 + \frac{4}{N}$, ou seja, a não linearidade principal é L^2 -crítica e temos um termo de ordem inferior L^2 -subcrítico. Denotaremos por $\bar{a}_N$ a massa crítica para a equação L^2 -crítica de Schrödinger, pois no caso especial em que $p = \bar{p}$, a fórmula (1.3) em [21] permite caracterizar a massa crítica $\bar{a}_N$ como

$$\bar{a}_N = \left(\frac{\bar{p}}{2C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}} \right)^{N/4}.$$

Teorema 1.0.1. *Seja $N \geq 1$, $2 < q < p = \bar{p}$. Então:*

i) se $0 < a < \bar{a}_N$, então:

a) para todo $\mu > 0$,

$$m(a, \mu) := \inf_{S_a} E_\mu < 0,$$

e o ínfimo é atingido por $\tilde{u} \in S_a$ com as seguintes propriedades: $\tilde{u} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva de valor real em $\mathbb{R}^N$, radialmente simétrica, solução de (1.0.6) para algum $\tilde{\lambda} < 0$, e é uma solução de energia mínima.

b) para todo $\mu < 0$, então:

$$\inf_{S_a} E_\mu = 0, \quad \text{e o problema (1.0.6) não possui solução.}$$

ii) se $a = \bar{a}_N$, então:

a) para todo $\mu > 0$, tem-se que:

$$\inf_{S_a} E_\mu = -\infty.$$

b) para todo $\mu < 0$, tem-se que:

$$\inf_{S_a} E_\mu = 0, \quad \text{e o problema (1.0.6) não possui solução não trivial.}$$

iii) se $a > \bar{a}_N$, então para cada $\mu \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$\inf_{S_a} E_\mu = -\infty.$$

Também mostraremos um resultado técnico que auxiliará o estudo do caso em que a equação (1.0.6) tem não-linearidade dada como a soma de um termo L^2 -crítico, com uma potência supercrítica com respeito a L^2 e subcrítica com respeito ao espaço H^1 .

Lema 1.0.1. *Seja $N \geq 2$ e $2 < q \leq 2 + 4/N < p < 2^*$. Seja $\{u_n\} \subset S_{a,r}$ uma sequência de Palais - Smale para $E_\mu|_{S_a}$ no nível $c \neq 0$, e suponha ainda que:*

i) $P_\mu(u_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

ii) Ou $\mu > 0$ (sem qualquer suposição adicional), ou $\mu < 0$ e

$$\left(|\mu|a^{q(1-\gamma_q)}\right)^{p\gamma_p-2} a^{p(1-\gamma_p)(2-q\gamma_q)} < \left(\frac{1-\gamma_p}{C_{N,q}^q(\gamma_p-\gamma_q)}\right)^{p\gamma_p-2} \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p}\right)^{2-q\gamma_q}$$

é válido.

Então, a menos de subsequência $u_n \rightarrow u$ fortemente em H^1 e $u \in S_a$ é uma solução radial de valor real de (1.0.6) para algum $\lambda < 0$.

Por fim, demonstraremos também o seguinte teorema:

Teorema 1.0.2. *Seja $N \geq 1$, $2 < q < \bar{p} < p < 2^*$, e seja $a, \mu > 0$, satisfazendo*

$$\left(\mu a^{(1-\gamma_q)q}\right)^{\gamma_p p-2} \left(a^{(1-\gamma_p p)}\right)^{2-\gamma_q q} < \left(\frac{p(2-\gamma_q q)}{2C_{N,p}^p(\gamma_p p-\gamma_q q)}\right)^{2-\gamma_q q} \left(\frac{q(\gamma_p p-2)}{2C_{N,q}^q(\gamma_p p-\gamma_q q)}\right)^{\gamma_p p-2}. \quad (1.0.7)$$

Então, o seguinte é válido:

i) A função $E_\mu|_{S_a}$ possui um ponto crítico $\tilde{u}$ no nível negativo $m(a, \mu) < 0$, o qual é um mínimo local interior de E_μ no conjunto

$$A_k := \{u \in S_a : |\nabla u|_2^2 < k\},$$

para um $k > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, $\tilde{u}$ é uma solução de energia mínima de (1.0.6) em S_a , e qualquer outra solução de energia mínima é um mínimo local de E_μ em A_k .

- ii) A função $E_\mu|_{S_a}$ possui um segundo ponto crítico $\hat{u}$ do tipo passo da montanha no nível $\sigma(a, \mu) > m(a, \mu)$.
- iii) Ambos $\tilde{u}$ e $\hat{u}$ são funções positivas com valores reais em $\mathbb{R}^N$, são radialmente simétricos e resolvem (1.0.6) para $\tilde{\lambda}, \hat{\lambda} < 0$ adequado. Além disso, $\tilde{u}$ também é radialmente decrescente.

Vamos dividir este trabalho da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentamos definições e resultados fundamentais que são essenciais para um entendimento aprofundado deste trabalho. No Capítulo 3, introduzimos o conceito de solução normalizada, fornecemos uma motivação física e exploramos, por meio de métodos variacionais, o problema (1.0.6) considerando o caso em que $V(x) = 0$ e $\mu = 0$. No Capítulo 4, apresentamos a demonstração do Teorema 1.0.1, originalmente proposto por [18]. O Capítulo 5 aborda a demonstração do Lema 1.0.1 e do Teorema 1.0.2, também originado de [18].

Preliminares

Neste capítulo apresentamos uma série de definições e resultados que precisaremos para facilitar a leitura e compreender melhor as ideias deste trabalho. Em geral são resultados conhecidos, por isso omitiremos as demonstrações, que podem ser encontradas nas referências citadas.

2.1 Teoria de pontos críticos

Definição 2.1.1. *Seja X um espaço topológico compacto. Uma função $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ se diz semicontínua inferiormente quando o conjunto $\phi^{-1}(a, +\infty)$ é aberto em X , para todo $a \in \mathbb{R}$ (isto é, $\phi^{-1}(-\infty, a]$ é fechado em X para todo $a \in \mathbb{R}$).*

Teorema 2.1.1. *Seja X um espaço topológico compacto e $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que $\phi(u_0) = \inf_X \phi$.*

Demonstração. Ver [10], página 15. ■

Definição 2.1.2. *Sejam X um espaço de Banach e $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente se dada uma sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ então $\phi(u) \leq \liminf \phi(u_n)$.*

Definição 2.1.3. *Seja X um espaço de Banach e $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que ϕ é coercivo se $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \phi(u) = +\infty$.*

Teorema 2.1.2. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional fracamente semicontínuo inferiormente e coercivo. Então ϕ é limitado inferiormente em X , ou seja, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(u) \geq a$, para todo $u \in X$.*

Demonstração. Ver [3], página 81. ■

Teorema 2.1.3 (Multiplicadores de Lagrange). *Seja X um espaço de Banach, $J, F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $x_0 \in X$ um extremo local de J restrita ao conjunto $M = \{x \in X : F(x) = F(x_0)\}$. Se $F'(x_0)w \neq 0$ para algum $w \in X$, então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$J'(x_0)w = \lambda F'(x_0)w, \quad \forall w \in X.$$

Demonstração. Ver [10], página 35. ■

A seguir, daremos algumas definições sobre a condição de Palais-Smale. Seja X um espaço de Banach e $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R})$.

Definição 2.1.4. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ é uma sequência (PS) no nível $c \in \mathbb{R}$, denotada por $(PS)_c$, quando

$$I(x_n) \rightarrow c \quad e \quad I'(x_n) \rightarrow 0.$$

Definição 2.1.5. Diremos que I verifica a condição de Palais-Smale, ou simplesmente a condição $(PS)_c$ para $c \in \mathbb{R}$, se toda sequência (PS) no nível c admite uma subsequência que converge forte em X , isto é,

$$I(x_n) \rightarrow c \quad e \quad I'(x_n) \rightarrow 0,$$

implica que existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ e $x_0 \in X$ tais que,

$$x_{n_j} \rightarrow x_0 \quad \text{em } X.$$

Observação 2.1.1. Muitas demonstrações deste trabalho apresentam o uso da notação de Bachman-Landau, cujos significados são os seguintes:

1. A notação $f(x) = o(g(x))$ quando $x \rightarrow x_0$ significa que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.
2. A notação $f(x) = O(g(x))$ quando $x \rightarrow x_0$ significa que existe uma constante C tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para todo x suficientemente próximo de x_0 .

Ver [9], página 704.

Observação 2.1.2. Seja $1 < p < \infty$. Denote-se por p' como o expoente conjugado, tal que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Proposição 2.1.1. (Desigualdade de Hölder) Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um domínio qualquer. Suponhamos que $f \in L^p(\Omega)$ e que $g \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Demonstração. Ver [6], pág.92. ■

Proposição 2.1.2. (Desigualdade de interpolação) Seja $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e ainda

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha},$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$ verifica $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

2.2 Espaços de Sobolev

Para entender melhor o conteúdo dessa seção, citamos as referências [6, 7, 10].

Definimos o seguinte espaço de Sobolev:

$$H^1(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N) \ (i \in \{1, \dots, n\}) \right\}$$

$$\text{com } |u|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \right)^{1/2}.$$

A seguir, abordaremos as definições de imersões contínuas e imersões compactas nos espaços de Sobolev $H^1(\Omega)$, onde Ω representa um domínio limitado.

Definição 2.2.1. *Sejam E_1, E_2 dois espaços normados tais que $E_1 \subset E_2$. Diz-se que E_1 está imerso continuamente em E_2 ou também que a imersão $E_1 \hookrightarrow E_2$ é contínua quando a aplicação $i : E_1 \rightarrow E_2$ tal que $i(x) = x$ é uma aplicação contínua. Diz-se que E_1 está imerso compactamente em E_2 ou também que a imersão $E_1 \hookrightarrow E_2$ é compacta quando a aplicação $i : E_1 \rightarrow E_2$ é uma aplicação compacta.*

Lembramos que o expoente crítico de Sobolev é dado por

$$2^* = \frac{2N}{N-2}, \quad \text{onde } 1 \leq p < N.$$

Por outro lado, vamos agora recordar as imersões contínuas e as imersões compactas sobre o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Esses resultados, poderão ser vistos com maior detalhe em [6].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira de classe C^1 . As seguintes imersões são contínuas:

- Para todo $s \in [2, +\infty)$ se $N = 1$ ou $N = 2$, ocorre que,

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega).$$

- Para todo $s \in [2, 2^*]$ se $N \geq 3$, temos que,

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega).$$

Como consequência dessas imersões, existe $C > 0$ tal que,

$$|u|_s \leq C |u|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

As seguintes imersões são compactas:

- Para todo $s \in [1, +\infty)$ se $N = 1$ ou $N = 2$, tem-se que,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega).$$

- Para todo $s \in [2, 2^*[$ se $N \geq 3$, tem-se que,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega).$$

Como consequência dessas imersões e desde que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, tem-se que, para toda sequência limitada $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, existem $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que,

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad \text{em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$u_{n_j} \rightarrow u \quad \text{em } L^s(\Omega).$$

Observação 2.2.1. Para qualquer $N \geq 3$ existe uma constante ótima $S > 0$ dependendo apenas de N , tal que:

$$S|f|_{2^*}^2 \leq |\nabla f|_2^2, \quad \forall f \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (\text{Desigualdade de Sobolev}) \quad (2.2.1)$$

Ver [6], página 278.

Teorema 2.2.1 (Identidade de Pohozaev). *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $u \in H_0^1(\Omega) \cap H_{loc}^2(\overline{\Omega})$ uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,

$$\frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta(x) dS_x = N \int_{\Omega} G(u) dx,$$

onde, $G(u) = \int_0^s g(s) ds$ com $G \in L^1(\Omega)$ e $\eta(x)$ é o vetor normal exterior no ponto $x \in \partial\Omega$.

Demonstração. Ver [22], pág. 136. ■

Observação 2.2.2. No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$, temos que

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx.$$

2.3 O espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$

Ao estudar equações diferenciais parciais usando métodos variacionais, é necessário ter algum resultado de compacidade. Não obstante, nos problemas em $\mathbb{R}^N$, há uma perda de compacidade nas imersões de Sobolev. Para resolver este problema, vamos estudar o subespaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para entender em profundidade o conceito de função radial, ver [11].

Definição 2.3.1. Um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é dito radialmente simétrico se é mensurável e satisfaz a propriedade:

$$\text{se } x_0 \in \Omega \text{ e } |x| = |x_0| \quad \text{então } x \in \Omega.$$

Definição 2.3.2. Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto radialmente simétrico e $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, dizemos que u é uma função radial se existe $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x) = f(|x|)$ para quase todo $x \in \Omega$.

Observação 2.3.1. Sejam $x, x_0 \in \Omega$ e $u \geq 0 \in L_{loc}^1(\Omega)$. Uma função é chamada radialmente decrescente se:

$$|x| \leq |x_0| \quad \Rightarrow \quad u(x) \geq u(x_0).$$

Definição 2.3.3. Definimos o espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$,

$$H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); u(x) = u(|x|)\}.$$

Teorema 2.3.1. $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Ver [11], página 14. ■

Por outro lado, agora nosso objetivo é conseguir um resultado de compacidade, que garanta a imersão compacta de certos subespaços de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em direção aos espaços de Lebesgue. Assim, temos como consequência o seguinte corolário devido a Strauss [20].

Teorema 2.3.2. [Strauss, 1977] Seja $N \geq 2$. Então, a seguinte imersão é compacta:

$$H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),$$

onde $2 < p < 2^*$ se $N \geq 3$ e $2 < p < +\infty$ se $N = 2$.

Demonstração. Ver [20], página 156. ■

2.4 Simetrização de Schwarz

A simetrização de Schwarz é um tipo particular de arranjo de funções definidas em um conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dada uma função real neste conjunto, constrói-se uma função associada, que tem como domínio a bola centrada na origem, com a mesma medida que Ω , essencialmente a mesma gama de valores, e que satisfaz em particular duas propriedades, ser radial e radialmente decrescente. Para mais detalhes consultar [15].

Definição 2.4.1. Considere $A_1, A_2, \dots, A_n$ como conjuntos borelianos do $\mathbb{R}^N$, dois a dois disjuntos de medida finita, e $0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1$ números reais. Se u é uma função simples tal que,

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i},$$

então definiremos ser um rearranjo de u por:

$$u^* = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]},$$

onde $R_0 := 0$ e $R_i \geq R_{i-1}$ são dados pela relação:

$$|[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]| = |A_i|,$$

onde $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue.

Na definição anterior, denotamos $[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i] = \{x \in \mathbb{R}^N; R_{i-1} \leq |x| \leq R_i\}$, onde $|\cdot|$ representa a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$.

Observação 2.4.1. Note que esta definição indica que a partir da função simples u , podemos encontrar uma função u^* com as seguintes propriedades:

i) Simétrica em relação a origem;

- ii) Decrescente quando os raios R'_i s aumentam;
- iii) A integral de Lebesgue de u^* no $\mathbb{R}^N$ é igual a de u , ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^*(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x) dx.$$

O seguinte teorema possibilita a definição do rearranjo de uma função que seja tanto positiva quanto mensurável.

Teorema 2.4.1. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Existe uma única $u^* \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $u^* \geq 0$ e para todo $\alpha > 0$,*

$$|[u \geq \alpha]| = |[u^* \geq \alpha]|,$$

onde o conjunto $[u^* \geq \alpha]$ é uma bola $B_{R_\alpha}(0)$. A função u^* é radialmente decrescente e é chamada de **rearranjo decrescente** ou **a simetrização de Schwarz da função u** .

Além disso, para qualquer função que seja contínua e crescente F , definida como segue:

$$F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

tal que $F(0) = 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u^*(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(u(x)) dx.$$

Proposição 2.4.1. *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Logo, a simetrização $u^* \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Temos ainda a seguinte desigualdade:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

2.5 O lema de concentração e compacidade

Nesta seção, apresentamos o Lema de Concentração e Compacidade de Lions, o qual é um método eficaz para resolver problemas de minimização em domínios ilimitados. Para maiores detalhes o leitor pode revisar [16, 17].

Lema 2.5.1. *Seja $\{\rho_n\}$ uma sequência em $L^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo:*

$$\rho \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = \lambda,$$

onde $\lambda > 0$ esta fixado. Então existe uma subsequência $\{\rho_{n_k}\}$ satisfazendo uma, e somente uma das três seguintes possibilidades:

(i) (**Compacidade**) Existe $y_k \in \mathbb{R}^N$ tais que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R < \infty, \quad \int_{y_k + B_R} \rho_{n_k}(x) dx \geq \lambda - \varepsilon;$$

(ii) (**Anulamento**) Fixado $R > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y + B_R} \rho_{n_k}(x) dx = 0;$$

(iii) (**Dicotomia**) Existe $\alpha \in]0, \lambda[$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existem $K_\varepsilon \geq 1$ e sequências $\{\rho_k^1\}, \{\rho_k^2\} \subseteq L_+^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo, para cada $k \geq K_\varepsilon$,

$$\begin{cases} |\rho_{n_k} - (\rho_k^1) + \rho_k^2|_{L^1} \leq \varepsilon, \\ |\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k^1 dx - \alpha| \leq \varepsilon, \quad |\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k^2 dx - (\lambda - \alpha)| \leq \varepsilon, \\ \text{dist}(\text{supp } \rho_k^1, \text{supp } \rho_k^2) \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [16], página 115. ■

Lema 2.5.2. Seja $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ com $q \neq \frac{Np}{N-p}$ se $p < N$. Suponhamos que $\{u_n\}$ é limitado em $L^q(\mathbb{R}^N)$, $\{\nabla u_n\}$ é limitado em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R} |u_n|^q dx \rightarrow 0, \quad \text{para algum } R > 0.$$

Então, $u_n \rightarrow 0$ em $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para algum α entre q e $\frac{Np}{N-p}$.

Demonstração. Ver [17], página 231. ■

Soluções normalizadas para a equação de Schrödinger não linear

Neste capítulo, nosso objetivo é encontrar uma solução para a seguinte classe de problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda u + f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2, & u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (3.0.1)$$

onde $a, u > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, as funções $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Temos também a condição de normalização:

$$|u|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2. \quad (3.0.2)$$

Nosso objetivo é encontrar uma solução para esta equação elíptica (3.0.1) a qual esta sujeita a (3.0.2). Quando afirmamos que a norma L^2 está fixa em relação a um número a , diremos que a solução é uma *solução normalizada*.

Vamos considerar f como sendo uma função do tipo:

$$f(t) = \mu|t|^{q-2}t + |t|^{p-2}t, \quad (3.0.3)$$

tal que,

$$t, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } 2 < q \leq 2 + \frac{4}{N} \leq p < 2^*, \quad q \neq p,$$

onde,

$$2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ se } N \geq 3 \text{ e } 2^* = +\infty \text{ se } N = 1, 2.$$

Portanto, a partir das equações (3.0.1) e (3.0.3), temos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda u + |u|^{p-2}u + \mu|u|^{q-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2 & u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (P)$$

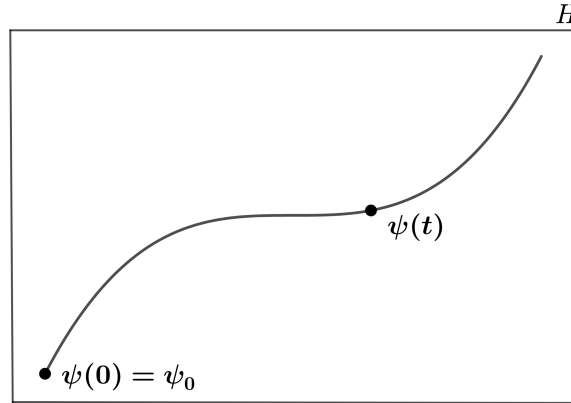
3.0.1 Motivação física

Considere a equação de Schrödinger:

$$i\psi_t + \Delta\psi - V(x)\psi + g(|u|^2)u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (3.0.4)$$

Para as equações de Schrödinger, existe uma lei fundamental da física conhecida como a conservação da massa. Essa lei estabelece que, em todos os instantes dessa trajetória, a massa da partícula $\psi(t)$ é igual à massa no instante inicial. Ver Figura 3.0.1.

Figura 3.0.1: Conservação da massa (Norma $L^2(\mathbb{R}^N)$).



Se $|\psi_0|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = a$, então $|\psi(t)|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = a$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, quando se estuda a existência de soluções normalizadas para a equação de Schrödinger, existe uma classe de soluções que é muito importante. Essas soluções são chamadas de *ondas estacionárias*.

3.0.2 Ondas estacionárias

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, a função:

$$\psi(x, t) = e^{-i\lambda t}u(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

é solução de (3.0.4) se, e somente se, a função u é solução da equação:

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda u + g(|u|^2)u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (3.0.5)$$

Portanto, a existência de soluções de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger depende da existência de soluções deste problema elíptico.

Por outro lado, para a equação (3.0.5), temos duas classes de equações que podemos encontrar na literatura, dependendo de como vamos escolher o parâmetro λ .

Observação 3.0.1. *Problema de Massa Livre: λ pode ser escolhido. Este é um problema no qual procuramos a existência da solução para a equação de Schrödinger sobre todas as ondas estacionárias, sem nos preocuparmos com o tamanho da norma L^2 . Quando isso ocorre, dizemos que o problema é de massa livre.*

Problema de Massa Prescrita: Outra forma importante de encontrar soluções não triviais para (3.0.1) é buscar soluções com massa prescrita. Neste caso, $\lambda \in \mathbb{R}$ faz parte da incógnita. Esta abordagem parece ser particularmente significativa do ponto de vista físico, pois existe uma conservação de massa.

Considerando o problema (P), a solução desse problema está relacionada ao seguinte problema de minimização, o qual está sujeito a uma restrição. É por isso que apresentamos o λ como um multiplicador de Lagrange.

O objetivo será encontrar pontos críticos do funcional $E : H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx,$$

restrito ao vínculo:

$$S_a = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2 \right\}.$$

3.1 Equação de Schrödinger não linear homogênea

Iniciamos nosso estudo considerando o problema (P), porém, com a condição especial em que $V(x) = 0$ e $\mu = 0$.

Então,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2 & u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (3.1.1)$$

sendo o funcional energia associado $E_0 : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$E_0(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx,$$

em S_a .

Agora, os problemas para encontrar soluções normalizadas são classificados em três tipos:

Tipo 1: L^2 –subcrítico, quando $2 < p < 2 + \frac{4}{N}$.

Tipo 2: L^2 –crítico, quando $p = \bar{p} = 2 + \frac{4}{N}$.

Tipo 3: L^2 –supercrítico, quando $2 + \frac{4}{N} < p < 2^*$.

Observação 3.1.1. *Conforme veremos, dependendo do tipo, o funcional E_0 apresenta características geométricas muito diferentes..*

Assim, a fim de compreender essa classificação, precisamos da seguinte desigualdade:

Proposição 3.1.1 (Desigualdade do Gagliardo-Nirenberg). *Para todo $N \geq 1$ e $p \in (2, 2^*)$, existe uma constante $C_{N,p}$ dependente de N e de p tal que*

$$|u|_p \leq C_{N,p} |\nabla u|_2^{\gamma_p} |u|_2^{1-\gamma_p} \quad \forall u \in H, \quad \text{tal que} \quad \gamma_p := \frac{N(p-2)}{2p} \quad (3.1.2)$$

onde $p \in [2, 2^*]$ se $N \geq 3$ e $p \leq 2$ se $N = 2$.

Demonstração. Ver [15], página 31. ■

Observação 3.1.2. Em [21], Weinstein demonstrou que a igualdade é atingida por $w_{N,p}$ (e por qualquer um de seus re-escalamentos). Além disso, ele determinou a melhor constante $C_{N,p}$ em termos da norma L^2 de $w_{N,p}$. No caso especial em que $p = \bar{p}$, a fórmula (1.3) em [21] permite caracterizar a massa crítica $\bar{a}_N$ como

$$\bar{a}_N = \left(\frac{\bar{p}}{2C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}} \right)^{\frac{N}{4}}. \quad (3.1.3)$$

Assim, a massa crítica é a única função que soluciona o problema 3.1.1, quando $p = \bar{p}$.

3.1.1 Tratamento variacional para uma equação de Schrödinger não linear homogênea

Do ponto de vista variacional, vamos encontrar uma solução para o problema (3.1.1). Assim também para concluir essa seção vamos enunciar alguns resultados técnicos.

Proposição 3.1.2. No caso L^2 -subcrítico o funcional E_0 é limitado inferiormente.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} E_0(u) &= \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p \\ &\geq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \frac{C_{N,p}^p}{p}|u|_2^{(1-\gamma_p)p}|\nabla u|_2^{\gamma_p p} \\ &\geq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \frac{C_{N,p}^p}{p}a^{(1-\gamma_p)p}|\nabla u|_2^{\gamma_p p} \end{aligned}$$

implicando em

$$E_0(u) \geq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - C_1 (|\nabla u|_2^2)^{\frac{\gamma_p p}{2}}.$$

Lembrando de (3.1.2) que $\gamma_p = \frac{N(p-2)}{2p}$, tem-se que

$$0 < \frac{\gamma_p p}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < p < 2 + \frac{4}{N}.$$

Definindo a função $h : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(t) = \frac{1}{2}t - C_1 t^{\frac{\gamma_p p}{2}}$$

temos $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$, e, portanto, existe $M > 0$ tal que $h(t) \geq -M$ para todo $t \geq 0$.

Portanto

$$E_0(u) \geq h(|\nabla u|_2^2) \geq -M, \quad \forall u \in S_a.$$

mostrando que E_0 é limitado inferiormente. ■

De fato, o raciocínio anterior mostra o seguinte lema:

Lema 3.1.1. *O funcional E_0 é coercivo em S_a .*

Demonstração. De fato, observe que se, $|u_n|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \rightarrow +\infty$, então como $|u_n|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = |\nabla u_n|_2^2 + |u_n|_2^2$ e $|u_n|_2^2 = a^2$, concluímos que $|\nabla u_n|_2 \rightarrow +\infty$. Como $E_0(u_n) \geq h(|\nabla u_n|_2^2)$, segue que $E_0(u_n) \rightarrow +\infty$. ■

Corolário 3.1.1. *Toda sequência minimizante de E_0 é limitada.*

Demonstração. Como E_0 é limitado inferiormente, pelo postulado de Dedekind, existe $m(a, 0) \in \mathbb{R}$ tal que

$$m(a, 0) = \inf_{S_a} E_0.$$

Pela definição do ínfimo, existe $\{u_n\} \subset S_a$ tal que $E_0(u_n) \rightarrow m(a, 0)$. Como E_0 é coercivo em S_a , é fácil ver que $\{u_n\}$ é limitada em S_a . ■

Observação 3.1.3. *Note que*

$$\gamma_p p = \begin{cases} < 2 & \text{se } 2 < p < \bar{p} \\ = 2 & \text{se } p = \bar{p} \\ > 2 & \text{se } \bar{p} < p < 2^*. \end{cases}$$

Proposição 3.1.3. *No caso L^2 -supercrítico, E_0 não é limitado inferiormente.*

Demonstração. De fato, para entender a geometria do funcional E_0 sobre S_a , precisamos usar a função $(s \star u)$, para $u \in S_a$ e $s \in \mathbb{R}$, a qual é definida como

$$(s \star u)(x) := e^{\frac{N}{2}s} u(e^s x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (3.1.4)$$

Portanto,

$$E_0(s \star u) = \frac{e^{2s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \frac{e^{\gamma_p p s}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p.$$

Deduzimos que, se $p > \bar{p}$ (de modo que $\gamma_p p > 2$), então $E_0(s \star u) \rightarrow -\infty$ quando $s \rightarrow +\infty$, para todo $u \in S_a$, mostrando que E_0 não é limitado inferiormente sobre S_a no caso L^2 -supercrítico. ■

Teorema 3.1.1. *O problema 3.1.1 tem uma solução, dado por um ponto de mínimo do funcional E_0 , no caso L^2 -subcrítico.*

Demonstração. Vamos agora mostrar como resolver problema de minimização com

$$E_0(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx,$$

sobre

$$S_a = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2 \right\}.$$

Seja $\{u_n\} \subset S_a$ uma sequência minimizante. Sem perda de generalidade podemos supor que $u_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois:

$$E_0(|u_n|) = E_0(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e ainda, } \| |u_n| \|_2 = \| u_n \|_2 = a.$$

Assim,

$$E_0(u_n) \rightarrow m(a, 0).$$

Além disso, podemos supor sem perda de generalidade que u_n é radialmente simétrica.

De fato, pela desigualdade de Schwarz simetrizada, temos que

$$|\nabla|u|^*|_2 \leq |\nabla|u||_2 \leq |\nabla u|_2.$$

Além disso, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(|u|^*)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(|u|)|^2, \quad ||u_n|^*|_2 = ||u_n||_2$$

e

$$||u_n|^*|_p = |u_n|_p, \quad |u_n|^* \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N),$$

o que implica que

$$m(a, 0) \leq E_0(|u_n|^*) \leq E_0(|u_n|) = m(a, 0) + o(1).$$

Isso significa que $(|u_n|^*)$ é uma sequência minimizante também para E_0 sobre S_a .

Como E_0 é coercivo, segue que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois $(|\nabla u_n|_2)$ é limitado e $|u_n|_2 = a$. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$$

e, pelo resultado de compacidade de Strauss (ver Teorema 2.3.2),

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in (2, 2^*).$$

Em particular,

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^N),$$

implicando que

$$m(a, 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_0(u_n) \geq E_0(u).$$

Por outro lado, no caso onde $u \in S_a$, podemos concluir que

$$E_0(u) = m(a, 0)$$

e, neste caso, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$E'_0(u) = \lambda \psi'(u), \tag{3.1.5}$$

onde

$$\psi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx, \quad S_a = \psi^{-1} \left(\left\{ \frac{a^2}{2} \right\} \right).$$

A partir de (3.1.5), podemos concluir que u é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2 & u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

■

Estudo do caso L^2 –crítico

Neste capítulo estudamos a existência de soluções de energia mínima para a equação não linear de Schrödinger no caso L^2 –crítico.

Consideramos o caso específico em que $V(x) = 0$ e $f(t) = |t|^{p-2}t + \mu|t|^{q-2}t$, resultando na seguinte equação:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-2}u + \mu|u|^{q-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2 & u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (4.0.1)$$

O funcional de energia E_μ associado a essa equação é definido como:

$$E_\mu : H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p} |u|^p - \frac{\mu}{q} |u|^q \right),$$

restrito a S_a .

Definição 4.0.1. Dizemos que $\tilde{u}$ é uma solução de energia mínima (ground state) de (4.0.1) em S_a se é uma solução para (4.0.1) tendo energia mínima entre todas as soluções pertencentes a S_a , ou seja,

$$E'_\mu|_{S_a}(\tilde{u}) = 0 \quad e \quad E_\mu(\tilde{u}) = \inf \{ E_\mu(u) : E'_\mu|_{S_a}(u) = 0, \quad u \in S_a \}.$$

O primeiro caso a ser analisado é caracterizado pela escolha $p = \bar{p} = 2 + 4/N$, ou seja, a não linearidade principal é L^2 –crítica e temos um termo de ordem inferior L^2 –subcrítico. Lembremos que estamos denotando por $\bar{a}_N$ a massa crítica para a equação L^2 –crítica de Schrödinger (ver (3.1.3)).

Teorema 4.0.1. Seja $N \geq 1$, $2 < q < p = \bar{p}$. Então:

i) se $0 < a < \bar{a}_N$, então:

a) para todo $\mu > 0$

$$m(a, \mu) := \inf_{S_a} E_\mu < 0,$$

e o ínfimo é atingido por $\tilde{u} \in S_a$ com as seguintes propriedades: $\tilde{u} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva de valor real, radialmente simétrica, solução de (4.0.1) para algum $\tilde{\lambda} < 0$, e é uma solução de energia mínima.

b) para todo $\mu < 0$, tem-se que:

$$\inf_{S_a} E_\mu = 0, \quad \text{e o problema (4.0.1) não possui solução não trivial.}$$

ii) se $a = \bar{a}_N$, então:

a) para todo $\mu > 0$, tem-se que:

$$\inf_{S_a} E_\mu = -\infty.$$

b) para todo $\mu < 0$, tem-se que:

$$\inf_{S_a} E_\mu = 0, \quad \text{e o problema (4.0.1) não possui solução não trivial.}$$

iii) se $a > \bar{a}_N$, então para cada $\mu \in \mathbb{R}$ temos que

$$\inf_{S_a} E_\mu = -\infty.$$

Demonstração. Da equação (3.1.4), temos que:

$$E_\mu(s \star u) = e^{2s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{\bar{p}} |u|^{\bar{p}} \right) - \mu \frac{e^{q\gamma_q s}}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q = e^{2s} E_0(u) - \mu \frac{e^{q\gamma_q s}}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q. \quad (4.0.2)$$

• O caso $0 < a \leq \bar{a}_N$ com $\mu < 0$.

Se existe uma solução u para (4.0.1), então pela identidade de Pohozaev,

$$P_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \gamma_p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \mu \gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q = 0.$$

Assim, como $p = \bar{p} = 2 + \frac{4}{N}$, e $\gamma_p p = 2$, tem-se que:

$$\gamma_p = \frac{2}{p} = \frac{2}{\bar{p}} = \gamma_{\bar{p}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 &= \gamma_p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p + \mu \gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \\ &= \frac{2}{\bar{p}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\bar{p}} + \mu \gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q. \end{aligned} \quad (4.0.3)$$

Por outro lado, temos que $\inf_{S_a} E_0 \geq 0$ quando $a < \bar{a}_N$.

De fato, note que, se $u \in S_a$,

$$\begin{aligned} E_0(u) &\geq \frac{1}{2} |\nabla u|_2^2 - \frac{C_{N,p}^p}{p} a^{(1-\gamma_p)p} |\nabla u|_2^{\gamma_p p} \\ &= \frac{1}{2} |\nabla u|_2^2 - \frac{C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}}{\bar{p}} a^{\bar{p}-2} |\nabla u|_2^2. \end{aligned} \quad (4.0.4)$$

Além disso, tem-se que:

$$\bar{a}_N = \left(\frac{\bar{p}}{2C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}} \right)^{\frac{N}{4}} \implies (\bar{a}_N)^{\frac{4}{N}} = \frac{\bar{p}}{2C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}},$$

portanto,

$$\frac{C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}}{\bar{p}} = \frac{1}{2(\bar{a}_N)^{\frac{4}{N}}}. \quad (4.0.5)$$

Assim, substituindo (4.0.5) em (4.0.4), obtemos

$$\begin{aligned} E_0(u) &\geq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \frac{1}{2(\bar{a}_N)^{\frac{4}{N}}} a^{\frac{4}{N}} |\nabla u|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\bar{a}_N} \right)^{\frac{4}{N}} |\nabla u|_2^2 \\ &> \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 = 0. \quad \left(\text{pois } \frac{a}{\bar{a}_N} < 1 \right) \end{aligned}$$

Portanto, como $E_0(u) > 0$, para todo $u \in S_a$ tem-se que $\inf_{S_a} E_0 \geq 0$.

Além disso, deduzimos da equação (4.0.3) que para todo $u \in S_a$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \frac{2}{\bar{p}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\bar{p}} &= \mu \gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \\ 2 \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \frac{1}{\bar{p}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\bar{p}} \right) &= \mu \gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \\ 2E_0(u) &= \mu \gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 \leq 2 \inf_{S_a} E_0 \leq 2E_0(u) = \mu \gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q < 0,$$

o que é uma contradição.

Assim, o problema (4.0.1) não tem solução não trivial.

- O caso $a = \bar{a}_N$ com $\mu < 0$.

Como $a = \bar{a}_N$, existe $w = w_{N,\bar{p}} \in S_a$ com $E_0(w) = 0$.

De fato, sabemos que para $w_{N,\bar{p}}$ cumpre-se a igualdade na Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, com $a = \bar{a}_N = |w_{N,\bar{p}}|_2$ e $\bar{p} - 2 = 4/N$, então:

$$|w_{N,\bar{p}}|_{\bar{p}}^{\bar{p}} = C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 |w_{N,\bar{p}}|_2^{\bar{p}-2} = C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 \bar{a}_N^{\bar{p}-2} = C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 \frac{\bar{p}}{2C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}}{2} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2.$$

Substituindo $|w_{N,\bar{p}}|^{\bar{p}}$ em $E_0(w_{N,\bar{p}})$, temos:

$$E_0(w_{N,\bar{p}}) = \frac{1}{2}|\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 - \frac{1}{\bar{p}}|\nabla w_{N,\bar{p}}|_{\bar{p}}^{\bar{p}} = \frac{1}{2}|\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 - \frac{1}{\bar{p}} \cdot \frac{\bar{p}}{2}|\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 = 0.$$

Assim, da equação (4.0.2), tem-se que:

$$E_\mu(s \star w) = e^{2s} E_0(w) - \mu \frac{e^{q\gamma_q s}}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^q = -\mu \frac{e^{q\gamma_q s}}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^q \longrightarrow -\infty \quad \text{quando } s \rightarrow +\infty.$$

Portanto $\inf_{S_a} E_\mu = -\infty$.

• O caso $a > \bar{a}_N$.

Como $a > \bar{a}_N$, existe $u \in S_a$ com $E_0(u) < 0$.

De fato, tomando $u = w_{N,\bar{p}} \in S_a$, observamos que, conforme as hipóteses:

$$\begin{aligned} a &> \bar{a}_N \\ \implies -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\bar{a}_N} \right)^{\frac{N}{4}} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 &< -\frac{1}{2} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2. \end{aligned}$$

Então

$$\frac{1}{2} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\bar{a}_N} \right)^{\frac{N}{4}} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 < 0. \quad (4.0.6)$$

Portanto

$$\begin{aligned} E_0(w_{N,\bar{p}}) &= \frac{1}{2} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 - \frac{1}{\bar{p}} |w_{N,\bar{p}}|_{\bar{p}}^{\bar{p}} \\ &= \frac{1}{2} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 - \frac{C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}}{\bar{p}} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 a^{4/N} \quad (\text{pois } |w_{N,\bar{p}}|_{\bar{p}}^{\bar{p}} = C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 a^{4/N}) \\ &= \frac{1}{2} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\bar{a}_N} \right)^{\frac{4}{N}} |\nabla w_{N,\bar{p}}|_2^2 \quad (\text{por (4.0.5)}) \\ &< 0. \quad (\text{por (4.0.6)}) \end{aligned}$$

Assim, dado que $u = w_{N,\bar{p}}$, temos que $E_0(u) < 0$.

Por outro lado, ao utilizar (4.0.2) e considerando o fato de que $2 > q\gamma_q$, podemos deduzir novamente que:

$$E_\mu(s \star u) = e^{2s} E_0(u) - \mu \frac{e^{q\gamma_q s}}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \longrightarrow -\infty, \quad \text{quando } s \rightarrow +\infty.$$

Portanto,

$$\inf_{S_a} E_\mu = -\infty.$$

- O caso $a < \bar{a}_N$ com $\mu > 0$.

Inicialmente, vamos provar que E_μ é limitado inferiormente em S_a e, além disso, que o ínfimo é negativo.

De fato, aplicando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg em $|u|_p$ e $|u|_q$, temos que:

$$|u|_p \leq C_{N,p} |\nabla u|_2^2 |u|_2^{p-2} \implies -\frac{1}{p} |u|_p^p \geq -\frac{C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}}{\bar{p}} |\nabla u|_2^2 a^{\bar{p}-2},$$

e

$$|u|_q \leq C_{N,q} |\nabla u|_2^{\gamma_q q} |u|_2^{(1-\gamma_q)q} \implies -\frac{\mu}{q} |u|_q^q \geq -\frac{\mu}{q} C_{N,q}^q |\nabla u|_2^{\gamma_q q} a^{(1-\gamma_q)q}.$$

Além disso, ao aplicar essas desigualdades à energia $E_\mu(u)$, obtemos:

$$\begin{aligned} E_\mu(u) &= \frac{1}{2} |\nabla u|_2^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p - \frac{\mu}{q} |u|_q^q \\ &\geq \frac{1}{2} |\nabla u|_2^2 - \frac{C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}}{\bar{p}} |\nabla u|_2^2 a^{\bar{p}-2} - \frac{\mu}{q} C_{N,q}^q |\nabla u|_2^{\gamma_q q} a^{(1-\gamma_q)q}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$E_\mu(u) \geq \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}}{\bar{p}} a^{\bar{p}-2} \right) |\nabla u|_2^2 - \frac{\mu}{q} C_{N,q}^q |\nabla u|_2^{\gamma_q q} a^{(1-\gamma_q)q}, \quad (4.0.7)$$

para cada $u \in S_a$.

Além disso, como $a < \bar{a}_N$ e $\gamma_q q < 2$, o coeficiente de $|\nabla u|_2^2$ da equação (4.0.7) é positivo. De fato,

$$a < \bar{a}_N \text{ e } \bar{a}_N = \left(\frac{\bar{p}}{2C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}} \right)^{\frac{N}{4}},$$

então,

$$\implies a^{-4/N} > 2 \frac{C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}}{\bar{p}}$$

$$\implies a^{-4/N} \cdot a^{\bar{p}-2} > 2 \frac{C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}}{\bar{p}} \cdot a^{\bar{p}-2}$$

$$\implies 1 - a^{\bar{p}-(2+4/N)} < 1 - 2 \frac{C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}}{\bar{p}} a^{\bar{p}-2}$$

$$\implies 0 < 1 - 2 \frac{C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}}{\bar{p}} a^{\bar{p}-2}.$$

Por outro lado, temos que E_μ é coercivo em S_a , ou seja, que $E_\mu(u) \rightarrow +\infty$ quando $|u|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \rightarrow +\infty$. De fato, como $|u|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \rightarrow +\infty$ e $|u|_2 = a$, então isso implica que

$|\nabla u|_2 \rightarrow +\infty$, pois $|u|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = |\nabla u|_2^2 + |u|_2^2$.

Assim,

$$E_\mu(u) \geq \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}}}{\bar{p}} a^{\bar{p}-2} \right) |\nabla u|_2^2 - \frac{\mu}{q} C_{N,q}^q (|\nabla u|_2^2)^{\gamma_q q/2} a^{(1-\gamma_q)q} \rightarrow +\infty,$$

quando $|\nabla u|_2 \rightarrow +\infty$. Portanto, $E_\mu(u) \rightarrow +\infty$.

Por outro lado, $m(a, \mu) := \inf_{S_a} E_\mu > -\infty$. Pois, definindo a função $h : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(t) = c_1 t - c_2 t^{\gamma_q q/2} \quad \text{onde } c_1, c_2 \geq 0,$$

tem-se que $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$, e, portanto, existe $M > 0$ tal que

$$h(t) \geq -M, \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto,

$$E_\mu(u) \geq h(|\nabla u|_2^2) \geq -M, \quad \forall u \in S_a.$$

Isso mostra que E_μ é limitado inferiormente em S_a .

Por outro lado, o fato de $m(a, \mu) < 0$ segue de (4.0.2), pois sendo $\mu > 0$, temos que $E_\mu(s \star u) < 0$ para todo $(s, u) \in \mathbb{R} \times S_a$ com $s \ll -1$. De fato,

$$\begin{aligned} E_\mu(s \star u) &= e^{2s} E_0(u) - \mu \frac{e^{q\gamma_q s}}{q} |u|_q^q < 0 \\ e^{2s} E_0(u) &< e^{q\gamma_q s} \frac{\mu}{q} |u|_q^q \\ e^{s(2-q\gamma_q)} \frac{q E_0(u)}{\mu |u|_q^q} &< 1, \quad \text{onde } (2 - q\gamma_q) > 0. \end{aligned}$$

Assim, quando $s \rightarrow -\infty$, $s(2 - q\gamma_q) \rightarrow -\infty$, e então $e^{s(2-q\gamma_q)} \frac{q E_0(u)}{\mu |u|_q^q} \rightarrow 0$. Basta

tomar $s < 0$ tal que $e^{s(2-q\gamma_q)} \frac{q E_0(u)}{\mu |u|_q^q} < 1$.

Além disso, observamos que $S_a = \{u \in H^1, |u|_2 = a\}$. Logo, $S_a \cap H^1 = S_a$, e também que $\inf_{S_a \cap H^1} = \inf_{S_a} E_\mu$, pois, se $u \in H^1$, temos que $|u| \in S_a \cap H^1$ e $|\nabla |u||_2 \leq |\nabla u|_2$.

A seguir, apresentaremos e demonstraremos uma proposição fundamental em nosso trabalho, crucial para a prova do Teorema 4.0.1.

Proposição 4.0.1. *Seja $\{u_n\} \subset H^1$ uma sequência tal que $E_\mu(u_n) \rightarrow m(a, \mu)$, e $|u_n|_2 \rightarrow a$. Então $\{u_n\}$ é relativamente compacto em H^1 , a menos de translações, ou seja, existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$, uma subsequência de pontos $\{y_k\} \subset \mathbb{R}^N$, e uma função $\tilde{u} \in S_a \cap H^1$ tal que $u_{n_k}(\cdot + y_k) \rightarrow \tilde{u}$ fortemente em H^1 .*

Aqui, consideramos apenas funções com valores reais. De fato, usando o argumento desenvolvido em [13], se a compacidade relativa é válida em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, então pode-se facilmente deduzir que ela também é válida em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

A prova da Proposição 4.0.1. é uma aplicação do Princípio da Concentração e Compacidade por P.L. Lions [16, 17] e baseia-se na validade da subaditividade estrita para $a \mapsto m(a, \mu)$. No entanto, precisamos do seguinte lema, que será uma ferramenta importante na prova da Proposição 4.0.1.

Lema 4.0.1. *Sejam $a_1, a_2 > 0$ tais que $a_1^2 + a_2^2 = a^2 < \bar{a}_N^2$. Então*

$$m(a, \mu) < m(a_1, \mu) + m(a_2, \mu).$$

Demonstração. Seja $0 < c < \bar{a}_N$, seja $\theta > 1$ tal que $\theta c < \bar{a}_N$, e seja $\{u_n\} \subset S_c$ uma sequência minimizante para $m(c, \mu)$, com $\mu > 0$. Então, sabemos que,

$$\begin{aligned} m(\theta c, \mu) &\leq E_\mu(\theta u_n). \\ m(c, \mu) &\leq E_\mu(u_n). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$E_\mu(\theta u_n) = \frac{1}{2}\theta^2|\nabla u_n|_2^2 - \frac{1}{p}\theta^p|u_n|_p^p - \frac{\mu}{q}\theta^q|u_n|_q^q$$

e também que, $2 < q, p$, e $\theta > 1$. Portanto, $p - 2 > 0$ e $q - 2 > 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} \theta^{q-2} > 1 &\Rightarrow \theta^q > \theta^2 \\ &\quad -\theta^q < -\theta^2 \\ -\frac{\mu}{q}\theta^q|u_n|_q^q &< -\frac{\mu}{q}\theta^2|u_n|_q^q, \end{aligned} \tag{4.0.8}$$

e

$$\begin{aligned} \theta^{p-2} > 1 &\Rightarrow \theta^p > \theta^2 \\ &\quad -\frac{1}{p}\theta^p|u_n|_p^p < -\frac{1}{p}\theta^2|u_n|_p^p \\ \frac{1}{2}\theta^2|\nabla u_n|_2^2 - \frac{1}{p}\theta^p|u_n|_p^p &< \frac{1}{2}\theta^2|\nabla u_n|_2^2 - \frac{1}{p}\theta^2|u_n|_p^p. \end{aligned} \tag{4.0.9}$$

Somando a equação (4.0.8) com (4.0.9), obtemos:

$$\frac{1}{2}\theta^2|\nabla u_n|_2^2 - \frac{1}{p}\theta^p|u_n|_p^p - \frac{\mu}{q}\theta^q|u_n|_q^q < \frac{1}{2}\theta^2|\nabla u_n|_2^2 - \frac{1}{p}\theta^2|u_n|_p^p - \frac{\mu}{q}\theta^2|u_n|_q^q.$$

Então,

$$\begin{aligned} E_\mu(\theta u_n) &< \frac{1}{2}\theta^2|\nabla u_n|_2^2 - \frac{1}{p}\theta^2|u_n|_p^p - \frac{\mu}{q}\theta^2|u_n|_q^q \\ &= \theta^2 \left(\frac{1}{2}|\nabla u_n|_2^2 - \frac{1}{p}|u_n|_p^p - \frac{\mu}{q}|u_n|_q^q \right) \\ &= \theta^2 E_\mu(u_n). \end{aligned}$$

Portanto,

$$m(\theta c, \mu) \leq E_\mu(\theta u_n) < \theta^2 E_\mu(u_n),$$

quando $\theta > 1$ e $q, p > 2$.

Como consequência,

$$m(\theta c, \mu) \leq \theta^2 m(c, \mu). \tag{4.0.10}$$

Afirmção: $m(\theta c, \mu) = \theta^2 m(c, \mu)$ se, e somente se, $|u_n|_p^p + |u_n|_q^q \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$.

De fato, se $m(\theta c, \mu) = \theta^2 m(c, \mu)$, então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} E_\mu(\theta u_n) - \theta^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} E_\mu(u_n) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (E_\mu(\theta u_n) - \theta^2 E_\mu(u_n)) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\theta^2}{2} |\nabla u_n|_2^2 - \frac{\theta^p}{p} |u_n|_p^p - \frac{\mu}{q} \theta^q |u_n|_q^q - \frac{\theta^2}{2} |\nabla u_n|_2^2 + \frac{\theta^2}{p} |u_n|_p^p + \frac{\mu}{q} \theta^2 |u_n|_q^q \right) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-|u_n|_p^p \left(\frac{\theta^p}{p} - \frac{\theta^2}{p} \right) - |u_n|_q^q \left(\frac{\mu}{q} \theta^q - \frac{\mu}{q} \theta^2 \right) \right) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(|u_n|_p^p \left(\frac{\theta^p}{p} - \frac{\theta^2}{p} \right) + |u_n|_q^q \left(\frac{\mu}{q} (\theta^q - \theta^2) \right) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.0.11)$$

Notemos que, como $\frac{\theta^p}{p} - \frac{\theta^2}{p} > 0$ e $\frac{\mu}{q}(\theta^q - \theta^2) > 0$, temos que $|u_n|_p^p + |u_n|_q^q \rightarrow 0$.

Assumamos agora que $|u_n|_p^p + |u_n|_q^q \rightarrow 0$. Suponhamos por contradição que $m(\theta c, \mu) < \theta^2 m(c, \mu)$. Então, analogamente a (4.0.11),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(|u_n|_p^p \left(\frac{\theta^p}{p} - \frac{\theta^2}{p} \right) + |u_n|_q^q \left(\frac{\mu}{q} (\theta^q - \theta^2) \right) \right) < 0.$$

Então,

$$|u_n|_p^p + |u_n|_q^q \leq |u_n|_p^p \left(\frac{\theta^p}{p} - \frac{\theta^2}{p} \right) + |u_n|_q^q \left(\frac{\mu}{q} (\theta^q - \theta^2) \right),$$

sempre que $\frac{\theta^p}{p} - \frac{\theta^2}{p} > 0$ e $\frac{\mu}{q}(\theta^q - \theta^2) > 0$. Assim, tomando o limite:

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|_p^p + |u_n|_q^q) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(|u_n|_p^p \left(\frac{\theta^p}{p} - \frac{\theta^2}{p} \right) + |u_n|_q^q \left(\frac{\mu}{q} (\theta^q - \theta^2) \right) \right) < 0,$$

o que é uma contradição.

Portanto, $m(\theta c, \mu) = \theta^2 m(c, \mu)$ se, e somente se, $|u_n|_p^p + |u_n|_q^q \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Porém, se $m(\theta c, \mu) = \theta^2 m(c, \mu)$, então $|u_n|_p^p + |u_n|_q^q \rightarrow 0$, o que implica que

$$0 > m(c, \mu) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_\mu(u_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} |\nabla u_n|_2^2 \geq 0,$$

o que é uma contradição.

Assim de (4.0.10), temos a seguinte desigualdade:

$$m(\theta c, \mu) < \theta^2 m(c, \mu). \quad (4.0.12)$$

Por outro lado, enunciaremos o seguinte lema, o qual ajuda a concluir nossa demonstração.

Lema 4.0.2. *Seja h uma função com valor real em $[0, \lambda]$ com $\lambda > 0$ satisfazendo*

$$h(\theta \alpha) < \theta h(\alpha) \quad \text{para todo } \alpha \in (0, \lambda), \theta \in (1, \lambda/\alpha].$$

Então, temos que

$$h(\lambda) < h(\alpha) + h(\lambda - \alpha) \quad \text{para todo } \alpha \in (0, \lambda).$$

Demonstração. Ver [16], página 120. ■

Portanto, aplicando nossa desigualdade 4.0.12 no Lema 4.0.2, concluimos que:

$$m(a, \mu) < m(a_1, \mu) + m(a_2, \mu).$$

Assim, já tendo provado o Lema 4.0.1, começaremos a prova da Proposição 4.0.1. ■

Demonstração da Proposição 4.0.1

Seja $a_n \rightarrow a < \bar{a}_N$. A sequência $\{u_n\}$ é limitada em H^1 . Assim, pelo Princípio da Concentração e Compacidade aplicada a $v_n = a/a_n u_n$, existe uma subsequência, ainda denotada por $\{v_n\}$, satisfazendo uma das três possibilidades seguintes:

i) Anulamento:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |v_n|^2 = 0, \quad \forall R > 0.$$

ii) Dicotomia: Existe $a_1 \in (0, a)$ e $\{v_n^1\}, \{v_n^2\}$ limitados em H^1 tal que $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} |v_n - (v_n^1 + v_n^2)|_r &\rightarrow 0 \quad \text{para } 2 \leq r < 2^*; & |v_n^1|_2 &\rightarrow a_1 \quad \text{e} \quad |v_n^2|_2 \rightarrow \sqrt{a^2 - a_1^2}; \\ \text{dist}(\text{supp } v_n^1, \text{supp } v_n^2) &\rightarrow \infty; & \liminf_{n \rightarrow +\infty} [|\nabla v_n|_2^2 - |\nabla v_n^1|_2^2 - |\nabla v_n^2|_2^2] &\geq 0. \end{aligned}$$

iii) Compacidade: Existe $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0 : \quad \int_{B_R(y_k)} v_n^2 \geq a^2 - \varepsilon.$$

Analisamos as três possibilidades.

Anulamento não pode acontecer, pois caso contrário, $u_n \rightarrow 0$ fortemente em $L^r(\mathbb{R}^N)$ para todo $r \in (2, 2^*)$ (Veja o Lema 2.5.2). Então,

$$\begin{aligned} E_\mu(u_n) &= \frac{1}{2} |\nabla u_n|_2^2 - \frac{1}{p} |u_n|_p^p - \frac{\mu}{q} |u_n|_q^q \\ \implies E_\mu(u_n) &= \frac{1}{2} |\nabla u_n|_2^2 + o_n(1) \\ \implies \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\mu(u_n) &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} |\nabla u_n|_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Porém, isso é uma contradição, pois $m(a, \mu) < 0$.

Também, a dicotomia não pode ocorrer. De fato,

$$m(a, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_\mu(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_\mu(v_n). \quad (4.0.13)$$

Por outro lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_\mu(v_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (E_\mu(v_n^1) + E_\mu(v_n^2)). \quad (4.0.14)$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\nabla v_n|_2^2 - |\nabla v_n^1|_2^2 - |\nabla v_n^2|_2^2 \geq -\varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N},$$

isso ocorre porque

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} [|\nabla v_n|_2^2 - |\nabla v_n^1|_2^2 - |\nabla v_n^2|_2^2] \geq 0.$$

Assim também, sabemos que

$$\text{dist}(\text{supp } v_n^1, \text{supp } v_n^2) \rightarrow \infty,$$

o que significa que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n^1| + |\nabla v_n^2|)^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n^1|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n^2|^2 \\ \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^1 + v_n^2|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^1|^p + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^2|^p. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} |\nabla v_n|_2^2 &\geq |\nabla v_n^1|_2^2 + |\nabla v_n^2|_2^2 - \varepsilon. \\ \implies |\nabla v_n|_2^2 + \varepsilon &\geq |\nabla v_n^1|_2^2 + |\nabla v_n^2|_2^2 \\ \implies \frac{1}{2} |\nabla v_n|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} &\geq \frac{1}{2} (|\nabla v_n^1|_2 + |\nabla v_n^2|_2)^2 \\ \implies \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{\varepsilon}{2} &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n^1| + |\nabla v_n^2|)^2. \end{aligned}$$

Portanto, como ε é arbitrário, temos

$$\frac{1}{2} |\nabla v_n|_2^2 \geq \frac{1}{2} (|\nabla v_n^1|_2^2 + |\nabla v_n^2|_2^2). \quad (4.0.15)$$

Logo, como vale

$$|v_n - (v_n^1 + v_n^2)|_p \rightarrow 0,$$

então, $|v_n - (v_n^1 + v_n^2)|_p < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Mas,

$$||v_n|_p - |v_n^1 + v_n^2|_p| \leq |v_n - (v_n^1 + v_n^2)|_p < \varepsilon \implies ||v_n|_p - |v_n^1 + v_n^2|_p| < \varepsilon.$$

Assim,

$$-\varepsilon < |v_n|_p - |v_n^1 + v_n^2|_p < \varepsilon.$$

Então,

$$\begin{aligned} |v_n|_p &< \varepsilon + |v_n^1 + v_n^2|_p \\ |v_n|_p^p &< (\varepsilon + |v_n^1 + v_n^2|_p)^p. \end{aligned}$$

Vamos definir a função $h(\varepsilon) = (\varepsilon + |v_n^1 + v_n^2|_p)^p - |v_n|_p^p > 0$, $\forall \varepsilon > 0$. É fácil ver que h é uma função contínua em 0.

Logo,

$$h(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon) \geq 0 \implies |v_n^1 + v_n^2|_p^p - |v_n|_p^p \geq 0.$$

Portanto,

$$|v_n^1 + v_n^2|_p^p \geq |v_n|_p^p. \quad (4.0.16)$$

Note que, o mesmo acontece para a norma q ,

$$|v_n^1 + v_n^2|_q^q \geq |v_n|_q^q. \quad (4.0.17)$$

Assim, a partir das equações (4.0.16) e (4.0.17), temos que:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p}|v_n|_p^p &\geq -\frac{1}{p}(|v_n^1 + v_n^2|_p^p) \\ -\frac{\mu}{q}|v_n|_q^q &\geq -\frac{\mu}{q}(|v_n^1 + v_n^2|_q^q). \end{aligned}$$

Então,

$$\Rightarrow -\frac{1}{p}|v_n|_p^p - \frac{\mu}{q}|v_n|_q^q \geq -\frac{1}{p}(|v_n^1 + v_n^2|_p^p) - \frac{\mu}{q}(|v_n^1 + v_n^2|_q^q). \quad (4.0.18)$$

Somando a equação (4.0.15) com (4.0.18), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\nabla v_n|_2^2 - \frac{1}{p}|v_n|_p^p - \frac{\mu}{q}|v_n|_q^q &\geq \frac{1}{2}(|\nabla v_n^1|_2^2 + |\nabla v_n^2|_2^2) \\ &\quad - \frac{1}{p}(|v_n^1 + v_n^2|_p^p) - \frac{\mu}{q}(|v_n^1 + v_n^2|_q^q). \end{aligned}$$

Isso implica que,

$$\begin{aligned} E_\mu(v_n) &\geq E_\mu(v_n^1) + E_\mu(v_n^2), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} E_\mu(v_n) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (E_\mu(v_n^1) + E_\mu(v_n^2)). \end{aligned}$$

Por outro lado, observe que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (E_\mu(v_n^1) + E_\mu(v_n^2)) \geq m(a_1, \mu) + m(a_2, \mu). \quad (4.0.19)$$

Portanto, de (4.0.13), (4.0.14) e (4.0.19), temos que:

$$m(a, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_\mu(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_\mu(v_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (E_\mu(v_n^1) + E_\mu(v_n^2)) \geq m(a_1, \mu) + m(a_2, \mu),$$

o que é uma contradição com o Lema 4.0.1.

Assim, ocorre a compacidade, e a sequência de translações $\tilde{v}_n := v_n(\cdot + y_n)$ converge fortemente em $L^2(\mathbb{R}^N)$ (e fracamente em H^1) para um limite $\tilde{u} \in S_a \cap H^1$. Dado que $a_n \rightarrow a$ e $\{u_n\}$ é limitado, deduzimos que, de fato, $\tilde{u}_n := u_n(\cdot + y_n)$ converge fortemente em $L^2(\mathbb{R}^N)$ para $\tilde{u}$.

Se $r \in (2, 2^*)$, conforme estabelecido nas Proposições 2.1.1 e 2.1.2, e considerando também a Observação 2.2.1, temos que,

$$|\tilde{u}_n - \tilde{u}|_r^r \leq |\tilde{u}_n - \tilde{u}|_2^{2(1-\alpha)} |\tilde{u}_n - \tilde{u}|_{2^*}^{2^*\alpha} \leq C |\tilde{u}_n - \tilde{u}|_2^{2(1-\alpha)} \rightarrow 0,$$

onde $\alpha \in (0, 1)$. Dessa forma, obtemos:

$$m(a, \mu) \leq E_\mu(\tilde{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\mu(\tilde{u}_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\mu(u_n) = m(a, \mu).$$

Finalmente, concluímos que as desigualdades anteriores são, na verdade, igualdades. Isso demonstra a compacidade relativa de qualquer sequência minimizante para $m(a, \mu)$ de funções com valores reais, a menos de translações.

Conduzimos uma análise detalhada, passo a passo, na demonstração do teorema em questão, explorando cuidadosamente as propriedades fundamentais e as relações críticas envolvidas. Cada argumento foi meticulosamente construído, e cada etapa foi justificada de forma rigorosa. Agora, chegamos a conclusão da prova. Neste ponto, consolidamos os resultados obtidos, revelando de maneira inequívoca a validade da afirmação principal do Teorema 4.0.1.

Conclusão da demonstração do Teorema 4.0.1.

A Proposição 4.0.1 implica imediatamente na existência de uma função minimizante $\tilde{u}$ para E_μ em $S_a \cap H^1$. Conforme mencionado anteriormente, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{u} \geq 0$ e que $\tilde{u}$ é decrescente e radialmente simétrica. Sendo um ponto crítico de E_μ em $S_a \cap H^1$, $\tilde{u}$ é uma solução real da equação (4.0.1) para $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ e, por regularidade, pertence à classe C^2 . Pelo princípio do máximo forte, temos $\tilde{u} > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Finalmente, multiplicando a equação (4.0.1) por $\tilde{u}$ e integrando, obtemos:

$$\tilde{\lambda}a^2 = |\nabla \tilde{u}|_2^2 - \mu|\tilde{u}|_q^q - |\tilde{u}|_p^p. \quad (4.0.20)$$

Lembrando que,

$$\begin{aligned} E_\mu(\tilde{u}) &= \frac{1}{2}|\nabla \tilde{u}|_2^2 - \frac{1}{p}|\tilde{u}|_p^p - \frac{\mu}{q}|\tilde{u}|_q^q \\ 2E_\mu(\tilde{u}) &= |\nabla \tilde{u}|_2^2 - \frac{2}{p}|\tilde{u}|_p^p - \frac{2\mu}{q}|\tilde{u}|_q^q \\ |\nabla \tilde{u}|_2^2 &= 2E_\mu(\tilde{u}) + \frac{2}{p}|\tilde{u}|_p^p + \frac{2\mu}{q}|\tilde{u}|_q^q, \end{aligned}$$

substituímos em (4.0.20), resultando em

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}a^2 &= 2E_\mu(\tilde{u}) + \frac{2}{p}|\tilde{u}|_p^p + \frac{2\mu}{q}|\tilde{u}|_q^q - \mu|\tilde{u}|_q^q - |\tilde{u}|_p^p \\ &= 2m(a, \mu) + \mu \left(\frac{2}{q} - 1 \right) |\tilde{u}|_q^q + \left(\frac{2}{p} - 1 \right) |\tilde{u}|_p^p, \end{aligned}$$

onde $2 < q < p$, então $\left(\frac{2}{q} - 1 \right) < 0$ e $\left(\frac{2}{p} - 1 \right) < 0$, o que demonstra que $\tilde{\lambda} < 0$. ■

Estudo do caso L^2 –supercrítico

Neste capítulo, vamos estudar quando o expoente p em (4.0.1) é L^2 -supercrítico. A compacidade de uma sequência de Palais-Smale (muitas vezes escreveremos a sequência (PS) para abreviar) é uma questão não trivial. Também vamos analisar a convergência de sequências PS especiais, satisfazendo condições adicionais adequadas, seguindo as ideias introduzidas pela primeira vez por L. Jeanjean em [14]. Como observação preliminar, notamos que, como E_μ é invariante por rotações, os pontos críticos (respectivamente, sequências PS) de E_μ restritos em $S_{a,r} = H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N) \cap S_a$ são pontos críticos (respectivamente, sequências PS) de E_μ em S_a . Por fim, vamos abordar o caso L^2 -supercrítico com perturbação subcrítica.

5.1 Conjunto de Pohozaev

Nas demonstrações dos seguintes teoremas, o conjunto de Pohozaev

$$\mathcal{P}_{a,\mu} = \{u \in S_a : P_\mu(u) = 0\}, \quad (5.1.1)$$

desempenhará um papel especial, onde $P_\mu(u)$ é definido como:

$$P_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \gamma_p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \mu \gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q. \quad (5.1.2)$$

Observação 5.1.1. *É bem conhecido que qualquer ponto crítico de $E_\mu|_{S_a}$ permanece em $\mathcal{P}_{a,\mu}$, como consequência da identidade de Pohozaev (ver, por exemplo, [14], Lema 2.7).*

As propriedades de $\mathcal{P}_{a,\mu}$ estão intimamente relacionadas à estrutura minimax de $E_\mu|_{S_a}$, e em particular ao comportamento de E_μ com respeito às dilatações que preservam a norma L^2 . Para ser mais preciso, para $u \in S_a$ e $s \in \mathbb{R}$, seja:

$$(s \star u)(x) := e^{\frac{N}{2}s} u(e^s x), \quad \text{para quase todo } x \in \mathbb{R}^N. \quad (5.1.3)$$

Segue que $s \star u \in S_a$, e portanto é natural estudar a aplicação fibração:

$$\Psi_u^\mu(s) := E_\mu(s \star u) = \frac{e^{2s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \frac{e^{\gamma_p p s}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \mu \frac{e^{q \gamma_q s}}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q. \quad (5.1.4)$$

Veremos que os pontos críticos de Ψ_u^μ permitem projetar uma função em $\mathcal{P}_{a,\mu}$. Assim, as propriedades de monotonicidade e convexidade de Ψ_u^μ afetam fortemente a estrutura

de $\mathcal{P}_{a,\mu}$ (e consequentemente a geometria de $E_\mu|_{S_a}$), e também tem um forte impacto nas propriedades da equação dependente do tempo (3.0.4).

Nessa direção, consideremos a decomposição de $\mathcal{P}_{a,\mu}$ na união disjunta $\mathcal{P}_{a,\mu} = \mathcal{P}_+^{a,\mu} \cup \mathcal{P}_0^{a,\mu} \cup \mathcal{P}_-^{a,\mu}$, onde:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_+^{a,\mu} &:= \left\{ u \in \mathcal{P}_{a,\mu} : 2|\nabla u|_2^2 > \mu q \gamma_q^2 |u|_q^q + p \gamma_p^2 |u|_p^p \right\} = \{u \in \mathcal{P}_{a,\mu} : (\Psi_u^\mu)''(0) > 0\} \\ \mathcal{P}_0^{a,\mu} &:= \left\{ u \in \mathcal{P}_{a,\mu} : 2|\nabla u|_2^2 < \mu q \gamma_q^2 |u|_q^q + p \gamma_p^2 |u|_p^p \right\} = \{u \in \mathcal{P}_{a,\mu} : (\Psi_u^\mu)''(0) < 0\} \\ \mathcal{P}_-^{a,\mu} &:= \left\{ u \in \mathcal{P}_{a,\mu} : 2|\nabla u|_2^2 = \mu q \gamma_q^2 |u|_q^q + p \gamma_p^2 |u|_p^p \right\} = \{u \in \mathcal{P}_{a,\mu} : (\Psi_u^\mu)''(0) = 0\}.\end{aligned}\quad (5.1.5)$$

5.2 Comportamento de E_μ em relação ao reescalamento

O comportamento de E_μ em relação às dilatações desempenha um papel crucial na prova de todos os seguintes resultados. Consideramos, para $u \in S_a$ e $s \in \mathbb{R}$, a fibra Ψ_u^μ introduzida em (5.1.4). Temos:

$$\begin{aligned}(\Psi_u^\mu)'(s) &= e^{2s} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \gamma_p e^{p\gamma_p s} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \mu \gamma_q e^{q\gamma_q s} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(s \star u)|^2 - \gamma_p \int_{\mathbb{R}^N} |s \star u|^p - \mu \gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |s \star u|^q = P_\mu(s \star u),\end{aligned}\quad (5.2.1)$$

onde P_μ é definida por (5.1.2). Portanto, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.2.1. *Seja $u \in S_a$. Então, $s \in \mathbb{R}$ é um ponto crítico para Ψ_u^μ se e somente se $s \star u \in \mathcal{P}_{a,\mu}$.*

Em particular, $u \in \mathcal{P}_{a,\mu}$ se e somente se 0 é um ponto crítico de Ψ_u^μ . Adiante, utilizaremos o fato de que a aplicação

$$(s, u) \in \mathbb{R} \times H^1 \mapsto (s \star u) \in H^1 \quad \text{é contínua,} \quad (5.2.2)$$

conforme [5], Lema 3.5.

5.3 Convergência de sequências Palais - Smale em problemas de energia supercríticos

Nesta seção, vamos provar o seguinte lema, o qual estabelece condições cruciais para a convergência de sequências Palais-Smale em problemas supercríticos.

Lema 5.3.1. *Seja $N \geq 2$, e $2 < q \leq 2 + 4/N < p < 2^*$. Seja $\{u_n\} \subset S_{a,r}$ uma sequência de (PS) para $E_\mu|_{S_a}$ no nível $c \neq 0$, e suponha ainda que:*

i) $P_\mu(u_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

ii) Ou $\mu > 0$ (sem qualquer suposição adicional), ou $\mu < 0$ e

$$\left(|\mu| a^{q(1-\gamma_q)} \right)^{p\gamma_p-2} a^{p(1-\gamma_p)(2-q\gamma_q)} < \left(\frac{1-\gamma_p}{C_{N,q}^q(\gamma_p-\gamma_q)} \right)^{p\gamma_p-2} \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p} \right)^{2-q\gamma_q} \quad (5.3.1)$$

é válido.

Então a menos de subsequência $u_n \rightarrow u$ fortemente em H^1 , onde $u \in S_a$ é uma solução radial de valor real para (4.0.1) associada a algum $\lambda < 0$.

Demonstração. A prova é dividida em quatro etapas principais.

Passo 1. Limitação de $\{u_n\}$ em H^1 .

Consideramos inicialmente o caso $q = 2 + 4/N = \bar{p} < p$. Lembramos que, com essa escolha, $\gamma_{\bar{p}} = 2/\bar{p}$, e como

$$P_\mu(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 - \gamma_p \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p - \mu \gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \longrightarrow 0,$$

temos que

$$\begin{aligned} |\nabla u_n|_2^2 &= \mu \gamma_q |u_n|_q^q + \gamma_p |u_n|_p^p + o_n(1) \\ &= \mu \frac{2}{\bar{p}} |u_n|_{\bar{p}}^{\bar{p}} + \gamma_p |u_n|_p^p + o_n(1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

pois,

$$q = \bar{p} \Rightarrow \gamma_q q = \gamma_{\bar{p}} \bar{p} = \frac{2}{\bar{p}} \cdot \bar{p} = 2 \Rightarrow \gamma_q = \frac{2}{\bar{p}} = \frac{2}{q}.$$

Suponhamos, por contradição, que $|\nabla u_n|_2 \rightarrow +\infty$. Assim, pela equação (5.3.2), deduzimos que

$$\begin{aligned} E_\mu(u_n) &= \frac{1}{2} |\nabla u_n|_2^2 - \frac{1}{p} |u_n|_p^p - \frac{\mu}{q} |u_n|_q^q \\ &= \frac{1}{2} \left(\mu \frac{2}{\bar{p}} |u_n|_{\bar{p}}^{\bar{p}} + \gamma_p |u_n|_p^p + o(1) \right) - \frac{1}{p} |u_n|_p^p - \frac{\mu}{q} |u_n|_{\bar{q}}^{\bar{q}} \\ &= \frac{\gamma_p}{2} |u_n|_p^p - \frac{1}{p} |u_n|_p^p + o_n(1) \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{\gamma_p}{2} - 1 \right) |u_n|_p^p + o_n(1) \\ &\leq c + 1, \end{aligned}$$

e $\mu \frac{2}{\bar{p}} |u_n|_{\bar{p}}^{\bar{p}} + \gamma_p |u_n|_p^p \rightarrow +\infty$, com $\gamma_p p > 2$ quando $p > \bar{p}$. Isso gera imediatamente uma contradição para $\mu < 0$, pois como $|\nabla u_n|_2 \rightarrow +\infty$, e além disso, $\frac{\gamma_p p}{2} - 1 > 0$, temos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} |u_n|_p^p + o(1) &\leq \frac{c+1}{\frac{\gamma_p p}{2} - 1} \\ |u_n|_p^p &\leq \frac{p(c+1)}{\frac{\gamma_p p}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Então, $\{|u_n|_p^p\}$ é limitado.

Assim,

$$\mu \frac{2}{\bar{p}} |u_n|_{\bar{p}}^{\bar{p}} + \underbrace{\gamma_p |u_n|_p^p}_{\text{limitado}} \rightarrow +\infty,$$

e portanto

$$\mu \frac{2}{\bar{p}} |u_n|_{\bar{p}}^{\bar{p}} \rightarrow +\infty.$$

Como $\mu < 0$, temos uma contradição.

Se, ao invés disso, $\mu > 0$, inferimos que $\{|u_n|_p\}$ é limitado, com $|u_n|_{\bar{p}} \rightarrow +\infty$.

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder, existe $\alpha \in (0, 1)$ (dependendo de p e N) tal que,

$$\begin{aligned} |u_n|_{\bar{p}} &\leq |u_n|_p^\alpha |u_n|_2^{1-\alpha} \\ |u_n|_{\bar{p}} &\leq c, \end{aligned}$$

o que gera a contradição desejada também para $\mu > 0$.

Seja agora $2 < q < \bar{p} < p$. Como $P_\mu(u_n) \rightarrow 0$, observamos que

$$|u_n|_p^p = \frac{1}{\gamma_p} |\nabla u_n|_2^2 - \mu \frac{\gamma_q}{\gamma_p} |u_n|_q^q + o_n(1).$$

Então,

$$\begin{aligned} E_\mu(u_n) &= \frac{1}{2} |\nabla u_n|_2^2 - \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\gamma_p} |\nabla u_n|_2^2 - \frac{\mu \gamma_q}{\gamma_p} |u_n|_q^q + o_n(1) \right) - \frac{\mu}{q} |u_n|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma_p p} \right) |\nabla u_n|_2^2 - \frac{\mu}{q} \left(1 - \frac{\gamma_q q}{\gamma_p p} \right) |u_n|_q^q + o_n(1), \end{aligned}$$

e ambos os coeficientes dentro dos parênteses são positivos. De fato,

$$\gamma_p p > 2 \Rightarrow \frac{1}{\gamma_p p} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma_p p} > 0,$$

e

$$q < \bar{p} \Leftrightarrow \gamma_q q < 2 \Rightarrow \gamma_q q < 2 < \gamma_p p \Rightarrow \gamma_q q < \gamma_p p \Rightarrow 0 < 1 - \frac{\gamma_q q}{\gamma_p p}.$$

Assim, se $\mu < 0$, deduzimos imediatamente que $\{u_n\}$ é limitado, enquanto se $\mu > 0$, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, temos que

$$c + 1 \geq E_\mu(u_n) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma_p p} \right) |\nabla u_n|_2^2 - \frac{\mu}{q} \left(1 - \frac{\gamma_q q}{\gamma_p p} \right) C_{N,q}^q a^{(1-\gamma_q)q} |\nabla u_n|_2^{\gamma_q q},$$

o que implica que

$$|\nabla u_n|_2^2 \leq C \mu a^{(1-\gamma_q)q} |\nabla u_n|_2^{\gamma_q q} + C.$$

Como $\gamma_q q < 2$, a limitação de $\{u_n\}$ segue também neste caso.

Passo 2.

Como $N \geq 2$, a imersão $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ é compacta para $r \in (2, 2^*)$, e deduzimos que existe $u \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em H^1 , $u_n \rightarrow u$ fortemente em $L^r(\mathbb{R}^N)$ para $r \in (2, 2^*)$, e em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Agora, como $\{u_n\}$ é uma sequência limitada de Palais-Smale de $E_\mu|_{S_a}$, pela regra dos multiplicadores de Lagrange existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\text{Re} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla \bar{\varphi} - \lambda_n u_n \bar{\varphi} - \mu |u_n|^{q-2} u_n \bar{\varphi} - |u_n|^{p-2} u_n \bar{\varphi} = o_n(1), \quad (5.3.3)$$

para todo $\varphi \in H$, onde $o_n(1) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, e Re denota a parte real. A escolha $\varphi = u_n$ fornece

$$\lambda_n a^2 = |\nabla u_n|_2^2 - \mu |u_n|_q^q - |u_n|_p^p + o_n(1), \quad (5.3.4)$$

e a limitação de $\{u_n\}$ em $H^1 \cap L^p \cap L^q$ implica que $\{\lambda_n\}$ é limitado. Assim, a menos de uma subsequência, $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Passo 3. $\lambda < 0$.

Consideremos separadamente os casos $\mu > 0$ e $\mu < 0$, começando pelo primeiro. Lembrando que $P_\mu(u_n) \rightarrow 0$ e substituindo (5.3.2) em (5.3.4), obtemos

$$\lambda_n a^2 = \mu(\gamma_q - 1)|u_n|_q^q + (\gamma_p - 1)|u_n|_p^p + o_n(1). \quad (5.3.5)$$

• Como $\mu > 0$, $0 < \gamma_q, \gamma_p < 1$, deduzimos que $\lambda \leq 0$, com igualdade apenas se $u \equiv 0$. No entanto, u não pode ser identicamente nulo, já que $E_\mu(u_n) \rightarrow c \neq 0$. De fato, usando novamente o fato de que $P_\mu(u_n) \rightarrow 0$, se tivéssemos $u_n \rightarrow 0$ em H^1 , encontraríamos uma convergência forte em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e $L^q(\mathbb{R}^N)$, o que levaria a

$$E_\mu(u_n) = \frac{\mu}{q} \left(\frac{\gamma_q q}{2} - 1 \right) |u_n|_q^q + \frac{1}{p} \left(\frac{\gamma_p p}{2} - 1 \right) |u_n|_p^p + o_n(1) \rightarrow 0,$$

o que é uma contradição.

Retornando a equação (5.3.5), demonstramos que, a menos de uma subsequência, $\lambda_n \rightarrow \lambda < 0$.

• O caso $\mu < 0$ é mais complicado. Como $P_\mu(u_n) \rightarrow 0$, temos que

$$|\nabla u_n|_2^2 = \mu \gamma_q |u_n|_q^q + \gamma_p |u_n|_p^p + o_n(1) \leq \gamma_p |u_n|_p^p + o_n(1) \implies |\nabla u|_2^2 \leq \gamma_p |u|_p^p. \quad (5.3.6)$$

Então, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg,

$$|\nabla u|_2^2 \leq \gamma_p |u|_p^p \leq \gamma_p C_{N,p}^p |u|_2^{p(1-\gamma_p)} |\nabla u|_2^{p\gamma_p}.$$

Como no caso $\mu > 0$, temos $u \not\equiv 0$, pois caso contrário $E_\mu(u_n) \rightarrow 0$ o que estaria em contradição com as hipóteses. Portanto, usando o fato que $|u|_2 \leq a$ pela semicontinuidade inferiormente fraca, deduzimos que

$$|\nabla u|_2 \geq \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p a^{p(1-\gamma_p)}} \right)^{\frac{1}{p\gamma_p-2}}. \quad (5.3.7)$$

Agora, como $\lambda_n \rightarrow \lambda$ e $u_n \rightarrow u \not\equiv 0$ fracamente em $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, e fortemente em $L^p \cap L^q$, a equação (5.3.3) implica que u é uma solução radial fraca (e real) para

$$-\Delta u = \lambda u + \mu |u|^{q-2} u + |u|^{p-2} u \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (5.3.8)$$

Multiplicando por u e integrando em (5.3.8), temos:

$$|\nabla u|_2^2 = \lambda |u|_2^2 + \mu |u|_q^q + |u|_p^p. \quad (5.3.9)$$

Pela identidade de Pohozaev, inferimos que $P_\mu(u) = 0$, ou seja,

$$\gamma_p |u|_p^p = |\nabla u|_2^2 - \mu \gamma_q |u|_q^q. \quad (5.3.10)$$

Portanto, de (5.3.9) e (5.3.10), obtemos que:

$$\lambda |u|_2^2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma_p}\right) |\nabla u|_2^2 + \mu \left(\frac{\gamma_q}{\gamma_p} - 1\right) |u|_q^q,$$

onde $1 - 1/\gamma_p < 0$ desde $\gamma_p < 1$, enquanto $\mu(\gamma_q/\gamma_p - 1) > 0$ desde $\mu < 0$ e $\gamma_q < \gamma_p$. Usando novamente a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, o fato de que $|u|_2 \leq a$, e a estimativa (5.3.7), inferimos que:

$$\begin{aligned} \lambda |u|_2^2 &\leq \left(1 - \frac{1}{\gamma_p}\right) |\nabla u|_2^2 + \mu \left(\frac{\gamma_q}{\gamma_p} - 1\right) C_{N,q}^q |u|_2^{q(1-\gamma_q)} |\nabla u|_2^{q\gamma_q} \\ &\leq |\nabla u|_2^{q\gamma_q} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_p}\right) |\nabla u|_2^{2-q\gamma_q} + \left(1 - \frac{\gamma_q}{\gamma_p}\right) C_{N,q}^q |\mu| a^{q(1-\gamma_q)} \right] \\ &\leq |\nabla u|_2^{q\gamma_q} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_p}\right) \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p a^{p(1-\gamma_p)}}\right)^{\frac{2-q\gamma_q}{p\gamma_p-2}} + \left(1 - \frac{\gamma_q}{\gamma_p}\right) C_{N,q}^q |\mu| a^{q(1-\gamma_q)} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Agora, vamos verificar que o lado direito é estritamente negativo se a condição (5.3.1) for satisfeita.

De fato,

$$\begin{aligned} &(|\mu| a^{q(1-\gamma_q)})^{p\gamma_p-2} a^{p(1-\gamma_p)(2-q\gamma_q)} < \left(\frac{1-\gamma_p}{C_{N,q}^q(\gamma_p-\gamma_q)}\right)^{p\gamma_p-2} \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p}\right)^{2-q\gamma_q} \\ \implies &(|\mu| a^{q(1-\gamma_q)})^{p\gamma_p-2} (a^{p(1-\gamma_p)})^{(2-q\gamma_q)} < \left(\frac{1-\gamma_p}{C_{N,q}^q(\gamma_p-\gamma_q)}\right)^{p\gamma_p-2} \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p}\right)^{2-q\gamma_q} \\ \implies &(|\mu| a^{q(1-\gamma_q)})^{p\gamma_p-2} < \left(\frac{1-\gamma_p}{C_{N,q}^q(\gamma_p-\gamma_q)}\right)^{p\gamma_p-2} \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p a^{p(1-\gamma_p)}}\right)^{2-q\gamma_q} \\ \implies &|\mu| a^{q(1-\gamma_q)} < \left(\frac{1-\gamma_p}{C_{N,q}^q(\gamma_p-\gamma_q)}\right) \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p a^{p(1-\gamma_p)}}\right)^{\frac{2-q\gamma_q}{p\gamma_p-2}} \\ \implies &C_{N,q}^q |\mu| a^{q(1-\gamma_q)} < \left(\frac{1-\gamma_p}{\gamma_p-\gamma_q}\right) \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p a^{p(1-\gamma_p)}}\right)^{\frac{2-q\gamma_q}{p\gamma_p-2}} \\ \implies &\left(\frac{\gamma_p-\gamma_q}{\gamma_p}\right) C_{N,q}^q |\mu| a^{q(1-\gamma_q)} < \left(\frac{1-\gamma_p}{\gamma_p}\right) \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p a^{p(1-\gamma_p)}}\right)^{\frac{2-q\gamma_q}{p\gamma_p-2}} \\ \implies &\left(1 - \frac{\gamma_q}{\gamma_p}\right) C_{N,q}^q |\mu| a^{q(1-\gamma_q)} < - \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_p}\right) \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p a^{p(1-\gamma_p)}}\right)^{\frac{2-q\gamma_q}{p\gamma_p-2}} \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_p}\right) \left(\frac{1}{\gamma_p C_{N,p}^p a^{p(1-\gamma_p)}}\right)^{\frac{2-q\gamma_q}{p\gamma_p-2}} + \left(1 - \frac{\gamma_q}{\gamma_p}\right) C_{N,q}^q |\mu| a^{q(1-\gamma_q)} \right] < 0. \quad (5.3.12)$$

Combinando as equações (5.3.11) e (5.3.12), concluímos que

$$\lambda|u|_2^2 < 0.$$

Portanto, tem-se que $\lambda < 0$, como desejávamos demonstrar.

Passo 4. Conclusão.

Pela convergência fraca, a equação (5.3.3) implica que

$$E'_\mu(u)\varphi - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u\bar{\varphi} = 0, \quad (5.3.13)$$

para cada $\varphi \in H$.

Agora, escolhendo $\varphi = u_n - u$ em (5.3.3) e (5.3.13), e subtraindo, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u) - \int_{\mathbb{R}^N} \mu |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u) - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u) - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla (u_n - u) \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |u|^{q-2} u (u_n - u) + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u (u_n - u) - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^2 = o_n(1). \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Isso implica que

$$(E'_\mu(u_n) - E'_\mu(u)) [u_n - u] - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^2 = o_n(1).$$

Usando a convergência forte em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e $L^q(\mathbb{R}^N)$ de $\{u_n\}$ e aplicando em (5.3.14). Podemos afirmar que:

Afirmção: $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q-1} |u_n - u| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

De fato, observe que, pela Proposição 2.1.1 e devido à convergência forte em $L^q(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q-1} |u_n - u| & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq |u_n|_q^{q-1} |u_n - u|_q \\ & \leq c |u_n - u|_q \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Analogamente, podemos demonstrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-1} |u_n - u| \rightarrow 0.$$

Portanto, a partir de (5.3.14) e da Afirmção anterior, inferimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u)|^2 - \lambda |u_n - u|^2 = o_n(1),$$

e, como $\lambda < 0$, concluímos a convergência forte $u_n \rightarrow u$ em H^1 . ■

Para lidar com a dimensão $N = 1$, precisamos de uma variante do Lema 5.3.1:

Lema 5.3.2. *Seja $N \geq 1$, e $2 < q \leq \bar{p} < p < +\infty$. Seja $\{u_n\} \subset S_a$ uma sequência de Palais - Smale para $E_\mu|_{S_a}$ no nível $c \neq 0$, e suponha ainda que:*

- i) $P_\mu(u_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.
- ii) Existe $\{v_n\} \subset S_{a,r}$, com v_n radialmente decrescente, tal que $\|v_n - u_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.
- iii) Ou $\mu > 0$ (sem nenhuma suposição adicional), ou $\mu < 0$ e (5.3.1) é válida.

Então a menos de subsequência $u_n \rightarrow u$ fortemente em H^1 , onde $u \in S_a$ é uma solução radial de valor real para (4.0.1) associada a algum $\lambda < 0$.

Pode-se facilmente modificar a prova desenvolvida em dimensão $N \geq 2$, observando que, mesmo que $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R})$ não se inclua compactamente em $L^r(\mathbb{R})$, a compacidade vale para sequências limitadas de funções radialmente decrescentes (veja, por exemplo, [8], Proposição 1.7.1).

5.4 Caso L^2 –supercrítico com perturbação subcrítica

Nesta seção, vamos estudar o caso em que $2 < q < \bar{p} < p < 2^*$ e $a, \mu > 0$. Suponhamos também que:

$$(\mu a^{(1-\gamma_q)q})^{\gamma_p p - 2} (a^{(1-\gamma_p p)})^{2-\gamma_q q} < \left(\frac{p(2-\gamma_q q)}{2C_{N,p}^p(\gamma_p p - \gamma_q q)} \right)^{2-\gamma_q q} \left(\frac{q(\gamma_p p - 2)}{2C_{N,q}^q(\gamma_p p - \gamma_q q)} \right)^{\gamma_p p - 2}. \quad (5.4.1)$$

Vamos provar o seguinte teorema:

Teorema 5.4.1. *Seja $N \geq 1$, $2 < q < \bar{p} < p < 2^*$, e seja $a, \mu > 0$, satisfazendo (5.4.1). Então, o seguinte é válido:*

- i) A função $E_\mu|_{S_a}$ possui um ponto crítico $\tilde{u}$ no nível negativo $m(a, \mu) < 0$, o qual é um mínimo local interior de E_μ no conjunto

$$A_k := \{u \in S_a : |\nabla u|_2^2 < k\},$$

para um $k > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, $\tilde{u}$ é um estado fundamental de (4.0.1) em S_a , e qualquer outra solução de energia mínima é um mínimo local de E_μ em A_k .

- ii) A função $E_\mu|_{S_a}$ possui um segundo ponto crítico $\hat{u}$ do tipo passo da montanha no nível $\sigma(a, \mu) > m(a, \mu)$.
- iii) Ambos $\tilde{u}$ e $\hat{u}$ são funções positivas com valores reais em $\mathbb{R}^N$, são radialmente simétricos e resolvem (4.0.1) para $\tilde{\lambda}, \hat{\lambda} < 0$ adequado. Além disso, $\tilde{u}$ também é radialmente decrescente.

Denominando por $S_{a,r}$ o subconjunto das funções radialmente simétricas em S_a , temos:

Proposição 5.4.1. *Sob as hipóteses do Teorema 5.4.1, temos $\mathcal{P}_0^{a,\mu} = \emptyset$, ambos $\mathcal{P}_+^{a,\mu}$ e $\mathcal{P}_-^{a,\mu}$ não são vazios, e*

$$m(a, \mu) = \min_{\mathcal{P}_+^{a,\mu}} E_\mu \quad \text{enquanto} \quad \sigma(a, \mu) = \min_{\mathcal{P}_-^{a,\mu} \cap S_{a,r}} E_\mu.$$

Observação 5.4.1. Da proposição anterior, é natural esperar que $\hat{u}$ seja de fato um minimizante em $\mathcal{P}_-^{a,\mu}$, e não apenas em $S_{a,r} \cap \mathcal{P}_-^{a,\mu}$.

Observação 5.4.2. Como a e μ são fixos, omitimos a dependência de E_μ , S_a , $S_{a,r}$, P_μ , $\mathcal{P}_{a,\mu}$, Ψ_u^μ , sobre essas quantidades, escrevendo simplesmente E , S , S_r , P , $\mathcal{P}$, Ψ_u .

Consideremos o funcional restrito $E|_S$. Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$E(u) \geq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \mu \frac{C_{N,q}^q}{q} a^{(1-\gamma_q)q} |\nabla u|_2^{\gamma_q q} - \frac{C_{N,p}^p}{p} a^{(1-\gamma_p)p} |\nabla u|_2^{\gamma_p p}, \quad (5.4.2)$$

para todo $u \in S$. Portanto, para entender a geometria do funcional $E|_S$ é útil considerar a função $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(t) := \frac{1}{2}t^2 - \mu \frac{C_{N,q}^q}{q} a^{(1-\gamma_q)q} t^{\gamma_q q} - \frac{C_{N,p}^p}{p} a^{(1-\gamma_p)p} t^{\gamma_p p}.$$

Como $\mu > 0$ e $\gamma_q q < 2 < \gamma_p p$, temos que $h(0^+) = 0^-$ e $h(+\infty) = -\infty$. O papel da hipótese (5.4.1) é esclarecida pelo seguinte lema.

Lema 5.4.1. *Sob a desigualdade (5.4.1), a função h possui um mínimo local estrito em um nível negativo e um máximo global estrito em um nível positivo. Além disso, existem $0 < R_0 < R_1$, ambos dependentes de a e μ , tal que $h(R_0) = 0 = h(R_1)$ e $h(t) > 0$ se e somente se $t \in (R_0, R_1)$.*

Demonstração. Para $t > 0$, temos $h(t) > 0$. Assim

$$h(t) = \frac{1}{2}t^2 - \mu \frac{C_{N,q}^q}{q} a^{(1-\gamma_q)q} t^{\gamma_q q} - \frac{C_{N,p}^p}{p} a^{(1-\gamma_p)p} t^{\gamma_p p} > 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t^2 - \mu \frac{C_{N,q}^q}{q} a^{(1-\gamma_q)q} t^{\gamma_q q} &> \frac{C_{N,p}^p}{p} a^{(1-\gamma_p)p} t^{\gamma_p p} \\ \frac{1}{2}t^{2-\gamma_q q} - \mu \frac{C_{N,q}^q}{q} a^{(1-\gamma_q)q} &> \frac{C_{N,p}^p}{p} a^{(1-\gamma_p)p} t^{\gamma_p p - \gamma_q q} \\ \frac{1}{2}t^{2-\gamma_q q} - \frac{C_{N,p}^p}{p} a^{(1-\gamma_p)p} t^{\gamma_p p - \gamma_q q} &> \mu \frac{C_{N,q}^q}{q} a^{(1-\gamma_q)q}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\varphi(t) > \frac{C_{N,q}^q}{q} \mu a^{(1-\gamma_q)q}, \quad \text{com} \quad \varphi(t) := \frac{1}{2}t^{2-\gamma_q q} - \frac{C_{N,p}^p}{p} a^{(1-\gamma_p)p} t^{\gamma_p p - \gamma_q q}.$$

Não é difícil verificar que φ possui um único ponto crítico em $(0, +\infty)$, o qual é um ponto de máximo global em nível positivo, em

$$\bar{t} = C_1 a^{-\frac{(1-\gamma_p)p}{\gamma_p p - 2}}, \quad \text{com} \quad C_1 := \left(\frac{p(2 - \gamma_q q)}{2C_{N,p}^p(\gamma_p p - \gamma_q q)} \right)^{\frac{1}{\gamma_p p - 2}}. \quad (5.4.3)$$

O nível máximo é

$$\varphi(\bar{t}) = C_2 \left(a^{-(1-\gamma_p)p} \right)^{\frac{2-\gamma_q q}{\gamma_p p - 2}}, \quad \text{com} \quad C_2 := \left(\frac{p(2 - \gamma_q q)}{2C_{N,p}^p(\gamma_p p - \gamma_q q)} \right)^{\frac{2-\gamma_q q}{\gamma_p p - 2}} \left(\frac{\gamma_p p - 2}{2(\gamma_p p - \gamma_q q)} \right).$$

Portanto, h é positivo em um intervalo aberto (R_0, R_1) , se e somente se,

$$\varphi(\bar{t}) > \frac{C_{N,q}^q}{q} \mu a^{(1-\gamma_q)q},$$

ou seja, a equação (5.4.1) é satisfeita. Isso implica imediatamente que h tem um máximo global em um nível positivo em (R_0, R_1) . Além disso, como $h(0^+) = 0^-$, existe um ponto de mínimo local em um nível negativo em $(0, R_0)$. O fato de h não ter outros pontos críticos pode ser verificado observando que $h'(t) = 0$ se e somente se

$$\psi(t) = \mu \gamma_q C_{N,q}^q a^{(1-\gamma_q)q} = t^{2-\gamma_q q} - \gamma_p C_{N,p}^p a^{(1-\gamma_p)p} t^{\gamma_p p - \gamma_q q}.$$

Claramente, ψ tem apenas um ponto crítico, que é um máximo estrito. Portanto, a equação anterior tem no máximo duas soluções, que são necessariamente o mínimo local e o máximo global de h encontrados anteriormente. ■

Observação 5.4.3. Para conveniência futura, destacamos que na prova anterior temos que $R_0 < \bar{t}$, com $\bar{t}$ definida por (5.4.3).

Agora estudamos a estrutura da variedade $\mathcal{P}$ de Pohozaev. Lembrando a decomposição de $\mathcal{P} = \mathcal{P}_+ \cup \mathcal{P}_- \cup \mathcal{P}_0$, temos:

Lema 5.4.2. $\mathcal{P}_0 = \emptyset$, e $\mathcal{P}$ é uma variedade suave de codimensão 2 em H .

Demonstração. Ver [18], Lema 5.2. ■

Observação 5.4.4. Com respeito ao Lema 5.4.2, a variedade $\mathcal{P}$ é então dividida em suas duas componentes $\mathcal{P}_+$ e $\mathcal{P}_-$, as quais possuem fecho disjunto.

Lema 5.4.3. Para todo $u \in S$, a função Ψ_u tem exatamente dois pontos críticos $s_u < t_u \in \mathbb{R}$ e dois zeros $c_u < d_u \in \mathbb{R}$, com $s_u < c_u < t_u < d_u$. Além disso:

1) Temos que $s_u \star u \in \mathcal{P}_+$, e $t_u \star u \in \mathcal{P}_-$, e se $s \star u \in \mathcal{P}$, então $s = s_u$ ou $s = t_u$.

2) $|\nabla(s \star u)|_2 \leq R_0$ para cada $s \leq c_u$, e

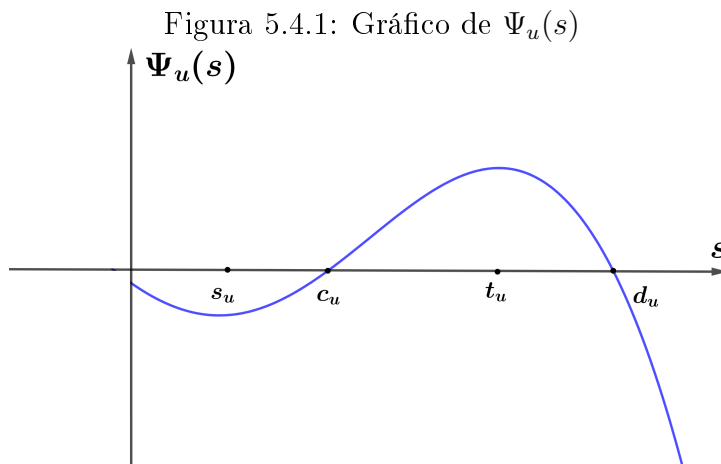
$$E(s_u \star u) = \min\{E(s \star u) : s \in \mathbb{R} \text{ e } |\nabla(s \star u)|_2 < R_0\} < 0.$$

3) Temos

$$E(t_u \star u) = \max\{E(s \star u) : s \in \mathbb{R}\} > 0.$$

e Ψ_u é estritamente decrescente e côncava em $(t_u, +\infty)$. Em particular, se $t_u < 0$, então $P(u) < 0$.

4) As aplicações $u \in S \mapsto s_u \in \mathbb{R}$ e $u \in S \mapsto t_u \in \mathbb{R}$ são de classe C^1 .



Demonstração.

i) Seja $u \in S$. Então, conforme observado na Proposição 5.2.1, $s \star u \in \mathcal{P}$, se e somente se, $\Psi'_u(s) = 0$. Assim, primeiro mostramos que Ψ_u tem pelo menos dois pontos críticos. Para isso, lembramos que por (5.4.2),

$$\Psi_u(s) = E(s \star u) \geq h(|\nabla(s \star u)|_2) = h(e^s |\nabla u|_2).$$

Portanto, pelo Lema 5.4.1, a função Ψ_u , de classe C^2 é positiva em $(\log(R_0/|\nabla u|^2), \log(R_1/|\nabla u|^2))$. Ainda, claramente $\Psi_u(-\infty) = 0^-$ e $\Psi_u(+\infty) = -\infty$. Segue que Ψ_u tem pelo menos dois pontos críticos $s_u < t_u$, com s_u como ponto de mínimo local em $(0, \log(R_0/|\nabla u|_2))$ em um nível negativo, e $t_u > s_u$ ponto de máximo global em um nível positivo. Não é difícil verificar que não existem outros pontos críticos. De fato, $\Psi'_u(s) = 0$ implica que

$$\varphi(s) = \mu \gamma_q |u|_q^q = |\nabla u|_2^2 e^{(2-\gamma_q)s} - \gamma_p |u|_p^p e^{(\gamma_p p - \gamma_q q)s}. \quad (5.4.4)$$

Mas φ tem um único ponto de máximo, e portanto a equação (5.4.4) tem no máximo duas soluções.

ii) Reunindo as considerações acima, concluímos que Ψ_u tem exatamente dois pontos críticos: s_u , mínimo local em $(-\infty, \log(R_0/|\nabla u|_2))$ a um nível negativo, e t_u , máximo global em um nível positivo. Pela Proposição 5.2.1, temos $s_u \star u, t_u \star u \in \mathcal{P}$, e $s \star u \in \mathcal{P}$ implica $s \in \{s_u, t_u\}$. Pela minimalidade, temos $\Psi''_{s_u \star u}(0) = \Psi''_u(s_u) \geq 0$, e de fato a desigualdade estrita deve valer, já que $\mathcal{P}_0 = \emptyset$; ou seja, $s_u \star u \in \mathcal{P}_+$. Da mesma forma, $t_u \star u \in \mathcal{P}_-$.

iii) Pela monotonicidade e lembrando o comportamento no infinito, Ψ_u tem exatamente dois zeros $c_u < d_u$, com $s_u < c_u < t_u < d_u$; e, sendo uma função de classe C^2 , Ψ_u tem pelo menos dois pontos de inflexão. Argumentando como antes, podemos facilmente verificar que na verdade Ψ_u tem exatamente dois pontos de inflexão. Em particular, Ψ_u é côncava em $[t_u, +\infty)$, e portanto, se $t_u < 0$, então $P(u) = \Psi'_u(0) < 0$.

iv) Resta mostrar que $u \mapsto s_u$ e $u \mapsto t_u$ são de classe C^1 ; para isso, aplicamos o Teorema da Função Implícita na função $\Phi(s, u) := \Psi'_u(s)$, que é de classe C^1 . Usamos que $\Phi(s_u, u) = 0$, que $\partial_s \Phi(s_u, u) = \Psi''_u(s_u) < 0$, e o fato de não ser possível passar com continuidade de $\mathcal{P}_+$ para $\mathcal{P}_-$, já que $\mathcal{P}_0 = \emptyset$. O mesmo argumento prova que $u \mapsto t_u$ é C^1 . ■

Para $k > 0$, definimos

$$A_k := \{u \in S : |\nabla u|^2 < k\} \quad \text{e} \quad m(a, \mu) := \inf_{u \in A_{R_0}} E(u).$$

Como corolário imediato, temos:

Corolário 5.4.1. *O conjunto $\mathcal{P}_-$ está contido em $A_{R_0} = \{u \in S : |\nabla u|_2 < R_0\}$, e $\sup_{\mathcal{P}_+} E \leq 0 \leq \inf_{\mathcal{P}_-} E$.*

Além disso:

Lema 5.4.4. *Resulta que $m(a, \mu) \in (-\infty, 0)$, também que*

$$m(a, \mu) = \inf_{\mathcal{P}} E = \inf_{\mathcal{P}_+} E, \quad \text{e que} \quad m(a, \mu) < \inf_{A_{R_0} \setminus A_{R_0-\rho}} E$$

para $\rho > 0$ suficientemente pequeno.

Demonstração.

Para $u \in A_{R_0}$,

$$E(u) \geq h(|\nabla u|_2) \geq \min_{t \in [0, R_0]} h(t) > -\infty,$$

e portanto $m(a, \mu) > -\infty$. Além disso, para qualquer $u \in S$, temos $|\nabla(s \star u)|_2 < R_0$ e $E(s \star u) < 0$ para $s \ll -1$, e portanto $m(a, \mu) < 0$.

Logo, $m(a, \mu) \leq \inf_{\mathcal{P}_+} E$ já que $\mathcal{P}_+ \subset A_{R_0}$ pelo Corolário 5.4.1. Por outro lado, se $u \in A_{R_0}$, então $s_u \star u \in \mathcal{P}_+ \subset A_{R_0}$, e

$$E(s_u \star u) = \min\{E(s \star u) : s \in \mathbb{R} \text{ e } |\nabla(s \star u)|_2 < R_0\} \leq E(u),$$

o que implica que $\inf_{\mathcal{P}_+} E \leq m(a, \mu)$. Para provar que $\inf_{\mathcal{P}_+} E = \inf_{\mathcal{P}} E$, é suficiente lembrar que $E > 0$ em $\mathcal{P}_-$ (ver o Corolário 5.4.1).

Por fim, pela continuidade de h , existe $\rho > 0$ tal que $h(t) \geq m(a, \mu)/2$ se $t \in [R_0 - \rho, R_0]$. Portanto,

$$E(u) \geq h(|\nabla u|^2) \geq \frac{m(a, \mu)}{2} > m(a, \mu)$$

para todo $u \in S$ com $R_0 - \rho \leq |\nabla u|_2 \leq R_0$. ■

5.4.1 Existência de um minimizante local.

Nesta seção vamos provar a existência de uma nova sequência minimizante $\{u_n\} \subset A_{R_0}$. Assim, também que $\tilde{u}$ é um mínimo local interior para $E|_{A_{R_0}}$ e que resolve a equação (4.0.1) para algum $\tilde{\lambda} < 0$. Além disso, é mostrado que $\tilde{u}$ é uma solução de energia mínima para $E|_S$.

De fato, consideramos uma sequência minimizante $\{v_n\}$ para $E|_{A_{R_0}}$. Não é restritivo assumir que $v_n \in S_r$ é radialmente decrescente para cada n (se este não for o caso, podemos substituir v_n por $|v_n|^*$ (a simetrização de Schwarz de $|v_n|$), e obtemos outra função em A_{R_0} com $E(|v_n|^*) \leq E(v_n)$). Além disso, para cada n podemos tomar $s_{v_n} \star v_n \in \mathcal{P}_+$, observando que então, pelo Lema 5.4.3 e o Corolário 5.4.1, $|\nabla(s_{v_n} \star v_n)|_2 < R_0$ e

$$E(s_{v_n} \star v_n) = \min\{E(s_{v_n} \star v_n) : s \in \mathbb{R} \text{ e } |\nabla(s_{v_n} \star v_n)|_2 < R_0\} \leq E(v_n).$$

Dessa forma, obtemos uma nova sequência minimizante $\{w_n = s_{v_n} \star v_n\}$, com $w_n \in S_r \cap \mathcal{P}_+$ radialmente decrescente para cada n . Pelo Lema 5.4.4, $|\nabla w_n|_2 < R_0 - \rho$ para cada n , e assim o Princípio Variacional de Ekeland fornece de maneira padrão a existência de uma nova sequência minimizante $\{u_n\} \subset A_{R_0}$ para $m(a, \mu)$, com a propriedade de que $\|u_n - w_n\| \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$, que é também uma sequência de Palais-Smale para E em S . A condição $\|u_n - w_n\| \rightarrow 0$ e a limitação de $\{w_n\}$ (cada w_n permanece em A_{R_0}) implica que $P(u_n) \rightarrow 0$, e portanto $\{u_n\}$ satisfaz todas as suposições do Lema 5.3.2. Como consequência, a menos de subsequência, $u_n \rightarrow \tilde{u}$ fortemente em H , $\tilde{u}$ é um mínimo local interior para $E|_{A_{R_0}}$, e resolve (4.0.1) para algum $\tilde{\lambda} < 0$. As propriedades básicas de $\tilde{u}$ seguem diretamente pela convergência e pelo Princípio do Máximo, e resta apenas mostrar que $\tilde{u}$ é uma solução de energia mínima para $E|_S$. Isso segue imediatamente do fato de que qualquer ponto crítico de $E|_S$ está em $\mathcal{P}$, e $m(a, \mu) = \inf_{\mathcal{P}} E$ (ver o Lema 5.4.4). ■

5.4.2 Existência de um segundo ponto crítico

Nesta seção, abordaremos a existência de um segundo ponto crítico para a função $E|_S$. No entanto, para investigar essa questão de forma adequada, será necessário usar algumas ferramentas:

Lema 5.4.5. *Suponha que $E(u) < m(a, \mu)$. Então, o valor t_u definido pelo Lema 5.4.3 é negativo.*

Demonstração. Consideremos novamente a função Ψ_u , e consideramos, $s_u < c_u < t_u < d_u$ como no Lema 5.4.3. Se $d_u \leq 0$, então $t_u < 0$ e então o resultado está provado. Portanto, podemos assumir por contradição que $d_u > 0$. Se $0 \in (c_u, d_u)$, então $E(u) = \Psi_u(0) > 0$, o que não é possível pois $E(u) < m(a, \mu) < 0$. Portanto, $c_u > 0$, e pelo Lema 5.4.3-(2):

$$\begin{aligned} m(a, \mu) > E(u) = \Psi_u(0) &\geq \inf_{s \in (-\infty, c_u]} \Psi_u(s) \\ &\geq \inf\{E(s \star u) : s \in \mathbb{R} \text{ e } |\nabla(s \star u)|_2 < R_0\} = E(s_u \star u) \geq m(a, \mu), \end{aligned}$$

o que é novamente uma contradição. ■

Lema 5.4.6. *Resulta que*

$$\tilde{\sigma}(a, \mu) := \inf_{u \in \mathcal{P}_-} E(u) > 0. \quad (5.4.5)$$

Demonstração. Seja $t_{\max}$ o máximo estrito da função h em nível positivo, veja o Lema 5.4.1. Para todo $u \in \mathcal{P}_-$, existe $\tau_u \in \mathbb{R}$ tal que $|\nabla(\tau_u \star u)|_2 = t_{\max}$. Além disso, desde que $u \in \mathcal{P}_-$, também temos pelo Lema 5.4.3 que o valor 0 é o único máximo estrito da função Ψ_u . Portanto,

$$E(u) = \Psi_u(0) \geq \Psi_u(\tau_u) = E(\tau_u \star u) \geq h(|\nabla(\tau_u \star u)|_2) = h(t_{\max}) > 0.$$

Como $u \in \mathcal{P}_-$ foi escolhido arbitrariamente, portanto deduzimos que $\inf_{\mathcal{P}_-} E \geq \max_{\mathbb{R}} h > 0$, como desejado. ■

Precisaremos também do seguinte resultado, onde $T_u S$ denota o espaço tangente a S em u .

Lema 5.4.7. *Para $u \in S_a$ e $s \in \mathbb{R}$, a aplicação*

$$T_u S \rightarrow T_{s \star u} S, \quad \varphi \mapsto s \star \varphi \quad (5.4.6)$$

é um isomorfismo linear com inversa $\psi \mapsto (-s) \star \psi$.

Demonstração. Ver [5], Lema 3.6. ■

Agora podemos prosseguir com a prova da existência de uma segunda solução normalizada positiva. Na prova a seguir, escrevemos E^c para o conjunto subnível fechado $\{u \in S : E(u) \leq c\}$.

Para o caso $N \geq 2$, seguimos a estratégia introduzida inicialmente em [14], considerando o funcional aumentado $\tilde{E}: \mathbb{R} \times H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\tilde{E}(s, u) := E(s \star u) = \frac{e^{2s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \mu \frac{e^{\gamma_{\bar{p}} \bar{p} s}}{\bar{p}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q - \frac{e^{2^* s}}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}, \quad (5.4.7)$$

e analisamos a restrição $\tilde{E}|_{\mathbb{R} \times S}$. Observamos que $\tilde{E}$ é de classe C^1 . Além disso, como $\tilde{E}$ é invariante por rotações aplicadas a u , uma sequência de Palais-Smale para $\tilde{E}|_{\mathbb{R} \times S_r}$ é uma sequência de Palais-Smale para $\tilde{E}|_{\mathbb{R} \times S}$.

Denotando por E^c o conjunto subnível fechado $\{u \in S : E(u) \leq c\}$, introduzimos a classe minimax

$$\Gamma := \left\{ \gamma = (\alpha, \beta) \in C([0, 1], \mathbb{R} \times S_r) : \gamma(0) \in (0, \mathcal{P}_+), \gamma(1) \in (0, E^{2m(a, \mu)}) \right\}, \quad (5.4.8)$$

com o nível minimax associado

$$\sigma(a, \mu) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{(s, u) \in \gamma([0, 1])} \tilde{E}(s, u).$$

Seja $u \in S_r$. Pelo Lema 5.4.3, existe $s_1 \gg 1$ tal que

$$\gamma_u : \tau \in [0, 1] \rightarrow (0, ((1 - \tau)su + \tau s_1) \star u) \in \mathbb{R} \times S_r \quad (5.4.9)$$

é um caminho em Γ (a continuidade segue de (5.2.2)). Então $\sigma(a, \mu)$ é um número real.

Afirmamos que:

$$\text{Para todo } \gamma \in \Gamma \text{ existe } \tau_\gamma \in (0, 1) \text{ tal que } \alpha(\tau_\gamma) \star \beta(\tau_\gamma) \in \mathcal{P}_-. \quad (5.4.10)$$

De fato, como $\gamma(0) = (0, \beta(0)) \in (0, \mathcal{P}_+)$, temos pela Proposição 5.2.1 e Lema 5.4.3, que

$$t_{\alpha(0) \star \beta(0)} = t_{\beta(0)} > s_{\beta(0)} = 0.$$

Assim, como $E(\beta(1)) = \tilde{E}(\gamma(1)) \leq 2m(a, \mu)$, pelo Lema 5.4.5, temos que:

$$t_{\alpha(1) \star \beta(1)} = t_{\beta(1)} < 0.$$

Além disso, a aplicação $t_{\alpha(\tau) \star \beta(\tau)}$ é contínuo em τ , por (5.2.2) e Lema 5.4.3. Isso implica que existe $\tau_\gamma \in (0, 1)$ tal que $t_{\alpha(\tau_\gamma) \star \beta(\tau_\gamma)} = 0$, ou seja, a afirmação (5.4.10) é válida. Isso implica que

$$\max_{\gamma([0, 1])} \tilde{E} \geq \tilde{E}(\gamma(\tau_\gamma)) = E(\alpha(\tau_\gamma) \star \beta(\tau_\gamma)) \geq \inf_{\mathcal{P}_- \cap S_r} E,$$

e consequentemente $\sigma(a, \mu) \geq \inf_{\mathcal{P}_- \cap S_r} E$. Por outro lado, se $u \in \mathcal{P}_- \cap S_r$, então γ_u definido em (5.4.9) é um caminho em Γ com

$$E(u) = \tilde{E}(0, u) = \max_{\gamma_u([0, 1])} \tilde{E} \geq \sigma(a, \mu),$$

donde a desigualdade reversa $\inf_{\mathcal{P}_- \cap S_r} E \geq \sigma(a, \mu)$ segue. Portanto, o Corolário 5.4.1 e o Lema 5.4.6 implicam que

$$\sigma(a, \mu) = \inf_{\mathcal{P}_- \cap S_r} E > 0 \geq \sup_{(\mathcal{P}_+ \cup E^{2m(a, \mu)}) \cap S_r} E = \sup_{((0, \mathcal{P}_+) \cup (0, E^{2m(a, \mu)})) \cap S_r} \tilde{E}. \quad (5.4.11)$$

Por outro lado, usando a terminologia em [12], Capítulo 5, isso significa que $\{\gamma([0, 1]) : \gamma \in \Gamma\}$ é uma família estável de homotopia de subconjuntos compactos de $\mathbb{R} \times S_r$ com fronteira fechada estendida $(0, \mathcal{P}_+) \cup (0, E^0)$, e que o conjunto de nível superior $\tilde{E} \geq \sigma(a, \mu)$ é um conjunto dual, no sentido de que as suposições $(F'1)$ e $(F'2)$ em [12], Teorema 5.2 são satisfeitas. Portanto, tomando qualquer sequência minimizante $\{\gamma_n = (\alpha_n, \beta_n)\} \subset \Gamma$ para $\sigma(a, \mu)$ com a propriedade de que $\alpha_n \equiv 0$ e $\beta_n(\tau) \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ para todo

$\tau \in [0, 1]$, então existe uma sequência de Palais-Smale $\{(s_n, w_n)\} \subset \mathbb{R} \times S_r$ para $\tilde{E}|_{\mathbb{R} \times S_r}$ no nível $\sigma(a, \mu)$, isto é,

$$\partial_s \tilde{E}(s_n, w_n) \rightarrow 0, \quad \text{e} \quad \|\partial_u \tilde{E}(s_n, w_n)\|_{(T_{w_n} S_r)^*} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.4.12)$$

com a propriedade adicional de que

$$|s_n| + \text{dist}_{H^1}(w_n, \beta_n([0, 1])) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.4.13)$$

De (5.4.7), a primeira condição em (5.4.12) é lida como $P(s_n \star w_n) \rightarrow 0$, enquanto a segunda condição dá

$$e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \cdot \nabla \varphi - \mu e^{\gamma q s_n} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^{q-2} w_n \varphi - e^{\gamma p s_n} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^{p-2} w_n \varphi = o(1) \|\varphi\|, \quad (5.4.14)$$

para todo $\varphi \in T_{w_n} S_r$, com $o(1) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Assim, como $\{s_n\}$ é limitada por cima e por baixo, devido a (5.4.13), isso é equivalente a:

$$d E(s_n \star w_n)[s_n \star \varphi] = o(1) \|\varphi\| = o(1) \|s_n \star \varphi\| \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in T_{w_n} S_r. \quad (5.4.15)$$

De fato, de (5.1.3), podemos notar que

$$((-s) \star u)(x) := e^{-\frac{N}{2}s} u(e^{-s}x), \quad \text{para quase todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Então,

$$\nabla((-s) \star u)(x) := e^{-s - \frac{N}{2}s} \nabla u(e^{-s}x).$$

Portanto, de (5.4.7)

$$\partial_s \tilde{E}(s_n, w_n) \cdot \varphi = e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \cdot \nabla \varphi - \mu e^{\gamma q s} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{q-2} w_n \varphi - e^{2^* s} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{2^*-2} w_n \varphi, \quad (5.4.16)$$

então, pelo Lema 5.4.7

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(s_n \star w_n) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{(\frac{N}{2}+1)s_n} \nabla w_n(e^{s_n}x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx.$$

Fazendo $y = e^{s_n}x$, $dy = e^{N s_n} dx$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(s_n \star w_n) \cdot \nabla \varphi \, dx &= \frac{e^{s_n(\frac{N}{2}+1)}}{e^{N s_n}} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n(y) \, dx \cdot \nabla((-s) \star \varphi)(y) \, dy \\ &= e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n(y) \cdot \nabla((-s) \star \varphi)(y) \, dy. \end{aligned}$$

Fazendo cálculos análogos para os outros termos, vemos que

$$E'(s_n \star w_n) \cdot \varphi = E'(w_n)((-s) \star \varphi). \quad (I)$$

Como $\varphi = (-s_n) \star (s_n \star \varphi)$, note que

$$\begin{aligned} \partial_s \tilde{E}(s_n, w_n) \cdot \varphi &= e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \cdot \nabla \varphi \, dx - \mu e^{\gamma q s} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{q-2} w_n \varphi - e^{2^* s} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{2^*-2} w_n \varphi \\ &= e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla((-s_n) \star (s_n \star \varphi)) \, dx - \mu e^{\gamma q s} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{q-2} w_n \varphi - e^{2^* s} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{2^*-2} w_n \varphi \\ &= e^{2s_n} E'(w_n)((-s_n) \star (s_n \star \varphi)) \\ &\stackrel{(I)}{=} e^{2s_n} E'(s_n \star w_n)(s_n \star \varphi), \quad \forall \varphi \in T_{w_n} S. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 |e^{2s_n} E'(s_n \star w_n)(s_n \star \varphi)| &= |e^{2s_n} \partial_u \tilde{E}(s_n, w_n) \cdot \varphi| \\
 &= o_n(1) \|\varphi\| && \text{pois } \{e^{2s_n}\} \text{ é limitada} \\
 &= o_n(1) \|s_n \star \varphi\|. && \text{pelo Lema 5.4.7.}
 \end{aligned}$$

Portanto, como $s_n \star \varphi$ varre todo $T_{s_n \star w_n}$ quando φ varre $T_{w_n} s$, segue que $(s_n \star w_n)$ é uma sequência PS para $E|_S$.

Seja então $u_n := s_n \star w_n$. Pelo Lema 5.4.7, a equação (5.4.15) estabelece que $\{u_n\} \subset S_r$ é uma sequência de Palais-Smale para $E|_{S_r}$ (assim uma sequência PS para $E|_S$, já que o problema é invariante sob rotações) em um nível $\sigma(a, \mu) > 0$, com $P(u_n) \rightarrow 0$. Pelo Lema 5.3.1, a menos de subsequência $u_n \rightarrow \hat{u}$ fortemente em H^1 , com $\hat{u} \in S$ sendo uma solução radial real para (4.0.1) para algum $\hat{\lambda} < 0$. A partir de (5.4.13), temos que $\hat{u} \geq 0$ quase em todo ponto em $\mathbb{R}^N$, e o Princípio Máximo Forte implica finalmente que $\hat{u} > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Conclusão da prova do Teorema 5.4.1 e da Proposição 5.4.1.

Assim, portanto só resta apenas provar que qualquer solução de energia mínima de $E|_S$ é um mínimo local de E em A_{R_0} . Seja então u um ponto crítico de $E|_S$ com $E(u) = m(a, \mu) = \inf_{\mathcal{P}} E$. Como $E(u) < 0 < \inf_{\mathcal{P}_-} E$, necessariamente $u \in \mathcal{P}_+$. Então, pelo Corolário 5.4.1, resulta que $|\nabla u|^2 < R_0$, e como consequência u é um mínimo local para E em A_{R_0} .

■

Referências

- [1] ALVES, C. O.; LIMA, R. N. *Introdução à Teoria dos Pontos Críticos*. Notas de aula na UFCG, 2021.
- [2] ALVES, C. O.; JI, C.; MIYAGAKI, O. H. *Normalized solutions for a Schrödinger equation with critical growth in $\mathbb{R}^N$* . Calc. Var. 61, 18, 2022.
- [3] AMBROSETTI, A.; MALCHIODI, A. *Nonlinear Analysis with Applications to Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, 2007.
- [4] BARTSCH, T.; VALERIOLA, S. *Normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations*. Arch. Math. 100 (1), p. 75-83, 2012.
- [5] BARTSCH, T.; SOAVE, N. *Multiple normalized solutions for a competing system of Schrödinger equations*. Calc. Var. Partial Differ. Equ. Vol. 58, 22, 2019.
- [6] BREZIS, H. *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2010.
- [7] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Ed. Universidade Estadual de Maringá, 2009.
- [8] CAZENAVE, T. *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 10, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences/American Mathematical Society, New York/Providence, RI, 2003.
- [9] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence RI, 19, 1998.
- [10] FIGUEIREDO, G. M. *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*. Notas de aula na UnB, 2016.
- [11] FREITAS, M. M. *Simetria, Compacidade e Multiplicidade de Soluções para um Problema Elíptico Semilinear*. Notas de aula na UnB, 2008.
- [12] GHOUSSOUB, N. *Duality and Perturbation Methods in Critical Point Theory*. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 107, 1993.
- [13] HAJAIEJ, H.; STUART, C. A. *On the variational approach to the stability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation*. Adv. Nonlinear Stud. 4 (4), p. 469-501, 2004.
- [14] JEANJEAN, L. *Existence of solutions with prescribed norm for semilinear elliptic equations*. Nonlinear Anal. 28, p. 1633-1659, 1997.
- [15] KAVIAN, O. *Introduction à la Théorie des Points Critiques*. Springer-Verlag, 1993.

-
- [16] LIONS, P. L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Part 1.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 1 (2), p. 109-145, 1984.
 - [17] LIONS, P. L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Part 2.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 1 (4), p. 223-283, 1984.
 - [18] SOAVE, N. *Normalized ground states for the NLS equation with combined nonlinearities.* J. Diff. Eq. 269 (9), p. 6941-6987, 2020.
 - [19] SOAVE, N. *Normalized ground states for the NLS equation with combined nonlinearities: The Sobolev critical case.* J. Funct. Anal. 279 (6), 2020.
 - [20] STRAUSS, W. A. *Existence of solitary waves in higher dimensions.* Commun. Math. Phys. 55 (2), p. 149-162, 1977.
 - [21] WEINSTEIN, M.I. *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates.* Commun. Math. Phys. 87 (4), p. 567-576, 1982/1983.
 - [22] WILLEM, M. *Minimax Theorems.* Springer Science and Business Media, 1996.