

*Análise de Estabilidade de Sistemas
Dinâmicos Híbridos e Descontínuos
Modelados por Semigrupos*

Ismael da Silva Pena

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Ismael da Silva Pena

***Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos
Híbridos e Descontínuos Modelados por Semigrupos***

Dissertação a ser apresentada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

Co-orientador:

Prof. Dr. Luís Antônio Fernandes de Oliveira

MESTRADO EM MATEMÁTICA
INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
UNESP - CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto – SP

2008

Pena, Ismael da Silva.

Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos híbridos e descontínuos modelados por semigrupos / Ismael da Silva Pena. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2008.

93 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Geraldo Nunes Silva

Co-orientador: Luís Antônio Fernandes de Oliveira

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos. 2. Sistemas dinâmicos descontínuos. 3. Semigrupos. 4. Análise de estabilidade. 5. Equações diferenciais com retardo. I. Silva, Geraldo Nunes. II. Oliveira, Luís Antônio Fernandes de. III. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU – 517.93

Ismael da Silva Pena

*Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos
Híbridos e Descontínuos Modelados por Semigrupos*

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
Departamento de Matemática - UFSJ

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP

São José do Rio Preto, 26 de fevereiro de 2008.

*À minha namorada, Tássia,
companheira em todos os momentos.
Aos meus pais, Clarismindo e Benedita,
cujos ensinamentos moldaram meu caráter.
Aos meus irmãos, Luciano e Priscila.
Ao professor Luís Antônio, por me mostrar
o que minha inexperiência não permitia ver.*

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Geraldo Nunes Silva, agradeço pela orientação, incentivo e sobretudo confiança, ao me propiciar através das circunstâncias, a oportunidade de adquirir e valorizar maior independência.

Ao meu co-orientador, Prof. Luís Antônio F. Oliveira, pelo apoio, paciência, confiança e incentivo desde a iniciação científica, sendo para mim exemplo na matemática e fora dela.

À minha namorada, Tássia, fonte de inspiração e motivação, pelo companheirismo, incentivo, paciência, compreensão e pelo amor com que ouviu minhas dúvidas e ajudou nas várias decisões tomadas durante o mestrado.

À minha família, pelo apoio incondicional, por compreender minha ausência constante e pelo amor dedicado em todas as fases da minha vida.

Aos amigos, em especial aos de Carneirinho, pelo incentivo e pelos momentos de descontração que me ajudaram a renovar o ânimo.

Aos colegas de mestrado, pela troca de informações, pela agradável convivência e pelo apoio sempre manifestado. Estes, por navegarem no mesmo barco, foram os mais solidários nas inúmeras discussões e confissões.

Aos professores de graduação e de mestrado, que me ajudaram a construir conhecimento, além de contribuir cada um com uma fração, para a forma com que penso e escrevo academicamente.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, pelo suporte oferecido, e à todos os funcionários do DCCE e da seção de pós-graduação que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

“Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz.

Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.”

Hermann Hankel

Resumo

Sistemas dinâmicos híbridos se diferenciam por exibir simultaneamente variados tipos de comportamento dinâmico (contínuo, discreto, eventos discretos) em diferentes partes do sistema. Neste trabalho foram estudados resultados de estabilidade no sentido de Lyapunov para sistemas dinâmicos híbridos gerais, que utilizam uma noção de tempo generalizado, definido em um espaço métrico totalmente ordenado. Mostrou-se que estes sistemas podem ser imersos em sistemas dinâmicos descontínuos definidos em \mathbb{R}^+ , de forma que sejam preservadas suas propriedades qualitativas. Como foco principal, estudou-se resultados de estabilidade para sistemas dinâmicos descontínuos modelados por semigrupos de operadores, em que os estados do sistema pertencem à espaços de Banach. Neste caso, de forma alternativa à teoria clássica de estabilidade, os resultados não utilizam as usuais funções de Lyapunov, sendo portanto mais fáceis de se aplicar, tendo em vista a dificuldade em se encontrar tais funções para muitos sistemas. Além disso, os resultados foram aplicados à uma classe de equações diferenciais com retardo.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos híbridos; Sistemas dinâmicos descontínuos; Semigrupos; Estabilidade de Lyapunov; Equações diferenciais funcionais; Aplicação de imersão.

Abstract

Hybrid dynamical systems are characterized for showing simultaneously a variety of dynamic behaviors (continuous, discrete, discrete events) in different parts of the System. This work discusses stability results in the Lyapunov sense for general hybrid dynamical systems that use a generalized notion of time, defined in a completely ordered metric space. It has been shown that these systems may be immersed in discontinuous dynamical systems defined in R^+ , so that their quality properties are preserved. As the main focus, it is studied stability results for discontinuous dynamical systems modeled by semigroup operators, in which the states belong to Banach spaces. In this case, an alternative to the classical theory of stability, the results do not make use of the usual Lyapunov functions, and therefore are easier to apply, in view of the difficulty in finding such functions for many systems. Furthermore, the results were applied to a class of time-delay discontinuous differential equations.

Keywords: Hybrid dynamical systems; Discontinuous dynamical systems; Semigroups; Lyapunov stability; Functional differential equations; Embedding mapping.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 11
2	Sistemas Dinâmicos Híbridos	p. 15
2.1	Introdução	p. 15
2.2	Caracterizações Qualitativas	p. 15
2.3	Imersão de um <i>SDH</i> em um Sistema Dinâmico Descontínuo	p. 19
2.4	Aplicações que Preservam Estabilidade	p. 25
2.5	Teoremas de Estabilidade de Lyapunov	p. 32
3	Sistemas Dinâmicos Descontínuos Modelados por Semigrupos	p. 46
3.1	Introdução	p. 46
3.2	SDD Determinados por Semigrupos	p. 47
3.2.1	<i>SDC</i> Modelados por Semigrupos	p. 48
3.2.2	SDD Determinados por C_0 -semigrupos	p. 48
3.2.3	SDD Determinados por Semigrupos Não-Lineares	p. 49
3.3	Estabilidade de Semigrupos	p. 50
3.3.1	Caracterizações Qualitativas	p. 50
3.3.2	Estabilidade de C_0 -semigrupos	p. 51
3.3.3	Estabilidade de Semigrupos Não-lineares	p. 54
4	Aplicações	p. 62
4.1	Equações Diferenciais Ordinárias	p. 62

4.2	Equações Diferenciais Funcionais com Retardo	p. 64
4.2.1	Resultados Básicos	p. 64
4.2.2	<i>SDD</i> Determinados por Semigrupos Não-Lineares	p. 67
4.2.3	<i>SDD</i> Determinados por C_0 -semigrupos	p. 69
5	Considerações Finais	p. 72
	Referências Bibliográficas	p. 74
	Apêndice A – Semigrupos	p. 77
A.1	A Equação Funcional de Cauchy	p. 77
A.2	Teoria de Semigrupos	p. 79
A.3	Semigrupos Lineares	p. 79
A.3.1	Semigrupos Fortemente Contínuos	p. 80
A.4	Semigrupos Não-Lineares	p. 84
	Apêndice B – Os Principais Teoremas de Lyapunov	p. 87

Lista de Figuras

- 2.1 Representação gráfica de T para o Exemplo 2.1 p. 19
- 2.2 Representação da aplicação de imersão de um deslocamento. p. 20
- 2.3 Representação gráfica do espaço tempo na imersão do SDH para o Exemplo 2.2. . . p. 25

1 *Introdução*

Neste trabalho, estudamos resultados de estabilidade para sistemas dinâmicos híbridos e sistemas dinâmicos descontínuos modelados por semigrupos de operadores. No primeiro caso, os resultados são abordados através de aplicações que preservam estabilidade (ou funções de Lyapunov); no segundo, os resultados tomam como base a teoria de semigrupos e não envolvem as usuais funções de Lyapunov. Os resultados são bastante abrangentes e podem considerar sistemas de dimensão finita e infinita; para exemplificar, aplicamos os resultados a classes de equações diferenciais com retardo lineares e não-lineares.

A análise qualitativa de sistemas dinâmicos tem sido objeto de estudos há muitos anos e apresenta resultados consistentes e muito utilizados em várias áreas da ciência. Contudo, com o avanço da tecnologia, tem-se evidenciado o aparecimento de sistemas dinâmicos com elevado grau de complexidade, cujos tratamentos diferem dos processos tradicionais. Tais sistemas se diferenciam por exibir simultaneamente variados tipos de comportamento dinâmico (contínuo, discreto, eventos discretos) em diferentes partes do sistema, envolvendo, portanto, diferentes noções de "tempo", de tal forma que a descrição do sistema pode envolver um misto de equações, como equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais funcionais, equações integro-diferenciais de Volterra e assim por diante. Sistemas com esta característica são conhecidos como *sistemas dinâmicos híbridos* (trabalhos como (1, 2, 3) abordam esse conceito de forma específica). As pesquisas envolvendo estes sistemas motivaram a publicação de vários trabalhos em que a escolha do modelo do sistema híbrido depende do objetivo da análise. Sendo assim, os resultados apresentados referem-se a modelos específicos destinados a aplicações específicas. Em particular citamos (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).

Recentemente, com o intuito de tornar mais ampla a análise qualitativa destes sistemas, alguns autores desenvolveram um modelo para sistemas dinâmicos híbridos gerais, utilizando uma noção de tempo generalizado, definido em um espaço métrico totalmente ordenado. Este conceito foi inicialmente abordado em (11, 12), e posteriormente foram publicados vários trabalhos que tratam da análise qualitativa desses sistemas, como (13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20). Para esse novo modelo, utiliza-se também o conceito de aplicações que preservam estabilidade,

no lugar das funções de Lyapunov, na análise qualitativa dos sistemas. Dentre os trabalhos pioneiros que abordam esse conceito destacamos (21, 22, 23). Destacam-se também os trabalhos (24, 25), que reúnem vários dos trabalhos anteriores e expõem os resultados obtidos.

Os trabalhos citados anteriormente (em particular (12, 16, 18)) mostram que sistemas dinâmicos híbridos definidos em um espaço tempo generalizado podem ser imersos em sistemas definidos em \mathbb{R}^+ , com deslocamentos que geralmente são descontínuos com relação ao tempo. Neste contexto, a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos descontínuos era inicialmente tratada para sistemas de dimensão finita, modelados por equações diferenciais ordinárias. A abordagem destes sistemas em espaços métricos com dimensão infinita foi estabelecida pelos trabalhos citados anteriormente (em particular (24, 25)). Ainda assim, considerando-se as aplicações, algumas vezes os resultados obtidos necessitavam de uma análise adicional, mais específica. Nesse sentido, surgiram recentemente dois trabalhos que consideram a análise de estabilidade para sistemas dinâmicos descontínuos de dimensão infinita modelados por equações diferenciais com retardo,(26), e semigrupos lineares e não-lineares, (27). Posteriormente, em (28), os autores apresentaram resultados de estabilidade para sistemas dinâmicos descontínuos de dimensão infinita determinados por problemas abstratos de Cauchy em espaços de Banach. Reunindo os resultados anteriores, em (29) os autores apresentam resultados de estabilidade para sistemas dinâmicos contínuos, discretos e descontínuos, mostrando que os resultados clássicos para sistemas dinâmicos contínuos podem ser obtidos dos resultados para sistemas descontínuos, observando assim que os resultados obtidos em (11, 18) são mais gerais do que se esperava.

Apresentamos agora uma breve descrição do trabalho. O trabalho está dividido em cinco capítulos e dois apêndices. No Capítulo 2 tratamos da teoria de sistemas dinâmicos híbridos e dos resultados de estabilidade de Lyapunov. O capítulo está dividido em cinco seções. Na Seção 2.1, fazemos uma breve introdução citando trabalhos relevantes da área; na Seção 2.2, definimos sistemas dinâmicos híbridos em espaços métricos equivalentes fazendo uso de um conceito de tempo generalizado, e apresentamos as noções de estabilidade no sentido de Lyapunov, sendo que as definições de estabilidade são dadas com relação a conjuntos invariantes; na Seção 2.3, fazemos uma discussão da teoria que mostra que todo sistema dinâmico híbrido pode ser imerso em um sistema dinâmico descontínuo definido em \mathbb{R}^+ através de uma aplicação de imersão adequada, no sentido de que eles podem ser comparados e de forma que esta imersão preserve as propriedades qualitativas do sistema; na Seção 2.4, apresentamos uma teoria alternativa para a análise qualitativa de sistemas dinâmicos híbridos e descontínuos, que faz uso das aplicações que preservam a estabilidade do sistema, de forma que estudo qualitativo possa se dar no contexto da teoria da comparação. Tais aplicações generalizam as funções de

Lyapunov, e recebem este nome por estabelecer a equivalência entre as propriedades qualitativas de conjuntos invariantes de sistemas distintos, possibilitando concluir sobre a estabilidade do conjunto invariante de um sistema desde que se conheça previamente as propriedades qualitativas do outro; na Seção 2.5, estabelecemos os principais resultados do capítulo, no que se refere a estabilidade de conjuntos invariantes. Os teoremas derivam dos resultados existentes para sistemas de tempo contínuo, porém são mais abrangentes que estes, uma vez que consideram as informações nos pontos de descontinuidade do sistema, exigindo que sejam satisfeitas condições menos restritivas, podendo ser aplicados a sistemas de dimensão finita e infinita. São apresentados quatro teoremas que fornecem condições suficientes para invariância, estabilidade uniforme, estabilidade uniforme assintótica, estabilidade exponencial e instabilidade.

No Capítulo 2 os resultados apresentados fazem uso das funções de Lyapunov no estudo da estabilidade. A desvantagem desse método é que nem sempre é possível, com um esforço aceitável, encontrar funções desse tipo para determinados sistemas. No entanto, para uma classe de sistemas em que os deslocamentos determinam semigrupos, é possível estabelecer resultados que não fazem uso das funções de Lyapunov, mas são amparados pela teoria de semigrupos. Portanto, no Capítulo 3, nosso objetivo foi estudar os resultados para esta classe. O capítulo está dividido em três seções; na Seção 3.1, fazemos uma introdução e damos uma idéia geral do tipo de sistemas dinâmicos descontínuos que estamos interessados. Estes sistemas são obtidos através de uma família de sistemas determinados por problemas abstratos de Cauchy em um espaço de Banach X ; na Seção 3.2, definimos os casos particulares de *SDD* determinados por semigrupos lineares e não-lineares, para os quais são estudados os teoremas de estabilidade; na Seção 3.3, apresentamos os principais resultados do capítulo, considerando os sistemas dados na Seção 3.2, e estabelecemos resultados de estabilidade para as soluções triviais dos sistemas que não fazem uso das funções de Lyapunov e podem ser aplicados à uma grande classe de sistemas de dimensão finita e infinita.

No Capítulo 4, aplicamos os resultados da Seção 3.2 para uma classe de equações diferenciais ordinárias e para equações diferenciais funcionais com retardo lineares e não-lineares, desde que estas classes determinam sistemas em que os deslocamentos geram semigrupos de operadores.

No Capítulo 5 discutimos brevemente os conceitos e resultados abordados no trabalho e apresentamos algumas sugestões de trabalhos futuros.

Como forma de complementação, no Apêndice A apresentamos aspectos básicos da teoria de semigrupos necessários ao desenvolvimento do trabalho. Neste apêndice, fizemos uma introdução sobre o desenvolvimento de semigrupos e apresentamos, sem demonstrações, os prin-

cipais resultados desta teoria. No Apêndice B, enunciamos novamente os teoremas principais de Lyapunov, desta vez demonstrando-os de forma direta a partir das definições de estabilidade, desde que, no Capítulo 2, as demonstrações destes teoremas são feitas por meio de sistemas de comparação adequados, ou seja, através da teoria de comparação. O processo é interessante pois ajuda a elucidar os conceitos e definições apresentados no início do Capítulo 2.

Por todo o trabalho falamos de sistemas dinâmicos de dimensão finita e infinita, bem como sistemas dinâmicos contínuos (*SDC*) e sistemas dinâmicos descontínuos (*SDD*). Nesse sentido, um sistema possui dimensão finita se a dimensão do espaço estado for finita, caso contrário, o sistema possui dimensão infinita. Dizemos que o sistema dinâmico é contínuo quando todos os deslocamentos são contínuos com relação ao tempo; quando algum dos deslocamentos é descontínuo com relação ao tempo, temos um sistema dinâmico descontínuo.

À medida que se fez necessário a notação foi definida ao longo do trabalho. Para facilitar a leitura, todavia, apresentamos aqui a notação mais empregada.

Para este trabalho \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais, \mathbb{R}^+ o conjunto dos números reais não-negativos, \mathbb{N} o conjunto dos inteiros não-negativos. \mathbb{R}^n denota o espaço n -dimensional e se $x \in \mathbb{R}^n$, então $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ denota a transposta de x . Denotamos por $\mathbb{R}^{n \times m}$ o conjunto das matrizes reais $n \times m$, e se $B = [b_{i,j}]_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, então B^T denota a transposta de B .

Denotamos um espaço métrico X com métrica d por (X, d) , e por $d(a, M)$ a distância de um elemento $a \in X$ ao subconjunto $M \subset X$.

Dados os conjuntos X e Y , denotamos por $C[X, Y]$ o conjunto de todas as aplicações contínuas de X para Y , e por $C^k[X, Y]$ o conjunto das aplicações com derivadas contínuas de ordem k . Denotamos por $f : U \rightarrow W$ a aplicação de U para W e por $\{U \rightarrow W\}$ o conjunto de todas as aplicações de U para W .

Seja $\psi : [0, r_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ (respectivamente $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$). Dizemos que a função $\psi \in C[[0, r_1] \rightarrow \mathbb{R}^+]$ (respectivamente $\psi \in C[\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+]$) pertence à classe K (ou seja, $\psi \in K$), se $\psi(0) = 0$ e se ψ é estritamente crescente em $[0, r_1]$ (respectivamente, em \mathbb{R}^+). Se $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, se $\psi \in K$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \infty$, então dizemos que ψ pertence à classe $K\mathbb{R}$.

Dadas duas funções $f, g \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$, dizemos que $f(r) = o(g(r))$ quando $r \rightarrow 0$, se $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{g(r)} = 0$.

Dada uma função $x : \mathbb{R} \rightarrow X$, denotamos $x(\tau^-) := \lim_{\theta \rightarrow 0^+} x(\tau - \theta)$.

2 *Sistemas Dinâmicos Híbridos*

2.1 Introdução

Na introdução do trabalho comentamos sobre o modelo geral de sistemas dinâmicos híbridos que vem sendo estudado. Dedicamos este capítulo ao estudo destes sistemas, mais especificamente ao estudo da teoria de estabilidade para conjuntos invariantes em tais sistemas. No entanto, mostraremos nas seções seguintes que estes sistemas podem ser abordados como sistemas dinâmicos descontínuos definidos em \mathbb{R}^n e, a partir daí, desenvolveremos o restante do trabalho considerando sistemas do último tipo.

Como uma primeira etapa do trabalho, nosso objetivo neste capítulo é fazer um estudo generalizado. Assim, a teoria desenvolvida aqui tem um caráter geral e reúne algumas tendências recentes em análise qualitativa de estabilidade apresentadas em (11, 12, 16, 18, 25, 24, 30). Em uma segunda etapa, consideraremos no capítulo seguinte o caso especial em que os sistemas dinâmicos descontínuos são modelados por semigrupos de operadores, estabelecendo assim resultados mais particulares da teoria.

2.2 Caracterizações Qualitativas

Nesta seção, definimos sistemas dinâmicos híbridos em espaços métricos equivalentes fazendo uso de um conceito de tempo generalizado e apresentamos as noções de estabilidade no sentido de Lyapunov, sendo que as definições de estabilidade são dadas com relação a conjuntos invariantes.

Antes de definir um sistema dinâmico híbrido, precisamos definir os conceitos de espaço tempo, espaços métricos equivalentes e deslocamento.

Definição 2.1. *Um espaço métrico (T, ρ) é chamado um espaço tempo se,*

- (i) *T é completamente ordenado com relação de ordem \prec ;*
- (ii) *T possui um elemento $t_{min} \in T$, ou seja, todo $t \in T$ satisfaz $t_{min} \prec t$;*

- (iii) Para todo $t_1, t_2, t_3 \in T$ tal que $t_1 \prec t_2 \prec t_3$, tem-se $\rho(t_1, t_3) = \rho(t_1, t_2) + \rho(t_2, t_3)$;
- (iv) T é ilimitado superiormente, equivalentemente, para todo $M > 0$, existe $t \in T$ tal que $\rho(t_{\min}, t) > M$.

Quando estiver claro no contexto, denotaremos por T , no lugar de (T, ρ) , o espaço tempo.

Definição 2.2. Dois espaços tempo T e \hat{T} são equivalentes se existe uma aplicação isométrica $h : T \rightarrow \hat{T}$, tal que h preserva as relações de ordem em T e \hat{T} . Neste caso diz-se que T e \hat{T} são equivalentes com respeito a h .

Para simplificar, usaremos a notação $T \sim \hat{T}$ para dizer que T e \hat{T} são equivalentes. Da mesma forma, quando $T_o \subset T$, $\hat{T}_o \subset \hat{T}$, usaremos a notação $(T, T_o) \sim (\hat{T}, \hat{T}_o)$ para dizer que T e \hat{T} são equivalentes (com respeito a h), e também T_o e \hat{T}_o são equivalentes (com respeito a h_{T_o} , a restrição de h à T_o), sendo que T_o denotará um conjunto de tempos iniciais.

Definição 2.3. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Seja (T, ρ) um espaço tempo com $T_o \subset T$. Dados $a \in A$, $t_o \in T_o$, a aplicação $\tilde{p}(\cdot, a, t_o) : \tilde{T}_{a, t_o}^{\tilde{p}} \rightarrow X$ é chamada um deslocamento em T se

- (i) $\tilde{T}_{a, t_o}^{\tilde{p}}$ é um subconjunto de um espaço tempo \tilde{T} e $(\tilde{T}, \tilde{T}_{a, t_o}^{\tilde{p}})$ é equivalente a $(T, T_{a, t_o}^{\tilde{p}})$ com respeito a $h : T \rightarrow \tilde{T}$, sendo que $T_{a, t_o}^{\tilde{p}} = \{t \in T : t_o \preceq t, \rho(t, t_o) < l_{\tilde{p}}\}$ é um subconjunto de T e $l_{\tilde{p}} > 0$ é finito ou infinito, dependendo de $\tilde{p}(\cdot, a, t_o)$;
- (ii) $\tilde{p}(h(t_o), a, t_o) = a$.

Podemos agora definir o conceito de sistema dinâmico híbrido.

Definição 2.4. Uma família de deslocamentos em T é definida como sendo o subconjunto $S \subset \{\tilde{p}(\cdot, a, t_o) \in \Lambda : \tilde{p}(h(t_o), a, t_o) = a\}$, sendo $\Lambda = \cup_{(a, t_o) \in A \times T_o} \{\tilde{T}_{a, t_o}^{\tilde{p}} \rightarrow X\}$, \tilde{p} um deslocamento com condição inicial (a, t_o) e domínio $\tilde{T}_{a, t_o}^{\tilde{p}}$ e sendo h unicamente determinada pelo deslocamento específico $\tilde{p}(\cdot, a, t_o)$. Nós denominamos a quintupla $\{T, X, A, S, T_o\}$ um sistema dinâmico híbrido (SDH).

Resguardadas as devidas considerações, usaremos \tilde{T}_{a, t_o} no lugar de $\tilde{T}_{a, t_o}^{\tilde{p}}$, embora para deslocamentos $\tilde{p}_1(\cdot, a, t_o)$ diferente de $\tilde{p}_2(\cdot, a, t_o)$, possamos ter $\tilde{T}_{a, t_o}^{\tilde{p}_1}$ diferente de $\tilde{T}_{a, t_o}^{\tilde{p}_2}$. Observamos ainda que o deslocamento $\tilde{p}(\cdot, a, t_o) : \tilde{T}_{a, t_o} \rightarrow X$ está definido em $\tilde{T}_{a, t_o} \subset \tilde{T}$, e que o espaço tempo \tilde{T} depende do deslocamento particular $\tilde{p}(\cdot, a, t_o)$ e pode variar com deslocamentos diferentes. Porém, cada \tilde{T} é equivalente a um espaço tempo T pré-especificado, sendo assim, qualquer deslocamento $\tilde{p}(\cdot, a, t_o) : \tilde{T}_{a, t_o} \rightarrow X$ pode ser tratado como uma aplicação $p(\cdot, a, t_o) : T_{a, t_o} \rightarrow X$ definida em $T_{a, t_o} \subset T$.

Definição 2.5. *Seja $\{T, X, A, S, T_o\}$ um SDH, dizemos que o conjunto $M \subset A$ é invariante com respeito ao sistema S , se $a \in M$ implica $p(\cdot, a, t_o) \in M$ para todo $t \in T_{a, t_o}$, todo $t_o \in T_o$ e todo $p(\cdot, a, t_o) \in S$.*

Por simplicidade, usaremos apenas " M é um conjunto invariante de S ", ou então " (S, M) é invariante", no lugar de "o conjunto M é invariante com respeito a S ". A mesma terminologia será adotada nos conceitos de estabilidade.

Definição 2.6. *Seja $\{T, X, A, S, T_o\}$ um SDH, dizemos que $x_o \in A$ é um equilíbrio (ou ponto de equilíbrio) do sistema se o conjunto $\{x_o\}$ é invariante com respeito a S .*

Definição 2.7. *Seja $\{T, X, A, S, T_o\}$ um SDH, dizemos que (S, M) é estável se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $t_o \in T_o$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, t_o) > 0$ tal que $d(p(t, a, t_o), M) < \varepsilon$ para todo $t \in T_{a, t_o}$ e todo $p(\cdot, a, t_o) \in S$, sempre que $d(a, M) < \delta$. Quando $\delta = \delta(\varepsilon)$, dizemos que (S, M) é uniformemente estável.*

Definição 2.8. *Seja $\{T, X, A, S, T_o\}$ um SDH, dizemos que (S, M) é assintoticamente estável se (S, M) é estável e atrativo, ou seja, é estável e para qualquer $t_o \in T_o$, existe um $\eta = \eta(t_o) > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(p(t, a, t_o), M) = 0$ para todo $p(\cdot, a, t_o) \in S$, sempre que $d(a, M) < \eta$.*

Observação 2.1. *O conjunto dos pontos $a \in A$ que satisfazem a definição acima é chamado Domínio de Atração de (S, M) para o tempo t_o .*

Definição 2.9. *Seja $\{T, X, A, S, T_o\}$ um SDH, dizemos que (S, M) é uniformemente assintoticamente estável se (S, M) é uniformemente estável e uniformemente atrativo, ou seja, é uniformemente estável e existe um $\delta > 0$ (independente de t_o) e para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ (independente de t_o) tal que $d(p(t, a, t_o), M) < \varepsilon$ para todo $t \in \{t \in T_{a, t_o} : \rho(t, t_o) \geq \tau\}$ e todo $p(\cdot, a, t_o) \in S$, sempre que $d(a, M) < \delta$.*

Observação 2.2. *O conjunto dos pontos $a \in A$ que satisfazem a definição acima é chamado Domínio de Atração de (S, M) .*

Definição 2.10. *Seja $\{T, X, A, S, T_o\}$ um SDH, dizemos que (S, M) é exponencialmente estável se existe um $\alpha > 0$, e para todo $\varepsilon > 0$ e todo $t_o \in T_o$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, t_o) > 0$ tal que $d(p(t, a, t_o), M) < \varepsilon e^{-\alpha \cdot \rho(t, t_o)}$, para todo $t \in T_{a, t_o}$ e todo $p(\cdot, a, t_o) \in S$, sempre que $d(a, M) < \delta$.*

Por todo este capítulo, adotaremos os seguintes conceitos de instabilidade.

Definição 2.11. *Seja $\{T, X, A, S, T_o\}$ um SDH, dizemos que (S, M) é instável se para todo $\delta > 0$, existe um $p(\cdot, a, t_o) \in S$, com t_o independente de δ , e um $t_1 \in T_{a, t_o}$, tal que $d(a, M) < \delta$ e $d(p(t_1, a, t_o), M) \geq \varepsilon_o$, para algum $\varepsilon_o > 0$ que é independente de δ .*

Definiremos também o conceito de instabilidade completa, antes porém, necessitamos dos seguintes conceitos.

Definição 2.12. *Seja $\{T, X, A, S, T_o\}$ um SDH e seja $M \subset A$. Dizemos que o conjunto M é próprio com respeito a S , se para todo $\delta > 0$, existe um $p(\cdot, a, t_o) \in S$ com $T_{a, t_o} \neq \emptyset$ e $0 < d(a, M) < \delta$.*

Definição 2.13. *Um SDH $\{T, X_1, A_1, S_1, T_o\}$ é chamado um subsistema de um SDH $\{T, X, A, S, T_o\}$ se $X_1 \subset X$, $A_1 \subset A$ e $S_1 \subset S$.*

Definição 2.14. *Seja $\{T, X, A, S, T_o\}$ um SDH, dizemos que (S, M) é completamente instável se para todo subsistema \tilde{S} de S tal que M é próprio com respeito a \tilde{S} , (\tilde{S}, M) é instável.*

Exemplo 2.1. *Os SDH da forma como foram definidos aqui envolvem uma classe bastante ampla de sistemas. Para o caso de dimensão finita, o sistema a seguir pode ser usado para exemplificar os conceitos definidos anteriormente. Consideremos o sistema descrito por*

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + Bu(k), & k \leq t < k+1 \\ u(k+1) &= Cu(k) + Dx(k), & k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

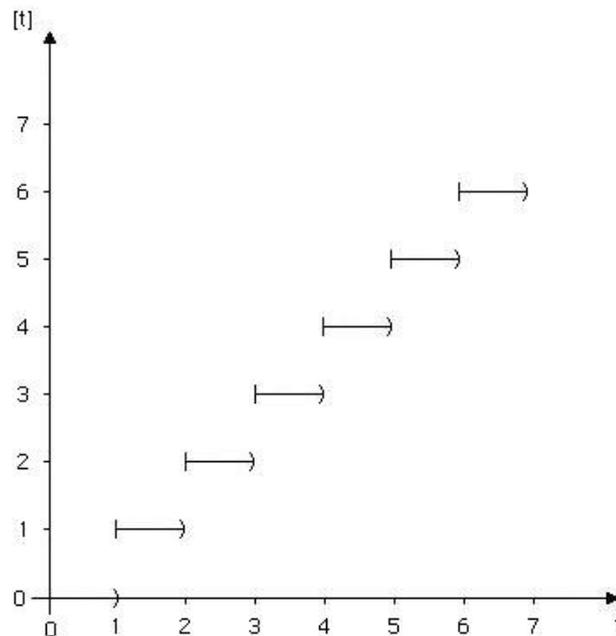
sendo $t \in \mathbb{R}^+$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $f \in C^1[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, $f(0) = 0$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$. O sistema acima constitui um caso particular de SDH, em que o espaço tempo é dado por

$$T := \{(t, k) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0, k = [t]\},$$

sendo que $[t]$ denota a parte inteira de t .

O espaço T é munido da métrica ρ , satisfazendo, para todo $r_1 = (t_1, k_1) \in T$, $r_2 = (t_2, k_2) \in T$, com $t_i \in [k_i, k_i + 1)$, $i = 1, 2$, a propriedade $\rho(r_1, r_2) = |t_2 - t_1|$. Além disso, T é completamente ordenado, de forma que $r_1 \prec r_2$ se, e somente se, $t_1 < t_2$. Neste caso temos $T_o = \{(k, k) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{N}\}$, e os deslocamentos do sistema são da forma $p(r) = [x(t)^T, u(k)^T]^T$, com $r = (t, k) \in T$. Além disso, o espaço estado é $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $A \subset X$.

Observamos ainda que este sistema pode ser visto como a interconexão de dois subsistemas, um regido por uma equação diferencial ordinária, definida em \mathbb{R}^+ (tempo contínuo), e outro regido por uma equação de diferença ordinária, definido em \mathbb{N} (tempo discreto). Mas o sistema inteiro está definido em $T \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}$. Esboçamos uma representação gráfica para o espaço T deste exemplo.

Figura 2.1: Representação gráfica de T para o Exemplo 2.1

2.3 Imersão de um SDH em um Sistema Dinâmico Descontínuo

Existem algumas dificuldades em se trabalhar com sistemas dinâmicos híbridos com espaço tempo da forma como foi definido, como o fato de que estes sistemas em geral são complexos e envolvem convergência com relação ao tempo generalizado. No entanto, é sempre possível transformar um sistema desse tipo em outro com propriedades idênticas, definido em um subconjunto de \mathbb{R} , de forma que seja facilitada sua análise e que se possa utilizar os resultados bem conhecidos para sistemas definidos em \mathbb{R} .

Esta transformação é feita, na verdade, por uma aplicação de imersão adequada, no sentido de que eles podem ser comparados e de forma que esta imersão preserve certas propriedades. Para isso, definimos a aplicação $g : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

- (i) $g(t_{min}) = 0$, sendo t_{min} o menor elemento em T ;
- (ii) $g(t) = \rho(t, t_{min})$ para $t \neq t_{min}$.

Note que g é uma bijeção de T em $\mathbb{R}_1 = g(T)$. Além disso, para quaisquer $t_1, t_2 \in T$ tais que $t_1 \prec t_2$, tem-se $\rho(t_1, t_2) = g(t_2) - g(t_1)$, uma vez que $g(t_2) = \rho(t_{min}, t_2) = \rho(t_{min}, t_1) + \rho(t_1, t_2) = g(t_1) + \rho(t_1, t_2)$.

Antes de definirmos a imersão de um SDH, necessitamos definir a imersão de um deslocamento.

Definição 2.15. *Sejam $\{T, X, A, S, T_o\}$ um SDH e x um elemento fixo de A , seja $g : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ a aplicação de imersão definida anteriormente. Suponha que $p(\cdot, a, t_o) \in S$ é um deslocamento definido em T_{a, t_o} . Seja $\mathbb{R}_{r_o}^+ = \{r \in \mathbb{R}^+ : r \geq r_o\}$ e seja $\tilde{p}(\cdot, a, r_o) : \mathbb{R}_{r_o}^+ \rightarrow X$ uma função com as seguintes propriedades:*

- (i) $r_o = g(t_o)$;
- (ii) $\tilde{p}(r, a, r_o) = p(g^{-1}(r), a, t_o)$, se $r \in \mathbb{R}_1 = g(T)$; e
- (iii) $\tilde{p}(r, a, r_o) = x$, se $r \notin \mathbb{R}_1$.

Chamamos o deslocamento $\tilde{p}(\cdot, a, r_o)$ de imersão de $p(\cdot, a, t_o)$ de T para \mathbb{R}^+ com respeito a x .

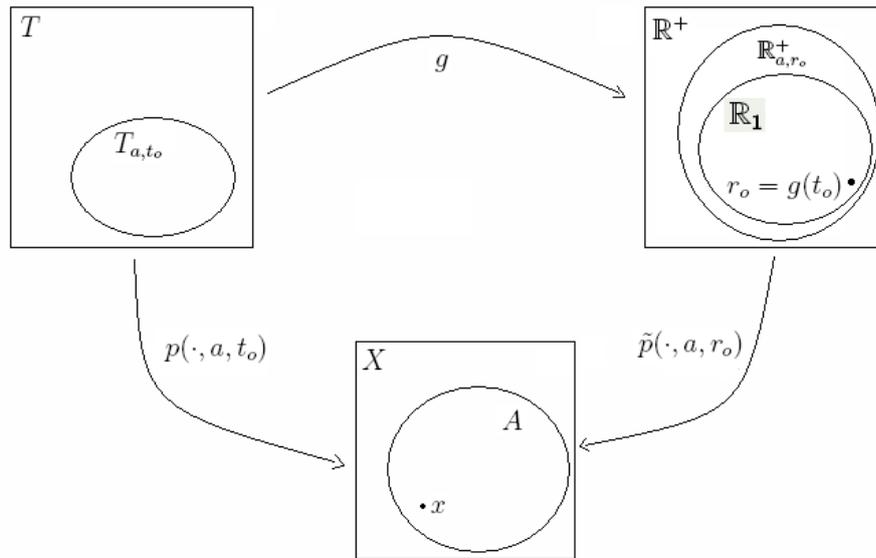


Figura 2.2: Representação da aplicação de imersão de um deslocamento.

Definição 2.16. *Sejam $\{T, X, A, S, T_o\}$ um SDH e x um elemento fixo de A . O SDH $\{\mathbb{R}^+, X, A, \tilde{S}, \mathbb{R}_o^+\}$ é chamado a imersão de $\{T, X, A, S, T_o\}$ de T para X com respeito a x , sendo $\mathbb{R}_o^+ = g(T_o)$ e $\tilde{S} = \{\tilde{p}(\cdot, a, r_o) : \tilde{p}(\cdot, a, r_o) \text{ é a imersão de } p(\cdot, a, t_o) \text{ com respeito a } x, p(\cdot, a, t_o) \in S\}$.*

Observação 2.3. *Através das definições anteriores é possível afirmar que todo SDH definido em tempo generalizado pode ser imerso em um SDH definido em tempo real, de forma que sejam preservadas as propriedades de estabilidade. Porém, o processo de imersão produz sistemas dinâmicos que em geral não são contínuos com respeito ao tempo. Sendo assim, é interessante enxergar um SDH definido em tempo generalizado como sendo (pelo processo de imersão) um sistema dinâmico descontínuo (SDD) definido em tempo real.*

Observação 2.4. As definições de estabilidade apresentadas anteriormente para sistemas dinâmicos híbridos são facilmente redefinidas para sistemas do tipo $\{\mathbb{R}^+, X, A, \tilde{S}, \mathbb{R}_o^+\}$. Note que na definição de imersão de um deslocamento, se $r \notin \mathbb{R}_1 = g(T)$, tem-se $\tilde{p}(r, a, r_o) = x$. Supondo então que $x \in M$, tem-se $d(x, M) = 0$. Com isso em mente é possível ver, por exemplo, que a definição de estabilidade do conjunto M para o SDH $\{T, X, A, S, T_o\}$, pode ser redefinida da seguinte forma:

"Considere o sistema $\{\mathbb{R}^+, X, A, \tilde{S}, \mathbb{R}_o^+\}$, dizemos que (\tilde{S}, M) é estável se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $r_o \in \mathbb{R}_o^+$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, r_o) > 0$, tal que $d(\tilde{p}(r, a, r_o), M) < \varepsilon$ para todo $r \in \mathbb{R}_{a, r_o}^+$ e todo $\tilde{p}(\cdot, a, r_o) \in \tilde{S}$, sempre que $d(a, M) < \delta$."

O resultado a seguir formaliza as afirmações feitas nesta seção.

Proposição 2.1. Considere o SDH $\{T, X, A, S, T_o\}$, sejam $M \subset A$ um subconjunto invariante para S e x um elemento fixo em M . Seja $\{\mathbb{R}^+, X, A, \tilde{S}, \mathbb{R}_o^+\}$ a imersão de $\{T, X, A, S, T_o\}$ de T para \mathbb{R}^+ com respeito a x . Então M é também um subconjunto invariante para o sistema \tilde{S} , além disso (S, M) e (\tilde{S}, M) possuem propriedades de estabilidade idênticas.

Demonstração: (i) Mostremos inicialmente que as invariâncias de (S, M) e (\tilde{S}, M) são equivalentes. Suponhamos que (S, M) é invariante, então dado $a \in M$, temos que $p(t, a, t_o) \in M$ para todo $t \in T_{a, t_o}$, todo $t_o \in T_o$ e todo $p(\cdot, a, t_o) \in S$. Mas, para todo $\tilde{p}(r, a, r_o) \in \tilde{S}$, temos

$$\tilde{p}(r, a, r_o) = \begin{cases} x, & \text{se } r \notin \mathbb{R}_1; \\ p(g^{-1}(r), a, g^{-1}(r_o)), & \text{se } r \in \mathbb{R}_1. \end{cases}$$

com $r \in \mathbb{R}_{a, r_o}^+$ e $r_o \in \mathbb{R}_o^+$. Como $x \in M$, segue que (\tilde{S}, M) é invariante.

Agora suponha que (\tilde{S}, M) é invariante, então dado $a \in M$, temos que $\tilde{p}(r, a, r_o) \in M$ para todo $r \in \mathbb{R}_{a, r_o}^+$, todo $r_o \in \mathbb{R}_o^+$ e todo $\tilde{p}(\cdot, a, r_o) \in \tilde{S}$. Uma vez que para todo $p(t, a, t_o) \in S$, temos

$$p(t, a, t_o) = \tilde{p}(g(t), a, g(t_o)),$$

segue que $p(t, a, t_o) \in M$, ou seja, (S, M) é invariante.

(ii) Mostremos agora que a estabilidade uniforme de (S, M) é equivalente à de (\tilde{S}, M) . Suponhamos que (S, M) é uniformemente estável, por definição, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $t_o \in T_o$, tem-se $d(p(t, a, t_o), M) < \varepsilon$ sempre que $d(a, M) < \delta$, para todo $a \in A$, todo $t \in T_{a, t_o}$ e todo $p(t, a, t_o) \in S$. Desde que para todo $\tilde{p}(r, a, r_o) \in \tilde{S}$, temos

$$d(\tilde{p}(r, a, r_o), M) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \notin \mathbb{R}_1; \\ d(p(g^{-1}(r), a, g^{-1}(r_o)), M), & \text{se } r \in \mathbb{R}_1, \end{cases} \quad (2.2)$$

com $r \in \mathbb{R}_{a, r_o}^+$ e $r_o \in \mathbb{R}_o^+$, quando $d(a, M) < \delta$, temos $d(\tilde{p}(r, a, r_o), M) = 0 < \varepsilon$, se $r \notin \mathbb{R}_1$, e

$d(\tilde{p}(r, a, r_o), M) = d(p(g^{-1}(r), a, g^{-1}(r_o)), M) < \varepsilon$, se $r \in \mathbb{R}_1$, portanto (\tilde{S}, M) é uniformemente estável.

Suponhamos agora que (\tilde{S}, M) é uniformemente estável, então para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $r_o \in \mathbb{R}_o^+$, tem-se $d(\tilde{p}(r, a, r_o), M) < \varepsilon$ sempre que $d(a, M) < \delta$, para todo $a \in A$, todo $r_o \in \mathbb{R}_o^+$ e todo $\tilde{p}(\cdot, a, r_o) \in \tilde{S}$. Dessa forma, para todo $p(t, a, t_o) \in S$ tal que $d(a, M) < \delta$, temos $d(p(t, a, t_o), M) = d(\tilde{p}(g(t), a, g(t_o)), M) < \varepsilon$. Portanto (S, M) é uniformemente estável.

(iii) Provemos que a estabilidade assintótica uniforme de (S, M) é equivalente à de (\tilde{S}, M) . Suponhamos que (S, M) é uniformemente assintoticamente estável, conseqüentemente (S, M) é uniformemente estável, e pelo que provamos anteriormente, (\tilde{S}, M) é também uniformemente estável. Além disso, existe um $\delta > 0$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ tal que $d(p(t, a, t_o), M) < \varepsilon$ para todo $t \in \{t \in T_{a, t_o} : \rho(t, t_o) \geq \tau\}$ e todo $p(\cdot, a, t_o) \in S$, sempre que $d(a, M) < \delta$, com $a \in A$. Agora, para todo $\tilde{p}(r, a, r_o) \in \tilde{S}$ tal que $d(a, M) < \delta$, temos que (2.2) vale, além disso, desde que $r - r_o = \rho(g^{-1}(r), g^{-1}(r_o))$ e $\rho(t, t_o) \geq \tau$, temos $r - r_o \geq \tau$. Portanto, $d(\tilde{p}(r, a, r_o), M) < \varepsilon$, para todo $r \in \{r \in \mathbb{R}_o^+ : r - r_o \geq \tau\}$. Concluimos assim que (\tilde{S}, M) é uniformemente assintoticamente estável.

Suponhamos agora que (\tilde{S}, M) é uniformemente assintoticamente estável, então (\tilde{S}, M) é uniformemente estável, logo (S, M) é uniformemente estável, e mais, existe um $\delta > 0$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ tal que $d(\tilde{p}(r, a, r_o), M) < \varepsilon$ para todo $r \in \{r \in \mathbb{R}_o^+ : r - r_o \geq \tau\}$ e todo $\tilde{p}(r, a, r_o) \in \tilde{S}$, sempre que $d(a, M) < \delta$, com $a \in A$. Dessa forma, para todo $p(t, a, t_o) \in S$ tal que $d(a, M) < \delta$, desde que $r - r_o \geq \tau$ implica $\rho(t, t_o) = g(t) - g(t_o) = r - r_o \geq \tau$, temos $d(p(t, a, t_o), M) = d(\tilde{p}(g(t), a, g(t_o)), M) < \varepsilon$, para todo $t \in \{t \in T_{a, t_o} : \rho(t, t_o) \geq \tau\}$. Portanto (S, M) é uniformemente assintoticamente estável.

(iv) Provemos ainda que a estabilidade exponencial de (S, M) é equivalente à de (\tilde{S}, M) . Primeiramente, suponhamos que (S, M) é exponencialmente estável, então existe um $\alpha > 0$, e para todo $\varepsilon > 0$ e todo $t_o \in T_o$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, t_o) > 0$ tal que $d(p(t, a, t_o), M) < \varepsilon e^{-\alpha \cdot \rho(t, t_o)}$ para todo $t \in T_{a, t_o}$ e todo $p(\cdot, a, t_o) \in S$, sempre que $d(a, M) < \delta$. Para todo $\tilde{p}(r, a, r_o) \in \tilde{S}$ tal que $d(a, M) < \delta$, temos que (2.2) vale, portanto

$$\begin{aligned} d(\tilde{p}(r, a, r_o), M) &= d(p(g^{-1}(r), a, g^{-1}(r_o)), M) \\ &< \varepsilon e^{-\alpha \cdot \rho(t, t_o)} \\ &= \varepsilon e^{-\alpha \cdot (g(t) - g(t_o))} \\ &= \varepsilon e^{-\alpha \cdot (r - r_o)}, \end{aligned}$$

para todo $r \in \mathbb{R}_o^+$. Logo (\tilde{S}, M) é exponencialmente estável.

Agora, se (\tilde{S}, M) é exponencialmente estável, existe um $\alpha > 0$, e para todo $\varepsilon > 0$ e todo $r_o \in \mathbb{R}_o^+$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, r_o) > 0$ tal que $d(\tilde{p}(r, a, r_o), M) < \varepsilon e^{-\alpha \cdot (r - r_o)}$ para todo $r \in \mathbb{R}_o^+$ e todo

$\tilde{p}(r, a, r_o) \in \tilde{S}$, sempre que $d(a, M) < \delta$. Para todo $p(t, a, t_o) \in S$ tal que $d(a, M) < \delta$, temos

$$\begin{aligned} d(p(t, a, t_o), M) &= d(\tilde{p}(g(t), a, g(t_o))) \\ &< \varepsilon e^{-\alpha \cdot (r - r_o)} \\ &= \varepsilon e^{-\alpha \cdot (g(t) - g(t_o))} \\ &= \varepsilon e^{-\alpha \cdot \rho(t, t_o)}, \end{aligned}$$

para todo $t \in T_{a, t_o}$. Portanto (S, M) é exponencialmente estável. \square

A demonstração acima é bastante repetitiva para os vários tipos de estabilidade, porém esse desenvolvimento ajuda a elucidar o processo de imersão.

Daqui por diante, simplificaremos ainda mais a notação, haja vista a familiarização com os conceitos até aqui apresentados. Sem perda de generalidade, vamos supor que $\mathbb{R}_o^+ = \mathbb{R}^+$, $T = T_o$ e $S = \tilde{S}$. Também omitiremos a referência a \mathbb{R}_o^+ , escrevendo $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ no lugar de $\{\mathbb{R}^+, X, A, S, \mathbb{R}_o^+\}$.

Exemplo 2.2. Já apresentamos um exemplo de SDH, observamos no entanto que muitos destes sistemas podem ser descritos por equações da forma

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(\tau_k)), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \\ u(\tau_{k+1}) &= g(x(\tau_{k+1}^-), u(\tau_k)), & k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

sendo $t \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(\tau_k) \in \mathbb{R}^m$, $f, g \in C^1[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n]$ e $E = \{\tau_o, \tau_1, \dots : \tau_o < \tau_1 < \dots\}$ um conjunto fechado, discreto e ilimitado. Para este sistema, supomos que $f(0, 0) = 0$ e $g(0, 0) = 0$, além disso lembramos que $x(\tau^-) := \lim_{\theta \rightarrow 0^+} x(\tau - \theta)$.

Para exemplificar o processo de imersão, consideremos o sistema de controle descrito por equações da forma

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_k x(t) + B_k u(\tau_k), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \\ u(\tau_{k+1}) &= C_k u(\tau_k) + D_k x(\tau_{k+1}^-), & k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

sendo $t \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(\tau_k) \in \mathbb{R}^m$ e A_k, B_k, C_k, D_k matrizes reais de dimensões apropriadas.

Assim definida, a equação (2.4) determina um SDH $\{T, X, A, S, T_o\}$, para o qual $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $T = \{(t, \tau_k) \in \mathbb{R}^2 : \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, k \in \mathbb{N}\}$ e $T_o = \{(\tau_k, \tau_k) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{N}\}$. Supondo $A = X$, as soluções de (2.4) determinam o conjunto S de deslocamentos $p(r, a, r_o)$, sendo $r = (t, \tau_k) \in T \subset \mathbb{R}^2$, $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, $r_o = (\tau_{k_o}, \tau_{k_o})$, $k_o \in \mathbb{N}$, e $a = (x(\tau_{k_o})^T, u(\tau_{k_o})^T)^T$. Dessa forma, os deslocamentos em S são da forma $p(r, a, r_o) = (x(t)^T, u(\tau_k)^T)$. Observamos ainda que o conjunto T é munido da métrica ρ , satisfazendo, para todo $r_1 = (t_1, \tau_1) \in T$, $r_2 = (t_2, \tau_2) \in T$,

com $t_i \in [\tau_{k_i}, \tau_{k_i+1})$, $i = 1, 2$, a propriedade $\rho(r_1, r_2) = |t_2 - t_1|$. Além disso, T é completamente ordenado, de forma que $r_1 \prec r_2$ se, e somente se, $t_1 \leq t_2$.

Com a notação utilizada acima, usaremos uma aplicação para imergir o sistema determinado por (2.4) em um sistema dinâmico híbrido definido em \mathbb{R}^+ . Para isso definimos a aplicação $g(r) = \rho(r, r_{min})$. Dessa forma, tomando $r_{min} = (0, 0)$ temos

$$g(r) = \rho(r, r_{min}) = |t - 0| = |t|.$$

Os deslocamentos relativos ao novo sistema \tilde{S} são então definidos por $\tilde{p}(t) = (\tilde{x}(t)^T, \tilde{u}(t)^T)^T$, sendo

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x(t), & t \geq \tau_{k_o} \in \mathbb{N} \\ \tilde{u}(t) &= u(\tau_k), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, k \geq k_o \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \tilde{x}(t^-), & t = \tau_k \\ \tilde{u}(t^-) &= u(\tau_k), & t = \tau_{k+1} \\ \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} &= 0, & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \text{ para todo } k \geq k_o \end{aligned}$$

Denotamos $y(t) = (\tilde{x}(t)^T, \tilde{u}(t)^T)^T$, assim o conjunto de deslocamentos \tilde{S} pode ser determinado pelas soluções das equações diferenciais

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(t), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, k \in \mathbb{N}, \\ y(t) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_k & C_k \end{pmatrix} y(t^-), & t = \tau_{k+1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Portanto o SDH $\{\mathbb{R}^+, X, A, \tilde{S}, \mathbb{R}_o^+\}$ é uma imersão de $\{T, X, A, S, T_o\}$ de T para R^+ , sendo $\mathbb{R}_o^+ = g(T_o)$.

Fazendo

$$F_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_k = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_k & C_k \end{pmatrix},$$

obtemos o sistema equivalente

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= F_k y(t), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \\ y(t) &= H_k y(t^-), & t = \tau_{k+1}, k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Para ilustrar, apresentamos um esboço do gráfico do espaço tempo para este exemplo.

Finalizando esta seção, lembramos que as discontinuidades dos sistemas que trabalharemos

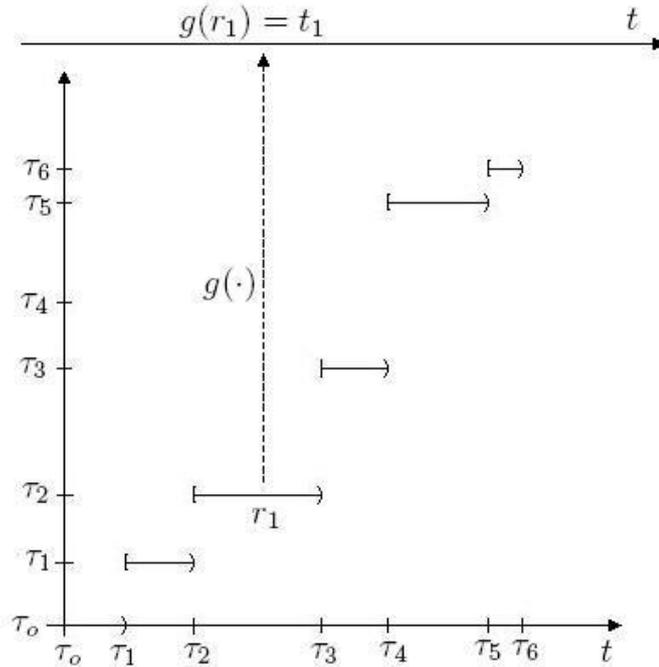


Figura 2.3: Representação gráfica do espaço tempo na imersão do *SDH* para o Exemplo 2.2.

surtem de variadas formas, em particular, pelo processo de imersão do *SDH*. Para garantirmos resultados que sejam razoáveis, é necessário impor algumas restrições sobre estas discontinuidades. Assim, suporemos neste trabalho que para um dado deslocamento $p \in S$, o conjunto dos pontos de discontinuidades é fechado, discreto e ilimitado e denotamos

$$E_p = \{\tau_o^p, \tau_1^p, \dots : 0 \leq \tau_o^p < \tau_1^p < \dots\}.$$

Quando E_p é idêntico para todo $p \in S$, denotamos

$$E = \{\tau_o, \tau_1, \dots : 0 \leq \tau_o < \tau_1 < \dots\}.$$

2.4 Aplicações que Preservam Estabilidade

Na análise de sistemas dinâmicos, é comum o uso do Método Direto de Lyapunov, que faz uso de funções auxiliares chamadas funções de Lyapunov. Estas funções geralmente estão associadas ao conceito de energia ou distância generalizada, em que o estudo qualitativo de um sistema é feito analisando-se o comportamento destas funções ao longo dos deslocamentos deste sistema. Este método tem sido muito estudado e conta com uma vasta teoria desenvolvida ao longo de muitos anos. Porém, no que diz respeito a sistemas dinâmicos híbridos ou descontínuos, a teoria apresentada envolve somente algumas classes especiais, sendo que um procedimento mais sistemático do estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos híbridos ou

descontínuos mais gerais surgiu recentemente em trabalhos como (11, 12, 13, 14, 16, 18).

Nesta seção, apresentamos uma teoria alternativa para a análise qualitativa de *SDH* e *SDD*, que faz uso das aplicações que preservam a estabilidade do sistema, de forma que o estudo qualitativo possa se dar no contexto da teoria da comparação. Tais aplicações generalizam as funções de Lyapunov, e recebem este nome por estabelecer a equivalência entre as propriedades qualitativas de um conjunto invariante M_1 associado ao sistema S_1 e um conjunto M_2 associado ao sistema S_2 . Sendo assim, supondo bem conhecidas as propriedades qualitativas de (S_2, M_2) , é possível determinar as propriedades de (S_1, M_1) .

Os primeiros trabalhos envolvendo aplicações que preservam estabilidade foram desenvolvidos por (21, 22). Para sistemas dinâmicos do tipo que estão sendo tratados aqui, essas aplicações foram exploradas de forma inovadora em trabalhos como (19, 20, 25, 24, 30). Reunimos então os principais resultados sobre estas aplicações que serão utilizados como suporte nos teoremas de estabilidade de Lyapunov a serem apresentados na próxima seção. O conteúdo está apresentado de forma resumida tendo em vista o objetivo de sua utilização como ferramenta no restante do trabalho.

Antes de definirmos aplicações que preservam estabilidade, apresentamos alguns conceitos que serão constantemente utilizados.

Definição 2.17. Dizemos que uma função contínua $\psi : [0, r_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ pertence à classe K se $\psi(0) = 0$ e se ψ é estritamente crescente em $[0, r_1]$. Se $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, se $\psi \in K$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \infty$, então dizemos que ψ pertence à classe $K\mathbb{R}$.

Na definição anterior, o intervalo $[0, r_1]$ pode ser substituído por $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

Definição 2.18. Um deslocamento p de um *SDD* $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ pertence à classe W se $p(t, a, t_0^p)$ é diferenciável com respeito a $\Omega_p - E_p$ e diferenciável à direita em todo ponto de E_p , sendo E_p o conjunto dos pontos de descontinuidades do deslocamento considerado, o qual supomos ser fechado, discreto e ilimitado, e sendo Ω_p o domínio de definição de p , que aceitamos ser da forma $[t_0^p, \infty)$.

Agora, sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) dois espaços métricos e $\{\mathbb{R}^+, X_1, A_1, S_1\}$ um *SDD*. Seja $V : X_1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X_2$ uma aplicação com a propriedade de que para todo deslocamento $p(\cdot, a, t_0) \in S$, a função

$$q(\cdot, b, t_0) = V(p(\cdot, a, t_0), \cdot), \quad b = V(a, t_0),$$

é também um deslocamento com $\mathbb{R}_{a, t_0} = \mathbb{R}_{b, t_0}$ e $b \in A_2$, sendo A_2 um subconjunto apropriado de X_2 e $\mathbb{R}_{a, t_0} = \{t \in \mathbb{R}^+ : t \geq t_0\}$. Além disso, o conjunto de pontos de descontinuidades de p e

q satisfazem $E_q \subset E_p$ e S_2 é o conjunto dos deslocamentos q obtidos variando a em A_1 e t_o em \mathbb{R}^+ . Nestas condições, tem-se que $\{\mathbb{R}^+, X_2, A_2, S_2\}$ também é um *SDD*.

A aplicação V da forma como foi descrita, induz ainda uma aplicação de S_1 para S_2 , que denotaremos por \mathcal{V} , sendo que $S_2 = \mathcal{V}(S_1)$. Sejam ainda $M_1 \subset A_1$ e $M_2 \subset A_2$ tais que (S_1, M_1) e (S_2, M_2) são invariantes, sendo

$$M_2 = \{x_2 \in X_2 : x_2 = V(x_1, t') \text{ para algum } x_1 \in M_1 \text{ e algum } t' \in \mathbb{R}^+\}.$$

Definição 2.19. *Sejam $\{\mathbb{R}^+, X_1, A_1, S_1\}$ e $\{\mathbb{R}^+, X_2, A_2, S_2\}$ dois SDD com conjuntos invariantes $M_1 \subset A_1$ e $M_2 \subset A_2$ respectivamente. Dizemos que $V : X_1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X_2$ é uma aplicação que preserva estabilidade de S_1 para S_2 , se V satisfaz*

(i) O conjunto S_2 é dado por

$$S_2 = \mathcal{V}(S_1) := \{q(\cdot, b, t_o) : q(t, b, t_o) = V(p(t, a, t_o), t), p(\cdot, a, t_o) \in S_1, \\ \text{com } b = V(a, t_o) \text{ e } \mathbb{R}_{b, t_o} = \mathbb{R}_{a, t_o}, a \in A_1, t_o \in \mathbb{R}^+\}$$

(ii) O conjunto M_2 é dado por

$$M_2 = V(M_1 \times \mathbb{R}^+) = \{x_2 \in X_2 : x_2 = V(x_1, t'), \text{ para algum } x_1 \in M_1, t' \in \mathbb{R}^+\};$$

(iii) A invariância de (S_1, M_1) é equivalente à invariância de (S_2, M_2) , ou seja, (S_1, M_1) é invariante se, e somente se (S_2, M_2) é invariante;

(iv) A estabilidade de (S_1, M_1) é equivalente à estabilidade de (S_2, M_2) .

Dizemos que V é uma aplicação que preserva estabilidade fortemente de (S_1, M_1) para (S_2, M_2) se V satisfaz (i), (ii), (iii) e (iv) e ainda satisfaz

(v) A estabilidade assintótica, estabilidade uniforme, e estabilidade assintótica uniforme de (S_1, M_1) e (S_2, M_2) são equivalentes, respectivamente.

Dizemos que V é uma aplicação que preserva estabilidade exponencialmente de (S_1, M_1) para (S_2, M_2) se V satisfaz as propriedades (i) – (iv) e ainda satisfaz

(vi) A estabilidade exponencial de (S_1, M_1) e (S_2, M_2) são equivalentes.

Do que foi definido acima, a seguinte observação torna-se natural.

Observação 2.5. *Seja V uma aplicação que preserva estabilidade de (S_1, M_1) para (S_2, M_2) , então (S_1, M_1) é instável se, e somente se (S_2, M_2) é instável.*

Teorema 2.1. *Sejam $\{\mathbb{R}^+, X_i, A_i, S_i\}$, $i = 1, 2$, dois SDD e $M_i \subset A_i$, $i = 1, 2$ dois conjuntos fechados. Suponha que exista uma aplicação $V : X_1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X_2$ satisfazendo:*

(i) $\mathcal{V}(S_1) = S_2$;

(ii) *Existem $\psi_1, \psi_2 \in K$, definidas em \mathbb{R}^+ , tais que*

$$\psi_1(d_1(x, M_1)) \leq d_2(V(x, t), M_2) \leq \psi_2(d_1(x, M_1)) \quad (2.7)$$

para todo $x \in X_1$, e todo $t \in \mathbb{R}^+$, sendo d_1 e d_2 métricas definidas em X_1 e X_2 , respectivamente.

Então,

(a) *A invariância de (S_1, M_1) é equivalente à invariância de (S_2, M_2) ;*

(b) *V é uma aplicação que preserva estabilidade fortemente;*

(c) *Se em (2.7), $\psi_i(r) = c_i r^\alpha$, $c_i > 0$, $\alpha > 0$, $i = 1, 2$, então a estabilidade exponencial de (S_1, M_1) é equivalente à estabilidade exponencial de (S_2, M_2) .*

O teorema apresentado acima constitui uma forte afirmação dentro da teoria de comparação, porém em aplicações práticas suas hipóteses são muito restritivas, pois geralmente os sistemas não satisfazem a relação $\mathcal{V}(S_1) = S_2$. No entanto, é muito mais geral a situação em que $\mathcal{V}(S_1) \subset S_2$ ou $\mathcal{V}(S_1) \supset S_2$, sendo assim, quando a intenção é provar que as propriedades qualitativas de (S_1, M_1) implicam as propriedades qualitativas de (S_2, M_2) , supõe-se que $\mathcal{V}(S_1) \supset S_2$, e para o caso inverso supõe-se que $\mathcal{V}(S_1) \subset S_2$. Dessa forma o teorema anterior pode ser modificado de modo a se tornar mais abrangente nas aplicações.

Teorema 2.2. *Sejam $\{\mathbb{R}^+, X_i, A_i, S_i\}$, $i = 1, 2$, dois SDD e $M_i \subset A_i$, $i = 1, 2$ dois conjuntos fechados. Suponha que exista uma aplicação $V : X_1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X_2$ satisfazendo:*

(i) $\mathcal{V}(S_1) \subset S_2$;

(ii) *Existem $\psi_1, \psi_2 \in K$, definidas em \mathbb{R}^+ , tais que*

$$\psi_1(d_1(x, M_1)) \leq d_2(V(x, t), M_2) \leq \psi_2(d_1(x, M_1)), \quad (2.8)$$

para todo $x \in X_1$, e todo $t \in \mathbb{R}^+$, sendo d_1 e d_2 métricas definidas em X_1 e X_2 , respectivamente.

Então,

- (a) A invariância de (S_2, M_2) implica a invariância de (S_1, M_1) ;
- (b) A estabilidade, estabilidade uniforme, estabilidade assintótica e estabilidade assintótica uniforme de (S_2, M_2) implica os mesmos correspondentes tipos de estabilidade de (S_1, M_1) ;
- (c) Se em (2.8), $\psi_1(r) = cr^\alpha$, $c > 0$, $\alpha > 0$ então a estabilidade exponencial de (S_2, M_2) implica a estabilidade exponencial de (S_1, M_1) .

Demonstração: (a) Suponhamos que (S_2, M_2) é invariante, então para todo $a \in M_1$ e todo $p(\cdot, a, t_o) \in S_1$, desde que $S_2 \supset \mathcal{V}(S_1) := \{q(\cdot, b, t_o) : q(t, b, t_o) = V(p(t, a, t_o), t), p(\cdot, a, t_o) \in S_1, \text{ com } b = V(a, t_o) \text{ e } \mathbb{R}_{b, t_o} = \mathbb{R}_{a, t_o}, a \in A_1, t_o \in \mathbb{R}^+\}$ temos que $q(\cdot, b, t_o) = V(p(\cdot, a, t_o), t) \in S_2$. Como (S_2, M_2) é invariante, segue que $q(t, b, t_o) = V(p(t, a, t_o), t) \in M_2$ para todo $t \in \mathbb{R}_{b, t_o} = \mathbb{R}_{a, t_o}$. Dessa forma, por (2.8), temos

$$\psi_1(d_1(p(t, a, t_o), M_1)) \leq 0 \leq \psi_2(d_1(p(t, a, t_o), M_1)).$$

Desde que $\psi_1, \psi_2 \in K$, temos $d_1(p(t, a, t_o), M_1) = 0$, e como M_1 é fechado, segue que $p(t, a, t_o) \in M_1$ para todo $t \in \mathbb{R}_{a, t_o}$, ou seja, (S_1, M_1) é invariante.

(b) Faremos a demonstração da estabilidade e estabilidade assintótica, as outras seguem de forma análoga.

◇ Suponhamos que (S_2, M_2) é estável, então para todo $\varepsilon_2 > 0$ e todo $t_o \in \mathbb{R}^+$, existe um $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2, t_o) > 0$ tal que $d_2(q(t, b, t_o), M_2) < \varepsilon_2$ para todo $q(\cdot, b, t_o) \in S_2$ e todo $t \in \mathbb{R}_{b, t_o}$, sempre que $d_2(b, M_2) < \delta_2$. Mostremos então que (S_1, M_1) é estável. Para todo $\varepsilon_1 > 0$ e todo $t_o \in \mathbb{R}^+$, escolhemos $\varepsilon_2 = \psi_1(\varepsilon_1)$ e $\delta_1 = \psi_2^{-1}(\delta_2)$, então se $d_1(a, M_1) < \delta_1$, novamente por (2.8), vale

$$d_2(b, M_2) = d_2(V(a, t_o), M_2) \leq \psi_2(d_1(a, M_1)) < \psi_2(\delta_1) = \delta_2.$$

Portanto para todo $q(\cdot, b, t_o) \in S_2$ e todo $t \in \mathbb{R}_{b, t_o}$, tem-se $d_2(q(t, b, t_o), M_2) < \varepsilon_2$. Dessa forma, para todo $p(\cdot, a, t_o) \in S_1$ e todo $t \in \mathbb{R}_{b, t_o} = \mathbb{R}_{a, t_o}$, (2.8) implica que

$$\begin{aligned} d_1(p(t, a, t_o), M_1) &\leq \psi_1^{-1}(d_2(V(p(t, a, t_o), t), M_2)) \\ &= \psi_1^{-1}(d_2(q(t, b, t_o), M_2)) \\ &< \psi_1^{-1}(\varepsilon_2) \\ &= \varepsilon_1, \end{aligned}$$

sempre que $d_1(a, M_1) < \delta_1$. Portanto (S_1, M_1) é estável. A estabilidade uniforme prova-se da mesma maneira, tomando-se δ_2 independente de t_o .

◇ Mostremos agora que (S_1, M_1) é assintoticamente estável. Para isso, basta mostrarmos que (S_1, M_1) é atrativo. Suponhamos que (S_2, M_2) é atrativo, assim, para todo $t_o \in \mathbb{R}^+$, existe um

$\eta_2 = \eta_2(t_0) > 0$ de forma que para todo $\varepsilon_2 > 0$, existe um $\tau = \tau(\varepsilon_2, t_0, q) > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}_{b, t_0 + \tau}$, se $d_2(b, M_2) < \eta_2$ então $d_2(q(t, b, t_0), M_2) < \varepsilon_2$. Agora, para todo $p(\cdot, a, t_0) \in S_1$, com $b = V(a, t_0)$, desde que $\mathcal{V}(S_1) \subset S_2$ temos que $q(\cdot, b, t_0) = V(p(\cdot, a, t_0), t) \in S_2$. Assim, para todo $\varepsilon_1 > 0$, escolhemos $\varepsilon_2 = \psi_1(\varepsilon_1)$ e fazemos $\eta_1 = \psi_2^{-1}(\eta_2)$, então para todo $p(\cdot, a, t_0) \in S_1$, se $t \in \mathbb{R}_{a, t_0 + \tau} = \mathbb{R}_{b, t_0 + \tau}$, temos por (2.8)

$$d_2(b, M_2) = d_2(V(a, t_0), M_2) \leq \psi_2(d_1(a, M_1)) < \psi_2(\eta_1) = \eta_2,$$

sempre que $d_1(a, M_1) < \eta_1$, o que implica que $d_2(q(t, b, t_0), M_2) < \varepsilon_2 = \psi_1(\varepsilon_1)$ para todo $t \in \mathbb{R}_{a, t_0 + \tau}$. Então vale

$$\begin{aligned} d_1(p(t, a, t_0), M_1) &\leq \psi_1^{-1}(d_2(q(t, b, t_0), M_2)) \\ &< \psi_1^{-1}(\varepsilon_2) \\ &= \psi_1^{-1}(\psi_1(\varepsilon_1)) \\ &= \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Portanto (S_1, M_1) é atrativo, logo assintoticamente estável.

Novamente, a demonstração da estabilidade uniforme assintótica de (S_1, M_1) , segue-se facilmente escolhendo-se η_2 independente de t_0 .

(c) Suponhamos que (S_2, M_2) é exponencialmente estável, então existe um $\alpha_2 > 0$ e para todo $\varepsilon_2 > 0$, existe um $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2) > 0$ tal que para todo $q(\cdot, b, t_0) = V(p(\cdot, a, t_0), t) \in S_2$, tem-se $d_2(q(t, b, t_0), M_2) < \varepsilon_2 e^{-\alpha_2(t-t_0)}$ para todo $t \in \mathbb{R}_{b, t_0}$, sempre que $d_2(b, M_2) < \delta_2$.

Agora, para todo $p(\cdot, a, t_0) \in S_1$, com $b = V(a, t_0)$, como $\mathcal{V}(S_1) \subset S_2$ temos que $q(\cdot, b, t_0) = V(p(\cdot, a, t_0), t) \in S_2$. Assim, para todo $\varepsilon_1 > 0$, escolhemos $\varepsilon_2 = (c\varepsilon_1)^b$ e fazemos $\alpha_1 = \frac{\alpha_2}{b}$ e $\delta_1 = \psi_2^{-1}(\delta_2)$. Então para todo $p(\cdot, a, t_0) \in S_1$, e todo $t \in \mathbb{R}_{a, t_0}$, temos por (2.8)

$$d_2(b, M_2) \leq \psi_2(d_1(a, M_1)) < \psi_2(\delta_1) = \delta_2,$$

sempre que $d_1(a, M_1) < \delta_1$, o que implica que $d_2(q(t, b, t_0), M_2) < \varepsilon_2 e^{-\alpha_2(t-t_0)}$ para todo $t \in \mathbb{R}_{a, t_0}$. Como $\psi_1(r) = cr^\alpha$, temos

$$c(d_1(x, M_1))^\alpha \leq d_2(V(x, t), M_2),$$

logo

$$\begin{aligned}
 d_1(p(t, a, t_o), M_1) &\leq \left[\frac{1}{c} (d_2(q(t, b, t_o), M_2)) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \\
 &< \left[\frac{1}{c} (\varepsilon_2 e^{-\alpha_2(t-t_o)}) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \\
 &= \left(\frac{\varepsilon_2}{c} \right)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha}(t-t_o)} \\
 &= \varepsilon_1 e^{-\alpha_1(t-t_o)}.
 \end{aligned}$$

Portanto (S_1, M_1) é exponencialmente estável. \square

Encerramos esta seção com duas observações importantes sobre aplicações que preservam estabilidade.

Observação 2.6. *Como comentamos no início da seção, existem várias definições para funções de Lyapunov. Além disso, da forma como utilizamos, é natural questionar a relação entre aplicações que preservam estabilidade e funções de Lyapunov. Na verdade, toda função de Lyapunov é uma aplicação que preserva estabilidade, mas a recíproca não é verdadeira. Como exemplo, consideramos a aplicação $V : X \rightarrow X$ dada por $V(x) = x$ para todo $x \in X$. Então para todo sistema dinâmico $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ a aplicação V é do tipo que preserva estabilidade deste sistema para ele mesmo. No entanto, esta não é uma função de Lyapunov sobre qualquer uma das definições existentes.*

Observação 2.7. *É interessante ressaltar que para um dado sistema dinâmico $\{\mathbb{R}^+, X_1, A_1, S_1\}$ e um subconjunto $M_1 \subset A_1$, é sempre possível encontrar um outro sistema dinâmico $\{\mathbb{R}^+, X_2, A_2, S_2\}$, um subconjunto $M_2 \subset A_2$ e uma aplicação $V : X_1 \rightarrow X_2$ tal que V preserva as propriedades qualitativas de (S_1, M_1) para (S_2, M_2) . Para isso, tomamos $X_2 = \mathbb{R}$ e $M_2 = \{0\}$. Provemos esta afirmação por meio de um teorema.*

Teorema 2.3. *Considere o sistema dinâmico $\{\mathbb{R}^+, X_1, A_1, S_1\}$. Sejam $M_1 \subset A_1$ e $M_2 = \{0\}$. Então existem um sistema dinâmico $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, A_2, S_2\}$ e uma aplicação $V : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se M_1 é fechado, a invariância de (S_1, M_1) é equivalente à de (S_2, M_2) e V é uma aplicação que preserva a estabilidade fortemente.*

Demonstração: *Definimos*

$$V(x) = d_1(x, M_1),$$

para todo $x \in X_1$, sendo d_1 a métrica em X_1 . Além disso, seja

$$\begin{aligned}
 S_2 = \mathcal{V}(S_1) := & \{q(\cdot, b, t_o) : q(t, b, t_o) = V(p(t, a, t_o)), p(\cdot, a, t_o) \in S_1, \\
 & \text{com } b = V(a) \text{ e } \mathbb{R}_{b, t_o} = \mathbb{R}_{a, t_o}, a \in A_1, t_o \in \mathbb{R}^+\}.
 \end{aligned}$$

Sejam $A_2 = V(A_1)$ e $M_2 = \{0\} = V(M_1)$, assim, $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, V(A_1), S_2\}$ é um sistema dinâmico. Agora, aplicando o Teorema 2.1, considerando $\psi_1(r) = \psi_2(r) = r$, concluímos que a afirmação do teorema é verdadeira.

Como dissemos anteriormente, a importância das aplicações que preservam estabilidade está diretamente ligada à teoria da comparação. Nesse sentido, a aplicação dos resultados apresentados nesta seção se dará na demonstração dos principais teoremas da seção seguinte, embora eles possam ser demonstrados de forma direta, algumas vezes exigindo, todavia, um trabalho mais árduo.

2.5 Teoremas de Estabilidade de Lyapunov

Esta seção é dedicada aos principais teoremas de estabilidade no sentido de Lyapunov, em que os resultados são garantidos de acordo com as restrições impostas às aplicações que preservam estabilidade (ou funções de Lyapunov) associadas ao sistema estudado. Estes resultados constituem a parte essencial deste capítulo no que se refere à estabilidade de conjunto invariante. Os teoremas derivam dos resultados existentes para sistemas de tempo contínuo, porém são mais abrangentes que estes, uma vez que consideram as informações nos pontos de descontinuidade do sistema, exigindo que sejam satisfeitas condições menos restritivas, podendo ser aplicados a sistemas de dimensão finita e infinita.

São apresentados quatro teoremas que fornecem condições suficientes para invariância, estabilidade uniforme, estabilidade uniforme assintótica, estabilidade exponencial e instabilidade.

Teorema 2.4. *Seja $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ um SDD e seja $M \subset A$ um conjunto fechado. Suponha que exista uma função $V : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) *para todo deslocamento $p(\cdot, a, t_0^p) \in S$, tem-se $V(p(\cdot, a, t_0^p), \cdot) \in W$, com $E_{V(p)} \subset E_p$, sendo $E_{V(p)}$ o conjunto de pontos de descontinuidades de $V(p(\cdot, a, t_0^p), \cdot)$ e $E_p = \{\tau_0^p, \tau_1^p, \dots : 0 \leq \tau_0^p < \tau_1^p < \dots\}$ o conjunto de pontos de descontinuidades de $p(\cdot, a, t_0^p)$, o qual é suposto ser fechado, discreto e ilimitado;*
- (ii) *Existem $\psi_1, \psi_2 \in K$, definidas em \mathbb{R}^+ , tais que*

$$\psi_1(d(x, M)) \leq V(x, t) \leq \psi_2(d(x, M)) \quad (2.9)$$

para todo $x \in X$, e todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) se para qualquer $p \in S$, $V(p(t, a, t_0), t)$ é não-crescente para todo $t \geq t_0^p \geq 0$, então (S, M) é invariante e uniformemente estável;

(b) se existe $\psi_3 \in K$ definida em \mathbb{R}^+ , tal que para todo $p \in S$,

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}(p(t, a, t_0^p), t) &\leq -\psi_3(d(p(t, a, t_0^p), M)), & \tau_k^p \leq t < \tau_{k+1}^p, \\ V(p(t, a, t_0^p), t) &\leq V(p(t^-, a, t_0), t^-), & t = \tau_{k+1}^p, k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

então (S, M) é uniformemente assintoticamente estável;

(c) se em particular, na parte (b) tivermos $\psi_i(r) = c_i r^b$, $c_i > 0$, $b > 0$, $i = 1, 2, 3$, então (S, M) é exponencialmente estável.

Demonstração: (a) Primeiramente, por hipótese temos que $V : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, logo $V(x, t) \geq 0$, $\forall (x, t) \in X \times \mathbb{R}^+$, e como $\psi_1, \psi_2 \in K$, temos $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$. Mostremos então que (S, M) é invariante. Seja $a \in M$, como $V(p(\tau_0^p, a, \tau_0^p), \tau_0^p) = V(a, \tau_0^p)$, por (2.9) temos

$$0 = \psi_1(d(a, M)) \leq V(a, \tau_0^p) \leq \psi_2(d(a, M)) = 0$$

logo $V(a, \tau_0^p) = 0$. Além disso, como $V(p(t, a, \tau_0^p), t)$ é não-crescente para todo $t \geq \tau_0^p$ temos

$$0 \leq V(p(t, a, \tau_0^p), t) \leq V(p(\tau_0^p, a, \tau_0^p), \tau_0^p) = V(a, \tau_0^p) = 0,$$

logo $V(p(t, a, \tau_0^p), t) = 0$ para todo $t \geq \tau_0^p$. Assim, novamente por (2.9), temos

$$d(p(t, a, \tau_0^p), M) \leq \psi_1^{-1}(V(p(t, a, \tau_0^p), t)) = 0.$$

Desde que M é fechado, temos que $p(t, a, \tau_0^p) \in M$, ou seja, (S, M) é invariante.

Mostremos que (S, M) é uniformemente estável. Para todo $\varepsilon > 0$, todo $t \geq \tau_0^p$ e todo $p(t, a, \tau_0^p)$, escolhamos $\delta > 0$ tal que $\delta = \psi_2^{-1}(\psi_1(\varepsilon))$. Se $d(a, M) < \delta$, como $V(p(t, a, \tau_0^p), t) \leq V(p(\tau_0^p, a, \tau_0^p), \tau_0^p) = V(a, \tau_0^p)$ para todo $t \geq \tau_0^p$, temos por (2.9)

$$\begin{aligned} d(p(t, a, \tau_0^p), M) &\leq \psi_1^{-1}(V(p(t, a, \tau_0^p), t)) \\ &\leq \psi_1^{-1}(V(a, \tau_0^p)) \\ &\leq \psi_1^{-1}(\psi_2(d(a, M))) \\ &< \psi_1^{-1}(\psi_2(\psi_2^{-1}(\psi_1(\varepsilon)))) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto (S, M) é uniformemente estável.

(b) Mostramos em (a) que (S, M) é uniformemente estável; para que seja uniformemente

assintoticamente estável, basta mostrarmos que (S, M) é uniformemente atrativo. Por simplificação, usaremos a notação $y(t) = V(p(t, a, \tau_o^p), t)$, dessa forma temos por (2.10)

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &\leq -\psi_3(d(p(t, a, t_o^p), M)), & \tau_k^p \leq t < \tau_{k+1}^p, \\ y(t) &\leq y(t^-), & t = \tau_{k+1}^p, k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\}$$

logo, usando (2.9) e o fato de y ser não-crescente e ψ_2, ψ_3 serem funções crescentes, temos

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &\leq -\psi_3(d(p(t, a, t_o^p), M)) \\ &\leq -\psi_3(\psi_2^{-1}(y(t))) \\ &\leq -\psi_3(\psi_2^{-1}(y(\tau_{k+1}^p))) \\ &= -\psi_3 \circ \psi_2^{-1}(y(\tau_{k+1}^p)). \end{aligned}$$

Agora, integrando de τ_k^p a τ_{k+1}^{p-} , usando a última desigualdade, temos

$$\begin{aligned} y(\tau_{k+1}^p) - y(\tau_k^p) &\leq y(\tau_{k+1}^{p-}) - y(\tau_k^p) \\ &\leq -\psi_3 \circ \psi_2^{-1}(y(\tau_{k+1}^p))(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se denotarmos $\psi = \psi_3 \circ \psi_2^{-1}$, então $\psi \in K$, e reescrevemos a última desigualdade como

$$y(\tau_{k+1}^p) - y(\tau_k^p) \leq -\psi(y(\tau_{k+1}^p))(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p). \quad (2.12)$$

Assim, por (2.12), e como $y(\tau_k^p)$ é não-crescente para todo $k \in \mathbb{N}$, vale $y(\tau_{n+1}^p) - y(\tau_n^p) \leq -\psi(y(\tau_{n+1}^p))(\tau_{n+1}^p - \tau_n^p) \leq -\psi(y(\tau_k^p))(\tau_{n+1}^p - \tau_n^p)$, para todo $n \leq k-1$.

Como

$$\begin{aligned} y(\tau_k^p) - y(\tau_o^p) &= y(\tau_k^p) - y(\tau_{k-1}^p) + y(\tau_{k-1}^p) - y(\tau_{k-2}^p) + y(\tau_{k-2}^p) - \dots + y(\tau_1^p) - y(\tau_o^p) \\ &\leq [-\psi(y(\tau_k^p))(\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)] + \dots + [-\psi(y(\tau_k^p))(\tau_1^p - \tau_o^p)] \\ &= -\psi(y(\tau_k^p))[\tau_k^p - \tau_{k-1}^p + \tau_{k-1}^p - \tau_{k-2}^p + \dots + \tau_1^p - \tau_o^p] \\ &= -\psi(y(\tau_k^p))(\tau_k^p - \tau_o^p), \end{aligned}$$

para todo $k \geq 0$, vale

$$y(\tau_k^p) \leq \psi^{-1}\left(\frac{y(\tau_o^p) - y(\tau_k^p)}{\tau_k^p - \tau_o^p}\right) \leq \psi^{-1}\left(\frac{y(\tau_o^p)}{\tau_k^p - \tau_o^p}\right). \quad (2.13)$$

Dessa forma, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ e um $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$, tais que $\psi^{-1}(\psi^{-1}(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau})) < \varepsilon$, além disso, para todo $t \geq \tau_o^p + \tau$ existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [\tau_{k-1}^p, \tau_k^p)$, logo $\tau_k^p - \tau_o^p > \tau$.

Assim, para todo $a \in A$ tal que $d(a, M) < \delta$, segue que $\psi_2(d(a, M)) < \psi_2(\delta)$, e por (2.13),

$$y(t) \leq y(\tau_k^p) \leq \psi^{-1}\left(\frac{y(\tau_o^p)}{\tau_k^p - \tau_o^p}\right) = \psi^{-1}\left(\frac{V(a, \tau_o^p)}{\tau_k^p - \tau_o^p}\right) \leq \psi^{-1}\left(\frac{\psi_2(d(a, M))}{\tau}\right) \leq \psi^{-1}\left(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau}\right).$$

Portanto,

$$d(p(t, a, \tau_o^p), t) \leq \psi_1^{-1}(y(t)) \leq \psi_1^{-1}\left(\psi^{-1}\left(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau}\right)\right) < \varepsilon,$$

logo (S, M) é uniformemente assintoticamente estável.

(c) Substituindo $\psi_i(r) = c_i r^b$, $c_i > 0$, $b > 0$, $i = 1, 2, 3$, em (2.9) e em (2.10) temos

$$c_1(d(x, M))^b \leq V(x, t) \leq c_2(d(x, M))^b, \quad (2.14)$$

e

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}(p(t, a, t_o^p), t) &\leq -c_3(d(p(t, a, t_o^p), M))^b, & \tau_k^p \leq t < \tau_{k+1}^p, \\ V(p(t, a, t_o^p), t) &\leq V(p(t^-, a, t_o), t^-), & t = \tau_{k+1}^p, k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Novamente fazendo $y(t) = V(p(t, a, \tau_o^p), t)$, e repetindo o desenvolvimento usado em (b), de (2.11) temos

$$y(\tau_{k+1}^p) - y(\tau_k^p) \leq -\frac{c_3}{c_2}(y(\tau_{k+1}^p))(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p),$$

que podemos escrever como

$$y(\tau_{k+1}^p) \leq [1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)]y(\tau_{k+1}^p),$$

sendo $\mu = \frac{c_3}{c_2}$. Se $[1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] \leq 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $y(\tau_n^p) = 0$ e conseqüentemente $0 \leq y(t) \leq y(\tau_n^p) = 0$ para todo $t \in (\tau_n^p, \tau_{n+1}^p)$ e todo $n > k + 1$. Logo $d(p(t, a, \tau_o^p), M) = 0$. Suponhamos então que $[1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Observamos que do fato de $e^{-\mu x} \geq 1 - \mu x$, temos

$$y(\tau_{k+1}^p) \leq e^{-\mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)}y(\tau_{k+1}^p),$$

como $y(\tau_{k+1}^p) \leq y(\tau_k^p)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, vale

$$y(\tau_k^p) \leq e^{-\mu(\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)}y(\tau_{k-1}^p). \quad (2.16)$$

Usando a relação acima temos

$$y(\tau_k^p) \leq e^{-\mu(\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)}e^{-\mu(\tau_{k-1}^p - \tau_{k-2}^p)} \dots e^{-\mu(\tau_1^p - \tau_o^p)}y(\tau_o^p),$$

de onde obtemos

$$y(t) \leq y(\tau_k^p) \leq e^{-\mu(t - \tau_o^p)}y(\tau_o^p). \quad (2.17)$$

Agora, de (2.14) temos $V(p(\tau_o^p, a, \tau_o^p), \tau_o^p) \leq c_2 d(p(\tau_o^p, a, \tau_o^p), M)^b$, ou seja $y(\tau_o^p) \leq c_2 d(a, M)^b$.

Logo, por (2.17) e (2.14), temos

$$\begin{aligned}
 d(p(t, a, \tau_0^p), M) &\leq \left(\frac{y(t)}{c_1} \right)^{\frac{1}{b}} \\
 &\leq \left(\frac{e^{-\mu(t-\tau_0^p)} y(\tau_0^p)}{c_1} \right)^{\frac{1}{b}} \\
 &\leq \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{b}} d(a, M) e^{-\frac{\mu}{b}(t-\tau_0^p)}. \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

Finalmente, para todo $\varepsilon > 0$, tomamos $\alpha = \frac{\mu}{b}$ e $\delta = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{b}}}$, assim se $d(a, M) < \delta$, então

$$\begin{aligned}
 d(p(t, a, \tau_0^p), M) &\leq \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{b}} d(a, M) e^{-\frac{\mu}{b}(t-\tau_0^p)} \\
 &< \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{b}} \delta e^{-\alpha(t-\tau_0^p)} \\
 &= \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{b}} \frac{\varepsilon}{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{b}}} e^{-\alpha(t-\tau_0^p)} \\
 &= \varepsilon e^{-\alpha(t-\tau_0^p)}. \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

Portanto (S, M) é exponencialmente estável. \square

Como dissemos no início da seção, estamos interessados nas restrições que devem ser impostas à função V para garantir estabilidade. Nesse sentido, observamos que no Teorema 2.4 é exigido que V seja não-crescente em todos os pontos de definição dos deslocamentos do sistema e que possua derivada negativa, condições fortes que tornam este teorema muito restritivo. Os próximos teoremas são mais sensíveis às descontinuidades dos deslocamentos, e exigem que V seja não-crescente nos pontos de descontinuidades e que tenha certas limitações no interior dos intervalos determinados por estes pontos, sendo portanto menos restritivos que o primeiro.

Teorema 2.5. *Seja $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ um SDD e seja $M \subset A$ um conjunto fechado. Suponha que exista uma função $V : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e funções $\psi_1, \psi_2 \in K$, definidas em \mathbb{R}^+ , tais que*

$$\psi_1(d(x, M)) \leq V(x, t) \leq \psi_2(d(x, M)), \tag{2.20}$$

para todo $x \in X$, e todo $t \in \mathbb{R}^+$.

(a) *Suponha que para todo $p(\cdot, a, \tau_0^p) \in S$, $V(p(t, a, \tau_0^p), t)$ é contínua em toda parte em $\mathbb{R}_{\tau_0^p}^+ = \{t \in \mathbb{R}^+ : t \geq \tau_0^p\}$, exceto no conjunto de descontinuidades $E_{V(p)} \subset E_p$. Suponha ainda que exista uma vizinhança U de M tal que $V(p(\tau_k, a, \tau_0^p), \tau_k)$ é não-crescente para todo $a \in U$ e todo $k \in \mathbb{N}$, e que existe uma função $h \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$, independente de $p \in S$, tal*

que

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= 0, \\ V(p(t, a, \tau_0^p), t) &\leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)), \quad t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Então (S, M) é invariante e uniformemente estável;

(b) Se além das hipóteses dadas em (a), existe uma função $\psi_3 \in K$ definida em \mathbb{R}^+ tal que

$$DV(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p) \leq -\psi_3(d(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), M)), \quad (2.22)$$

para todo $a \in U$, $k \in \mathbb{N}$, sendo

$$DV(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p) := \frac{1}{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p} [V(p(\tau_{k+1}^p, a, \tau_0^p), \tau_{k+1}^p) - V(p(\tau_k^p, a, \tau_0^p), \tau_k^p)].$$

Então (S, M) é uniformemente assintoticamente estável.

Demonstração: Seja $y(t) = V(p(t, a, \tau_0^p), t)$ e consideremos o sistema de comparação determinado por

$$\left. \begin{aligned} y(t) &\leq h(y(\tau_k^p)), & \tau_k^p \leq t < \tau_{k+1}^p, \\ y(\tau_{k+1}^p) &\leq w(y(\tau_k^p), \tau_k^p, \tau_{k+1}^p), & k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

sendo $h \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$ com $h(0) = 0$.

Seja $S_{(2.23)}$ o sistema dinâmico descontínuo determinado por (2.23) e E_p seu conjunto de pontos de descontinuidade. Por simplificação supomos que as soluções de (2.23) existem para todo $t \geq \tau_0^p \geq 0$.

Fazemos $X_1 = X$, $A_1 = A$, $S_1 = S$, $X_2 = \mathbb{R}$, $A_2 = V(A \times \mathbb{R}^+)$, $S_2 = S_{(2.23)}$ e tomamos $M_2 = \{0\}$, além disso, desde que $y(t) = V(p(t, a, \tau_0^p), t)$ temos $\mathcal{V}(S_1) \subset S_2$. Observamos ainda que (2.20) é equivalente à (2.8), uma vez que $V : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $X_2 = \mathbb{R}$ e $M_2 = \{0\}$, portanto $d_2(V(x, t), M_2) = |V(x, t) - 0| = V(x, t)$. Aplicamos então o Teorema 2.2 aos sistemas $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ e $\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, V(A \times \mathbb{R}^+), S_{(2.23)}\}$, de onde concluímos que a invariância, a estabilidade uniforme e a estabilidade uniforme assintótica de $(S_{(2.23)}, \{0\})$ implicam a invariância e os mesmos correspondentes tipos de estabilidade de (S, M) .

Resta-nos mostrar que $(S_{(2.23)}, \{0\})$ é: (a) invariante e uniformemente estável; (b) uniformemente assintoticamente estável. Para isso supomos na parte (a) que $w(y(\tau_k^p), \tau_k^p, \tau_{k+1}^p) = y(\tau_k^p)$, resultando na desigualdade

$$y(\tau_{k+1}^p) \leq y(\tau_k^p), \quad (2.24)$$

e na parte (b) que $w(y(\tau_k^p), \tau_k^p, \tau_{k+1}^p) = y(\tau_k^p) - \psi(y(\tau_k^p))(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)$, com $\psi = \psi_3 \circ \psi_2^{-1} \in K$, que resulta em

$$y(\tau_{k+1}^p) \leq y(\tau_k^p) - \psi(y(\tau_k^p))(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p). \quad (2.25)$$

(a) Se $y(\tau_k^p) = w(y(\tau_k^p), \tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$, então $y(\tau_{k+1}^p) \leq y(\tau_k^p)$, assim se $a = 0$ tem-se $y(\tau_o^p) = V(p(\tau_o^p, 0, \tau_o^p), \tau_o^p) = 0$, e desde que $y(\tau_k)$ é não-crescente, tem-se $y(\tau_k^p) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e por (2.23)

$$y(t) \leq h(y(\tau_k^p)) = h(0) = 0.$$

Portanto $y(t) = 0$ para todo $t \geq \tau_o^p$, ou seja, $(S_{(2.23)}, \{0\})$ é invariante.

Mostremos agora que $(S_{(2.23)}, \{0\})$ é uniformemente estável. Como $h(0) = 0$ e h é contínua, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $y < \delta$ então $h(y) - h(0) = h(y) < \varepsilon$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\delta < \varepsilon$. Dessa forma, se $y(\tau_o^p) < \delta$, por (2.23) temos

$$y(t) \leq h(y(\tau_k^p)) < \varepsilon,$$

se $\tau_k^p \leq t < \tau_{k+1}^p$, e

$$y(\tau_{k+1}^p) \leq y(\tau_k^p) \leq y(\tau_o) < \delta < \varepsilon.$$

Portanto $y(t) < \varepsilon$ para todo $t \geq \tau_o^p$, sempre que $y(\tau_o^p) < \delta$, ou seja, $(S_{(2.23)}, \{0\})$ é uniformemente estável.

(b) Tomamos agora $w(y(\tau_k^p), \tau_k^p, \tau_{k+1}^p) = y(\tau_k^p) - \psi(y(\tau_k^p))(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)$. Usando um argumento análogo ao item (a), temos que $(S_{(2.23)}, \{0\})$ é uniformemente estável também para este caso, resta mostrar então que é uniformemente atrativo.

Por (2.25) temos

$$y(\tau_{k+1}^p) - y(\tau_k^p) \leq -\psi(y(\tau_k^p))(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p),$$

além disso, como $y(\tau_k^p)$ é não-crescente, temos

$$y(\tau_{n+1}^p) - y(\tau_n^p) \leq -\psi(y(\tau_n^p))(\tau_{n+1}^p - \tau_n^p) \leq -\psi(y(\tau_k^p))(\tau_{n+1}^p - \tau_n^p),$$

para todo $n \leq k$. Uma vez que

$$\begin{aligned} y(\tau_{k+1}^p) - y(\tau_o^p) &= y(\tau_{k+1}^p) - y(\tau_k^p) + y(\tau_k^p) - y(\tau_{k-1}^p) + y(\tau_{k-1}^p) - \dots + y(\tau_1^p) - y(\tau_o^p) \\ &\leq [-\psi(y(\tau_k^p))(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] + [-\psi(y(\tau_k^p))(\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)] + \dots + [-\psi(y(\tau_k^p))(\tau_1^p - \tau_o^p)] \\ &= -\psi(y(\tau_k^p))[\tau_{k+1}^p - \tau_k^p + \tau_k^p - \tau_{k-1}^p + \dots + \tau_1^p - \tau_o^p] \\ &= -\psi(y(\tau_k^p))(\tau_{k+1}^p - \tau_o^p), \end{aligned}$$

para todo $k \geq 0$, temos

$$y(\tau_k^p) \leq \psi^{-1} \left(\frac{y(\tau_o^p) - y(\tau_{k+1}^p)}{\tau_{k+1}^p - \tau_o^p} \right) \leq \psi^{-1} \left(\frac{y(\tau_o^p)}{\tau_{k+1}^p - \tau_o^p} \right). \quad (2.26)$$

Agora, para todo $\varepsilon > 0$, pela continuidade de h , existe um $\delta > 0$ tal que $h(y) < \varepsilon$, sempre que

$y < \delta$. Para ε e δ considerados acima, é sempre possível encontrar $\tau > 0$ tal que

$$\psi^{-1}\left(\frac{\delta}{\tau}\right) < \varepsilon. \quad (2.27)$$

Além disso, para todo $t \geq \tau_o^p + \tau$, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [\tau_{k+1}^p, \tau_k^p)$, dessa forma temos $\tau_{k+1}^p - \tau_o^p > \tau$. Portanto, se $y(\tau_o^p) < \delta$, segue que $y(\tau_k^p) \leq y(\tau_o^p) < \delta$ e por (2.26),

$$y(\tau_k^p) \leq \psi^{-1}\left(\frac{y(\tau_o^p)}{\tau_{k+1}^p - \tau_o^p}\right) \leq \psi^{-1}\left(\frac{\delta}{\tau}\right) < \varepsilon,$$

conseqüentemente

$$y(t) \leq h(y(\tau_k^p)) < \varepsilon,$$

ou seja, $y(t) < \varepsilon$ para todo $t \geq \tau_o^p + \tau$, sempre que $y(\tau_o^p) < \delta$. Concluimos assim que $(S_{(2.23)}, \{0\})$ é uniformemente estável e uniformemente atrativo, ou seja, uniformemente assintoticamente estável, e a prova do teorema está completa. \square

Teorema 2.6. *Seja $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ um SDD e seja $M \subset A$ um conjunto fechado e limitado. Suponha que exista uma função $V : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e três constantes $c_1, c_2, b > 0$ tais que*

$$c_1(d(x, M))^b \leq V(x, t) \leq c_2(d(x, M))^b, \quad (2.28)$$

para todo $x \in U \subset X$, e todo $t \in \mathbb{R}^+$, sendo U uma vizinhança de M .

(i) *Suponha que para todo $p(\cdot, a, \tau_o^p) \in S$, $V(p(t, a, \tau_o^p), t)$ é contínua em toda parte em $\mathbb{R}_{\tau_o^p}^+ = \{t \in \mathbb{R}^+ : t \geq \tau_o^p\}$, exceto no conjunto de descontinuidades $E_{V(p)} \subset E_p$. Suponha ainda que existe uma função $h \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$ independente de S tal que*

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= 0, \\ V(p(t, a, \tau_o^p), t) &\leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)), \quad t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

e tal que para alguma constante positiva q , h satisfaz

$$h(r) = o(r^q) \text{ com } r \rightarrow 0,$$

ou seja, $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h(r)}{r^q} = 0$;

(ii) *Suponha que exista uma constante $c_3 > 0$ tal que*

$$DV(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) \leq -c_3[d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M)]^b, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.30)$$

para todo $p(\cdot, a, \tau_o^p) \in S$ e todo $a \in U$, sendo $DV(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)$ definida como anteriormente.

Então (S, M) é exponencialmente estável.

Demonstração: Aplicaremos o Teorema 2.2 utilizando um sistema de comparação para obter os resultados exigidos. Seja $y(t) = V(p(t, a, \tau_o^p), t)$, faremos uso do sistema de comparação determinado pelo sistema dinâmico dado por

$$\left. \begin{aligned} y(t) &\leq h(y(\tau_k^p)), & \tau_k^p \leq t < \tau_{k+1}^p, \\ y(\tau_{k+1}^p) &\leq y(\tau_k^p) - \frac{c_3}{c_2} y(\tau_k^p) (\tau_{k+1}^p - \tau_k^p), & k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Denotamos então $S_{((2.31))}$ o sistema de comparação determinado pelas soluções de (2.31), com pontos de descontinuidades $\tau_o^p, \tau_1^p, \dots$. Além disso, supomos que o sistema possui solução para $t \geq \tau_o^p \geq 0$. Seguindo a notação utilizada, fazemos $X_1 = X, A_1 = A, S_1 = S, X_2 = \mathbb{R}, A_2 = V(A \times \mathbb{R}^+)$ e $S_2 = S_{((2.31))}$. Dessa forma temos $\mathcal{V}(S_1) \subset S_2$, portanto, pelo Teorema 2.2 a invariância e a estabilidade exponencial de $(S_{((2.31))}, \{0\})$ implicam a invariância e a estabilidade exponencial de (S, M) . Mostremos então que $(S_{((2.31))}, \{0\})$ é invariante e exponencialmente estável.

Note que por (2.31) $\{y(\tau_k^p)\}$ é não-crescente para todo $a \in A$, assim quando $a = 0$ temos $y(\tau_o^p) = 0$, que implica que $0 = y(\tau_k^p) \leq y(\tau_o^p) = 0$. Além disso, temos $y(t) \leq h(y(\tau_k^p)) = h(0) = 0$, portanto $y(t) = 0$ para todo $t \geq \tau_o^p$, ou seja, $S_{((2.31))}$ é invariante. Mostremos então que (S, M) é exponencialmente estável.

Pela desigualdade do sistema (2.31), temos

$$y(\tau_{k+1}^p) \leq y(\tau_k^p) - \frac{c_3}{c_2} y(\tau_k^p) (\tau_{k+1}^p - \tau_k^p),$$

que implica que

$$y(\tau_{k+1}^p) \leq [1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] y(\tau_k^p),$$

sendo $\mu = \frac{c_3}{c_2}$.

Se $[1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] \leq 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $y(\tau_n^p) = 0$ para todo $n > k$, uma vez que $y(\tau_{k+1}^p) \leq [1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] y(\tau_k^p)$, logo $y(t) \leq h(y(\tau_n^p)) = 0$ para todo $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$ e todo $n > k$. Então, por (2.28), segue que $d(p(t, a, \tau_o^p), 0) = 0$. Suponhamos então que $[1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Analisemos agora limitações para $y(t)$ quando $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$ e quando $t = \tau_k^p, k \in \mathbb{N}$. Considerando o fato que $e^{-\mu x} \geq 1 - \mu x$, segue que

$$y(\tau_{k+1}^p) \leq e^{-\mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)} y(\tau_k^p),$$

e como $y(\tau_k^p)$ é não-crescente, procedendo da mesma forma como fizemos para (2.16) no item

(c) do Teorema 2.4, temos que

$$y(\tau_k^p) \leq e^{-\mu(\tau_k^p - \tau_0^p)} y(\tau_0^p), \quad (2.32)$$

é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora, como $h(r) = o(r^q)$, ou seja, $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h(r)}{r^q} = 0$, temos $\frac{h(r)}{r^q} \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$.

Tomando então

$$\Delta_{y(\tau_0^p)} = \sup_{r \in [0, c_2 d(a, 0)^b]} \frac{h(r)}{r^q},$$

temos,

$$h(r) \leq \Delta_{y(\tau_0^p)} r^q,$$

para todo $r \in [0, c_2 d(a, 0)^b]$. Por esta desigualdade e por (2.31), temos

$$\begin{aligned} y(t) &\leq h(y(\tau_k^p)) \\ &\leq \Delta_{y(\tau_0^p)} (y(\tau_k^p))^q \\ &\leq \Delta_{y(\tau_0^p)} e^{-\mu q(\tau_k^p - \tau_0^p)} (y(\tau_0^p))^q \\ &\leq \Delta_{y(\tau_0^p)} e^{\mu q(t - \tau_k^p)} e^{-\mu q(t - \tau_0^p)} (y(\tau_0^p))^q, \end{aligned}$$

mas, como supomos $[1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] > 0$, temos $t - \tau_k^p \leq \tau_{k+1}^p - \tau_k^p < \frac{1}{\mu}$, ou seja, $\mu(t - \tau_k^p) < 1$,

logo

$$y(t) \leq \Delta_{y(\tau_0^p)} e^q e^{-\mu q(t - \tau_0^p)} (y(\tau_0^p))^q. \quad (2.33)$$

Resta agora determinar constantes adequadas de forma que (2.32) e (2.33) satisfaçam a definição de estabilidade exponencial simultaneamente. Antes, porém, observamos que desde que $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h(r)}{r^q} = 0$, podemos supor que $\Delta_{y(\tau_0^p)} \leq 1$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $\tau_0^p \geq 0$ tal que $y(\tau_0^p) < \delta$, sejam

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\{\mu, \mu q\}, \\ \delta &= \min\left\{\frac{\varepsilon}{e}, \frac{\varepsilon^{\frac{1}{q}}}{e}\right\}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} y(\tau_k^p) &\leq e^{-\mu(\tau_k^p - \tau_0^p)} y(\tau_0^p) \\ &< \delta e^{-\alpha(\tau_k^p - \tau_0^p)} \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{e}\right) e^{-\alpha(\tau_k^p - \tau_0^p)} \\ &\leq \varepsilon e^{-\alpha(\tau_k^p - \tau_0^p)}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y(t) &\leq \Delta_{y(\tau_0^p)} e^q e^{-\mu q(t-\tau_0^p)} (y(\tau_0^p))^q \\
&< \delta^q \Delta_{y(\tau_0^p)} e^q e^{-\alpha(t-\tau_0^p)} \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{q}}}{e}\right)^q e^q e^{-\alpha(t-\tau_0^p)} \\
&= \varepsilon e^{-\alpha(t-\tau_0^p)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$y(t) < \varepsilon e^{-\alpha(t-\tau_0^p)},$$

para todo $p(\cdot, a, \tau_0^p) \in S$ e todo $t \in \mathbb{R}_{\tau_0^p}^+$. Portanto $(S, \{0\})$ é exponencialmente estável. \square

Exemplo 2.3. Aplicaremos os resultados anteriores para um sistema de dimensão finita em que o espaço estado do sistema é \mathbb{R}^n e o conjunto invariante M é a solução trivial do sistema, ou seja $M = \{0\}$. Consideremos o sistema determinado por equações da forma

$$\left. \begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A_k x(t), & \tau_k^p \leq t < \tau_{k+1}^p, \\
x(t) &= B_{k+1} x(t^-), & t = \tau_{k+1}^p, k \in \mathbb{N},
\end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A_k, B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Denotaremos por $S_{(2.34)}$ o sistema determinado por (2.34). Falaremos mais como são constituídos esses sistemas no capítulo seguinte, por hora, aceitamos a existência e unicidade das soluções, para todo $(\tau_0^p, a) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Se em (2.34) supormos que para cada $k \in \mathbb{N}$, todos os autovalores de A_k possuem a parte real positiva, então foi mostrado em (25) que é impossível encontrar uma função de Lyapunov V satisfazendo (2.10), sendo portanto impossível aplicar o Teorema 2.4. No entanto, é possível garantir o seguinte resultado.

Proposição 2.2. Para o sistema $S_{(2.34)}$, suponha que são válidas as condições:

(i) existe uma constante $\kappa > 0$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\|A_k\| < \kappa$;

(ii) $\sup_{k \in \mathbb{N}} \{\lambda_k : \lambda_k := \tau_{k+1} - \tau_k\} \leq \lambda < \infty$;

(iii) para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\|B_{k+1} e^{A_k \lambda_k}\| \leq \xi < 1. \quad (2.35)$$

Então $(S_{(2.34)}, \{0\})$ é uniformemente assintoticamente estável e exponencialmente estável.

Demonstração: Para este sistema, escolhemos $V(x) = \|x\|$ e $\psi_1, \psi_2 \in K$ dadas por $\psi_1(r) = \psi_2(r) = r$, dessa forma temos que (2.20) (respectivamente (2.28)) é satisfeita. Além disso,

denotando por $p(t, a, \tau_o^p)$ os deslocamentos de $S_{(2.34)}$, temos

$$p(\tau_{k+1}^p, a, \tau_o^p) = B_{k+1} e^{A_k(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)} p(\tau_k^p, a, \tau_o^p),$$

que implica que

$$\begin{aligned} V(p(\tau_{k+1}^p, a, \tau_o^p), \tau_{k+1}^p) &= \|B_{k+1} e^{A_k(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)} p(\tau_k^p, a, \tau_o^p)\| \\ &\leq \xi V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{V(p(\tau_{k+1}^p, a, \tau_o^p), \tau_{k+1}^p) - V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)}{(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)} &\leq \frac{\xi V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) - V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)}{(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)} \\ &= \frac{(\xi - 1)V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)}{(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)} \\ &\leq -\frac{1 - \xi}{\lambda} \|p(\tau_k^p, a, \tau_o^p)\|, \end{aligned}$$

logo (2.22) (respectivamente (2.30)) é satisfeita fazendo $\psi_3(r) = \frac{1 - \xi}{\lambda} r$. Mais ainda, fazendo $h(r) = e^{\kappa\lambda} r$, temos

$$V(p(t, a, \tau_o^p), \tau_k^p) \leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)) = e^{\kappa\lambda} p(\tau_k^p, a, \tau_o^p),$$

para todo $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$. Assim, 2.21 (respectivamente 2.29) é satisfeita. Portanto, segue do Teorema 2.5 (respectivamente Teorema 2.6) que $(S_{(2.34)}, \{0\})$ é uniformemente assintoticamente estável (respectivamente exponencialmente estável).

Teorema 2.7. Seja $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ um SDD e seja $M \subset A$ um conjunto fechado. Suponha que exista uma função $V : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e uma função $\phi \in K\mathbb{R}$ tais que

$$V(x, t) \leq \phi(d(x, M)), \quad (2.36)$$

para todo $x \in X$, e todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Suponha também que:

- (i) Para todo $p(\cdot, a, \tau_o^p) \in S$, $V(p(t, a, \tau_o^p), t)$ é contínua em toda parte em $R_{\tau_o^p}^+ = \{t \in \mathbb{R}^+ : t \geq \tau_o^p\}$, exceto no conjunto de descontinuidades $E_{V(p)} \subset E_p$. Suponha ainda que existe uma função $\psi \in K$ tal que

$$DV(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) \geq \psi(d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.37)$$

sendo $DV(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)$ definida como anteriormente;

(ii) Para toda vizinhança de M exista x tal que $V(x, \tau_o^p) > 0$.

Então M é instável com respeito a S .

Se além das hipóteses anteriores, valer $V(x, \tau_o^p) > 0$ para todo $x \notin M$, então (S, M) é completamente instável.

Demonstração: Pela hipótese (ii), para todo $t_o \in \mathbb{R}^+$, e todo $\delta > 0$, existe um $a \in A$ tal que $d(a, M) < \delta$ e $V(a, t_o) > 0$. Mostraremos que $d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M)$ é ilimitada, ou seja, nas condições acima, para todo $\varepsilon_o > 0$, sempre existirá $t_1 \in \mathbb{R}_{a, t_o}^+$ tal que $d(p(t_1^p, a, \tau_o^p), M) \geq \varepsilon_o$. Observamos que por (2.37), $\{V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)\}$ é crescente para todo $p(\cdot, a, \tau_o^p)$ e assim

$$\begin{aligned} V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) &\geq V(p(\tau_{k-1}^p, a, \tau_o^p), \tau_{k-1}^p) + (\tau_k^p - \tau_{k-1}^p) \Psi(d(p(\tau_{k-1}^p, a, \tau_o^p), M)) \\ &\geq V(p(\tau_{k-1}^p, a, \tau_o^p), \tau_{k-1}^p) + (\tau_k^p - \tau_{k-1}^p) \Psi \circ \phi^{-1}(V(p(\tau_{k-1}^p, a, \tau_o^p), \tau_{k-1}^p)) \\ &\geq V(p(\tau_o^p, a, \tau_o^p), \tau_o^p) + (\tau_k^p - \tau_o^p) \Psi \circ \phi^{-1}(V(p(\tau_o^p, a, \tau_o^p), \tau_o^p)) \\ &\geq (\tau_k^p - \tau_o^p) \Psi \circ \phi^{-1}(V(a, \tau_o^p)). \end{aligned}$$

Dessa forma, como $\phi^{-1} \in K\mathbb{R}$, quando $\tau_k^p \rightarrow \infty$ temos $V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) \rightarrow \infty$, e conseqüentemente $d(p(\tau_{k-1}^p, a, \tau_o^p), M) \rightarrow \infty$, uma vez que

$$d(p(\tau_{k-1}^p, a, \tau_o^p), M) \geq \phi^{-1}(V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)).$$

Portanto (S, M) é instável.

Como por hipótese $V(a, \tau_o) > 0$ para todo $a \notin M$, basta observarmos que o argumento demonstrado acima é válido para todo $p(\tau_k^p, a, \tau_o^p)$ e todo $a \notin M$, ou seja, $d(p(\tau_{k-1}^p, a, \tau_o^p), M) \rightarrow \infty$ quando $\tau_k^p \rightarrow \infty$. Portanto (S, M) é completamente instável. \square

Exemplo 2.4. Se considerarmos o sistema $S_{(2.34)}$, veremos que dependendo das propriedades da matriz B_{k+1} , $(S_{(2.34)}, \{0\})$ é instável.

Proposição 2.3. Para o sistema $S_{(2.34)}$, suponha que são válidas as condições:

(i) existe uma constante $\kappa > 0$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\|A_k\| < \kappa$;

(ii) $\sup_{k \in \mathbb{N}} \{\tau_{k+1} - \tau_k\} \leq \lambda < \infty$;

(iii) para todo $k \in \mathbb{N}$ B_{k+1} é não-singular e

$$\|B_{k+1}^{-1}\| e^{\kappa \lambda_k} \leq \xi < 1. \quad (2.38)$$

Então $(S_{(2.34)}, \{0\})$ é instável, na verdade, completamente instável.

Demonstração: Da mesma forma como fizemos no exemplo anterior, escolhemos $V(x) = \|x\|$ e $\phi \in K\mathbb{R}$ dada por $\phi(r) = r$, que implica que (2.36) é satisfeita. Denotamos novamente por $p(t, a, \tau_o^p)$ os deslocamentos de $S_{(2.34)}$ para $(\tau_o^p, a) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Desde que

$$\|e^{A_k(\tau_{k+1}-\tau_k)}\| \leq e^{\|A_k\|(\tau_{k+1}-\tau_k)} \leq e^{\kappa(\tau_{k+1}-\tau_k)},$$

segue que

$$\begin{aligned} DV(y(\tau_k)) &= \frac{V(p(\tau_{k+1}^p, a, \tau_o^p), \tau_{k+1}^p) - V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)}{(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)} \\ &= \frac{\|B_{k+1}e^{A_k(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)}p(\tau_k^p, a, \tau_o^p)\| - \|p(\tau_k^p, a, \tau_o^p)\|}{(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)} \\ &\geq \frac{\frac{1}{\|e^{-A_k(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)}B_{k+1}^{-1}\|} \|p(\tau_k^p, a, \tau_o^p)\| - \|p(\tau_k^p, a, \tau_o^p)\|}{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p} \\ &\geq \frac{\frac{1}{\|B_{k+1}^{-1}\|e^{\kappa\lambda_k}} \|p(\tau_k^p, a, \tau_o^p)\| - \|p(\tau_k^p, a, \tau_o^p)\|}{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p} \\ &\geq \frac{\frac{1}{\xi} - 1}{\lambda} \|y(\tau_k)\|. \end{aligned}$$

Tomando então $\psi(r) = \frac{1}{\lambda}r$, claramente (2.37) é satisfeita, e como $V(p(t, a, \tau_o^p)) > 0$, sempre que $p(t, a, \tau_o^p) \neq 0$, todas as hipóteses do Teorema 2.7 são satisfeitas. Portanto $(S_{(2.34)}, \{0\})$ é instável, na verdade, completamente instável.

Para finalizar, lembramos que dedicamos este capítulo à teoria de sistemas dinâmicos híbridos, com o intuito de apresentar os conceitos e resultados básicos do estudo qualitativo de estabilidade destes sistemas. Observamos que a teoria envolvendo os conceitos expostos aqui, permite estudar uma grande variedade de sistemas que muitas vezes envolvem um comportamento dinâmico complexo. Todavia, este estudo pode ser simplificado pelo processo de imersão de um sistema dinâmico híbrido definido em tempo generalizado em um sistema dinâmico descontínuo definido em \mathbb{R}^+ , possibilitando o uso de conceitos e resultados bem conhecidos da teoria de sistemas dinâmicos. No que se refere ao nosso interesse principal, o estudo de estabilidade destes sistemas, os resultados apresentados para *SDD* são mais gerais que os resultados usuais da teoria básica de sistemas dinâmicos. O Teorema 2.5 e o Teorema 2.6 são baseados nos resultados para *SDC*, no entanto, são menos restritivos e mais abrangentes que estes, considerando informações sobre os possíveis pontos de descontinuidade do sistema. Além disso, o uso de aplicações que preservam estabilidade, podem simplificar o estudo de estabilidade, dentro da teoria de comparação, estendendo o conceito de funções de Lyapunov. Assim, tendo realizado um estudo básico da teoria, encerramos este capítulo.

3 *Sistemas Dinâmicos Descontínuos Modelados por Semigrupos*

3.1 Introdução

No capítulo anterior estudamos resultados gerais da teoria de estabilidade de *SDH* (respectivamente *SDD*). Todos os resultados lá apresentados faziam uso das funções de Lyapunov para estudar a estabilidade do sistema. A desvantagem desse método é que nem sempre é possível, com um esforço aceitável, encontrar funções desse tipo para determinados sistemas. No entanto, para uma classe de sistemas em que os deslocamentos determinam semigrupos, é possível estabelecer resultados que não fazem uso das funções de Lyapunov, mas são amparados pela teoria de semigrupos. Portanto, nesse capítulo, nosso objetivo é estudar os resultados para esta classe. A teoria apresentada aqui é bastante abrangente, haja vista a amplitude da classe de sistemas deste tipo. Além disso, enfatizamos que, mais do que propiciar uma teoria alternativa para estabilidade, o uso de semigrupos é também motivado pelo fato de que os resultados podem ser mais facilmente aplicados a sistemas de dimensão finita e infinita.

Para ter uma idéia geral do tipo de sistemas que estamos interessados, iniciamos com uma classe de sistemas dinâmicos descontínuos obtida através de uma família de sistemas determinados por problemas abstratos de Cauchy em um espaço de Banach X . A partir daí, os resultados são estabelecidos para uma subclasse desta, fazendo uso da teoria de semigrupos.

Consideramos a família de problemas de valor inicial de Cauchy da forma

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= F_k(t, y), \quad t \geq \tau_k, \\ y(\tau_k) &= y_k, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

sendo $k \in \mathbb{N}$, $F_k : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ e $S_{(3.1)}^{(k)}$ os sistemas gerados pela família de problemas acima. Além disso, supomos que para todo $(\tau_k, y_k) \in \mathbb{R}^+ \times X$, $S_{(3.1)}^{(k)}$ possui uma única solução $y^{(k)}(t, y_k, \tau_k)$, que existe para todo $t \in [\tau_k, \infty)$ e é contínua com respeito as condições iniciais, e supomos também que $F_k(0) = 0$.

Podemos, então, considerar o problema de valor inicial descontínuo no espaço de Banach X , dado por

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= F_k(t, y), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \\ y(\tau_{k+1}) &= g_k(y(\tau_{k+1}^-)), & k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

sendo que para cada $k \in \mathbb{N}$, F_k possui as mesmas propriedades que em (3.1), $S_{(3.2)}$ é o sistema determinado por (3.2), e suponhamos que $g_k \in C[X, X]$ e satisfaz $g_k(0) = 0$.

Claramente, para todo $(t_o, y_o) \in \mathbb{R}^+ \times X$, $S_{(3.2)}$ possui uma única solução $y(t, y_o, t_o)$ que existe para todo $t \in [t_o, \infty)$. Esta solução é tomada como a família de soluções $y^{(k)}(t, y_k, \tau_k)$, definidas em $[\tau_k, \tau_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, com condições iniciais $(\tau_k, y(\tau_k))$. Assim as soluções de (3.2) são funções contínuas por parte, sendo contínuas em cada intervalo $[\tau_k, \tau_{k+1})$ e tendo possíveis pontos de descontinuidades $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}$. Além disso $S_{(3.2)}$ admite a solução trivial $y(t, 0, t_o) = 0$, $t \geq t_o$.

Particularmente, apresentaremos nas próximas seções modelos de *SDD* em que os deslocamentos determinam semigrupos.

Observação 3.1. *Em concordância com a notação utilizada no capítulo anterior para (SDD), obviamente (3.2) determina um sistema dinâmico descontínuo $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$, em que $A = X$ e a métrica em X é determinada pela norma definida em X . Além disso, S denota o conjunto de todas as soluções de (3.2) correspondendo a todas as condições iniciais $(t_o, y_o) \in \mathbb{R}^+ \times X$.*

3.2 SDD Determinados por Semigrupos

Nesta seção definimos os casos particulares de *SDD* determinados por semigrupos lineares e não-lineares, tendo como base o modelo de sistema apresentado em (27).

Por todo o capítulo utilizaremos a notação $\mathcal{T} = \{T_i(t)\}$ para denotar uma família de semigrupos definidos em um espaço de Banach X , para o caso de semigrupos lineares, ou em um subconjunto $C \subset X$, para o caso de semigrupos não-lineares. Utilizaremos também a notação $\mathcal{H} = \{H_j\}$ para denotar uma família de operadores contínuos lineares $H_j : X \rightarrow X$, ou uma família de operadores contínuos não-lineares $H_j : C \rightarrow C$. Além disso, como anteriormente, $E = \{t_o = \tau_o, \tau_1, \tau_2, \dots : \tau_o < \tau_1 < \tau_2 < \dots\} \subset \mathbb{R}^+$ denotará um conjunto fechado, discreto e ilimitado. Para evitar confusão, vamos supor que quando \mathcal{T} consistir de semigrupos lineares, então \mathcal{H} consistirá de operadores lineares, além disso as famílias \mathcal{T} e \mathcal{H} poderão possuir um número finito ou infinito de elementos.

No Apêndice A catalogamos conceitos e resultados básicos da teoria de semigrupos para facilitar a leitura para os que não estão familiarizados com esta teoria.

3.2.1 SDC Modelados por Semigrupos

Antes de definir *SDD* determinado por semigrupos, apresentamos a definição de *SDC* modelado por semigrupos lineares e não-lineares, uma vez que o primeiro toma como base o segundo.

SDC Determinados por C_0 -semigrupos

Para um dado C_0 -semigrupo $T(t)$, definimos o deslocamento $y(\cdot, y_0, t_0)$, com tempo inicial $t_0 \in \mathbb{R}^+$ e estado inicial $y_0 \in X$, por

$$y(t, y_0, t_0) = T(t - t_0)y_0, \quad t \geq t_0, \quad (3.3)$$

e definimos o sistema dinâmico contínuo determinado pelo C_0 -semigrupo $T(t)$ como sendo a família de deslocamentos

$$S_{C_0} = \{y = y(\cdot, x, t_0) : y(t, x, t_0) = T(t - t_0)x, \quad t_0 \in \mathbb{R}^+, \quad t \geq t_0, \quad x \in X\}. \quad (3.4)$$

Observamos que da forma como foi definido, $y(t_0, y_0, t_0) = T(t_0 - t_0)y_0 = y_0$.

SDC Determinados por Semigrupos Não-lineares

De forma análoga como fizemos para C_0 -semigrupos, definimos o deslocamento $y(\cdot, y_0, t_0)$, com tempo inicial $t_0 \in \mathbb{R}^+$ e estado inicial $y_0 \in C \subset X$, por

$$y(t, y_0, t_0) = T(t - t_0)(y_0), \quad t \geq t_0, \quad (3.5)$$

e conseqüentemente, definimos o sistema dinâmico contínuo determinado pelo semigrupo não-linear $T(t)$ como sendo a família de deslocamentos

$$S_N = \{y = y(\cdot, x, t_0) : y(t, x, t_0) = T(t - t_0)(x), \quad t_0 \in \mathbb{R}^+, \quad t \geq t_0, \quad x \in C\}. \quad (3.6)$$

Novamente $y(t_0, y_0, t_0) = T(t_0 - t_0)y_0 = y_0$, além disso, para este sistema, supomos que $x = 0$ pertence ao interior de C .

3.2.2 SDD Determinados por C_0 -semigrupos

Para definir os sistemas determinados por C_0 -semigrupos, consideramos a classe de sistemas dinâmicos cujos deslocamentos $y(\cdot, y_0, t_0)$, com tempo inicial $t_0 \in \mathbb{R}^+$ e estado inicial

$y(t_o) = y_o \in X$, são dados por

$$\left. \begin{aligned} y(t, y_o, t_o) &= T_k(t - \tau_k)y(\tau_k), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \\ y(t) &= H_k y(t^-), & t = \tau_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Assim, definimos o SDD determinado por C_o -semigrupos como

$$S = \{y = y(\cdot, x, t_o) : y(t, x, t_o) = T_k(t - \tau_k)y(\tau_k), \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \\ y(t) = H_k y(t^-), t = \tau_{k+1}, k \in \mathbb{N}, t_o \in \mathbb{R}^+, y(t_o) = x \in X\}. \quad (3.8)$$

Note que o sistema definido acima toma como base o sistema correspondente definido na subseção anterior.

Observação 3.2. *Algumas considerações podem ser feitas a respeito dos deslocamentos $y(\cdot, y_o, t_o)$ de (3.8), como o fato de que são únicos, com $y(t_o, x, t_o) = x$, existem para todo $t \geq t_o$, são contínuos em $[t_o, \infty) - \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ e podem ser descontínuos em $t = \tau_k, k = 1, 2, \dots$. Além disso, denotamos por $E_1 = \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ o conjunto dos pontos de descontinuidades para o deslocamento $y(\cdot, y_o, t_o)$.*

No sistema (3.8), a família \mathcal{T} consiste de C_o -semigrupos e a família \mathcal{H} consiste de operadores lineares, de forma que por conveniência, denotaremos o sistema (3.8) por S_{DC_o} . Além disso, como os operadores $T_k(t), H_k, t \in \mathbb{R}^+$, são lineares, temos $y(t, 0, t_o) = T_k(t - \tau_k)0 = 0$, para todo $t \geq \tau_o$. Portanto $x = 0$ é ponto de equilíbrio para o SDD S_{DC_o} .

3.2.3 SDD Determinados por Semigrupos Não-Lineares

De forma análoga como fizemos para C_o -semigrupos, definimos o sistema determinado por semigrupos não-lineares considerando sistemas cujos deslocamentos $y(\cdot, y_o, t_o)$, com condições iniciais $(t_o, y_o) \in \mathbb{R}^+ \times C, C \subset X$, são dados por

$$\left. \begin{aligned} y(t, y_o, t_o) &= T_k(t - \tau_k)(y(\tau_k)), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \\ y(t) &= H_k(y(t^-)), & t = \tau_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Definimos então o SDD determinado por semigrupos não-lineares como

$$S = \{y = y(\cdot, x, t_o) : y(t, x, t_o) = T_k(t - \tau_k)(y(\tau_k)), \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \\ y(t) = H_k(y(t^-)), t = \tau_{k+1}, k \in \mathbb{N}, t_o \in \mathbb{R}^+, y(t_o) = x \in C \subset X\}. \quad (3.10)$$

A Observação 3.2 feita para o sistema (3.8) também se aplica ao sistema (3.10), o qual denotaremos por S_{DN} . Desde que operadores $T_k(t), H_k, t \in \mathbb{R}^+$, são não-lineares, para o sistema

S_{DN} vamos supor que $x = 0$ pertence ao interior de C e que $T_k(t)(0) = 0$ para todo $t \geq t_o$. Supomos também que $H_k(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, dessa forma, temos $y(t, 0, t_o) = 0$, para todo $t \geq t_o$. Portanto $x = 0$ é ponto de equilíbrio para o *SDD* S_{DN} .

Observação 3.3. *Por todo o capítulo estaremos nos referindo aos sistemas S_{DN} e $S_{D_{C_o}}$; porém, em alguns conceitos e resultados, não haverá necessidade de distinção entre esses sistemas, visto que os resultados serão satisfeitos por ambos. Nestes casos, denotaremos por S o sistema geral que pode ser interpretado como S_{DN} ou $S_{D_{C_o}}$.*

3.3 Estabilidade de Semigrupos

3.3.1 Caracterizações Qualitativas

No capítulo anterior estudamos noções de estabilidade no sentido de Lyapunov para conjuntos invariantes, nesta seção apresentaremos estes conceitos para *SDD* determinados por semigrupos, para o caso mais particular em que o conjunto invariante M é o ponto de equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} e $S_{D_{C_o}}$, que supomos pertencer ao interior de $C \subset X$.

Definição 3.1. *Dizemos que o equilíbrio $y = 0$ de S é estável, se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $t_o \geq 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, t_o) > 0$ tal que $\|y(t, y_o, t_o)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_o$ e todo $y(\cdot, y_o, t_o)$ de S , sempre que $\|y_o\| < \delta$ (e $y_o \in C$). Quando $\delta = \delta(\varepsilon)$, diremos que o equilíbrio $y = 0$ de S é uniformemente estável.*

Definição 3.2. *Dizemos que o equilíbrio $y = 0$ de S é atrativo se existe um $\eta = \eta(t_o) > 0$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_o, t_o)\| = 0,$$

para todo $y(\cdot, y_o, t_o)$ de S , sempre que $\|y_o\| < \eta$ (e $y_o \in C$).

Definição 3.3. *Dizemos que o equilíbrio $y = 0$ de S é assintoticamente estável se é estável e atrativo.*

Definição 3.4. *Dizemos que o equilíbrio $y = 0$ de S é uniformemente atrativo, se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $t_o \geq 0$ existe um $\delta > 0$ (independente de t_o e ε) e um $\mu = \mu(\varepsilon) > 0$, independente de t_o , tal que $\|y(t, y_o, t_o)\| < \varepsilon$ para todo $t > t_o + \mu$ e todo $y(\cdot, y_o, t_o)$ de S , sempre que $\|y_o\| < \delta$ (e $y_o \in C$).*

Definição 3.5. *Dizemos que o equilíbrio $y = 0$ de S é uniformemente assintoticamente estável se é uniformemente estável e uniformemente atrativo.*

Definição 3.6. Dizemos que o equilíbrio $y = 0$ de S é exponencialmente estável se existe um $\alpha > 0$, e para todo $\varepsilon > 0$ e todo $t_0 \geq 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que

$$\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)},$$

para todo $t \geq t_0$ e todo $y(\cdot, y_0, t_0)$ de S , sempre que $\|y_0\| < \delta$ (e $y_0 \in C$).

Definição 3.7. Dizemos que o equilíbrio $y = 0$ de S é globalmente assintoticamente estável, se é estável e se para todo $y(\cdot, y_0, t_0)$ de S e todo $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^+ \times X$, tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_0, t_0)\| = 0$, ou seja, tem-se que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $t_\varepsilon \geq t_0$ tal que $\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon$ sempre que $t > t_\varepsilon$.

Definição 3.8. Dizemos que o equilíbrio $y = 0$ de S é globalmente uniformemente assintoticamente estável, se

(i) é uniformemente estável;

(ii) para todo $\alpha > 0$, todo $\varepsilon > 0$ e todo $t_0 \geq 0$, existe um $\mu = \mu(\varepsilon, \alpha) > 0$ (independente de t_0) tal que se $\|y_0\| < \alpha$, então para todo $y(\cdot, y_0, t_0)$ de S , $\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0 + \mu$.

Definição 3.9. Dizemos que o equilíbrio $y = 0$ de S é globalmente exponencialmente estável, se existem $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, e para todo $\beta > 0$ existe $k(\beta) > 0$ tal que

$$\|y(t, y_0, t_0)\| < k(\beta) \|y_0\|^\gamma e^{-\alpha(t-t_0)},$$

para todo $t \geq t_0$ e todo $y(\cdot, y_0, t_0)$ de S , sempre que $\|y_0\| < \beta$.

Definição 3.10. Dizemos que o equilíbrio $y = 0$ de S é instável se para todo $\delta > 0$, existe um $y(\cdot, y_0, t_0)$ de S , com t_0 independente de δ , e um $t_1 \geq t_0$, tal que $\|y_0\| < \delta$ e $\|y(t_1, y_0, t_0)\| \geq \varepsilon_0$, para algum $\varepsilon_0 > 0$ que é independente de δ .

3.3.2 Estabilidade de C_0 -semigrupos

Nesta subseção apresentamos resultados específicos para sistemas modelados por C_0 -semigrupos. Na subseção seguinte estabeleceremos resultados semelhantes a estes, mas referentes a sistemas modelados por semigrupos não-lineares.

Para o próximo resultado, lembramos duas propriedades importantes de semigrupos lineares. Pelo Teorema A.6, para qualquer C_0 -semigrupo $T_k(t)$, existem $\mu_k \geq 0$, $P_k \geq 1$, tais que

$$\|T_k(t)\| \leq P_k e^{\mu_k t}, \quad t \geq 0. \quad (3.11)$$

Além disso, pelo Teorema A.9, se $T_k(t)$ é diferenciável para $t > r$ ($T_k(t)x$ é continuamente diferenciável em $r < t < \infty$, para cada x), sendo A_k seu gerador infinitesimal, e se $\operatorname{Re} \lambda_k \leq -\alpha_{k_0}$ para todo $\lambda_k \in \sigma(A_k)$, então dada qualquer constante positiva $\alpha_k < \alpha_{k_0}$, existe uma constante $K(\alpha_k) > 0$ tal que

$$\|T_k(t)\| \leq K(\alpha_k)e^{-\alpha_k t}, \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Resumiremos estas duas propriedades utilizando a desigualdade

$$\|T_k(t)\| \leq M_k e^{w_k t}, \quad t \geq 0, \quad (3.13)$$

sendo que, dependendo da conveniência, as constantes M_k e w_k são obtidas de (3.11) ou (3.12).

Com o objetivo de sintetizar as equações, faremos uso de algumas notações adicionais. Para um dado $l_0 \in \mathbb{N}$ e $l_k \in \mathbb{N}_{l_0+1}^+ := \{l_0 + 1, l_0 + 2, \dots\}$, definimos o produto finito

$$\left. \begin{aligned} \pi_{l_k, l_0} &= \prod_{i=0}^{k-1} (\|H_{l_i}\| M_{l_i} e^{w_{l_i} \lambda_{l_i}}), \\ a_{l_k, l_0} &= M_{l_k} e^{\left(\frac{w_{l_k} + |w_{l_k}|}{2}\right) \lambda_{l_k} \pi_{l_k, l_0}} \\ k &\in \mathbb{N}_1^+ = \{1, 2, \dots\}, \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

sendo $\pi_{l_0, l_0} = 1$, $\lambda_{l_k} = \tau_{l_{k+1}} - \tau_{l_k}$ e $\|H_k\|$ a norma do operador linear limitado definido anteriormente.

Estamos agora em condições de apresentar um importante resultado de estabilidade de sistemas modelados por semigrupos do tipo definido por (3.8). Diferentemente dos resultados de estabilidade apresentados anteriormente, este teorema não faz uso das funções de Lyapunov, o que simplifica consideravelmente sua aplicação, considerando-se as dificuldades muitas vezes encontradas em se determinar estas funções.

Teorema 3.1. (a) Para o sistema S_{DC_0} , considere (3.13). Suponha que para qualquer $l_0 \in \mathbb{N}$ existe uma constante $v(l_0) > 0$ tal que

$$a_{l_k, l_0} \leq v(l_0), \quad (3.15)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, sendo a_{l_k, l_0} definido como em (3.14). Então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DC_0} é estável.

(b) Se na parte (a), $v(l_0) = v$, então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DC_0} é uniformemente estável.

(c) Se na parte (b), (3.15) é trocada por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{l_k, l_0} = 0, \quad (3.16)$$

para todo $l_o \in \mathbb{N}$, então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DC_o} é globalmente assintoticamente estável.

(d) Se a parte (a) é satisfeita e se na parte (c) a relação (3.16) é satisfeita uniformemente com respeito a $l_o \in \mathbb{N}$ (equivalentemente, se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $l_o \in \mathbb{N}$ existe um $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, independente de $l_o \in \mathbb{N}$, tal que $a_{l_k, l_o} < \varepsilon$ para todo $k \geq K(\varepsilon)$), então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DC_o} é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

(e) Suponha que na parte (a) (3.15) é trocada por

$$a_{l_k, l_o} < a\rho^{l_k - l_o}, \quad l_o, k \in \mathbb{N}, \quad (3.17)$$

sendo $a > 0$ e $0 < \rho < 1$. Suponha ainda que

$$\lambda_k = \tau_{k+1} - \tau_k < \theta, \quad (3.18)$$

sendo $\theta > 0$ uma constante. Então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DC_o} é globalmente exponencialmente estável.

Como consequência do Teorema 3.1, apresentamos um resultado que apesar de ser mais conservativo que o teorema, possui maiores vantagens quanto a aplicações. Enunciamos este resultado em forma de corolário.

Corolário 3.1. (a) Para o sistema S_{DC_o} , suponha que as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) A condição (3.13) é verificada com parâmetros (M_k, w_k) ;

(ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta < \infty$;

(iii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $M_k \leq M < \infty$ e $w_k \leq w < \infty$, sendo $M \geq 1$ e $w \geq 0$ constantes;

(iv) Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|H_k\| M_k e^{w_k \lambda_k} \leq 1. \quad (3.19)$$

Então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DC_o} é estável e uniformemente estável.

(b) Se na parte (a) a hipótese (iv) é trocada por

$$\|H_k\| M_k e^{w_k \lambda_k} \leq \delta < 1, \quad (3.20)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, sendo $\delta > 0$. Então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DC_o} é globalmente assintoticamente estável, globalmente uniformemente assintoticamente estável e globalmente exponencialmente estável.

Tendo em vista a semelhança entre os atuais e os próximos resultados a serem apresentados, omitimos as demonstrações do Teorema 3.1 e Corolário 3.1, uma vez que as demonstrações des-

tes seguem os mesmos procedimentos utilizados nas provas dos referidos teoremas da subseção seguinte.

3.3.3 Estabilidade de Semigrupos Não-lineares

É possível estabelecer resultados semelhantes aos Teorema 3.1 e Corolário 3.1, desta vez aplicados ao $SDD S_{DN}$. Para isso, devido a não linearidade dos operadores, são necessárias algumas modificações nas hipóteses. Iniciamos estabelecendo algumas limitações aos operadores das famílias \mathcal{T} e \mathcal{H} . Suponhamos que para cada semigrupo não-linear $T_k(t)$ existem constantes $M_k \geq 1$ e $w_k \in \mathbb{R}$, e para cada operador $H_k : C \rightarrow C$ existe uma constante c_k tais que

$$\|T_k(t)(y)\| \leq M_k e^{w_k t} \|y\|, \quad (3.21)$$

e

$$\|H_k(y)\| \leq c_k \|y\|, \quad (3.22)$$

para todo $y \in C$, $t \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$.

A desigualdade (3.21) é sempre satisfeita quando o semigrupo $T_k(t)$ é quase-contrativo, neste caso $M_k \geq 1$ e $w_k \in \mathbb{R}$, e quando $T_k(t)$ é contrativo, (3.21) é satisfeita com $M_k \geq 1$ e $w_k \leq 0$.

Da mesma forma como fizemos para C_o -semigrupos, definimos

$$\left. \begin{aligned} \pi_{l_k, l_o} &= \prod_{i=0}^{k-1} (c_{l_i} M_{l_i} e^{w_{l_i} \lambda_{l_i}}), \\ a_{l_k, l_o} &= M_{l_k} e^{\left(\frac{w_{l_k} + |w_{l_k}|}{2}\right) \lambda_{l_k} \pi_{l_k, l_o}}, \\ k &\in \mathbb{N}_1^+ = \{1, 2, \dots\}, \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Com essas considerações, enunciamos o resultado que estabelece condições suficientes para estabilidade de sistemas determinados por semigrupos não-lineares.

Teorema 3.2. (a) Para o sistema S_{DN} , considere (3.21) e (3.22). Suponha que para qualquer $l_o \in \mathbb{N}$ existe uma constante $v(l_o) > 0$ tal que

$$a_{l_k, l_o} \leq v(l_o), \quad (3.24)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, sendo a_{l_k, l_o} definido como em (3.23). Então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é estável;

(b) Se na parte (a), $v(l_o) = v$, então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é uniformemente estável;

(c) Se na parte (a), (3.24) é trocada por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{l_k, l_o} = 0, \quad (3.25)$$

para todo $l_o \in \mathbb{N}$, então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é assintoticamente estável;

(d) Se a parte (a) é satisfeita e se na parte (c) a relação (3.25) é satisfeita uniformemente com respeito a $l_o \in \mathbb{N}$ (equivalentemente, se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $l_o \in \mathbb{N}$ existe um $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, independente de $l_o \in \mathbb{N}$, tal que $a_{l_k, l_o} < \varepsilon$ para todo $k \geq K(\varepsilon)$), então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é uniformemente assintoticamente estável;

(e) Suponha que na parte (a) (3.24) é trocada por

$$a_{l_k, l_o} < a\rho^{l_k - l_o}, \quad l_o, k \in \mathbb{N}, \quad (3.26)$$

sendo $a > 0$ e $0 < \rho < 1$. Suponha ainda que

$$\lambda_k = \tau_{k+1} - \tau_k < \theta, \quad (3.27)$$

sendo que $\theta > 0$ é uma constante. Então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é exponencialmente estável;

(f) Se nas partes (c) – (e) as condições (3.21) e (3.22) são válidas para todo $y \in X$, então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é globalmente assintoticamente estável, globalmente uniformemente assintoticamente estável, globalmente exponencialmente estável, respectivamente.

Lema 3.1. Para o sistema S_{DN} , se as desigualdades (3.21) e (3.22) são satisfeitas, então para todo $t_o \geq 0$, $y_o \in C$ e todo $t \geq t_o$, existe $l_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|y(t)\| \leq a_{l_k, l_o} \|y_o\|, \quad (3.28)$$

para todo $t \in [\tau_{l_k}, \tau_{l_{k+1}})$, $k \in \mathbb{N}$, sendo a_{l_k, l_o} definida como em (3.23).

Demonstração: Para o sistema S_{DN} , com $E = \{\tau_o, \tau_1, \tau_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^+$, associamos cada intervalo $[\tau_k, \tau_{k+1})$ com o índice $k \in \mathbb{N}$. Para não haver risco de confusão, empregamos algumas alterações na notação para que seja identificada com a notação empregada em (3.23). Assim, tomamos $l_o = [t_o] = [\tau_o]$, sendo que $[x]$ denota a parte inteira de $x \in \mathbb{R}$, e fazemos $l_{k+1} = l_k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, o conjunto E altera-se para $E = \{\tau_{l_o}, \tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \dots\}$, e o intervalo $[\tau_k, \tau_{k+1})$ torna-se $[\tau_{l_k}, \tau_{l_{k+1}})$.

Agora, se $y(t_o) = y(\tau_{l_o}) = y_o$ e $y_o \in C$, desde que a solução de S_{DN} é dada por $y(t) = T_{l_k}(t -$

$\tau_{l_k})(y(\tau_{l_k}))$, usando (3.21) temos

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \|T_{l_o}(t - \tau_{l_o})(y(\tau_{l_o}))\| \\ &\leq M_{l_o} e^{w_{l_o}(t - \tau_{l_o})} \|y(\tau_{l_o})\|, \end{aligned}$$

para $t \in [\tau_{l_o}, \tau_{l_o+1})$.

Além disso, $t - \tau_{l_o} < \tau_{l_o+1} - \tau_{l_o} = \lambda_{l_o}$ e $w_{l_o} \leq \frac{w_{l_o} + |w_{l_o}|}{2}$, logo

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq M_{l_o} e^{w_{l_o}(t - \tau_{l_o})} \|y(\tau_{l_o})\| \\ &\leq M_{l_o} e^{\frac{w_{l_o} + |w_{l_o}|}{2} \lambda_{l_o}} \|y(\tau_{l_o})\|, \end{aligned}$$

para $t \in [\tau_{l_o}, \tau_{l_o+1})$.

Portanto, por (3.23) temos

$$\|y(t)\| \leq a_{l_o, l_o} \|y(\tau_{l_o})\|, \quad t \in [\tau_{l_o}, \tau_{l_o+1}). \quad (3.29)$$

Quando $t = \tau_{l_o+1}$, como a solução de S_{DN} é dada por $y(t) = H_{l_k}(y(t^-))$ em $t = \tau_{l_k+1}$, usando (3.22) temos

$$\begin{aligned} \|y(\tau_{l_o+1})\| &= \|H_{l_o}(y(\tau_{l_o+1}^-))\| \\ &\leq c_{l_o} \|y(\tau_{l_o+1}^-)\| \\ &\leq c_{l_o} M_{l_o} e^{w_{l_o}(\tau_{l_o+1} - \tau_{l_o})} \|y(\tau_{l_o})\| \\ &= c_{l_o} M_{l_o} e^{w_{l_o} \lambda_{l_o}} \|y_{l_o}\|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Agora, de forma semelhante, quando $t \in [\tau_{l_k}, \tau_{l_k+1})$ e $k \in \mathbb{N}_1^+ = \{1, 2, \dots\}$, se $y(\tau_{l_k}) \in C$, temos

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \|T_{l_k}(t - \tau_{l_k})(y(\tau_{l_k}))\| \\ &\leq M_{l_k} e^{w_{l_k}(t - \tau_{l_k})} \|y(\tau_{l_k})\| \\ &\leq M_{l_k} e^{\frac{w_{l_k} + |w_{l_k}|}{2} \lambda_{l_k}} \|y(\tau_{l_k})\|, \end{aligned} \quad (3.31)$$

e quando $t = \tau_{l_k+1}$

$$\begin{aligned} \|y(\tau_{l_k+1})\| &= \|H_{l_k}(y(\tau_{l_k+1}^-))\| \\ &\leq c_{l_k} \|y(\tau_{l_k+1}^-)\| \\ &\leq c_{l_k} M_{l_k} e^{w_{l_k}(\tau_{l_k+1} - \tau_{l_k})} \|y(\tau_{l_k})\| \\ &= c_{l_k} M_{l_k} e^{w_{l_k} \lambda_{l_k}} \|y_{l_k}\|. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Agora, para $k \in \mathbb{N}$, por (3.32), obtemos por recorrência

$$\begin{aligned}
\|y(\tau_k)\| &\leq c_{l_k-1} M_{l_k-1} e^{w_{l_k-1} \lambda_{l_k-1}} \|y(\tau_{l_k-1})\| \\
&\leq c_{l_k-1} M_{l_k-1} e^{w_{l_k-1} \lambda_{l_k-1}} [c_{l_k-2} M_{l_k-2} e^{w_{l_k-2} \lambda_{l_k-2}} \|y(\tau_{l_k-2})\|] \\
&\leq c_{l_k-1} M_{l_k-1} e^{w_{l_k-1} \lambda_{l_k-1}} [c_{l_k-2} M_{l_k-2} e^{w_{l_k-2} \lambda_{l_k-2}}] [c_{l_k-3} M_{l_k-3} e^{w_{l_k-3} \lambda_{l_k-3}} \|y(\tau_{l_k-3})\|] \\
&\vdots \\
&\leq \prod_{i=0}^{k-1} (c_{l_i} M_{l_i} e^{w_{l_i} \lambda_{l_i}}) \|y_o\|.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Portanto, por (3.31) e (3.33), combinadas com (3.29) e (3.30), temos

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &\leq M_{l_k} e^{\frac{w_{l_k} + |w_{l_k}|}{2} \lambda_{l_k}} \|y(\tau_{l_k})\| \\
&\leq M_{l_k} e^{\frac{w_{l_k} + |w_{l_k}|}{2} \lambda_{l_k}} \prod_{i=0}^{k-1} (c_{l_i} M_{l_i} e^{w_{l_i} \lambda_{l_i}}) \|y_o\|,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

para todo $t \in [\tau_{l_k}, \tau_{l_{k+1}})$ e $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente, por (3.23) e (3.34) obtemos

$$\|y(t)\| \leq a_{l_k, l_o} \|y_o\|, \tag{3.35}$$

para todo $t \in [\tau_{l_k}, \tau_{l_{k+1}})$ e $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração do Teorema 3.2: (a) Para todo $\varepsilon > 0$ e $l_o \in \mathbb{N}$, tomamos $\delta'(\varepsilon, l_o) = \frac{\varepsilon}{v(l_o)}$, além disso, desde que $l_o = [t_o]$, tomamos $\delta'(\varepsilon, [t_o]) = \delta(\varepsilon, t_o)$ para todo $l_o, k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, por (3.24) e (3.35), se $\|y_o\| < \delta$ e $y_o \in C$, então

$$\|y(t)\| \leq a_{l_k, l_o} \|y_o\| < v(l_o) \delta = \varepsilon,$$

para todo $t \in [\tau_{l_k}, \tau_{l_{k+1}})$ e $k \in \mathbb{N}$. Portanto o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é estável.

(b) Se $v(l_o) = v$, então a escolha de δ' pode ser independente de l_o , neste caso $\delta'(\varepsilon, l_o) = \delta'(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{v}$, conseqüentemente a escolha de δ também é independente de t_o , ou seja, $\delta(\varepsilon, t_o) = \delta'(\varepsilon, [l_o]) = \delta'(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$, de onde concluímos que equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é uniformemente estável.

(c) Devemos mostrar que o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é estável e atrativo. Observamos que (3.25) implica (3.24), portanto segue de (a) a estabilidade do equilíbrio. Mostremos então que o equilíbrio é atrativo, ou seja, existe um $\eta = \eta(t_o) > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_o, t_o)\| = 0$, sempre que $\|y_o\| < \eta$. Para isso, afirmamos que $t \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. De fato, como E é ilimitado

segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$, e como $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i = \tau_k - \tau_0$, podemos escrever, para todo $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$,

$$t = t_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i + \xi_k = \tau_k + \xi_k,$$

para algum $0 \leq \xi_k < \tau_{k+1} - \tau_k = \lambda_k$. Logo, quando $k \rightarrow \infty$, temos $\tau_k \rightarrow \infty$, portanto $t \rightarrow \infty$. Agora, pelo Lema (3.1),

$$\|y(t, y_0, t_0)\| \leq a_{l_k, l_0} \|y_0\|,$$

portanto, usando a hipótese (3.25), segue que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_0, t_0)\| = 0$ para todo $y(t, y_0, t_0)$ de S_{DN} sempre que $y_0 \in C$. Concluimos então que o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é atrativo para todo $y_0 \in C$, conseqüentemente, é assintoticamente estável.

(d) Como por hipótese as condições da parte (b) são satisfeitas, já mostramos que o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é uniformemente estável, resta mostrar que é também uniformemente atrativo. Para isso, escolhamos $\delta > 0$ tal que $\{y_0 : \|y_0\| < \delta\} \subset C$. Agora, por hipótese, (3.25) é satisfeita uniformemente com respeito a $l_0 \in \mathbb{N}$, assim, para todo $\varepsilon^* > 0$ e todo $l_0 \in \mathbb{N}$, existe um $K^*(\varepsilon^*) \in \mathbb{N}$ (independente de l_0) tal que $a_{l_k, l_0} < \varepsilon^*$ para todo $k \geq K^*(\varepsilon^*)$. Portanto pelo Lema 3.1,

$$\|y(t)\| \leq a_{l_k, l_0} \|y_0\| < \varepsilon^* \delta,$$

para todo $t \in [\tau_{l_k}, \tau_{l_k+1})$ e $k \geq K^*(\varepsilon^*)$. Podemos então, para todo $\varepsilon > 0$, escolher $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\delta}$, assim $K^*(\varepsilon^*) = K^*(\frac{\varepsilon}{\delta}) = K(\varepsilon)$ e

$$\|y(t, y_0, t_0)\| \leq a_{l_k, l_0} \|y_0\| < \varepsilon^* \delta = \frac{\varepsilon}{\delta} \delta = \varepsilon,$$

para todo $t \geq \tau_{l_0+K(\varepsilon)}$.

Finalmente, tomamos $\mu(\varepsilon) = \tau_{l_0+K(\varepsilon)} + \tau_{l_0}$, dessa forma $\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0 + \mu(\varepsilon)$ e todo $y(t, y_0, t_0)$ de S_{DN} , sempre que $\|y_0\| < \delta$. Portanto o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é uniformemente atrativo e, conseqüentemente, uniformemente assintoticamente estável.

(e) Pelo Lema 3.1, para todo $t_0 \geq 0$ e todo $t \geq t_0$, existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [\tau_{l_k}, \tau_{l_k+1})$ e (3.35) vale. Além disso, $t - t_0 < \tau_{l_k+1} - \tau_{l_0} = \sum_{i=l_0}^{l_k} \lambda_i$, assim, por (3.27) temos

$$t - t_0 < \sum_{i=l_0}^{l_k} \lambda_i \leq \sum_{i=l_0}^{l_k} \theta < (l_k - l_0 + 1)\theta,$$

que implica que $l_k - l_0 > \frac{t-t_0}{\theta} - 1$.

Logo, pelo Lema 3.1 e por (3.26), como $\rho < 1$ temos

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq a_{l_k, l_o} \|y_o\| \\ &< a\rho^{l_k - l_o} \|y_o\| \\ &< a\rho^{\frac{t-t_o}{\theta} - 1} \|y_o\|. \end{aligned}$$

Finalmente, para todo $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\varepsilon\rho}{a}$ e seja $\alpha = -\frac{\ln\rho}{\theta} > 0$. Então para todo $y_o \in C$ tal que $\|y_o\| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \|y(t, y_o, t_o)\| &\leq a\rho^{\frac{t-t_o}{\theta} - 1} \|y_o\| \\ &< a\rho^{\frac{t-t_o}{\theta} - 1} \delta \\ &= a\rho^{\frac{t-t_o}{\theta} - 1} \left[\frac{\varepsilon\rho}{a} \right] \\ &= \varepsilon\rho^{\frac{t-t_o}{\theta}} \\ &= \varepsilon e^{\ln\left(\rho^{\frac{t-t_o}{\theta}}\right)} \\ &= \varepsilon e^{\frac{\ln\rho}{\theta}(t-t_o)} \\ &= \varepsilon e^{-\alpha(t-t_o)}, \end{aligned}$$

para $t \geq t_o$. Portanto o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é exponencialmente estável.

(f) Observamos que se (3.21) e (3.22) são válidas para todo $y \in X$, então a desigualdade (3.28) do Lema 3.1 é válida para todo $y_o \in X$. Dividimos a prova desse item para os três casos.

(i) Repetindo os passos da demonstração da parte (c) considerando que $y_o \in X$, como (3.21) e (3.22) valem para todo $y \in X$, podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_o, t_o)\| = 0,$$

para todo $y(\cdot, y_o, t_o)$ de S_{DN} , sempre que $y_o \in X$ e $t_o \in \mathbb{R}^+$. Portanto o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é globalmente assintoticamente estável.

(ii) Seguindo as mesmas linhas da demonstração da parte (d), para todo $\alpha > 0$ e todo $\varepsilon > 0$, tomando $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\alpha}$, existe um $K(\varepsilon, \alpha) \in \mathbb{N}$ (independente de $t_o \geq 0$), tal que $\|y(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq \tau_{l_o} + K(\varepsilon, \alpha)$. Tomando então $\mu(\varepsilon, \alpha) = \tau_{l_o + K(\varepsilon, \alpha)} - \tau_{l_o}$, temos $\|y(t, y_o, t_o)\| < \varepsilon$ para todo $t > t_o + \mu$ e todo $y(\cdot, y_o, t_o) \in S_{DN}$, sempre que $\|y_o\| < \alpha$. Portanto o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

(iii) Para todo $\beta > 0$ e todo $\|y_o\| < \beta$, seguindo o desenvolvimento da parte (e), temos

$$\|y(t, y_o, t_o)\| < \left(\frac{a}{\rho}\right) \rho^{\frac{(t-t_o)}{\theta}} \|y_o\| = \left(\frac{a}{\rho}\right) \|y_o\| e^{-\alpha(t-t_o)},$$

para todo $t \geq t_o \geq 0$, sendo $\alpha = -\frac{\ln \rho}{\theta} > 0$. Basta tomarmos então $k(\beta) = \frac{\alpha}{\rho}$, daí temos $\|y(t, y_o, t_o)\| < k(\beta) \|y_o\| e^{-\alpha(t-t_o)}$ para todo $t \geq t_o$, sempre que $\|y_o\| < \beta$, ou seja, o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é globalmente exponencialmente estável. \square

Da mesma forma como o Corolário 3.1, o próximo resultado destaca-se por apresentar maior facilidade ao se tratar de aplicações, mesmo sendo mais conservativo que o Teorema 3.2.

Corolário 3.2. (a) Para o sistema S_{DN} , suponha que as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) A condição (3.21) é verificada com parâmetros (M_k, w_k) ;
- (ii) A condição (3.22) é verificada com parâmetro c_k ;
- (iii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta < \infty$;
- (iv) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $M_k \leq M < \infty$ e $w_k \leq w < \infty$, sendo $M \geq 1$ e $w \in \mathbb{R}$;
- (v) Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$c_k M_k e^{w_k \lambda_k} \leq 1. \quad (3.36)$$

Então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é estável e uniformemente estável.

(b) Se na parte (a) a hipótese (v) é trocada por

$$c_k M_k e^{w_k \lambda_k} \leq \delta < 1, \quad (3.37)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, sendo $\delta > 0$. Então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é assintoticamente estável, uniformemente assintoticamente estável e exponencialmente estável.

(c) Se na parte (a) as desigualdades (3.21) e (3.22) são satisfeitas para todo $y \in X$ e no lugar de (3.36) tivermos (3.37), então o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é globalmente assintoticamente estável, globalmente uniformemente assintoticamente estável e globalmente exponencialmente estável.

Demonstração: (a) Empregando a notação usada anteriormente, reescrevemos c_k, M_k, λ_k, w_k , como $c_{l_k}, M_{l_k}, \lambda_{l_k}, w_{l_k}$, respectivamente. Assim, da hipótese (3.36) temos $c_{l_k} M_{l_k} e^{w_{l_k} \lambda_{l_k}} \leq 1$ e segue por (3.23) que

$$\pi_{l_k, l_o} = \prod_{i=0}^{k-1} (c_{l_i} M_{l_i} e^{w_{l_i} \lambda_{l_i}}) \leq 1, \quad \pi_{l_o, l_o} = 1,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, das hipóteses (iii) e (iv) temos $\lambda_{l_k} \leq \theta, M_{l_k} \leq M < \infty$ e $w_{l_k} \leq w < \infty$, para todo

$k \in \mathbb{N}$, logo

$$\begin{aligned} a_{l_k, l_o} &= M_{l_k} e^{\left(\frac{w_{l_k} + |w_{l_k}|}{2}\right) \lambda_{l_k}} \pi_{l_k, l_o} \\ &\leq M_{l_k} e^{\left(\frac{w_{l_k} + |w_{l_k}|}{2}\right) \lambda_{l_k}} \\ &\leq M e^{\left(\frac{w + |w|}{2}\right) \theta}. \end{aligned}$$

Basta então tomarmos $v(l_o) = v = M e^{\left(\frac{w + |w|}{2}\right) \theta}$, independente de l_o , e as condições das partes (a) e (b) do Teorema 3.2 são satisfeitas, ou seja, o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é estável e uniformemente estável.

(b) Da mesma forma com fizemos na parte (a), usando agora o fato de que $c_{l_k} M_{l_k} e^{w_{l_k} \lambda_{l_k}} \leq \delta < 1$, temos

$$\begin{aligned} a_{l_k, l_o} &= M_{l_k} e^{\left(\frac{w_{l_k} + |w_{l_k}|}{2}\right) \lambda_k} \prod_{i=0}^{k-1} (c_{l_i} M_{l_i} e^{w_{l_i} \lambda_{l_i}}) \\ &\leq M_{l_k} e^{\left(\frac{w_{l_k} + |w_{l_k}|}{2}\right) \lambda_k} \delta^{l_k} \\ &\leq M e^{\left(\frac{w + |w|}{2}\right) \theta} \delta^{l_k - l_o} \\ &< (M + 1) e^{\left(\frac{w + |w|}{2}\right) \theta} \delta^{l_k - l_o}. \end{aligned}$$

Tomando então $a = (M + 1) e^{\left(\frac{w + |w|}{2}\right) \theta}$ e $\rho = \delta$, as condições da parte (e) do Teorema 3.2 são satisfeitas. Além disso, quando $k \rightarrow \infty$ temos que $\tau_k \rightarrow \infty$, que implica $l_k \rightarrow \infty$. Dessa forma, temos

$$(M + 1) e^{\left(\frac{w + |w|}{2}\right) \theta} \delta^{l_k - l_o} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Portanto $a_{l_k, l_o} \rightarrow 0$ uniformemente quando $k \rightarrow \infty$, e as condições das partes (c) e (d) do Teorema 3.2 são satisfeitas. Portanto o equilíbrio $y = 0$ de S_{DN} é assintoticamente estável, uniformemente assintoticamente estável e exponencialmente estável.

(c) Tendo em vista que as demonstrações deste item seguem diretamente daquelas feitas no item (f) do Teorema 3.2, não há necessidade de reescrevê-las. \square

Como dissemos anteriormente, os resultados deste capítulo não fazem uso das funções de Lyapunov, pois amparam-se na teoria de semigrupos, fato que muitas vezes é de importância considerável, tendo em vista as dificuldades envolvidas na determinação destas funções para muitos sistemas. Além disso, é grande a classe de sistemas que podem ser modelados por semigrupos, evidenciando a importância dos Teoremas 3.1 e 3.2. No que diz respeito à aplicações, os Corolários 3.1 e 3.2, mesmo sendo mais restritivos que os dois teoremas anteriores quando consideramos as limitações impostas a cada membro dos produtos parciais, podem ser mais facilmente aplicados, como veremos no capítulo seguinte.

4 Aplicações

Neste capítulo, consideraremos sistemas descritos por equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais com retardo, para os quais aplicaremos os resultados estabelecidos no capítulo anterior.

4.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Para esta seção, sejam $X = \mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ qualquer uma das normas equivalentes em $\mathbb{R}^{n \times n}$. No Capítulo 2, abordamos alguns *SDD* para exemplificar a aplicação dos resultados de estabilidade. Agora, discutiremos um pouco mais estes sistemas para exemplificar os resultados do capítulo anterior.

Consideremos sistemas que são casos particulares da família de sistemas (3.1), dados pelos problemas de Cauchy

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= A_k y(t), \quad t \geq t_k; \\ y(t_k) &= y_k, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

sendo $t_k \in \mathbb{R}^+$ e $y_k \in \mathbb{R}^n$. Suponhamos satisfeitas as condições para existência, unicidade e continuidade das soluções $y^{(k)}(\cdot, y_k, \tau_k)$ destes problemas para $t \in [\tau_k, \infty)$, e denotamos por $S_{(4.1)}^{(k)}$ os sistemas gerados pela família de problemas acima.

Consideremos então o sistema dinâmico descontínuo determinado por

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= A_k y(t), \quad \tau_k \leq t < \tau_{k+1}; \\ y(t) &= B_k y(t^-), \quad t = \tau_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

sendo $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $A_k, B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Denotaremos por $S_{(4.2)}$ o *SDD* determinado por (4.2).

Novamente, da mesma maneira como para $S_{(3.2)}$, para todo $(t_o, y_o) \in \mathbb{R}^+ \times X$, o sistema anterior possui uma única solução $y(t, y_o, t_o)$ que existe para todo $t \in [t_o, \infty)$. Esta solução é contínua em $[\tau_k, \tau_{k+1})$ e possui possíveis descontinuidades em $t = \tau_k \in E = \{\tau_1, \tau_2, \dots : \tau_1 < \tau_2 < \dots\}$, $k \in \mathbb{N}$, além disso o sistema admite a solução trivial $y(t, 0, t_o) = 0$, $t \geq t_o$, portanto

$y = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema $S_{(4.2)}$. Estudaremos portanto a estabilidade do ponto de equilíbrio fazendo uso dos resultados estabelecidos para C_o -semigrupos.

Consideremos então os sistemas $S_{(4.1)}^{(k)}$. No Apêndice A afirmamos que neste caso (Teorema A.4), para cada $k \in \mathbb{N}$, as soluções de (4.1) geram C_o -semigrupos $T_k(t)$, (para mais detalhes citamos (31)). Mais especificamente, temos $T_k(t) = e^{tA_k}$, sendo e^{tA_k} dada por uma série convergente e satisfazendo a propriedade

$$\|e^{tA_k}\| \leq e^{t\|A_k\|}. \quad (4.3)$$

Tomando como base os sistemas dados por (4.1), os deslocamentos do sistema $S_{(4.2)}$ podem ser dados por

$$\left. \begin{aligned} y(\cdot, y_o, t_o) &= T_k(t - \tau_k)y(\tau_k) = e^{(t-\tau_k)A_k}y(\tau_k), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}; \\ y(t) &= B_k y(t^-), & t = \tau_{k+1}, k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\}$$

Podemos então estabelecer o seguinte resultado, que sob certas condições garante a estabilidade uniforme, uniforme assintótica e exponencial do equilíbrio $y = 0$ do sistema $S_{(4.2)}$.

Proposição 4.1. *Para o sistema $S_{(4.2)}$, suponha que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta < \infty$, e $\|A_k\| \leq w < \infty$, sendo θ e w constantes reais positivas.*

(a) *Suponha ainda que para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\|B_k e^{A_k \lambda_k}\| \leq 1. \quad (4.4)$$

Então o equilíbrio $y = 0$ de $S_{(4.2)}$ é uniformemente estável.

(b) *Se no lugar da última desigualdade tivermos*

$$\|B_k e^{A_k \lambda_k}\| \leq \delta < 1, \quad (4.5)$$

sendo $\delta > 0$, então o equilíbrio $y = 0$ de $S_{(4.2)}$ é globalmente assintoticamente estável, globalmente uniformemente assintoticamente estável e globalmente exponencialmente estável.

Demonstração: Para todo $k \in \mathbb{N}$, por (4.3) temos

$$\|B_k e^{A_k \lambda_k}\| \leq \|B_k\| e^{\|A_k\| \lambda_k}.$$

Aplicamos então o Corolário 3.1 com $M_k = 1$ e $w_k = \|A_k\|$, e concluímos assim a demonstração.

□

Particularmente, para um sistema linear sujeito à efeitos de impulso, dado por

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= A_k y(t), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}; \\ y(t) &= (I + B_k)y(t^-), & t = \tau_{k+1}, k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

sendo $A_k, B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade, é possível mostrar, de forma análoga, que o equilíbrio $y = 0$ deste sistema é globalmente exponencialmente estável.

4.2 Equações Diferenciais Funcionais com Retardo

Aplicaremos nossos resultados a sistemas modelados por uma classe de equações diferenciais funcionais com retardo. Mostraremos que sob certas limitações os deslocamentos desses sistemas são modelados por semigrupos. Podemos, então, estabelecer hipóteses semelhantes àquelas que aparecem nos resultados da Seção 3.2 para garantir a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema. Iniciamos apresentando algumas definições e resultados básicos sobre estas equações. Observamos ainda que os conceitos e resultados a serem apresentados podem ser encontrados em (32, 33, 30, 27).

4.2.1 Resultados Básicos

Neste capítulo, consideraremos $X = C_r = C[[-r, 0], \mathbb{R}^n]$, que é um espaço de Banach com norma

$$\|\phi\| = \max\{|\phi(t)| : -r \leq t \leq 0\},$$

sendo que $|\cdot|$ denota a norma em \mathbb{R}^n . Para $x \in C_r$, definimos ainda a função $x_t \in C_r$ dada por $x_t(s) = x(t+s)$, para $-r \leq s \leq 0$. Consideramos também que $C \subset X$ é uma vizinhança da origem em X .

Suponhamos que Ω é um domínio (aberto e conexo) em $\mathbb{R}^+ \times C_r$ e seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Chamamos de equação diferencial funcional com retardo (EDFR), a equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (4.7)$$

sendo que $\dot{x}(t)$ denota a derivada à direita de x com respeito a t . Uma função $x \in C[[t_o - r, t_o + t_f], \mathbb{R}^n]$, $t_f > 0$, é uma solução de (4.7), se $(t, x_t) \in \Omega$ para $t \in [t_o, t_o + t_f]$ e $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$.

Agora, dado $(t_o, \phi^{(o)}) \in \Omega$, associado com a equação (4.7), consideremos o problema de valor inicial

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), \\ x_{t_o} &= \phi^{(o)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Dizemos que uma função $x \in C[t_0 - r, t_0 + t_f], \mathbb{R}^n$, denotada por $x(t, \phi^{(o)}, t_0)$, é uma solução de (4.8), com valor inicial $\phi^{(o)}$, se $x(t, \phi^{(o)}, t_0)$ é solução de (4.7) e se $x(t_0, \phi^{(o)}, t_0) = x_{t_0}(\phi^{(o)}, t_0) = \phi^{(o)}$.

Apresentamos agora alguns resultados gerais sobre a solução do problema anterior, incluindo existência e unicidade, que nos servirá como suporte. O lema a seguir estabelece uma formulação equivalente ao problema (4.8).

Lema 4.1. *Dado $(t_0, \phi^{(o)}) \in \Omega$, se $f(t, \phi^{(o)})$ é contínua, então encontrar uma solução de (4.8) é equivalente a resolver a equação integral*

$$\left. \begin{aligned} x_{t_0} &= \phi^{(o)}, \\ x(t) &= \phi^{(o)}(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

O próximo resultado versa sobre a continuidade de x_t .

Lema 4.2. *Se $x \in C[[t_0 - r, t_0 + c], \mathbb{R}^n]$, então x_t é uma função contínua de t , para $t \in [t_0, t_0 + c]$.*

Enunciamos ainda um resultado que garante a existência e unicidade da solução de (4.8).

Lema 4.3. *Para todo $(t_0, \phi^{(o)}) \in \Omega$, se $f \in C[\Omega, \mathbb{R}^n]$, então (4.8) tem uma solução definida em $[t_0, t_0 + c]$. Além disso, se para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, f satisfaz a condição de Lipschitz*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L \|x - y\|,$$

para todo $(t, x), (t, y) \in K$, sendo L uma constante dependendo em K . Então a solução de (4.8) é única no intervalo $[t_0 - r, t_0 + c]$, para todo $c > 0$.

Resultados Especiais para EDFR Lineares

Com o interesse de relacionar sistemas de EDFR com semigrupos, consideraremos agora o caso em que na equação (4.7), temos $C = C_r$ e $f(t, x_t) = L(x_t)$. Neste caso, L é uma aplicação linear contínua de C_r em \mathbb{R}^n definida pela integral de Stieltjes

$$L(\phi) = \int_{-r}^0 [dB(s)]\phi(s), \quad (4.10)$$

sendo $B(s) = [b_{ij}(s)]$ uma matriz $n \times n$ cujas entradas são funções de variação limitada em $[-r, 0]$. Definida dessa forma, a aplicação L é Lipschitz contínua em C_r , com constante (de

Lipschitz) K menor ou igual a variação de B em (4.10). De fato,

$$\begin{aligned} |L(\phi) - L(\psi)| &= \left| \int_{-r}^0 [dB(s)]\phi(s) - \int_{-r}^0 [dB(s)]\psi(s) \right| \\ &= \left| \int_{-r}^0 [dB(s)][\phi(s) - \psi(s)] \right| \\ &\leq \left| \int_{-r}^0 dB(s) \right| \|\phi(s) - \psi(s)\| \\ &\leq K \|\phi(s) - \psi(s)\|, \end{aligned}$$

com $\phi, \psi \in C_r$.

Obtemos assim o problema de valor inicial linear, como caso particular de (4.8), dado por

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= L(x_t), \\ x_{t_0} &= \phi^{(o)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Agora, dada $\phi^{(o)} \in C_r$, se $x(t, \phi^{(o)}, t_0)$ é a única solução de (4.11), definimos o operador solução $T(t) : C_r \rightarrow C_r$ por

$$x_t(\cdot, \phi^{(o)}, t_0) = T(t - t_0)\phi^{(o)}. \quad (4.12)$$

Lema 4.4. Para o operador solução $T(t)$, $t \geq 0$, definido por (4.12), a família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Além disso, o gerador infinitesimal A de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é dado por

$$A\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & -r \leq \theta < 0; \\ L(\phi), & \theta = 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

e o espectro do gerador ($\sigma(A)$) consiste de todas as soluções da equação característica

$$\det \left(\int_{-r}^0 e^{\lambda s} dB(s) - \lambda I \right) = 0. \quad (4.14)$$

Para finalizar essa seção consideraremos dois resultados de C_0 -semigrupos enunciados no Apêndice A. Pelo Teorema A.9, se as soluções de (4.14) são tais que $Re\lambda \leq -\alpha_o$, então para toda constante positiva $\alpha < \alpha_o$, existe uma constante $P(\alpha) > 0$ tal que

$$\|T(t)\| \leq P(\alpha)e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (4.15)$$

Mesmo quando as soluções de (4.14) não satisfazem a relação citada, o Teorema A.6 garante que sempre existem constantes $\mu > 0$, $Q \geq 1$, tais que

$$\|T(t)\| \leq Qe^{\mu t}, \quad t \geq 0. \quad (4.16)$$

Estabelecidos os resultados básicos para $EDFR$, consideraremos agora SDD determinados

por *EDFR* lineares e não-lineares.

4.2.2 SDD Determinados por Semigrupos Não-Lineares

Consideremos o sistema de equações diferenciais funcionais com retardo dado por

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= F_k(x_t), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}; \\ x_t &= H_k(x_{t-}), & t = \tau_{k+1}, k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

sendo $\{F_k\}$ e $\{H_k\}$ famílias de aplicações tais que $F_k : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H_k : C \rightarrow C$, sendo $E = \{t_o = \tau_o, \tau_1, \tau_2, \dots : \tau_o < \tau_1 < \tau_2 < \dots\}$ um conjunto discreto, infinito e ilimitado e $S_{(4.17)}$ o sistema determinado por (4.17). Para o sistema acima, suponhamos que para todo $k \in \mathbb{N}$, $H_k \in C[C, C]$, $H_k(0) = 0$ e existe uma constante $C_k > 0$ tal que

$$\|H_k(\omega)\| \leq C_k \|\omega\|, \quad (4.18)$$

para todo $\omega \in C$.

Suponhamos também que $F_k(0) = 0$ e F_k satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|F_k(\omega) - F_k(\eta)\| < K_k \|\omega - \eta\|, \quad (4.19)$$

para todo $\omega, \eta \in C$.

Antes de falarmos das soluções de (4.17), consideremos o seguinte problema de valor inicial que é base para aquele sistema. Para todo $k \in \mathbb{N}$, pelo que vimos na subseção anterior, o problema de valor inicial

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= F_k(x_t), & t > \tau_k, k \in \mathbb{N}, \\ x_t &= \phi^{(k)}, & t = \tau_k. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

em que F_k possui as mesmas propriedades do sistema $S_{(4.17)}$, possui uma única solução $\psi_t^{(k)}(\cdot, \phi^{(k)}, \tau_k)$ para toda condição inicial $\phi^{(k)} \in C$, que existe para todo $t \geq \tau_k$, com $\psi_{\tau_k}^{(k)}(\cdot, \phi^{(k)}, \tau_k) = \phi^{(k)}$.

Dessa forma, para todo $(t_o, \phi^{(o)}) \in \mathbb{R}^+ \times X$, $S_{(4.17)}$ possui uma única solução $\psi_t(\cdot, \phi^{(o)}, t_o)$ que existe para todo $t \in [t_o, \infty)$. Esta solução é tomada como a família dos segmentos das soluções $\psi_t^{(k)}(\cdot, \phi^{(k)}, \tau_k)$, definidas em $[\tau_k, \tau_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, com condições iniciais $(\tau_k, \phi^{(k)})$. Denotamos então

$$\psi_t(\cdot, \phi^{(o)}, \tau_o) = \begin{cases} \psi_t^{(k)}(\cdot, \phi^{(k)}, \tau_k), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}; \\ H_k(\psi_{t-}^{(k)}(\cdot, \phi^{(k)}, \tau_k)) = \phi^{(k+1)}, & t = \tau_{k+1}, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.21)$$

a solução de (4.17). Note que o estado no tempo τ_k é dado por

$\phi^{(k)} = H_{k-1}(\psi_{\tau_{k-1}^-}^{(k)}(\cdot, \phi^{(k-1)}, \tau_{k-1}))$, ou seja, a aplicação H_{k-1} indica o estado do deslocamento no tempo inicial do intervalo $[\tau_k, \tau_{k+1})$. Além disso, pela forma como foi definido, o deslocamento $\psi_t(\cdot, \phi^{(0)}, \tau_0)$ é contínuo para todo $t \in [t_0, \infty) - \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$, podendo ser descontínuo em $t \in \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$. Ainda, como supomos que $F_k(0) = 0$ e $H_k(0) = 0$, temos que o estado inicial $\omega = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema (4.17), desde que $\psi_t(\cdot, 0, \tau_0) = 0$, para todo $t \geq \tau_0$.

É interessante observar que o espaço estado do sistema $S_{(4.17)}$ é $X = C_r$, e o estado x_t evolui de acordo com a primeira equação em (4.17), com estado inicial $x_{\tau_k} = \phi^{(k)}$ definido em $[\tau_k - r, \tau_k]$, e em τ_{k+1} , o estado $x_{\tau_{k+1}^-}$ é levado pela função H_k no estado inicial $\phi^{(k+1)}$ do intervalo $[\tau_{k+1}, \tau_{k+2})$. Assim, o estado $x_{\tau_{k+1}^-}$ está definido em $[\tau_{k+1}^- - r, \tau_{k+1}^-]$, enquanto $x_{\tau_{k+1}} = \phi^{(k+1)}$ está definido em $[\tau_{k+1} - r, \tau_{k+1}]$.

Com essas considerações, para (4.17) definimos o operador solução

$$\psi_t(\cdot, \phi^{(k)}, \tau_k) = T_k(t - \tau_k)(\phi^{(k)}),$$

sendo $T_k(t - \tau_k) : C \rightarrow C$, $t \geq \tau_k$. Usando propriedades das soluções de (4.20) (unicidade e dependência contínua), foi mostrado em (32) que $T_k(t)$ é um semigrupo não-linear em C . Mais ainda, sendo F_k Lipschitz contínua, $T_k(t)$ é na verdade um semigrupo quase-contrativo satisfazendo

$$\|T_k(t)(\omega) - T_k(t)(\eta)\| \leq e^{K_k t} \|\omega - \eta\|, \quad (4.22)$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$, $\omega, \eta \in C$, sendo K_k a constante de Lipschitz dada em (4.19). Sendo assim, podemos caracterizar o sistema $S_{(4.17)}$ como

$$\left. \begin{array}{l} y(t, \phi^{(o)}, t_0) = T_k(t - \tau_k)(\phi^{(k)}), \quad \tau_k \leq t < \tau_{k+1}; \\ y_t = H_k(y_{t-}), \quad t = \tau_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

Estes deslocamentos determinam um SDD que é um caso especial do sistema S_{DN} , que denotaremos por $S_{(4.23)}$. Estamos agora em condições de discutir a estabilidade do equilíbrio $y = 0$ de $S_{(4.23)}$, respectivamente, de $S_{(4.17)}$.

Proposição 4.2. (a) Para o sistema $S_{(4.23)}$, suponha que

- (i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função F_k satisfaz a condição (4.19), com constante de Lipschitz K_k , para todo $\omega, \eta \in C$, sendo C uma vizinhança da origem;
- (ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função H_k satisfaz a condição (4.18) com constante C_k , para todo $\omega \in C$;
- (iii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se $(\tau_{k+1} - \tau_k) = \lambda_k \leq \theta < \infty$, $C_k \leq \gamma < \infty$ e $K_k \leq K < \infty$;
- (iv) Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$C_k e^{K_k \lambda_k} \leq 1.$$

Então o equilíbrio $y = 0$ de $S_{(4.23)}$ é uniformemente estável.

(b) Se na parte (a), substituirmos (iv) por

(v) Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$C_k e^{K_k \lambda_k} \leq \delta < 1.$$

Então o equilíbrio $y = 0$ de $S_{(4.23)}$ é uniformemente assintoticamente estável e exponencialmente estável.

(c) Se na parte (a) substituirmos (iv) por (v) e supormos que as condições (4.18) e (4.19) valem para $C = C_r$, então o equilíbrio $y = 0$ de $S_{(4.23)}$ é globalmente uniformemente assintoticamente estável e globalmente exponencialmente estável.

Demonstração: Como por hipótese temos $F_k(0) = 0$, considerando-se (4.22), temos

$$\|T_k(t)(\omega)\| \leq e^{K_k t} \|\omega\|,$$

para todo $t \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $\omega \in C$ (respectivamente $\omega \in C_r$). Dessa forma, basta tomarmos $M_k = 1$, $c_k = C_k$, $w_k = L_k$ e aplicarmos o Corolário 3.2. Isto conclui a demonstração. \square

4.2.3 SDD Determinados por C_o -semigrupos

Nesta subsecção, procederemos de modo semelhante à anterior para estabelecer resultados no mesmo espírito daqueles. Para o sistema dado por (4.17), tomamos em particular $F_k(x_t) = L_k x_t$, em que $L_k : C_r \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida da mesma forma como em (4.10), ou seja

$$L_k(\phi) = \int_{-r}^0 [dB_k(s)] \phi(s).$$

Tomamos também $H_k(x_t) = G_k x_t$, sendo $G_k \in C[C_r, C_r]$ um operador linear. Dessa forma, reescrevemos (4.17) como

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= L_k x_t, & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \\ x_t &= G_k x_{t-}, & t = \tau_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Da mesma forma como fizemos na subsecção anterior, reescrevendo (4.20) como

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= L_k(x_t), & t > \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ x_t &= \phi^{(k)}, & t = \tau_k, \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

o Lema 4.4 garante que para cada $k \in \mathbb{N}$, a solução de (4.25) determina um C_o -semigrupo, portanto, (4.24) determina um SDD determinado por C_o -semigrupos que é um caso especial de

S_{DC_0} . Além disso, quando todas as soluções da equação característica

$$\det \left(\int_{-r}^0 e^{\lambda s} dB_k(s) - \lambda_k I \right) = 0,$$

satisfazem a relação $Re \lambda_k \leq -\alpha_{ok}$, então se $0 < \alpha_k < \alpha_{ok}$, existe uma constante $P_k(\alpha_k) > 0$ tal que

$$\|T_k(t)\| \leq P_k(\alpha_k) e^{-\alpha_k t}, \quad t \geq 0. \quad (4.26)$$

Mesmo que a hipótese acima não aconteça, podemos afirmar que existem constantes $\mu_k \geq 0$, $Q_k \geq 1$, tais que

$$\|T_k(t)\| \leq Q_k e^{\mu_k t}, \quad t \geq 0. \quad (4.27)$$

De qualquer forma, podemos estabelecer uma limitação para $T_k(t)$, adotando (4.26) ou (4.27) de acordo com a conveniência. Para isso, quando (4.26) se aplica, fazemos

$$M_k = P_k(\alpha_k), \quad \alpha_k = w_k, \quad (4.28)$$

e quando (4.27) se aplica, fazemos

$$M_k = 1, \quad \mu_k = w_k, \quad (4.29)$$

obtendo assim

$$\|T_k(t)\| \leq M_k e^{w_k t}, \quad t \geq 0. \quad (4.30)$$

Podemos então, como anteriormente, descrever $S_{(4.25)}$ como

$$\left. \begin{aligned} y(t, \phi^{(o)}, t_o) &= T_k(t - \tau_k) \phi^{(k)}, & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}; \\ y_t &= H_k y_{t-}, & t = \tau_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Estamos agora em condições de estabelecer o seguinte resultado

Proposição 4.3. (a) Para o sistema $S_{(4.31)}$, suponha que

(i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se $(\tau_{k+1} - \tau_k) = \lambda_k \leq \theta < \infty$, $M_k \leq M < \infty$ e $w_k \leq w < \infty$;

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\|G_k\| M_k e^{w_k \lambda_k} \leq 1. \quad (4.32)$$

sendo w_k e M_k dadas em (4.26)-(4.29). Então o equilíbrio $y = 0$ de $S_{(4.31)}$ é uniformemente estável.

(b) Se na parte (a), substituirmos (4.32) por

$$\|G_k\| M_k e^{w_k \lambda_k} \leq \delta < 1.$$

Então o equilíbrio $y = 0$ de $S_{(4.31)}$ é globalmente uniformemente assintoticamente estável e globalmente exponencialmente estável.

Demonstração: A prova é uma aplicação direta do Corolário 3.1. □

Encerramos este capítulo observando que estes resultados podem ser aplicados, em particular, a sistemas modelados por equações diferenciais parciais (como foi feito em (27)), desde que nesta área, assim como para *EDFR*, é comum o uso da teoria de semigrupos como ferramenta no estudo de vários sistemas, a exemplo de sistemas dissipativos, como feito em (34).

5 *Considerações Finais*

O modelo geral de sistemas dinâmicos híbridos proposto em (11, 12) permite um estudo qualitativo de estabilidade generalizado, abordando uma classe ampla de sistemas que muitas vezes envolvem um comportamento dinâmico complexo. Todavia, este estudo pode ser simplificado pelo processo de imersão de um sistema dinâmico híbrido definido em tempo generalizado em um sistema dinâmico descontínuo definido em \mathbb{R}^+ , possibilitando o uso de conceitos e resultados bem conhecidos da teoria de sistemas dinâmicos. Contudo, os resultados apresentados para *SDD*, mesmo tomando como base os resultados usuais da teoria básica de sistemas dinâmicos, são menos restritivos e mais abrangentes que estes, considerando informações sobre os possíveis pontos de descontinuidade do sistema. Além disso, o uso de aplicações que preservam estabilidade, podem simplificar o estudo de estabilidade, dentro da teoria de comparação, estendendo o conceito de funções de Lyapunov.

Quando o estudo de estabilidade é destinado a sistemas que as soluções determinam semigrupos, é possível fazer uso de resultados mais específicos, que não fazem uso de funções de Lyapunov ou aplicações que preservam estabilidade, e possuem maior facilidade nas aplicações. Estes resultados consideram limitações sobre os semigrupos e expõem condições suficientes para a estabilidade do sistema. São muitos os sistemas que podem ser modelados por semigrupos. Neste trabalho, considera-se o caso particular dos sistemas gerados por equações diferenciais com retardo e aplica-se os resultados gerais de estabilidade de semigrupos. Todavia, a aplicação dos resultados é tomada de forma genérica dentro desta classe de sistemas, podendo ainda ser analisada para suas subclasses mais específicas.

De forma geral, o trabalho reúne várias publicações relevantes sobre o estudo qualitativo de sistemas dinâmicos descontínuos e sistemas dinâmicos descontínuos modelados por semigrupos, além de concentrar parte da teoria básica de semigrupos. Considerando-se a complexidade do assunto, a abordagem é feita de forma generalizada, contudo, é interessante sugerir como trabalhos futuros o estudo de problemas mais específicos em que se possa aplicar os resultados de sistemas dinâmicos descontínuos, bem como analisar problemas modelados por semigrupos em que se possa discutir os tipos de limitações impostas aos semigrupos que modelam os sistemas.

Uma questão também interessante é estudar conceitos de otimização para sistemas como os considerados neste trabalho, em especial para os modelados por semigrupos, haja vista a simplificação que este conceito pode proporcionar.

Referências Bibliográficas

- 1 GROSSMAN, R. L. et al. *Hybrid systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 474 p. (Lecture notes in computer science, v. 736).
- 2 NERODE, A.; KOHN, W. Models for hybrid systems: automata, topologies, controllability, observability. In: _____. *Hybrid systems*. Berlin: Springer Verlag, 1993. p. 317–356. (Lecture notes in computer science, v. 736).
- 3 ANTSAKLIS, P. J.; STIVER, J. A.; LEMMON, M. D. Hybrid system modeling and autonomous control systems. In: _____. *Hybrid systems*. Berlin: Springer Verlag, 1993. p. 366–392. (Lecture notes in computer science, v. 736).
- 4 PAVLIDIS, T. Stability of systems described by differential equations containing impulses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Princeton, v. 12, n. 1, p. 43–45, 1967.
- 5 BARABANOV, A. T.; STAROZHILOV, Y. F. Investigation of the stability of solutions of continuous discrete systems by Lyapunov's second method. *Automatica*, v. 21, n. 6, p. 35–41, 1988.
- 6 BAINOV, D. D.; SIMEONOV, P. S. *Systems with impulse effect*. Chichester: Ellis Horwood, 1989. 255 p. (Ellis horwood series; Mathematics and its applications). Stability, theory and applications.
- 7 BRANICKY, M. S.; BROKAR, V. S.; MITTER, S. K. A unified framework for hybrid control. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Lake Buena Vista. *Proceedings...* Lake Buena Vista: IEEE Control Systems Society, 1994. p. 4228–4234.
- 8 BRANICKY, M. S. Stability of switched and hybrid systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Lake Buena Vista. *Proceedings...* Lake Buena Vista: IEEE Control Systems Society, 1994. p. 3498–3503.
- 9 BRANICKY, M. S. *Studies in hybrid systems: modeling, analysis, and control*. 1995. 198 f. Tese (Ph.D) — Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1995.
- 10 PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. Stability and robustness for hybrid systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 35., 1996. *Proceedings...* [S.l.]: IEEE Control Systems Society, 1996. p. 1202–1207.
- 11 YE, H.; MICHEL, A. N.; ANTSAKLIS, P. J. A general model for the qualitative analysis of hybrid dynamical systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 34., 1995, New Orleans. *Proceedings...* New Orleans: IEEE Control Systems Society, 1995. p. 1473–1477.
- 12 YE, H.; MICHEL, A. N.; HOU, L. Stability theory for hybrid dynamical systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 34., 1995, New Orleans. *Proceedings...* New Orleans: IEEE Control Systems Society, 1995. p. 2679–2684.

- 13 YE, H.; MICHEL, A. N.; WANG, K. Robust stability of nonlinear time-delay systems with applications to neural networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, v. 43, n. 7, p. 532–543, 1996.
- 14 YE, H.; MICHEL, A. N.; HOU, L. Stability analysis of discontinuous dynamical systems with applications. In: WORLD CONGRESS OF THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL, 13., 1996, San Francisco, CA. *Proceedings...* San Francisco, CA: [s.n.], 1996. p. 461–466.
- 15 HOU, L.; MICHEL, A. N.; YE, H. Some qualitative properties of sampled-data control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 12, p. 1721–1725, 1997.
- 16 HOU, L.; MICHEL, A. N. Stability analysis of a general class of hybrid dynamical systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 5., 1997, Albuquerque. *Proceedings...* Albuquerque, NM: [s.n.], 1997. p. 2805–2809.
- 17 MICHEL, A. N.; HOU, L. Modeling and qualitative theory for general hybrid dynamical and control systems. In: IFAC/IFIP/IMACS CONFERENCE ON CONTROL OF INDUSTRIAL SYSTEMS, 1., 1997, Belfort. *Proceedings...* Belfort: [s.n.], 1997. p. 173–183.
- 18 YE, H.; MICHEL, A. N.; HOU, L. Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 43, n. 4, p. 461–474, 1998. Hybrid control systems.
- 19 MICHEL, A. N.; HU, B. Stability analysis of hybrid dynamical systems: results involving stability preserving mappings and vector lyapunov functions. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM MATHEMATICAL THEORY OF NETWORKS AND SYSTEMS, 13., 1998, Padova, Italy. *Proceedings...* Padova, Italy: [s.n.], 1998.
- 20 MICHEL, A. N.; HU, B. A comparison theory for stability analysis of discontinuous dynamical systems - part i: results involving stability preserving mappings. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 37., 1998, New York. *Proceedings...* New York: IEEE Control Systems Society, 1998. p. 1635–1640.
- 21 THOMAS, J. Über die Invarianz der Stabilität bei einem Phasenraum-Homöomorphismus. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, v. 213, p. 147–150, 1963/1964.
- 22 HAHN, W. Über stabilitätserhaltende abbildungen und ljanunovsche funktionen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, v. 228, p. 189–192, 1967.
- 23 MICHEL, A. N.; WANG, K. *Qualitative theory of dynamical systems: The role of stability preserving mappings*. New York: Marcel Dekker Inc., 1995. 450 p. (Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, v. 186).
- 24 MICHEL, A. N.; HU, B. Towards a stability theory of general hybrid dynamical systems. *Automatica. A Journal of IFAC*, v. 35, n. 3, p. 371–384, 1999.
- 25 MICHEL, A. N. Recent trends in the stability analysis of hybrid dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems. I. Fundamental Theory and Applications*, v. 46, Jan 1999. Darlington memorial issue.
- 26 SUN, Y.; MICHEL, A. N.; ZHAI, G. Stability of discontinuous retarded functional differential equations with applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 8, p. 1090–1105, 2005.

- 27 MICHEL, A. N.; SUN, Y.; MOLCHANOV, A. P. Stability analysis of discontinuous dynamical systems determined by semigroups. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 9, p. 1277–1290, 2005.
- 28 MICHEL, A. N.; SUN, Y. Stability of discontinuous Cauchy problems in Banach space. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, v. 65, n. 9, p. 1805–1832, 2006.
- 29 HOU, L.; MICHEL, A. N. Unifying theory for stability of continuous, discontinuous, and discrete-time dynamical systems. *Nonlinear Analysis. Hybrid Systems*, v. 1, n. 2, p. 154–172, 2007.
- 30 MICHEL, A. N.; WANG, K.; HU, B. *Qualitative theory of dynamical systems: The role of stability preserving mappings*. New York: Marcel Dekker Inc., 2001. 707 p. (Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, v. 239).
- 31 ENGEL, K.-J.; NAGEL, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. New York: Springer-Verlag, 2000. 586 p. (Graduate texts in mathematics, v. 194). With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafuno, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.
- 32 HILLE, E.; PHILLIPS, R. S. *Functional analysis and semi-groups*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1957. 808 p. (American mathematical society colloquium publications, v. 31).
- 33 HALE, J. *Theory of functional differential equations*. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 1977. 365 p. (Applied mathematical sciences, v. 3).
- 34 CUNHA, C. A. R. *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP*. Florianópolis: SBMAC, 2007. 79 p. (Notas em matemática aplicada, v. 32).
- 35 CRANDALL, M. G. Semigroups of nonlinear transformations in Banach spaces. In: ZARANTONELLO, E. H. (Ed.). *Contributions to nonlinear functional analysis*. New York: Academic Press, 1971. p. 157–179.
- 36 PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1983. 279 p. (Applied mathematical sciences, v. 44).
- 37 GOMES, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1985. 276 p. (Textos de métodos matemáticos, v. 24).

APÊNDICE A – Semigrupos

Em grande parte do trabalho fazemos uso de conceitos e resultados da teoria de semigrupos sem maiores comentários. Sendo assim, relacionamos neste apêndice aspectos básicos desta teoria, com a intenção de fundamentar e complementar os conceitos dos Capítulos 3 e 4. Nossa discussão é feita de forma introdutória mas toma como base trabalhos relevantes da área.

A teoria de semigrupos está diretamente relacionada com sistemas dinâmicos e equações funcionais, sendo assim, iniciamos nossa discussão considerando duas indagações interessantes a respeito de uma equação funcional descrita pela aplicação $T(t)$, $t \geq 0$, dada por

$$T(t+s) = T(t)T(s). \quad (\text{A.1})$$

Podemos então indagar que hipóteses deve possuir a solução $t \rightarrow T(t)$ de (A.1) para que seja diferenciável e satisfaça uma equação diferencial, e ainda, dada a solução de uma equação diferencial, como ela pode ser relacionada com a família de aplicações que satisfazem (A.1). Estas indagações partem do problema abordado por A. Cauchy.

A.1 A Equação Funcional de Cauchy

Em 1821 A. Cauchy, em seu trabalho *Course d'Analyse*, levantou um problema que, utilizando uma notação mais familiar, pode ser reescrito da seguinte forma

Problema 1. *Encontrar todas as aplicações $T(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo a equação funcional*

$$\left. \begin{aligned} T(t+s) &= T(t)T(s), \quad \text{para todo } t, s \geq 0; \\ T(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

Naturalmente, a função exponencial

$$t \rightarrow e^{ta},$$

satisfaz (A.2) para todo $a \in \mathbb{C}$. Na verdade, Cauchy sugeriu que estas seriam todas as soluções de (A.2).

Abordamos então alguns resultados apresentados em (31) que relacionam estas questões.

Teorema A.1. *Seja $T(t) = e^{ta}$ para algum $a \in \mathbb{C}$ e todo $t \geq 0$. Então a função $T(\cdot)$ é diferenciável e satisfaz a equação diferencial (ou mais precisamente, o problema de valor inicial)*

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t) &= aT(t), \quad t \geq 0; \\ T(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Reciprocamente, a função $T(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $T(t) = e^{ta}$ para algum $a \in \mathbb{C}$ é a única função diferenciável satisfazendo (A.3). Resta ainda observar que $a = \frac{d}{dt}T(t)|_{t=0}$.

O teorema anterior mostra que a resposta para a primeira questão levantada acima pode ser obtida usando a função exponencial, ou seja, a função exponencial relaciona a solução de uma equação diferencial com a família de aplicações que satisfazem (A.2). Além disso, o próximo resultado mostra que a continuidade da solução de (A.2) é suficiente para seja diferenciável e satisfaça uma equação diferencial.

Teorema A.2. *Seja $T(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua satisfazendo (A.2). Então $T(\cdot)$ é diferenciável, e existe um único $a \in \mathbb{C}$ tal que (A.3) vale.*

A combinação destes resultados fornece uma resposta adequada para o Problema 1.

Teorema A.3. *Seja $T(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua satisfazendo (A.2). Então existe um único $a \in \mathbb{C}$ tal que*

$$T(t) = e^{at}, \quad t \geq 0.$$

Observamos que se no lugar de $X = \mathbb{C}$ tomarmos $X = \mathcal{L}(\mathbb{C})$, o espaço dos operadores lineares em \mathbb{C} , então a aplicação $T(\cdot)$ satisfazendo (A.2) descreve a evolução no tempo de um sistema dinâmico linear em \mathbb{C} , ou seja, tomando $x_0 \in \mathbb{C}$ o estado inicial para o tempo inicial $t = 0$, então

$$x(t) := T(t)x_0,$$

é o estado do sistema para $t \geq 0$. Daí

$$x(t+s) = T(t+s)x_0 = T(t)T(s)x_0 = T(t)x(s),$$

isto é, o estado $x(t+s)$ no tempo $t+s$ é o mesmo estado para o tempo t com estado inicial $x(s)$.

Do que foi discutido acima, a função exponencial está diretamente associada às equações diferenciais, pois ela satisfaz o problema de Cauchy: uma função $x(t) = e^{tA}x_0$, sendo x_0 um

elemento dado em X e $t \in \mathbb{R}^+$, é solução do problema de valor inicial

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

Neste caso $X = \mathbb{C}$, mas os resultados obtidos nesta subsecção também são verdadeiros quando tomamos o espaço $X = M_n(\mathbb{C})$ das matrizes complexas $n \times n$, e também para o caso em que X é um espaço de Banach de dimensão infinita, sendo que A é um operador linear limitado, e $T(\cdot)$ toma valores na álgebra dos operadores lineares limitados.

Em particular, quando $X = M_n(\mathbb{C})$, destacamos o seguinte resultado.

Teorema A.4. *Seja $T(t) := e^{tA}$ para alguma $A \in M_n(\mathbb{C})$. Então a função $T(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ é diferenciável e satisfaz a equação diferencial*

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t) &= AT(t), \quad t \geq 0; \\ T(0) &= I. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

Reciprocamente, toda função diferenciável $T(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ satisfazendo (A.5) é da forma $T(t) = e^{tA}$, para alguma $A \in M_n(\mathbb{C})$. Além disso, tem-se $A = \dot{T}(0)$.

Uma questão mais delicada surge quando A é um operador linear não-limitado e deseja-se encontrar a função $x(t)$ que resolve (A.4). Neste contexto, evidencia-se a idéia da teoria de semigrupos, que visa estudar este problema generalizando a idéia de função exponencial.

A.2 Teoria de Semigrupos

Apresentamos, nesta subsecção, alguns conceitos e resultados básicos da teoria de semigrupos. A abordagem desta teoria não é tomada de forma profunda, uma vez que o objetivo é fornecer os conceitos que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Os conceitos e resultados desta seção, juntamente com as respectivas demonstrações podem ser encontrados em (35, 36, 37, 30).

A.3 Semigrupos Lineares

Dizemos que uma família $\{T(t)\}$ de operadores lineares limitados $T(t) : X \rightarrow X$, sendo $t \geq 0$ e X um espaço de Banach, é um semigrupo linear se ela satisfaz a equação funcional (A.2), sendo $T(0) = I$, I a aplicação identidade em X . Mais formalmente, reescrevemos da seguinte forma.

Definição A.1. Uma família $\{T(t)\}$ de operadores lineares limitados $T(t) : X \rightarrow X$, $t \in \mathbb{R}^+$, é um semigrupo linear se

- (i) $T(0) = I$, (sendo I o operador identidade em X);
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}^+$.

A.3.1 Semigrupos Fortemente Contínuos

Definição A.2. Uma família $\{T(t)\}$ de operadores lineares limitados $T(t) : X \rightarrow X$, $t \in \mathbb{R}^+$ é um semigrupo fortemente contínuo se

- (i) $T(0) = I$, (sendo I o operador identidade em X);
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}^+$;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, para todo $x \in X$.

Observação A.1. Um semigrupo fortemente contínuo será chamado um C_0 -semigrupo.

Definição A.3. Um C_0 -semigrupo é uniformemente contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Uma forma equivalente para a definição anterior pode ser obtida trocando a igualdade anterior pela hipótese de que a aplicação $t \rightarrow T(t)$ é contínua na topologia uniforme dos operadores lineares limitados de X .

Dissemos anteriormente que os semigrupos generalizam a noção de função exponencial, e também mostramos, na seção anterior, como estão relacionadas as soluções das equações diferencial e funcional de Cauchy. Agora, definimos um operador que permite generalizar o conceito de solução $x(t) = e^{At}$, quando o operador linear A for, eventualmente, ilimitado.

Definição A.4. Consideremos um C_0 -semigrupo $T(t)$ e seja

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

O operador $A : D(A) \rightarrow X$, dado por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A),$$

é chamado o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $T(t)$.

Para o caso em que o C_0 -semigrupo é uniformemente contínuo, o teorema a seguir relaciona os resultados anteriores.

Teorema A.5. *Seja $\{T(t)\}$ um C_0 -semigrupo uniformemente contínuo. Então são válidas as seguintes propriedades*

(i) *Um operador linear A é gerador do C_0 -semigrupo $T(t)$ se, e somente se, A é limitado;*

(ii) *Se $\{S(t)\}$ é um C_0 -semigrupo uniformemente contínuo tal que*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t},$$

então $T(t) = S(t)$;

(iii) *Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$.*

O próximo resultado mostra a importante característica dos C_0 -semigrupos serem exponencialmente limitados, fato que será frequentemente explorado.

Teorema A.6. *Dado um C_0 -semigrupo, existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \quad (\text{A.6})$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

No que segue, enunciamos um teorema que relata algumas propriedades básicas de C_0 -semigrupos. Tal resultado é importante por referir-se à diferenciabilidade de semigrupos associados a seus geradores infinitesimais.

Teorema A.7. *Seja $A(t)$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$. Então verificam-se as seguintes propriedades,*

(i) *Se $x \in D(A)$ e $t \in \mathbb{R}^+$, então $T(t)x \in D(A)$ e a função $T(t)x : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é diferenciável com*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax; \quad (\text{A.7})$$

(ii) *Se $x \in D(A)$, então*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(r)x dr = \int_s^t T(r)Ax dr; \quad (\text{A.8})$$

(iii) *Se $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}^+$, então $\lim_{s \rightarrow t} T(s)x = T(t)x$. Além disso, se o C_0 -semigrupo $T(t)$ for uniformemente contínuo, então $\lim_{s \rightarrow t} T(s) = T(t)$;*

(iv) Se $x \in X$ e $t \geq 0$, então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(r)x dr = T(t)x; \quad (\text{A.9})$$

(v) Se $x \in X$ e $t \geq 0$, então

$$\int_0^t T(r)x dr \in D(A) \quad \text{e} \quad A \int_0^t T(r)x dr = T(t)x - x. \quad (\text{A.10})$$

Corolário A.1. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$, então $D(A)$, o domínio de A , é denso em X e A é um operador linear fechado.

Os próximos resultados tratam da caracterização de geradores no contexto da teoria espectral.

Definição A.5. Seja $A : D(A) \rightarrow X$, $D(A) \subset X$, um operador linear fechado em X . Definimos o Conjunto Resolvente de A e denotamos por $\rho(A)$, o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $(A - \lambda I)$ possui inversa limitada, $(A - \lambda I)^{-1} : X \rightarrow X$. O operador linear $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ será chamado o Resolvente de A .

Definição A.6. Seja A como na definição anterior; definimos o Conjunto Espectral de A , ou simplesmente Espectro de A , como sendo o conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Estamos agora em condições de enunciar um teorema clássico da teoria de semigrupos, que evidencia sua importância por fornecer condições necessárias e suficientes para que um dado operador linear seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo .

Teorema A.8. Hille-Yosida-Phillips Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ se, e somente se,

(i) A é fechado e $D(A)$ é denso em X , e

(ii) o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém (w, ∞) , e

$$\|(A - \lambda I)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \quad \text{para } \lambda > w, n = 1, 2, \dots, \quad (\text{A.11})$$

sendo que I denota o operador identidade em X .

O próximo resultado estabelece uma característica de um C_0 -semigrupo $T(t)$ em termos de seu espectro $\sigma(A)$ e seu gerador infinitesimal. Antes, porém, necessitaremos definir um tipo especial de C_0 -semigrupo .

Definição A.7. Um C_0 -semigrupo $T(t)$ é diferenciável para $t > r$, se para cada $x \in X$, $T(t)$ é continuamente diferenciável em $r < t < \infty$.

Teorema A.9. *Se um C_0 -semigrupo $T(t)$, com gerador infinitesimal A , é diferenciável para $t > r$, e se $\operatorname{Re}\lambda \leq -\alpha_0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, então dado qualquer constante positiva $\alpha < \alpha_0$, existe uma constante $K(\alpha) > 0$ tal que*

$$\|T(t)\| \leq K(\alpha)e^{-\alpha t}, \quad (\text{A.12})$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Até agora apresentamos alguns tipos de C_0 -semigrupos e algumas de suas propriedades qualitativas, além de fornecer algumas condições que caracterizam tais semigrupos em espaços de Banach. Definiremos agora um tipo de C_0 -semigrupo que possui uma maior aplicabilidade em espaços de Hilbert.

Definição A.8. *Um C_0 -semigrupo $T(t)$ que satisfaz $\|T(t)\| \leq 1$, é chamado um C_0 -semigrupo de contração.*

Exemplo A.1. *Seja $C(\mathbb{R})$ o espaço de Banach das funções uniformemente contínuas e limitadas em \mathbb{R} , com norma $\|u\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|$. Definimos então $T(t) : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$, dada por*

$$T(t)u(x) = u(x+t) = u_t(x),$$

sendo que $t \geq 0$ e $u(x) \in C(\mathbb{R})$. Note que da forma como foi definida, $T(\cdot)$ é uma aplicação linear, além disso

$$\|T(t)u\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x+t)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| = \|u\|,$$

logo

$$\|T\| = \sup_{u \in C(\mathbb{R})} \frac{\|T(t)u\|}{\|u\|} = 1.$$

Portanto, temos $T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(C(\mathbb{R}))$, sendo $\mathcal{L}(C(\mathbb{R}))$ o espaço dos operadores lineares limitados em $C(\mathbb{R})$.

Agora, temos

$$(i) \quad T(0)u(x) = u(x+0) = u(x);$$

$$(ii) \quad T(t+s)u(x) = u(x+(t+s)) = u((x+s)+t) = T(t)u(x+s) = T(t)(T(s)u(x));$$

(iii) *Uma vez que $u \in C(\mathbb{R})$ é uniformemente contínua, para cada u temos*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)u - u\| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x+t) - u(x)| = 0,$$

sendo que o limite acima é uniforme.

Portanto $T(t)$ é um C_0 -semigrupo.

Agora, seja $A : D(A) \rightarrow X$ o gerador deste semigrupo. Se $u \in D(A)$, então existe

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u(x) - u(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x+t) - u(x)}{t},$$

sendo o limite uniforme em x e pertencente a $C(\mathbb{R})$. Dessa forma u é derivável à direita com $\frac{d^+}{dx}u(x) \in C(\mathbb{R})$, mas ainda, pelo Lema de Dini, u é derivável e $\frac{d}{dx}u(x) \in C(\mathbb{R})$. Por outro lado, se $u \in C(\mathbb{R})$ e $u' \in C(\mathbb{R})$, tem-se

$$\frac{u(x+t) - u(x)}{t} - u'(x) = \frac{1}{t} \int_0^t [u'(x+s) - u'(x)] ds,$$

logo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)u(x) - u(x)}{t} = u'(x),$$

uniformemente em x . Portanto $u \in D(A)$, sendo $D(A) = \{u \in C(\mathbb{R}) : u' \text{ existe e } u' \in C(\mathbb{R})\}$ e $Au = u'$.

A.4 Semigrupos Não-Lineares

Nesta subseção, apresentamos de forma sucinta o conceito de semigrupos não-lineares. As definições são semelhantes às anteriores, mas neste caso os operadores $T(t)$ formam uma família de operadores não-lineares definidos em um subconjunto C de um espaço de Banach X .

Definição A.9. Uma família $\{T(t)\}$ de operadores não-lineares $T(t) : C \rightarrow C$, $t \in \mathbb{R}^+$, é um semigrupo não-linear definido em C se

- (i) $T(0)(x) = (x)$;
- (ii) $T(t+s)(x) = T(t)T(s)(x)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$;
- (iii) $T(t)(x)$ é contínua em (t, x) em $\mathbb{R}^+ \times C$.

Antes de definirmos o gerador de semigrupos não-lineares, como estes são operadores não-lineares, achamos ser interessante definir o conceito de "multi-operador".

Definição A.10. Um operador A é dito ser um multi-operador definido em X se para cada $x \in X$, $A(x)$ é um subconjunto de X . Assim, o gráfico de A é dado por

$$Gr(A) = \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in A(x)\} \subset X \times X,$$

a imagem de A é

$$Im(A) = \cup \{A(x) : x \in D(A)\},$$

e a inversa de A no ponto y é dada por

$$A^{-1}(y) = \{x \in X : y \in A(x)\}.$$

Definição A.11. Dizemos que um operador A (possivelmente multi-operador) gera um semigrupo não-linear $T(t)$ em C se

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n}A \right)^{-n}(x), \quad x \in C.$$

Além disso, o operador $A_s : D(A_s) \rightarrow X$, dado por

$$A_s(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A_s),$$

é chamado o gerador infinitesimal A_s do semigrupo $T(t)$, sendo $D(A_s)$ o conjunto dos $x \in C$ para os quais o limite acima existe.

Apresentamos ainda um conceito muito utilizado nas aplicações de semigrupos não-lineares.

Definição A.12. Um semigrupo não-linear $T(t)$ é dito ser quase-contrativo, se existe um $w \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T(t)(x) - T(t)(y)\| \leq e^{wt} \|x - y\|,$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e todo $x, y \in C$. Quando $w \leq 0$, dizemos que $T(t)$ é um semigrupo de contração.

Definição A.13. Um multi-operador A em X é dito ser w -acretivo se

$$\|(x_1 - \lambda y_1) - (x_2 - \lambda y_2)\| \geq (1 - \lambda w) \|x_1 - x_2\|, \quad (\text{A.13})$$

para todo $\lambda \geq 0$ e todos $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in A(x_1)$, $y_2 \in A(x_2)$.

Observação A.2. Se A não é um multi-operador, mas satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|A(x) - A(y)\| \leq L \|x - y\|,$$

para todo $x, y \in D(A)$. Então A é w -acretivo com $w = L$.

De fato,

$$\begin{aligned} \|(x - \lambda A(x)) - (y - \lambda A(y))\| &= \|(x - y) - \lambda(A(x) - A(y))\| \\ &\geq \|x - y\| - \lambda \|A(x) - A(y)\| \\ &\geq \|x - y\| - \lambda L \|x - y\| \\ &= (1 - \lambda L) \|x - y\|. \end{aligned}$$

Finalizamos esta seção apresentando um resultado que fornece condições suficientes para que um operador A seja gerador de um semigrupo.

Teorema A.10. *Suponha que A é w -acretivo e que para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $\text{Im}(I - \lambda A) \supset C = \overline{D(A)}$, sendo $\overline{D(A)}$ o fecho de $D(A)$. Então A gera um semigrupo quase-contrativo $T(t)$, com*

$$\|T(t)x - T(t)y\| \leq e^{wt} \|x - y\|,$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e todo $x, y \in C$.

APÊNDICE B – Os Principais Teoremas de Lyapunov

No Capítulo 2, são estudados os principais teoremas de estabilidade de Lyapunov. As demonstrações destes teoremas são feitas por meio de sistemas de comparação adequados, ou seja, através da teoria de comparação. Neste apêndice, enunciamos novamente os teoremas principais, desta vez demonstrando-os de forma direta à partir das definições de estabilidade. O processo é interessante pois ajuda a elucidar os conceitos e definições apresentados no início do Capítulo 2.

Teorema B.1. *Seja $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ um SDD e seja $M \subset A$ um conjunto fechado. Suponha que exista uma função $V : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e funções $\psi_1, \psi_2 \in K$, definidas em \mathbb{R}^+ , tais que*

$$\psi_1(d(x, M)) \leq V(x, t) \leq \psi_2(d(x, M)), \quad (\text{B.1})$$

para todo $x \in X$, e todo $t \in \mathbb{R}^+$.

(a) *Suponha que para todo $p(\cdot, a, \tau_o^p) \in S$, $V(p(t, a, \tau_o^p), t)$ é contínua em toda parte em $\mathbb{R}_{\tau_o^p}^+ = \{t \in \mathbb{R}^+ : t \geq \tau_o^p\}$, exceto no conjunto de descontinuidades $E_{V(p)} \subset E_p$. Suponha ainda que existe uma vizinhança U de M tal que $V(p(\tau_k, a, \tau_o^p), \tau_k)$ é não-crescente para todo $a \in U$ e todo $k \in \mathbb{N}$, e que existe uma função $h \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$, independente de $p \in S$, tal que*

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= 0, \\ V(p(t, a, \tau_o^p), t) &\leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)), \quad t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.2})$$

Então (S, M) é invariante e uniformemente estável;

(b) *Se além das hipóteses dadas em (a), existe uma função $\psi_3 \in K$, definida em \mathbb{R}^+ , tal que*

$$DV(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) \leq -\psi_3(d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M)), \quad (\text{B.3})$$

para todo $a \in U$, $k \in \mathbb{N}$, sendo

$$DV(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) := \frac{1}{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p} [V(p(\tau_{k+1}^p, a, \tau_o^p), \tau_{k+1}^p) - V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)].$$

Então (S, M) é uniformemente assintoticamente estável.

Demonstração: (a) Primeiramente, por hipótese temos que $V : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, logo $V(x, t) \geq 0$, $\forall (x, t) \in X \times \mathbb{R}^+$, e como $\psi_1, \psi_2 \in K$, temos $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$. Mostremos então que (S, M) é invariante. Seja $a \in M$, então $0 \leq V(p(\tau_o^p, a, \tau_o^p), \tau_o^p) = V(a, \tau_o^p) \leq \psi_2(d(a, M)) = \psi_2(0) = 0$, logo $V(a, \tau_o^p) = 0$. Além disso, como $V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)$ é não-crescente em uma vizinhança de M , para todo $k \geq 0$ temos $0 \leq V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) \leq V(p(\tau_o^p, a, \tau_o^p), \tau_o^p) \leq 0$, ou seja $V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) = 0$. Agora, por (B.2) vale $0 \leq V(p(t, a, \tau_o^p), t) \leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)) = h(0) = 0$, portanto $V(p(t, a, \tau_o^p), t) = 0, \forall t \geq \tau_o^p$. Finalmente, como ψ_1 é estritamente crescente e

$$0 \leq \psi_1(d(p(t, a, \tau_o^p), M)) \leq V(p(t, a, \tau_o^p), t) = 0,$$

temos $d(p(t, a, \tau_o^p), M) = 0$, logo $p(t, a, \tau_o^p) \in M$, uma vez que M é fechado.

Resta mostrar que (S, M) é uniformemente estável. Para todo $\varepsilon > 0$, seja $\theta = \psi_1(\varepsilon) > 0$. Como h é contínua e $h(0) = 0$, existe $\eta > 0$ tal que se $y \in [0, \eta)$, tem-se $h(y) - h(0) = h(y) < \theta$. Agora, seja $\delta = \psi_2^{-1}(\eta)$, como ψ_2 é estritamente crescente, se $d(a, M) < \delta$ temos

$$V(p(\tau_o^p, a, \tau_o^p), \tau_o^p) = V(a, \tau_o^p) \leq \psi_2(d(a, M)) < \psi_2(\delta) = \psi_2(\psi_2^{-1}(\eta)) = \eta.$$

Dessa forma, como V é não-crescente, para $k > 0$, $V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) < \eta$, assim, para todo $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$, temos $V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) \in [0, \eta)$, logo

$$V(p(t, a, \tau_o^p), t) \leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)) < \psi_1(\varepsilon),$$

portanto

$$d(p(t, a, \tau_o^p), M) \leq \psi_1^{-1}(V(p(t, a, \tau_o^p), t)) \leq \psi_1^{-1}(\psi_1(\varepsilon)) = \varepsilon.$$

Concluimos então que (S, M) é uniformemente estável.

(b) Por (a) temos que (S, M) é uniformemente estável e, para que seja uniformemente assintoticamente estável, basta mostrarmos que (S, M) é uniformemente atrativo. Para simplificar, usaremos a notação $z_k^p = V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)$. Assim, por (B.3), temos $\frac{z_{k+1}^p - z_k^p}{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p} \leq -\psi_3(d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M))$,

mas como $\psi_2, \psi_3 \in K$, usando (B.1), temos

$$\begin{aligned} z_{k+1}^p - z_k^p &\leq -\psi_3(d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M))(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p) \\ &\leq -\psi_3(\psi_2^{-1}(V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M)))(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p) \\ &\leq -\psi_3 \circ \psi_2^{-1}(z_k^p)(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p), \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Fazendo $\psi = \psi_3 \circ \psi_2^{-1}$, temos que $\psi \in K$, logo a desigualdade acima torna-se $z_{k+1}^p - z_k^p \leq -\psi(z_k^p)(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)$. Agora, por hipótese $\{z_k^p\}$ é não-crescente para todo $k \in \mathbb{N}$, além disso, $\psi_3 \in K$, logo $z_{n+1}^p - z_n^p \leq -\psi(z_n^p)(\tau_{n+1}^p - \tau_n^p) \leq -\psi(z_k^p)(\tau_{n+1}^p - \tau_n^p)$, para todo $n \leq k$. Uma vez que

$$\begin{aligned} z_{k+1}^p - z_o^p &= z_{k+1}^p - z_k^p + z_k^p - z_{k-1}^p + z_{k-1}^p - \dots + z_1^p - z_o^p \\ &\leq [-\psi(z_k^p)(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] + [-\psi(z_k^p)(\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)] + \dots + [-\psi(z_k^p)(\tau_1^p - \tau_o^p)] \\ &\leq -\psi(z_k^p)[\tau_{k+1}^p - \tau_k^p + \tau_k^p - \tau_{k-1}^p + \dots + \tau_1^p - \tau_o^p] \\ &= -\psi(z_k^p)(\tau_{k+1}^p - \tau_o^p), \end{aligned}$$

para todo $k \geq 0$, temos

$$\psi(z_k^p) \leq \frac{z_o^p - z_{k+1}^p}{\tau_{k+1}^p - \tau_o^p} \leq \frac{z_o^p}{\tau_{k+1}^p - \tau_o^p}. \quad (\text{B.4})$$

Estabelecidas as relações acima, para todo $\varepsilon > 0$, pela continuidade de h , existe um $\delta > 0$ tal que $h(y) < \varepsilon$, sempre que $y < \delta$. Para ε e δ considerados acima, é sempre possível encontrar $\tau > 0$ tal que

$$\max\left\{\psi_1^{-1}\left(\psi^{-1}\left(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau}\right)\right), \psi_1^{-1}\left(h\left(\psi^{-1}\left(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau}\right)\right)\right)\right\} < \varepsilon. \quad (\text{B.5})$$

Agora, para todo $t \geq \tau_o^p + \tau$, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [\tau_{k+1}^p, \tau_k^p)$, dessa forma temos $\tau_{k+1}^p - \tau_o^p > \tau$. Assim, para todo $a \in A$ tal que $d(a, M) < \delta$, segue que $\psi_2(d(a, M)) < \psi_2(\delta)$, e por (B.4), $\psi(z_k^p) \leq \frac{z_o^p}{\tau_{k+1}^p - \tau_o^p} = \frac{V(a, \tau_o^p)}{\tau_{k+1}^p - \tau_o^p} \leq \frac{\psi_2(d(a, M))}{\tau} \leq \frac{\psi_2(\delta)}{\tau}$. Logo valem

$$z_k^p = V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) \leq \psi^{-1}\left(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau}\right) \quad e \quad V(p(t, a, \tau_o^p), t) \leq h\left(\psi^{-1}\left(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau}\right)\right),$$

conseqüentemente por (B.1), temos

$$d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) \leq \psi_1^{-1}\left(\psi^{-1}\left(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau}\right)\right), \quad (\text{B.6})$$

e

$$d(p(t, a, \tau_o^p), t) \leq \psi_1^{-1}\left(h\left(\psi^{-1}\left(\frac{\psi_2(\delta)}{\tau}\right)\right)\right). \quad (\text{B.7})$$

Finalmente, lembramos que existe um $\delta > 0$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\tau > 0$, dados acima, tal que se $t = \tau_k^p$, então por (B.6) e (B.5), tem-se $d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) < \varepsilon$, e se $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$, então

por (B.7) e (B.5), tem-se $d(p(t, a, \tau_o^p), t) < \varepsilon$, sempre que $d(a, M) < \delta$, para todo $a \in A$ e todo $\tau_o^p \in \mathbb{R}^+$. Concluimos assim que (S, M) é uniformemente estável e uniformemente atrativo, ou seja, uniformemente assintoticamente estável. \square

Teorema B.2. *Seja $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ um SDD e seja $M \subset A$ um conjunto fechado e limitado. Suponha que exista uma função $V : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e três constantes c_1, c_2 e b tais que*

$$c_1(d(x, M))^b \leq V(x, t) \leq c_2(d(x, M))^b, \quad (\text{B.8})$$

para todo $x \in U \subset X$, e todo $t \in \mathbb{R}^+$, sendo U uma vizinhança de M .

(i) *Suponha que para todo $p(\cdot, a, \tau_o^p) \in S$, $V(p(t, a, \tau_o^p), t)$ é contínua em toda parte em $\mathbb{R}_{\tau_o^p}^+ = \{t \in \mathbb{R}^+ : t \geq \tau_o^p\}$, exceto no conjunto de descontinuidades $E_{V(p)} \subset E_p$. Suponha ainda que existe uma função $h \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$ independente de S tal que*

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= 0, \\ V(p(t, a, \tau_o^p), t) &\leq h(V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)), \quad t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.9})$$

e tal que para alguma constante positiva q , h satisfaz

$$h(r) = o(r^q) \quad \text{com } r \rightarrow 0,$$

$$\text{ou seja, } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h(r)}{r^q} = 0;$$

(ii) *Suponha que exista uma constante $c_3 > 0$ tal que*

$$DV(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) \leq -c_3[d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M)]^b, \quad (\text{B.10})$$

$k \in \mathbb{N}$, para todo $p(\cdot, a, \tau_o^p) \in S$ e todo $a \in U$, sendo $DV(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)$ definida como anteriormente.

Então (S, M) é exponencialmente estável.

Demonstração: Note que por (B.10), para todo $a \in U$ e todo $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{aligned} V(p(\tau_{k+1}^p, a, \tau_o^p), \tau_{k+1}^p) &\leq V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) - c_3[d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M)]^b(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p) \\ &\leq V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p), \end{aligned}$$

portanto $V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)$ é não-crescente em U . Segue então do Teorema B.1 item (a) que (S, M) é invariante. Mostremos agora que (S, M) é exponencialmente estável.

Como anteriormente, fazemos $z_k^p = V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p)$ e $z^p(t) = V(p(t, a, \tau_o^p), t)$. Assim, por (B.10), temos

$$\frac{z_{k+1}^p - z_k^p}{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p} \leq -c_3 [d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M)]^b,$$

mas por (B.8)

$$V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p) \leq c_2 [d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M)]^b \Rightarrow -[d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M)]^b \leq -\frac{1}{c_2} V(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), \tau_k^p),$$

logo

$$\frac{z_{k+1}^p - z_k^p}{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p} \leq -c_3 [d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M)]^b \leq -\frac{c_3}{c_2} z_k^p,$$

que implica que

$$z_{k+1}^p \leq [1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] z_k^p,$$

sendo $\mu = \frac{c_3}{c_2}$.

Se $[1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] \leq 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $z_n = 0$ para todo $n > k$, uma vez que $z_{k+1}^p \leq [1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] z_k^p$, logo $z^p(t) \leq h(z_n) = 0$ para todo $t \in (\tau_k^p, \tau_{k+1}^p)$ e todo $n > k$. Então, por (B.8), segue que $d(p(t, a, \tau_o^p), M) = 0$. Suponhamos então que $[1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Encontraremos agora limitantes para $d(p(\cdot, a, \tau_o^p), M)$. Desde que $e^{-\mu x} \geq 1 - \mu x$, segue que

$$z_{k+1}^p \leq e^{-\mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)} z_k^p,$$

como z_k^p é não-crescente para todo $k \in \mathbb{N}$, vale

$$z_k^p \leq e^{-\mu(\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)} z_{k+1}^p. \tag{B.11}$$

Da relação acima temos

$$z_k^p \leq e^{-\mu(\tau_k^p - \tau_{k-1}^p)} e^{-\mu(\tau_{k-1}^p - \tau_{k-2}^p)} \dots e^{-\mu(\tau_1^p - \tau_o^p)} z_o^p,$$

que resulta em

$$z_k^p \leq e^{-\mu(t - \tau_o^p)} z_o^p. \tag{B.12}$$

Sabemos também, pela desigualdade do lado direito de (B.8), que

$$z_o^p = V(p(\tau_o^p, a, \tau_o^p), \tau_o^p) \leq c_2 d(p(\tau_o^p, a, \tau_o^p), M)^b = c_2 d(a, M)^b.$$

Assim, pela desigualdade do lado esquerdo de (B.8), temos

$$\begin{aligned} d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M) &\leq \left(\frac{z_k^p}{c_1}\right)^{\frac{1}{b}} \\ &\leq \left(\frac{e^{-\mu(\tau_k^p - \tau_o^p)} z_o^p}{c_1}\right)^{\frac{1}{b}} \\ &\leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{b}} d(a, M) e^{-\frac{\mu}{b}(\tau_k^p - \tau_o^p)}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Agora, lembramos que $h(r) = o(r^q)$ quando $r \rightarrow 0$, ou seja $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h(r)}{r^q} = 0$, assim $\frac{h(r)}{r^q} \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$.

Fazemos

$$\Delta_{d(a, M)} = \sup_{r \in (0, c_2 d(a, M)^b]} \frac{h(r)}{r^q}.$$

Dessa forma,

$$h(r) \leq \Delta_{d(a, M)} r^q,$$

para todo $r \in [0, c_2 d(a, M)^b]$. Por esta desigualdade e por (B.9), temos

$$\begin{aligned} z^p(t) &\leq h(z_k^p) \\ &\leq \Delta_{d(a, M)} (z_k^p)^q \\ &\leq \Delta_{d(a, M)} e^{-\mu q(\tau_k^p - \tau_o^p)} (z_o^p)^q \\ &\leq \Delta_{d(a, M)} e^{\mu q(t - \tau_k^p)} e^{-\mu q(t - \tau_o^p)} (z_o^p)^q. \end{aligned}$$

Mas, como supomos $[1 - \mu(\tau_{k+1}^p - \tau_k^p)] > 0$, temos $t - \tau_k^p \leq \tau_{k+1}^p - \tau_k^p < \frac{1}{\mu}$. Logo

$$z^p(t) \leq \Delta_{d(a, M)} e^q e^{-\mu q(t - \tau_o^p)} (z_o^p)^q.$$

Novamente, por (B.8) e pela última desigualdade, temos

$$\begin{aligned} d(p(t, a, \tau_o^p), M) &\leq \left(\frac{z^p(t)}{c_1}\right)^{\frac{1}{b}} \\ &\leq \left(\frac{\Delta_{d(a, M)} e^q (z_o^p)^q}{c_1}\right)^{\frac{1}{b}} e^{-\frac{\mu q}{b}(t - \tau_o^p)} \\ &\leq \left(\frac{\Delta_{d(a, M)} e^q c_2^q}{c_1}\right)^{\frac{1}{b}} d(a, M)^{\frac{q}{b}} e^{-\frac{\mu q}{b}(t - \tau_o^p)}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Finalmente, considerando (B.13) e (B.14), para todo $\varepsilon > 0$ e todo a tal que $d(a, M) < \delta$, sejam

$$\begin{aligned}\alpha &= \min\left\{\frac{\mu}{b}, \frac{\mu q}{b}\right\}, \\ \gamma &= \max\left\{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{b}}, \left(\frac{\Delta_{d(a, M)} e^q c_2^q}{c_1}\right)^{\frac{1}{b}}\right\}, \\ \omega &= \min\left\{1, \frac{q}{b}\right\}, \\ \delta &= \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\omega}}.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}d(p(\tau_k^p, a, \tau_o^p), M) &\leq \gamma d(a, M) e^{-\alpha(t-\tau_o^p)} \\ &\leq \gamma d(a, M)^\omega e^{-\alpha(t-\tau_o^p)} \\ &< \gamma \delta^\omega e^{-\alpha(t-\tau_o^p)} \\ &< \frac{\varepsilon}{\gamma} e^{-\alpha(t-\tau_o^p)} \\ &= \varepsilon e^{-\alpha(t-\tau_o^p)},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}d(p(t, a, \tau_o^p), M) &\leq \gamma d(a, M)^{\frac{q}{b}} e^{-\alpha(t-\tau_o^p)} \\ &< \gamma \delta^\omega e^{-\alpha(t-\tau_o^p)} \\ &< \frac{\varepsilon}{\gamma} e^{-\alpha(t-\tau_o^p)} \\ &= \varepsilon e^{-\alpha(t-\tau_o^p)},\end{aligned}$$

ou seja,

$$d(p(t, a, \tau_o^p), M) < \varepsilon e^{-\alpha(t-\tau_o^p)},$$

para todo $p(\cdot, a, \tau_o^p) \in S$ e todo $t \geq t_o$. Portanto (S, M) é exponencialmente estável. \square