

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA

MATHEUS VIEIRA CARMONA COGO

Foguete experimental com carga-paga de tipo CanSat : metodologia e projeto

São João da Boa Vista

2022

MATHEUS VIEIRA CARMONA COGO

Foguete experimental com carga-paga de tipo CanSat : metodologia e projeto

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica do Campus de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Aeronáutica .

Orientador: Profº Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos

São João da Boa Vista

2022

C676f Cogo, Matheus Vieira Carmona
Foguete experimental com carga-paga de tipo CanSat :
metodologia e projeto / Matheus Vieira Carmona Cogo. --
São João da Boa Vista, 2022
132 f. : il., tabs., fotos

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado -
Engenharia Aeronáutica) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista
Orientador: Denilson Paulo Souza dos Santos

1. Engenharia aeroespacial. 2. Foguetes de sondagem. 3.
Projetos de engenharia. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da
Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

FOGUETE EXPERIMENTAL COM CARGA-PAGA DE TIPO CANSAT

Aluno: Matheus Vieira Carmona Cogo

Orientador: Prof. Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos

Banca Examinadora:

- Denilson Paulo Souza dos Santos (Orientador)
- Leandra Isabel de Abreu (Examinadora)
- Luiz Augusto Camargo Aranha Schiavo (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Expediente nº 005/2022)
--

São João da Boa Vista, 08 de julho de 2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Criador pela oportunidade de estudar e compreender os complexos fenômenos que continuamente deslumbram e cativam os aficionados observadores do Universo.

Agradeço aos meus pais, Jair e Betanea, pela confiança depositada em mim, pelo apreço ao ensino, pelas oportunidades e por me transmitirem valores de humanidade, perseverança e humildade.

Agradeço à minha irmã Gabriela e aos meus amigos João, Pedro, Giancarlo, Igor, Giovanne, Pacheco e Neves pelo carinho e pelos momentos de diversão, que certamente foram meus refúgios nas adversidades que enfrentei durante a graduação.

Agradeço a todos os meus professores do ensino fundamental e médio pela atenção e por me instigarem a estudar seus ensinamentos edificantes.

Agradeço ao corpo docente da Unesp por me proporcionar a incrível oportunidade de estudar o setor aeroespacial, e aos professores Denilson Santos e Murilo Sartorato pelas incontáveis conversas esclarecedoras que tivemos ao longo destes anos.

Finalmente, agradeço aos Beatles pelo repertório musical que sempre me acompanhou (e que ainda me acompanha) nos estudos.

“The Guide says there is an art to flying, or rather a knack. The knack lies in learning how to throw yourself at the ground and miss.”

— Ford Prefect, *The Hitchhiker’s Guide to the Galaxy*

RESUMO

Neste trabalho de conclusão de curso são expostas as etapas de projeto de um foguete com carga-paga de tipo "CanSat". O foguete é baseado nos requisitos da competição de CanSats da Agência Espacial Europeia. O trabalho inclui o projeto do motor a propelente sólido, a escolha da geometria do foguete, a estimativa de parâmetros aerodinâmicos e parâmetros de trajetória. Além disso, a teoria e metodologia aplicada também são apresentadas. Os resultados obtidos têm excelente correlação com as ferramentas consolidadas e o método se mostra adequado à missão proposta.

PALAVRAS-CHAVE: projeto de foguete. can sat. foguete amador. foguetemodelismo. motor a propelente sólido.

ABSTRACT

This undergraduate thesis presents all the relevant design steps of an experimental rocket (sometimes referred as a “High-Powered Rocket”) carrying a “CanSat” payload. The rocket is based on guidelines from the European Space Agency CanSat Competition. The thesis also presents the design of the solid-propellant engine, selection of rocket geometry, estimation of aerodynamic parameters and trajectory parameters. Furthermore, the theory and methodology used are also be presented. The results have excellent correlation with the consolidated tools and the method is shown to be adequate for the mission proposed.

KEYWORDS: rocket design. can sat. amateur rocket. rocket model. high-powered rocketry. solid-propellant engine.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1	Redução dos custos de lançamento até 2040	16
Figura 3.1	Classificação dos sistemas propulsivos	20
Figura 3.2	Motor a propelente sólido típico	21
Figura 3.3	Propelente na configuração a) <i>internal-burner</i> e b) <i>end-burner</i>	22
Figura 3.4	Bocal de Laval	24
Figura 3.5	Razão de áreas em termos do número de Mach, $k = 1.4$ (ar)	26
Figura 3.6	Tipos de bocal	27
Figura 3.7	Condições de bocais de um foguete de três estágios	28
Figura 3.8	Seção transversal do grão e curva de empuxo-tempo resultante	29
Figura 3.9	Regressão típica de um grão “estrela”	30
Figura 3.10	Curvas de empuxo-tempo ou pressão-tempo	31
Figura 3.11	Curva genérica de empuxo por tempo	32
Figura 3.12	Taxa de queima vs pressão da câmara (KNSB)	34
Figura 3.13	Efeito da queima erosiva na curva de empuxo-tempo	35
Figura 3.14	Condições de estabilidade	37
Figura 3.15	Foguete com estabilidade positiva	38
Figura 3.16	Foguete com estabilidade negativa	39
Figura 3.17	Exemplo para obtenção da localização do CG	40
Figura 3.18	Distâncias relativas do método de Barrowman	41
Figura 3.19	Formação da camada-limite em regime de a) Reynolds baixo e b) Reynolds alto	45
Figura 3.20	Crescimento da camada-limite (fora de escala)	46
Figura 3.21	Tipos de arrasto e transição da camada-limite em um foguete	46
Figura 3.22	Arrasto de base causado pelo fim abrupto de aerofólio	49
Figura 3.23	Coeficientes de arrasto de pressão para algumas geometrias de coifa em regime subsônico	50
Figura 3.24	Coeficientes de arrasto de pressão para coifas em regime transônico e supersônico, com $f_N = 3$	52
Figura 3.25	Transições de tipo <i>shoulder</i> do Saturn V	54
Figura 3.26	Transições <i>boattail</i>	55
Figura 3.27	Perfis de aletas	56
Figura 3.28	Encaixes da guia de lançamento	58
Figura 3.29	Etapas de voo de foguete	60
Figura 4.1	Lançamento de <i>CanSat</i>	66
Figura 4.2	Fluxograma de projeto	68
Figura 4.3	Grão BATES	71
Figura 4.4	Direção de queima - grão BATES	71
Figura 4.5	Curvas de empuxo-tempo do motor <i>Sunrise</i>	75

Figura 4.6	Bocal do motor <i>Sunrise</i>	76
Figura 4.7	<i>Casing</i> do motor <i>Sunrise</i>	77
Figura 4.8	<i>Bulkhead</i> (tampa) do motor <i>Sunrise</i>	78
Figura 4.9	Grão de propelente do motor <i>Sunrise</i>	79
Figura 4.10	Montagem do motor <i>Sunrise</i>	80
Figura 4.11	Coifa de von Kármán	82
Figura 4.12	Coifa do projeto conceitual no <i>OpenRocket</i>	83
Figura 4.13	Transição do projeto conceitual no <i>OpenRocket</i>	83
Figura 4.14	Carenagem do projeto conceitual no <i>OpenRocket</i>	84
Figura 4.15	Corpo principal do projeto conceitual no <i>OpenRocket</i>	84
Figura 4.16	Aleta trapezoidal com perfil de aerofólio constante	85
Figura 4.17	Encaixe da guia de lançamento	86
Figura 4.18	Projeto conceitual no <i>SolidWorks</i>	87
Figura 4.19	Projeto conceitual no <i>OpenRocket</i> , com componentes internos	87
Figura 4.20	Curvas de arrasto em função do número de Mach	90
Figura 4.21	Curvas de altitude por tempo	91
Figura 4.22	Curvas de velocidade vertical por tempo	92
Figura 4.23	Bocal do motor <i>Sunrise-II</i>	95
Figura 4.24	<i>Casing</i> do motor <i>Sunrise-II</i>	95
Figura 4.25	Grão de propelente do motor <i>Sunrise-II</i>	96
Figura 4.26	Montagem do motor <i>Sunrise-II</i>	97
Figura 4.27	Curvas de pressão na câmara de combustão por tempo	99
Figura 4.28	Curvas de Kn por tempo	99
Figura 4.29	Curvas de empuxo por tempo	100
Figura 4.30	Projeto preliminar no <i>SolidWorks</i>	101
Figura 4.31	Projeto preliminar no <i>OpenRocket</i> , com componentes internos	101
Figura 4.32	Curvas de altitude por tempo	103
Figura 4.33	Curvas de velocidade vertical por tempo	103
Figura 4.34	Curvas de número de Mach por altitude	104

LISTA DE TABELAS

1	Classificação de motores a propelente sólido com base no impulso total . . .	31
2	Distâncias relativas dos centros de pressão para geometrias típicas de coifas	42
3	Tamanho médio aproximado da rugosidade superficial	47
4	Parâmetros do <i>Intruder</i> da ESA	70
5	Motores Aerotech 38mm	71
6	Parâmetros iniciais do motor para o projeto conceitual	73
7	Propriedades do motor <i>Sunrise</i>	74
8	Lista dos componentes do motor <i>Sunrise</i>	81
9	Lista dos componentes do projeto conceitual	88
10	Parâmetros de estabilidade	88
11	Coeficientes de arrasto total	89
12	Contribuições individuais do arrasto (Mach 0.3)	89
13	Propriedades do motor <i>Sunrise-II</i>	94
14	Lista dos componentes do motor <i>Sunrise-II</i>	98
15	Lista dos componentes do projeto preliminar	102
16	Parâmetros de estabilidade do projeto preliminar	102

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
MEOP	<i>Maximum expected operating pressure</i> , pressão de operação máxima esperada

LISTA DE SÍMBOLOS

C_p	Capacidade térmica a pressão constante
T_0	Temperatura de estagnação
P_0	Pressão de estagnação
ρ_0	Densidade de estagnação
k	Coefficiente de expansão adiabática
M	Número de Mach
A^*	Área da região crítica do bocal (A_t)
A_e	Área de saída do bocal
P_e	Pressão no plano de saída do bocal
P_a	Pressão ambiente
I_t	Impulso total
E_{med}	Empuxo médio
E_{max}	Empuxo máximo
t_q	Tempo de queima
$\dot{m}$	Vazão mássica
v_e	Velocidade de ejeção dos gases
g	Aceleração gravitacional terrestre
r	Taxa de queima total
r_{nom}	Taxa de queima nominal
r_e	Taxa de queima erosiva
x_{cg}	Posição do centro gravitacional
x_{cp}	Posição do centro de pressão
ϕ	Ângulo de junção coifa-corpo
α	Ângulo de ataque
A_b	Área superficial de propelente exposta à queima

K_n	Razão de áreas (A_b/A_t)
M_p	Massa de propelente
M_i	Massa inicial (total) do foguete

SUMÁRIO

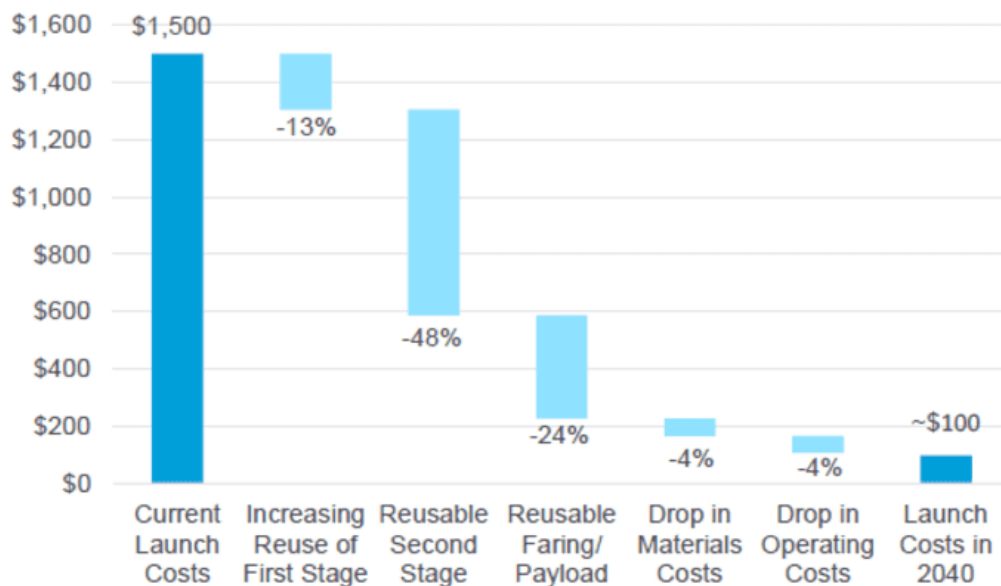
1	INTRODUÇÃO	16
2	OBJETIVOS	18
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
3.1	Propulsão	19
3.1.1	Mecanismos físicos e escolha do sistema propulsivo	19
3.1.2	Visão geral do motor a propelente sólido	21
3.1.3	Hipóteses adotadas	23
3.1.4	Bocal (<i>nozzle</i>)	24
3.1.5	O grão de propelente	29
3.1.6	Parâmetros do motor	31
3.1.7	Superfície exposta e empuxo	33
3.1.8	Taxa de queima	34
3.1.9	Queima erosiva	35
3.2	Estabilidade	36
3.2.1	Sistemas estabilizadores	36
3.2.2	Aletas (ou <i>fins</i>)	36
3.2.3	Centro de gravidade (CG)	39
3.2.4	Centro de pressão (CP)	40
3.2.5	Margem estática	43
3.3	Aerodinâmica	44
3.3.1	Modelagem da força de arrasto e os coeficientes de arrasto	44
3.3.2	Camada-limite e tipos de escoamento	45
3.3.3	Arrasto de fricção	47
3.3.4	Arrasto de base	49
3.3.5	Arrasto de pressão - mecanismo físico	50
3.3.6	Arrasto de pressão em coifas	50
3.3.7	Arrasto de pressão em transições <i>shoulders</i>	54
3.3.8	Arrasto de pressão em transições <i>boattail</i>	55
3.3.9	Arrasto de pressão em aletas	56
3.3.10	Arrasto parasita	58
3.3.11	Dimensionamento dos coeficientes de arrasto	59
3.4	Trajetória	60
3.4.1	Etapas de voo de foguete experimental	60
3.4.2	Altitude de foguete sem arrasto	61
3.4.3	Altitude de foguete com arrasto	64

3.4.4	Altitude de foguete com curva de empuxo-tempo	65
4	DESENVOLVIMENTO	66
4.1	Requisitos e filosofia	66
4.2	Projeto conceitual	69
4.2.1	Propulsão	70
4.2.2	Estruturas	82
4.2.2.1	Coifa	82
4.2.2.2	Corpo	83
4.2.2.3	Aletas	84
4.2.2.4	Guias de lançamento	85
4.2.2.5	Visão geral	86
4.2.3	Parâmetros aerodinâmicos e de estabilidade	88
4.2.4	Trajatória	91
4.3	Projeto preliminar	93
4.3.1	Redimensionamento do motor	93
4.3.2	Curvas do motor <i>Sunrise-II</i>	98
4.3.3	Redimensionamento do foguete	100
4.3.4	Parâmetros aerodinâmicos e de estabilidade	102
4.3.5	Trajatória	102
5	CONCLUSÃO	105
5.1	Considerações finais	105
	REFERÊNCIAS	107
	APÊNDICE A – PROPULSION.PY	110
	APÊNDICE B – AERODYNAMICS.PY	117
	APÊNDICE C – STABILITY.PY	124
	APÊNDICE D – TRAJECTORY.PY	127
	APÊNDICE E – UTILS.PY	131

1 INTRODUÇÃO

Foguetes são máquinas projetadas para levarem cargas ao espaço. Essa curta afirmação sintetiza bem sua missão primordial, mas omite diversos detalhes acerca de sua diversidade, aplicabilidade e complexidade. Ao longo de quase 70 anos, desde o lançamento da Sputnik 1, o setor aeroespacial cresceu exponencialmente. Até 2040, espera-se que a indústria aeroespacial atinja uma receita de um trilhão de dólares^[1], com uma redução drástica do custo por quilograma transportado, como evidenciado na Figura 1.1. Lançamentos de satélites de comunicação, de captura de imagens ou de exploração, viagens tripuladas ou de abastecimento à Estação Espacial Internacional, veículos robóticos destinados a planetas ou asteroides e até mesmo viagens tripuladas para civis são alguns exemplos de operações já realizadas.

Figura 1.1 – Redução dos custos de lançamento até 2040



Fonte: Sheetz^[1]

No entanto, respeitadas as proporções, os foguetes que viabilizam essas operações não diferem fundamentalmente de um foguete de pequena escala; ambos estão presentes na chamada “Ciência de Foguetes”^[2]. Assim, de um ponto de vista didático, o projeto de um “minifoguete” se apresenta como uma importante base na formação de novos engenheiros e cientistas do setor (neste trabalho, minifoguete ou foguete experimental de escala reduzida são considerados sinônimos). Com esse objetivo em mente, o projeto de um minifoguete que abriga uma carga-paga de tipo “CanSat” será elaborado, detalhando os principais desafios que permeiam a ciência de foguetes. A carga-paga de um foguete é exatamente o que deve ser levado por ele até o destino; satélites, módulos ou até mesmo pessoas são exemplos de carga-paga. Para delimitar o projeto, as diretrizes da Competição de CanSats da Agência Espacial Europeia^[3] serão utilizadas.

Respeitados os tópicos interdependentes, o desenvolvimento do projeto em si é feito de forma segmentada em cada área de relevância: propulsão, aerodinâmica, estabilidade e trajetória, porém

não antes da delimitação dos requisitos da missão. Neste caso, a missão é meramente realizar um voo de baixa altitude carregando uma carga-paga de tipo “CanSat”, mini-satélite em formato de lata; isso implica em uma altitude mínima a ser atingida pelo foguete e um espaço interno adequado para abrigar a carga-paga. Com essas restrições fixadas e as informações do “CanSat” disponíveis, o desenvolvimento do foguete pode começar.

A metodologia apresentada tem valor didático, destinada à outros estudantes de graduação que queiram adentrar no estudo de projeto de minifoguetes. Ela é mais simples e direta se comparada a outras metodologias de projetos de foguetes, como metodologias de Engenharia de Sistemas ou metodologias de Engenharia Simultânea^[4], que oferecem projetos muito bem otimizados em detrimento da simplicidade. Este projeto apresenta um método menos generalista, fornecendo não somente métricas de desempenho dos sistemas como também instruções de projeto. Aqueles que querem construir seus próprios motores, por exemplo, encontrarão neste trabalho um caminho completo para tal, desde teoria propulsiva até a confecção de desenhos mecânicos.

A validação do projeto de um foguete só acontece, de fato, quando vários lançamentos bem-sucedidos são realizados. Entretanto, por serem testes custosos, com fabricação complexa, a validação do foguete projetado será feita apenas através de comparação técnica entre os dados estimados pela metodologia utilizada e os dados obtidos de simulações de software. Se os resultados forem compatíveis, assume-se que o projeto está validado.

2 OBJETIVOS

- Objetivos gerais

O objetivo central do trabalho é disponibilizar um método viável de projeto de um foguete propulsado por um motor a propelente sólido, focando não somente nas qualidades técnicas a serem atendidas mas também na metodologia de projeto.

- Objetivos específicos

- Expor a base teórica empregada no projeto;
- Expor a filosofia de projeto empregada;
- Expor, detalhar e justificar o projeto de um motor a propelente sólido;
- Escolher e justificar a geometria do foguete;
- Estimar dados aerodinâmicos e dados de estabilidade do foguete;
- Estimar e simular a trajetória do foguete.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Antes de iniciar o projeto em si, é imprescindível compreender os mecanismos físicos que regem o funcionamento do foguete; nesse capítulo, a base teórica relevante para propulsão, estabilidade, aerodinâmica e trajetória será apresentada.

3.1 PROPULSÃO

3.1.1 Mecanismos físicos e escolha do sistema propulsivo

Etimologicamente, a propulsão é definida como “o ato de empurrar para frente”. O objetivo central do sistema propulsivo, é, portanto, empurrar o foguete para uma direção de interesse. As três Leis de Newton explicam perfeitamente o “problema” da propulsão e sua solução:

1. 1ª Lei de Newton: Princípio da inércia

Segundo a primeira lei de Newton, em um sistema fechado com força resultante nula a variação de velocidade também é nula. Essa é a lei que ilustra o problema: tem-se um objeto (foguete) com velocidade nula que precisa adquirir velocidade. Matematicamente:

$$\sum F = 0 \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = 0 \quad (3.1)$$

2. 2ª Lei de Newton: Princípio fundamental da Dinâmica

Segundo a segunda lei de Newton, uma relação matemática existe entre a força resultante do sistema fechado com a variação da quantidade de movimento daquele sistema, o que permite avaliar quantitativamente o comportamento dinâmico do problema:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.2)$$

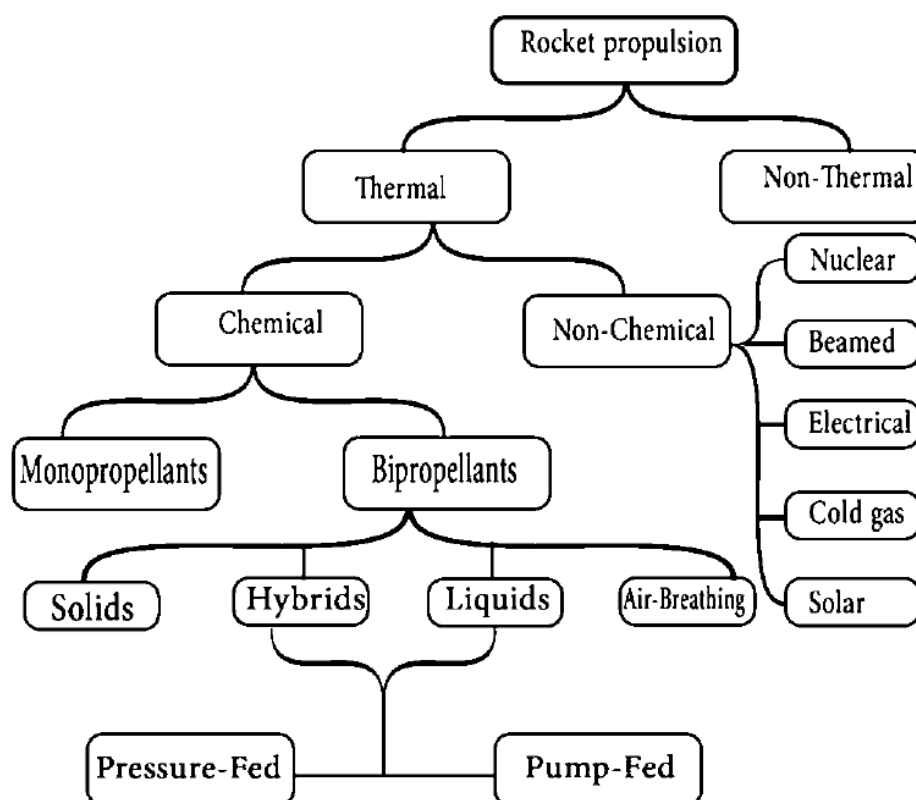
3. 3ª Lei de Newton: Princípio da Ação e Reação

Segundo a terceira lei de Newton, para toda força aplicada em um corpo existe uma força contrária a esta; a força contrária é igual em magnitude e direção porém com sentido contrário. Essa é a lei que ilustra a solução: para que haja uma força resultante não-nula no foguete (e, portanto, variação de velocidade), uma força contrária deve existir. Tipicamente, essa força contrária acelera os gases expelidos pelo motor. Matematicamente:

$$F_A = -F_B \quad (3.3)$$

Inúmeros tipos de sistemas propulsivos podem ser utilizados em um foguete; a Figura 3.1 mostra uma classificação geral destes sistemas.

Figura 3.1 – Classificação dos sistemas propulsivos



Fonte: El-Sayed^[5]

Um modelo propulsivo ideal não existe; cada tipo de sistema tem seu escopo de aplicação e suas desvantagens, mas todos atuam de forma semelhante: fornecendo uma variação de momento ao foguete (mesmo os sistemas sem ejeção de massa, como o *solar sail*, *laser sail*, dentre outros). O modelo propulsivo de interesse deste trabalho é o motor a propelente sólido. Evidentemente, uma justificativa dessa escolha se faz necessária; em primeiro lugar, eliminam-se os sistemas que não ejetam massa através de reações térmicas: apesar de possuírem um impulso específico (definido na seção 3.1.6) consideravelmente maior, o empuxo fornecido não seria suficiente para o foguete proposto^[6].

Os sistemas propulsivos que ejetam massa através de reações térmicas não-químicas também podem ser descartados, haja vista sua complexidade. Os sistemas propulsivos nucleares, por exemplo, não tiveram muito desenvolvimento nas últimas décadas, e é improvável que se tornem utilizáveis nesta década^[6]; em foguetes experimentais de escala reduzida, a chance é ainda mais remota.

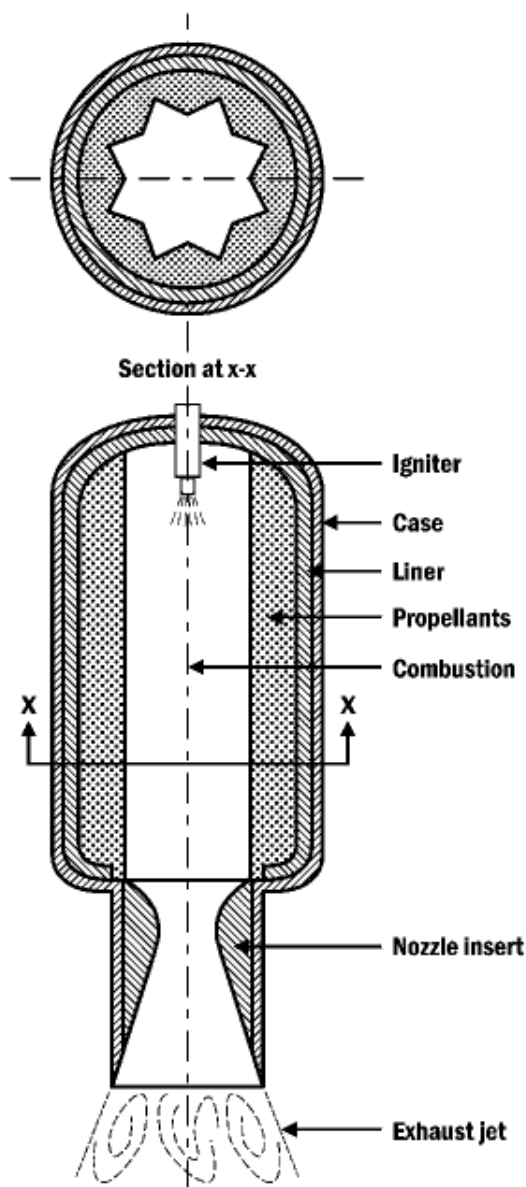
Entre os sistemas propulsivos de monopelentes e bipelentes, opta-se pelos de bipelentes devido ao ganho de desempenho (impulso específico) e estabilidade dos reagentes^[6].

Finalmente, resta escolher entre bipelentes líquidos, híbridos ou *air-breathing*. O uso de bipelentes sólidos garante um empuxo mais que suficiente, com impulso específico aceitável e complexidade reduzida quando comparado às outras opções^[6]. De fato, por esses motivos, o uso do motor a propelente sólido por equipes de foguetemodelismo é bem mais popular que as alternativas.

3.1.2 Visão geral do motor a propelente sólido

O motor a propelente sólido atua acelerando partículas de gases (produtos da combustão do propelente) através de seu bocal (ou *nozzle*). Na Figura 3.2, uma vista em corte de um motor a propelente sólido:

Figura 3.2 – Motor a propelente sólido típico



Fonte: El-Sayed^[5]

Partindo do topo do motor até sua parte inferior, listam-se os seguintes componentes e suas respectivas funções:

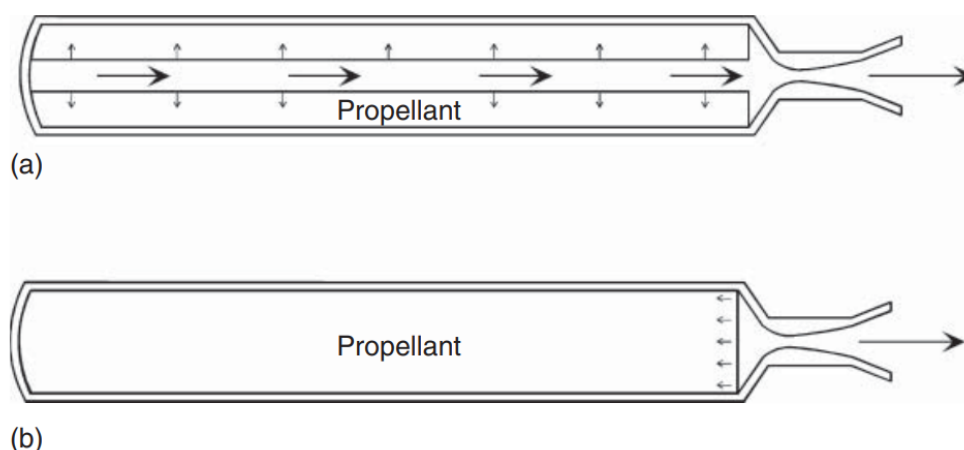
- Ignitor (*Igniter*): o ignitor é responsável por dar início à combustão do propelente. Após sua atuação, a câmara de combustão é rapidamente pressurizada e a queima se torna autossuficiente;
- Invólucro (*Casing*): o “invólucro” ou simplesmente tubo é a estrutura física responsável por conter a pressão desenvolvida durante a combustão, ou seja, é a estrutura que envelopa a câmara de combustão;

- Revestimento (*Liner*): o revestimento é utilizado quando a transferência de calor entre os gases da câmara de combustão e o invólucro é considerável. O aumento de temperatura do invólucro muda as características mecânicas do material, reduzindo sua capacidade de conter a pressão da combustão. Em geral, para minifoguetes, o tempo de queima é pequeno o suficiente para que a transferência de calor entre a câmara de combustão e a parede do motor seja desprezível;
- Propelente (*Propellant*): o propelente é o material a ser consumido no processo de combustão. Quando o propelente está num formato moldado e segmentado, dá-se o nome de “grão de propelente”, ou simplesmente “grão”;
- Bocal (*Nozzle*): o bocal é a ferramenta utilizada para acelerar os gases resultantes da combustão. Tipicamente, possui uma seção convergente que acelera os gases até o regime sônico e uma seção divergente que acelera os gases a velocidades acima do regime sônico. A menor seção do bocal é chamada de “garganta”.

A vista em corte do motor a propelente sólido nos permite ressaltar, imediatamente, suas duas maiores desvantagens em relação ao motor a propelente líquido. Em primeiro lugar, como a câmara de combustão e o propelente estão no mesmo ambiente, interromper a combustão se torna impraticável. Além disso, não é possível controlar o empuxo gerado pelo motor a propelente sólido em voo: o empuxo possui uma relação direta com a pressão desenvolvida, que é escolhida durante a fase de projeto do motor. O modo como a pressão da câmara de combustão afeta a curva de empuxo de um motor será apresentado nas seções 3.1.6 e 3.1.7.

Os motores a propelente sólido podem conter grãos com perfis específicos ou podem ser maciços. Estes últimos são chamados de “*end-burners*”, e os primeiros de “*internal burners*”. Por possuírem uma área exposta pequena, os *end-burners* não são muito empregados em motores para geração de empuxo (uma boa aplicação para eles, no entanto, é na caracterização dos parâmetros de propelentes).

Figura 3.3 – Propelente na configuração a) *internal-burner* e b) *end-burner*



Fonte: Kubota^[7]

3.1.3 Hipóteses adotadas

Antes de prosseguir com a fundamentação teórica dos motores a propelente sólido, algumas premissas e simplificações ^[6] devem ser adotadas para facilitar a modelagem dos complexos processos físico-químicos envolvidos durante a operação, tais como:

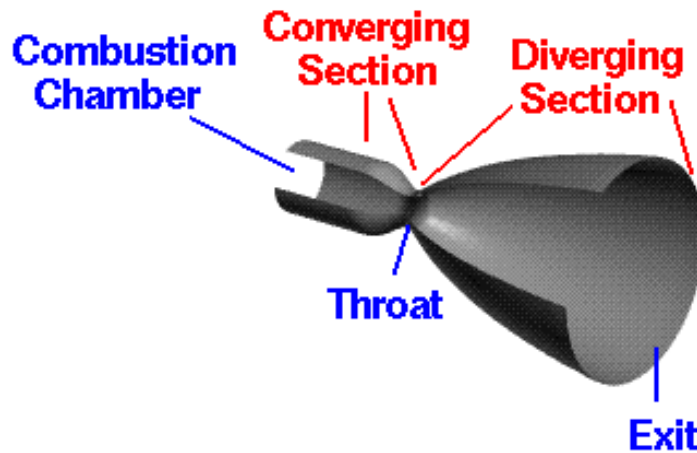
- A combustão dos propelentes é completa.
- Os produtos da combustão obedecem à Lei dos Gases Ideais.
- Não existe fricção no escoamento dos gases da combustão.
- A combustão e o escoamento no motor e bocal são adiabáticos, ou seja, não trocam calor com o meio externo.
- A combustão ocorre em regime estacionário, no qual os processos e condições não se alteram com o tempo (para uma dada condição geométrica).
- A expansão dos gases da combustão no bocal ocorre de forma isentrópica e uniforme, sem ondas de choque ou descontinuidades.
- O escoamento dos gases dentro do motor é unidimensional e irrotacional.
- A velocidade, pressão e densidade do escoamento são uniformes em qualquer corte de seção transversal.
- O equilíbrio químico é alcançado na câmara de combustão e não se altera.
- A queima do propelente ocorre sempre na direção normal (perpendicular) à superfície do grão.

Exceto quando explicitado o contrário, essas serão as hipóteses adotadas. Embora pareçam restringir a abordagem teórica, elas refletem satisfatoriamente o comportamento real observado na operação dos motores ^[6].

3.1.4 Bocal (nozzle)

O bocal de um motor de foguete (ou bocal de Laval) é o instrumento utilizado para converter energia térmica, produzida na combustão do propelente, em energia cinética. Seu objetivo é, portanto, aumentar a velocidade do escoamento em troca de temperatura e pressão^[6]. Quanto maior for o aumento de velocidade, maior será o desempenho do motor, haja vista que o empuxo produzido é função da velocidade de escape dos gases e do fluxo de massa.

Figura 3.4 – Bocal de Laval



Fonte: Nozzle...^[8]

Um bocal supersônico é composto de três regiões de interesse: a seção convergente, a seção divergente e a região da “garganta”. A seção convergente é responsável por acelerar o escoamento até a velocidade local do som (ou seja, até um número de Mach igual a 1). Entre a parte final da seção convergente e a parte inicial da seção divergente situa-se a “garganta”. Já a seção divergente é responsável pelo aumento da velocidade do escoamento acima de Mach 1, até que ele atinja o plano de saída do bocal.

A modelagem física do bocal pode ser feita através da conservação de energia e de massa entre dois pontos quaisquer do bocal. Considerando o escoamento adiabático entre os pontos x_1 e x_2 , a variação de entalpia de um bocal é dada pela variação de energia cinética - que, para um gás ideal, pode ser escrita em termos do calor específico e sua temperatura absoluta^[6]:

$$h_1 - h_2 = \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = C_p(T_1 - T_2) \quad (3.4)$$

Os primeiros dois termos da equação 3.4 mostram que o decréscimo de entalpia entre x_1 e x_2 acarreta no aumento de velocidade do fluido. O terceiro termo mostra que essa variação também acarreta na diminuição da temperatura absoluta de x_2 em relação a x_1 .

Adotando $v_2 = 0$ na equação 3.4 é possível obter T_0 , a temperatura de estagnação do fluido:

$$\frac{-v_1^2}{2} = C_p(T_1 - T_2) \implies T_0 = \frac{v^2}{2C_p} + T \quad (3.5)$$

Para processos isentrópicos, as seguintes relações de propriedades termodinâmicas são válidas:

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1} \quad (3.6)$$

Em que k é o coeficiente de expansão adiabática, dado por $k = C_p/C_v = C_p/(C_p - R)$. Tanto C_p como R são propriedades determinadas pela composição dos produtos da combustão, e são tidos como aproximadamente constantes ao longo de todo o bocal^[2]. R é calculado a partir da constante universal dos gases R' e da massa molar efetiva dos produtos da combustão W : $R = R'/W$.

A velocidade local do som e sua relação com o número de Mach é dada por:

$$a = \sqrt{kRT}, \quad M = \frac{v}{a} \quad (3.7)$$

Utilizando as equações 3.5, 3.6 e 3.7 é possível relacionar a temperatura de estagnação T_0 com o número de Mach M e o coeficiente de expansão adiabática k :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (3.8)$$

Analogamente, a pressão e densidade de estagnação em relação ao número de Mach são dados por:

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (3.9)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (3.10)$$

As equações 3.8, 3.9 e 3.10 são úteis à modelagem, já que permitem a obtenção das propriedades T , P , ρ tendo conhecimento do número de Mach do escoamento e das propriedades estagnadas (totais). Na câmara de combustão, assume-se que os produtos da combustão estão inicialmente em repouso, o que nos permite obtê-las de forma rápida^[2]: T_0 é a temperatura de combustão do propelente, P_0 é a pressão na câmara de combustão e ρ_0 é a densidade dos produtos da combustão dentro da câmara.

A conservação de massa entre pontos arbitrários 1 e 2 do bocal é dada por:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 = cte \quad (3.11)$$

Em que A é a área da seção transversal do bocal e v é a velocidade avaliada naquela seção. Essa relação pode ser reescrita em termos da razão de áreas A_2/A_1 , e v pode ser substituído pela equação 3.7:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho_2 v_2} = \frac{\rho_1 M_1 a_1}{\rho_2 M_2 a_2} \quad (3.12)$$

Substituindo as equações 3.7, 3.8 e 3.10 em 3.12, tem-se^[6]:

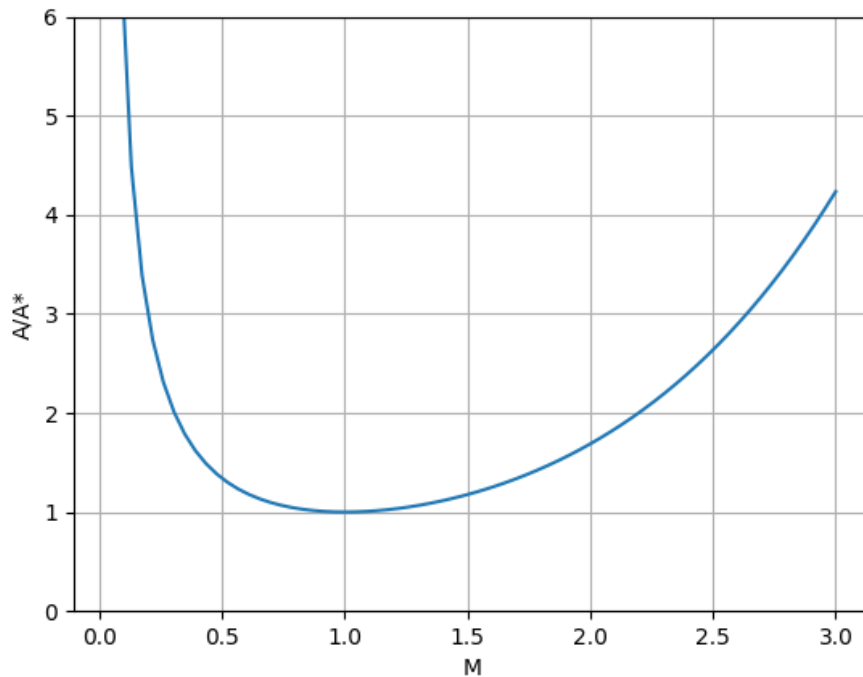
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\left\{ \frac{1 + [(k-1)/2] M_2^2}{1 + [(k-1)/2] M_1^2} \right\}^{(k+1)/(k-1)}} \quad (3.13)$$

Como A_1 denota um ponto qualquer do bocal, neste momento é de interesse fixá-lo na região crítica do bocal, na qual o número de Mach é igual a 1. Adotando o sobrescrito * para essa região, omitindo o subscrito 2 e substituindo $M_1 = 1$ na equação 3.13, tem-se^[2]:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (3.14)$$

A equação 3.14 permite a obtenção da razão entre a área de seção transversal em um ponto qualquer do bocal em relação à área da região crítica, sabendo o número de Mach daquela seção e o coeficiente de expansão adiabática k . Essa relação é mostrada na Figura 3.5, na qual fica evidente que uma redução até uma área mínima é requerida para acelerar o escoamento até $M = 1$; posteriormente, um aumento dessa área mínima é requerido para acelerar o escoamento a $M > 1$. Disso decorrem duas importantes consequências: o escoamento supersônico só é atingido na seção divergente de um bocal, e $M = 1$ ocorre na região da garganta do bocal.

Figura 3.5 – Razão de áreas em termos do número de Mach, $k = 1.4$ (ar)



Fonte: autor

Alternativamente, a razão de áreas pode ser dada em termos da razão de pressão entre um ponto qualquer e a pressão da região crítica^[6]:

$$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{1/(k-1)} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1/k} \sqrt{\left(\frac{k+1}{k-1} \right) \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(k-1)/k} \right]} \quad (3.15)$$

Se o ponto qualquer escolhido for no final do bocal (subscrito e , de *exit*), obtém-se a chamada razão de expansão de área do bocal calculando o inverso da razão da equação 3.16:

$$\frac{A^*}{A_e} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{1/(k-1)} \left(\frac{P_e}{P_0} \right)^{1/k} \sqrt{\left(\frac{k+1}{k-1} \right) \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_0} \right)^{(k-1)/k} \right]} \quad (3.16)$$

A condição de projeto ideal, na qual o empuxo é maximizado, é encontrada com um bocal que expande sua área até que a pressão de saída seja igual à pressão ambiente, ou seja, $P_e = P_a$ [2].

Para obtenção da velocidade de saída, a equação 3.11 pode ser reescrita adotando o subscrito 2 no final do bocal [6]:

$$v_e = \sqrt{2T_0R \left(\frac{k}{k-1} \right) \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (3.17)$$

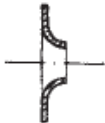
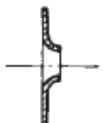
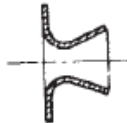
Em suma, v_e é determinado a partir do coeficiente de expansão adiabática dos produtos da combustão (k), da constante específica do gás (R), da temperatura de combustão do propelente (T_0), da pressão da câmara de combustão (P_0) e da pressão de saída do bocal (P_e).

Voltando à equação 3.9 e adotando $M = 1$ para a condição crítica, tem-se:

$$\frac{P_t}{P_0} = \frac{2}{k+1}^{k/(k-1)} \quad (3.18)$$

O lado direito da equação 3.18 depende somente do coeficiente adiabático dos produtos da combustão; se um determinado motor apresentar uma razão de pressão P_e/P_0 maior que o da eq. 3.18, o fluxo de massa ($\dot{m}$) não está maximizado e o escoamento não é sônico na garganta [6]. Do contrário, quando a razão de pressão P_e/P_0 é menor que o da eq. 3.18, diz-se que o escoamento está “sufocado” (*choked flow*): uma diminuição na pressão à jusante não aumentará o fluxo de massa por unidade de área. A Figura 3.6 mostra os três possíveis tipos de bocal, dos quais apenas o supersônico é de interesse para o projeto por maximizar a velocidade de saída v_e :

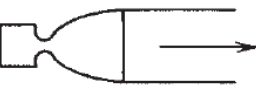
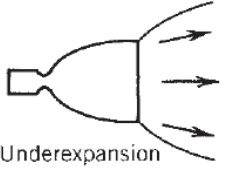
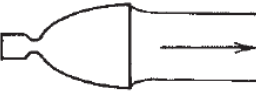
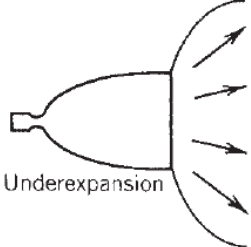
Figura 3.6 – Tipos de bocal

	Subsonic	Sonic	Supersonic
Throat velocity	$v_1 < a_1$	$v_t = a_t$	$v_t = a_t$
Exit velocity	$v_2 < a_2$	$v_2 = v_t$	$v_2 > v_t$
Mach number	$M_2 < 1$	$M_2 = M_t = 1.0$	$M_2 > 1$
Pressure ratio	$\frac{P_1}{P_2} < \left(\frac{k+1}{2} \right)^{k/(k-1)}$	$\frac{P_1}{P_2} = \frac{P_1}{P_t} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{k/(k-1)}$	$\frac{P_1}{P_2} > \left(\frac{k+1}{2} \right)^{k/(k-1)}$
Shape			

Fonte: Sutton e Biblarz [6]

A condição em que a pressão de saída do bocal é igual à pressão ambiente define a configuração ideal para o motor. Quando a pressão ambiente P_a é mais baixa que a pressão de saída P_e , diz-se que o bocal está subexpandido, e ondas de expansão externas são formadas após a saída do bocal^[6]. Quando a pressão ambiente P_a é suficientemente mais alta que a pressão de saída P_e , ondas de choque surgem após a saída do bocal^[6] na solução superexpandida. Em casos extremos, a separação do escoamento ocorre na seção divergente do bocal. A Figura 3.7 ilustra estes comportamentos em um foguete de três estágios que trafega pela atmosfera e que, portanto, está submetido a uma variação de pressão ambiente.

Figura 3.7 – Condições de bocais de um foguete de três estágios

Stage	A_2/A_t	During flight		During sea level static tests	
			h (km) I_s (sec)		h (km) I_s (sec)
Booster or first stage	6	Nozzle flows full, slight underexpansion	0 267	Nozzle flows full	0 267
Second stage	10	 Underexpansion	24 312	 Overexpansion, slight contraction	0 254
Third stage	40	 Underexpansion	100 334	 Flow separation caused by overexpansion	0 245

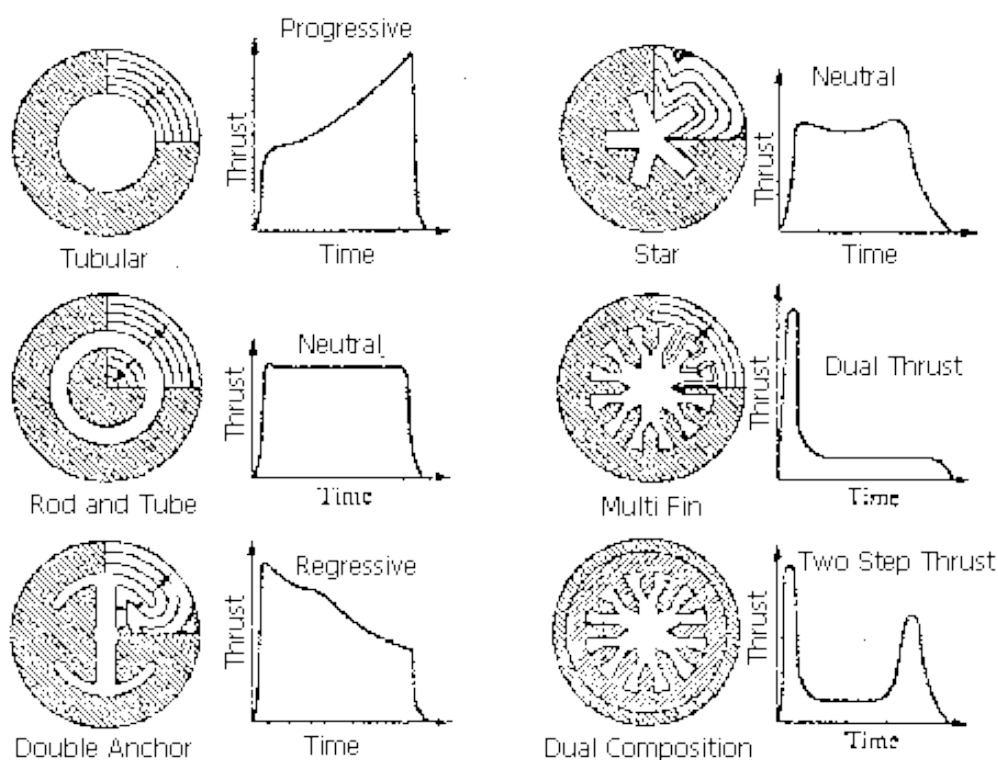
Fonte: Sutton e Biblarz^[6]

3.1.5 O grão de propelente

O propelente que alimenta a combustão do motor é composto, principalmente, de duas substâncias: o combustível e o comburente. No caso de propelentes “*composite*”, outras substâncias podem aparecer, como agentes de cura, estabilizadores, solventes e outros aditivos. No entanto, o propelente utilizado neste projeto (**KNSB**) de fato apresenta apenas um combustível (o adoçante poliol sorbitol) e um comburente (nitrato de potássio, KNO_3). Resumidamente, este propelente é escolhido por possuir desempenho aceitável sem maiores restrições de compra, armazenamento ou fabricação, sendo ligeiramente superior ao propelente tradicional de açúcar-nitrato (**KNSU**).

Independentemente da composição, o propelente é processado e moldado em uma forma geométrica útil ao motor, denominada de grão. Como regra, o formato externo dos grãos é cilíndrico, a fim de maximizar sua eficiência volumétrica. O motor pode ter um único grão de propelente ou vários grãos segmentados entre si. Internamente, o grão tipicamente apresenta uma seção perfilada, que altera profundamente a curva de empuxo-tempo do motor. A Figura 3.8 ilustra esse efeito em vários perfis de grão diferentes.

Figura 3.8 – Seção transversal do grão e curva de empuxo-tempo resultante



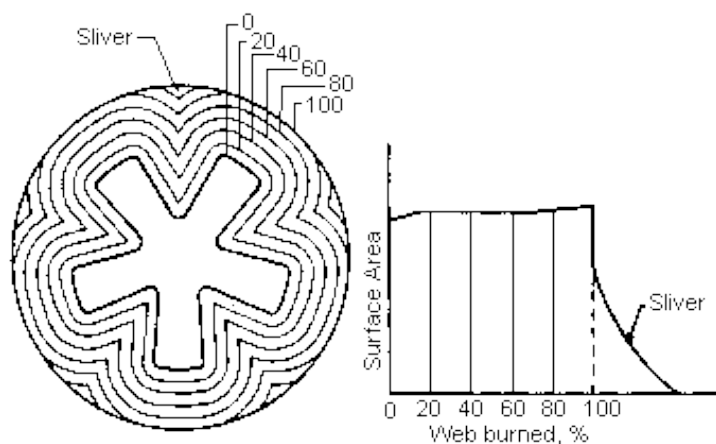
Fonte: Nakka^[2]

O perfil da seção do grão de propelente influencia na curva de empuxo-tempo do motor devido à relação direta entre três termos instantâneos: o empuxo, a pressão na câmara de combustão e a área superficial exposta.

A relação matemática entre esses parâmetros será apresentada na seção 3.1.7, mas é crucial compreender de imediato que a configuração inicial do grão de propelente irá definir como a área exposta se altera durante a queima (já que se assume uma queima normal à superfície do propelente)

e, conseqüentemente, também define como a pressão e o empuxo se alteram durante a queima. Na Figura 3.9, tem-se um exemplo de como um grão de formato “estrela” regride durante a queima.

Figura 3.9 – Regressão típica de um grão “estrela”



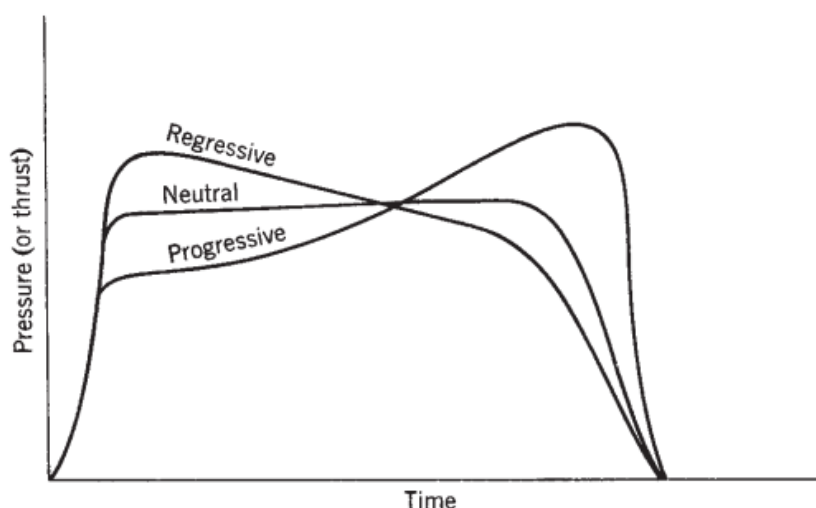
Fonte: Nakka^[2]

Os grãos perfilados são classificados com base em três comportamentos, decorrentes da sua queima:

- Queima regressiva: quando o somatório das áreas superficiais de propelente expostas à queima diminui durante a queima.
- Queima neutra: quando o somatório das áreas superficiais de propelente expostas à queima permanece aproximadamente neutro durante a queima, tipicamente com uma variação máxima de 15%.
- Queima progressiva: quando o somatório das áreas superficiais de propelente expostas à queima aumenta durante a queima.

Evidentemente, cada comportamento irá resultar em uma curva de empuxo-tempo diferente; os grãos que apresentam uma queima progressiva têm empuxo inicialmente pequeno, que é incrementado até seu valor máximo logo antes do final da operação. Grãos neutros começam com um determinado valor de empuxo que é mantido aproximadamente constante ao longo de toda operação, e grãos regressivos começam com um empuxo inicialmente alto que é decrementado até o final da operação. Esses comportamentos estão demonstrados na Figura 3.10. Cabe ao projetista do motor escolher com cautela qual comportamento é o mais adequado para a missão desejada: em alguns casos, um empuxo inicial alto é necessário devido ao peso total do foguete. Em outros, um empuxo final alto é preferível para reduzir o efeito do arrasto sobre o foguete (já que a densidade do ar atmosférico reduz com a altitude). Por fim, o empuxo neutro é o que fornece a maior eficiência propulsiva, já que o bocal opera numa pressão aproximadamente constante ^[2].

Figura 3.10 – Curvas de empuxo-tempo ou pressão-tempo



Fonte: Sutton e Biblarz^[6]

Levando em conta apenas a área de queima interna, o grão “estrela” demonstrado na Figura 3.9 apresenta um comportamento neutro: as pontas da estrela são queimadas até que se tornem bordas suavizadas, com menor área superficial.

3.1.6 Parâmetros do motor

As áreas delimitadas pela curvas de empuxo por tempo da Figura 3.10 fornecem uma métrica crucial para avaliar a quantidade de força disponível em um motor: o impulso total, com unidade de Newton-segundo. Matematicamente, é dado por:

$$I_t = \int_0^{t_q} E \, dt \quad (3.19)$$

Em que t_q é o tempo de queima total do motor e E é o valor instantâneo do empuxo fornecido. Os motores a propelente sólido são classificados, principalmente, com base em seu impulso total. A tabela 1 mostra as primeiras 14 classes deste tipo de classificação.

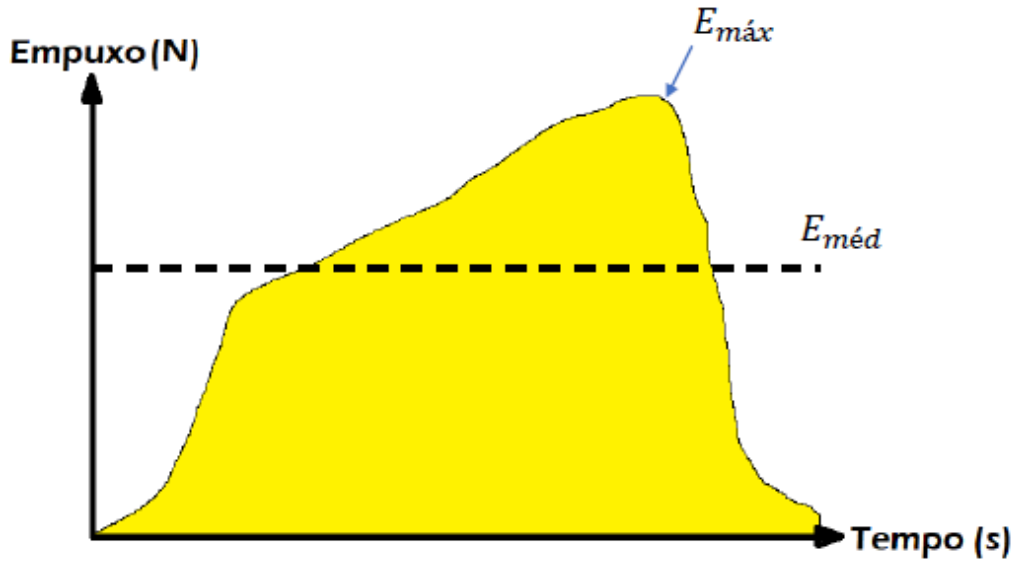
Tabela 1 – Classificação de motores a propelente sólido com base no impulso total

Classe	Impulso total (Ns)	Classe	Impulso total ($N \cdot s$)
A	1.26-2.50	H	160.01-320
B	2.51-5.0	I	320.01-640
C	5.01-10.0	J	640.01-1280
D	10.01-20.0	K	1280.01-2560
E	20.01-40.0	L	2560.01-5120
F	40.01-80.0	M	5120.01-10240
G	80.01-160.0	N	10240.01-20480

Fonte: autor

Partindo de uma curva de empuxo-tempo qualquer, como a ilustrada na Figura 3.11, alguns outros parâmetros de interesse podem ser obtidos.

Figura 3.11 – Curva genérica de empuxo por tempo



Fonte: autor

Em primeiro lugar, nota-se que o comportamento deste motor é progressivo: o empuxo tende a aumentar durante sua operação. O impulso total I_t é dado pela área em amarelo; o empuxo máximo E_{max} é o ponto mais alto da curva, de interesse para o projeto para estabelecer a MEOP (*maximum expected operating pressure*); o empuxo médio E_{med} é o valor de empuxo que, se multiplicado pelo tempo de queima t_q , fornece exatamente o impulso total I_t :

$$E_{med} = \frac{I_t}{t_q} \quad (3.20)$$

De forma simplificada, pode-se supor que toda massa de propelente M_p é expelida uniformemente durante o tempo de queima t_q , o que define uma vazão mássica média para o motor:

$$\dot{m}_{med} = \frac{M_p}{t_q} \quad (3.21)$$

Partindo da equação de empuxo, determina-se a velocidade média de ejeção dos gases $\bar{v}_e$ com a definição 3.21:

$$F = \dot{m}v_e \implies E_{med} = \dot{m}_{med} \cdot \bar{v}_e \quad (3.22)$$

Isolando $\bar{v}_e$ e substituindo os termos conhecidos, tem-se:

$$\bar{v}_e = \frac{E_{med}}{\dot{m}_{med}} = \frac{I_t \cdot t_q}{t_q \cdot M_p} = \frac{I_t}{M_p} \quad (3.23)$$

O impulso específico I_{sp} é uma medida de eficiência crucial para motores de foguetes, e mostra o quão eficiente é a geração de impulso. Em outros termos, o I_{sp} indica quantos segundos um dado propelente, combinado a um dado motor, consegue acelerar sua própria massa inicial a 1g. Quanto mais tempo o motor conseguir acelerar sua própria massa, mais variação de momento (ΔV) será

entregue ao sistema inteiro. É calculado pela expressão 3.24, que pode ser reescrita em termos da velocidade média de ejeção dos gases.

$$I_{sp} = \frac{I_t}{M_p \cdot g} = \frac{\bar{v}_e}{g} \quad (3.24)$$

3.1.7 Superfície exposta e empuxo

A força de empuxo instantânea ideal produzida por um motor de propelente sólido pode ser obtida através da equação a seguir, fruto das simplificações aplicadas. Pelo desenvolvimento de Sutton e Biblarz^[6]:

$$F = A_t P_o \sqrt{\frac{2k^2}{k-1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_o} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} + (P_e - P_a) A_e \quad (3.25)$$

em que A_t é área da seção transversal da “garganta” do bocal, P_o é a pressão na câmara de combustão, P_e é a pressão na saída do bocal, P_a é a pressão ambiente fora do bocal, k é o coeficiente de expansão adiabática e A_e é a área da seção de saída do bocal. A equação é uma forma modificada da expressão para o empuxo^[6], substituindo a velocidade de saída dos gases obtida na equação 3.17.

Analisando-a, vemos que a força produzida é diretamente proporcional à área da garganta e quase diretamente proporcional à pressão na câmara de combustão. Isso significa que, mantendo os outros parâmetros constantes, duplicar a área da garganta ou duplicar a pressão da câmara de combustão acarreta no dobro ou quase o dobro do empuxo, respectivamente. No entanto, a pressão na câmara de combustão está intimamente ligada com a área da garganta, de forma que uma outra relação precise ser estabelecida: a razão de áreas K_n .

A pressão na câmara de combustão durante a operação do motor pode ser modelada através da equação a seguir, partindo da equação de fluxo de massa^[6]:

$$P_o = K_n \rho_p r c^* = \frac{A_b}{A_t} \rho_p r c^* \quad (3.26)$$

em que K_n é a razão entre a área superficial do grão exposta à queima e a área da seção transversal da garganta (A_b/A_t), ρ_p é a densidade do propelente, r é a taxa de queima do propelente em uma dada pressão de combustão e c^* é a velocidade característica dos gases resultantes. Sabendo que a área da garganta permanece tipicamente constante durante a operação de um motor (salvo em condições erosivas ou motores com mecanismos de redução/aumento da seção da garganta) e que os termos ρ_p e c^* são constantes ou aproximadamente constantes para um dado propelente, chegamos à conclusão de que a pressão da câmara é diretamente proporcional à área exposta de propelente, A_b , e a taxa de queima r . Em suma, o empuxo gerado pelo motor é, também, proporcional à área exposta de propelente, fato que nos permite controlar a curva de empuxo-tempo na fase de projeto do motor através da variação dessa área no tempo de operação.

3.1.8 Taxa de queima

A taxa de queima, apresentada na seção anterior, não é constante para todas as pressões da câmara de combustão. Ela, na verdade, é tipicamente modelada através da lei de Saint Robert (ou lei de Vieille) [9].

$$r = aP_c^n \quad (3.27)$$

em que P_c é a pressão na câmara de combustão, a é o coeficiente de taxa de queima e n é o expoente de pressão. Esses últimos dois parâmetros são obtidos empiricamente para cada propelente, através da sua caracterização.

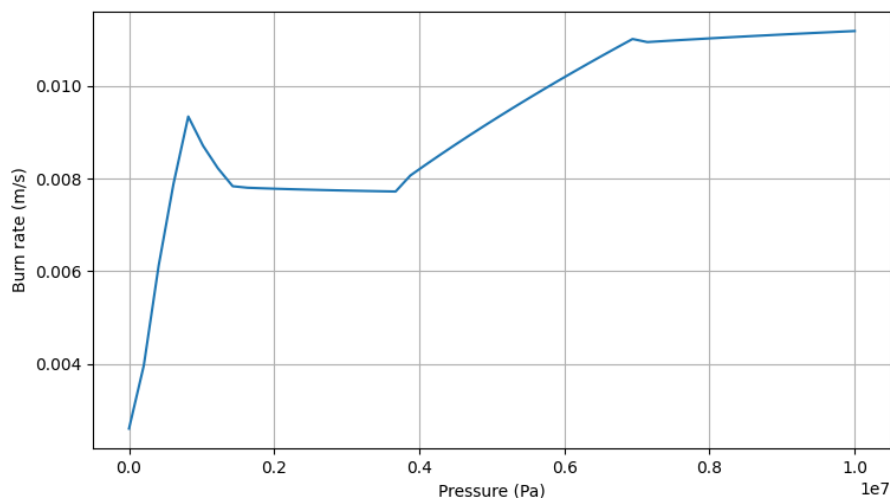
A taxa de queima está relacionada à pressão desenvolvida na câmara de combustão, dado que é ela que regula a velocidade com a qual os produtos da combustão do propelente estão sendo gerados. Existem diversos outros parâmetros que alteram a taxa de queima do propelente^[2], além da pressão da câmara, como:

- Tamanho das partículas de comburente.
- Porcentagem de comburente/combustível (*O/F ratio*).
- Uso de catalisadores ou supressores.

Portanto, no cálculo dos parâmetros de propulsão, é importante recalcular a taxa de queima em cada iteração da fase estacionária de operação - já que a pressão desenvolvida provavelmente terá sido alterada após um certo passo temporal.^[10]

A Figura 3.12 mostra a variação da taxa de queima em função da pressão da câmara de combustão para o propelente utilizado no projeto, KNSB. Os dados foram obtidos da caracterização do propelente, feita por Nakka^[2]:

Figura 3.12 – Taxa de queima vs pressão da câmara (KNSB)

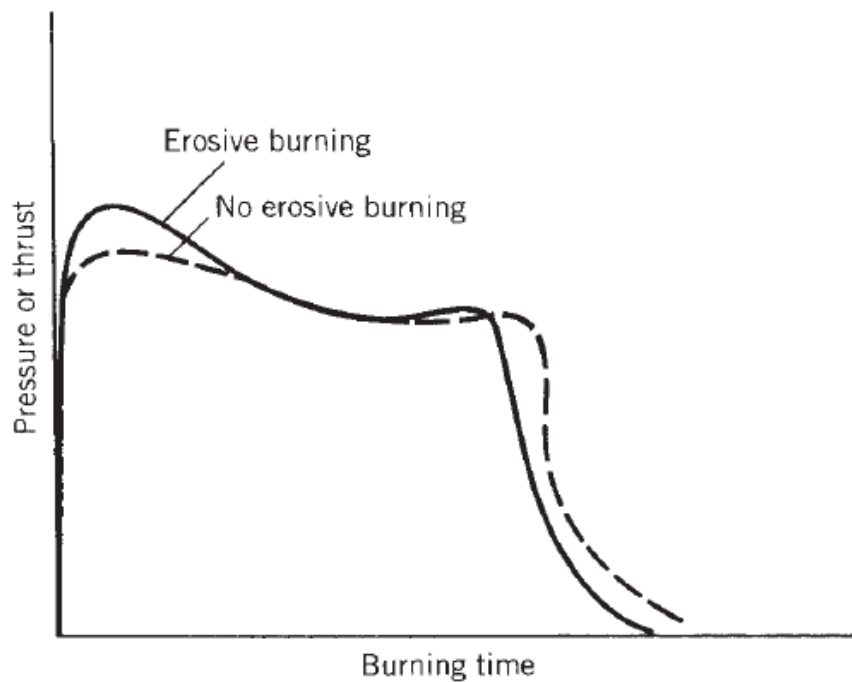


Fonte: autor

3.1.9 Queima erosiva

A queima erosiva se refere ao aumento da taxa de queima de um propelente devido ao escoamento em alta velocidade dos gases provenientes da combustão. Um aumento local na taxa de queima pode aumentar severamente a área de propelente exposta e, por conseguinte, aumentar a pressão da câmara até níveis imprevisíveis, como ilustrado na Figura 3.13. A queima erosiva ocorre principalmente no “furo” dos grãos de propelente, e é mais provável de acontecer se a razão entre a área do “furo” e a área da garganta for menor que um valor crítico. “Furo”, neste contexto, refere-se à área de seção transversal na qual o escoamento consegue trafegar em direção ao bocal.

Figura 3.13 – Efeito da queima erosiva na curva de empuxo-tempo



Fonte: Sutton e Biblarz^[6]

Segundo Nakka^[2], o valor mínimo da razão A_{furo}/A^* para evitar a queima erosiva é 2, enquanto Sutton e Biblarz^[6] fornecem um valor mínimo de 4. Um modelo utilizado para quantificar a queima erosiva foi proposto por Lenoir e Robillard^[6] em 1956, que une a taxa de queima nominal r_{nom} (seção 3.1.8) com a taxa de queima erosiva r_e :

$$r = r_{nom} + r_e = aP_c^n + \alpha G^{0.8} D^{-0.2} e^{-\beta r \rho_b / G} \quad (3.28)$$

Em que G é o fluxo de massa por unidade de área do furo (em $kg/s \cdot m^2$), D é a dimensão característica do furo (dada por $D = 4A_{furo}/S$, em que S é o perímetro do furo), ρ_b é a densidade do propelente não-queimado (kg/m^3), e α, β são constantes empíricas^[6].

O modelo de Lenoir e Robillard é apresentado apenas por completude e não será utilizado no projeto deste trabalho. Ao invés disso, um valor conservador da razão A_{furo}/A^* será adotado na seção de desenvolvimento. O fluxo de massa máximo G também será minimizado a fim de evitar a queima erosiva.

3.2 ESTABILIDADE

Um foguete lançado verticalmente tende a manter sua atitude até que surjam perturbações, como rajadas de vento lateral, desbalanceamentos de massa, empuxo desalinhado com o eixo central do foguete, dentre outros. Após a atuação delas, a linha de centro do foguete deixa de ser paralela à sua trajetória; ou seja, o foguete passa a voar com um ângulo de ataque não-nulo, que irá aumentar consideravelmente o arrasto e alterar a atitude originalmente vertical. Como não é possível garantir um cenário isento destas perturbações, deve-se projetar o foguete para que quaisquer distúrbios gerados sejam prontamente corrigidos pelos sistemas de estabilidade^[2], apresentados a seguir.

3.2.1 Sistemas estabilizadores

Existem dois principais tipos de sistemas estabilizadores: sistemas passivos e sistemas ativos. Sistemas passivos são convencionalmente compostos apenas por um conjunto de aletas fixas, enquanto os sistemas ativos fazem uso de aletas móveis, motores secundários ou possuem controle vetorizado do empuxo (*thrust vector control*, ou TVC). Sistemas ativos sacrificam simplicidade e custo reduzido a fim de obter algum ganho de desempenho ou de funcionalidade^[11]. Os sistemas TVCs, por exemplo, estabilizam o foguete em voo e também o colocam em uma atitude desejada para o cumprimento da missão (como um *gravity turn* para órbita). Os sistemas passivos, entretanto, são ideais para projetos de baixa complexidade e custo reduzido^[11]. O dimensionamento correto das aletas permite uma correção rápida do ângulo de ataque, dado que o foguete possua velocidade suficiente. Além disso, mesmo que um sistema TVC fosse implementado no foguete experimental, ele só funcionaria como controle de atitude durante o período de queima do motor, que é muito pequeno; o resto do voo seria desestabilizado. Por esses motivos, o sistema estabilizador apresentado será de tipo passivo, com o uso de aletas.

Historicamente, os sistemas passivos têm dominado o cenário de foguete-modelismo, enquanto os sistemas ativos são a regra para foguetes comerciais modernos^[11]. No entanto, a popularização de microcontroladores como o Arduino na última década criou novas perspectivas para sistemas ativos de custo reduzido.

3.2.2 Aletas (ou *fins*)

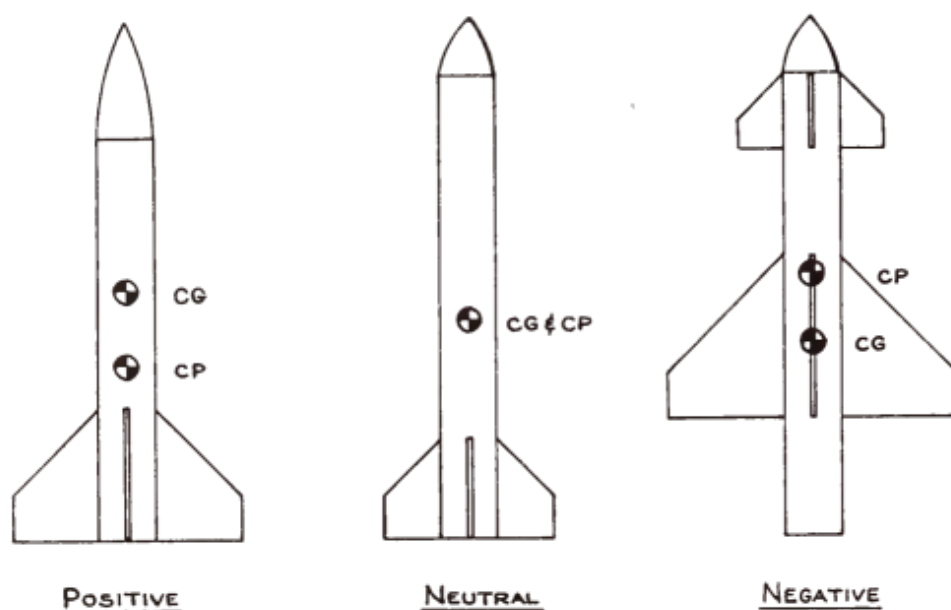
Nesta seção, o mecanismo físico que permite a estabilização de foguetes com o uso de aletas fixas será explorado. Em primeiro lugar, deve-se saber que aletas são, essencialmente, pequenas asas com aerofólios simétricos acopladas radialmente no foguete. As aletas geram sustentação apenas quando submetidas a um ângulo de ataque não-nulo, e essa força é sempre aplicada no chamado centro de pressão (CP) do foguete. Já os movimentos rotacionais do foguete - neste caso, frutos das perturbações - ocorrem em torno do centro de gravidade (CG) do foguete. Assim, um deslocamento angular gerado por forças externas pode ser cancelado pela atuação da força de sustentação das aletas, desde que o centro de pressão esteja localizado “abaixo” do centro de gravidade (considerando o foguete com coifa para cima). O valor da distância entre estes pontos tem grande relevância para a estabilidade, e será

discutido na seção 3.2.5. Os métodos para localizar esses pontos serão discutidos nas seções 3.2.3 e 3.2.4.

Assim, é possível definir três condições de estabilidade^[11] para um corpo nessas condições, ilustradas na Figura 3.14 e definidas a seguir. Apenas uma delas, a estabilidade positiva, é adequada a um foguete.

1. Estabilidade positiva: o centro de pressão se encontra atrás do centro de gravidade. Quando submetido a uma perturbação, sua trajetória permanece praticamente inalterada. Na presença de vento durante lançamento, o foguete tende a virar em direção ao vento, deixando de ter orientação vertical, mas permanecendo estável (fenômeno chamado de *weathercocking*^[11]);
2. Estabilidade neutra: o CP e o CG estão exatamente no mesmo ponto. Assim, quaisquer perturbações acarretam em movimentos puramente translacionais, mas não existem forças restauradoras. Qualquer variação na posição do CG (devido ao consumo de propelente, por exemplo) ou do CP (devido ao aumento do ângulo de ataque, por exemplo) tornará o foguete estável ou instável;
3. Estabilidade negativa: o centro de pressão se encontra na frente do centro de gravidade. Quando submetido a uma perturbação, tende a rotacionar completamente.

Figura 3.14 – Condições de estabilidade

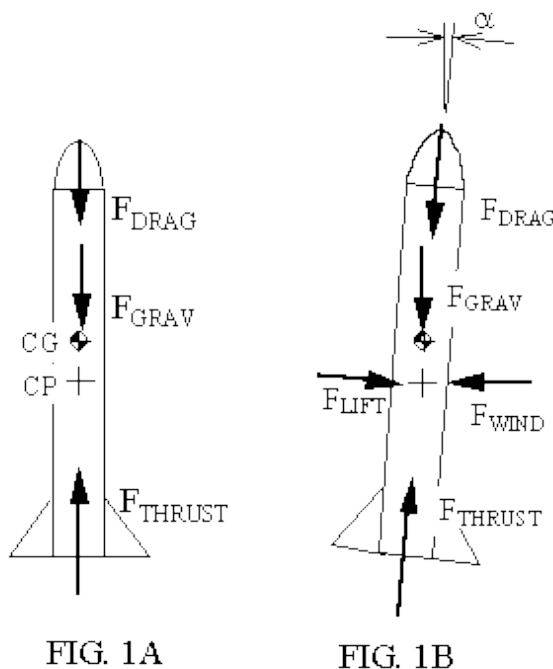


Fonte: Stine e Stine^[11]

Na Figura 3.15, um caso de foguete com estabilidade positiva está exemplificado. Os pontos CG e CP, bem como as forças atuantes no foguete durante a fase propulsada (período no qual o motor está ligado), estão demarcados. O caso 1A denota o foguete em condição não-perturbada: todas as forças são exercidas no CG, e o foguete tem aceleração puramente linear. No caso 1B, entretanto, uma rajada de vento causa uma força lateral no foguete, F_{WIND} . Esta força, de origem aerodinâmica, atua no CP, rotacionando levemente o foguete e causando o aumento do ângulo de ataque α . Essa

mudança no ângulo de ataque do foguete (e, consequentemente, nas aletas) gera imediatamente a força de sustentação F_{LIFT} , cujo momento em relação ao CG tende a estabilizar a perturbação inicial - preservando a trajetória vertical desejada.

Figura 3.15 – Foguete com estabilidade positiva

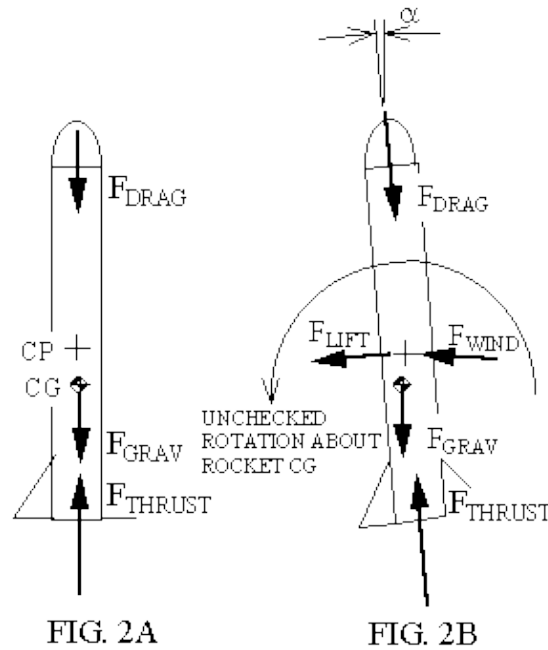


STABLE ROCKET -- CP AFT OF CG

Fonte: Nakka^[2]

Na Figura 3.16, o caso de foguete com estabilidade negativa está exemplificado. Novamente, tem-se em 2A o foguete em condição não-perturbada, mas com uma diferença crucial: o CG está abaixo do CP. Em 2B, a rajada de vento lateral ocasiona o aumento do ângulo de ataque α , que, denovo, gera uma força de sustentação. Entretanto, neste caso, a disposição dos pontos de aplicação de força aerodinâmica (CP) e rotação (CG) faz com que ambas as forças estejam no mesmo sentido. Assim, a rotação causada pela perturbação não é corrigida e, na verdade, é ainda amplificada pela força de sustentação favorável. O foguete tende a virar totalmente, e com a atuação do empuxo, acaba espiralando fora de controle.

Figura 3.16 – Foguete com estabilidade negativa



UNSTABLE ROCKET -- CP AHEAD OF CG

Fonte: Nakka^[2]

É evidente que o posicionamento adequado do centro de pressão e do centro de gravidade é imprescindível no projeto de foguetes estáveis. As seções seguintes apresentam definições formais breves e métodos para determinar a localização dos pontos.

3.2.3 Centro de gravidade (CG)

O centro de gravidade é definido como o ponto no qual a força peso de um corpo está concentrada. Em um campo gravitacional uniforme, este ponto é idêntico ao ponto de centro de massa. Assumindo que um foguete seja composto de vários componentes k , a posição em x do centro de gravidade é igual a:

$$x_{CG} = \frac{1}{M_T} \sum_{k=1}^N x_k M_k \quad (3.29)$$

em que M_T é a massa total dos componentes, x_k é o centro de massa de um componente em relação a uma linha de referência qualquer (a mesma de x_{CG}) e M_k é a massa de um componente. A equação 3.29 nos permite obter de forma simplificada o centro de gravidade de um foguete tendo conhecimento da localização dos centros de massa dos seus componentes e suas massas individuais. Como a maior parte dos componentes é simétrica, possui distribuição de massa uniforme e é projetada em softwares de desenho mecânico, a obtenção da localização do centro de massa é trivial. De forma generalizada, o centro de gravidade de um objeto imerso num campo gravitacional não-uniforme, com distribuição de massa não-uniforme é dado por^[12]:

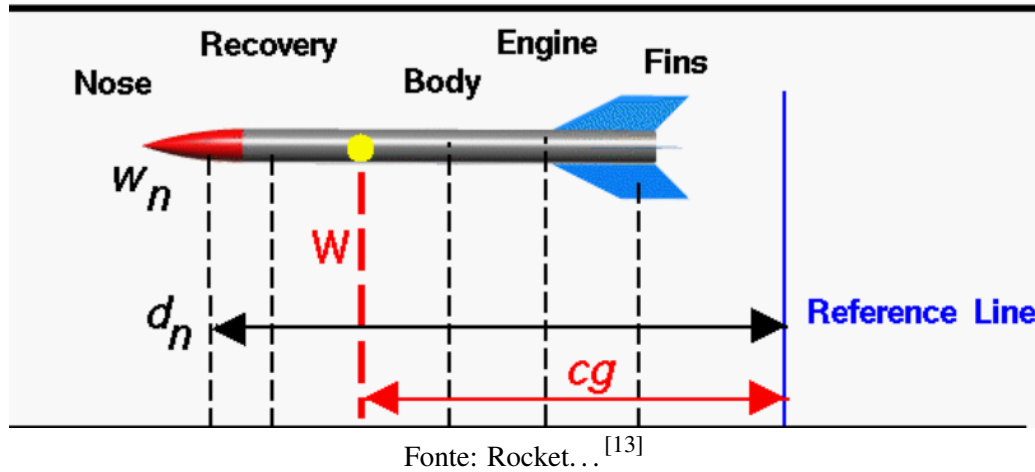
$$x_{CG} = \frac{\int \int \int x \cdot g \cdot \rho \, dx \, dy \, dz}{M_T} \quad (3.30)$$

com $g(x, y, z)$ e $\rho(x, y, z)$.

A Figura 3.17 mostra um foguete com as posições do centro de gravidade e massas individuais dos seus principais componentes. Assim, adotando subscritos n, r, b, e, f para os componentes *nose*, *recovery*, *body*, *engine*, *fins*, respectivamente:

$$x_{CG} = \frac{d_n W_n + d_r W_r + d_b W_b + d_e W_e + d_f W_f}{W_n + W_r + W_b + W_e + W_f} \quad (3.31)$$

Figura 3.17 – Exemplo para obtenção da localização do CG



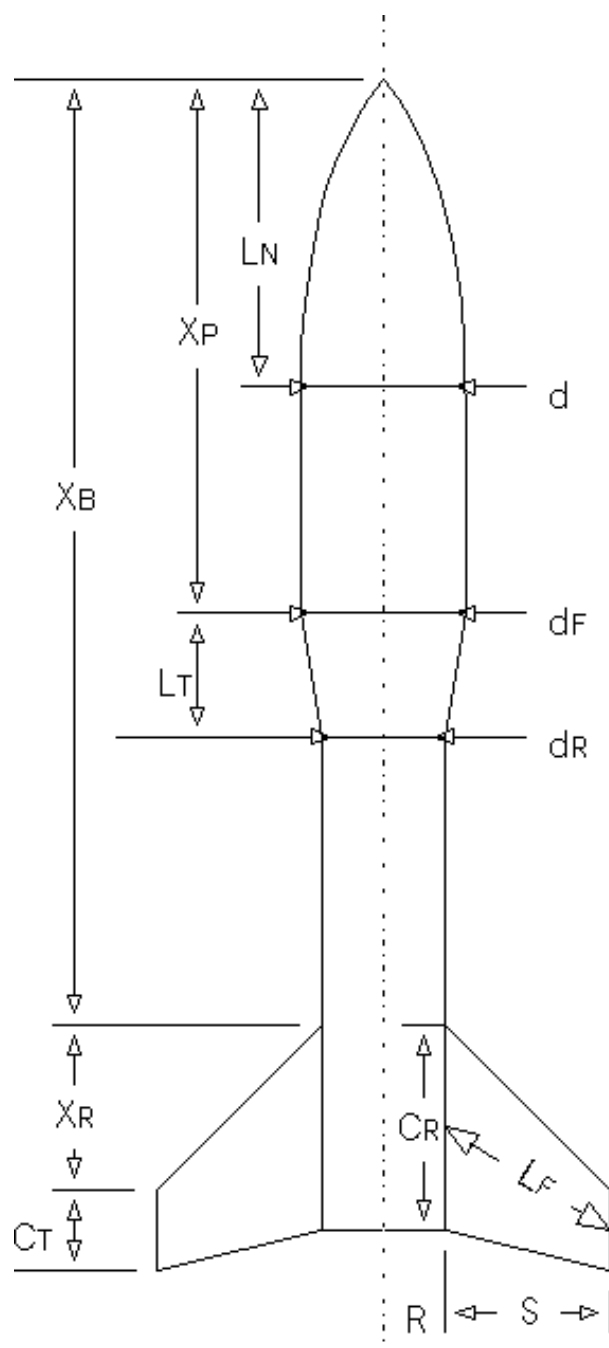
Duas observações pertinentes devem ser feitas quanto ao CG: uma delas é que x_{CG} será dado em relação à linha de referência escolhida - tipicamente na coifa do foguete. A segunda é que, durante a queima de propelente, a massa do componente de motor será reduzida, fazendo com que o CG caminhe para cima no foguete, aumentando a estabilidade.

3.2.4 Centro de pressão (CP)

O centro de pressão é definido como o ponto no corpo no qual a força aerodinâmica resultante atua. A obtenção teórica da sua localização é muito mais desafiadora que a do centro de gravidade, já que possui relação direta com a distribuição de pressão em torno do foguete^[13]. Além disso, essa distribuição se altera com o aumento do ângulo de ataque, fazendo com que o CP também varie. Felizmente, uma técnica simplificada que fornece com acurácia a localização do centro de pressão em foguetes subsônicos foi formalizada em 1966 por James S. Barrowman^{[11][14]}, desde que o ângulo de ataque seja nulo.

O procedimento para determinação do centro de pressão envolve separar o foguete em três tipos principais de componentes: coifa, transições cônicas (partes com variações no diâmetro da superfície imersa no escoamento) e aletas; seus subscritos são, respectivamente, n, t, f . Para cada um desses componentes, serão calculados os termos de distância relativa do centro de pressão ($\overline{X}_N, \overline{X}_T, \overline{X}_F$) e os coeficientes de força normal ($(C_N)_N, (C_N)_T, (C_N)_F$), que darão a posição do centro de pressão do foguete em relação à uma linha de referência escolhida^[15]. A Figura 3.18 mostra todas as distâncias relativas necessárias para o cálculo do centro de pressão em um foguete qualquer.

Figura 3.18 – Distâncias relativas do método de Barrowman



Fonte: Barrowman...^[14]

Para o cálculo dos termos da coifa, tem-se um valor constante para o coeficiente de força normal, independentemente do formato da coifa: $(C_N)_N = 2^{[15]}$. Já a distância relativa do centro de pressão da coifa, $\overline{X}_N$, depende unicamente de sua geometria. As geometrias tipicamente utilizadas em coifas de foguetes estão listadas a seguir na tabela 2 com seus valores de $\overline{X}_N^{[16]}$.

Tabela 2 – Distâncias relativas dos centros de pressão para geometrias típicas de coifas

Formato da coifa	$\overline{X}_N$
Cônico	$L/3$
Parabólico (<i>Power-series</i>)	$L/2$
Ogival	$0.534L$, para $L > 6R$
Elíptico	$3L/2$
<i>LV-HAACK</i>	$0.437L$
<i>von-Kármán</i>	$0.500L$

Fonte: Sr^[16]

Em que L é o comprimento ou altura da coifa do foguete e R é o raio da base da coifa. Uma observação importante há de ser feita: as distâncias relativas da tabela tomam a linha de referência como sendo a base da coifa, diferentemente da Figura 3.18, que utiliza a ponta da coifa como referência. Assim, a distância com a linha de referência na ponta da coifa será dada por $L - \overline{X}_N$.

Para os termos de transição cônica, as expressões 3.32 e 3.33 fornecem o coeficiente de força normal e a distância relativa:

$$(C_N)_T = 2 \left[\left(\frac{d_R}{d} \right)^2 - \left(\frac{d_F}{d} \right)^2 \right] \quad (3.32)$$

$$\overline{X}_T = X_P + \frac{L_T}{3} \left[1 + \frac{1 - \frac{d_F}{d_R}}{1 - \left(\frac{d_F}{d_R} \right)^2} \right] \quad (3.33)$$

Em que d_R, d_F, X_P, L_T, d são distâncias ou comprimentos característicos, denotados na Figura 3.18.

Para os termos das aletas, as expressões 3.34 e 3.35 fornecem o coeficiente de força normal e a distância relativa:

$$(C_N)_F = \left[1 + \frac{R}{R+S} \right] \left[\frac{4N \left(\frac{S}{d} \right)^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2L_F}{C_R + C_T} \right)^2}} \right] \quad (3.34)$$

$$\overline{X}_F = X_B + \frac{X_R}{3} \frac{(C_R + 2C_T)}{(C_R + C_T)} + \frac{1}{6} \left[(C_R + C_T) - \frac{C_R C_T}{C_R + C_T} \right] \quad (3.35)$$

Em que $R, S, L_F, C_R, C_T, X_B, X_R$ são distâncias ou comprimentos característicos, também denotados na Figura 3.18. N é o número total de aletas instaladas. Finalmente, calculados estes termos, a

distância do centro de pressão em relação à linha de referência é dada pela expressão 3.36.

$$x_{CP} = \bar{X} = \frac{(C_N)_N X_N + (C_N)_T X_T + (C_N)_F X_F}{(C_N)_N + (C_N)_T + (C_N)_F} \quad (3.36)$$

Outras duas observações devem ser feitas quanto ao x_{CP} : em primeiro lugar, deve-se dar atenção à linha de referência utilizada nos cálculos dos termos dos componentes; assim como x_{CG} , a utilização da linha de referência incorreta irá acarretar no posicionamento incorreto do CG e CP, levando o foguete à instabilidade. Além disso, enfatiza-se que as expressões do chamado “método Barrowman” são válidas apenas para ângulo de ataque nulo. Com o aumento do ângulo de ataque, o centro de pressão se desloca para cima no foguete, o que diminui sua estabilidade. Assim, o caso em que $\alpha = 0$ denota a condição de projeto menos conservadora possível^[15].

3.2.5 Margem estática

Com a ajuda das seções anteriores, é possível calcular com acurácia satisfatória os pontos relativos ao centro de gravidade e centro de pressão de um foguete em ângulo ataque nulo. No entanto, até o momento sabe-se apenas que o centro de pressão deve ficar abaixo do centro de gravidade, tomando o foguete com a coifa para cima como referência. A distância que esses pontos devem possuir entre si não foi discutida; historicamente, um parâmetro denominado “margem estática” é utilizado para determinar intervalos aceitáveis de distância entre o CG e o CP. Um padrão não oficial entre foguete-modelistas é utilizar de 1.5 a 2 calibres de distância (calibre sendo o maior diâmetro do foguete)^[2].

A distância entre estes dois pontos de interesse tem relação direta com o momento corretivo gerado pelas aletas: um foguete pode possuir estabilidade positiva mas, devido à pequena distância entre CG e CP, a correção das perturbações pode se mostrar insuficiente. Similarmente, um foguete com margem de estabilidade considerada suficiente em condições normais pode se tornar totalmente instável sob condições de vento lateral: o aumento do ângulo de ataque fará com que o CP se desloque para cima do CG. O intervalo de 1.5 a 2 calibres para a margem estática dará resultados positivos para a grande maioria dos casos, mas apenas uma análise ou simulação dinâmica levando em conta todos os graus de liberdade aplicáveis fornecerá o comportamento real do foguete em voo^[17]. Para o foguete desenvolvido, uma margem estática entre 1.5 a 2 calibres será utilizada, a fim de simplificar as simulações de trajetória.

3.3 AERODINÂMICA

A aerodinâmica estuda, principalmente, a influência do escoamento em corpos imersos por ele - como o efeito do ar atmosférico que trafega ao redor de uma asa de aeronave. No âmbito da ciência de foguetes, o conceito fundamental a ser estudado é o arrasto, sentido por foguetes ao percorrerem as diferentes camadas da atmosfera. Para um foguete experimental a preocupação é a mesma - ou até maior, visto que foguetes comerciais passam apenas uma pequena parcela da sua trajetória sob efeito considerável do arrasto. O arrasto, sendo uma força contrária à direção de movimento, influencia profundamente na capacidade de atender uma missão, já que demanda maior empuxo do foguete e, conseqüentemente, mais propelente e/ou capacidade propulsiva para um mesmo alcance ou carga-paga. Essa seção irá discorrer sobre métodos de obtenção do coeficiente de arrasto e parâmetros que o influenciam (com foco no regime subsônico, dado o apogeu requisitado na seção 4.1).

Os métodos apresentados utilizam dados empíricos coletados em túneis de vento aliados a dados teóricos para estimar os parâmetros aerodinâmicos. Esta não é a única técnica disponível ao projetista: se métodos mais acurados estiverem disponíveis no cenário e aplicação do leitor, sugere-se que as modelagens sejam feitas de acordo com tais.

3.3.1 Modelagem da força de arrasto e os coeficientes de arrasto

A força de arrasto é tradicionalmente representada pela expressão 3.37:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \quad (3.37)$$

Em que D é a força de arrasto, ρ é a densidade do escoamento, V é a velocidade com que o escoamento percorre o objeto, S é a área relativa e C_D é o coeficiente de arrasto. Em uma simulação, todos os parâmetros do lado direito da equação são conhecidos, com exceção de C_D ; o maior desafio para o cálculo da força de arrasto é, portanto, determinar este coeficiente.

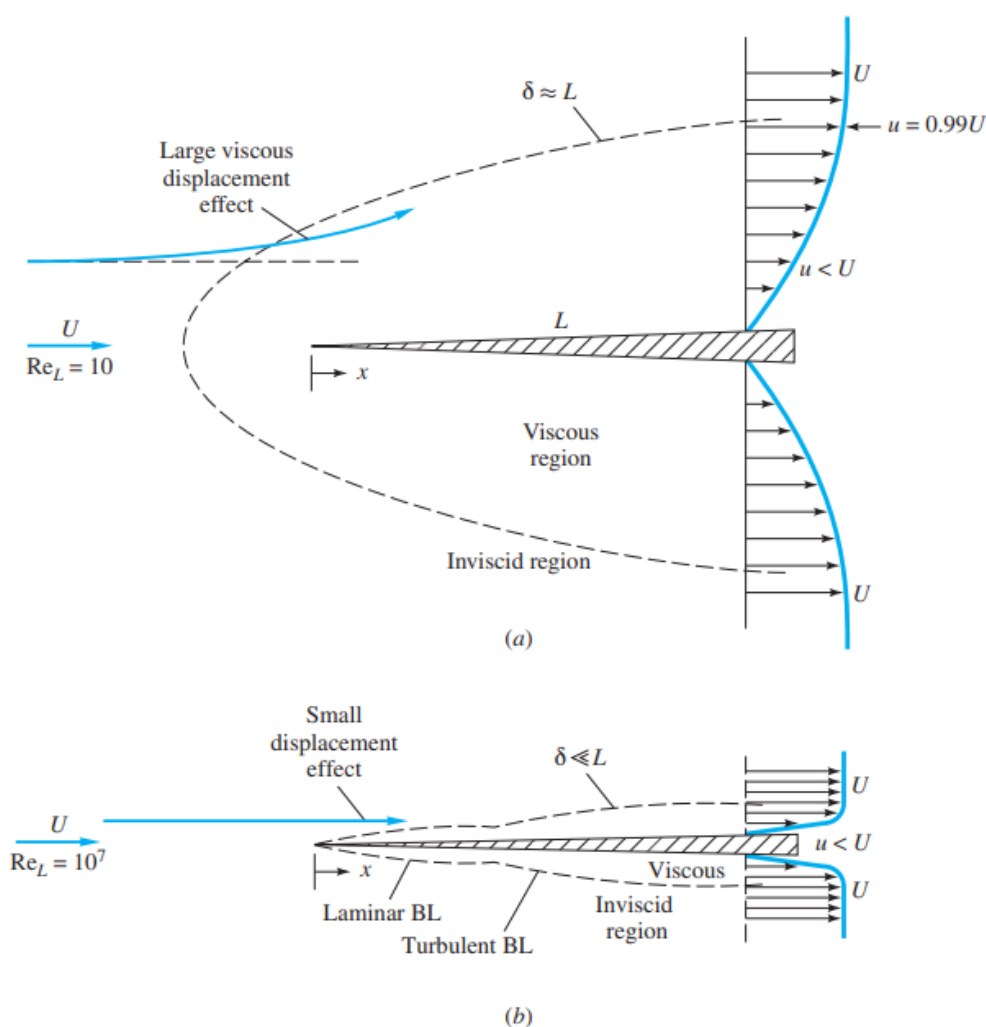
Algumas considerações podem ser feitas: em primeiro lugar, destaca-se que a velocidade está elevada ao quadrado, sendo portanto o termo de maior efeito no arrasto. O coeficiente de arrasto é afetado pela geometria do objeto, pelo ângulo de ataque, pelo acabamento das suas superfícies, pelo regime do escoamento (laminar ou turbulento) e pelo número de Mach^[17], e a densidade é uma função da altitude.

A técnica abordada para o projeto consiste em dividir o coeficiente de arrasto em quatro tipos (arrasto de fricção, arrasto de pressão, arrasto de base e arrasto parasita), calculá-los separadamente e então encontrar a contribuição total dimensionada; quando presente nas equações, o símbolo subscrito “●” indica que o coeficiente em questão ainda não foi dimensionado em relação à área de referência correta. Na seção 3.3.11, todos os coeficientes não dimensionados serão dimensionados na sua forma final para utilização na expressão 3.37. O arrasto de fricção é o único coeficiente que já é calculado na sua forma dimensionada ao final da seção 3.3.3. Finalmente, a força de arrasto instantânea é utilizada nos cálculos de trajetória. Essa é a técnica empregada pelo software OpenRocket, validada por inúmeros lançamentos^[17].

3.3.2 Camada-limite e tipos de escoamento

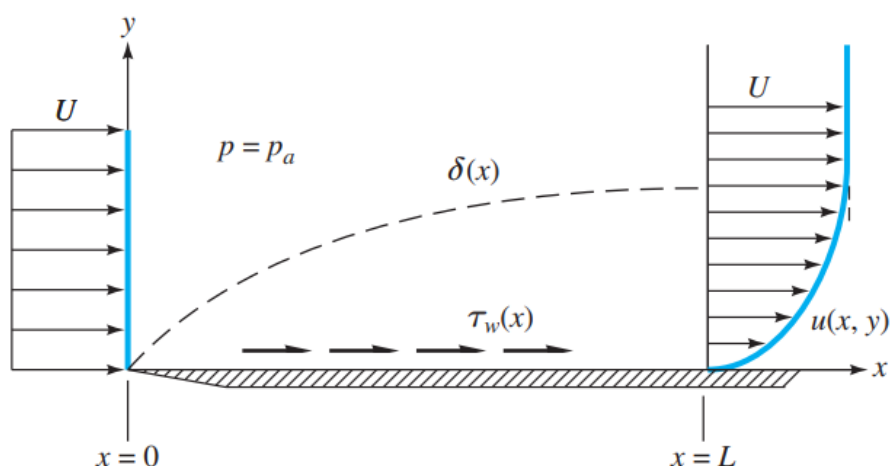
Na parte frontal de um corpo de contorno suave (*streamlined body*) o fluido percorre suavemente sua superfície em “camadas” que diferem quanto à velocidade do escoamento. A camada mais próxima da superfície deste corpo “gruda” no objeto, uma condição de contorno que garante velocidade nula naquela camada: a condição de não-deslizamento^[17]. À medida que se distancia do objeto, cada camada aumenta de velocidade gradualmente, até alcançar a velocidade do escoamento livre. Esse tipo de escoamento é chamado de escoamento laminar, ao qual é associado uma camada-limite laminar^[17]. A espessura desta camada-limite aumenta com a distância percorrida pelo fluido ao longo da parede, até um ponto no qual a transição para o regime turbulento ocorre. No regime turbulento, a espessura da camada-limite aumenta consideravelmente e nela estão presentes redemoinhos ou turbilhões, que aumentam o arrasto de fricção^[17]. O ponto de transição existirá no corpo imerso caso o número de Reynolds, que relaciona as forças inerciais com as forças viscosas do fluido, seja alto o suficiente; do contrário, o corpo inteiro estará imerso em uma camada-limite laminar^[18]. A Figura 3.19 ilustra os dois comportamentos possíveis, e a Figura 3.20 mostra o crescimento da camada-limite ao longo de uma parede.

Figura 3.19 – Formação da camada-limite em regime de a) Reynolds baixo e b) Reynolds alto



Fonte: White^[18]

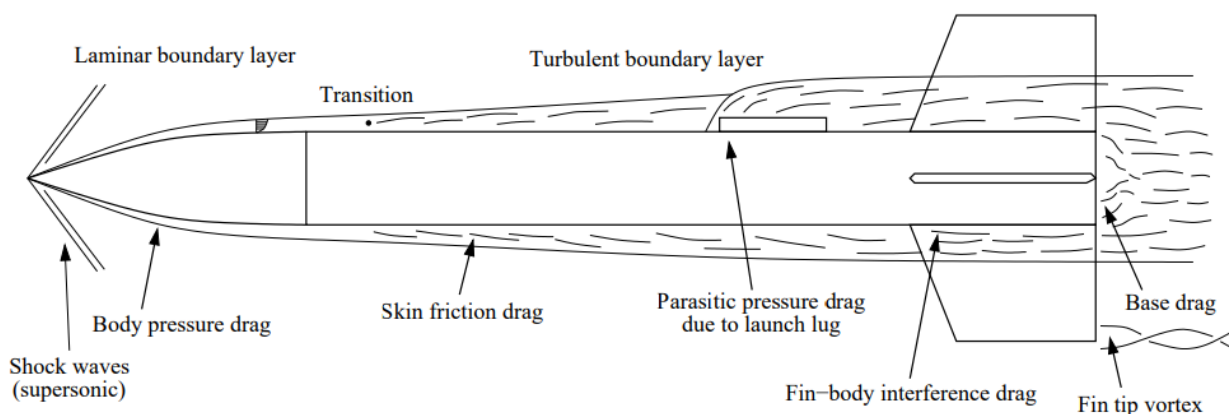
Figura 3.20 – Crescimento da camada-limite (fora de escala)

Fonte: White^[18]

Para simplificar a obtenção do coeficiente de arrasto, assume-se neste trabalho que todo o foguete está no regime turbulento: em uma velocidade de 100 m/s, a transição ocorre em aproximadamente 7 cm da ponta da coifa, e em uma velocidade de 60 m/s qualquer protuberância ou imperfeição maior que 0.05 mm irá causar a transição para o regime turbulento^[17], tornando o efeito do segmento laminar desprezível^[17] por cobrir apenas uma pequena parte da superfície total do foguete. Em sua tese, o método de Barrowman prevê cálculos para os dois regimes^[19], mas quando implementados, a existência da camada laminar alterou o apogeu em menos de 5% em todos os testes^[17].

A Figura 3.21 ilustra a transição da camada-limite em um foguete e apresenta os diversos tipos de arrasto que ocorrem em suas imediações - os quais serão explicados na subseção seguinte.

Figura 3.21 – Tipos de arrasto e transição da camada-limite em um foguete

Fonte: Niskanen^[17]

3.3.3 Arrasto de fricção

O arrasto de fricção é a mais notável fonte de arrasto em um foguete experimental no regime subsônico, seguido do arrasto de pressão. É causado pela fricção da superfície do foguete com o escoamento viscoso. O coeficiente de arrasto de fricção depende do número de Reynolds do escoamento, da rugosidade superficial do objeto e do número de Mach, e pode ser generalizado como:

$$C_f = \frac{D_{friction}}{\frac{1}{2}\rho v_0^2 A_{wet}} \quad (3.38)$$

Em que A_{wet} é a área superficial do foguete exposta ao escoamento, v_0 é a velocidade do escoamento livre, ρ é a densidade do escoamento e $D_{friction}$ é a força de arrasto de fricção. Existem várias formas de estimar o coeficiente de arrasto de fricção, a depender do número de Reynolds do escoamento.

Para um escoamento totalmente turbulento mas com uma subcamada laminar que cobre a rugosidade superficial, C_f não é função da rugosidade, apenas do número de Reynolds^[17]:

$$C_f = \frac{1}{(1.50 \ln R - 5.6)^2} \quad (3.39)$$

Esta equação é válida até um número de Reynolds crítico, no qual a rugosidade superficial passa a ter influência sobre o arrasto de fricção. O número de Reynolds crítico é dado por^[17]:

$$R_{crit} = 51 \left(\frac{R_s}{L} \right)^{-1.039} \quad (3.40)$$

Em que R_{crit} é o número de Reynolds máximo para aplicação da equação 3.39, L é o comprimento total do foguete e R_s é a altura média da rugosidade superficial. A tabela 3 relaciona alguns materiais e acabamentos com suas alturas médias estimadas.

Tabela 3 – Tamanho médio aproximado da rugosidade superficial

Tipo de superfície	Altura aproximada [μm]
Superfícies espelhadas	0
Vidro convencional	0.1
Superfícies acabadas e polidas	0.5
Chapas de metal aeronáutico	2
Pintura perfeita com spray	5
Placas de madeira aplainada	15
Pintura de aeronaves comerciais	20
Chapeamento de aço	50
Cimento liso	50
Revestimento em asfalto	100
Superfície metálica galvanizada	150
Pintura incorreta em aeronave	200
Ferro fundido, sem tratamento	250
Placas de madeira, sem tratamento	500
Concreto convencional	1000

Fonte: Hoerner^[20]

Para valores de Reynolds acima de Re_{crit} , C_f pode ser calculado como uma função apenas da altura média da rugosidade superficial R_s e do comprimento do foguete. Diz-se, nesse caso, que o arrasto é limitado pela rugosidade (*roughness-limited*)^[17]:

$$C_f = 0.032 \left(\frac{R_s}{L} \right)^{0.2} \quad (3.41)$$

Para valores de Reynolds muito pequenos ($Re < 10^4$), considera-se que o coeficiente de arrasto de fricção é constante e igual ao valor do coeficiente calculado para $Re = 10^4$ na equação 3.39. De forma resumida, o coeficiente de fricção de arrasto é dado por:

$$C_f = \begin{cases} 1.482 \cdot 10^{-2}, & \text{se } Re < 10^4 \\ \text{Eq. 3.39}, & \text{se } 10^4 < Re < Re_{crit} \\ \text{Eq. 3.41}, & \text{se } Re > Re_{crit} \end{cases} \quad (3.42)$$

Após o cálculo inicial de C_f , é necessário aplicar os fatores de correção devido à compressibilidade no regime subsônico para obtenção do coeficiente corrigido, C_{fc} :

$$C_{fc} = C_f(1 - 0.1M^2) \quad (3.43)$$

Em que M é o número de Mach do escoamento - a razão entre a velocidade do escoamento livre v_0 e a velocidade local do som a .

Finalmente, é preciso dimensionar corretamente o coeficiente em relação às áreas de referência do foguete. O coeficiente de arrasto de fricção final será dado por:

$$(C_D)_{friction} = C_{fc} \frac{\left(1 + \frac{1}{2f_B}\right) \cdot A_{wet,body} + \left(1 + \frac{2t}{\bar{c}}\right) \cdot A_{wet,fins}}{A_{ref}} \quad (3.44)$$

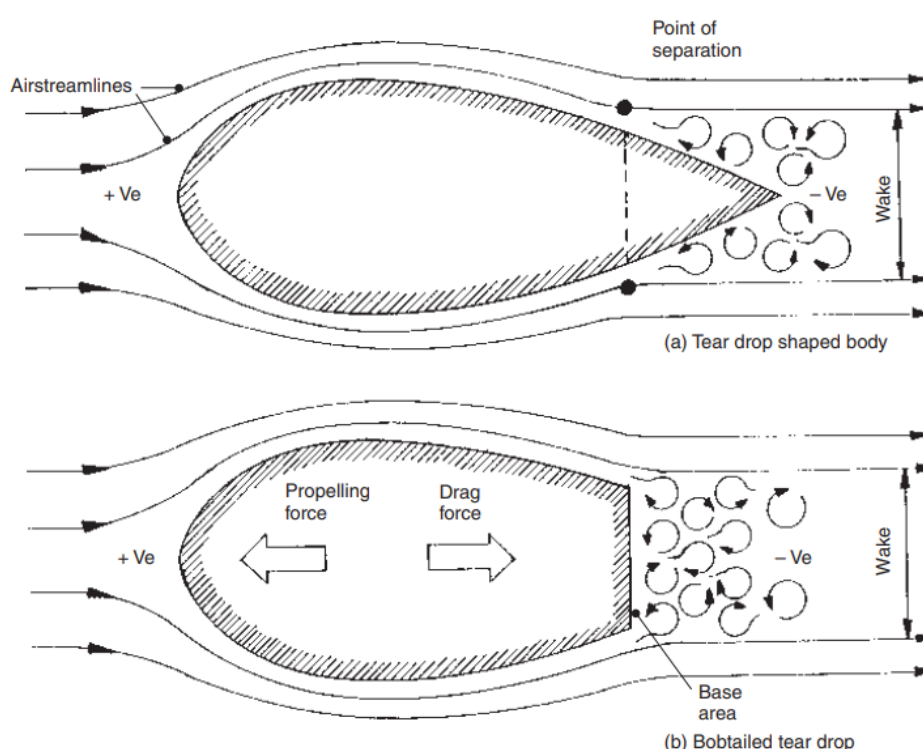
Em que f_B é a “proporção de finura” (*fineness ratio*) do foguete (comprimento total do foguete dividido pelo seu maior raio), $A_{wet,body}$ é a área molhada do corpo do foguete, $A_{wet,fins}$ é a área molhada das aletas (considerando os dois lados) e A_{ref} é a área de referência, adotada como a maior área de seção transversal do foguete.

3.3.4 Arrasto de base

O arrasto de base é causado pela dificuldade sentida pelo escoamento ao tentar contornar uma região de baixa pressão - tipicamente gerada na parte inferior do foguete, ou em regiões cujo diâmetro do componente reduza de forma abrupta. A Figura 3.22 ilustra esse efeito em um aerofólio cujo bordo de fuga foi cortado. O arrasto de base pode ser modelado de forma empírica^[21], a depender do número de Mach do escoamento, como mostra a equação 3.45:

$$(C_{D\bullet})_{base} = \begin{cases} 0.12 + 0.13M^2, & \text{se } M < 1 \\ 0.25/M & \text{se } M > 1 \end{cases} \quad (3.45)$$

Figura 3.22 – Arrasto de base causado pelo fim abrupto de aerofólio



Fonte: Heisler^[22]

O arrasto de base na parte inferior do foguete pode deixar de existir ou ter seu efeito reduzido durante a operação do motor devido à exaustão de gases naquela região. Uma forma simplificada de tratar este caso é subtrair^[21] a área de saída do motor da área de referência quando o dimensionamento do arrasto de base for feito. Se a área do motor for próxima à área de referência da parte inferior do foguete, considera-se que nenhum arrasto de base é gerado; do contrário, se a área de saída do motor for desprezível em relação à área da seção transversal inferior, considera-se que o efeito dos gases é negligenciável e, portanto, há arrasto de base em sua totalidade.

O efeito do arrasto de base na parte inferior do foguete é reduzido quando há uma transição *boattail*, devido à curva mais suave que o escoamento deve realizar e também devido à área de referência reduzida. Nesses casos, calcula-se o arrasto de base normalmente, utilizando a área final da transição *boattail* para dimensionar o coeficiente.

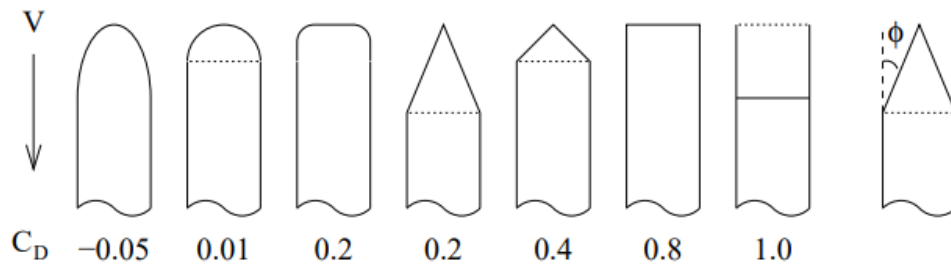
3.3.5 Arrasto de pressão - mecanismo físico

O arrasto de pressão é causado pela dificuldade do escoamento em contornar um objeto. Em objetos com contornos grosseiros (*blunt bodies*), o arrasto de pressão possui a maior contribuição para o arrasto total. Nesta seção serão apresentados métodos semi-empíricos para estimar o coeficiente de arrasto de pressão da coifa, das transições de corpo e das aletas.

3.3.6 Arrasto de pressão em coifas

No começo do regime subsônico, a contribuição do arrasto de pressão em coifas é substancialmente menor que a contribuição do arrasto de fricção. Em alguns casos, o coeficiente é até mesmo negativo, produzindo uma pequena diminuição de arrasto. A Figura 3.23 mostra uma série de coifas e seus respectivos coeficientes de arrasto de pressão.

Figura 3.23 – Coeficientes de arrasto de pressão para algumas geometrias de coifa em regime subsônico



Fonte: Niskanen^[17]

Em $M = 0$, o coeficiente de arrasto de pressão é aproximadamente proporcional ao quadrado do seno do ângulo de junção ϕ , indicado na parte direita da Figura 3.23 como o ângulo entre a superfície reta do tubo com a superfície da coifa^[23]:

$$(C_{D\bullet, M=0})_p = 0.8 \cdot \sin^2 \phi \quad (3.46)$$

Isso significa que, para qualquer coifa com uma transição suave para o corpo do foguete, o arrasto de pressão será nulo^[17] no começo do regime subsônico. Para mapear o regime subsônico até o regime transônico, um interpolador que se assemelha ao método de Prandtl-Glauert é utilizado^[17]:

$$(C_{D\bullet})_p = aM^b + (C_{D\bullet, M=0})_p \quad (3.47)$$

Em que $(C_{D\bullet})_p$ é o coeficiente de arrasto de pressão válido para todo regime subsônico, $(C_{D\bullet, M=0})_p$ é o coeficiente de pressão em $M = 0$ e a e b são constantes do interpolador; para toda coifa cujo coeficiente de arrasto de pressão no começo do regime transônico é zero, tem-se $(C_{D\bullet})_p = (C_{D\bullet, M=0})_p$.

A modelagem do regime transônico e supersônico depende da geometria da coifa; em geral, três interpolações são necessárias para a obtenção do coeficiente:

1. Interpolação de parâmetro geométrico (n): caso o formato de coifa permita variação de um parâmetro geométrico (como a coifa de série de potência, mapeada por $y = R(x/L)^n$, em que o

parâmetro n pode variar de 0 a 1), este deve ser obtido através da interpolação de coifas cujo intervalo dos parâmetros inclua n e cujos dados empíricos estão disponíveis;

2. Interpolação de proporção de finura de coifa (f_N): os dados empíricos utilizados no cálculo do coeficiente de arrasto de pressão estão disponíveis apenas para $f_N = 3$, logo, para um valor de projeto diferente, outra interpolação será necessária;
3. Interpolação no número de Mach (M): interpolação final, dada pela equação 3.47.

Como exemplo, a modelagem completa do arrasto de pressão da coifa de formato elipsoidal será feita. Como seu coeficiente de arrasto de pressão não é nulo no começo do regime transônico, há de se realizar as interpolações. Outras modelagens são mais simples e podem ser realizadas seguindo as expressões de Niskanen^[17], nos apêndices A e B, e acoplando-as ao interpolador da expressão 3.47.

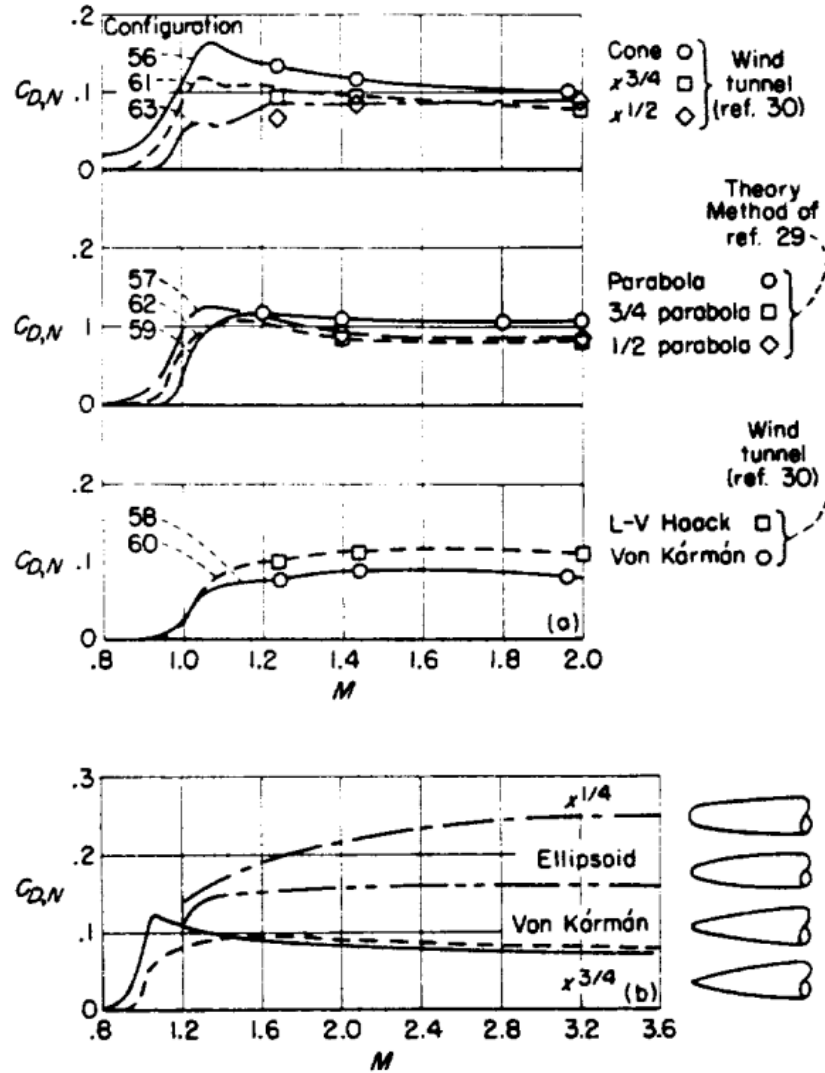
Modelagem de arrasto de pressão para coifa em formato elipsoidal

A coifa elipsoidal não possui parâmetros geométricos para variação^[16], portanto, a primeira interpolação não é necessária.

Para montar o segundo interpolador, é necessário determinar C_3 - o coeficiente de arrasto de pressão para uma proporção de finura da coifa (*nose fineness ratio*, f_N) igual a 3^[17] e C_0 , que é o mesmo que o coeficiente de arrasto de pressão de um cilindro com extremidade reta.

- C_3 : encontrado a partir de dados empíricos dos gráficos da Figura 3.24. Os pontos da curva podem ser extraídos por uma ferramenta de extração de pontos em imagens, como o *WebPlotDigitizer*;
- C_0 : uma coifa com f_N nula é, essencialmente, um cilindro com extremidade reta. No regime subsônico, é dado pela equação 3.48^[20]. Essa expressão também é válida para o cálculo do arrasto de base, já que ambos dependem da pressão de estagnação das áreas perpendiculares ao escoamento^[17].

Figura 3.24 – Coeficientes de arrasto de pressão para coifas em regime transônico e supersônico, com $f_N = 3$



Fonte: Jr^[24]

$$C_0 = (C_{D\bullet})_{stag} = 0.85 \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{M^4}{40} \right) \quad (3.48)$$

Obtidos C_3 e C_0 , o coeficiente de arrasto de pressão para um valor de f_N qualquer é obtido pelo segundo interpolador, descrito na equação 3.49.

$$(C_{D\bullet})_p = C_0 \cdot \left(\frac{C_3}{C_0} \right)^{\log_4 (f_N + 1)} \quad (3.49)$$

O número de Mach do começo da região transônica será chamado de M_t . No caso da coifa elipsoidal em regime subsônico, apenas do coeficiente no começo da região transônica é necessário, que já foi obtido, e o valor da derivada neste ponto para montar o terceiro e último interpolador. A derivada é obtida seguindo os mesmos passos, porém adicionando um valor infinitesimal ao valor de M_t , interpolando linearmente com o segundo ponto obtido da extração de dados e obtendo o valor do coeficiente neste ponto. A equação 3.50 realiza esse procedimento para um incremento arbitrário:

$$(C_{D\bullet,M_t})'_p = \frac{(C_{D\bullet,M_t+0.001})_p}{0.001} \quad (3.50)$$

Finalmente, as constantes a e b do último interpolador são encontradas derivando a equação 3.47:

$$(C_{D\bullet})'_p = abM^{b-1} \quad (3.51)$$

O valor da derivada é conhecido em M_t , logo, substituindo as expressões, tem-se as seguintes equações para a obtenção das constantes:

$$b = \frac{M_t \cdot (C_{D\bullet,M_t})'_p}{(C_{D\bullet,M_t})_p - (C_{D\bullet,M=0})_p} \quad (3.52)$$

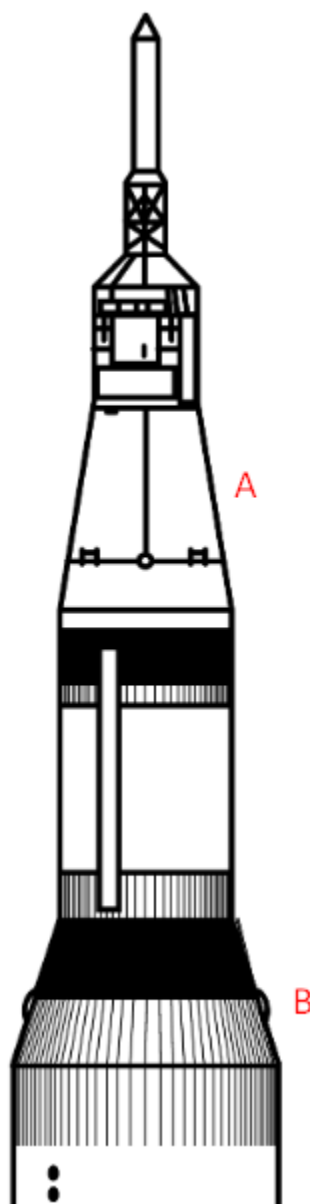
$$a = \frac{(C_{D\bullet,M_t})_p - (C_{D\bullet,M=0})_p}{M_t^b} \quad (3.53)$$

Em que M_t é o número de Mach que denota o começo da região transônica (primeiro ponto em que os dados empíricos estão disponíveis), $(C_{D\bullet,M_t})_p$ e $(C_{D\bullet,M_t})'_p$ são, respectivamente, o valor do coeficiente de arrasto de pressão em M_t e sua derivada, e $(C_{D\bullet,M=0})_p$ é o valor do coeficiente em $M = 0$, dado pela equação 3.46. O interpolador final é encontrado utilizando os valores de a e b na equação 3.47, e dá os valores do coeficiente de arrasto para todo regime subsônico.

3.3.7 Arrasto de pressão em transições *shoulders*

Os segmentos chamados de “*shoulders*” são transições nas quais o diâmetro do corpo do foguete aumenta. Nestes casos, o escoamento encontra uma superfície que deve ser contornada de forma similar à coifa. Estas transições são utilizadas quando é necessário comportar sistemas maiores, como o acoplamento de um foguete de dois estágios ou um motor maior. Na Figura 3.25, duas transições (A e B) do foguete *Saturn V* estão ilustradas.

Figura 3.25 – Transições de tipo *shoulder* do Saturn V

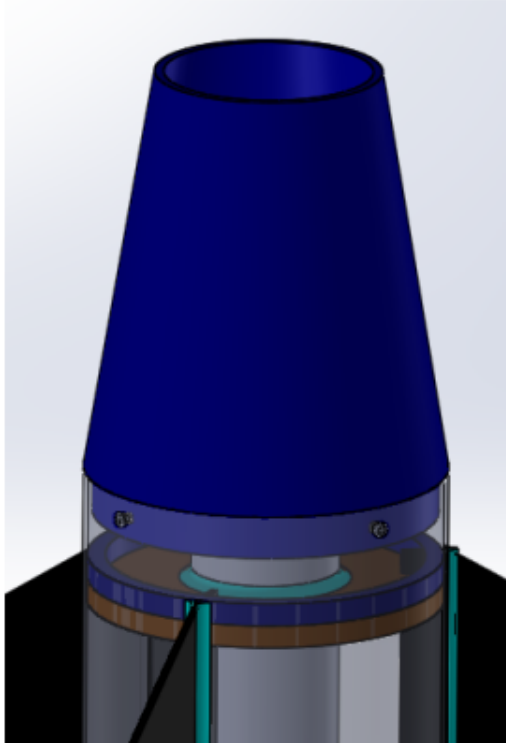


Fonte: Saturn... [25]

No regime subsônico, essas transições podem ser modeladas da mesma forma que as coifas, mudando apenas a área de referência utilizada nos cálculos: neste caso, a área de referência será em relação à área frontal do tronco de cilindro formado pelo diâmetro antes e depois da transição. O efeito da transição não-suave de uma superfície para a outra é ignorado, já que a variação de pressão é positiva e não há descolamento do escoamento^[17].

3.3.8 Arrasto de pressão em transições *boattail*

Os segmentos chamados de “*boattails*” são transições nas quais o diâmetro do corpo do foguete diminui. São utilizadas, principalmente, na parte traseira/inferior do foguete para diminuição do arrasto de base, discutido na seção 3.3.4.



(a) Vista em *software* CAD



(b) Acoplada ao foguete

Figura 3.26 – Transições *boattail*

Fonte: Calcara et al.^[26]

A transição *boattail* de comprimento nulo corresponde a um fim abrupto de uma superfície - o que está relacionado ao arrasto de base causado pela região de baixa pressão. Por outro lado, uma transição gradual causa uma variação de pressão suave, gerando nenhum arrasto de pressão^[17]. A equação 3.54 mostra a modelagem deste comportamento para o regime subsônico.

$$(C_{D\bullet})_p = (C_{D\bullet})_{base} \cdot \begin{cases} 1, & \text{se } \gamma < 1 \\ (3 - \gamma)/2, & \text{se } 1 < \gamma < 3 \\ 0, & \text{se } \gamma > 3 \end{cases} \quad (3.54)$$

O parâmetro de finura γ é definido como o comprimento da transição dividido pela diferença entre o diâmetro das suas duas seções, $\gamma = l/(d_1 - d_2)$.

Nos dois extremos, se a proporção γ for alta o suficiente, considera-se que não há arrasto de pressão na transição. Se for muito pequena, considera-se que o arrasto de pressão é equivalente ao arrasto de base, apenas dimensionado para a área de referência menor. O arrasto de base da equação 3.54 é calculado através da expressão 3.45, e a área de referência da transição é a área frontal do tronco de cilindro.

3.3.9 Arrasto de pressão em aletas

O arrasto de pressão em aletas é altamente dependente do perfil de aleta utilizado^[17]. Três tipos serão considerados e analisados:

1. Aletas de perfil retangular (3.27a);
2. Aletas com bordo de ataque (*leading edge, LE*) e bordo de fuga (*trailing edge, TE*), arredondados (3.27b);
3. Aletas com perfil de aerofólio (3.27c).

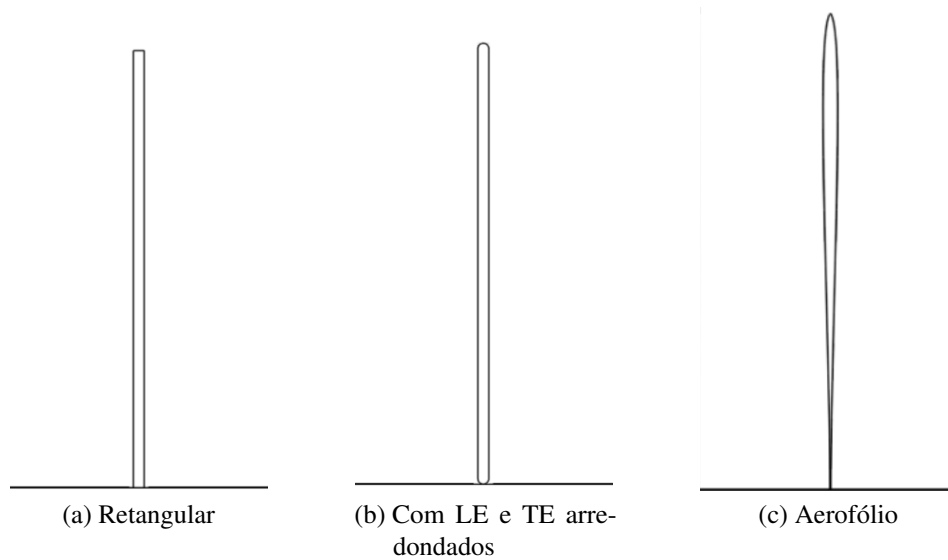


Figura 3.27 – Perfis de aletas
Fonte: elaborada pelo autor

Os coeficientes de arrasto de pressão serão calculados separadamente para o bordo de ataque (LE) e bordo de fuga (TE). O coeficiente de arrasto de pressão final para as aletas, não dimensionado, é dado pela equação 3.55.

$$(C_{D\bullet})_p = (C_{D\bullet})_{LE} + (C_{D\bullet})_{TE} \quad (3.55)$$

Para o bordo de ataque de uma aleta com perfil retangular, o arrasto de pressão será igual ao arrasto de pressão por estagnação^[17], já que o escoamento encontra uma parede de contornos grosseiros. A equação 3.48 pode ser utilizada para o regime subsônico.

O bordo de ataque de uma aleta com perfil de cantos arredondados (incluindo aqui a aleta com perfil de aerofólio) pode ser modelado como um cilindro circular sem arrasto de base^[17], através da expressão empírica proposta por Barrowman^[19] (equação 3.56).

$$(C_{D\bullet})_{LE\perp} = \begin{cases} (1 - M^2)^{-0.417} - 1, & \text{se } M < 0.9 \\ 1 - 1.785(M - 0.9), & \text{se } 0.9 < M < 1 \\ 1.214 - 0.502/M^2 + 0.1095/M^4, & \text{se } M > 1 \end{cases} \quad (3.56)$$

O subscrito $\perp$ indica o escoamento perpendicular ao bordo de ataque, que é corrigido com o ângulo de enflechamento do bordo de ataque, Γ_{LE} , definido na equação 3.57.

$$(C_{D\bullet})_{LE} = (C_{D\bullet})_{LE\perp} \cdot \cos^2 \Gamma_{LE} \quad (3.57)$$

Para o bordo de fuga do perfil retangular, considera-se que a região reta gera uma zona de pressão reduzida e, então, tem-se que o arrasto do bordo de fuga é o próprio arrasto de base.

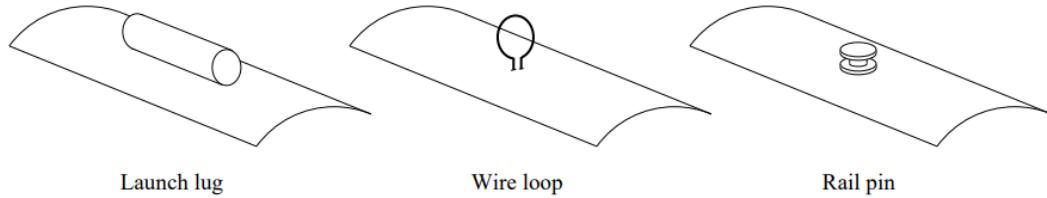
$$(C_{D\bullet})_{TE} = (C_{D\bullet})_{base} \quad (3.58)$$

Para os perfis arredondados considera-se que o arrasto do bordo de fuga é equivalente à metade do arrasto de base, e para perfis de aerofólio o arrasto de pressão do bordo de fuga é nulo^[17]. A área de referência destes coeficientes é a área frontal total das aletas.

3.3.10 Arrasto parasita

O arrasto parasita é causado por imperfeições e/ou protuberâncias no foguete^[17]. A principal fonte de arrasto parasita em um foguete-modelo ou foguete experimental é o encaixe da guia de lançamento (*launch guides*). Os três tipos mais convencionais de encaixes estão ilustrados na Figura 3.28.

Figura 3.28 – Encaixes da guia de lançamento



Fonte: Niskanen^[17]

O arrasto parasita dos encaixes é modelado considerando o caso de um cilindro sólido próximo ao corpo do foguete e o caso de um fio circular disposto perpendicularmente ao escoamento. Segundo Niskanen^[17], a equação 3.59 fornece o coeficiente não-dimensionado da guia de lançamento, e a equação 3.60 fornece a área de referência que deve ser utilizada.

$$(C_{D\bullet})_{parasitic} = \max(1.3 - l/d, 1) \cdot (C_{D\bullet})_{stag} \quad (3.59)$$

$$(A)_{parasitic} = \pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2 \cdot \max(1 - l/d, 0) \quad (3.60)$$

Em que l é o comprimento da guia de lançamento (no caso do fio circular, igual à sua espessura), d é o diâmetro externo da seção circular, e r_{ext} e r_{int} são os raios externos e internos da guia de lançamento.

3.3.11 Dimensionamento dos coeficientes de arrasto

O coeficiente de arrasto total em ângulo de ataque nulo é obtido dimensionando os coeficientes de arrasto individuais para uma área de referência comum e então somando-os. Note que o arrasto de fricção já foi dimensionado separadamente 3.44. A equação 3.61 mostra a expressão para obtenção do C_{D_0} .

$$C_{D_0} = \sum_T \frac{A_T}{A_{ref}} (C_{D\bullet})_T + C_{D_{friction}} \quad (3.61)$$

Em que o subscrito T denota algum tipo de arrasto (pressão, base ou parasita), A_T é a área de referência aplicável ao tipo de arrasto considerado e A_{ref} é a área de referência comum; em ângulo de ataque nulo, é igual à área da seção transversal do foguete.

A obtenção de C_{D_0} nos permite calcular a força de arrasto aplicada sobre o foguete, já que a densidade do escoamento, velocidade do foguete e área de referência são termos conhecidos dentro de uma simulação.

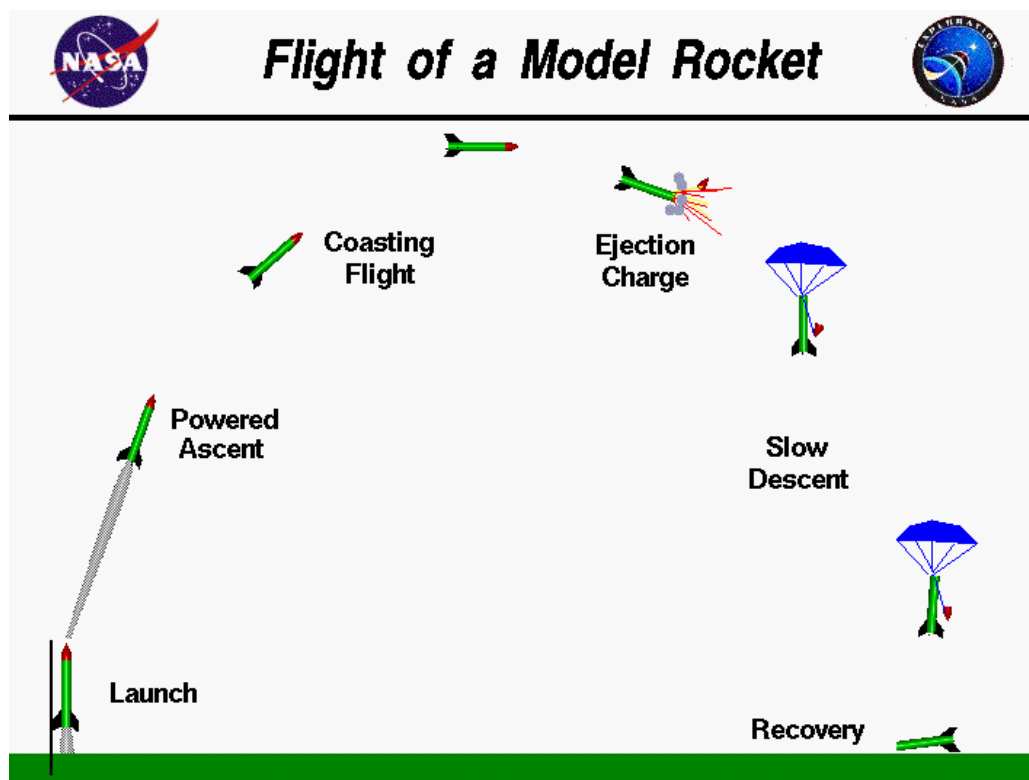
3.4 TRAJETÓRIA

O estudo da trajetória do foguete experimental é crucial para o cumprimento de sua missão. Neste tópico, uma modelagem mecânica simplificada de um grau de liberdade (adotado como sendo a translação vertical do foguete) será feita analiticamente para um foguete atuando no vácuo, e em seguida o caso com arrasto aerodinâmico em um grau de liberdade é apresentado.

3.4.1 Etapas de voo de foguete experimental

A Figura 3.29 mostra um foguete de estágio único e suas fases de voo.

Figura 3.29 – Etapas de voo de foguete



Fonte: Flight...^[27]

1. Lançamento (*launch*): esta é a primeira etapa de voo de qualquer foguete. O ignitor é acionado e o foguete é propulsado pelo motor. Como a velocidade ainda não é suficiente para estabilização, a guia de lançamento é utilizada para manter a trajetória do foguete retilínea. Assumindo que a guia de lançamento mantenha o foguete com ângulo de ataque nulo, as forças envolvidas são arrasto, empuxo e peso;
2. Subida propulsada (*powered ascent*): o foguete continua com o motor em operação, mas já livre da restrição da guia de lançamento. As forças aplicadas sobre o foguete são o empuxo do motor, o arrasto aerodinâmico, o peso do foguete e, em caso de ângulo de ataque não-nulo, a sustentação aerodinâmica;
3. Voo livre ascendente (*coasting flight*): o motor é desligado, mas o foguete ainda possui energia cinética. As forças aplicadas são as mesmas da fase anterior, com exceção do empuxo;

4. Apogeu (*apogee*): o foguete gastou toda sua energia cinética decorrente da queima do propelente. Neste momento, a velocidade vertical do foguete é nula;
5. Voo livre descendente: o foguete está em trajetória balística até o acionamento do módulo de recuperação.
6. Carga de ejeção (*ejection charge*): se no foguete houver um sistema pirotécnico de ejeção de paraquedas, ele será ativado neste momento. Normalmente, o momento de ativação é suficiente para reduzir a velocidade do foguete mas não exagerado para evitar um pouso distante do local de lançamento;
7. Descida lenta (*slow descent*): o paraquedas está totalmente acionado, gerando força de arrasto suficiente para desacelerar a queda do foguete a um nível seguro.

3.4.2 Altitude de foguete sem arrasto

A modelagem da trajetória de foguete em um grau de liberdade, sem considerar o arrasto, pode ser feita analiticamente através da análise separada da fase propulsada e da fase balística. As aproximações feitas nas equações 3.23 e 3.21 são utilizadas nessa seção e na seção 3.4.3, caso a curva de empuxo-tempo não seja conhecida. A seção 3.4.4 apresenta as equações para quando a curva de empuxo-tempo é conhecida.

Na fase propulsada, em um instante t qualquer, o momento total do sistema é dado pela equação 3.62:

$$p_t = m\mathbf{v} \quad (3.62)$$

Em que m é a massa total do foguete e $\mathbf{v}$ é a sua velocidade. Após um instante infinitesimal dt , a massa do foguete decresce por conta do consumo de propelente, a velocidade do foguete é incrementada por conta da ejeção das partículas de gases, e a partícula de gás é ejetada a uma velocidade em relação ao foguete. Matematicamente, a equação 3.63 mostra o momento total em $t + dt$.

$$\mathbf{p}_{t+dt} = (m - dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - \mathbf{u}dm \quad (3.63)$$

Em que $(m - dm)$ é a variação de massa do foguete, $(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$ é a variação de velocidade do foguete em relação à partícula de gás e $\mathbf{u}dm$ é o momento da partícula de gás, com $\mathbf{u}$ em relação ao solo e portanto negativo (contrário ao sentido de $\mathbf{v}$). Rearranjando, tem-se:

$$\mathbf{p}_{t+dt} = m\mathbf{v} + m d\mathbf{v} + \mathbf{v}dm - dm d\mathbf{v} - \mathbf{u}dm \quad (3.64)$$

A variação de momento $d\mathbf{p}$ é calculada subtraindo as duas expressões, e é dada pela equação 3.65:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}_{t+dt} - \mathbf{p}_t = (m\mathbf{v} + m d\mathbf{v} + \mathbf{v}dm - dm d\mathbf{v} - \mathbf{u}dm) - (m\mathbf{v}) = m d\mathbf{v} - dm(\mathbf{u} + \mathbf{v} + d\mathbf{v}) \quad (3.65)$$

É possível definir uma velocidade relativa $\mathbf{V}_{rel}$ entre o foguete e a partícula de gás:

$$\mathbf{V}_{rel} = \mathbf{u} - (-\mathbf{v} - d\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} + d\mathbf{v} \quad (3.66)$$

Substituindo a equação 3.66 em 3.65, tem-se:

$$d\mathbf{p} = m d\mathbf{v} - \mathbf{V}_{rel} dm \quad (3.67)$$

Pela segunda lei de Newton (3.2):

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m d\mathbf{v} - \mathbf{V}_{rel} dm}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{V}_{rel} \frac{dm}{dt} \quad (3.68)$$

Em que $\mathbf{F}_{ext}$ é o vetor de forças externas (neste caso, apenas a força gravitacional), $\mathbf{V}_{rel}$ é a velocidade de ejeção dos gases em relação ao solo e $\frac{dm}{dt}$ ou $\dot{m}$ é a variação de massa do foguete. Utilizando as simplificações 3.23 e 3.21, é possível reescrever a equação 3.68 de forma que o empuxo médio I_t/t_q apareça:

$$\mathbf{F}_{ext} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{I_t}{M_p} \frac{M_p}{t_q} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{I_t}{t_q} \quad (3.69)$$

Idealmente, o valor instantâneo de empuxo do motor está disponível e as simplificações não são necessárias - no sistema propulsivo desenvolvido, por exemplo, este é um dado conhecido. No entanto, por completude, a equação 3.69 é uma aproximação razoável para motores comerciais cuja informação de vazão mássica ou curva empuxo-tempo não estão disponíveis.

Para a modelagem sem arrasto, pode-se substituir o vetor $\mathbf{F}_{ext}$ pela simples força gravitacional atuante no foguete, de modo que $\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{P} = -m\mathbf{g}$. Substituindo, rearranjando e removendo a notação de vetor, tem-se:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{I_t}{t_q} - mg \implies \frac{dv}{dt} = \frac{I_t}{m \cdot t_q} - g \quad (3.70)$$

A massa instantânea m pode ser modelada em termos da massa inicial, massa de propelente e tempo de queima do motor:

$$m = M_i - \dot{m}t = M_i - \frac{M_p}{t_q} \cdot t \quad (3.71)$$

Em que M_i é a massa inicial total do foguete, M_p é a massa de propelente a ser consumida e t_q é o tempo de queima do motor. Substituindo na equação 3.70:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{I_t}{M_i \cdot t_q - M_p \cdot t} - g \quad (3.72)$$

A equação 3.72 fornece a aceleração instantânea do foguete para um instante de tempo t qualquer durante a fase propulsada. Integrando a expressão de 0 até t_q , obtém-se a velocidade adquirida no final da fase propulsada - que é a maior velocidade atingida por foguetes de estágio único. A variação de velocidade na fase propulsada é, então, dada por:

$$\Delta V = \int_0^{t_q} \left(\frac{I_t}{M_i \cdot t_q - M_p \cdot t} - g \right) dt = \frac{I_t}{M_p} \ln \frac{M_i}{M_i - M_p} - gt_q \quad (3.73)$$

A expressão 3.73 é muito similar à equação de Tsiolkovsky (3.74), porém com o efeito do campo gravitacional terrestre e com a simplificação de v_e em termos dos parâmetros de motor.

$$\Delta V = v_e \ln \frac{m_0}{m_f} \quad (3.74)$$

Se a integral 3.73 for refeita na forma indefinida, obtém-se a velocidade em um instante de tempo t qualquer durante a fase propulsada:

$$V(t) = \int \left(\frac{I_t}{M_i \cdot t_q - M_p \cdot t} - g \right) dt = \frac{I_t}{M_p} \ln \left(\frac{M_i \cdot t_q}{M_i \cdot t_q - M_p \cdot t} \right) - gt \quad (3.75)$$

Integrando a expressão 3.75 novamente em um t qualquer da fase propulsada, obtém-se a altura em função do tempo:

$$h(t) = \int \left[\frac{I_t}{M_p} \ln \left(\frac{M_i \cdot t_q}{M_i \cdot t_q - M_p \cdot t} \right) - gt \right] dt = \frac{M_i t_q I_t}{M_p^2} \left[\left(1 - \frac{M_p t}{M_i t_q} \right) \ln \left(1 - \frac{M_p t}{M_i t_q} \right) + \frac{M_p t}{M_i t_q} \right] - \frac{gt^2}{2} \quad (3.76)$$

Tomando $t = t_q$ na equação 3.76, obtém-se a altitude adquirida durante a fase propulsada - assumindo altitude inicial nula no lançamento:

$$\Delta h_1 = h(t_q) = \frac{I_t}{M_p^2} t_q \ln \left(\frac{M_i - M_p}{M_i} \right) (M_i - M_p) + \frac{I_t}{M_p} t_q - \frac{gt^2}{2} \quad (3.77)$$

As equações 3.73 e 3.77 fornecem, respectivamente, a velocidade e a altitude no final da fase propulsada. Agora, resta utilizá-las para modelar o voo até o apogeu. Nele, sabe-se que a velocidade final é nula. Utilizando a equação horária da velocidade $V = V_0 + at$, tem-se:

$$0 = \frac{I_t}{M_p} \ln \left(\frac{M_i}{M_i - M_p} \right) - gt_q - gt_c \quad (3.78)$$

Em que t_c é o tempo de *coasting*, ou seja, o tempo decorrido entre o final da queima do motor (*engine burnout*) e o apogeu. Rearranjando:

$$t_c = \frac{I_t}{M_p g} \ln \left(\frac{M_i}{M_i - M_p} \right) - t_q \quad (3.79)$$

Obtido t_c , usa-se a equação horária dos espaços $S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$ para obter a altitude de apogeu do foguete:

$$\Delta h_{apogee} = \Delta h_1 + \frac{I_t t_c}{M_p} \ln \left(\frac{M_i}{M_i - M_p} \right) - gt_c t_q - \frac{gt_c^2}{2} \quad (3.80)$$

As equações 3.75, 3.76, 3.79 e 3.80 podem ser implementadas em uma simulação temporal para obtenção das curvas de espaço e velocidade por tempo.

3.4.3 Altitude de foguete com arrasto

A modelagem com arrasto é feita retornando à expressão 3.69, mas adotando o vetor de forças externas como a soma da força gravitacional e força de arrasto, ou seja, $F_{ext} = P + D = -mg - \frac{1}{2}\rho v^2 C_{D_0} S$:

$$-mg - \frac{1}{2}\rho v^2 C_{D_0} S = m \frac{dv}{dt} - \frac{I_t}{t_q} \quad (3.81)$$

A equação diferencial ordinária 3.81 não possui solução em forma fechada. A alternativa é recorrer à solução numérica. O método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) resolve expressões no formato $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$, desde que o valor inicial $y(t_0) = y_0$ seja conhecido. Neste caso, tem-se:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{v^2 \rho C_{D_0} S}{2M_i - 2M_p t/t_q} + \frac{I_t}{M_i t_q - M_p t}, \quad V(0) = 0 \quad (3.82)$$

O método RK4 consiste em calcular o valor da expressão para um passo de tempo arbitrário n e, com a ajuda deste valor e da média ponderada de quatro incrementos, calcular o valor da expressão para o passo de tempo $n + 1$ [28]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.83)$$

Em que

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \quad (3.84)$$

Em suma, as curvas de aceleração vertical, velocidade vertical e altitude em função do tempo levando em conta o arrasto aerodinâmico podem ser obtidas da seguinte forma:

1. Determinar as constantes S, I_t, M_i, M_p, t_q, g ;
2. Determinar a velocidade inicial $v(0)$;
3. Determinar a densidade na altitude atual ρ_n ;
4. Determinar o coeficiente de arrasto C_{D_0} para o número de Mach da simulação;
5. Determinar a velocidade no passo de tempo $n + 1$ com o método de Runge-Kutta;
6. Determinar o deslocamento vertical com base em v_{n+1} e o passo de tempo h ;
7. Repetir os passos 3 a 6 até que a variação de altitude seja negativa, ou seja, até que o foguete atinja o apogeu.

A modelagem do voo livre descendente é feita de forma similar ao voo livre ascendente: basta utilizar as equações horárias da velocidade e dos espaços tendo conhecimento do tempo até a ativação do sistema de recuperação.

A modelagem da descida lenta é feita aplicando a segunda lei de Newton no foguete: as únicas forças atuando agora são a força-peso e o arrasto aerodinâmico, e não há variação de massa no sistema. O coeficiente de arrasto aplicável é o do conjunto foguete-paraquedas, $C_{D_{fp}}$:

$$F = ma \implies mg - \frac{1}{2}\rho v^2 C_{D_{fp}} S = m \frac{dv}{dt} \implies \frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho v^2 C_{D_{fp}} S}{2m} \quad (3.85)$$

O método de Runge-Kutta pode ser aplicado novamente na equação 3.85 para modelar a fase final de descida lenta do foguete, até que $h = 0$.

3.4.4 Altitude de foguete com curva de empuxo-tempo

A altitude de um foguete sem e com a atuação do arrasto pode ser obtida também através dos dados da curva de empuxo-tempo. Nas equações 3.70 e 3.81, basta substituir o empuxo médio It/t_q pelo empuxo instantâneo E ; respectivamente:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E}{m} - g \quad (3.86)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{E}{m} - \frac{\rho v^2 C_{D_0} S}{2m} \quad (3.87)$$

Em seguida, basta integrar numericamente utilizando a mesma estratégia apresentada na seção 3.4.3.

É importante destacar que a curva de empuxo-tempo não é analítica; normalmente, ela é obtida de testes estáticos com um sensor que captura os dados de empuxo a uma taxa de atualização pré-determinada, ou é obtida através da solução numérica das equações da seção 3.1. Isso significa que, para obtenção dos dados de empuxo em t_x , com t_x entre dois instantes de tempo t_1 e t_2 , aplica-se uma interpolação linear com os dados de E_1 e E_2 :

$$E_x = E_1 + (t_x - t_1) \frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1} \quad (3.88)$$

O erro associado à interpolação linear pode ser reduzido com uma taxa de atualização maior nos sensores do teste estático ou com um passo temporal menor na simulação numérica.

4 DESENVOLVIMENTO

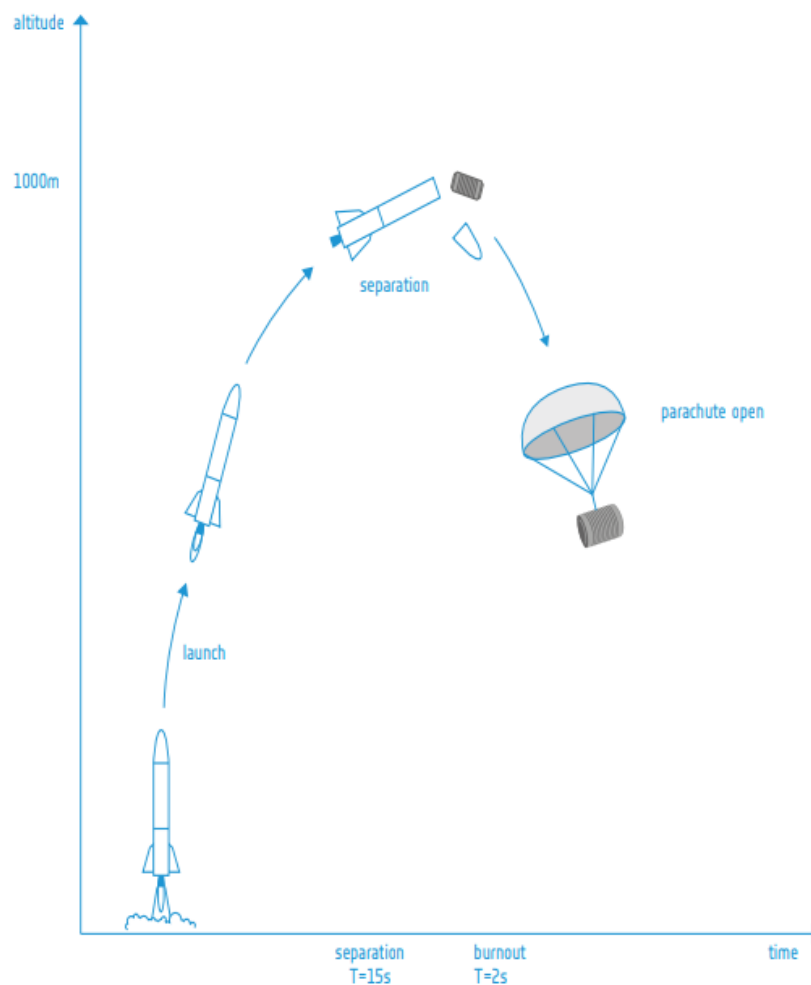
4.1 REQUISITOS E FILOSOFIA

Como mencionado na introdução, os requisitos deste projeto serão dados pela carga-paga de tipo CanSat. Das diretrizes da competição “*ESA CanSat Competition*”, realizada pela Agência Espacial Europeia, tem-se duas principais restrições^[3]:

- Volume disponível: igual ao de uma lata de refrigerante (115 mm de altura por 66 mm de diâmetro), com espaço extra de 4.5 cm para componentes externos como sistema de recuperação ou antenas;
- Massa mínima de 300g e máxima de 350g.

Sabe-se que o lançador utilizado pela competição atinge um apogeu de 1000m^[3], que será o objetivo do foguete desenvolvido. A Figura 4.1 ilustra o lançamento de um *CanSat*.

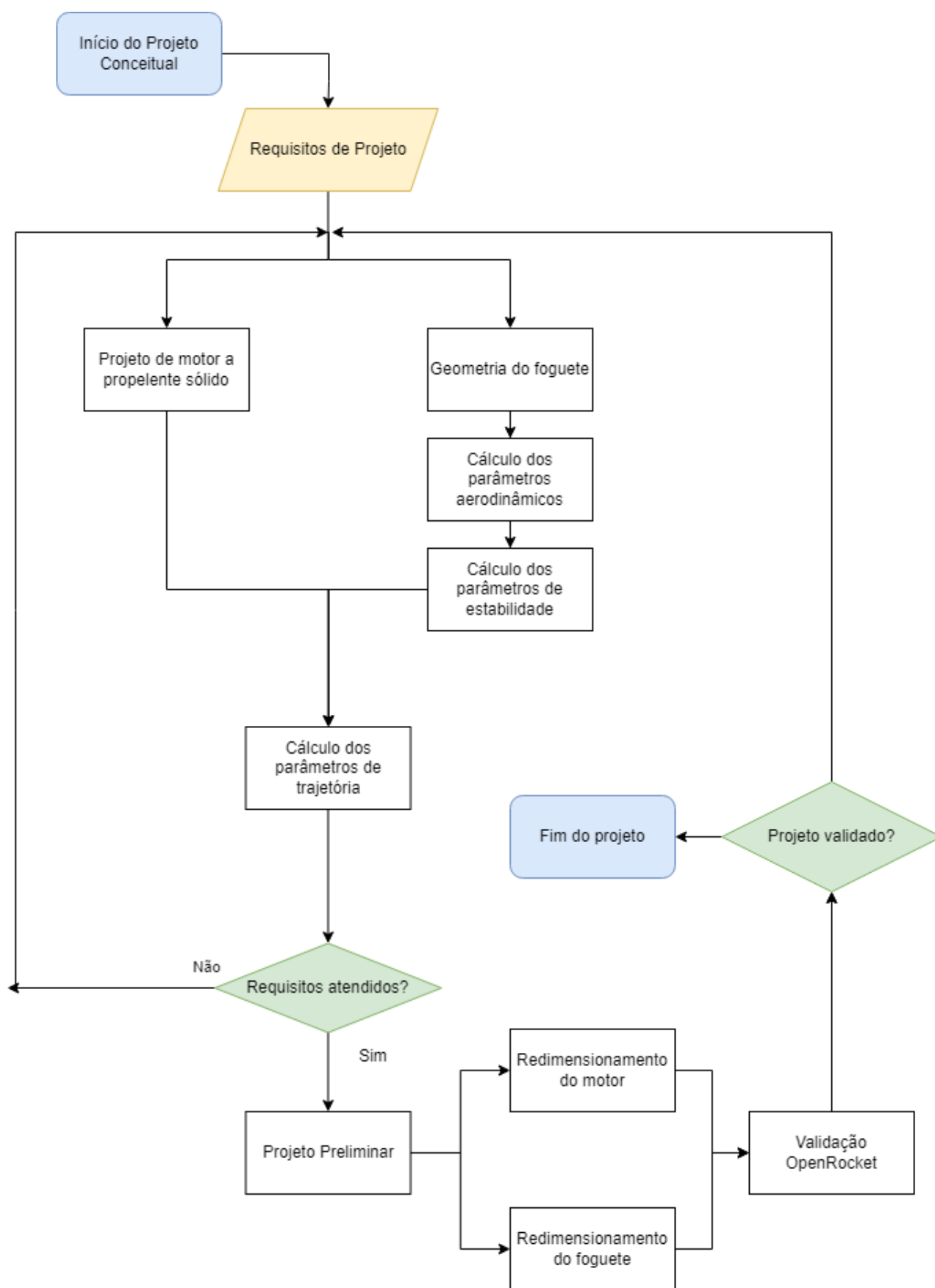
Figura 4.1 – Lançamento de *CanSat*



Fonte: CanSat...^[3]

A filosofia de projeto adotada é baseada nas filosofias tradicionais de projetos de aeronaves, mas simplificada. Inicialmente, um protótipo que atenda às condições mínimas de volume, massa e apogeu será formulado em uma etapa análoga ao projeto conceitual de uma aeronave. Posteriormente, em uma etapa análoga ao projeto preliminar, esse protótipo será otimizado. Os objetivos de otimização são: acurácia do apogeu, redução de massa do foguete, diminuição do custo total do projeto e simplicidade de projeto. O fluxograma da Figura 4.2 mostra os passos seguidos durante desenvolvimento do trabalho.

Figura 4.2 – Fluxograma de projeto



Fonte: autor

4.2 PROJETO CONCEITUAL

Antes de adentrar às áreas específicas de projeto, é conveniente descrever o foguete e apresentar um panorama geral do projeto. Resumidamente, para o lançamento do *CanSat*, as seguintes capacidades técnicas devem ser atendidas:

- Sistema propulsivo capaz de levar o foguete e uma carga-paga de 350g à uma altitude de pelo menos 1000 metros;
- Estrutura com arrasto total pequeno, massa reduzida e estabilidade estática entre 1.5 e 2 calibres;
- Estrutura com volume suficiente para abrigar o *CanSat* e seus componentes externos;
- Voo inteiramente no regime subsônico ($M < 0.8$);
- Sistema de recuperação capaz de reduzir a velocidade de queda do foguete até o intervalo de 8 a 11 metros por segundo^[3];
- Avionica capaz de: registrar posição, velocidade, aceleração e orientação durante operação; ejetar o *CanSat* e o paraquedas no apogeu;

Os últimos dois itens não serão desenvolvidos neste trabalho. As outras capacidades técnicas devem ser atendidas até o final da etapa de projeto conceitual.

4.2.1 Propulsão

Em primeiro lugar, será necessário estimar o impulso-total I_t necessário para atingir um apogeu próximo de 1000m. No entanto, o apogeu atingido tem relação direta com a massa total do foguete (seção 3.4.3), que não está disponível nessa etapa de projeto. Esse valor deve ser, portanto, estimado coerentemente com base na carga-paga e em outros foguetes similares. O foguete utilizado oficialmente pela ESA na competição é o *PML Intruder*, que possui as características listadas na tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros do *Intruder* da ESA

Parâmetro	Valor
Massa total	3 kg
Massa do foguete	1.531 kg
Diâmetro do encaixe do motor	38 mm
Tamanho do paraquedas	122 cm
Comprimento	1.5 m
Diâmetro	79.4 mm
Envergadura	232 mm
Apogeu	≈1000 m
Tempo de voo	≈140 s
Massa de propelente	280 g
Material da coifa	plástico
Material das aletas	fibra de vidro
Material do tubo	plástico

Fonte:^[3] ^[29]

O *Intruder*, entretanto, carrega de 2 a 3 CanSats por lançamento; portanto, o volume necessário para o foguete e a massa de propelente serão necessariamente menores. Outra informação crucial é que o acoplamento do motor possui 38mm, valor padronizado que permite avaliar quais motores são acopláveis ao foguete. A tabela 5 mostra os motores da empresa *Aerotech* que são compatíveis ao acoplamento de 38mm:

O motor *Aerotech* que mais se aproxima da massa de propelente usada pelo foguete da ESA é o I500T, motor da classe I com 312g de propelente. Entretanto, a massa de propelente de 280g é relativa ao lançamento de 2 a 3 CanSats. Isso significa que, se o impulso total do motor I500T for utilizado como base para o projeto conceitual do motor, o projeto estará sendo muito conservador. Portanto, o “chute inicial” para a primeira iteração de projeto será igual à 70% do impulso total do I500T: 434Ns. Outro parâmetro que já pode ser fixado é o diâmetro externo do motor, a fim de seguir o padrão dos motores comerciais: 18mm, 24mm, 29mm, 38mm, 54mm.

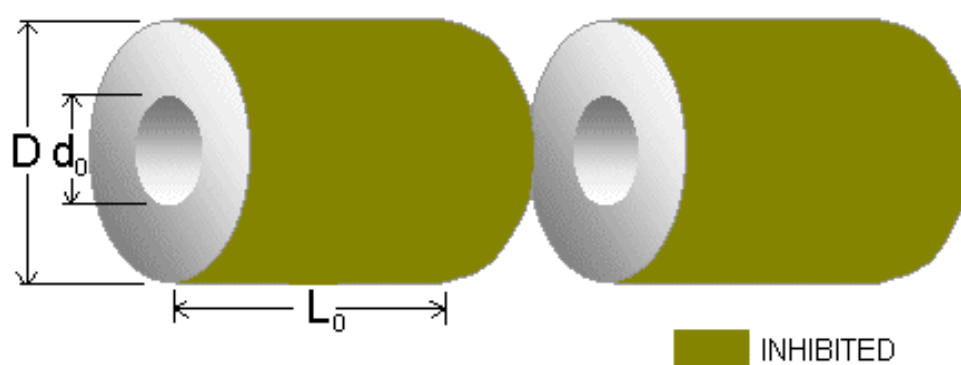
Para gerar e simular o motor, um *script* escrito em Python foi elaborado (apêndice A) com base nas definições da seção 3.1. O perfil de grão BATES (*Balistic and Test Evaluation System*) é um perfil circular com queima na superfície interna e nas pontas, e foi escolhido pela facilidade de fabricação e curva de empuxo-tempo aproximadamente neutra^[2].

Tabela 5 – Motores Aerotech 38mm

Motor	Tempo de queima (s)	Impulso total (Ns)	Empuxo máximo (N)	Massa de propelente (g)	Comprimento (mm)
H283ST-15	0.7	201	325	97	155
H100W	2.3	234	131	121	155
H219T-14	1.1	234	267	109	155
H45W-P	6	320	87	180	203
H550ST	0.6	320	667	145	213
I175WS	1.9	333	260	168	203
I140W	2.4	336	181	183	203
I280DM	1.9	561	386	355	356
I500T	1.2	620	613	312	356
J425R	1.6	676	452	364	356
J270W	2.6	703	356	381	356
J435R	1.7	774	696	352	356

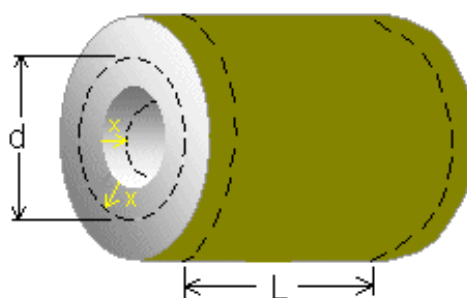
Fonte: 38mm...^[30]

Figura 4.3 – Grão BATES

Fonte: Nakka^[2]

A Figura 4.3 mostra dois grãos de tipo BATES. D é o diâmetro externo do grão, d_0 é o diâmetro interno inicial do grão e L_0 é o comprimento inicial do grão. As superfícies nas quais a queima é inibida estão demarcadas. A Figura 4.4 mostra como a queima progride neste tipo de grão. As direções de queima estão em amarelo, e os contornos tracejados mostram o grão em um instante de tempo pequeno após a queima.

Figura 4.4 – Direção de queima - grão BATES

Fonte: Nakka^[2]

A área instantânea da superfície de propelente exposta ao escoamento e disponível para queima é dada por:

$$A_b = \pi N \left(\frac{1}{2} [D^2 - d^2] + Ld \right) \quad (4.1)$$

Durante a queima, d e L variam de acordo com a coordenada x da Figura 4.4 da seguinte forma:

$$d = d_0 + 2x, \quad L = L_0 - 2x \quad (4.2)$$

As equações 4.1 e 4.2 também foram implementadas no *script* do apêndice A. Uma simulação temporal é feita, na qual um passo de tempo é utilizado para queimar a superfície do grão continuamente até que $d \approx D$ ou $L \approx 0$, condições que indicam o esgotamento do propelente disponível.

Para realizar uma simulação, os seguintes parâmetros são necessários:

- Geometria do grão BATES (diâmetro externo, interno e comprimento: D , d e L)
- Número de grãos (N)
- Diâmetro da garganta (d^*)
- Razão de expansão (A_e/A^*)
- Parâmetros do propelente (c^* , ρ , k)

Os parâmetros do propelente KNSB são constantes durante a queima, e dados empíricos estão disponíveis para uso no *script*.

A razão de expansão A_e/A^* pode ser obtida adotando a razão de expansão ideal, ou seja, $P_e = P_a$. Neste caso, basta fixar uma pressão da câmara de combustão para aplicação da equação 3.16. Como a pressão na câmara de combustão varia durante a queima, para maximizar o desempenho a pressão média de operação é escolhida. Se em um determinado momento a pressão P_0 for menor que a pressão média para a qual a razão de expansão ideal foi projetada, o bocal estará expandindo até uma pressão de saída P_e menor que a pressão ambiente. Do contrário, se P_0 for maior que a pressão média para a qual a razão de expansão ideal foi projetada, o bocal estará expandindo até uma pressão de saída P_e maior que a pressão ambiente. Assim, se o grão possuir uma variação de pressão apreciável, como nos perfis progressivos ou regressivos, há uma perda de desempenho associada à variação da pressão da câmara de combustão, discutida na seção 3.1.5. Como o grão BATES apresenta uma característica de queima neutra, a média de pressão pode ser utilizada para obtenção da razão de expansão. Ainda, como os motores estudados têm um tempo de queima muito reduzido, a pressão ambiente é adotada como constante e igual à pressão a nível do mar.

O diâmetro da garganta deve ser pequeno suficiente para que uma alta pressão seja mantida na câmara de combustão, mas grande o suficiente para geração de empuxo (eq. 3.25). Se o diâmetro da garganta escolhido for grande demais e a pressão na câmara de combustão decair, a área superficial exposta à queima deve ser aumentada (a relação entre pressão na câmara de combustão, área de queima e área superficial exposta à queima é dada pela eq. 3.26).

Evidentemente, existem restrições quanto à pressão de operação máxima esperada (MEOP), já que o tubo/*casing* deve ser robusto o suficiente para contê-la; além disso, os dados da taxa de queima do KNSB estão disponíveis até aproximadamente 1550 psi, tornando simulações acima desta pressão de operação imprecisas. Para cargas de pressão cuja falha possa colocar em risco pessoas ou a plataforma de lançamento, um fator de segurança maior que 1.33 deve ser adotado^[31]. Assim, a pressão de operação máxima esperada (MEOP) escolhida para projeto multiplicada por 1.33 não deve ser maior que 1550 psi, o que nos dá uma MEOP limite de 1165 psi. Foguetes experimentais operam tipicamente no intervalo de 1000 psi a 1600 psi^[2], validando esta escolha.

O número de grãos e geometria do grão são escolhidos de modo a gerar um impulso total próximo do escolhido (434 Ns) e uma área superficial exposta adequada para manter a pressão média de operação próxima do limite de 1165 psi. O diâmetro externo do motor está fixo, 38mm, e o diâmetro externo do grão é obtido subtraindo duas vezes a espessura da parede deste valor. A espessura da parede é encontrada através da teoria de vaso de pressão cilíndrico com parede fina^[2]:

$$t = \frac{P_0 \cdot d}{2\sigma} \quad (4.3)$$

Em que t é a espessura do cilindro, P_0 é a pressão na câmara de combustão com o fator de segurança de 1.33, d é o diâmetro interno do cilindro (que pode ser aproximado pelo diâmetro externo se $D \gg t$) e σ é a tensão de escoamento do material utilizado. Se o material utilizado for o aço AISI 1020, de fácil obtenção e com $\sigma_y = 50800 \text{ psi}$, tem-se:

$$t = \frac{1550 \cdot 38}{2 \cdot 50800} = 0.58 \text{ mm} \quad (4.4)$$

Subtraindo duas espessuras do diâmetro externo, tem-se o diâmetro interno do tubo: 36.84 mm. Normalmente, entre a parede do tubo e o grão existem uma ou mais camadas de papel inibidor. Considerando uma espessura de 0.1 mm para o papel, com uma camada o grão terá o diâmetro externo igual a 36.64 mm. A tabela 6 mostra de forma resumida os parâmetros escolhidos para o projeto do motor

Tabela 6 – Parâmetros iniciais do motor para o projeto conceitual

Parâmetro	Valor
Impulso total	$\approx 434 \text{ Ns}$
Diâmetro externo do motor	38 mm
Espessura da parede do motor	0.58 mm
Diâmetro interno do motor	36.84 mm
Diâmetro externo do grão	36.64 mm
Pressão de operação máxima esperada (MEOP)	$\approx 1165 \text{ psi}$
Material do tubo	Aço AISI 1020

Fonte: autor

Os parâmetros a serem variados na simulação para otimização são:

- Comprimento do grão L ;
- Número de grãos N ;

- Diâmetro da seção da garganta d^* ;
- Diâmetro interno do grão d .

E as restrições de projeto são:

- Pressão média na câmara de combustão próxima de 1165 psi (desvio máximo de 145 psi);
- Razão A_{furo}/A^* maior que 2 (para evitar queima erosiva);
- Fluxo de massa máximo de 2 lb/sqin/s (para evitar queima erosiva);
- Pressão de operação máxima esperada (MEOP) de 1165 psi;
- Variação de Kn máxima de 15% (para manter uma queima de perfil neutro);
- Diâmetro interno do grão não maior que 60% do diâmetro externo, por perigo de tornar o grão quebradiço/frágil.

O *script* escrito implementa as funções de simulação do motor e de otimização do motor, utilizando as funções de otimização da biblioteca *scipy.optimize*. Neste caso, o objetivo é aproximar o impulso total do motor projetado ao objetivo de 434 Ns, respeitando as restrições impostas e os limites dimensionais. Os parâmetros que resultaram desta otimização estão disponíveis na tabela 7, agregados aos parâmetros da tabela 6. O motor foi apelidado de “*Sunrise*”.

Tabela 7 – Propriedades do motor *Sunrise*

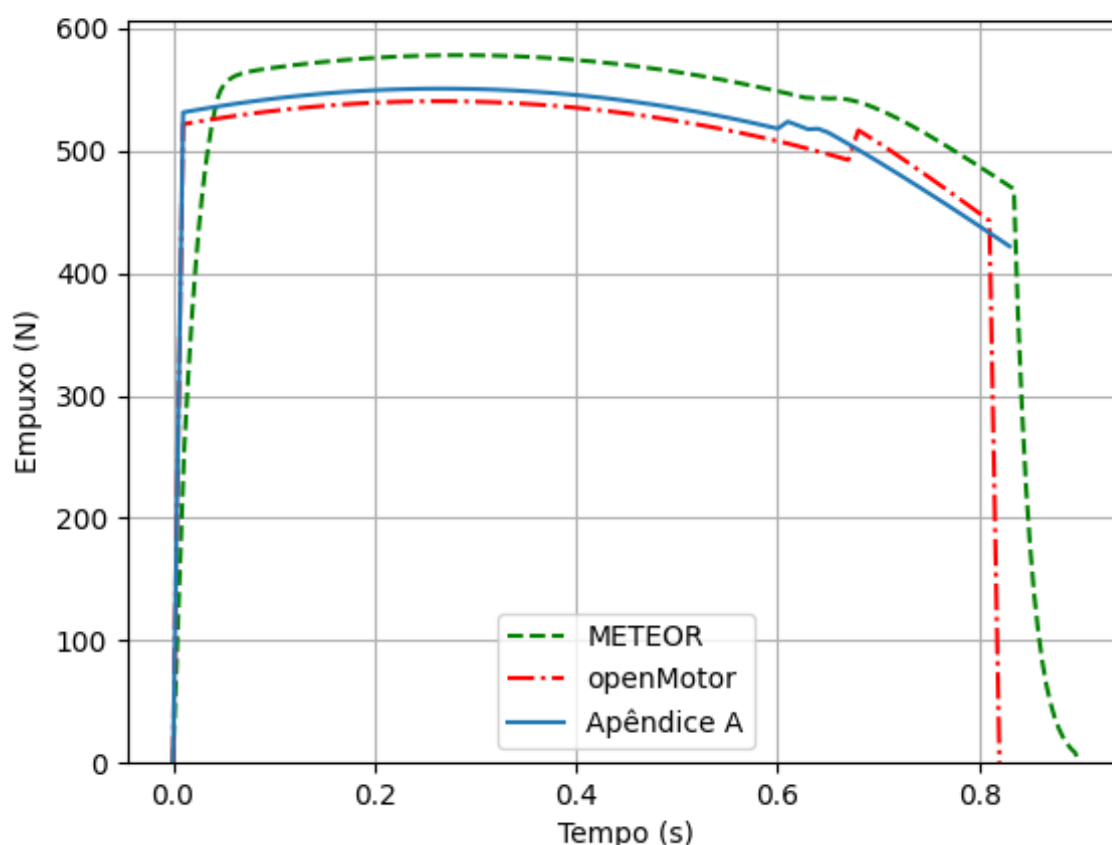
Parâmetro	Valor (SI)
Impulso total	434.13 Ns (classe I)
Diâmetro externo do motor	38 mm
Espessura da parede do motor	0.58 mm
Diâmetro interno do motor	36.84 mm
Diâmetro externo do grão	36.64 mm
Diâmetro interno do grão	18.59 mm
Comprimento do grão	54.63 mm
MEOP	7.45 MPa
Pressão de operação média	7.10 MPa
Material do tubo	Aço AISI 1020
Tempo de queima	0.83 s
Razão de expansão ideal	10.38
Diâmetro da garganta	7.56 mm
Diâmetro de saída	24.35 mm
Coeficiente de empuxo ideal	1.64
Fluxo de massa máximo	1330 kg/m ² s
Ângulo da seção divergente	10° ^[6]
Ângulo da seção convergente	30° ^[6]
Número de grãos	4
Massa de propelente	299 g

Fonte: autor

Os ângulos de contração e expansão do bocal são escolhidos de forma a minimizar a perda de eficiência e reduzir a massa total do bocal. Para a seção convergente, um ângulo de 30 a 45 graus é tipicamente utilizado; para a seção divergente, utiliza-se de 10 a 20 graus. Uma explicação mais detalhada é dada por Sutton e Biblarz^[6], seção 3.4.

A fim de comparar a acurácia dos resultados, as dimensões do motor foram importadas para outros dois *softwares* de simulação de motores a propelente sólido: *METEOR*, ferramenta web feita por Jordan Content e Jérôme Bise e *openMotor*, ferramenta open-source escrita por Andrew Reilley. As curvas de empuxo por tempo foram geradas para ambas, e plotadas junto ao resultado obtido pelo apêndice A.

Figura 4.5 – Curvas de empuxo-tempo do motor *Sunrise*



Fonte: autor

As curvas mostram boa correlação, indicando que a modelagem da seção 3.1 foi corretamente implementada no apêndice A; a pequena discrepância entre as curvas pode ser atribuída a valores diferentes dos parâmetros do propelente KNSB, como densidade, taxa de queima, velocidade característica, coeficiente de expansão adiabática ou a constante dos gases.

Em seguida, o motor elaborado foi desenhado na ferramenta *SolidWorks*, para visualização e obtenção da massa vazia do motor. A montagem do motor contém as partes do bocal, *casing*, *bulkhead* (a “tampa” do motor) e os grãos de propelente. As figuras a seguir mostram seus desenhos mecânicos. A espessura das paredes do bocal é arbitrária; o grande espaçamento entre os grãos é feito de maneira

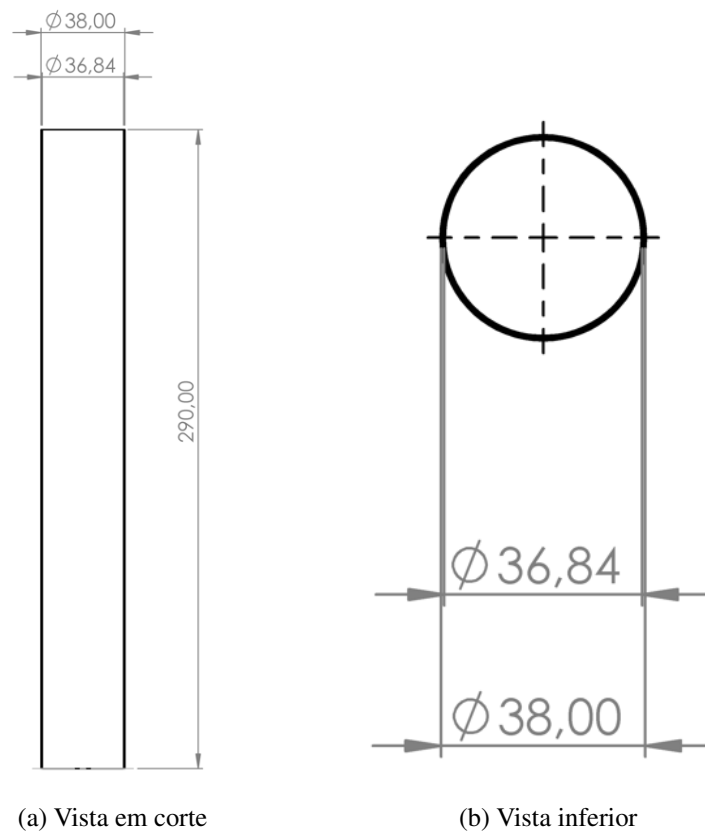


Figura 4.7 – *Casing* do motor *Sunrise*

Fonte: autor

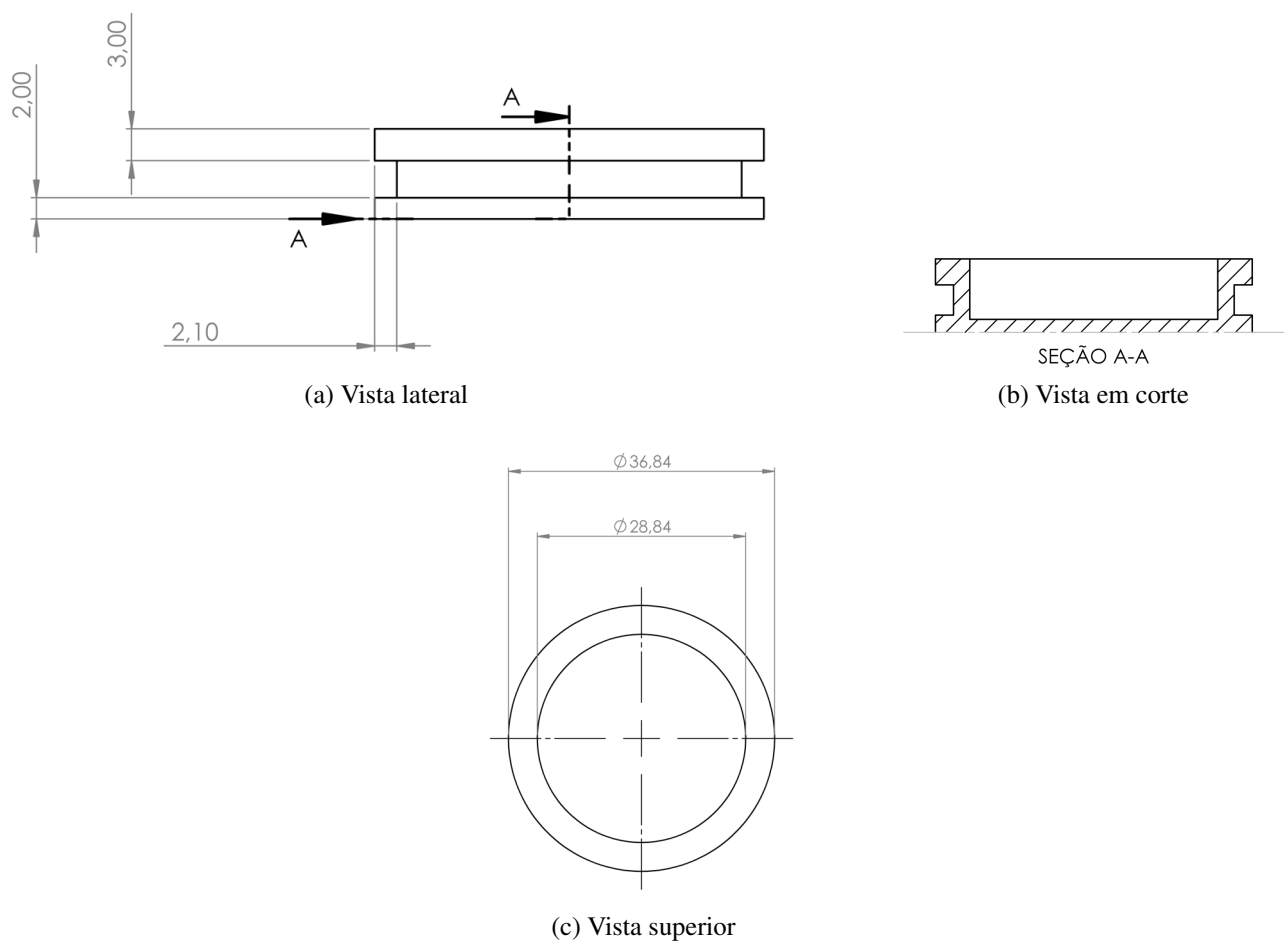
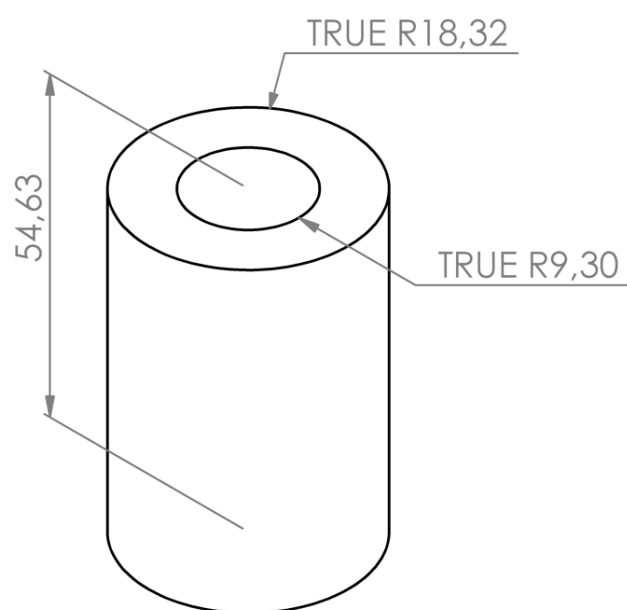


Figura 4.8 – *Bulkhead* (tampa) do motor *Sunrise*

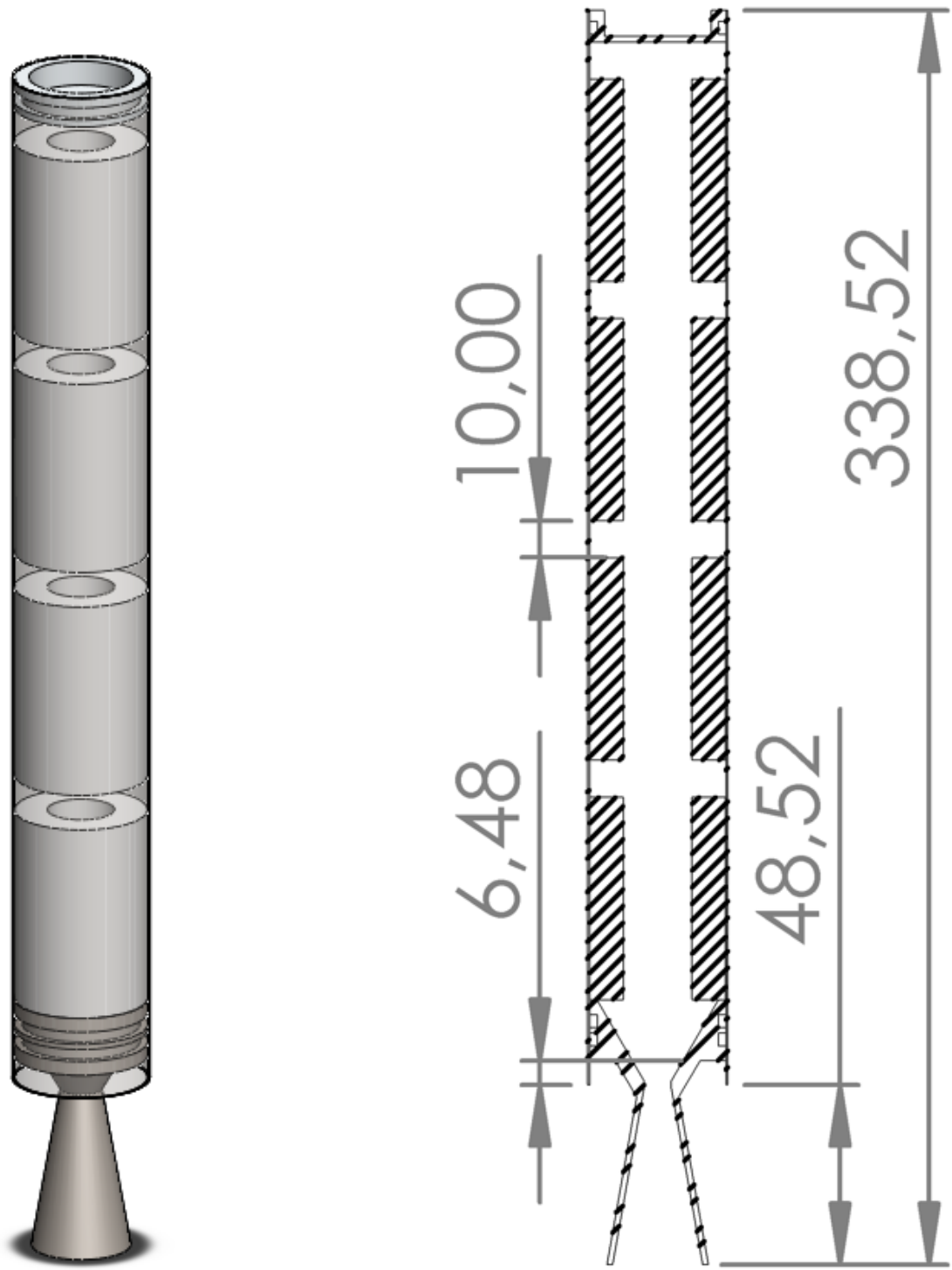
Fonte: autor



(a) Vista isométrica

Figura 4.9 – Grão de propelente do motor *Sunrise*

Fonte: autor



(a) 3D com *casing* transparente

(b) Vista em corte

Figura 4.10 – Montagem do motor *Sunrise*

Fonte: autor

A tabela 8 mostra a relação de componentes, seus materiais e massas individuais. Os componentes de fixação e selamento serão desprezados neste projeto por não contribuírem de forma relevante com o peso total.

Tabela 8 – Lista dos componentes do motor *Sunrise*

Componente	Material	Massa
1x Bocal	Aço AISI 1020	110.68 g
1x Tubo	Aço AISI 1020	156.21 g
4x Grão de propelente	KNSB	299.40 g
1x Tampa	Aço AISI 1020	29.12 g
Total		595.41 g

Fonte: autor

Com os dados de empuxo por tempo, massa total, massa de propelente, comprimento e diâmetro, já é possível realizar simulações com o motor *Sunrise*.

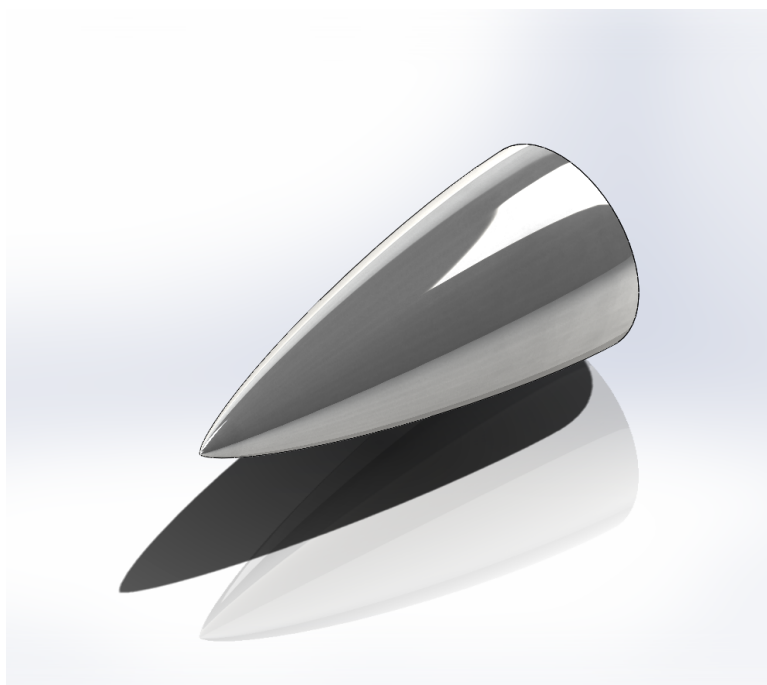
4.2.2 Estruturas

O projeto estrutural conceitual do foguete deve visar, principalmente, a redução do arrasto e redução de massa, mas sem sacrificar a facilidade de fabricação. Essa seção será segmentada em coifa, corpo (*fairing*, transição e tubo) e aletas. Após detalhar individualmente a escolha de cada segmento, a estimativa do coeficiente de arrasto C_{D0} e margem estática é feita com ajuda dos *scripts* dos apêndices B e C. A visualização dos componentes será feita com vistas 2D e 3D do *OpenRocket* e do *SolidWorks*.

4.2.2.1 Coifa

A coifa a ser empregada no projeto conceitual é a coifa da série Haack com parâmetro geométrico igual a zero, também conhecida como a coifa de von Kármán ou LD-Haack. A coifa de von Kármán minimiza o arrasto para valores de comprimento e diâmetro da base fixos^[16].

Figura 4.11 – Coifa de von Kármán



Fonte: Nose...^[32]

O diâmetro da base da coifa será igual ao diâmetro mínimo necessário para abrigar o *CanSat* com pequena folga de 1 mm; assim, o diâmetro interno da base será igual a 68 mm. Como a coifa de von Kármán segue um formato específico, o método de fabricação mais simples e eficaz a ser empregado é a impressão 3D com filamentos de fácil obtenção (PLA ou ABS). O filamento ABS é menos denso ($1.04g/cm^3$ vs $1.24g/cm^3$), e pode ser utilizado com segurança adotando uma espessura de parede igual a 1 mm^[33]. Assim, o diâmetro externo será igual a 70 mm. Esse diâmetro será igual à seção do foguete que abriga o *CanSat* para evitar descontinuidades no foguete, mas uma transição *boattail* será utilizada para reduzir este diâmetro até um valor próximo do diâmetro do motor: a redução da área transversal reduzirá o arrasto.

A coifa irá abrigar a avionica do foguete, bem como o sistema de recuperação do foguete, e portanto deve possuir um comprimento suficiente para tal. Nesta etapa de projeto, adota-se o comprimento

como sendo igual a 15 cm, valor que pode ser alterado caso a baía eletrônica, paraquedas ou carga de ejeção necessitem de mais espaço.

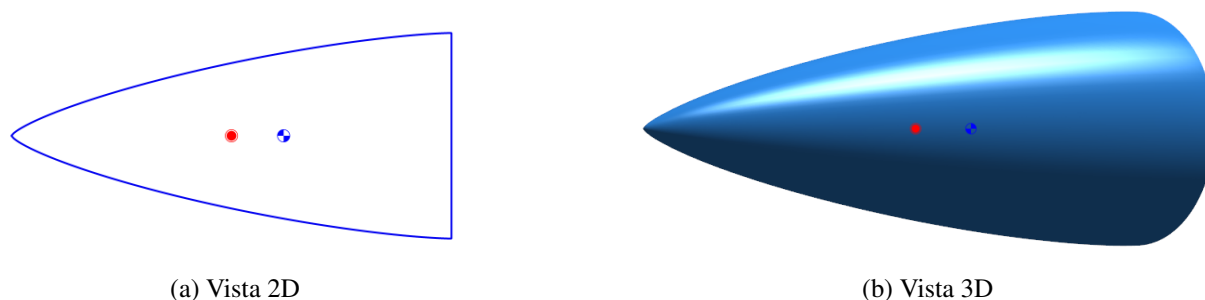


Figura 4.12 – Coifa do projeto conceitual no *OpenRocket*
Fonte: autor

4.2.2.2 Corpo

O corpo do foguete será composto por três principais seções: o *fairing* (carenagem) do CanSat, seguido de uma transição cônica até o corpo principal do foguete no qual o motor está abrigado e no qual as aletas estão acopladas. A transição cônica é importante para reduzir a área de seção transversal do foguete, já que o motor possui apenas 38 mm. Isso garante uma redução de arrasto de fricção e arrasto de base, já que o diâmetro final do foguete é menor e o escoamento tem menor dificuldade em contorná-lo.

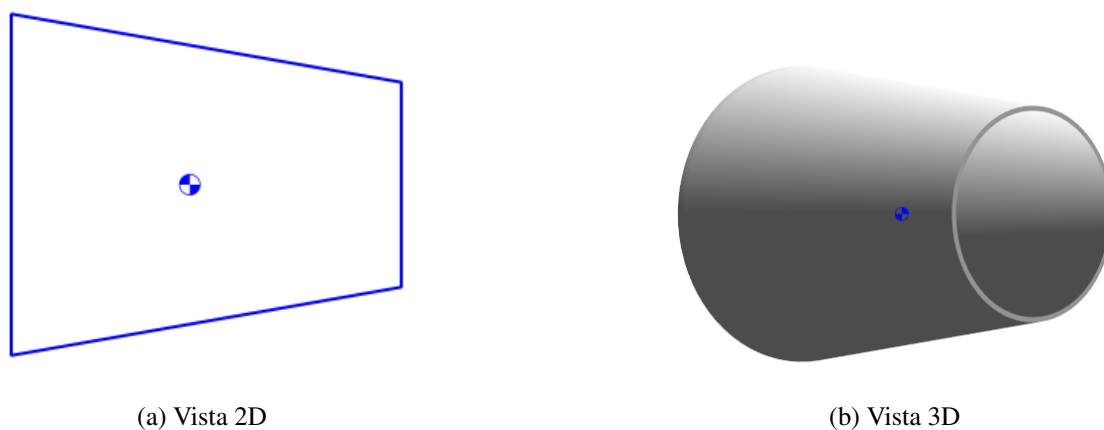
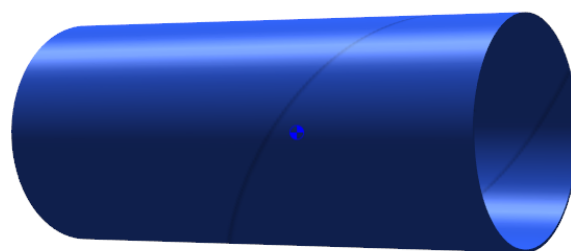


Figura 4.13 – Transição do projeto conceitual no *OpenRocket*
Fonte: autor

A carenagem é utilizada para abrigar o CanSat, e possui diâmetro interno de 68 mm; assim, o CanSat tem 1 mm de folga ao longo de seu perímetro. O comprimento da carenagem é igual a 160 mm, para abrigar tanto o CanSat (com tamanho de 115mm) como os acoplamentos do CanSat (antenas ou paraquedas, por exemplo, que ocupam 45 mm segundo as diretrizes da competição).



(a) Vista 2D



(b) Vista 3D

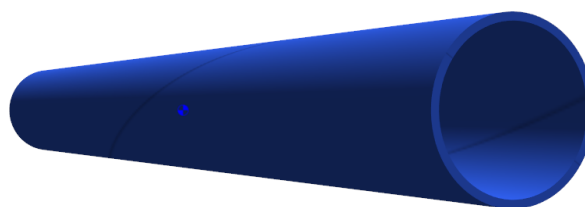
Figura 4.14 – Carenagem do projeto conceitual no *OpenRocket*

Fonte: autor

O corpo principal une as aletas, motor e a transição cônica, mantendo a integridade estrutural do foguete durante a aplicação das forças inerciais, de empuxo e aerodinâmicas. O empuxo do motor é transferido até o resto do foguete através do acoplamento corpo-motor, que deve ser robusto o suficiente para não ceder durante a operação do motor. O comprimento do corpo também é importante: ele deve possuir, no mínimo, 290 mm, tamanho do motor desenvolvido. Um espaço interno entre a transição e o motor também pode ser necessário para abrigar alguma carga de ejeção, componente eletrônico ou peças de acoplamento do motor; assim, o comprimento do corpo principal será de 400 mm. O diâmetro interno do corpo principal precisa ser ligeiramente maior que o diâmetro do motor de 38 mm; adotando folga de 0.5 mm ao longo do perímetro, tem-se um diâmetro interno de 39 mm. A parede do corpo principal terá 2 mm de espessura, o dobro da carenagem, devido aos esforços aos quais está submetida, resultando em um diâmetro externo de 43 mm.



(a) Vista 2D



(b) Vista 3D

Figura 4.15 – Corpo principal do projeto conceitual no *OpenRocket*

Fonte: autor

O material da carenagem, da transição cônica e do corpo principal será fibra de vidro, escolhida pelas boas propriedades mecânicas, densidade reduzida e relativa facilidade para laminação em formatos cilíndricos^[34]. Alternativamente, fibra de carbono ou alumínio podem ser utilizados, a depender do orçamento e facilidade de obtenção nos formatos desejados.

4.2.2.3 Aletas

Existem inúmeras considerações quanto ao formato das aletas. Assim como em asas, o formato, a razão de aspecto, o aerofólio e sua espessura ao longo da envergadura são fatores a serem considerados e escolhidos com cuidado.

A aleta com formato elipsoidal é, teoricamente, a aleta com melhor desempenho, já que possui arrasto induzido menor que as aletas trapezoidais, retangulares ou em delta^[35]. No entanto, possuem complexa fabricação, e o ganho de desempenho só será notado quando o arrasto induzido existir, ou seja, quando o foguete estiver com um ângulo de ataque diferente de zero. Como o foguete passa grande parte da sua missão em um ângulo de ataque nulo ou quase nulo, os ganhos provenientes de uma aleta elipsoidal são mínimos. Assim, opta-se pela aleta trapezoidal, que alia desempenho em ângulo de ataque não-nulo com facilidade construtiva.

Aletas com perfil de aerofólio possuem desempenho superior às aletas de perfil quadrado ou arredondado. Entretanto, são mais difíceis de construir; além disso, a razão entre corda e espessura do aerofólio deve ser mantida constante ao longo do afilamento para que o aerofólio seja o mesmo ao longo de toda envergadura^[35]. Com a impressão 3D, as aletas podem ser fabricadas de modo a garantir o perfil de aerofólio e a redução de espessura. O perfil de aerofólio escolhido deve ser simétrico.

O aumento da razão de aspecto está intimamente ligado à redução de arrasto induzido. Entretanto, aletas com razões de aspecto altas aumentam o momento de inércia do foguete e também trazem problemas de resistência mecânica. Portanto, pelos mesmos motivos da escolha da aleta trapezoidal, opta-se por aletas de razão de aspecto baixa. A Figura 4.16 mostra a geometria de aleta escolhida para o projeto conceitual.

Figura 4.16 – Aleta trapezoidal com perfil de aerofólio constante



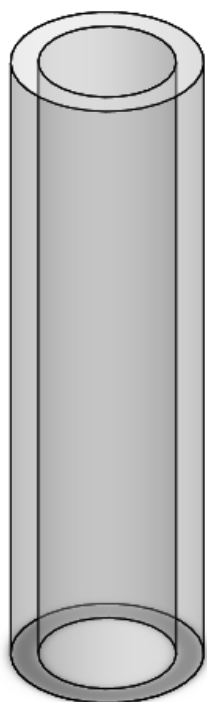
Fonte: Milligan^[35]

As dimensões de envergadura, corda na raiz e corda na ponta são escolhidas com base em outros foguetes, e então avaliadas com o *script* do apêndice C, a fim de manter a margem de estabilidade estática do foguete entre 1.5 e 2 calibres. Se esse critério não for atingido com 3 aletas, configuração que possui menor arrasto, o *script* será executado novamente para a configuração de 4 aletas.

4.2.2.4 Guias de lançamento

O último componente externo do foguete são as duas guias de lançamento cilíndricas, presentes no corpo principal do foguete para garantir que o ângulo de ataque nos primeiros instantes do lançamento não seja diferente de zero.

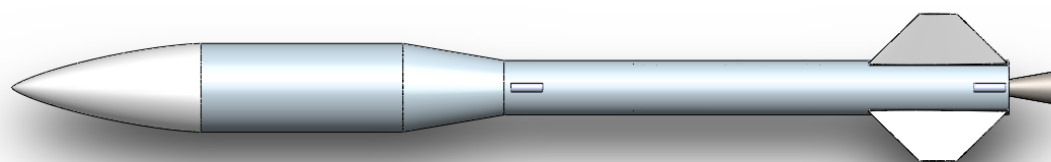
Figura 4.17 – Encaixe da guia de lançamento



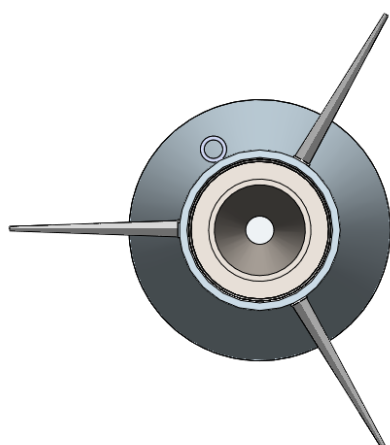
Fonte: autor

4.2.2.5 Visão geral

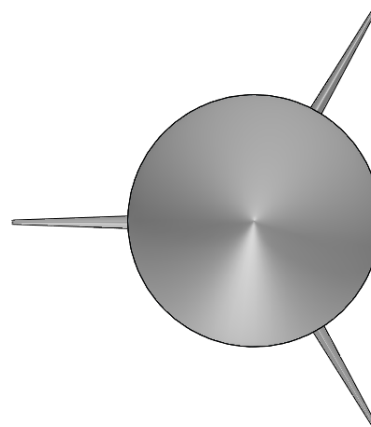
Todos os componentes externos do foguete foram desenhados no *SolidWorks* para melhor visualização e obtenção das massas e centros de massa individuais, necessários ao cálculo da margem estática de estabilidade. As figuras 4.18a, 4.18b e 4.18c mostram a montagem final do foguete do projeto conceitual, com motor já instalado.



(a) Vista lateral 3D



(b) Vista inferior 3D

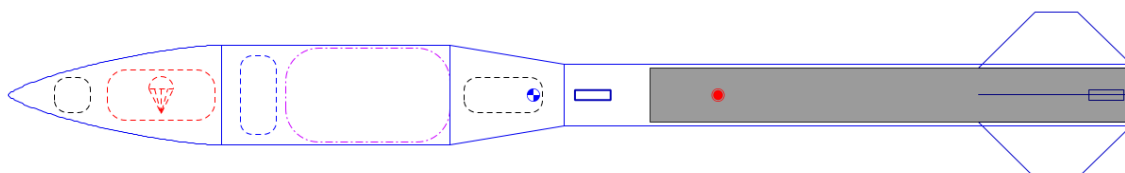


(c) Vista superior 3D

Figura 4.18 – Projeto conceitual no *SolidWorks*

Fonte: autor

Figura 4.19 – Projeto conceitual no *OpenRocket*, com componentes internos



Fonte: autor

4.2.3 Parâmetros aerodinâmicos e de estabilidade

O foguete foi replicado no *OpenRocket* para comparação da posição do centro de gravidade e centro de pressão e para ilustrar os componentes internos. A tabela 9 mostra a relação dos componentes, suas massas e centros de massa calculados pela ferramenta “Propriedades de Massa” do *SolidWorks*, que serão alimentados ao apêndice C, junto aos parâmetros calculados pelo *OpenRocket*.

Tabela 9 – Lista dos componentes do projeto conceitual

Componentes externos	Massa (<i>SolidWorks</i>)	Massa (<i>OpenRocket</i>)
Coifa	18.82 g	22.3 g
Carenagem	64.16 g	64.2 g
Transição	25.81 g	26.2 g
Corpo principal	191.76 g	191.0 g
Aletas (conjunto)	21.63 g	36.8 g
Motor (carregado)	595.42 g	595 g
Guias	0.98 g	0.98 g
Total	918.58 g	936.48 g

Fonte: autor

Os componentes internos foram adicionados ao projeto conceitual da Figura 4.19 para generalizar os requisitos de aviônica e recuperação. Na coifa foi adicionado um componente de 300g representando a aviônica ou carga de ejeção do paraquedas do foguete, e um componente de 38g representando o paraquedas dobrado. Na carenagem estão o CanSat e seus componentes externos, com 350g e 200g, respectivamente. Finalmente, a transição cônica possui outro componente de 200g, simbolizando outra carga de ejeção para o CanSat.

Determinados todos os componentes externos e internos, bem como a massa individual de cada um e posição dos centros de massa em relação à linha de referência na coifa, foi possível obter o centro de gravidade e de pressão do foguete e a margem de estabilidade estática. A tabela 10 relaciona os dados obtidos pelo apêndice C com os dados do *OpenRocket*.

Tabela 10 – Parâmetros de estabilidade

Método	Centro de gravidade	Centro de pressão	Margem estática
Apêndice C	37.78 cm	49.66 cm	1.696 cal
OpenRocket	36.8 cm	49.8 cm	1.850 cal

Fonte: autor

Os dados de estabilidade calculados estão de acordo com os fornecidos pelo *OpenRocket*, com pequena variação no centro de gravidade. A explicação para a discrepância é no método como o *OpenRocket* trata a espessura das paredes da coifa e das aletas, componentes que tiveram maiores variações de massa. Outro ponto importante a se destacar é que o bocal do motor está parcialmente fora do motor, como denotado na Figura 4.18a, o que faz com que a margem estática real do foguete seja menor que a calculada, devido ao deslocamento do centro de gravidade do motor para baixo. De

qualquer maneira, o foguete projetado possui margem de estabilidade estática igual a 1.696 calibres, e portanto atende às condições mínimas de projeto impostas.

Em seguida, a obtenção do coeficiente de arrasto em ângulo de ataque nulo foi obtida através do *script* do apêndice B, exposto na tabela 11 junto aos resultados do *OpenRocket* para alguns valores de Mach.

Tabela 11 – Coeficientes de arrasto total

Número de Mach	C_{D0} (<i>OpenRocket</i>)	C_{D0} (<i>Apêndice B</i>)
0	0.638	0.639
0.1	0.251	0.251
0.3	0.257	0.257
0.6	0.281	0.281
0.8	0.319	0.319

Fonte: autor

Os dados de arrasto calculados estão praticamente idênticos aos apresentados pelo *OpenRocket*. A tabela 12 mostra a contribuição individual de cada componente para o arrasto total, bem como as contribuições parciais dos diferentes tipos de arrasto (na tabela, o arrasto parasita dos encaixes da guia de lançamento está incluso no arrasto de pressão). O número de Mach para estes dados é igual a 0.3.

Tabela 12 – Contribuições individuais do arrasto (Mach 0.3)

Componente	Arrasto de pressão	Arrasto de base	Arrasto de fricção	Total
Coifa	0.0000 (0%)	0.0000 (0%)	0.0277 (11%)	0.0277 (11%)
Carenagem	0.0000 (0%)	0.0000 (0%)	0.0445 (17%)	0.0445 (17%)
Transição	0.0015 (0%)	0.0000 (0%)	0.0182 (7%)	0.0197 (8%)
Corpo principal	0.0000 (0%)	0.0497 (19%)	0.0683 (26%)	0.1180 (46%)
Aletas (conjunto)	0.0035 (1%)	0.0000 (0%)	0.0263 (10%)	0.0298 (12%)
Encaixes (guia)	0.0174 (6%)	0.0000 (0%)	0.0000 (0%)	0.0174 (6%)
Total	0.0244 (9%)	0.0497 (19%)	0.1850 (72%)	0.2570 (100%)

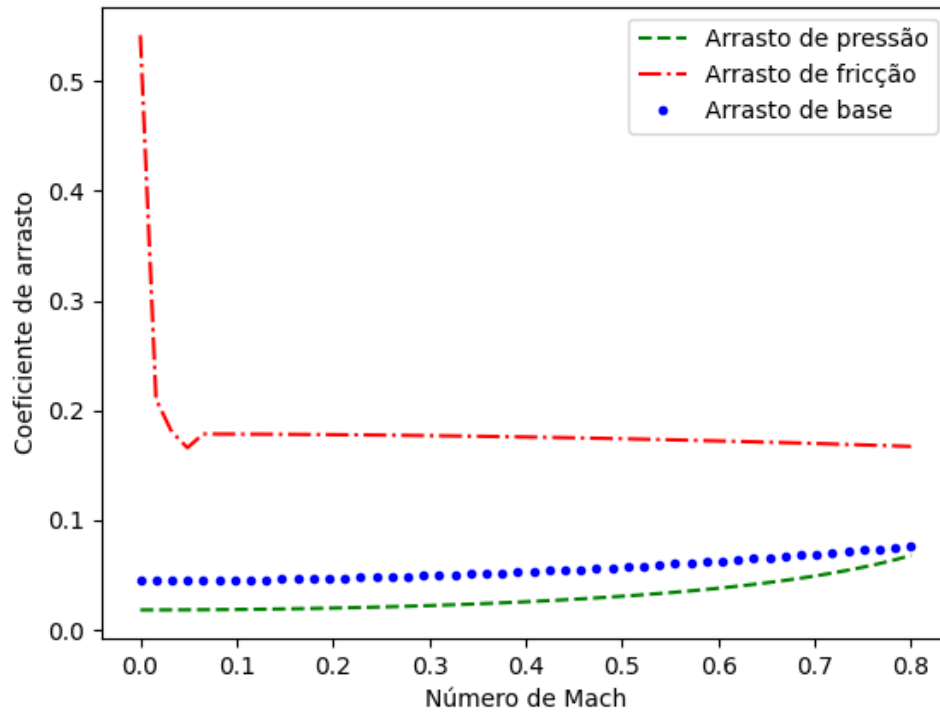
Fonte: autor

Como esperado, o componente com maior contribuição para o arrasto é o corpo principal, com 46% do arrasto total. Além disso, como comentado na seção 3.3.3, o arrasto de fricção é o principal tipo de arrasto atuante, com 72% do arrasto total. Nota-se que o arrasto de base na parte inferior do corpo principal corresponde a quase um quinto de todo o arrasto, motivo pelo qual a inserção de uma transição *boattail* seria vantajosa. A transição irá diminuir o arrasto de base, mas ainda terá um arrasto de pressão e fricção associada a ela. Outro problema a ser estudado no projeto preliminar é que a transição pode diminuir severamente a margem estática de estabilidade, por trazer o centro de pressão para trás. Caso isso ocorra, o corpo principal do foguete teria que ser estendido ou as aletas redimensionadas, o que aumentaria as outras componentes de arrasto.

Outra análise interessante a ser feita é comparar o arrasto de fricção, de pressão e base ao longo do regime subsônico. Na Figura 4.20, nota-se que o arrasto de fricção é consideravelmente maior ao

longo de todo o regime, mas com um aumento expressivo do arrasto de pressão entre Mach 0.6 e 0.8. O arrasto de base também aumenta com o número de Mach, mas de forma menos relevante.

Figura 4.20 – Curvas de arrasto em função do número de Mach

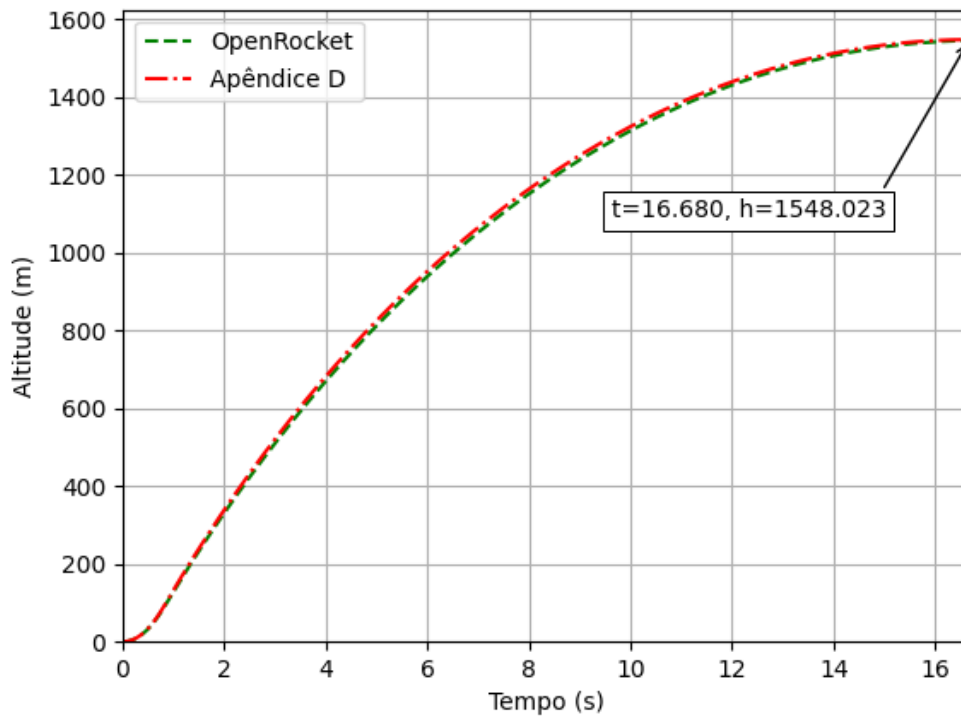


Fonte: autor

4.2.4 Trajetória

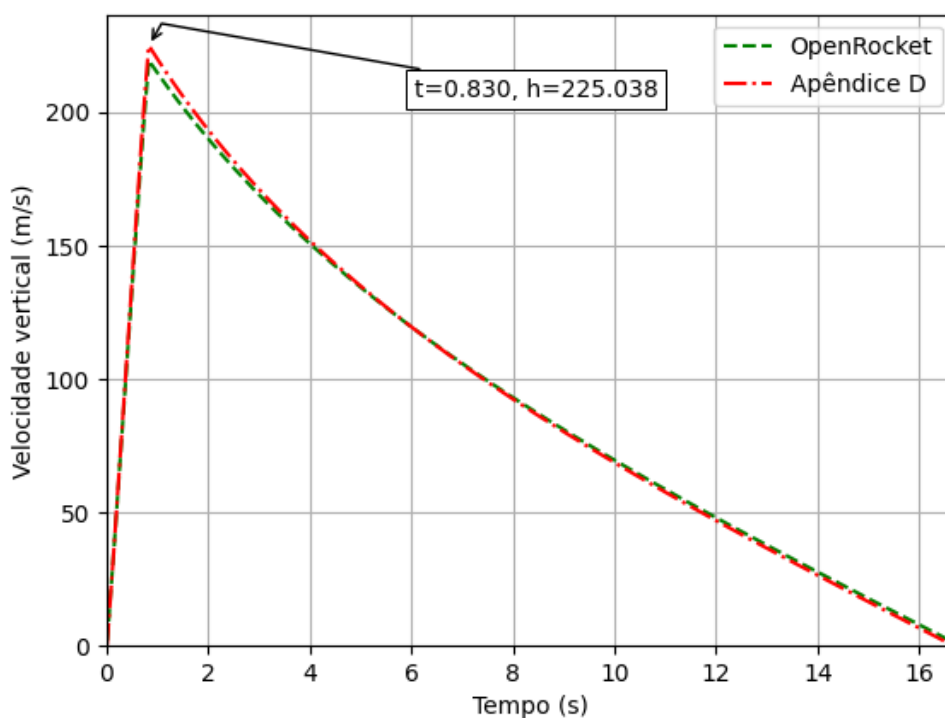
As equações da seção 3.4.4 foram implementadas no *script* do apêndice D para avaliar o cumprimento da missão através dos dados de velocidade e altitude. A Figura 4.21 mostra a curva de velocidade vertical por tempo obtida pelo *script* junto da curva obtida pelo software *OpenRocket*, e a Figura 4.22 mostra a curva de altitude por tempo dos dois métodos.

Figura 4.21 – Curvas de altitude por tempo



Fonte: autor

Figura 4.22 – Curvas de velocidade vertical por tempo



Fonte: autor

Novamente, há excelente correlação entre as curvas, com leve discrepância na velocidade vertical máxima atingida devido à diferença das curvas de empuxo-tempo (Figura 4.5). A maior velocidade atingida pelo foguete foi de 225 m/s; o voo inteiro ocorreu no regime subsônico, com número de Mach máximo igual a 0.66. A altitude de apogeu é igual a 1548 metros, 54.8% acima do objetivo de 1000 metros. A obtenção dos dados de trajetória finalizam a etapa de projeto conceitual, já que o foguete atingiu todos os requisitos estabelecidos.

4.3 PROJETO PRELIMINAR

O objetivo do projeto preliminar é otimizar o foguete concebido na seção 4.2. O parâmetro de otimização mais importante é o impulso total do motor: como o apogeu a ser atendido é de 1000 m, um motor superdimensionado apenas encareceria o projeto. Por isso, nesta seção o motor será redimensionado de modo que o apogeu final previsto seja mais próximo de 1000 metros, com variação máxima de 50 metros. Se isso resultar em uma redução do diâmetro ou comprimento do motor, o corpo principal deverá ser redimensionado para comportá-lo adequadamente. Além disso, a adição da transição *boattail* na parte inferior do foguete será avaliada a fim de reduzir o arrasto de base.

No final do projeto preliminar, o coeficiente de arrasto C_{D_0} e a margem estática serão recalculados, e a nova simulação de trajetória apresentada.

4.3.1 Redimensionamento do motor

O motor *Sunrise* mostrou-se superdimensionado para o cumprimento da missão de apogeu de 1000 metros, logo, uma redução no impulso total de 434 Ns se faz necessária. O apogeu alcançado anteriormente foi de 1548 metros; apesar de não possuírem relação diretamente proporcional, o impulso total do projeto preliminar pode ser estimado com uma regra de três simples. Com um apogeu de 1050 metros, o impulso total requerido seria de 294 Ns. O apogeu do foguete será reavaliado para verificar essa suposição.

O *script* do apêndice A foi utilizado novamente para otimizar parâmetros de grão e bocal, mudando apenas o objetivo de otimização (agora, com impulso total objetivo de 294 Ns). O novo motor, apelidado de “*Sunrise-II*”, possui o mesmo diâmetro externo e interno, espessura de parede e diâmetro externo do grão. O comprimento de cada grão, entretanto, foi alterado, bem como o número de grãos do motor e o diâmetro interno do grão. A tabela 13 mostra os parâmetros do novo motor.

Tabela 13 – Propriedades do motor *Sunrise-II*

Parâmetro	Valor (SI)
Impulso total	301.87 Ns (classe H)
Diâmetro externo do motor	38 mm
Espessura da parede do motor	0.58 mm
Diâmetro interno do motor	36.84 mm
Diâmetro externo do grão	36.64 mm
Diâmetro interno do grão	21.18 mm
Comprimento do grão	56.32 mm
MEOP	7.66 MPa
Pressão de operação média	7.43 MPa
Material do tubo	Aço AISI 1020
Tempo de queima	0.70 s
Razão de expansão ideal	10.75
Diâmetro da garganta	6.68 mm
Diâmetro de saída	21.90 mm
Coefficiente de empuxo ideal	1.65
Fluxo de massa máximo	835.45 kg/m ² s
Ângulo da seção divergente	10° ^[6]
Ângulo da seção convergente	30° ^[6]
Número de grãos	3
Massa de propelente	207.59 g
Impulso específico	148.24 s

Fonte: autor

Após obtenção das propriedades do novo motor, os desenhos em CAD foram atualizados para a nova configuração de três grãos e mudança no tamanho da garganta do bocal. As figuras a seguir sintetizam o motor final do projeto. O único componente que não sofreu alterações foi a tampa do motor.

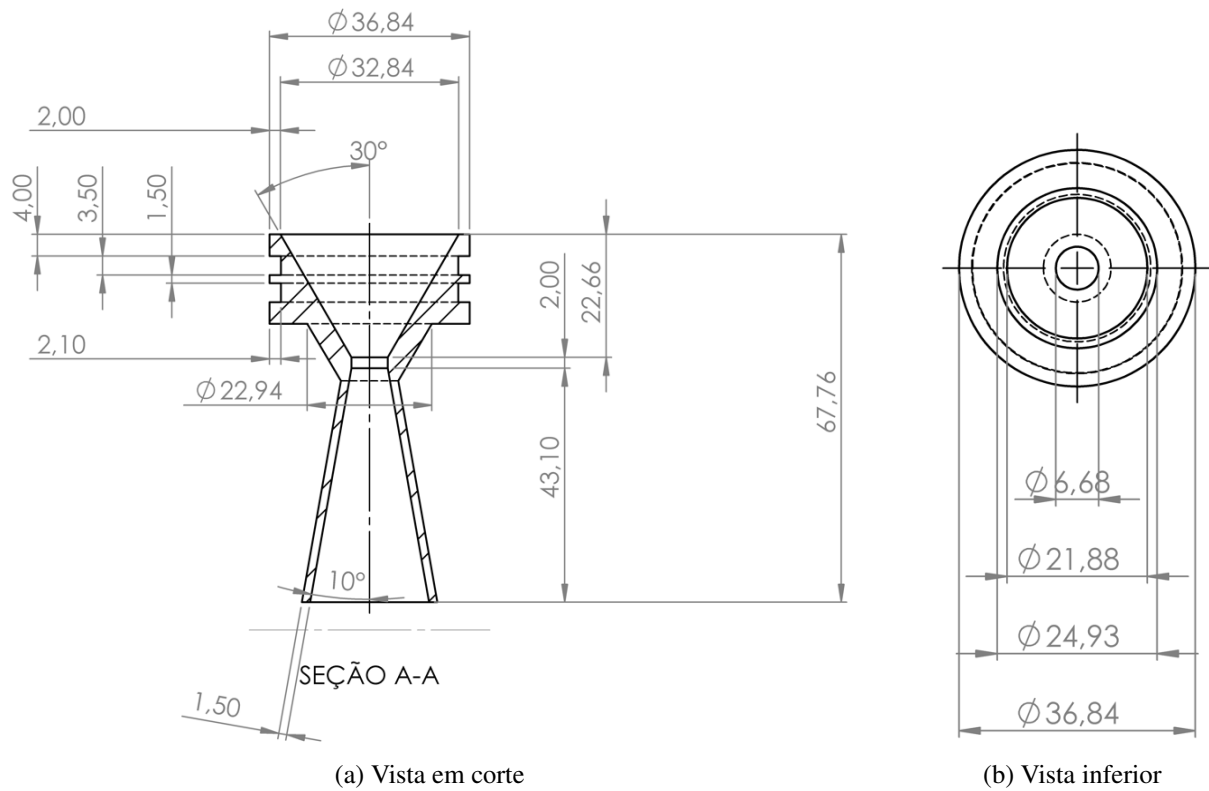


Figura 4.23 – Bocal do motor *Sunrise-II*

Fonte: autor

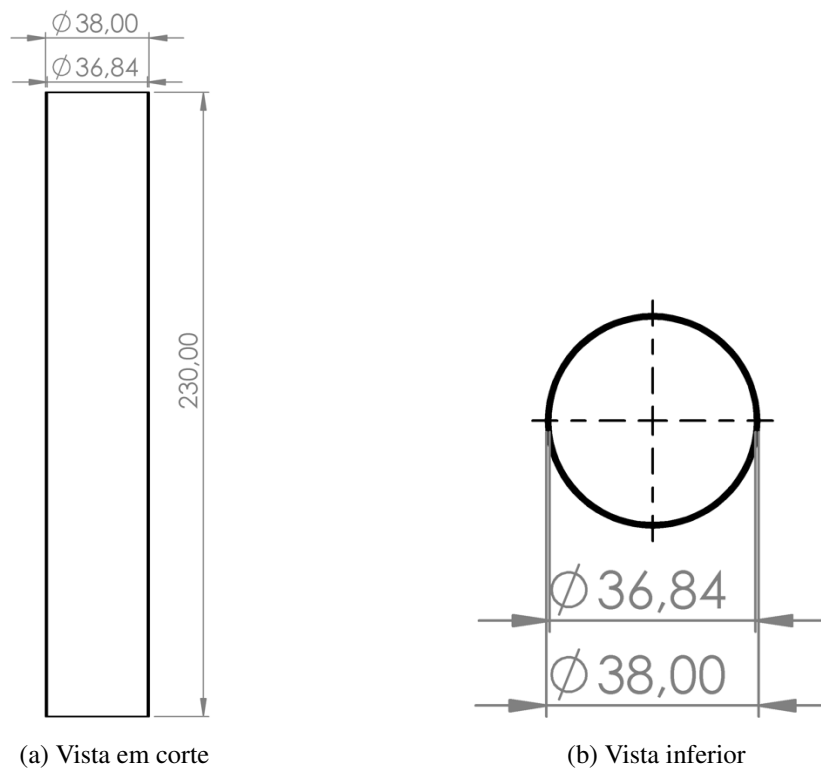
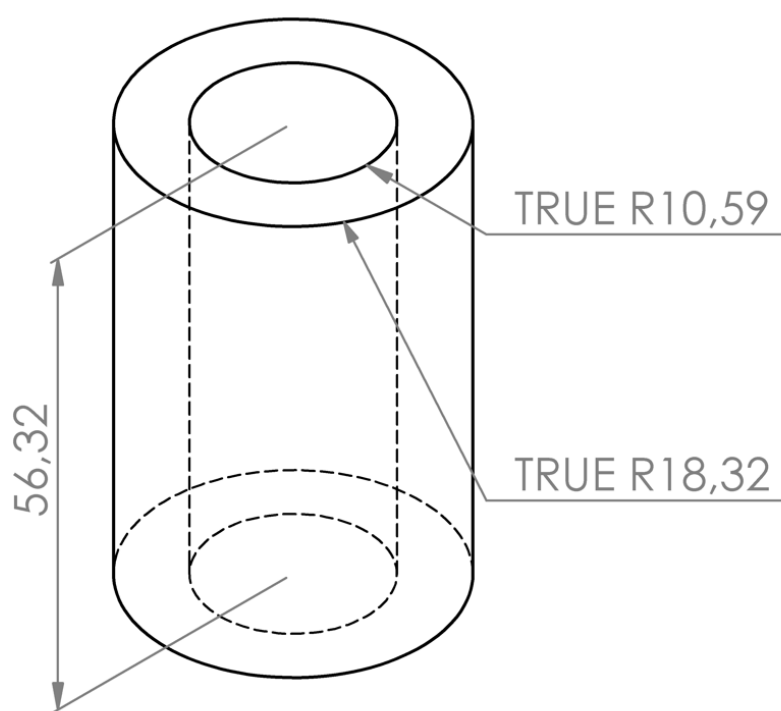


Figura 4.24 – Casing do motor *Sunrise-II*

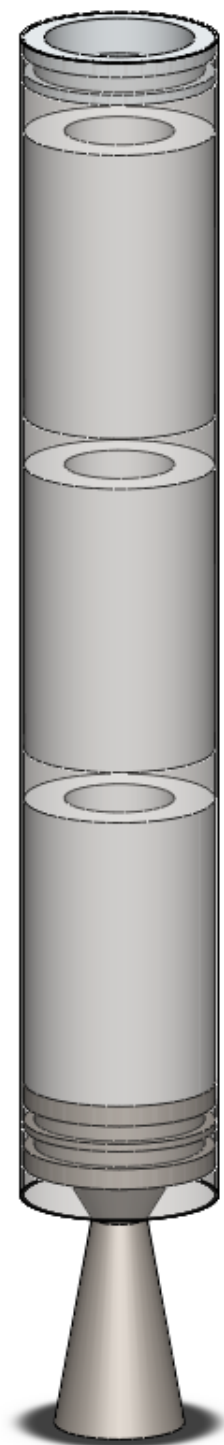
Fonte: autor



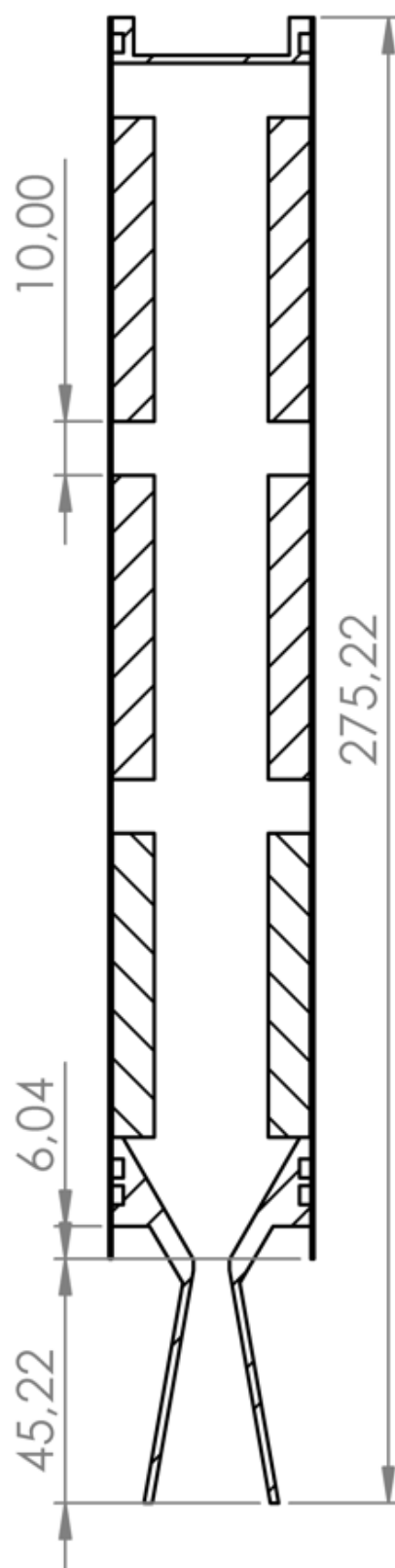
(a) Vista isométrica

Figura 4.25 – Grão de propelente do motor *Sunrise-II*

Fonte: autor



(a) 3D com *casing* transparente



(b) Vista em corte

Figura 4.26 – Montagem do motor *Sunrise-II*
Fonte: autor

A tabela 14 mostra a relação de componentes, seus materiais e massas individuais. Os componentes de fixação e selamento serão desprezados neste projeto por não contribuírem de forma relevante com o peso total.

Tabela 14 – Lista dos componentes do motor *Sunrise-II*

Componente	Material	Massa
1x Bocal	Aço AISI 1020	105.77 g
1x Tubo	Aço AISI 1020	123.89 g
3x Grão de propelente	KNSB	207.51 g
1x Tampa	Aço AISI 1020	29.12 g
Total		466.29 g

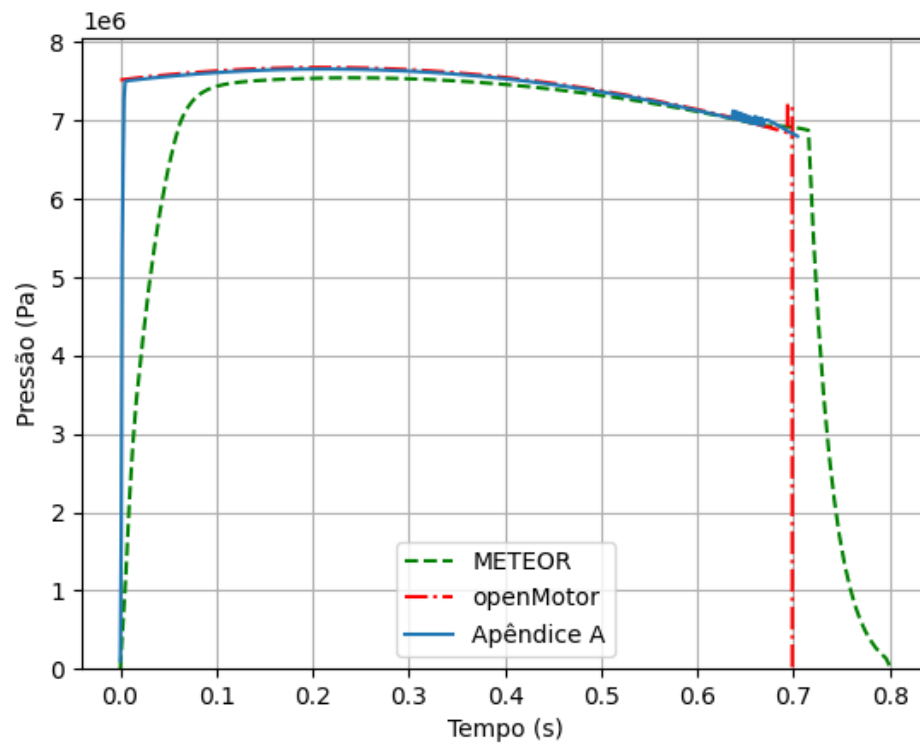
Fonte: autor

Com os dados de empuxo por tempo, massa total, massa de propelente, comprimento e diâmetro, as simulações de trajetória e estabilidade feitas no projeto conceitual serão reexecutadas com o motor *Sunrise-II*.

4.3.2 Curvas do motor *Sunrise-II*

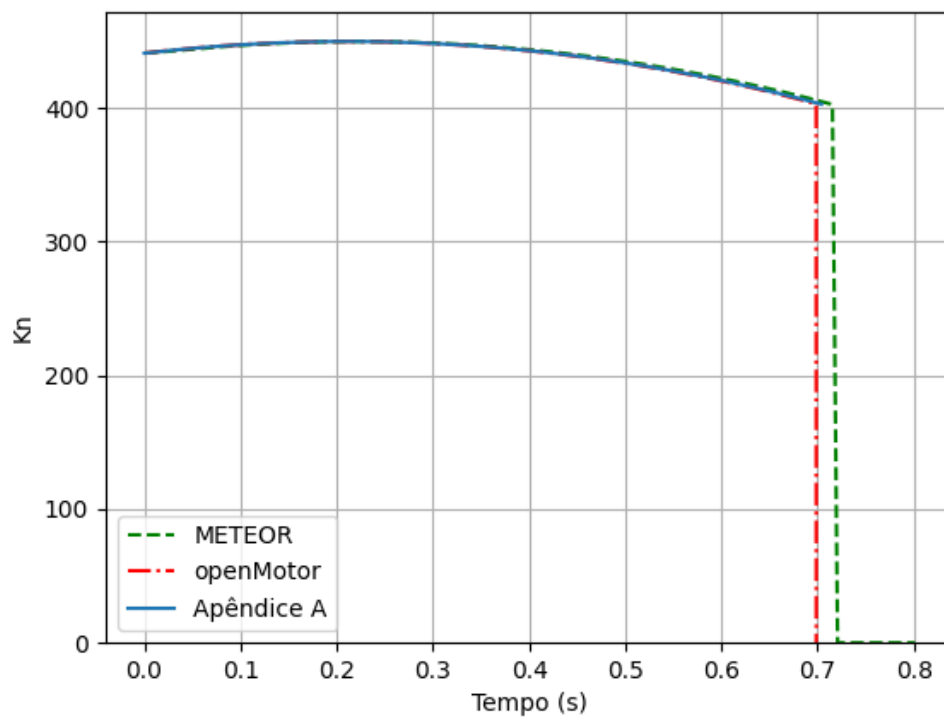
As curvas de pressão ao longo do tempo, Kn ao longo do tempo e empuxo ao longo do tempo foram plotadas ao lado das curvas obtidas no *METEOR* e *openMotor* na Figura 4.27, Figura 4.28 e Figura 4.29. A curva de Kn mostra excelente correlação, já que é apenas uma proporção de áreas. Já as curvas de pressão e empuxo possuem leve discrepância, atribuída aos mesmos motivos citados na seção 4.2.1 e Figura 4.5.

Figura 4.27 – Curvas de pressão na câmara de combustão por tempo



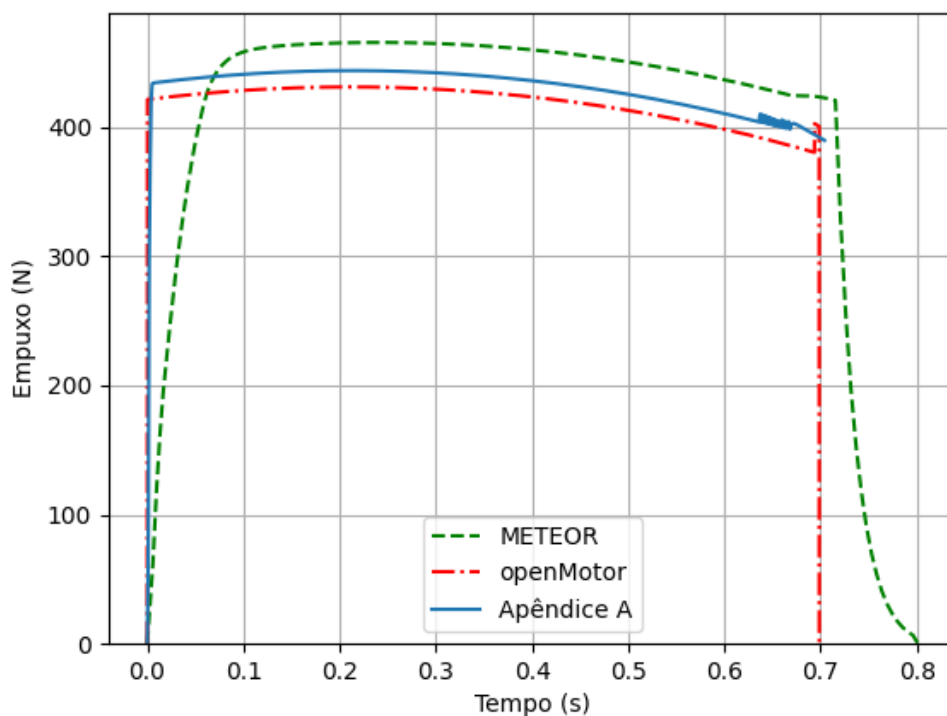
Fonte: autor

Figura 4.28 – Curvas de Kn por tempo



Fonte: autor

Figura 4.29 – Curvas de empuxo por tempo



Fonte: autor

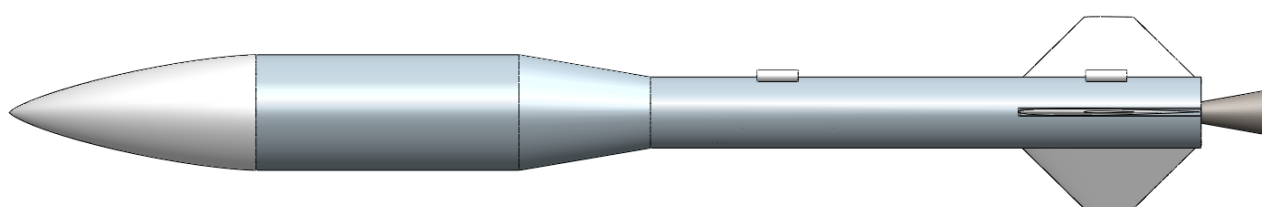
4.3.3 Redimensionamento do foguete

O redimensionamento do corpo principal do foguete, devido à redução do comprimento do motor, acarretará em uma leve diminuição do arrasto de fricção, em detrimento da margem estática de estabilidade. O espaçamento entre a transição e o motor deve ser mantido constante em relação ao projeto conceitual, igual a 60 mm. Somado ao comprimento do motor *Sunrise-II*, tem-se o comprimento mínimo do corpo principal: 335 mm.

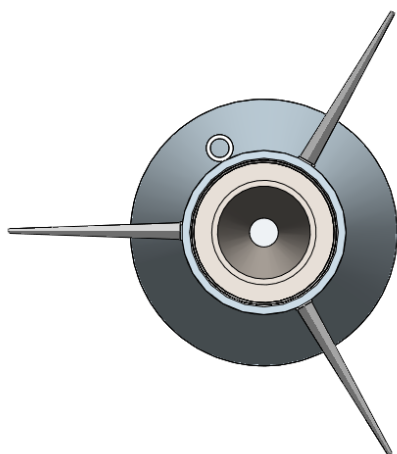
Adicionar uma transição *boattail* reduziria o arrasto de base do corpo principal, porém também em detrimento da margem estática de estabilidade (por trazer o centro de pressão total para cima e o centro de gravidade total para baixo); caso fosse adicionada, a envergadura das aletas ou o número de aletas provavelmente sofreria um aumento, causando por sua vez um aumento no arrasto de fricção e pressão do conjunto de aletas. Neste caso, para o projeto preliminar, optou-se por abrir mão da potencial redução de arrasto com a transição *boattail* em prol da estabilidade.

Outra pequena mudança que deve ser realizada é o posicionamento do encaixe superior da guia de lançamento: no projeto conceitual, este encaixe está praticamente no final da guia de lançamento, já que o foguete possui uma transição e a guia não pode “perfurar” o foguete. Trazendo este encaixe para baixo, aumenta-se o tempo em que o foguete voa com ângulo de ataque nulo.

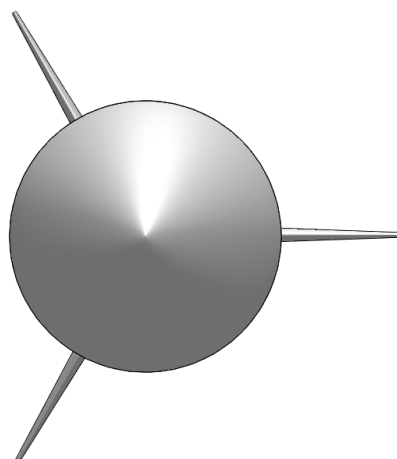
A 4.30a, 4.30b e 4.30c mostram as vistas finais do projeto preliminar, após as correções citadas.



(a) Vista lateral 3D



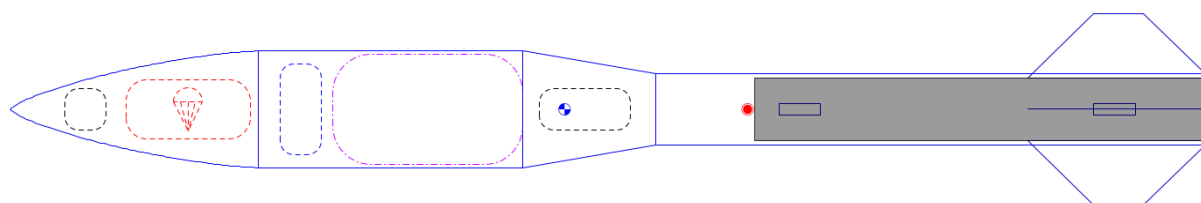
(b) Vista inferior 3D



(c) Vista superior 3D

Figura 4.30 – Projeto preliminar no *SolidWorks*

Fonte: autor

Figura 4.31 – Projeto preliminar no *OpenRocket*, com componentes internos

Fonte: autor

4.3.4 Parâmetros aerodinâmicos e de estabilidade

Como o peso dos componentes do motor e o corpo principal do foguete mudaram, é necessário recalcular os parâmetros aerodinâmicos e de estabilidade feitos para o projeto conceitual. A tabela 15 mostra a relação de componentes externos do projeto preliminar.

Tabela 15 – Lista dos componentes do projeto preliminar

Componentes externos	Massa (<i>SolidWorks</i>)	Massa (<i>OpenRocket</i>)
Coifa	18.82 g	22.3 g
Carenagem	64.16 g	64.2 g
Transição	25.81 g	26.2 g
Corpo principal	160.8 g	160.0 g
Aletas (conjunto)	21.63 g	36.8 g
Motor (carregado)	466.29 g	466.0 g
Guias	0.98 g	0.98 g
Total	758.49 g	766.5 g

Fonte: autor

Os componentes internos permanecem iguais em relação ao projeto conceitual; a tabela 16 mostra os parâmetros de estabilidade para o projeto preliminar.

Tabela 16 – Parâmetros de estabilidade do projeto preliminar

Método	Centro de gravidade	Centro de pressão	Margem estática
Apêndice C	33.6 cm	44.46 cm	1.551 cal
OpenRocket	33.5 cm	44.6 cm	1.58 cal

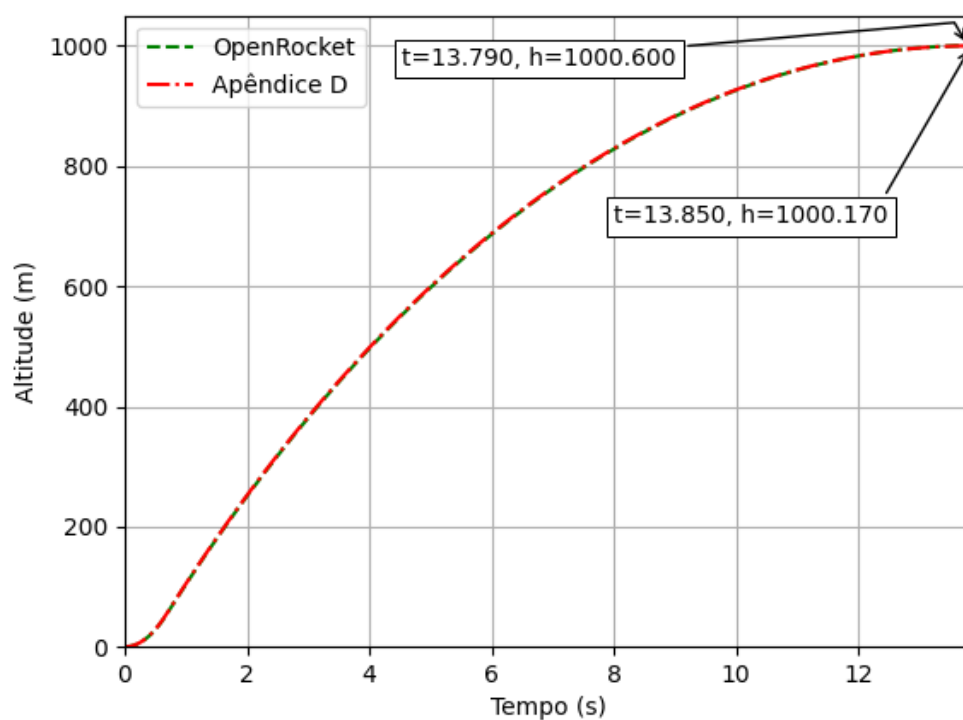
Fonte: autor

O coeficiente de arrasto total em ângulo de ataque nulo e a distribuição individual do arrasto entre os componentes externos sofreu variação mínima, apenas referente à redução do arrasto de fricção do corpo principal: antes, o C_{D_0} calculado pelo apêndice B era igual a 0.257; com a redução do corpo principal, o valor foi para 0.249.

4.3.5 Trajetória

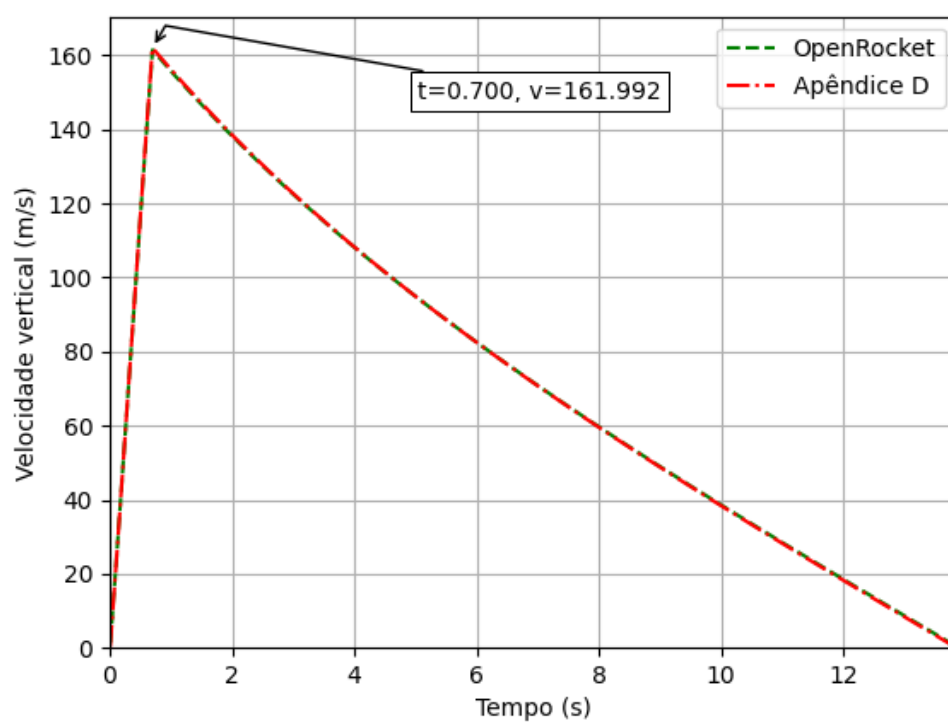
As curvas de altitude por tempo e velocidade por tempo foram recriadas com o foguete resultante do projeto preliminar, e estão dispostas na Figura 4.32 e Figura 4.33 no mesmo formato da seção 4.2.4. Além disso, a curva de número de Mach em função da altitude foi adicionada à Figura 4.34 para avaliar como a velocidade do foguete e a velocidade local do som variam ao longo do percurso.

Figura 4.32 – Curvas de altitude por tempo



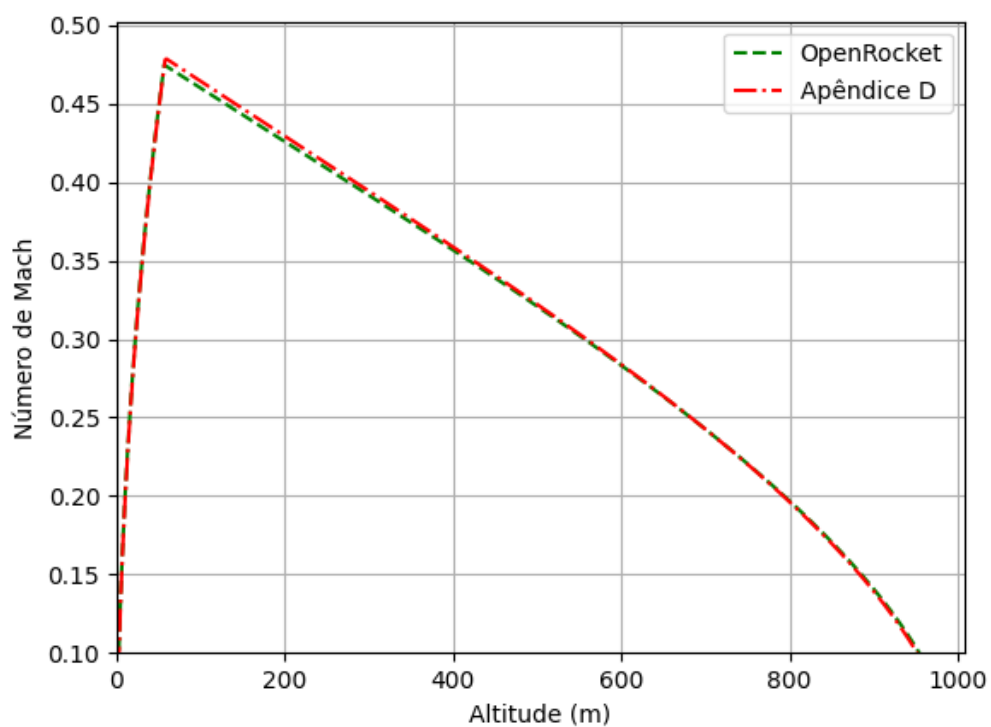
Fonte: autor

Figura 4.33 – Curvas de velocidade vertical por tempo



Fonte: autor

Figura 4.34 – Curvas de número de Mach por altitude



Fonte: autor

A correlação entre as curvas se manteve, com um apogeu exato de 1000 metros. A velocidade máxima atingida reduziu de 225 m/s para 162 m/s (Mach 0.48). Assim, todos os objetivos da seção 4.2 foram atingidos.

5 CONCLUSÃO

A teoria apresentada na seção 3 refletiu com acurácia os resultados do *software* de simulação de foguetes *OpenRocket*. Tanto os parâmetros de estabilidade (centro de pressão, centro de gravidade e margem estática) como os parâmetros aerodinâmicos (coeficientes de arrasto de pressão, de fricção e de base) foram estimados com erros percentuais pequenos. Além disso, os parâmetros do motor condizem com os resultados de *softwares* de simulação de motores a propelente sólido, como o *openMotor* e o *METEOR*.

O objetivo principal de disponibilizar um método viável de projeto de um foguete propulsionado por um motor a propelente sólido foi atendido, bem como os objetivos específicos da seção 2.

É evidente que o processo de fabricação do foguete e do motor induz uma série de imperfeições ao projeto; o apogeu estimado com o projeto preliminar é altamente sensível à variações de massa e de empuxo. Uma fabricação não-ideal de grãos, por exemplo, pode facilmente reduzir o apogeu estimado. A rugosidade superficial das estruturas também pode afetar significativamente os resultados estimados. Não obstante, essas estimativas são o único caminho em direção a um projeto de sucesso. Os testes estáticos e lançamentos irão fornecer, posteriormente, novas informações acerca do projeto e novas perspectivas.

Antes de partir para fabricação, o foguete idealizado no trabalho deve passar por uma última etapa de projeto - o projeto detalhado. Nele, elementos como anéis de vedação, anéis de fixação, parafusos, acopladores, junções e outros componentes menores são inseridos. É importante verificar, também, a disponibilidade comercial de cada peça escolhida para o foguete, balanceando desempenho teórico com exequibilidade.

5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ciência de foguetes abrange tópicos extensos, que não puderam ser apresentados em sua totalidade neste trabalho. A lista a seguir cobre alguns tópicos de interesse, considerações gerais ou possíveis melhorias que o autor julgou pertinentes:

- Os modelos de queima erosiva são pouco aplicados nos *softwares* de simulação de motores. Novas modelagens devem ser implementadas para prever corretamente esse comportamento, que pode levar à falha catastrófica de motores;
- A simulação em um grau de liberdade (altitude) fornece bons *insights* ao projeto, mas não é suficiente para um projeto competitivo. Análises dinâmicas em seis graus de liberdade (translação e rotação nos três eixos) são necessárias para avaliar as forças corretivas em meio a perturbações como vento lateral;
- Os meios de fabricação dos componentes do motor e do foguete foram quase que totalmente omitidos neste trabalho, mas são tão importantes quanto o projeto teórico aqui desenvolvido. A

redução de massa, integridade estrutural e custo reduzido são resultados de uma fabricação bem planejada;

- As modelagens propulsivas e aerodinâmicas podem ser avaliadas por estudos em CFD (*Computational Fluid Dynamics*) através da construção de malhas bem definidas, modelos de turbulência adequados e condições de contorno;
- Como explicado na seção 3.3, a simulação aerodinâmica do *OpenRocket* não leva em conta a pequena seção de escoamento laminar por considerá-la desprezível. Durante o desenvolvimento desse trabalho, uma proposta de implementação dessa seção foi formalizada em seu *GitHub* (*feature request #1400*).

REFERÊNCIAS

- 1 SHEETZ, M. **The space industry is on its way to reach \$1 trillion in revenue by 2040, Citi says.** 2022. Disponível em: <<https://www.cnbc.com/2022/05/21/space-industry-is-on-its-way-to-1-trillion-in-revenue-by-2040-citi.html>>.
- 2 NAKKA, R. **Richard Nakka's Experimental Rocketry Site.** 2022. Disponível em: <<https://www.nakka-rocketry.net/>>.
- 3 CanSat Guidelines. European Space Agency, 2021. Disponível em: <https://cansat.esa.int/wp-content/uploads/2021/11/CanSat_guidelines_2021-22.pdf>.
- 4 BREVAULT, L.; BALESIDENT, M.; DEFOORT, S. Preliminary study on launch vehicle design: Applications of multidisciplinary design optimization methodologies. **Concurrent Engineering**, v. 26, n. 1, p. 93–103, mar. 2018. ISSN 1063-293X, 1531-2003. Disponível em: <<http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1063293X17737131>>.
- 5 EL-SAYED, A. F. **Fundamentals of Aircraft and Rocket Propulsion.** London: Springer London, 2016. ISBN 9781447167945 9781447167969. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-1-4471-6796-9>>.
- 6 SUTTON, G. P.; BIBLARZ, O. **Rocket propulsion elements.** Ninth edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc, 2017. ISBN 9781118753651.
- 7 KUBOTA, N. **Propellants and explosives: thermochemical aspects of combustion.** Weinheim: Wiley-VCH, 2002. ISBN 9783527302109.
- 8 NOZZLE Design. 2022. Disponível em: <<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/nozzle.html>>.
- 9 MILLER, W. H.; BARRINGTON, D. K. A review of contemporary solid rocket motor performance prediction techniques. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 7, n. 3, p. 225–237, mar. 1970. ISSN 0022-4650, 1533-6794. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/3.29911>>.
- 10 MILLER, W. H. **Solid Rocket Motor Performance Analysis and Prediction.** [S.l.], 1971.
- 11 STINE, G. H.; STINE, B. **Handbook of model rocketry.** 7th ed. ed. Hoboken, N.J.: J. Wiley, 2004. ISBN 9780471472421.
- 12 CENTER of Gravity. 2022. Disponível em: <<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/cg.html>>.
- 13 ROCKET Center of Gravity. 2022. Disponível em: <<https://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/rocket/rktcg.html>>.
- 14 BARROWMAN Equations. 2010. Disponível em: <http://mae-nas.eng.usu.edu/MAE_5900_Web/5900/USLI_2010/Flight_Mechanics/Barrowman.html>.
- 15 BARROWMAN, J.; J.A. The theoretical prediction of the center of pressure. **NARAM-8**, 1966.
- 16 SR, G. A. C. **THE DESCRIPTIVE GEOMETRY OF NOSE CONES.** [S.l.], 1996. Disponível em: <http://servidor.demec.ufpr.br/CFD/bibliografia/aerodinamica/Crowell_1996.pdf>.

- 17 NISKANEN, S. **Development of an Open Source model rocket simulation software.** Dissertação (Mestrado) — HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, 2009. Disponível em: <https://github.com/openrocket/openrocket/releases/download/Development_of_an_Open_Source_model_rocket_simulation-thesis-v20090520/Development_of_an_Open_Source_model_rocket_simulation-thesis-v20090520.pdf>.
- 18 WHITE, F. M. **Fluid mechanics.** Eighth edition. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2016. ISBN 9780073398273.
- 19 BARROWMAN, J. S. **The Practical Calculation of the Aerodynamic Characteristics of Slender Finned Vehicles.** Dissertação (Mestrado) — The Catholic University of America, 1967.
- 20 HOERNER, S. F. **Fluid-dynamic drag.** Publicado pelo autor, 1965. Disponível em: <<http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM240/Marchi/Bibliografia/Hoerner.pdf>>.
- 21 FLEEMAN, E. L. **Tactical missile design.** 2nd ed. ed. Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006. (AIAA education series). OCLC: ocm65197947. ISBN 9781563477829.
- 22 HEISLER, H. **Advanced vehicle technology.** 2nd ed. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002. ISBN 9780750651318.
- 23 HANDBOOK of supersonic aerodynamics. Volume 3, section 8, bodies of revolution. **Journal of the Franklin Institute**, v. 274, n. 5, p. 405, nov. 1962. ISSN 00160032. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/001600326291058X>>.
- 24 JR, W. E. S. **Collection of Zero-Lift Drag Data on Bodies of Revolution from Free-Flight Investigations.** [S.l.], 1961. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19630004995/downloads/19630004995.pdf>>.
- 25 SATURN V (left) and N-1 (drawn to scale). Manned Moon rockets. 2022. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Saturn_V_vs_N1_-_to_scale_drawing.png>.
- 26 CALCARA, L. E. et al. **High Power Rocket Design Report.** Tese (Honors Thesis) — Loyola Marymount University, 2016. Disponível em: <<https://digitalcommons.lmu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1138&context=honors-thesis>>.
- 27 FLIGHT of a Model Rocket. 2022. Disponível em: <<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/rktflight.html>>.
- 28 SULI, E.; MAYERS, D. F. **An introduction to numerical analysis.** Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2003. OCLC: ocm50525488. ISBN 9780521810265 9780521007948.
- 29 INTRUDER Data Sheet. 2022. Disponível em: <<https://cdn.shopify.com/s/files/1/0588/8370/2933/files/IntruderDataSheet.pdf?v=1631174645>>.
- 30 38MM Motors (Single Use) : Apogee Rockets, Model Rocketry Excitement Starts Here. 2022. Disponível em: <https://www.apogeerockets.com/Rocket_Motors/AeroTech_Motors/38mm_Motors_Single_Use>.
- 31 NATO (Ed.). **Design methods in solid rocket motors: material in this publication was assembled to support a lecture series presented on 6-7 April 1987 in Rijswijk, The Netherlands, 9-10 April 1987 in Athens, Greece, 13-14 April 1987 in Ankara, Turkey and 23-24 April 1987 in Lancaster, CA, USA.** Neuilly-sur-Seine: AGARD, Advisory Group for Aerospace Research & Development, 1987. (AGARD lecture series, 150). ISBN 9789283504153.

- 32 NOSE cone design. 2022. Page Version ID: 1086316067. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Nose_cone_design&oldid=1086316067>.
- 33 BY Design: Designing with ABS. 2004. Disponível em: <<https://www.plasticstoday.com/thermoforming/design-designing-abs>>.
- 34 DONDANVILLE, C. Using Fiberglass in Rocketry. **Peak of Flight Newsletter**, v. 311, 2012. Disponível em: <<https://www.apogeerockets.com/education/downloads/Newsletter311.pdf>>.
- 35 MILLIGAN, T. V. What is the best fin shape for a model rocket? **Peak of Flight Newsletter**, n. 442, 2017. Disponível em: <<https://apogeerockets.com/education/downloads/Newsletter442.pdf>>.

APÊNDICE A – PROPULSION.PY

```

1 import matplotlib.pyplot as plot
2 import numpy as np
3 import Utils as utils
4 from statistics import mean
5 from scipy import optimize
6 import random
7
8 def get_burn_rate(pressure, is_optimizing = False):
9     a = 0
10    b = 0
11    if pressure <= 103000:
12        return 0.0026
13    elif pressure >= 103000 and pressure < 807000:
14        a = 10.71
15        b = 0.625
16    elif pressure >= 807000 and pressure < 1500000:
17        a = 8.763
18        b = -0.314
19    elif pressure >= 1500000 and pressure < 3790000:
20        a = 7.852
21        b = -0.013
22    elif pressure >= 3790000 and pressure < 7030000:
23        a = 3.907
24        b = 0.535
25    elif pressure >= 7030000 and pressure < 10670000:
26        a = 9.653
27        b = 0.064
28    elif is_optimizing:
29        a = 9.653
30        b = 0.064
31    else:
32        raise Exception("Pressão na câmara acima do intervalo conhecido")
33    return (a*(pressure/1000000)**b)/1000
34
35 def get_bates_burning_area(inner_diam, outer_diam, length, no_grains = 1):
36    return no_grains*np.pi*(0.5*(outer_diam**2 - inner_diam**2) + length*
    inner_diam)
37
38 def get_kn(throat_area, surface_area):
39    return surface_area/throat_area
40
41 def get_chamber_pressure(Kn, propellant_density, burn_rate, c_star):
42    return Kn*propellant_density*burn_rate*c_star
43
44 def get_optimal_expansion_ratio(chamber_pressure, k, ambient_pressure):

```



```

45     if chamber_pressure < 1e-8 or chamber_pressure == ambient_pressure:
46         return 0
47     return 1/(((k+1)/2)**(1/(k-1)) * (ambient_pressure/chamber_pressure)**(1/k) *
    np.sqrt(((k+1)/(k-1)) * (1 - (ambient_pressure/chamber_pressure)**((k-1)/k))))
48
49 def get_exit_pressure(throat_area, exit_area, k, chamber_pressure):
50     if exit_area < 1e-8:
51         return 0
52     return optimize.fsolve(lambda x: (throat_area/exit_area) - (((k+1)/2)**(1/(k-1)) * (x/chamber_pressure)**(1/k) * np.sqrt(((k+1)/(k-1)) * (1 - (x/
    chamber_pressure)**((k-1)/k))))), 0)[0]
53
54
55 def get_coef_thrust(k, exit_pressure, chamber_pressure, exit_area,
    ambient_pressure, throat_area):
56     return np.sqrt((2*k**2)/(k-1) * (2/(k+1))**((k+1)/(k-1)) * (1 - (exit_pressure
    /chamber_pressure)**((k-1)/k))) + (exit_pressure - ambient_pressure) *
    exit_area/chamber_pressure/throat_area
57
58 def get_thrust(thrust_coef, throat_area, chamber_pressure):
59     return thrust_coef*throat_area*chamber_pressure
60
61 def get_mass_flux(burn_rate, surface_area, d, rho):
62     return burn_rate*surface_area*rho/(utils.get_circ_area(d))
63
64 def get_propellant_mass(D, d, L, N, rho):
65     return N*np.pi * (D**2 - d**2) * L * rho / 4
66
67
68 # Parâmetros do motor
69 N = 3 # Número de
    grãos
70 # Diâmetro externo no grão
71 D = 0.03664
72
73
74 # Parâmetros do propelente
75 knsb = {'r0' : 0.0026, 'c_star' : 885, 'rho' : 1750, 'k' : 1.1361}
76
77 # Outros parâmetros
78 ambient_pressure = 101325 # Pressão a nível do mar (Pa)
79
80 def simulate_motor(params, is_optimizing = False):
81     cur_diam, cur_length, d_t = params
82     prop_mass = get_propellant_mass(D, cur_diam, cur_length, N, knsb['rho'])
83     A_t = np.pi*(d_t/2)**2
    # Calcular área da garganta partindo do diâmetro
84     it = 0
    # Iteração

```

```

85     burning_area = [get_bates_burning_area(cur_diam, D, cur_length, N)]
86     # Dados de superfície exposta
87     kn = [burning_area[0]/A_t]
88     # Dados de Kn
89     chamber_pressure = [ambient_pressure]
90     # Dados de pressão na câmara
91     timestep = 0.001
92     # Passo de simulação
93     mass_flow = [0]
94     burn_rate = [knsb['r0']]
95     # Loop de queima
96     while (True):
97         cur_diam += 2*burn_rate[-1]*timestep
98         cur_length -= 2*burn_rate[-1]*timestep
99         if (D - cur_diam) < 1e-8 or cur_length < 1e-8:
100             break
101         burning_area.append(get_bates_burning_area(cur_diam, D, cur_length, N))
102         kn.append(get_kn(A_t, burning_area[-1]))
103         chamber_pressure.append(get_chamber_pressure(kn[-1], knsb['rho'],
104             burn_rate[-1], knsb['c_star']))
105         mass_flow.append(get_mass_flux(burn_rate[-1], burning_area[-1], cur_diam
106             , knsb['rho']))
107         burn_rate.append(get_burn_rate(chamber_pressure[-1], is_optimizing))
108         it = it + 1
109
110     # Listas de plot
111     time = np.linspace(0, it*timestep, it + 1)
112     pressure = np.linspace(103000, 1e7, 500)
113
114     # Cálculo da pressão média, razão de expansão ideal e área de saída
115     chamber_avg = mean(chamber_pressure)
116     ae_at = get_optimal_expansion_ratio(chamber_avg, knsb['k'], ambient_pressure
117 )
118     ae = ae_at * A_t
119
120     # Cálculo da pressão de saída, coeficiente de empuxo e empuxo ao longo da
simulação
121     pe = []
122     thrust_coef = []
123     thrust = []
124     for i,k in enumerate(chamber_pressure):
125         if i == 0:
126             # Condições de contorno
127             pe.append(ambient_pressure)
128             thrust_coef.append(0)
129             thrust.append(0)
130             continue
131         pe.append(get_exit_pressure(A_t, ae, knsb['k'],k))
132         thrust_coef.append(get_coef_thrust(knsb['k'], pe[-1], k, ae,

```

```

    ambient_pressure, A_t))
126     thrust.append(get_thrust(thrust_coef[-1], A_t, k))
127
128     burn_time = timestep*it
129     total_impulse = mean(thrust)*timestep*it
130
131     print("RESULTADOS DA SIMULAÇÃO: ")
132     print("Tempo de queima: ", burn_time,"s")
133     print("Razão de expansão ideal: ",ae_at)
134     print("Diâmetro de saída: ", utils.get_circ_diam(ae)*1e3,"mm")
135     print("Diâmetro da garganta: ", d_t*1e3, "mm")
136     print("Coeficiente de empuxo ideal: ", get_coef_thrust(knsb['k'],
    ambient_pressure, chamber_avg, ae, ambient_pressure, A_t))
137     print("Impulso total: ", total_impulse,"Ns" )
138     print("Fluxo de massa máx.: ", max(mass_flow),"kg/(s*m^2)" )
139     print("MEOP: ", np.max(chamber_pressure)/1e6, "MPa")
140     print("Pressão média: ", chamber_avg/1e6, "MPa")
141     print("Massa de propelente: ", prop_mass*1e3, "g")
142     print("Impulso específico: ", total_impulse/prop_mass/9.81, "s")
143     print("-----")
144     return burning_area, chamber_pressure, kn, pe, thrust_coef, thrust,
    burn_time, total_impulse, mass_flow, time, pressure, burn_rate
145
146
147 ## Funções de otimização
148 def optimize_total_impulse(params):
149     _, _, _, _, _, _, _, total_impulse,_, _, _, _ = simulate_motor(params, True)
150     # Projeto conceitual objetivo -> 434 Ns
151     # Preliminar -> 294
152     impulse_goal = 294
153     return abs(total_impulse - impulse_goal)
154
155 def restraint_mean_pressure(params):
156     _, chamber_pressure, _, _,_,_,_,_,_,_, _ = simulate_motor(params, True)
157     mean_chamber_pressure_goal = 8.03e6
158     max_deviation = 1e6
159     return max_deviation - abs(mean_chamber_pressure_goal - mean(
    chamber_pressure))
160
161 def restraint_peak_pressure(params):
162     _, chamber_pressure, _, _,_,_,_,_,_,_, _ = simulate_motor(params, True)
163     max_chamber_pressure_goal = 8.03e6
164     return max_chamber_pressure_goal - max(chamber_pressure)
165
166 def restraint_kn_variation(params):
167     _, _, kn, _,_,_,_,_,_,_, _ = simulate_motor(params, True)
168     max_kn_variation_goal = 0.15
169     return max_kn_variation_goal - (max(kn) - min(kn))/(max(kn))
170

```

```

171 def restraint_port_ratio(params):
172     d, _, d_t, = params
173     port_area = np.pi*d**2/4
174     throat_area = np.pi*d_t**2/4
175     min_port_throat_ratio_goal = 2
176     return (port_area/throat_area - min_port_throat_ratio_goal)
177
178 def restraint_mass_flux(params):
179     _, _, _, _, _, _, _, mass_flux, _, _, _ = simulate_motor(params, True)
180     max_mass_flux_goal = 1406
181     return max_mass_flux_goal - max(mass_flux)
182
183
184 # Otimiza um motor com um impulso total como objetivo e restrições
185 def optimize_for_impulse():
186     constraint = [{'type' : 'ineq', 'fun' : restraint_mean_pressure},
187                  # Restrição de design #1 pressão média prox de 8.03e6 Pa
188                  {'type' : 'ineq', 'fun' : restraint_port_ratio},
189                  # Restrição de design #2 Port/Throat > 2
190                  {'type' : 'ineq', 'fun' : restraint_peak_pressure},
191                  # Pressão máx. < 8.03e6 Pa
192                  {'type' : 'ineq', 'fun' : restraint_kn_variation},
193                  # Restrição de Kn no máx 15%
194                  {'type' : 'ineq', 'fun' : restraint_mass_flux}]
195     # Restrição de design #3 fluxo de massa máx. 2 lb/sqin/s
196     bounds = ((0.01, 0.03664*0.6), (0.03, 0.15), (0.005, 0.02))
197     # Limites dimensionais
198     it = 0
199     while (True):
200         # Chute inicial aleatório
201         initial_guess = [random.uniform(0.01, 0.03664*0.6), random.uniform
202         (0.03, 0.15), random.uniform(0.005, 0.02)]
203         a = optimize.minimize(optimize_total_impulse, initial_guess, bounds=
204         bounds, constraints=constraint )
205         if a.success and a.fun < 10:
206             return a.x, it
207         elif it > 100:
208             global N
209             if N > 8:
210                 print("Nenhuma configuração adequada foi encontrada.")
211                 break
212             N += 1
213         it += 1
214
215
216
217
218
219 # Plotar curvas do METEOR, OpenMotor juntas:
220 def compare_curves():
221

```

```

212     burning_area, chamber_pressure, kn, pe, thrust_coef, thrust, burn_time,
total_impulse, mass_flow, time, pressure, burn_rate = simulate_motor
([0.02118, 0.05632, 0.00668])

213
214     METEOR_DATA = []
215     OPEN_MOTOR_DATA = []
216
217     METEOR = open('meteor_data_prelim.csv', 'r')
218     OPEN_MOTOR = open('open_motorpreliminar.csv', 'r')
219
220     for line in METEOR:
221         METEOR_DATA.append(np.array(line.split(), dtype=np.float32))
222     for line in OPEN_MOTOR:
223         OPEN_MOTOR_DATA.append(np.array(line.split(), dtype=np.float32))
224
225     METEOR_DATA_TIME = list(list(zip(*METEOR_DATA))[0])
226     METEOR_DATA_THRUST = list(list(zip(*METEOR_DATA))[1])
227     METEOR_DATA_KN = list(list(zip(*METEOR_DATA))[2])
228     METEOR_DATA_PRESSURE = list(list(zip(*METEOR_DATA))[3])
229
230     OPEN_MOTOR_DATA_TIME = list(list(zip(*OPEN_MOTOR_DATA))[0])
231     OPEN_MOTOR_DATA_KN = list(list(zip(*OPEN_MOTOR_DATA))[1])
232     OPEN_MOTOR_DATA_PRESSURE = list(list(zip(*OPEN_MOTOR_DATA))[2])
233     OPEN_MOTOR_DATA_THRUST = list(list(zip(*OPEN_MOTOR_DATA))[3])
234
235     # Curvas de empuxo
236     f= plot.figure()
237     ax = f.gca()
238     plot.plot(METEOR_DATA_TIME, METEOR_DATA_THRUST, '--g', label = 'METEOR')
239     plot.plot(OPEN_MOTOR_DATA_TIME, OPEN_MOTOR_DATA_THRUST, '-.r', label = '
openMotor')
240     plot.plot(time, thrust, label = 'Apêndice A')
241     ax.set_ylim(ymin=0)
242     plot.xlabel("Tempo (s)")
243     plot.ylabel("Empuxo (N)")
244     plot.legend(loc = 'best')
245     plot.grid()
246
247     # Curvas de pressão
248     f= plot.figure()
249     ax = f.gca()
250     plot.plot(METEOR_DATA_TIME, list(map(lambda x: x*1e5, METEOR_DATA_PRESSURE))
, '--g', label = 'METEOR')
251     plot.plot(OPEN_MOTOR_DATA_TIME, OPEN_MOTOR_DATA_PRESSURE, '-.r', label = '
openMotor')
252     plot.plot(time, chamber_pressure, label = 'Apêndice A')
253     ax.set_ylim(ymin=0)
254     plot.xlabel("Tempo (s)")
255     plot.ylabel("Pressão (Pa)")

```

```

256     plot.legend(loc = 'best')
257     plot.grid()
258
259     # Curvas de Kn
260     f= plot.figure()
261     ax = f.gca()
262     plot.plot(METEOR_DATA_TIME, METEOR_DATA_KN, '--g', label = 'METEOR')
263     plot.plot(OPEN_MOTOR_DATA_TIME, OPEN_MOTOR_DATA_KN, '-.r', label = '
openMotor')
264     plot.plot(time, kn, label = 'Apêndice A')
265     ax.set_ylim(ymin=0)
266     plot.xlabel("Tempo (s)")
267     plot.ylabel("Kn")
268     plot.legend(loc = 'best')
269     plot.grid()
270
271     plot.show()
272     # Salvar arquivo do motor (RASP) para o OpenRocket
273     file = open('motor.txt', 'w')
274     for i, time in enumerate(time):
275         file.write("\t%s\t%s\n" % (time, thrust[i]))
276     file.close()
277
278
279 def mach_curve():
280     # Curva de número de mach vs eixo x do nozzle.
281     burning_area, chamber_pressure, kn, pe, thrust_coef, thrust, burn_time,
total_impulse, mass_flow, time, pressure, burn_rate = simulate_motor
([0.02118, 0.05632, 0.00668])
282
283
284
285
286 if __name__ == "__main__":
287     # Descomentar a linha abaixo na etapa de otimização.
288     #data, it = optimize_for_impulse()
289     compare_curves()

```

APÊNDICE B – AERODYNAMICS.PY

```

1 import numpy as np
2 import Utils as utils
3 import matplotlib.pyplot as plot
4
5 ##### Definição das funções de arrasto
6 def get_reynolds(V, L, h):
7     isa = utils.get_real_atmosphere(h)
8     rho = isa['rho']
9     mu = isa['mu']
10    return rho*V*L/mu
11
12 def get_friction(reynolds, surface_roughness, rocket_ref_length):
13     Re_crit = 51*(surface_roughness/rocket_ref_length)**(-1.039)
14     #a = 1.0/(((1.5*np.log(reynolds))-5.6)**2)
15     #b = 0.032*(surface_roughness/rocket_ref_length)**0.2
16     #return np.maximum(a,b)
17     if reynolds < 1e4:
18         return 1.48e-2
19     elif reynolds >= 1e4 and reynolds < Re_crit:
20         return 1.0/(((1.5*np.log(reynolds))-5.6)**2)
21     else:
22         return 0.032*(surface_roughness/rocket_ref_length)**0.2
23
24 def get_friction_compressed(friction_coefficient, mach):
25     return friction_coefficient*(1-0.1*mach**2)
26
27 def get_scaled_friction_coef(friction_coefficient_compressed, param, wet_area,
    ref_area):
28     return friction_coefficient_compressed*((1+ param)*wet_area)/ref_area
29
30 def get_von_karman_nosecone_friction_drag(length, base_diam, rocket_length,
    rocket_ref_diam, mach = 0.3, h = 0, surface_roughness = 20e-6):
31     # Arrasto de fricção de uma coifa de Von Karman, com base no seu comprimento
    e diâmetro.
32     # Integração numérica para área molhada:
33     n = 5000
34     dx = length/n
35     x = np.linspace(0, length, n)
36     theta = np.arccos(1 - 2*x/length)
37     y = base_diam/2 * np.sqrt(theta - np.sin(2*theta)/2)/np.sqrt(np.pi)
38     wet_area = 0
39     for i,k in enumerate(x, start = 0):
40         if i == 0:
41             continue
42         wet_area += np.pi*(y[i-1]+y[i])*np.sqrt((y[i-1]-y[i])**2 + dx**2)

```

```

43     #
44     a = utils.get_real_atmosphere(h) ['a']
45     v = mach*a
46     Re = get_reynolds(v, rocket_length, h)
47     fineness_ratio = rocket_length/(base_diam/2)
48
49     coef1 = get_friction(Re, surface_roughness, rocket_length)
50     coef2 = get_friction_compressed(coef1, mach)
51     param = 1/(2*fineness_ratio)
52     coef3 = get_scaled_friction_coef(coef2, param, wet_area, utils.get_circ_area
(rocket_ref_diam))
53     return coef3
54
55
56 def get_transition_friction_drag(length, diam_1, diam_2, rocket_length,
rocket_ref_diam, mach = 0.3, h = 0, surface_roughness = 20e-6):
57     # Arrasto de fricção para uma transição, com base nos dois diâmetros.
58     # Área molhada de um tronco cônico:
59     wet_area = np.pi * (diam_1/2 + diam_2/2)*np.sqrt((diam_1/2 - diam_2/2)**2 +
length**2)
60     #
61     a = utils.get_real_atmosphere(h) ['a']
62     v = mach*a
63     Re = get_reynolds(v, rocket_length, h)
64     fineness_ratio = rocket_length/(rocket_ref_diam/2)
65     coef1 = get_friction(Re, surface_roughness, rocket_length)
66     coef2 = get_friction_compressed(coef1, mach)
67     param = 1/(2*fineness_ratio)
68     coef3 = get_scaled_friction_coef(coef2, param, wet_area, utils.get_circ_area
(rocket_ref_diam))
69     return coef3
70
71 def get_fins_friction_drag(chord_root, chord_tip, span, thickness, rocket_length
,rocket_ref_diam, mach = 0.3, no_fins = 1, h = 0, surface_roughness = 20e-6)
:
72     # Arrasto de fricção para o conjunto de aletas
73     # Área molhada de uma aleta trapezoidal
74     taper = chord_tip/chord_root
75     mac = 2/3 *chord_root*(taper**2 + taper + 1)/(taper + 1)
76     mac = chord_tip/2 + chord_root/2
77     wet_area = no_fins * 2 * mac * span
78
79     a = utils.get_real_atmosphere(h) ['a']
80     v = mach*a
81     Re = get_reynolds(v, rocket_length, h)
82
83     coef1 = get_friction(Re, surface_roughness, rocket_length)
84     coef2 = get_friction_compressed(coef1, mach)
85     param = 2*thickness/mac

```



```

86     coef3 = get_scaled_friction_coef(coef2, param, wet_area, utils.get_circ_area
    (rocket_ref_diam))
87     return coef3
88
89 def get_body_friction_drag(length, diam, rocket_length, rocket_ref_diam ,mach =
    0.3, h = 0, surface_roughness = 20e-6):
90     # Arrasto de fricção para uma transição, com base nos dois diâmetros.
91     # Área molhada de um tronco cônico:
92     wet_area = 2 * length * np.pi * diam/2
93     #
94     a = utils.get_real_atmosphere(h) ['a']
95     v = mach*a
96     Re = get_reynolds(v, rocket_length, h)
97     fineness_ratio = rocket_length/(rocket_ref_diam/2)
98     coef1 = get_friction(Re, surface_roughness, rocket_length)
99     coef2 = get_friction_compressed(coef1, mach)
100    param = 1/(2*fineness_ratio)
101    coef3 = get_scaled_friction_coef(coef2, param, wet_area, utils.get_circ_area
    (rocket_ref_diam))
102    return coef3
103
104
105 def get_base_cd(mach):
106     if mach < 1:
107         return 0.12 + 0.13*mach**2
108     else:
109         return 0.25/mach
110 def get_stag_cd(mach):
111     return .85*(1 + mach**2/4 + mach**4/40)
112
113 def get_von_karman_pressure_drag(length, base_diam, rocket_ref_diam):
114     # Para a coifa de Von Karman, temos coef. de arrasto de pressão nulo no
    começo da região transônica
115     # Portanto, basta usar a eq. para o regime subsônico
116     dx = 0.00001
117     theta_1 = np.arccos(1 - 2*length/length)
118     y_1 = base_diam/2 * np.sqrt(theta_1 - np.sin(2*theta_1)/2)/np.sqrt(np.pi)
119
120     theta_2 = np.arccos(1 - 2*(length-dx)/length)
121     y_2 = base_diam/2 * np.sqrt(theta_2 - np.sin(2*theta_2)/2)/np.sqrt(np.pi)
122     phi = np.arctan((y_1-y_2)/dx)
123     unscaled_coef = 0.8*np.sin(phi)**2
124     scaled_coef = unscaled_coef*utils.get_circ_area(base_diam)/utils.
    get_circ_area(rocket_ref_diam)
125     return scaled_coef
126
127 def get_boattail_pressure_drag(length, diam_1, diam_2, rocket_ref_diam, mach =
    0.3):
128     aft_diam = np.minimum(diam_1, diam_2)

```

```

129     fore_diam = np.maximum(diam_1,diam_2)
130     gamma = length/np.abs(diam_1 - diam_2)
131     param = 0
132     if gamma <= 1:
133         param = 1
134     elif gamma > 1 and gamma < 3:
135         param = (3-gamma)/2
136     boattail_area = np.pi*(fore_diam/2)**2 - np.pi*(aft_diam/2)**2
137     cd = get_base_cd(mach)*boattail_area*param/utils.get_circ_area(
rocket_ref_diam)
138     return cd
139
140 def get_end_base_drag(end_diam, rocket_ref_diam, mach = 0.3):
141     return get_base_cd(mach)*np.pi*end_diam**2/4/utils.get_circ_area(
rocket_ref_diam)
142
143 def get_fins_pressure_drag(span, thickness,sweep_angle, rocket_ref_diam ,mach =
0.3, no_fins = 1, type = 'square'):
144     cd_le = 0
145     cd_te = 0
146     cd_le_perp = 0
147     if type == 'airfoil' or type == 'rounded':
148         cd_le_perp = (1-mach**2)**(-0.417) - 1
149         cd_le = cd_le_perp*np.cos(np.deg2rad(sweep_angle))**2
150         cd_te = 0
151         if type == 'rounded':
152             cd_te = get_base_cd(mach)/2
153     else:
154         cd_le_perp = get_stag_cd(mach)
155         cd_le = cd_le_perp*np.cos(np.deg2rad(sweep_angle))**2
156         cd_te = get_base_cd(mach)
157     return (cd_le + cd_te)*no_fins*span*thickness/utils.get_circ_area(
rocket_ref_diam)
158
159 def get_launch_lug_drag(length, diam_1, diam_2, rocket_ref_diam, mach = 0.3):
160     ld = length/np.maximum(diam_1,diam_2)
161     cd = np.maximum(1.3 - ld, 1)*get_stag_cd(mach)
162     area = np.pi*(np.maximum(diam_1, diam_2)/2)**2 - (np.pi*(np.minimum(diam_1,
diam_2)/2)**2 * np.maximum(1 - ld, 0))
163     return cd * area/utils.get_circ_area(rocket_ref_diam)
164
165
166 ##### Fim de definições de funções
167
168
169 ## Função a ser chamada na simulação:
170
171 def get_rocket_cd(mach, h = 0, only_total = True):
172     # Parâmetros do foguete

```

```

173     # Coifa
174     nose_length = 0.15
175     nose_diam = 0.07
176     nose_roughness = 60e-6
177
178     # Fairing (corpo da carga-paga)
179     fairing_length = 0.16
180     fairing_diam = 0.07
181     fairing_roughness = 60e-6
182
183     # Transição Fairing->Corpo
184     transition_length = 0.08
185     transition_diam_1 = 0.07
186     transition_diam_2 = 0.043
187     transition_roughness = 60e-6
188
189     # Corpo
190     body_length = 0.335
191     body_diam = 0.043
192     body_roughness = 60e-6
193
194     # Aletas
195     fin_count = 3
196     fin_chord_root = 0.11
197     fin_chord_tip = 0.03
198     fin_sweep_angle = 41.6
199     fin_type = 'airfoil'
200     fin_roughness = 60e-6
201     fin_span = 0.045
202     fin_thickness = 0.0044
203
204     # Encaixes da guia de lançamento
205     launchlug_count = 2
206     launchlug_diam_1 = 0.007
207     launchlug_diam_2 = 0.005
208     launchlug_length = 0.025
209
210
211     # Foguete inteiro
212     rocket_ref_diam = np.max([nose_diam, fairing_diam, transition_diam_1,
213     transition_diam_2, body_diam])
214
215     rocket_length = nose_length + fairing_length + transition_length +
216     body_length
217
218     ## Arrasto da coifa
219     nose_pressure_cd = get_von_karman_pressure_drag(nose_length, nose_diam,
220     rocket_ref_diam)
221     nose_friction_cd = get_von_karman_nosecone_friction_drag(nose_length,

```

```

nose_diam, rocket_length, rocket_ref_diam, mach, h, nose_roughness)
219
220
221     ## Arrasto do fairing
222     fairing_friction_cd = get_body_friction_drag(fairing_length, fairing_diam,
rocket_length, rocket_ref_diam, mach, h, fairing_roughness)
223
224
225     # Arrasto da transição fairing -> corpo
226     transition_pressure_cd = get_boattail_pressure_drag(transition_length,
transition_diam_1, transition_diam_2, rocket_ref_diam, mach)
227     transition_friction_cd = get_transition_friction_drag(transition_length,
transition_diam_1, transition_diam_2, rocket_length, rocket_ref_diam, mach, h
, transition_roughness)
228
229
230     # Arrasto do corpo
231     body_friction_cd = get_body_friction_drag(body_length, body_diam,
rocket_length, rocket_ref_diam, mach, h, body_roughness)
232     body_base_cd = get_end_base_drag(body_diam, rocket_ref_diam, mach)
233
234     # Arrasto das aletas
235     fins_friction_cd = get_fins_friction_drag(fin_chord_root, fin_chord_tip,
fin_span, fin_thickness, rocket_length, rocket_ref_diam, mach, fin_count, h,
fin_roughness)
236     fins_pressure_cd = get_fins_pressure_drag(fin_span, fin_thickness,
fin_sweep_angle, rocket_ref_diam, mach, fin_count, fin_type)
237
238     # Arrasto dos encaixes
239     launchlug_pressure_cd = get_launch_lug_drag(launchlug_length,
launchlug_diam_1, launchlug_diam_2, rocket_ref_diam, mach)
240
241     total_friction_cd = nose_friction_cd + fairing_friction_cd +
transition_friction_cd + body_friction_cd + fins_friction_cd
242     total_pressure_cd = nose_pressure_cd + transition_pressure_cd +
fins_pressure_cd + launchlug_count * launchlug_pressure_cd
243     total_base_cd = body_base_cd
244     total_cd = total_friction_cd + total_pressure_cd + total_base_cd
245
246     if only_total:
247         return total_cd
248     else:
249         return total_friction_cd, total_pressure_cd, total_base_cd
250
251
252
253 def compare_curves():
254     mach_range = np.linspace(0, 0.8, 50)
255     f= plot.figure()

```

```

256     ax = f.gca()
257     pressure_cd = [get_rocket_cd(M, only_total = False)[1] for M in mach_range]
258     friction_cd = [get_rocket_cd(M, only_total = False)[0] for M in mach_range]
259     base_cd = [get_rocket_cd(M, only_total = False)[2] for M in mach_range]
260     plot.plot(mach_range, pressure_cd, '--g', label = 'Arrasto de pressão')
261     plot.plot(mach_range, friction_cd, '-.r', label = 'Arrasto de fricção')
262     plot.plot(mach_range, base_cd, '.b', label = 'Arrasto de base')
263     plot.xlabel("Número de Mach")
264     plot.ylabel("Coeficiente de arrasto")
265     plot.legend()
266     plot.show()
267
268 if __name__ == "__main__":
269     compare_curves()

```

APÊNDICE C – STABILITY.PY

```

1 import numpy as np
2
3 # Parâmetros da coifa
4 m_nosecone = .0152          # Massa da coifa (kg)
5 l_nosecone = 0.15           # Comprimento da coifa (m)
6 d_nosecone = 0.07           # Diâmetro da base da coifa (m)
7 xcg_nosecone = (2/3)*l_nosecone # Distância do CG da coifa em
    relação à ponta da coifa (m)
8 cn_n = 2                    # Coef. para a coifa
9 x_n = l_nosecone*(1 - 0.500) # Distância relativa, coifa
    Von Karman
10
11 # Parâmetros da carenagem
12 m_fairing = .0642
13 l_fairing = 0.16
14 d_fairing = 0.07
15 xcg_fairing = 0.5*l_fairing
16 xcg_fairing_ref = l_nosecone + xcg_fairing
17 r_fairing_end = d_fairing/2
18 # Parâmetros da transição
19 m_transition = 0.0262
20 l_transition = 0.08
21 d_fore_transition = 0.07
22 d_aft_transition = 0.043
23 x_p = l_nosecone + l_fairing
24 xcg_transition = 0.03676
25 xcg_transition_ref = l_nosecone + l_fairing + xcg_transition
26 cn_t = 2*((d_aft_transition/d_nosecone)**2 - (d_fore_transition/d_nosecone)**2 )
27 x_t = x_p + l_transition/3 * (1 + (1 - d_fore_transition/d_aft_transition)/(1 -
    (d_fore_transition/d_aft_transition)**2))
28
29 # Parâmetros do corpo principal
30 m_body = .160
31 l_body = 0.335
32 d_body = 0.043
33 xcg_body = 0.5*l_body
34 xcg_body_ref = l_nosecone + l_fairing + l_transition + xcg_body
35 r_body_end = d_body/2
36
37 # Parâmetros do motor
38 m_motor = 0.46629
39 l_motor = 0.275
40 d_motor = 0.38
41 xcg_motor = 0.5*l_motor
42 xcg_motor_ref = l_nosecone + l_fairing + l_transition + l_body - l_motor +

```

```

        xcg_motor

43
44 # Parâmetros da aleta
45 n_fins = 3
46 m_fin = 0.00557
47 s_fin = 0.045
48 lf_fin = 0.045
49 cr_fin = 0.11
50 ct_fin = 0.03
51 xcg_fin = 0.5*cr_fin
52 xcg_fin_ref = l_nosecone + l_fairing + l_transition + l_body - cr_fin + xcg_fin
53 x_r = (cr_fin - ct_fin)/2
54 x_b = l_nosecone + l_fairing + l_transition + l_body - cr_fin
55 cn_f = (1 + (r_body_end/(r_body_end + s_fin)))*( (4*n_fins*(s_fin/d_nosecone)
        **2)/(1 + np.sqrt(1 + (2*lf_fin/(cr_fin+ct_fin))**2)))
56 x_f = x_b + (x_r/3) * ((cr_fin + 2*ct_fin)/(cr_fin + ct_fin)) + (1/6) * ((cr_fin
        + ct_fin) - (cr_fin*ct_fin)/(cr_fin + ct_fin))
57
58 ## COMPONENTES INTERNOS
59 # Parâmetros dos eletronicos
60 m_bay = 0.3
61 l_bay = 0.025
62 xcg_bay = l_bay/2
63 xcg_bay_ref = xcg_bay + 0.033
64
65 # Paraquedas
66 m_parachute = 0.038
67 l_parachute = 0.075
68 xcg_parachute = l_parachute/2
69 xcg_parachute_ref = xcg_parachute + 0.07
70
71 # CanSat (externo)
72 m_cansat_external = 0.2
73 l_cansat_external = 0.025
74 xcg_cansat_external = l_cansat_external/2
75 xcg_cansat_external_ref = l_nosecone + xcg_cansat_external + 0.013
76
77 # CanSat (interno)
78 m_cansat_internal = 0.35
79 l_cansat_internal = 0.115
80 xcg_cansat_internal = l_cansat_internal/2
81 xcg_cansat_internal_ref = l_nosecone + xcg_cansat_internal+ 0.045
82
83 # Carga
84 m_charge = 0.2
85 l_charge = 0.055
86 xcg_charge = l_charge/2
87 xcg_charge_ref = l_nosecone + l_fairing + xcg_charge + 0.01
88

```

```

89 # Centro de gravidade
90 xcg = (m_nosecone * xcg_nosecone + m_body * xcg_body_ref + m_transition *
      xcg_transition_ref + m_motor * xcg_motor_ref + \
91      n_fins*m_fin * xcg_fin_ref + m_bay*xcg_bay_ref + m_parachute*
      xcg_parachute_ref + m_cansat_internal*xcg_cansat_internal_ref + \
92      m_cansat_external*xcg_cansat_external_ref + m_charge*xcg_charge_ref)/ \
93      (m_nosecone + m_body + m_transition + m_motor + n_fins*m_fin + m_bay
      + m_parachute + m_cansat_internal + m_cansat_external + m_charge)
94
95 xcp = (cn_t * x_t + cn_f*x_f + cn_n*x_n)/(cn_t + cn_f + cn_n)
96
97 static_margin = (xcp-xcg)/d_fairing
98
99
100 print ("Xcg em relação à ponta da coifa: ", xcg, "m")
101 print ("Xcp em relação à ponta da coifa: ", xcp, "m")
102 print ("Margem de estabilidade estática: ", static_margin, " cal")

```


APÊNDICE D – TRAJECTORY.PY

```

1 import Aerodynamics as aero
2 import Propulsion as prop
3 import Utils as utils
4 import matplotlib.pyplot as plot
5 import numpy as np
6 import scipy.interpolate as terp
7 # Parâmetros do foguete
8 m_empty = 0.75849 + .350 + .200 + .300 + .200 + 0.038 - .207
9 m_propellant = .207
10 m_full = m_empty + m_propellant
11 d_ref = 0.07
12 area_ref = utils.get_circ_area(d_ref)
13 burn_time = 0.7
14
15 # Outros parâmetros
16 g = 9.81
17 current_height = 0
18 current_mass = m_full
19 average_mdot = m_propellant/burn_time
20 burning_area, chamber_pressure, kn, pe, thrust_coef, thrust, burn_time,
    total_impulse, mass_flow, time, pressure, burn_rate = prop.simulate_motor
    ([0.02118, 0.05632, 0.00668])
21
22 valores_Cd = [aero.get_rocket_cd(0)]
23 valores_V = [0]
24 valores_S = [0]
25
26 def get_thrust_at_time(t):
27     if t == 0 or t>=max(time):
28         return 0
29     else:
30         # Interpolação linear
31         max_t = time[time > t].min()
32         min_t = time[time < t].max()
33         d = time.tolist()
34         return thrust[d.index(min_t)] + (t - min_t)*(thrust[d.index(max_t)] -
            thrust[d.index(min_t)])
35
36
37
38 def drag_dv_dt(t, v):
39     if v < 0:
40         return 0
41     thrust = get_thrust_at_time(t)
42     rho = utils.get_real_atmosphere(valores_S[-1])['rho']

```

```

43     a = utils.get_real_atmosphere(valores_S[-1])['a']
44     mach = v/a
45     drag_coef = aero.get_rocket_cd(mach)
46     if t <= burn_time:
47         accel = -g + thrust/current_mass - 0.5*v**2*drag_coef*area_ref*rho/
current_mass
48         return accel
49     elif t > burn_time:
50         return -g - 0.5*v**2*drag_coef*area_ref*rho/current_mass
51
52 def rungeKutta(t0, V0, h):
53     V = V0
54     k1 = h * drag_dv_dt(t0, V)
55     k2 = h * drag_dv_dt((t0 + h/2), (V + k1/2))
56     k3 = h * drag_dv_dt((t0 + h/2), (V + k2/2))
57     k4 = h * drag_dv_dt(t0 + h, V + k3)
58     V = V + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
59     if V < 0:
60         return 0
61     valores_Cd.append(aero.get_rocket_cd(V/utils.get_real_atmosphere(valores_S
[-1])['a']))
62     return V
63
64
65 def solve_trajectory():
66     global h, current_height, current_mass
67     stopFlag = False
68     i = 0
69     timestep = 0.01
70     while stopFlag is False:
71         if valores_V[-1] < 0.01 and i*timestep > burn_time:
72             stopFlag = True
73             valores_V.append(rungeKutta(i*timestep, valores_V[-1], timestep))
74             valores_S.append(valores_S[-1] + valores_V[-1]*timestep)
75             if i*timestep < burn_time:
76                 current_mass -= average_mdot*timestep
77             i=i+1
78     valores_t = np.linspace(0, i*timestep, i+1)
79     return valores_t
80
81
82 # Plotar curvas do OpenRocket juntas:
83 def compare_curves():
84     valores_t = solve_trajectory()
85     OPEN_ROCKET_DATA = []
86     OPEN_ROCKET = open('openrocket_sim2.csv', 'r')
87     OPEN_ROCKET2 = open('openrocket_sim3.csv', 'r')
88     OPEN_ROCKET_MACH_DATA = []
89     for line in OPEN_ROCKET:

```

```

90     OPEN_ROCKET_DATA.append(np.array(line.split(), dtype=np.float32))
91     for line in OPEN_ROCKET2:
92         OPEN_ROCKET_MACH_DATA.append(np.array(line.split(), dtype=np.float32))
93
94     f= plot.figure()
95     ax = f.gca()
96     plot.plot(list(list(zip(*OPEN_ROCKET_DATA))[0]), list(list(zip(*
OPEN_ROCKET_DATA))[1]), '--g',label = 'OpenRocket')
97     plot.plot(valores_t, valores_S, '-.r', label = 'Apêndice D')
98     ax.set_ylim(ymin=0)
99     ax.set_xlim(xmax=max(valores_t), xmin = 0)
100    plot.xlabel("Tempo (s)")
101    plot.ylabel("Altitude (m)")
102    plot.grid()
103    xmax = valores_t[np.argmax(valores_S)]
104    ymax = max(valores_S)
105    text= "t={:.3f}, h={:.3f}".format(xmax, ymax)
106    bbox_props = dict(boxstyle="square,pad=0.3", fc="w", ec="k", lw=0.72)
107    arrowprops=dict(arrowstyle="->",connectionstyle="angle,angleA=0,angleB=60")
108    kw = dict(xycoords='data',textcoords="axes fraction",
109              arrowprops=arrowprops, bbox=bbox_props, ha="right", va="top")
110    ax.annotate(text, xy=(xmax, ymax), xytext=(0.9,0.7), **kw)
111
112    xmax = list(list(zip(*OPEN_ROCKET_DATA))[0])[np.argmax(list(list(zip(*
OPEN_ROCKET_DATA))[1]))]
113    ymax = max(list(list(zip(*OPEN_ROCKET_DATA))[1]))
114    text= "t={:.3f}, h={:.3f}".format(xmax, ymax)
115    bbox_props = dict(boxstyle="square,pad=0.3", fc="w", ec="k", lw=0.72)
116    arrowprops=dict(arrowstyle="->",connectionstyle="angle,angleA=5,angleB=-60")
117    kw = dict(xycoords='data',textcoords="axes fraction",
118              arrowprops=arrowprops, bbox=bbox_props, ha="right", va="top")
119    ax.annotate(text, xy=(xmax, ymax), xytext=(0.65,0.95), **kw)
120    plot.legend(loc = 'best')
121    plot.show()
122
123    f= plot.figure()
124    ax = f.gca()
125    plot.plot(list(list(zip(*OPEN_ROCKET_DATA))[0]), list(list(zip(*
OPEN_ROCKET_DATA))[2]), '--g',label = 'OpenRocket')
126    plot.plot(valores_t, valores_V, '-.r', label = 'Apêndice D')
127    plot.xlabel("Tempo (s)")
128    plot.ylabel("Velocidade vertical (m/s)")
129    xmax = valores_t[np.argmax(valores_V)]
130    ymax = max(valores_V)
131    text= "t={:.3f}, v={:.3f}".format(xmax, ymax)
132    bbox_props = dict(boxstyle="square,pad=0.3", fc="w", ec="k", lw=0.72)
133    arrowprops=dict(arrowstyle="->",connectionstyle="angle,angleA=170,angleB=60"
)
134    kw = dict(xycoords='data',textcoords="axes fraction",

```

```

135         arrowprops=arrowprops, bbox=bbox_props, ha="right", va="top")
136     ax.annotate(text, xy=(xmax, ymax), xytext=(0.65,0.9), **kw)
137
138     ax.set_ylim(ymin=0)
139     ax.set_xlim(xmax=max(valores_t), xmin = 0)
140     plot.legend(loc = 'best')
141     plot.grid()
142     plot.show()
143
144
145     f = plot.figure()
146     ax = f.gca()
147     plot.plot(list(list(zip(*OPEN_ROCKET_MACH_DATA))[0]), list(list(zip(*
OPEN_ROCKET_MACH_DATA))[1]), '--g', label = 'OpenRocket')
148     plot.plot(valores_S, [v/Utils.get_real_atmosphere(S)['a'] for v,S in zip(
valores_V, valores_S)], '-.r',label = 'Apêndice D')
149     plot.xlabel("Altitude (m)")
150     plot.ylabel("Número de Mach")
151     ax.set_ylim(ymin=0.1)
152     ax.set_xlim(xmax=max(valores_S), xmin = 0)
153     plot.legend(loc = 'best')
154     plot.grid()
155     plot.show()
156
157 compare_curves()

```

APÊNDICE E – UTILS.PY

```

1
2 import numpy as np
3
4 def get_circ_area(diam):
5     return np.pi*(diam/2)**2
6
7 def get_circ_diam(area):
8     return 2*((area/np.pi)**0.5)
9
10 def get_real_atmosphere(h, deltaT = 0):
11     # Propriedades atmosféricas com base na altura e variação de temperatura
12     H_0 = 0
13     p_0 = 101325
14     rho_0= 1.225
15     T_0= 288.15
16     g_0 = -9.80665
17     a0 = 340.294
18     R = 287.058
19     L = -0.0065
20     gamma = 1.4
21     mu_0 = 1.783e-5
22     T_tropopausa = T_0 + 11000*L
23
24     # Calcular a temperatura real:
25     T_ISA = 0
26     if h <= 11000:
27         T_ISA = T_0 + L*h
28     elif 11000 < h <= 20000:
29         T_ISA = T_tropopausa
30     T_real = T_ISA + deltaT
31
32     # Calcular pressão real: igual à variação da pressão ISA (U.S. Standard
Atmosphere 1976)
33     if h <= 11000:
34         p_p0 = (T_ISA/T_0)**(g_0/(L*R))
35         p_real = p_p0 * p_0
36     elif h > 11000 and h <= 20000:
37         p_p0 = ((T_tropopausa)/(T_0))**(g_0/(L*R))
38         p_real = p_p0* p_0 * np.exp((11000-h)/6342)
39
40     # Calcular densidade real:
41     rho_real = p_real/T_real/R
42
43     # Calcular velocidade local do som:
44     a_real = np.sqrt(gamma*R*T_real)

```

```
45
46     # Calcular viscosidade real:
47     S = 113 # para o ar seco
48     mu_mu0 = (T_real/T_0)**1.5 * ((T_0 + S)/(T_real + S))
49     mu_real = mu_mu0 * mu_0
50     return {'T': T_real, 'rho': rho_real, 'p': p_real, 'mu': mu_real, 'a':
a_real}
```