Marcelo Polezzi

Poliedro de Newton e Modalidade

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

U N E S P UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Campus de São José do Rio Preto
INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS

POLIEDRO DE NEWTON E MODALIDADE

Marcelo Polezzi

Tese apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", para a obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Maurício Tadini

Inst. de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP
BIBLIOTECA
S. J. Rio Preto
803/98

São José do Rio Preto
1997

Este trabalho foi financiado pela FAPESP.

Órgão financiador do Curso de Pós-Graduação: CAPES.

Dedico este trabalho à Rita.

"Uma pilha de pedras deixa de ser uma pilha de pedras no momento em que um homem a contempla, trazendo dentro de si a imagem de uma catedral."

Saint-Exupèry (1900-1944)

Agradecimentos.

Gostaria de expressar minha gratidão às seguintes pessoas:

* Ao Prof. Dr. Wilson Maurício Tadini, que desde o primeiro momento soube respeitar e incentivar minha individualidade, me ajudando e inspirando a investigar e descobrir cada vez mais.

* À Profa. Dra. Angela Maria Sitta, que me prestou ajuda valiosa, desde os tempos de Iniciação Científica.

* Ao Prof. Dr. Trajano Pires da Nóbrega Neto, que desde 1995 vem me ajudando a provar meus teoremas de modo muito mais simples.

* Aos Professores Doutores Antonio Aparecido Andrade e Maria Gorete C. Andrade, pela solidariedade que me prestaram durante a fase de publicação de meu primeiro artigo.

* Ao Prof. Dr. Dimitar K. Dimitrov, pelo interesse e altruísmo demonstrados durante as tentativas de prova da Conjectura 12.1.

* Aos Professores Doutores José Carmelo Interlando e Adalberto Spezamiglio, pelas preciosas dicas em relação ao Latex.

* À minha namorada Rita, que me incentivou, inspirou e suportou em todos os momentos.

* Aos meus pais, que me possibilitaram, por razões diversas, estar aqui hoje e retribuir

de algum modo.

* Aos amigos da Pós-Graduação, pela companhia agradável e companheirismo.

* Às amigas Marcia Tremura e Magda de Alcântara Pires, pela abnegação e amizade comoventes.

* À FAPESP, pelo apoio científico e financeiro.

* À Deus, pela possibilidade de existir.

Abstract.

This Thesis is divided in 2 chapters:

The first studies the **Inner Modality**, a concept criated by Arnol'd. In order to do that, we defined an invariant with respect to the **Newton Number** (defined by Kouchnirenko), which among other things, allowed us to find out a formula for calculating the inner modality, and an explicit formula for the greatest common divisor of 2 integers.

The second deals with the following question:

"Given an ideal $\mathcal{I} \subset M_2^2$, one wants to find a necessary condition for the existence of some $f \in M_2^2$ such that

$$\mathcal{I} = < \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} > ."$$

For this, several techniques were used, all of them strongly connected with the concepts of **Stairs of Ideals** (Damon-Galligo), and **Newton Polygons**. Among a lot of things, we prove that for $n \geq 6$ there will always exist a stair $E(\mathcal{I})$ with

$$\#(\mathbb{Z}_+^2 - E(\mathcal{I})) = n,$$

such that

$$E(\mathcal{I}) \neq E(< \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} >)$$

for all $f \in M_2^2$.

Resumo.

A Tese com título "Poliedro de Newton e Modalidade" está dividida em 2 capítulos:

O primeiro estuda a **Modalidade Interna**, conceito criado por Arnol'd. Para isso, definimos um invariante com relação ao **Número de Newton** (definido por Kouchnirenko), que além de outras coisas, nos possibilitou descobrir uma fórmula para calcular a modalidade interna, e uma fórmula explícita para o m.d.c. de 2 números inteiros.

O segundo trata da seguinte questão:

"Dado um ideal $\mathcal{I} \subset M_2^2$, quer-se encontrar uma condição necessária para que exista $f \in M_2^2$ tal que

$$\mathcal{I} = < \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} > ."$$

Para isso, foram utilizadas várias técnicas, todas fortemente conectadas aos conceitos de **Escadas de Ideais** (Damon-Galligo), e de **Polígonos de Newton**.

Além de muitas outras coisas, provamos que para $n \geq 6$ sempre haverá uma escada $E(\mathcal{I})$ com

$$\#(\mathbb{Z}_+^2 - E(\mathcal{I})) = n,$$

de modo que

$$E(\mathcal{I}) \neq E(< \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} >)$$

para toda $f \in M_2^2$.

ÍNDICE.

Capítulo 1 - Modalidade Interna

§1. Introdução 2

§2. Preliminares 2

§3. Resultados para $f \in M_2^2$ 9

§4. Resultados para Polinômios de Brieskorn 17

§5. Aplicações 20

Capítulo 2 - Ideais do tipo Gradiente

§1. Introdução 24

§2. Preliminares 25

§3. Partições do tipo Newton-gradiente 33

§4. A partição $\lambda = (n, n-1),\ n \geq 3$ 40

§5. Polígonos de Newton para $5 \leq \nu(f) \leq 9$ 54

§6. Lista de Polígonos de Newton para $1 \leq \nu(f) \leq 9$ 68

§7. Classificação das partições de n, $1 \leq n \leq 9$ com relação a ser ou não Newton-gradiente 70

§8. Uma conexão entre o número de partições do tipo Newton-gradiente, a "falsa" série de Hilbert e o número de covariantes de uma forma binária de grau n 108

§9. Estudo dos Polígonos de Newton de funções $f \in M_2^2$ que não são SQH, para $1 \leq \nu(f) \leq 8$ 112

§10. Conclusões 121

§11. Partições do tipo gradiente que não são Newton-gradientes 122

§12. Estudo das partições do tipo $\lambda = (n, n-1, \ldots, 2, 1),\ n \geq 2$ 129

Referências 144

Capítulo 1

Modalidade Interna

Capítulo 1

Modalidade Interna

§1. Introdução.

Como sabemos, a modalidade interna de uma singularidade é um conceito importante, que de certa forma nos diz quão complicada é a singularidade. Também é conhecido o nível de dificuldade em calcular este número, mesmo usando o Teorema 2.2.

Tendo em vista estes fatos, buscamos estabelecer uma relação entre o número de Newton $\nu(f)$ e a modalidade interna $MI(f)$, quando $f \in M_2^2$ é SQH e cômoda. Desta forma, encontramos uma maneira computacionalmente simples de calcular este número.

Na procura dessa relação entre $\nu(f)$ e $MI(f)$, definimos um número, representado por $p(f)$, que tem a propriedade de ser um "invariante" com relação a $\nu(f)$, e que também nos conduziu a uma fórmula explícita para o máximo divisor comum (m.d.c.) de dois inteiros.

Além disso, usando métodos combinatórios, calculamos a modalidade interna dos polinômios de Brieskorn, encontrando novamente uma relação entre $\nu(f)$ e $MI(f)$.

Finalmente, definimos o número $p'(f)$ que, com relação a uma certa classe de funções, mantém $\nu(f)$ inalterado e que fez surgir de forma natural polinômios de Chebyshev na expressão de $\nu(f)$.

Observação. *Todas as definições, proposições, lemas, teoremas e demonstrações que tiverem um (*) são originais.*

§2. Preliminares.

Sejam $A_n = \{f = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} a_m x^m, a_m \in \mathbb{R}\}$ o conjunto das séries formais em n indeterminadas, onde $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, e $M_n = \{f \in A_n \mid a_0 = 0\}$ e $M_n^k = M_n \dots M_n$ k - vezes, $k \in \mathbb{N}$. Pode-se provar facilmente que A_n é um anel local, sendo M_n seu único ideal maximal.

Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}_{++}^n$, $d \in Q_{++}$.

Definição 2.1 *Seja $I \subset M_n$ um ideal. Dizemos que I é M_n- primário se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $M_n^k \subset I$.*

Definição 2.2 *Um monômio $cx^m, (c \neq 0)$ tem peso d com relação a α se $\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \ldots + \alpha_n m_n = d$. Denotamos $peso_\alpha\ (cx^m) = d$, e atribuímos o peso $+\infty$ ao monômio nulo.*

Definição 2.3 *Uma série formal $f \in M_n$ tem filtração k com relação a α se $peso_\alpha\ (a_m x^m) \geq k, \forall m$ com $a_m \neq 0$, e denotamos $filt_\alpha\ (f) = k$. Se todos os monômios de f tiverem peso k, então denotamos $peso_\alpha\ (f) = k$.*

Definição 2.4 *A série $f \in M_n$ é quase-homogênea do tipo $(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se*

$$f(t^{\alpha_1} x_1, \ldots, t^{\alpha_n} x_n) = t^d f(x_1, \ldots, x_n),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Denotamos f $\mathrm{QH}(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Definição 2.5 *Seja $f = f_0 + f_1$, com $f_0, f_1 \in M_n$. Suponhamos que f_0 seja QH do tipo $(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $filt_\alpha(f_1) > d$. Nessas condições, dizemos que f é semi-quase-homogênea do tipo $(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se o ideal $< \partial f_0 >$ for M_n - primário.*

Denotamos f $\mathrm{SQH}(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Definição 2.6 *Seja* $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} a_m x^m \in M_n$.

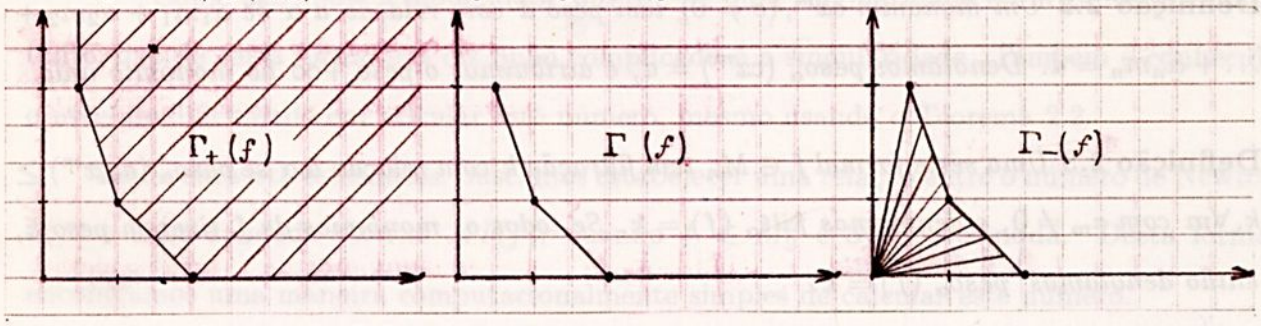
i) *Denotamos por $\Gamma_+(f)$ o envelope convexo em $\mathbb{R}_+^n$ do conjunto $\bigcup\{m + \mathbb{R}_+^n\}$, onde $m \in \{r \in \mathbb{Z}_+^n; a_r \neq 0\}$.*

ii) *Chamamos de fronteira de Newton o poliedro $\Gamma(f)$ constituído pela reunião das faces compactas de $\Gamma_+(f)$.*

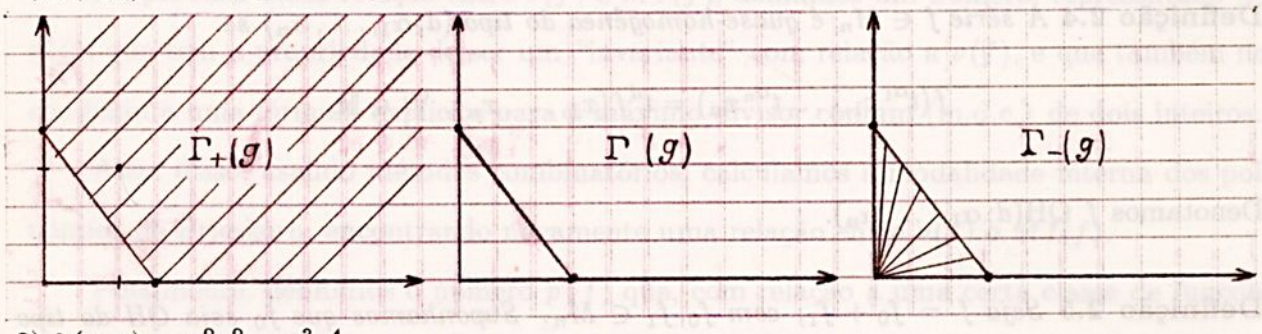
iii) *Chamamos de parte principal newtoniana da série f o polinômio* $f_\Gamma = \sum_{m \in \Gamma(f)} a_m x^m$, *e*

denotamos por $\Gamma_-(f)$ *a união dos segmentos de origem 0 e de extremidades em* $\Gamma(f)$.

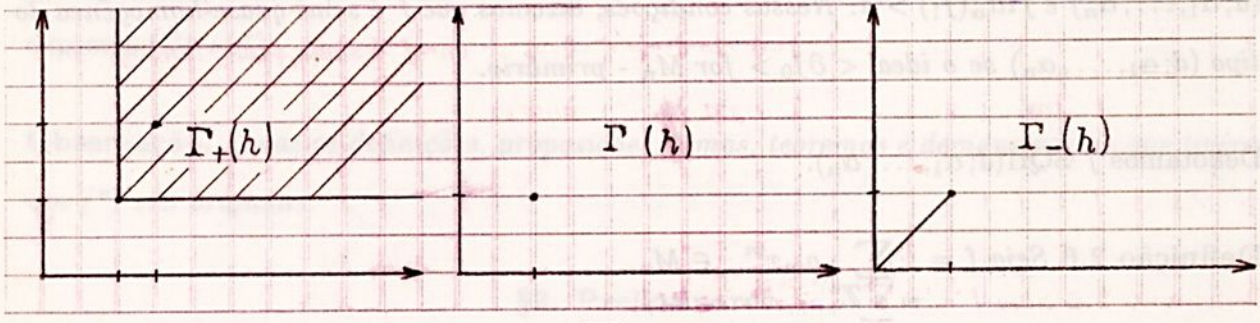
Exemplos. 1) $f(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 - xy^5 + x^3y^6$



2) $g(x,y) = x^3 + y^4 - 2x^2y^3$



3) $h(x,y) = x^2y^2 - x^3y^4$



Definição 2.7 *A série* $f \in M_n$, $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} a_m x^m$ *é cômoda se para cada* i *entre* 1 *e* n *existir um monômio* $a_i x_i^{m_i}$ $(m_i \geq 1)$ *de* f *com* $a_i \neq 0$.

Definição 2.8 *Seja* S *um poliedro compacto de* $\mathbb{R}_+^n$. *Definimos o número de Newton* $\nu(S)$ *de* S *através da fórmula* $\nu(S) = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j(n-j)!\, V_{n-j} + (-1)^n$ *onde* V_n *é o volume de dimensão* n *do poliedro* S *e, para* $1 \leq q \leq n-1$, V_q *é a soma dos volumes de dimensão* q *das*

intersecções de S com todos os planos coordenados q-dimensionais.

Seja $f \in M_n$, $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} a_m x^m$, $a_m \in \mathbb{R}$. *Então,*

i) *Se f for cômoda, definimos* $\nu(f) = \nu[\ \Gamma_-(f)\ ]$;

ii) *Se f não for cômoda, definimos* $\nu(f) = sup_{m\in\mathbb{N}}\ \nu(f + x_1^m + \ldots + x_q^m)$ *caso f não possuir monômios da forma* $c_i x_i^{n_i}$, $c_i, n_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, q$, *mas possuir monômios da forma* $d_j x^{n_j}$, $d_j, n_j \neq 0$, $j = q+1, \ldots, n$.

Exemplo. Seja $f = x^2y + xy^3$. Temos que

$$\nu(f) = sup_{m\in\mathbb{N}}\ \nu(x^2y + xy^3 + x^m + y^m) = 6\ ,$$

pois $V_2 = \frac{2m+5}{2}$, $V_1 = 2m$ e então $\nu(f) = (2m+5) - 2m + 1 = 6$.

Nota. Para mais detalhes, ver [12],[19].

Proposição 2.1 *Seja $\mathcal{I} \subset M_n$ um ideal. Então, $\mathcal{I}$ é M_n-primário se, e somente se*

$$dim_{\mathbb{R}}\ (A_n/\mathcal{I}) < \infty.$$

Teorema 2.1 (*) *Sejam $\mathcal{I} \subset M_n \subset A_n$, um ideal M_n-primário, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, e $B = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ uma base monomial de $A_n/\mathcal{I}$. Então, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, temos que*

$$\#\{\varphi_i \mid peso_\alpha(\varphi_i) = k\}$$

não depende da base B.

Prova. Consideremos

$$\mathcal{A}_\alpha^{(k)} = \{f \in A_n\ ;\ peso_\alpha f = k\} \cup \{0\}$$

e

$$V_k = \mathcal{A}_\alpha^{(k)} / \mathcal{A}_\alpha^{(k)} \cap \mathcal{I}.$$

Temos que

i) $\mathcal{A}_\alpha^{(k)}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita.

ii) V_k é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita $(= r)$, pois $\mathcal{A}_\alpha^{(k)} \cap \mathcal{I}$ é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathcal{A}_\alpha^{(k)}$.

Suponhamos sem perda de generalidade que

$$\{\varphi_i \in B \ ; \ peso_\alpha \varphi_i = k\} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}.$$

Como B é uma base monomial de $A_n/\mathcal{I}$, temos que

$\varphi_1 + \mathcal{I}, \ldots, \varphi_s + \mathcal{I}$ são linearmente independentes em $A_n/\mathcal{I}$ se e somente se
$\varphi_1 + (\mathcal{A}_\alpha^{(k)} \cap \mathcal{I}), \ldots, \varphi_s + (\mathcal{A}_\alpha^{(k)} \cap \mathcal{I})$ são linearmente independentes em $\mathcal{A}_\alpha^{(k)} / \mathcal{A}_\alpha^{(k)} \cap \mathcal{I}$.

Portanto $s = r$, e daí

$$\#\{\varphi_i \ ; \ peso_\alpha \varphi_i = k\} = dim_{\mathbb{R}} V_k,$$

cujo valor só depende do ideal $\mathcal{I}$. □

Corolário 2.1(Arnol'd) *Sejam* $f = f_0 + f_1 \quad SQH(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $B = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *uma base monomial de* $A_n / < \partial f >$. *Então, para cada* $k \in \mathbb{Z}_+$, *temos que*

$$\#\{\varphi_i \mid peso_\alpha(\varphi_i) = k\}$$

não depende da base B.

Nota. Ver [3],[19].

Observação. O eminente matemático V.I. Arnol'd, em [3], demonstra o Corolário 2.1 usando o $\mathbb{R}$-espaço vetorial

$$\tilde{V}_k = \mathcal{A}_{(\alpha;k)}/\mathcal{A}_{(\alpha;>k)} + (\mathcal{A}_{(\alpha;k)} \cap \mathcal{I}),$$

onde

$$\mathcal{A}_{(\alpha;k)} = \{f \in A_n \ ; \ filt_\alpha = k\},$$
$$\mathcal{A}_{(\alpha;>k)} = \{f \in A_n \ ; \ filt_\alpha > k\}.$$

Evidentemente, $\tilde{V}_k \simeq V_k$ (o espaço vetorial usado na prova do Teorema 2.1). Logo, é oportuno observar que Arnol'd usou outro caminho.

Definição 2.9 *Sejam* $f = f_0 + f_1$ $SQH(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *e* $B = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *uma base monomial de* $A_n/ < \partial f >$. *A modalidade interna de* f, *denotada por* $MI(f)$, *é dada por*

$$MI(f) = \#\{\varphi_i \mid peso_\alpha(\varphi_i) \geq d\}.$$

Definição 2.10 *Seja* $f \in M_2$, *cômoda. Definimos o número de Arnol'd de* f, *denotado por* $a(f)$, *como*

$$a(f) = \#(\ [\ (2,2) + \mathbb{Z}^2_+] \cap \Gamma_-(f) \ ).$$

Teorema 2.2 (Kouchnirenko) *Seja* $f \in M_2$, SQH, *cômoda. Então,* $MI(f) = a(f)$.

Prova. Ver [12].

Definição 2.11 *Seja* $f \in A_2, f = \sum a_{ij}x^iy^j, f \neq 0$. *A ordem de* f, *denotada por* $o(f)$, *é o*

menor multi-índice (i,j), *com relação à ordem lexicográfica reversa, tal que* $a_{ij} \neq 0$.

Definição 2.12 *Dado um ideal* $\mathcal{I} \subset M_2$, *definimos a escada de* $\mathcal{I}$, *e denotamos por* $E(\mathcal{I})$, *como sendo o conjunto das ordens de seus elementos. Assim,*

$$E(\mathcal{I}) = \{o(f), f \neq 0 \ ; \ f \in \mathcal{I}\}.$$

Observemos que dado $f \in \mathcal{I}$, com $o(f) = \alpha$, teremos para todo $\beta = (p,q) \in \mathbb{Z}_+^2$ que $x^p y^q f \in \mathcal{I}$ e $o(x^p y^q f) = \alpha + \beta$. Disto resulta que se $\alpha \in E(\mathcal{I})$, então $\alpha + \mathbb{Z}_+^2 \subset E(\mathcal{I})$.

Definição 2.13 *Dado* $\mathcal{I} \subset M_2$, *definimos a fronteira de* $E(\mathcal{I})$, *e denotamos por* $\mathcal{F}r(E(\mathcal{I}))$, *como sendo o menor subconjunto de* $E(\mathcal{I})$ *tal que*

$$E(\mathcal{I}) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{F}r(E(\mathcal{I}))} (\alpha + \mathbb{Z}_+^2).$$

Observação. Sempre tem-se $\# \ \mathcal{F}r(E(\mathcal{I})) < \infty$.

Lema 2.1 *Sejam* $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset M_2$ *ideais, com* $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$. *Então*

$$E(\mathcal{I}) \subset E(\mathcal{J}),$$

e em geral $\mathcal{F}r(E(\mathcal{I})) \not\subset \mathcal{F}r(E(\mathcal{J}))$.

Exemplo. $M_2^2 \subset M_2$, mas $\mathcal{F}r(E(M_2^2)) \not\subset \mathcal{F}r(E(M_2)))$.

Lema 2.2 *Seja* $\mathcal{I} \subset M_2$ *um ideal tal que* $(0,q) \in E(\mathcal{I})$. *Então,* $y^q \in \mathcal{I}$.

Observação. $(p,0) \in E(\mathcal{I})$ não implica $x^p \in \mathcal{I}$. Para isto, considere $\mathcal{I} =< x^2 + y^2 >$. Temos que $o(x^2+y^2) = (2,0)$, e no entanto $x^2 \notin \mathcal{I}$.

Teorema 2.3 *Seja* $\mathcal{I} \subset M_2$ *um ideal. Então* $\mathcal{I}$ *é* M_2-*primário se, e somente se*

$$\#(\mathbb{Z}_+^2 - E(\mathcal{I})) < \infty.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Teorema 2.4 *Seja $\mathcal{I} \subset M_2$ um ideal M_2-primário. Então.*

$$dim_{\mathbb{R}}\ (A_2/\mathcal{I}) = \#(\mathbb{Z}^2_+ - E(\mathcal{I})).$$

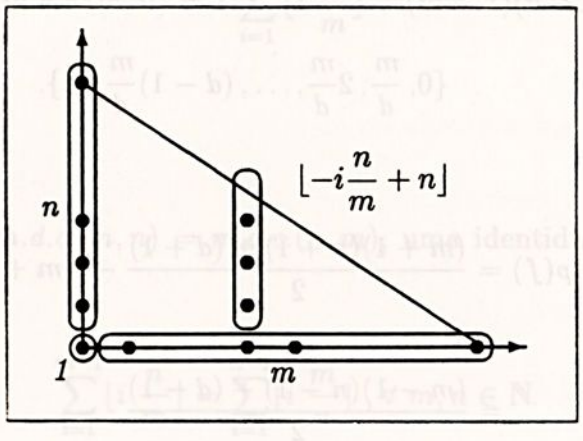
Além disso, a família $\{x^i y^j; (i,j) \in [\mathbb{Z}^2_+ - E(\mathcal{I})]\}$ define representantes monomiais para uma base de $A_2/\mathcal{I}$.

Prova. Ver [7],[19].

§3. Resultados para $f \in M_2^2$.

Definição 3.1 (*) *Seja $f \in M_2^2$. Denotamos $p(f) = \#(\ [\ (1,1) + \mathbb{Z}^2_+\ ] \cap \Gamma_-(f)\ )$.*

Consideremos a função $f(x,y) = x^m + y^n$. Temos que a equação da reta que passa por $(m,0)$ e $(0,n)$ é dada por $y = -\ (n/m)\ x + n$.



Logo, vemos que

$$\begin{aligned} p(f) &= \sum_{i=1}^{m-1} \lfloor -i\ \frac{n}{m} + n \rfloor \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \lfloor (m-i)\ \frac{n}{m} \rfloor \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \lfloor i\ \frac{n}{m} \rfloor \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x.

Temos que o número de pontos com coordenadas inteiras no interior e na fronteira de um triângulo retângulo com catetos m e n é igual a

$$\frac{(m+1)(n+1)+(d+1)}{2},$$

onde $d = m.d.c.(m,n)$, pois o número de pontos com coordenadas inteiras na hipotenusa é igual a $d+1$. De fato, seja $y_i = -(n/m)\ x_i + n$. Temos que o conjunto de inteiros x_i entre 0 e m tais que y_i é um inteiro é

$$\{0, \frac{m}{d}, 2\frac{m}{d}, \ldots, (d-1)\frac{m}{d}, m\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} p(f) &= \frac{(m+1)(n+1)+(d+1)}{2} - (m+n+1) \\ &= \frac{(m-1)(n-1)+(d-1)}{2} \\ &= \frac{\nu(f)+d-1}{2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Portanto,

$$\nu(f) = 2p(f) - d + 1. \tag{3.3}$$

Estas relações nos conduzem a dois interessantes resultados:

1) Observando a expressão (3.3), vemos que o número $p(f)$ mantém inalterado o padrão de $\nu(f)$.

2) Igualando as expressões (3.1) e (3.2), encontramos uma fórmula explícita para o m.d.c. de dois inteiros m e n, a saber:

$$m.d.c.(m,n) = 2\sum_{i=1}^{m-1} \lfloor i\ \frac{n}{m} \rfloor - \nu(f) + 1, \text{onde } f(x,y) = x^m + y^n.$$

Portanto,

$$m.d.c.(m,n) = 2\sum_{i=1}^{m-1} \lfloor i\ \frac{n}{m} \rfloor - (m-1)(n-1) + 1. \tag{3.4}$$

Além disso, como $m.d.c.(m,n) = m.d.c.(n,m)$, uma identidade algébrica interessante aparece:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lfloor i\ \frac{n}{m} \rfloor = \sum_{i=1}^{n-1} \lfloor i\ \frac{m}{n} \rfloor\ , \forall\ m,n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Observação. As fórmulas (3.4) e (3.5) foram obtidas em [16] e [11] respectivamente, usando idéias completamente diferentes. Recentemente, fomos notificados que uma versão

ligeiramente diferente de (3.4) pode ser encontrada em [8]. Além do mais, uma versão generalizada de (3.4) pode ser encontrada em [10] e em [11].

Definição 3.2 (*) *Seja $f \in M_n$, com $\nu(f) < \infty$. Então,*

i) Se f for côncava, $\tilde{\Gamma}(f) = \Gamma(f)$.

ii) Se f não for côncava, $\tilde{\Gamma}(f) = \Gamma(f + x_1^r + \ldots + x_q^r)$, caso f não possuir monômios da forma $c_i x_i^{n_i}$, $c_i, n_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, q$, mas possuir monômios da forma $d_j x^{n_j}$, $d_j, n_j \neq 0$, $j = q+1, \ldots, n$. Além disso, r é o menor número natural tal que

$$\nu(f + x_1^r + \ldots + x_q^r) = \nu(f).$$

Teorema 3.1 (*) *Seja $f \in M_2^2$, $\nu(f) < \infty$, $(0, b_1) > (a_2, b_2) > (a_3, b_3) > \ldots > (a_n, 0)$ com relação a ordem lexicográfica reversa, os vértices das faces compactas de $\tilde{\Gamma}(f)$, e*

$$d(f) = \sum_{j=1}^{n-1} d_j(f) = \sum_{j=1}^{n-1} m.d.c.(b_j - b_{j+1}, a_{j+1} - a_j),$$

com $a_1 = b_n = 0$. Então,

$$\nu(f) = 2\, p(f) - d(f) + 1.$$

Prova. Seja A_1 a área sob a escada do ideal

$$I_1 = < y^{b_1}, x^{a_2} y^{b_2}, x^{a_3} y^{b_3}, \ldots, x^{a_{n-1}} y^{b_{n-1}}, x^{a_n} >$$

e A_2 a área sob a escada do ideal

$$I_2 = < y^{b_2}, x^{a_2} y^{b_3}, x^{a_3} y^{b_4}, \ldots, x^{a_{n-2}} y^{b_{n-1}}, x^{a_{n-1}} >$$

Temos que

$$p(f) = \sum_{j=1}^{n-1} \{ \frac{(a_{j+1} - a_j + 1)(b_j - b_{j+1} + 1) + (d_j(f) + 1)}{2} - 1 \} + A_2 - b_1 - a_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2p(f) &= A_1 - A_2 + 2A_2 - b_1 - a_n + d(f) \\ &= A_1 + A_2 - b_1 - a_n + d(f) \\ &= \nu(f) + d(f) - 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nu(f) = 2p(f) - d(f) + 1.$$

□

Nota. Para mais detalhes, ver [7],[19].

Exemplos. 1) Seja $f(x,y) = y^5 + xy^4 + x^3y^3 + x^4y^2 + x^5y + x^7$. Temos que

$$b_1 = 5, b_2 = 4, b_3 = 1, a_2 = 1, a_3 = 5, a_4 = 7, d_1(f) = d_2(f) = d_3(f) = 1 \text{ e } \nu(f) = 20.$$

Logo,

$$20 = 2p(f) - 3 + 1,$$

e daí

$$p(f) = 11.$$

2) Seja $f(x,y) = y^5 + x^3y^4 + x^7$. Neste caso,

$$b_1 = 5, a_2 = 7, d_1(f) = 1 \text{ e } \nu(f) = 24.$$

Logo,

$$24 = 2p(f) - 1 + 1,$$

e daí

$$p(f) = 12.$$

Corolário 3.1 (*) *A passagem "os vértices das faces compactas de $\tilde{\Gamma}(f)$" pode ser trocada por "um conjunto de pontos com coordenadas inteiras de $\tilde{\Gamma}(f)$, contendo os vértices das faces compactas de $\tilde{\Gamma}(f)$" sem alterar em nada a prova do Teorema 3.1.*

A prova deste fato decorre naturalmente do seguinte Lema:

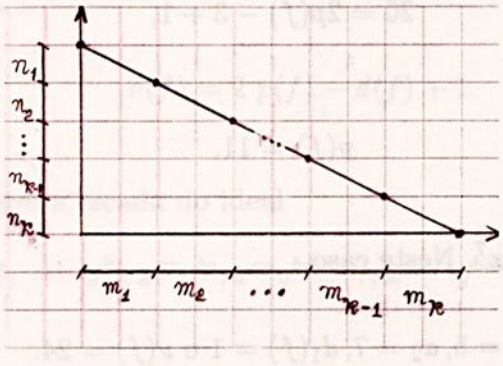
Lema 3.1 (*) *Sejam $m_j, n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, k$, $k \geq 2$, com*

$$m_j n_{j+1} = n_j m_{j+1}, \ j = 1, \ldots, k-1.$$

Então,

$$mdc(\sum_{j=1}^{k} m_j, \sum_{j=1}^{k} n_j) = \sum_{j=1}^{k} mdc(m_j, n_j).$$

Prova. As hipóteses acima são equivalentes à seguinte situação:



Logo, como $mdc(a, b) + 1 =$ número de pontos com coordenadas inteiras na hipotenusa do triângulo de catetos a e b , $a, b \in \mathbb{N}$, temos imediatamente o resultado. □

Definição 3.3(*) *Sejam f, $g \in M_2^2$, $\nu(f), \nu(g) < \infty$. Dizemos que $\Gamma(f)$ é equivalente a $\Gamma(g)$ se*

$$((1,1) + \mathbb{Z}_+^2) \cap \Gamma(f) = ((1,1) + \mathbb{Z}_+^2) \cap \Gamma(g),$$

$$\Gamma(f) \approx \Gamma(g).$$

Corolário 3.2 (*) *Se* $\Gamma(f) \approx \Gamma(g)$, *então* $\nu(f) = \nu(g)$.

Prova. Temos que

$$\begin{cases} \nu(f) = 2p(f) - d(f) + 1, \\ \nu(g) = 2p(g) - d(g) + 1. \end{cases}$$

Logo, pela definição de $p(f)$, temos como conseqüência imediata que

$$p(f) = p(g).$$

Portanto, devemos mostrar que

$$d(f) = d(g).$$

Para isto, consideremos o enunciado do Teorema 3.1 com a passagem "os vértices das faces compactas de $\tilde{\Gamma}(f)$" trocada por "os pontos com coordenadas inteiras de $\tilde{\Gamma}(f)$".

Sejam $(1, c_f) \in \Gamma(f)$, $(1, c_g) \in \Gamma(g)$. Logo, $c_f = c_g$, pois $\Gamma(f) \approx \Gamma(g)$.

i) Caso $(1, c_f) \in \mathbb{Z}_+^2$, então, como $\Gamma(f) \approx \Gamma(g)$, teremos necessariamente que

$$b_1(f) = b_1(g),$$

e conseqüentemente

$$d_1(f) = d_1(g).$$

ii) Caso $(1, c_f) \in \mathbb{Z}_+^2$, podemos ter $b_1(f) = b_1(g)$. Porém.

$$d_1(f) = mdc(b_1(f) - c_f, 1) = 1 = mdc(b_1(g) - c_g, 1) = d_1(g).$$

Logo, sempre teremos $d_1(f) = d_1(g)$, e o mesmo acontece para $d_{n-1}(f)$ e $d_{n-1}(g)$.

Portanto, concluímos que

$$d(f) = d(g),$$

pois já tínhamos $d_j(f) = d_j(g),\ 2 \leq j \leq n-2$, pelo fato de $\Gamma(f) \approx \Gamma(g)$.

□

Corolário 3.3 (*) *Seja $f \in M_2^2$, SQH, cômoda, com (a_i, b_i) e $d(f)$ como no Teorema 3.1. Também, sejam*

$$a = \frac{a_n(b_{n-1} - 1) + a_{n-1}}{b_{n-1}}\ ,\ b = \frac{b_1(a_2 - 1) + b_2}{a_2}.$$

Então,

$$MI(f) = \frac{\nu(f) + d(f) + 1}{2} - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor.$$

Prova. Seja $(r, 1)\ ,\ (1, s) \in \Gamma(f)$. Então, temos que $r = a$ e $s = b$. Logo,

$$\begin{aligned} MI(f) &= p(f) - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor + 1 \\ &= \frac{\nu(f) + d(f) - 1}{2} - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor + 1 \\ &= \frac{\nu(f) + d(f) + 1}{2} - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor \end{aligned}$$

□

§4. Resultados para Polinômios de Brieskorn.

Consideremos o conjunto

$$A_s^q = \{(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}_-^n \mid c_1 + c_2 + \ldots + c_n = s, 0 \leq c_1, c_2, \ldots, c_n \leq q,\ n \geq 2\},$$

e seja $\lceil x \rceil$ o menor inteiro maior ou igual a x.

De [5], sabemos que

$$\#A_{\lceil p \rceil}^q = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{\lceil p \rceil + n - 1 - j(q+1)}{n-1},$$

onde

$$\binom{a}{b} = \begin{cases} \frac{a!}{b!(a-b)!} \text{ se } a \geq b \ ;\ b \geq 0 \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto,

$$\#\{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}_+^n \mid c_1 + c_2 + \ldots + c_n \geq p, 0 \leq c_1, c_2, \ldots, c_n \leq q;\ p \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{N}\}$$

$$= \#A_{\lceil p \rceil}^q + \#A_{\lceil p \rceil + 1}^q + \ldots + \#A_{nq}^q$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left\{ \binom{(n-j)(q+1)}{n} - \binom{\lceil p \rceil + n - 1 - j(q+1)}{n} \right\}$$

$$= (q+1)^n - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{\lceil p \rceil + n - 1 - j(q+1)}{n}. \tag{4.1}$$

Nota. Ver [11].

Agora, seja $f(x) = x_1^a + x_2^a + \ldots + x_n^a$, com $a \geq 2, n \geq 2, a \in \mathbb{N}$. Temos que

$$MI(f) = \#\{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}_+^n \mid c_1 + c_2 + \ldots + c_n \geq a, 0 \leq c_1, c_2, \ldots, c_n \leq a-2\}.$$

Portanto, usando (4.1), vemos que

$$MI(f) = \nu(f) - \binom{a+n-1}{n} + n. \tag{4.2}$$

Agora, consideremos $f(x) = x_1^a + \ldots + x_{n-\alpha}^a + x_{n-\alpha+1}^{a_1} + x_{n-\alpha+2}^{a_2} + \ldots + x_n^{a_\alpha}$, com $a \geq 2$, $a_i \geq 2$, $a/a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, \alpha$; $n \geq \alpha + 2$. Logo, temos que

$$MI(f) = \#\{(c_1, c_2, \ldots . c_n) \in \mathbb{Z}_+^n \mid (1/a)\, c_1 + (1/a)\, c_2 + \ldots + (1/a)\, c_{n-\alpha} + (1/a_1)\, c_{n-\alpha+1} + \ldots +$$

$$+ (1/a_\alpha)\, c_\alpha \geq 1 \colon 0 \leq c_{n-\alpha+k} \leq a_k - 2,\ k = 1, \ldots, \alpha;\ 0 \leq c_i \leq a-2,\ i = 1, \ldots, n-\alpha\}.$$

Novamente, usando (4.1), obtemos

$$MI(f) = \nu(f) - \sum_{k_\alpha=0}^{a_\alpha-2} \cdots \sum_{k_2=0}^{a_2-2} \sum_{k_1=0}^{a_1-2} \binom{a + (n-\alpha-1) - \lfloor \sum_{i=1}^{\alpha} k_i b_i \rfloor}{n-\alpha} -$$

$$-(n-\alpha) \binom{(n-\alpha) - \lfloor \sum_{i=1}^{\alpha} k_i b_i \rfloor}{n-\alpha}. \tag{4.3}$$

Finalmente, consideremos $f(x) = x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \ldots + x_n^{a_n}$, $a_i \in \mathbb{N}$, $a_i \geq 2$. Observemos que

$$\begin{aligned} MI(f) &= \#\{(c_1, c_2, \ldots c_n) \in \mathbb{Z}_+^n \mid (1/a_1)\, c_1 + (1/a_2)\, c_2 + \ldots + (1/a_n)\, c_n \geq 1; \\ &\quad 0 \leq c_i \leq a_i - 2, i = 1, \ldots, n\} \\ &= \#\{(d_1, d_2, c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+2} \mid d_1 + d_2 \geq 1 - (1/a_1)\, c_1 - (1/a_2)\, c_2 - \\ &\quad - \ldots - (1/a_n)\, c_n; 0 \leq c_i \leq a_i - 2,\ i = 1, \ldots, n;\ d_1 = d_2 = 0\} \end{aligned}$$

Portanto, de (4.1),

$$MI(f) = \nu(f) - \sum_{k_n=0}^{a_n-2} \cdots \sum_{k_2=0}^{a_2-2} \sum_{k_1=0}^{a_1-2} \begin{pmatrix} 2 - \lfloor \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} k_i \rfloor \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Exemplos. 1)Consideremos $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^7$. Usando a equação (4.3), temos que

$$\begin{aligned} MI(f) &= 24 - \sum_{k=0}^{5} \left\{ \begin{pmatrix} 4 - \lfloor (3/7)\ k \rfloor \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 - \lfloor (3/7)\ k \rfloor \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= 24 - 19 \\ &= 5 \end{aligned}$$

De fato,

$$MI(f) = \#\{(1,0,5),(0,1,5),(1,1,5),(1,1,4),(1,1,3)\}.$$

2) Consideremos $f(x,y,z) = x^3 + y^4 + z^5$. Usando a equação (4.4), temos que

$$\begin{aligned} MI(f) &= 24 - \sum_{k=0}^{3} \sum_{j=0}^{2} \sum_{i=0}^{1} \left\{ \begin{pmatrix} 2 - \lfloor (1/3)\ i + (1/4)\ j + (1/5)\ k \rfloor \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= 24 - 19 \\ &= 5 \end{aligned}$$

De fato,

$$MI(f) = \#\{(1,2,3),(1,2,2),(1,2,1),(0,2,3),(1,1,3)\}.$$

§5. Aplicações.

Aplicação 1.

Seja $f(x,y) = x^a + y^b$, $a.b \in \mathbb{N}$, $a,b \geq 2$. Pelo Corolário 3.3, temos que

$$MI(f) = \frac{\nu(f) + d(f) + 1}{2} - \lfloor a - \frac{a}{b} \rfloor - \lfloor b - \frac{b}{a} \rfloor$$

$$= \frac{\nu(f) + d(f) + 1}{2} - (a+b) + \lceil \frac{a}{b} \rceil + \lceil \frac{b}{a} \rceil.$$

De (4.4), temos que

$$MI(f) = \nu(f) - \sum_{k=0}^{b-2} \sum_{j=0}^{a-2} \left\{ \left(\begin{array}{c} 2 - \lfloor j\ (1/a) + k\ (1/b)\ \rfloor \\ 2 \end{array} \right) \right\}.$$

Igualando as duas expressões e usando (3.4), obtemos:

$$\sum_1 + \sum_2 = ab - \lceil\ \frac{a}{b}\ \rceil - \lceil\ \frac{b}{a}\ \rceil,$$

onde

$$\sum_1 = \sum_{i=1}^{b-1} \lfloor i \frac{a}{b} \rfloor \quad \text{e} \quad \sum_2 = \sum_{k=0}^{b-2} \sum_{j=0}^{a-2} \left\{ \left(\begin{array}{c} 2 - \lfloor\ j\ (1/a) + k\ (1/b)\ \rfloor \\ 2 \end{array} \right) \right\}.$$

Aplicação 2.

Sejam $f = f_0 + f_1$, SQH$(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $B = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ uma base monomial de $A_n / < x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} >$.(Logo, $< x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} >$ é M_n-primário). Consideremos o número

$$p'(f) = \#\{\varphi_i \mid peso_\alpha(\varphi_i) \geq d\}.$$

Observações. 1) Pelo Teorema 2.1, temos que $p'(f)$ está bem definido.

2) Existem funções $f \in M_2^2$, SQH, tais que $< x\partial_1 f, y\partial_2 f >$ não é M_2-primário. Por exemplo, temos que $f(x,y) = x^2y + xy^2$ é SQH(3, 1, 1), porém

$$< x\partial_1 f, y\partial_2 f > = < 2x^2y + xy^2, x^2y + 2xy^2 >$$

não é M_2-primário.

Agora, consideremos $f(x) = x_1^a + \ldots + x_n^a$, $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$. Usando (4.1), vemos que

$$p'(f) = a^n - \binom{a+n-1}{n}.$$

Se $n = 2$, temos que

$$\nu(f) = 2p'(f) - a + 1.$$

Se $n = 3$, temos que

$$\nu(f) = 6p'(f) - 2aC_2(a) + 3a - 1.$$

Se $n = 4$, temos que

$$\nu(f) = 24p'(f) - 6aC_3(a) + 2(a + a^3 + a^4) - a(a+1) + 1,$$

onde $C_n(a) = cos(n\ arc\ cos\ a)$ é o polinômio de Chebyshev de grau n em a.

É interessante notar o termo $3a$ no caso $n = 3$, que sugere uma analogia com $p(f)$,

quando $f \in M_2^2$. Assim, $3a$ seria a soma dos m.d.c.'s nos vértices de $\Gamma(f)$. Além do mais, o padrão de $\nu(f)$ não se alterou até $n = 4$.

Aplicação 3.

Em [20, página 39], encontramos o seguinte resultado:

Seja $f \in M_n^r - M_n^{r+1}$, *com* $\mu(f) < \infty$, $r \geq 3$, $n \geq 2$. *Se* f *1-decompõe, então existe* $q \in \mathbb{N}$, *com* $1 < q < \mu(f)$ *tal que* $q \geq r-1$, $q|\mu(f)$ *e*

$$\mu(f) \geq q \left\{ \binom{n+r-2}{r-1} - (n-1) \right\}.$$

Curiosamente, a expressão entre chaves é justamente (ver equação 4.2) o número de Newton menos a modalidade interna de uma certa função, a saber:

$$\binom{n+r-2}{r-1} - (n-1) = \binom{n+r-2}{n-1} - (n-1) = \nu(f_1) - MI(f_1),$$

onde $f_1(x) = x_1^r + \ldots + x_{n-1}^r$, $n \geq 3$.

Observação. Como fruto deste capítulo, foram redigidos dois artigos:

* O primeiro foi publicado na revista The American Mathematical Monthly, Vol. 104, No. 5, 1997, sob título: *A Geometrical Method for Finding an Explicit Formula for the Greatest Common Divisor.*

* O segundo foi submetido para publicação na revista Pacific Journal of Mathematics, sob título: *A Relation Between the Newton Number and the Inner Modality.*

Capítulo 2

Ideais do tipo Gradiente

§1. Introdução.

Neste segundo capítulo, nos preocupamos com um problema do qual pouco se sabe no sentido geral. Dado um ideal $\mathcal{I} \subset M_2^2$, deseja-se obter uma condição necessária para que exista $f \in M_2^2$ tal que $\mathcal{I} =< \partial f >$, onde $< \partial f >=< \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} >$.

Após consulta sobre o problema, feita ao renomado algebrista J. Briançon, ele nos notificou através de E-mail, em 09.09.1997, dizendo:

Cher M. Polezzi,

La seule idee qui me vient en reponse a la question est de regarder un vieux resultat de J. P. G. Henry:

Sur les ideaux jacobiens des courbes planes,
Annales de L'institut Fourier de L'université de Grenoble.
Tome XXVII, Fascicule 3, 1977.

Cordialement,

J. Briançon.

No entanto, este artigo pouco se aproxima de nosso problema, pois está incluído em outro contexto.

Para resolver este problema satisfatoriamente, nos restringimos até o momento ao caso em que

$$\#(\mathbb{Z}_+^2 - E(\mathcal{I})) = n \ , 1 \leq n \leq 9,$$

onde $E(\mathcal{I})$ é a escada do ideal $\mathcal{I}$.

Para isto, fizemos um estudo sistemático para podermos classificar todas as escadas de ideais que admitem funções que as representem. Isto é, todas as escadas $E(\mathcal{I})$ tais que $E(\mathcal{I}) = E(< \partial f >)$ para alguma $f \in M_2^2$, com $\#(\mathbb{Z}_+^2 - E(\mathcal{I})) \leq 9$.

Um primeiro passo dado nesta direção foi nos preocuparmos com as escadas $E(\mathcal{J})$ que possuem a seguinte propriedade:

$$E(\mathcal{J}) = E(<\partial f>) \text{ para alguma } f \in M_2^2,$$

com $\nu(f) = n$, onde $n = \#(\mathbb{Z}_+^2 - E(\mathcal{J}))$.

Desta forma, conseguimos dar uma solução para o problema inicial, no sentido de saber exatamente quais escadas possuem esta propriedade. Ou seja, dado $\mathcal{I} \subset M_2^2$ um ideal, com $E(\mathcal{I})$ não tendo a propriedade acima, então conclui-se que não existe $f \in M_2^2$ com $\nu(f) = n$ tal que $\mathcal{I} =< \partial f >$, onde $n = \#(\mathbb{Z}_+^2 - E(\mathcal{I})), 1 \leq n \leq 9$.

Por outro lado, podem existir $f \in M_2^2$ com $\nu(f) < n$, tais que $\mathcal{I} =< \partial f >$ e

$$\#(\mathbb{Z}_+^2 - E(\mathcal{I})) = n.$$

Observação. Lembremos que existem $f \in M_2^2$ tais que $\mu(f) > \nu(f)$. Por exemplo:

i) $f(x,y) = (x+y)^2 + y^{n+1}; n \geq 1$, com $\nu(f) = 1$ e $\mu(f) = n$.
ii) $f(x,y) = (x+y)^{a+1} + y^{n+1}; n \geq a; a \geq 1$, com $\nu(f) = a^2$ e $\mu(f) = an$.

Nota. Para mais exemplos, veja [14],[15].

No entanto, utilizando uma técnica baseada na observação do padrão dos polígonos de Newton, pudemos responder parcialmente quais escadas não possuem nenhuma das propriedades acima. Portanto, restou-nos uma pequena quantidade de escadas que podem possuir apenas a segunda propriedade.

§2. Preliminares.

Sejam $\mathcal{E}_2 = \{f : (\mathbb{R}^2, 0) \to \mathbb{R}; f \in C^\infty\}$, $\mathcal{M}_2 = \{f \in \mathcal{E}_2 : f(0,0) = 0\}$ e

$$\mathcal{M}_2^k = \{f \in \mathcal{E}_2; j^{k-1}f(0,0) = 0\}, k \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.1 *A $\mathbb{R}$-dimensão de $\mathcal{E}_2/ < \partial f >$* é chamada de número de Milnor da singularidade f, e será denotado por $\mu(f)$.

Definição 2.2 *Seja $f \in A_2$, $f = \sum a_{ij}x^iy^j$. Denotaremos por $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ os elementos de A_2 dados por:*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum i a_{ij} x^{i-1} y^j \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sum j a_{ij} x^i y^{j-1} \end{cases}$$

Definição 2.3 *Seja $f \in M_2 \subset A_2$, com $< \partial f > M_2-$primário. Também chamaremos de número de Milnor de f a $\mathbb{R}$-dimensão de $A_2/ < \partial f >$, que será denotado por $\mu(f)$.*

Proposição 2.1 *Seja $f \in M_2^2$, polinomial. Se $< \partial f >$ é M_2-primário, então*

$$(\omega) \begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

não tem solução em $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$, onde $\tilde{f}$ é a complexificada de f.

Prova. Se $< \partial f >$ é M_2-primário, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M_2^k \subset < \partial f >$. Logo,

$$\begin{cases} x^k &= g_{01} \frac{\partial f}{\partial x} + g_{02} \frac{\partial f}{\partial y} \\ &\vdots \\ y^k &= g_{k1} \frac{\partial f}{\partial x} + g_{k2} \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases},$$

com $g_{ij} \in \mathcal{E}_2$.

Daí. a única solução de

$$(\omega) \begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

será

será

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

□

Nota. Ver [7],[19].

Teorema 2.1 *A recíproca é verdadeira.*

Prova. Ver [9].

Definição 2.4 *Seja $f \in M_2^2$. Dizemos que a parte principal newtoniana f_Γ da série f é não-degenerada se para cada face compacta $\Delta \subset \Gamma(f)$,*

$$\begin{cases} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} \right)_\Delta = 0 \\ \\ \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right)_\Delta = 0 \end{cases}$$

não tiver solução em $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$, onde g_Δ é a restrição de g à Δ.

Teorema 2.2 (Kouchnirenko) *Seja $f \in M_2^2$. Então,*

i) $\mu(f) \geq \nu(f)$.

ii) Se f for cômoda e sua parte principal newtoniana for não-degenerada, então $\mu(f) = \nu(f)$.

Prova. Ver [12].

Teorema 2.3 (Arnol'd) *Seja $f \in M_2^2$, $SQH(d; a, b)$. Então,*

$$\mu(f) = \frac{d-a}{a} \cdot \frac{d-b}{b}.$$

Prova. Ver [3].

Teorema 2.4

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{M}_2^\infty} \simeq A_2.$$

Prova. Pelo Teorema de Borel, temos que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \mathcal{E}_2 & \longrightarrow & A_2 \\ & f & \mapsto & \displaystyle\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}(0,0)\; x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} \end{array}$$

é sobrejetiva. Além disso, observemos que ψ é claramente um homomorfismo. Logo, pelo Teorema do isomorfismo, temos que

$$\frac{\mathcal{E}_2}{Ker\ \psi} \simeq A_2,$$

ou seja,

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{M}_2^\infty} \simeq A_2, \text{ pois } \mathcal{M}_2^\infty = Ker\ \psi.$$

□

Consideremos o grupo $\mathcal{R}_n = \{f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0\ ;\ f \text{ é germe de difeomorfismo } C^\infty\}$.

Definição 2.5 *$f \in \mathcal{M}_n$ é k-determinado, $k \in \mathbb{N}$, se para todo $g \in \mathcal{M}_n$ tal que $j^k g(0) = j^k f(0)$ tivermos $f \sim g$, i.e., $g = f \circ \varphi$ para algum $\varphi \in \mathcal{R}_n$.*

Nota. Ver [13].

Teorema 2.5 (Arnol'd) *Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$. Se $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 < \partial f >$, então f é k-determinado.*

Prova. Ver [4].

Teorema 2.6 *Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$. Se $\mu(f) < \infty$, então f é $(\mu(f)+1)$-determinado.*

Prova.

$$1 = dim\ (\mathcal{E}_n\ /\mathcal{M}_n + < \partial f >)\ \leq dim(\ \mathcal{E}_n\ /\mathcal{M}_n^2 - < \partial f >)\ \leq\ \ldots$$
$$\leq dim(\ \mathcal{E}_n\ /\mathcal{M}_n^{\mu(f)-1} + < \partial f >) \leq dim\ (\mathcal{E}_n\ /\mathcal{M}_n^{\mu(f)} + < \partial f >)\ \leq$$
$$\leq dim\ (\mathcal{E}_n\ / < \partial f >)\ = \mu(f).$$

Logo, temos uma seqüência de números naturais

$$1 = a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{\mu(f)-1} \leq a_{\mu(f)} \leq \mu(f).$$

Portanto, pelo Princípio da casa de pombo (devido a Dirichlet). temos que existe pelo menos $(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i < j$ tal que $a_i = a_j$.

Suponhamos que $j > i+1$. Logo,

$$a_i \leq a_{i+1} \leq a_j,$$

i.e.,

$$a_i \leq a_{i+1} \leq a_i,$$

implicando

$$a_{i+1} = a_i.$$

Portanto, temos que $j = i+1$.

i) Suponhamos $2 \leq i \leq \mu(f) - 1$.

Neste caso, temos que

$$dim\ (\ \mathcal{E}_n\ /\mathcal{M}_n^i + < \partial f >) = dim\ (\mathcal{E}_n\ /\mathcal{M}_n^{i+1} + < \partial f >).$$

Logo, como

$$\mathcal{M}_n^{i+1} + < \partial f > \subset \mathcal{M}_n^i + < \partial f >,$$

teremos

$$\mathcal{M}_n^i + < \partial f > = \mathcal{M}_n^{i+1} + < \partial f > .$$

Daí,

$$\mathcal{M}_n^i \subset \mathcal{M}_n^{i+1} + < \partial f > .$$

Logo, pelo Lema de Nakayama, temos que

$$\mathcal{M}_n^i \subset < \partial f >,$$

implicando

$$\mathcal{M}_n^{i+2} \subset \mathcal{M}_n^2 < \partial f > .$$

Logo, pelo Teorema 2.5, f é $(i+1)$-determinado.

ii) Se

$$dim\ (\mathcal{E}_n\ /\mathcal{M}_n^2 + < \partial f >) = 1,$$

teremos

$$< \partial f > + \mathcal{M}_n^2 = \mathcal{M}_n,$$

e daí

$$\mathcal{M}_n \subset < \partial f > + \mathcal{M}_n^2,$$

Logo, pelo Lema de Nakayama, temos que

$$\mathcal{M}_n \subset < \partial f >,$$

implicando

$$\mathcal{M}_n^3 \subset \mathcal{M}_n^2 < \partial f > .$$

Logo, pelo Teorema 2.5, f é 2-determinado.

iii) Se

$$dim\ (\mathcal{E}_n\ / \mathcal{M}_n^{\mu(f)} + < \partial f >)\ =\ dim\ (\mathcal{E}_n\ / < \partial f >),$$

como

$$< \partial f > \subset \mathcal{M}_n^{\mu(f)} + < \partial f >,$$

teremos

$$\mathcal{M}_n^{\mu(f)} + < \partial f > = < \partial f > .$$

Daí.

$$\mathcal{M}_n^{\mu(f)} \subset < \partial f >,$$

implicando

$$\mathcal{M}_n^{\mu(f)+2} \subset \mathcal{M}_n^2 < \partial f > .$$

Logo, pelo Teorema 2.5, f é $(\mu(f)+1)$-determinado. □

Teorema 2.7 *Sejam $f, g \in \mathcal{M}_n$. Se $f \sim g$, então $\mu(f) = \mu(g)$.*

Prova (*) Se $f \sim g$, então existe $\varphi \in \mathcal{R}_n$ tal que

$$g = f \circ \varphi.$$

Logo, pelo Teorema 4.4, que enunciaremos mais adiante. temos

$$\varphi^* < \partial f > = < \partial g > .$$

Também, como $\varphi^* \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n$, temos que existe um isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\psi : \mathcal{E}_n / < \partial f > \longrightarrow \mathcal{E}_n / < \partial g >.$$

De fato,

$$\begin{cases} \phi : \ \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n / < \partial g > \\ \\ \qquad h \quad \rightarrow \quad \varphi^* h + < \partial g > \end{cases}$$

é claramente um homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras. Observemos também que ϕ é uma aplicação sobrejetora, pois φ^* é sobrejetora. Logo, pelo Teorema do isomorfismo,

$$\mathcal{E}_n / Ker\ \phi \ \simeq \ \mathcal{E}_n / < \partial g >.$$

Agora, como

$$\varphi^* < \partial f > = < \partial g >,$$

Agora, como

$$\varphi^* < \partial f > = < \partial g >,$$

teremos

$$< \partial f > = Ker\ \phi,$$

pois φ^* é injetora. Portanto,

$$\mathcal{E}_n / < \partial f > \ \simeq \ \mathcal{E}_n / < \partial g >,$$

e daí

$$dim_{\mathbb{R}} (\mathcal{E}_n / < \partial f >) = \dim_{\mathbb{R}} (\mathcal{E}_n / < \partial g >).$$

Ou seja,

$$\mu(f) = \mu(g).$$

□

§3. Partições do tipo Newton-gradiente.

(Resultados para $f \in M_2^2$.)

Lema 3.1 (*) *Seja* $f \in M_2^2, f = f_0 + f_1$ *SQH*$(d; a, b)$, *onde* $f_0(x, y) = Ax^r y^u + Bx^s y^t + \sum_{\substack{r<i<s \\ t<j<u}} \alpha_{ij} x^i y^j$. *Então,*

$$r\ ,\ t\ \leq 1.$$

Prova. Temos que

$$< \partial f_0 >=< Arx^{r-1}y^u + sBx^{s-1}y^t + \sum i\alpha_{ij}x^{i-1}y^j, uAx^ry^{u-1} + tBx^sy^{t-1} + \sum j\alpha_{ij}x^iy^{j-1} >$$

Logo, se $r \geq 2$, teremos que o eixo $x = 0$ será solução do sistema

$$\begin{cases} \partial_1 f_0 = 0 \\ \partial_2 f_0 = 0 \end{cases}$$

Analogamente, o eixo $y = 0$ será solução do sistema acima se $t \geq 2$. Portanto, pela Proposição 2.1, teríamos nos dois casos $< \partial f_0 >$ não M_2-primário. Logo, pela Proposição 2.1 do Capítulo 1 teríamos $\mu(f_0) = +\infty$.

Conseqüentemente, é necessário que tenhamos $r, t \leq 1$. □

Teorema 3.1 (*). *Seja $f \in M_2^2$, SQH$(d; a, b)$. Então,*

$$\nu(f) = \mu(f).$$

Prova. Pelo Lema anterior, temos que existem apenas 4 tipos de funções SQH$(d; a, b)$, $f = f_0 + f_1$, a saber:

1) $f(x,y) = Axy^{\frac{d-a}{b}} + Bx^{\frac{d-b}{a}}y + \sum_{\substack{1<i<(d-b)/a \\ 1<j<(d-a)/b}} \alpha_{ij}x^iy^j + f_1$

2) $f(x,y) = Ax^{\frac{d-b}{a}}y + By^{\frac{d}{b}} + \sum_{\substack{0<i<(d-b)/a \\ 1<j<d/b}} \alpha_{ij}x^iy^j + f_1$

3) $f(x,y) = Ax^{\frac{d}{a}} + Bxy^{\frac{d-a}{b}} + \sum_{\substack{1<i<d/a \\ 0<j<(d-a)/b}} \alpha_{ij}x^iy^j + f_1$

4) $f(x,y) = Ax^{\frac{d}{a}} + By^{\frac{d}{b}} + \sum_{\substack{0<i<d/a \\ 0<j<d/b}} \alpha_{ij}x^iy^j + f_1$, onde

$$\begin{cases} peso_{(a,b)}x^iy^j = d; \\ filt_{(a,b)}f_1 > d \end{cases}$$

No caso 1, temos que

$$\begin{aligned} \nu(f) &= sup_{t\in\mathbb{N}}\{[((d-b)/a) - 1][((d-a)/b) - 1] + [t - ((d-a)/b)] + \\ &\quad +2(d-a)/b + 2[((d-b)/a) - 1] + [t - (d-b)/a] - 2t + 1\} \\ &= ((d-b)/a)((d-a)/b) \end{aligned}$$

No caso 2, temos que

$$\begin{aligned} \nu(f) &= sup_{t\in\mathbb{N}}\{((d/b) - 1)(d-b)/a + 2(d-b)/a + [t - ((d-b)/a)] - \\ &\quad -t - d/b + 1\} \\ &= ((d-b)/a)(d/b) - d/b + 1 \\ &= (d-b)/a)(d/b - a/b) \\ &= ((d-b)/a)((d-a)/b) \end{aligned}$$

No caso 3, temos que

$$\begin{aligned} \nu(f) &= sup_{t\in\mathbb{N}}\{((d/a) - 1)(d-a)/b + 2(d-a)/b + t - (d-a)/b - t - d/a + 1\} \\ &= ((d-a)/b)d/a - d/a + 1 \\ &= ((d-a)/b)(d/a - b/a) \\ &= ((d-a)/b)((d-b)/a) \end{aligned}$$

No caso 4, temos que

$$\begin{aligned} \nu(f) &= (d/a)(d/b) - (d/a + d/b) + 1 \\ &= (d^2 - bd - ad + ab)/ab \\ &= ((d-a)/b)((d-b)/a) \end{aligned}$$

□

Observação. Este teorema contribui nos casos em que f é SQH, cômoda, com parte principal newtoniana degenerada, ou SQH e não-cômoda. De fato, nestes casos não será possível usarmos o Teorema 2.2 para concluirmos que $\nu(f) = \mu(f)$.

Exemplo. $f(x,y) = x^2y + xy^2 + x^4 + y^4$ é SQH$(3,1,1)$, cômoda, com

$$\begin{cases} f_0(x,y) = x^2y + xy^2 \\ f_1(x,y) = x^4 + y^4 \ ; \ filt_{(1,1)}(f_1) = 4 > 3. \end{cases}$$

Além disso, sua parte principal newtoniana é degenerada, pois consideremos $f_\Delta = xy^2 + y^4$. Neste caso, temos que o eixo $y = 0$ é solução de

$$\begin{cases} x(y^2) = 0 \\ y(2xy + 4y^3) = 0 \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema 2.2, podemos concluir apenas que $\nu(f) \leq \mu(f)$.

Teorema 3.2 **(*)** *Seja $f \in \mathcal{M}_2^2$, com $\mu(f) < \infty$. Então,*

$$E(< \partial f >) = E(< \partial g >),$$

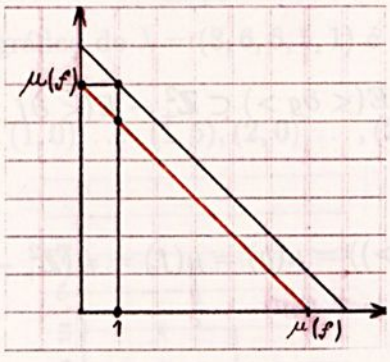
onde $g = j^{\mu(f)+1}f(0,0)$.

Prova. Pelo Teorema 2.6, temos que f é $(\mu(f)+1)$-determinado. Logo, para todo $h \in \mathcal{M}_2^2$ tal que $j^{\mu(f)+1}h(0,0) = j^{\mu(f)+1)}f(0,0)$, teremos $f \sim h$. Daí, temos que $f \sim g$ e, pelo Teorema 2.7, $\mu(f) = \mu(g)$. Seja agora $(a,b) \in E(< \partial f >)$, com $a + b \leq \mu(f)$. Então, existem $h, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{E}_2$ tais que $h = \alpha_1 \, \partial_1 f + \alpha_2 \, \partial_2 f$ e $o(h) = (a,b)$. Consideremos agora

$$\tilde{h} = \alpha_1 \partial_1 \, (j^{\mu(f)+1}f(0,0)) + \alpha_2 \partial_2 \, (j^{\mu(f)+1}f(0,0)) \ = \ \alpha_1 \partial_1 g + \alpha_2 \partial_2 g \ \in < \partial g >,$$

e observemos que

$$(\omega)\begin{cases} j^{\mu(f)}\partial_1 f(0,0) = \partial_1 g \\ j^{\mu(f)}\partial_2 f(0,0) = \partial_2 g \end{cases}$$



Consideremos também o triângulo

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x + y \leq \mu(f)\}.$$

Como $g = j^{\mu(f)+1} f(0,0)$, temos que

$$supp\ \tilde{h} \subset supp\ h,$$

e portanto $o(\tilde{h}) \geq (a,b)$. Também, por (ω), temos que

$$(supp\ \tilde{h}) \cap T = (supp\ h) \cap T.$$

Destes dois fatos vemos então que $o(\tilde{h}) = (a,b)$, e portanto $(a,b) \in E(< \partial g >)$.

Observemos agora que

$$(\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >))\ ,\ (\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial g >))\ \subset T.$$

Logo,

$$E(< \partial f >) \cap T^c = E(< \partial g >) \cap T^c.$$

Portanto,

$$E(<\partial f>) \subset E(<\partial g>),$$

e daí

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(<\partial g>) \subset \mathbb{Z}_+^2 - E(<\partial f>).$$

Mas, como

$$\#(\mathbb{Z}_+^2 - E(<\partial g>)) = \mu(g) = \mu(f) = \#(\mathbb{Z}_+^2 - E(<\partial f>)),$$

temos que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(<\partial g>) = \mathbb{Z}_+^2 - E(<\partial f>).$$

Logo, concluímos que

$$E(<\partial g>) = E(<\partial f>).$$

□

Observação. Este teorema nos diz que se quisermos saber se existe $f \in M_2^2$ de modo que $E(<\partial f>)$ seja igual a uma certa escada $E(\mathcal{I})$, $\mathcal{I} \subset M_2^2$, M_2-primário, basta nos restringirmos ao caso f polinomial, de grau maior ou igual a

$$\#(\mathbb{Z}_+^2 - E(\mathcal{I})) + 1.$$

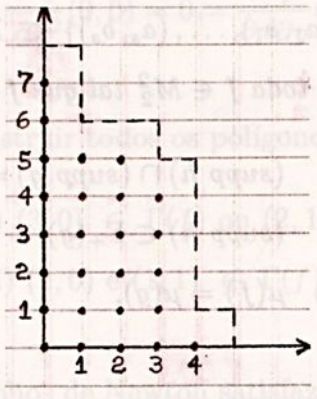
Definição 3.1 *Uma partição λ de um número natural n é uma seqüência finita de números naturais $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r$ tais que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Os λ_i's são chamados de partes da partição, que será representada por $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$.*

Definição 3.2 (*) *A representação gráfica G_λ de uma partição λ é o conjunto de pontos com coordenadas inteiras (i, j) no plano tais que se $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, então $(i, j) \in G_\lambda$ se, e somente se*

$$0 \leq i \leq r-1\ ,\ 0 \leq j \leq \lambda_{i+1} - 1.$$

Exemplo. A representação gráfica de $\lambda = (8,6,6,5,1)$ é dada por

$$G_\lambda = \{(0,0), \ldots, (0,7), (1,0), \ldots, (1,5), (2,0), \ldots, (2,5), (3,0), \ldots, (3,4), (4,0)\}.$$



Observação. A representação gráfica de uma partição não é única. A mais conhecida é chamada de Grafo de Ferrars. Para mais detalhes, ver [2].

No entanto, para que este conceito seja bem adaptado ao nosso propósito, nos valeremos da representação gráfica acima definida.

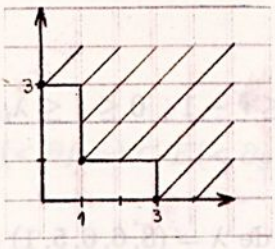
Definição 3.3 (*) *Uma partição* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ *de* n *é Newton-gradiente se existir* $f \in M_2^2$ *com* $\nu(f) = n$ *tal que*

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_\lambda\ .$$

Exemplo. $\lambda = (3,1,1)$ é Newton-gradiente. De fato, temos que

$$G_\lambda = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (2,0)\}.$$

Por outro lado, para $f_5(x,y) = x^4 + xy^2$ temos que $\nu(f) = 5$, $< \partial f_5 > = < 4x^3 + y^2, 2xy >$ e daí $E(< \partial f_5 >)$ é dada por:



implicando $\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f_5 >) = G_\lambda$.

Definição 3.4 (*) *Seja* $S = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_s, b_s)\} \subset \mathbb{Z}_+^2$. *Dizemos que* $g \in M_2^2$ *é E-suficiente com relação à* S *se para toda* $f \in M_2^2$ *tal que* $f = g + h$, *com*

$$\begin{cases} i) & (supp\ h) \cap (supp\ g) = \emptyset, \\ ii) & (supp\ h) \subset \Gamma_+(g), \\ iii) & \mu(f) = \mu(g), \end{cases}$$

tivermos:

$$S \not\subset E(< \partial g >) \Longrightarrow S \not\subset E(< \partial f >).$$

Observação. Sem prejuízo algum, denotaremos g por f.

§4. A partição $\lambda = (n, n-1)$, $n \geq 3$.

Suponhamos que $\lambda = (n, n-1)$ seja Newton-gradiente. Então, existe $f \in M_2^2$ com $\nu(f) = 2n - 1$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_\lambda = \{(0,0), \ldots, (0, n-1), (1,0), \ldots, (1, n-2)\}.$$

Portanto, teremos necessariamente $(2,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Desta forma, será preciso que pelo menos um dos monômios ax^3, bx^2y "faça parte" da expressão de f. Em outras

palavras, é preciso que

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) \neq 0 \end{cases}$$

Além disso, como não queremos $(1,0) \in E(< \partial f >)$, também será preciso que

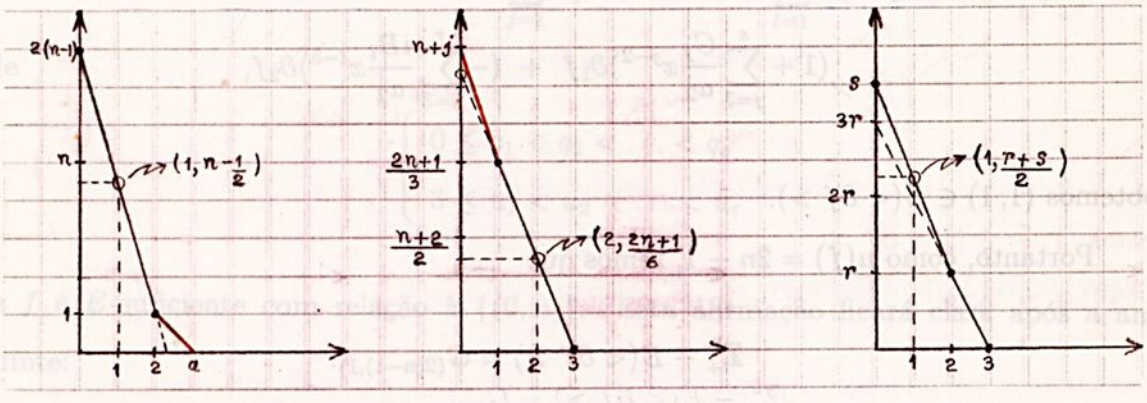
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Assim sendo, devemos construir todos os polígonos de Newton $\Gamma(f)$ tais que

$$\begin{cases} i)\ (3,0) \in \Gamma(f) \text{ ou } (2,1) \in \Gamma(f). \\ ii)\ (2,0) \text{ e } (1,1) \notin \Gamma(f). \end{cases}$$

Temos que os únicos polígonos de Newton satisfazendo estas condições são os seguintes:

$\begin{cases} n \geq 3, \\ a \geq 3 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} n \geq 4,\ j \geq 1, \\ 2n+1 = 3k \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} r \geq 2, \\ s \geq 3r+1 \end{cases}$



Em relação ao primeiro polígono, observando $\Gamma(f)$, vemos que f é dada por

$$f(x,y) = a_2 x^2 y + a_0 y^{2(n-1)} + h(x,y),$$

com $filt_{(2n-3,2)} h > 4(n-1),\ a_0,\ a_2 \neq 0.$

Temos que f é SQH$(4(n-1); 2n-3, 2)$. Observemos que:

i) f satisfaz o "critério de necessidade" dado pelo Lema 3.1.

ii) $f_0(x,y) = a_2x^2y + a_0y^{2(n-1)}$, e portanto $\mu(f_0) < \infty$.

Portanto, pelo Teorema 2.3, temos que $\mu(f) = 2n-1$, e pelo Teorema 3.1 que $\nu(f) = 2n-1$.

Mostremos agora que $(1,1) \in E(< \partial f >)$, qualquer que seja $h(x,y)$, nas condições acima.

Sem perda de generalidade, podemos supor que f é dada por

$$f(x,y) = a_2x^2y + a_0y^{2(n-1)} + \sum_{i=3}^{r} B_ix^i + \sum_{j=3}^{s} C_jx^jy,$$

pois os monômios do tipo $\alpha x^a y^b$, $b \geq 2$ não colaboram para uma possível não-obtenção do monômio xy.

Temos que

$$< \partial f > = < 2a_2xy + \sum_{i=3}^{r} iB_ix^{i-1} + \sum_{j=3}^{s} jC_jx^{j-1}y \ , \ a_2x^2 + 2(n-1)a_0y^{2n-3} + \sum_{j=3}^{s} C_jx^j > .$$

Agora, de

$$(1 + \sum_{j=3}^{s} \frac{C_j}{a_2}x^{j-2})\partial_1 f \ + \ (-\sum_{i=3}^{r} \frac{iB_i}{a_2}x^{i-3})\partial_2 f,$$

obtemos $(1,1) \in E(< \partial f >)$.

Portanto, como $\mu(f) = 2n-1$, temos que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(2(n-1),1)}.$$

Em relação ao segundo polígono, observemos primeiramente que

$$\lfloor \frac{2n+1}{6} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n+2}{3} + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{n+2}{3},$$

pelo fato de $\frac{n+2}{3} = \frac{k+1}{2} \in \mathbb{N}$, pois k é ímpar.

Agora, observando $\Gamma(f)$, vemos que fé dada por

$$f(x,y) = a_3x^3 + a_1xy^{\frac{2n+1}{3}} + h(x,y),$$

com $filt_{((2n+1)/3,2)}h > 2n+1$, $a_1, a_3 \neq 0$.

Além disso, f é SQH$(2n+1; \frac{2n+1}{3}, 2)$. Observemos que

i) f satisfaz o "critério de necessidade " dado pelo Lema 3.1.

ii) $(2,(2n+1)/6) \notin \Gamma(f)$. Logo, $f_0(x,y) = a_3x^3 + a_1xy^{\frac{2n+1}{3}}$, e portanto $\mu(f_0) < \infty$.

Portanto, pelo Teorema 2.3, temos que $\mu(f) = 2n-1$, e pelo Teorema 3.1 que $\nu(f) = 2n-1$.

Observação. Como $3 \mid (2n+1)$, temos que $\nu(f) = 7, 13, 19, 25, \ldots$

Mostremos agora que $y^n \notin < \partial f >$, qualquer que seja $h(x,y)$, nas condições acima.

Sem perda de generalidade, podemos supor que f é dada por

$$f(x,y) = a_3x^3 + a_1xy^{\frac{2n+1}{3}} + \sum_{j=1}^{s} C_jx^2y^{(\frac{n+2}{3})+q_j} + \sum_{l=1}^{t} D_lx^{u_l}y + Ey^{n+1},$$

onde

$$\begin{cases} 0 \leq q_1 < q_2 < \ldots < q_s \\ 3 \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_t \end{cases},$$

pois f é E-suficiente com relação à $\{(0,n)\}$. Esta afirmação ficará clara após a análise seguinte:

Temos que

$$\begin{aligned} < \partial f > = \; & < 3a_3x^2 + a_1y^{\frac{2n+1}{3}} + \sum_{j=1}^{s} 2C_jxy^{(\frac{n+2}{3})+q_j} + \sum_{l=1}^{t} u_lD_lx^{u_l-1}y, \\ & (\tfrac{2n+1}{3})a_1xy^{\frac{2(n-1)}{3}} + \sum_{j=1}^{s} C_j\left(\tfrac{n+2}{3} + q_j\right)x^2y^{(\frac{n-1}{3})+q_j} + \sum_{l=1}^{t} D_lx^{u_l} + (n+1)Ey^n > \end{aligned}$$

Observação. Usaremos as notações

i) $A \rightsquigarrow B$ para dizermos: A "conduz a" B.

ii) $A \longrightarrow B$ para dizermos: A "pede" B.

1) Caso $E \neq 0$, temos que

$(n+1)Ey^n$ em $\partial_2 f \rightsquigarrow (\frac{2n+1}{3})a_1 x y^{\frac{2(n-1)}{3}}$ em $\partial_2 f \longrightarrow (\alpha y^{(\frac{n-4}{3})-q_1})\partial_1 f \rightsquigarrow 3a_3\alpha x^2 y^{(\frac{n-4}{3})-q_1}$ em $\partial_1 f$, que não pode ser obtido de $\partial_2 f$, nem de $\partial_1 f$, se $u_1 > 3$.

Caso $u_1 = 3$, temos que $(\beta y^{(\frac{n-7}{3})-q_1})\partial_1 f \rightsquigarrow 3a_3\beta x^2 y^{(\frac{n-7}{3})-q_1}$ em $\partial_1 f \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \omega 3a_3 x^2$ em $\partial_1 f$, que não pode ser obtido de $\partial_2 f$, nem de $\partial_1 f$.

2) Como $a_1 \neq 0$, temos que

$(y^{\frac{n-1}{3}})\partial_1 f \rightsquigarrow 3a_3 x^2 y^{\frac{n-1}{3}}$ em $\partial_1 f$, que não pode ser obtido de $\partial_1 f$ nem de $\partial_2 f$ se $u_1 > 3$ e $q_1 > 0$.

Caso $u_1 = 3$, temos que $(\alpha y^{\frac{n-4}{3}})\partial_1 f \rightsquigarrow 3a_3\alpha x^2 y^{\frac{n-4}{3}}$ em $\partial_1 f \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \omega 3a_3 x^2$ em $\partial_1 f$, que não pode ser obtido de $\partial_2 f$, nem de $\partial_1 f$.

Caso $q_1 = 0$, temos que $(\beta)\partial_2 f \rightsquigarrow$ caso 1).

Logo, temos que $y^n \notin < \partial f >$, e assim,

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) \neq G_\lambda, \text{ com } \lambda = (n, n-1).$$

Em relação ao terceiro polígono, temos que $\nu(f) = 3r + s - 2$.

Observação. Isto implica $\nu(f) \geq 11$, pois $r \geq 2$, $s \geq 3r + 1$.

Como consideraremos apenas o caso em que $\nu(f)$ for ímpar, observemos que:

$$\frac{r+s}{2} \in \mathbb{N} \text{ se, e somente se } \nu(f) \text{é par}$$

De fato, se $\frac{r+s}{2} \in \mathbb{N}$, então r e s são ambos pares ou ambos ímpares, e nos dois casos teremos $\nu(f)$ par.

Por outro lado, se $\nu(f)$ for par, então $3r+s$ será par, e daí r e s serão ambos pares ou ambos ímpares, acarretando $\frac{r+s}{2} \in \mathbb{N}$.

Portanto, consideraremos apenas o caso $r+s$ ímpar. Assim sendo, podemos escrever:

$$\nu(f) = 3r+s-2 = 2n-1 = n+(n-1) = \frac{3r+s-1}{2} + \frac{3r+s-3}{2}.$$

Mas, temos que

$$\frac{3r+s-1}{2} \leq \frac{(s-2)+s}{2} = s-1.$$

Mostremos portanto que $y^{s-1} \notin < \partial f >$.

Observando $\Gamma(f)$, vemos que f é dada por:

$$f(x,y) = a_3x^3 + a_2x^2y^r + a_0y^s + h(x,y),$$

com $filt_{(r,1)}h > 3r, \quad filt_{(s-r,2)}h > 2s, \quad a_0, a_2, a_3 \neq 0.$

Sem perda de generalidade, podemos supor que f é dada por:

$$f(x,y) = a_3x^3 + a_2x^2y^r + a_0y^s + \sum_{i=1}^{u} B_ix^2y^{r+p_i} + \sum_{j=1}^{v} C_jxy^{(\frac{r+s+1}{2})+q_j},$$

onde

$$\begin{cases} 1 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_u \\ 0 \leq q_1 < q_2 < \ldots < q_v \end{cases},$$

pois f é E-suficiente com relação à $\{(0, s-1)\}$. Isto ficará claro após a análise seguinte:

Temos que

$$< \partial f > = < 3a_3x^2 + 2a_2xy^r + \sum_{i=1}^{u} 2B_ixy^{r+p_i} + \sum_{j=1}^{v} C_jy^{(\frac{r+s+1}{2})+q_j},$$
$$ra_2x^2y^{r-1} + sa_0y^{s-1} + \sum_{i=1}^{u}(r+p_i)B_ix^2y^{(r-1)+p_i} + \sum_{j=1}^{v}\left(\frac{r+s+1}{2} + q_j\right)C_jxy^{(\frac{r+s-1}{2})+q_j} >$$

Observação. Notemos que $\frac{r-s-1}{2} \geq 2r$.

1) Como $a_0 \neq 0$, temos que

sa_0y^{s-1} em $\partial_2 f \rightsquigarrow ra_2x^2y^{r-1}$ em $\partial_2 f \longrightarrow (\alpha y^{r-1})\partial_1 f \rightsquigarrow 2a_2\alpha xy^{2r-1}$ em $\partial_1 f$, que não pode ser obtido de $\partial_2 f$, (nem de $\partial_1 f$, se $2r-1 < r+p_1$).

Caso $2r-1 \geq r+p_1$, temos que $(\beta y^{r-1-p_1})\partial_1 f \rightsquigarrow 2a_2\beta xy^{(2r-1)-p_1}$ em $\partial_1 f \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow 2a_2\,\omega xy^{\tilde{r}}$ em $\partial_1 f$, com $\tilde{r} < r+p_1$, que não pode ser obtido de $\partial_1 f$.

2) Temos $C_1 y^{\frac{r+s+1}{2}+q_1}$ em $\partial_1 f$. Logo,

$(\alpha y^{\frac{s-r-3}{2}-q_1})\partial_1 f \rightsquigarrow 2a_2\alpha xy^{\frac{s+r-3}{2}-q_1}$ em $\partial_1 f$, que não pode ser obtido de $\partial_2 f$,(nem de $\partial_1 f$, se $\frac{s+r-3}{2} - q_1 < r+p_1$).

Caso $\frac{s+r-3}{2} - q_1 \geq r+p_1$, temos que $(\beta y^{\frac{s-(r+3)}{2}-p_1-q_1})\partial_1 f \rightsquigarrow 2a_2\beta xy^{(\frac{s+r-3}{2}-q_1)-p_1}$ em $\partial_1 f \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow 2a_2\omega xy^{\tilde{r}}$ em $\partial_1 f$, com $\tilde{r} < r+p_1$, que não pode ser obtido de $\partial_1 f$.

Logo, temos que $y^{s-1} \notin < \partial f >$, e daí $y^{\frac{3r+s-1}{2}} \notin < \partial f >$. Portanto,

$$\{\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >)\} = G_\lambda, \text{ com } \lambda \neq ((3r+s-1)/2, (3r+s-3)/2).$$

Desta forma, provamos:

Teorema 4.1 (*) *A partição $\lambda = (n, n-1)$, $n \geq 3$ não é Newton-gradiente.*

Lembramos neste caso que existe a possibilidade de λ ser do tipo gradiente, i.e, de existir $f_\lambda \in M_2^2$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f_\lambda >) = G_\lambda.$$

Proposição 4.1 *Seja $\varphi \in \mathcal{R}_n$. Então*

$$\begin{cases} \varphi^* & : \ \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n \\ & \quad f \mapsto f \circ \varphi \end{cases}$$

é um isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Prova. Temos que φ^* é claramente um homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras. Além disso, $\varphi_1 \circ \varphi_2 = id$ implica $(\varphi_1 \circ \varphi_2)^* = id^*$. Daí, $\varphi_2^* \circ \varphi_1^* = id^*$. Logo, $(\varphi_1^*)^{-1} = \varphi_2^* = (\varphi_1^{-1})^*$, e portanto φ^* é bijetora.

Proposição 4.2 $\varphi^*(\mathcal{M}_n) = \mathcal{M}_n$.

Prova. Temos que φ^* leva elementos $\mathcal{E}_n$- unitários em elementos $\mathcal{E}_n$- unitários. De fato, seja $f \in \mathcal{E}_n$, unitário. Então, existe $\bar{f} \in \mathcal{E}_n$ tal que $f.\bar{f} = 1$. Logo,

$$\varphi^*(f.\bar{f}) = \varphi^*(1) = 1,$$

e daí

$$\varphi^*(f).\varphi^*(\bar{f}) = 1.$$

Portanto,

$$\varphi^*(f) \text{ é } \mathcal{E}_n\text{-unitário}$$

Observemos agora que $\varphi^*(\mathcal{M}_n) \subset \mathcal{M}_n$. De fato, seja $g \in \mathcal{M}_n$. Logo, g não é uma unidade. Suponhamos que $\varphi^*(g) \notin \mathcal{M}_n$. Daí,

$$\varphi^*(g) = a + h,$$

com $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \ a \neq 0 \\ h \in \mathcal{M}_n \end{cases}$

Portanto,

$$(\varphi^*)^{-1}(a + h) = g,$$

o que é uma contradição, pois $a + h$ é unidade, e g não é. □

Consideremos $I =< f_1, \ldots, f_k > \subset \mathcal{M}_n$, com $f_i \in \mathcal{M}_n$, $k \geq n$.

Definição 4.1 *A extensão r-jacobiana do ideal I é dada por $I + I'$, onde I' é o ideal gerado por todos os determinantes $r \times r$ da matriz $(\frac{\partial}{\partial x_i} f_j)_{k \times n}$,* com $f_j \in I$.

Notação. $\Delta_r I = I + I'$.

Exemplo. Seja $J =< x^2, y^2, z^2 > \subset \mathcal{M}_3$. Logo,

$$\Delta_1 J = J + < x, y, z > = J + \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3.$$

Definição 4.2 *Seja $J \subset \mathcal{M}_n$. Então,*

$$rank\ J = dim_{\mathbb{R}} (\frac{J + \mathcal{M}_n^2}{\mathcal{M}_n^2})$$

Exemplo. $J =< x, y^2 > \subset \mathcal{M}_2$. Neste caso,

$$rank\ J = 1, \text{ e } J \neq < x > .$$

Proposição 4.3 *Seja $J \subset \mathcal{M}_n$ um ideal. Se $rank\ J = r$, então*

$$\Delta_r J = \mathcal{E}_n.$$

Prova. Ver [21].

Observações.

1) Definimos $\delta I = \Delta_{s+1} I$, onde $s = rank\ I$.

2) $I = \Delta_{n+1} I \subset \Delta_n I \subset \Delta_{n-1} I \subset \ldots \subset \Delta_{s+2} I \subset \underbrace{\Delta_{s+1} I}_{\delta I} \subset \Delta_s I = \mathcal{E}_n$.

Lema 4.1 *Seja $I \subset \mathcal{M}_n^2$ um ideal. Então,*

$$\varphi^*(\delta\ I) = \delta\ (\varphi^*(I)),$$

onde φ e φ^* são como anteriormente.

Prova. Ver [20],[22].

Teorema 4.2 (Saito) *Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$, com $\mu(f) < \infty$. Então,*

$$f \in \mathcal{M}_n < \partial f > \quad \textit{se, e somente se existe } \psi \in \mathcal{R}_n \textit{ tal que } f \circ \psi \textit{ é } QH.$$

Prova. Ver [17].

Teorema 4.3 *Sejam $f \in \mathcal{M}_n^2$, QH, com $\mu(f) < \infty$ e $g = f \circ \varphi$, onde $\varphi \in \mathcal{R}_n$. Então,*

$$\varphi^* < \partial f > = < \partial g > .$$

Prova. (*) Consideremos $I =< f > \subset \mathcal{M}_n^2$. Temos que $rank\ I = 0$, pois $f \in \mathcal{M}_n^2$. Logo,

$$\varphi^*(\delta < f >) = \varphi^*(\Delta_1 < f >) = \varphi^*(< f > + < \partial f >)$$
$$= \varphi^* < f > + \varphi^* < \partial f > = < g > + \varphi^* < \partial f > .$$

Também,

$$\delta\varphi^*(< f >) = \delta(< g >) = \Delta_1 < g > = < g > + < \partial g > .$$

Portanto, pelo Lema 4.1, temos que

$$< g > + \varphi^* < \partial f > = < g > + < \partial g > .$$

Agora, como f é QH e $\mu(f) < \infty$, temos pelo Teorema 4.2 que

$$f \in < \partial f > .$$

Além disso, como $g = f \circ \varphi$, temos que existe $\varphi^{-1} \in \mathcal{R}_n$ tal que $g \circ \varphi^{-1} = f$, que é QH. Logo, pelo Teorema 4.2,

$$g \in < \partial g >,$$

e daí,

$$< g > + < \partial g > = < \partial g > .$$

Tínhamos que $< g > + \varphi^* < \partial f > = < g > + < \partial g >$. Logo,

$$< g > + \varphi^* < \partial f > = < \partial g > .$$

Agora, aplicando $(\varphi^*)^{-1}$ em ambos os lados desta igualdade, vem que

$$< f > + < \partial f > = (\varphi^{-1})^* < \partial g > .$$

Logo, $< \partial f > = (\varphi^{-1})^* < \partial g > = (\varphi^*)^{-1} < \partial g >$, e daí

$$\varphi^* < \partial f > = < \partial g > .$$

□

Afirmamos que o Teorema 4.3 vale no sentido geral. Em outras palavras:

Teorema 4.4 *Sejam $f, g \in \mathcal{M}_n$ e $\varphi \in \mathcal{R}_n$ tais que $g = f \circ \varphi$. Então,*

$$\varphi^* < \partial f > = < \partial g > .$$

Prova. **(*)** Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Temos pela Regra da Cadeia que

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}\,(\varphi(x)).\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\ ; j = 1, \ldots, n.$$

Agora, como $\varphi^*(\mathcal{E}_n) = \mathcal{E}_n$, podemos escrever

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \varphi^*(h_{ij})\ ,\ (h_{ij}) \in \mathcal{E}_n,$$

e daí,

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \varphi^*(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}.h_{ij}).$$

Portanto,

$$< \partial g > \subset \varphi^* < \partial f > .$$

Fazendo o mesmo procedimento com $f = g \circ \varphi^{-1}$, teremos

$$< \partial f > \subset (\varphi^{-1})^* < \partial g >,$$

e daí

$$< \partial f > \subset (\varphi^*)^{-1} < \partial g > .$$

Logo,

$$\varphi^* < \partial f > \subset < \partial g >,$$

e conseqüentemente

$$\varphi^* < \partial f > = < \partial g > .$$

□

Observação. Registramos o Teorema 4.3, juntamente com sua demonstração, pelo fato desta ser rica em conceitos importantes, e portanto muito instrutiva.

Nas condições do Teorema 4.4, temos:

Corolário 4.1 *Se* $\mathcal{M}_n^\alpha \subset \mathcal{M}_n^\beta < \partial f >$, *então* $\mathcal{M}_n^\alpha \subset \mathcal{M}_n^\beta < \partial g >$.

Prova. De fato, se $\mathcal{M}_n^\alpha \subset \mathcal{M}_n^\beta < \partial f >$, então

$$\begin{aligned}
&\varphi^*(\mathcal{M}_n^\alpha) \subset \varphi^*(\mathcal{M}_n^\beta < \partial f >) \\
&= \varphi^*(\mathcal{M}_n^\beta)\ \varphi^*(< \partial f >) \\
&= \mathcal{M}_n^\beta\ \varphi^*(< \partial f >) \\
&= \mathcal{M}_n^\beta < \partial g > .
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.5 (*) *A partição $\lambda = (n, n-1),\ n \geq 3$ é do tipo gradiente.*

Primeira prova. Consideremos $f(x,y) = x^2 + y^{2n}$ e o germe de difeomorfismo $\varphi(x,y) = (x^2 + y, x)$. Logo,

$$g(x,y) = (f \circ \varphi)(x,y) = (x^2+y)^2 + x^{2n}.$$

Agora, como $\mathcal{M}_2^{2n-1} \subset < \partial f >$, temos pelo Corolário 4.1 que

$$\mathcal{M}_2^{2n-1} \subset < \partial g > .$$

Temos que

$$< \partial g > = < 4x^3 + 4xy + 2nx^{2n-1}, 2x^2 + 2y > = < \underbrace{2x^3 + 2xy + nx^{2n-1}}_{A}, \underbrace{x^2 + y}_{B} > .$$

Agora, fazendo

$$\left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} -x^{4j+1} y^{(n-2)-2j} \right) A + \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} 2x^{4j} y^{(n-1)-2j} \right) B ,$$

obtemos

$$2x^{2(n-1)}y + 2y^n + h(x,y), \text{ onde } o(h) \geq 2n,$$

e portanto,

$$y^n \in < \partial g > .$$

Observação. Usamos os seguintes fatos:

$$\begin{cases} \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor + 1, \text{ caso } n \text{ for par.} \\ \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor, \text{ caso } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Agora, como $(2,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$ e $\mu(g) = \mu(f) = 2n-1$, temos necessariamente que

$$\begin{cases} (0,n) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >)). \\ (1,n-1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >). \end{cases}$$

Logo,

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial g >) = G_{(n,n-1)},$$

e portanto $\lambda = (n, n-1)$ é do tipo gradiente. □

Segunda prova. Fazendo

$$(\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k x^{2k} y^{n-(k+1)})\ B,$$

obtemos

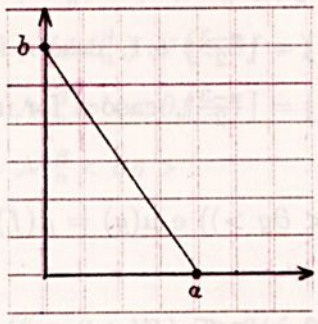
$$y^n + (-1)^{n-2} x^{2(n-1)} y.$$

Portanto, como anteriormente, $\lambda = (n, n-1)$ é do tipo gradiente. □

Observação. É interessante notarmos que $\nu(g) = 3$.

§5. Polígonos de Newton para $5 \leq \nu(\mathbf{f}) \leq 9$.

• Padrão 1.



Neste caso, queremos

$$ab - a - b + 1 = \nu(f), \ i.e., \ (a-1)(b-1) = \nu(f).$$

$* \ \nu(f) = 5.$

Neste caso, $(a-1)(b-1) = 5$ implica $\begin{cases} a = 2, \ b = 6, \text{ ou} \\ a = 6, \ b = 2 \end{cases}$.

$* \ \nu(f) = 6.$

Neste caso, $(a-1)(b-1) = 6$ implica $\begin{cases} a = 2, \ b = 7, \text{ ou} \\ a = 7, \ b = 2, \text{ ou} \\ a = 3, \ b = 4, \text{ ou} \\ a = 4, \ b = 3 \end{cases}$

$* \ \nu(f) = 7.$

Neste caso, $(a-1)(b-1) = 7$ implica $\begin{cases} a = 2, \ b = 8, \text{ ou} \\ a = 8, \ b = 2 \end{cases}$

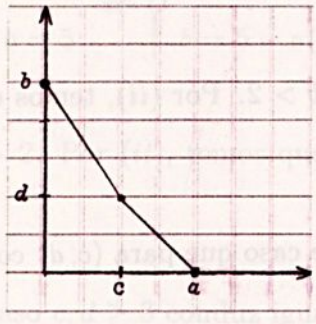
$* \ \nu(f) = 8.$

Neste caso, $(a-1)(b-1) = 8$ implica $\begin{cases} a = 2,\ b = 9,\ \text{ou} \\ a = 9,\ b = 2,\ \text{ou} \\ a = 3,\ b = 5,\ \text{ou} \\ a = 5,\ b = 3 \end{cases}$

$* \ \nu(f) = 9.$

Neste caso, $(a-1)(b-1) = 9$ implica $\begin{cases} a = 2,\ b = 10,\ \text{ou} \\ a = 10,\ b = 2,\ \text{ou} \\ a = 4,\ b = 4 \end{cases}$

• Padrão 2.



Neste caso, queremos:

$$(\omega) \begin{cases} (c,d) \neq (1,1), \\ a, b \neq 1, \\ c/a \ + \ d/b \leq 1, \\ a(d-1) + b(c-1) + 1 = \nu(f). \end{cases}$$

Observação. (a,b,c,d) satisfaz (ω) se, e somente se $(b,a,d,c,)$ satisfaz (ω).

$* \ \nu(f) = 5.$

1) $(c,d) = (1,d),\ d \geq 2.$

$$\begin{cases} 1/a \ + \ d/b \ \leq 1 \\ a(d-1) + 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/a \ + \ d/b \ \leq 1 \quad (i) \\ a = 4/(d-1) \qquad (ii) \end{cases}$$

Por (ii), temos que $d = 2, 3, 5$.

Caso $d = 2$, temos por (ii) que $a = 4$, e então por (i) $b \geq \frac{8}{3}$, i.e., $b \geq 3$. Logo, $(a, b) = (4, b),\ b \geq 3$.

Caso $d = 3$, temos por (ii) que $a = 2$, e então por (i) $b \geq 6$. Logo, $(a, b) = (2, b),\ b \geq 6$.

Caso $d = 5$, temos por (ii) que $a = 1$, que não nos interessa.

2) $(c, d) = (2, d),\ d \geq 2$.

$$\begin{cases} 2/a + d/b \leq 1 \\ a(d-1) + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2/a + d/b \leq 1 & (i) \\ b = 4 - a(d-1) & (ii) \end{cases}$$

Por (i), temos que $a > 2,\ b > 2$. Por (ii), temos que $b \leq 1$, pois $d \geq 2,\ a > 2$. Logo, chegamos em uma contradição.

Podemos perceber com este caso que para (c, d) com $c, d \geq 3$ teremos o mesmo tipo de contradição.

$* \ \nu(f) = 6$.

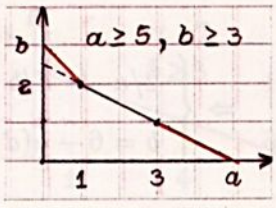
1) $(c, d) = (1, d),\ d \geq 2$.

$$\begin{cases} 1/a + d/b \leq 1 \\ a(d-1) + 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/a + d/b \leq 1 & (i) \\ a = 5/(d-1) & (ii) \end{cases}$$

Por (ii), temos que $d = 2, 6$.

Caso $d = 2$, temos por (ii) que $a = 5$, e então por (i) $b \geq \frac{5}{2}$, i.e., $b \geq 3$. Logo, $(a, b) = (5, b),\ b \geq 3$.

Observemos que $(3,1) \in \Gamma(f)$. Logo, temos a seguinte família:



Caso $d = 6$, temos por (ii) que $a = 1$, que não nos interessa.

2) $(c,d) = (2,d),\ d \geq 2$.

$$\begin{cases} 2/a + d/b \leq 1 \\ a(d-1) + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2/a + d/b \leq 1 & (i) \\ b = 5 - a(d-1) & (ii) \end{cases}$$

Por (i), temos que $a > 2,\ b > 2$. Por (ii), temos que $b \leq 2$, pois $d \geq 2,\ a > 2$. Logo, temos uma contradição.

Facilmente percebe-se que o caso $c, d \geq 3$ conduz igualmente a uma contradição.

$* \ \nu(f) = 7$.

1) $(c,d) = (1,d),\ d \geq 2$.

$$\begin{cases} 1/a + d/b \leq 1 \\ a(d-1) + 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/a + d/b \leq 1 & (i) \\ a = 6/(d-1) & (ii) \end{cases}$$

Por (ii), temos que $d = 2, 3, 4, 7$.

Caso $d = 2$, temos por (ii) que $a = 6$, e então por (i) $b \geq \frac{12}{5}$, i.e., $b \geq 3$. Logo, $(a,b) = (6,b),\ b \geq 3$.

Caso $d = 3$, temos por (ii) que $a = 3$, e então por (i) $b \geq \frac{9}{2}$, i.e., $b \geq 5$. Logo, $(a,b) = (3,b),\ b \geq 5$.

Caso $d = 4$, temos por (ii) que $a = 2$, e então por (i) $b \geq 8$. Logo, $(a,b) = (2,b),\ b \geq 8$.

Caso $d = 7$, temos por (ii) que $a = 1$, que não nos interessa.

2) $(c, d) = (2, d),\ d \geq 2.$

$$\begin{cases} 2/a + d/b \leq 1 \\ a(d-1) + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2/a + d/b \leq 1 & (i) \\ b = 6 - a(d-1) & (ii) \end{cases}$$

Por (i), temos que $a > 2,\ b > 2$. Por (ii), temos que

$$\begin{cases} b \leq 3, \text{ pois } d \geq 2,\ a > 2. \\ a \leq 3, \text{ pois } b > 2. \end{cases}$$

Logo, teremos $a, b = 3$. Agora, como $d \geq 2$ e considerando (ii), teremos

$$\begin{cases} (a, b) = (3, 3), \\ d = 2, \end{cases}$$

que é um absurdo, pois (i) não será satisfeita.

Facilmente percebe-se que o caso $c, d \geq 3$ conduz ainda mais rapidamente a uma contradição.

$* \ \nu(f) = 8.$

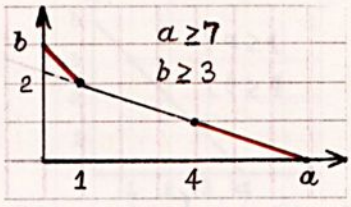
1) $(c, d) = (1, d),\ d \geq 2.$

$$\begin{cases} 1/a + d/b \leq 1 \\ a(d-1) + 1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/a + d/b \leq 1 & (i) \\ a = 7/(d-1) & (ii) \end{cases}$$

Por (ii), temos que $d = 2, 8$.

Caso $d = 2$, temos por (ii) que $a = 7$, e então por (i) $b \geq \frac{7}{3}$, i.e., $b \geq 3$. Logo, $(a, b) = (7, b),\ b \geq 3$.

Observemos que $(4,1) \in \Gamma(f)$. Logo, temos a seguinte família:



Caso $d = 8$, temos por (ii) que $a = 1$, que não nos interessa.

2) $(c,d) = (2,d),\ d \geq 2.$

$$\begin{cases} 2/a + d/b \leq 1 \\ a(d-1) + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2/a + d/b \leq 1 \quad (i) \\ b = 7 - a(d-1) \quad (ii) \end{cases}$$

Por (i), temos que $a > 2,\ b > 2$. Por (ii), temos que

$$\begin{cases} b \leq 4, \text{ pois } d \geq 2,\ a > 2. \\ a \leq 4, \text{ pois } b > 2. \end{cases}$$

Portanto, teremos

$$\begin{cases} a = 3, 4, \\ b = 3, 4. \end{cases}$$

Agora, para que (ii) seja satisfeita, e lembrando que $d \geq 2$, temos que as únicas possibilidades serão:

$$\begin{cases} (a,b) = (3,4) \text{ ou } (4,3), \\ d = 2, \end{cases}$$

que é um absurdo, pois (i) não será satisfeita.

Novamente, percebe-se que o caso $c, d \geq 3$ conduz ainda mais rapidamente a uma

contradição.

$* \ \nu(f) = 9.$

1) $(c, d) = (1, d), \ d \geq 2.$

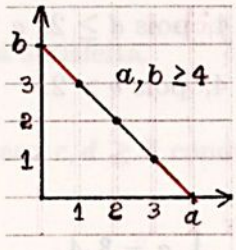
$$\begin{cases} 1/a \ + \ d/b \ \leq 1 \\ a(d-1)+1 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/a \ + \ d/b \ \leq 1 \quad (i) \\ a = 8/(d-1) \qquad (ii) \end{cases}$$

Por (ii), temos que $d = 2, 3, 5, 9$.

Caso $d = 2$, temos por (ii) que $a = 8$, e então por (i) $b \geq \frac{16}{7}$, i.e., $b \geq 3$. Logo, $(a, b) = (8, b), \ b \geq 3$.

Caso $d = 3$, temos por (ii) que $a = 4$, e então por (i) $b \geq 4$. Logo, $(a, b) = (4, b), \ b \geq 4$.

Observemos que $(3, 1) \in \Gamma(f)$. Logo, temos a seguinte família:



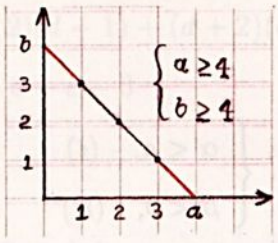
Caso $d = 5$, temos por (ii) que $a = 2$, e então por (i) $b \geq 10$. Logo, $(a, b) = (2, b), \ b \geq 10$.

Caso $d = 9$, temos por (ii) que $a = 1$, que não nos interessa.

2) $(c, d) = (2, 2)$.

$$\begin{cases} 2/a \ + \ 2/b \ \leq 1 \\ a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a+b) \leq ab \\ a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \geq 16 \\ a + b = 8 \end{cases}$$

Logo, teremos $a, b = 4$. Observemos que $(3, 1) \in \Gamma(f)$. Logo, temos a seguinte família:



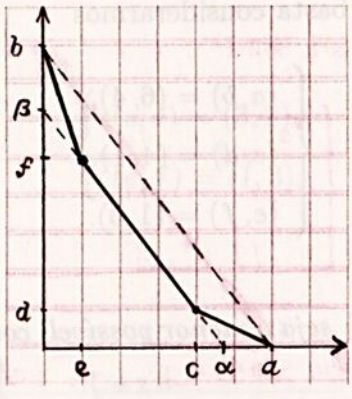
3) $(c,d) = (2,d),\ d \geq 3.$

$$\begin{cases} 2/a \ + \ d/b \ \leq 1 \\ a(d-1)+b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2/a \ + \ d/b \ \leq 1 \quad (i) \\ b = 8 - a(d-1) \quad (ii) \end{cases}$$

Por (i), temos que $a > 2,\ b > 3$. Por (ii), temos que $b \leq 2$, pois $d \geq 3,\ a > 2$. Logo, chegamos em uma contradição.

Da mesma forma, vemos que o caso $c, d \geq 3$ conduz a uma contradição.

• Padrão 3.



Neste caso, queremos:

$$(\omega) \begin{cases} 0 < d < f < b,\ 0 < e < c < a, \\ e/a + f/b < 1, \\ d(a-e) < f(a-c), & (i) \\ e(b-d) < c(b-f), & (ii) \\ a(d-1) + b(e-1) + cf - de + 1 = \nu(f), \end{cases}$$

pois queremos

$$\begin{cases} \alpha < a, & (i) \\ \beta < b, & (ii) \end{cases}$$

Exemplo. Seja $f(x,y) = x^3y + xy^4$, $(\nu(f) = 12)$. Construindo $\Gamma(f)$, vemos que seus vértices satisfazem (ω). Para ver isto, basta considerarmos

$$\begin{cases} (a,b) = (4,6), \\ (c,d) = (3,1), \\ (e,f) = (1,4). \end{cases}$$

Da mesma forma, construindo $\Gamma(g)$, onde $g(x,y) = x^4y + xy^3$, vemos que seus vértices satisfazem (ω). Para vermos isto, basta considerarmos

$$\begin{cases} (a,b) = (6,4), \\ (c,d) = (4,1), \\ (e,f) = (1,3). \end{cases}$$

Proposição 5.1 (*) *Para que $\nu(f)$ seja o menor possível, com relação ao Padrão 3, devemos ter $d = 1 = e$.*

Prova. De acordo com (ω), devemos minimizar a expressão

$$\underbrace{(a(d-1) + b(e-1) - de + 1)}_{L} + cf.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} L &\geq (e+2)(d-1)+(d+2)(e-1)-de+1 \\ &= de+d+e-3 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Se $d=2, e=1$, teremos $L \geq 2$, e daí

$$\nu(f) \geq 2 + cf.$$

• Caso

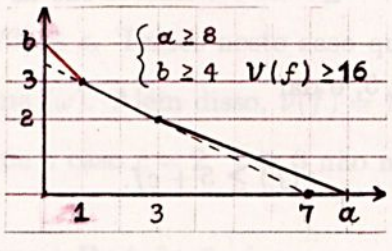
$$\begin{cases} (c,d)=(2,2), \\ (e,f)=(1,f), \quad f \geq 3, \end{cases}$$

não nos interessa. (Padrão 2).

• Caso

$$\begin{cases} (c,d)=(3,2), \\ (e,f)=(1,3), \end{cases}$$

teremos



• Caso

$$\begin{cases} (c,d)=(3,2), \\ (e,f)=(1,f), \quad f \geq 4, \end{cases}$$

teremos $cf \geq 12$, e portanto $\nu(f) \geq 14$. Logo, para $(d, e) = (2, 1)$, $c, f \geq 3$, teremos $\nu(f) > 12$.

Observação. Para $(d, e) = (1, 2)$ as conclusões são as mesmas.

Se $d \geq 3, e = 1$, teremos $L \geq 4$, e daí

$$\nu(f) \geq 4 + cf.$$

• Caso

$$\begin{cases} (c, d) = (2, d), & d \geq 3, \\ (e, f) = (1, f), & f \geq 4, \end{cases}$$

não nos interesa. (Padrão 2).

• Caso

$$\begin{cases} (c, d) = (3, d), & d \geq 3, \\ (e, f) = (1, f), & f \geq 4, \end{cases}$$

teremos $cf \geq 12$, e portanto $\nu(f) \geq 16$. Logo, para $d \geq 3, e = 1, c \geq 3$, teremos $\nu(f) > 12$.

Observação. Para $(d, e) = (1, e)$, $e \geq 3$ as conclusões são as mesmas.

Se $d = 2, e = 2$, teremos $L \geq 5$, e daí

$$\nu(f) \geq 5 + cf.$$

• Caso

$$\begin{cases} (c, d) = (3, 2), \\ (e, f) = (2, 3), \end{cases}$$

teremos $cf = 9$, e daí $\nu(f) \geq 14$. Portanto, para $d, e \geq 2$ sempre teremos $\nu(f) > 12$.

Consideremos finalmente o caso $d = e = 1$, que acarreta $\nu(f) = cf$.

Suponhamos $(e, f) = (1, 2)$, $c \geq 2$. Temos que a equação da reta que passa por $(1, 2)$ e $(c, 1)$ é dada por

$$r: \quad (c-1)y + x = 2c - 1.$$

Portanto, vemos que o ponto $(2c - 1, 0) \in r$, o que não queremos. Isto mostra que deveremos considerar $f \geq 3$.

Caso $f = 3$, a equação da reta que passa por $(1, 3)$ e $(c, 1)$ é dada por

$$s: \quad (c-1)y + 2x = 3c - 1.$$

* Caso $c = 2$, teremos $(0, 5) \in s$, o que não queremos. (Padrão 2)

* Caso $c = 3$, teremos $(4, 0), (0, 4) \in s$, o que não queremos. (Padrão 1)

* Caso $c = 4$, teremos

$$s: \quad 3y + 2x = 11,$$

e portanto $(11/2, 0), (0, 11/3) \in s$. Temos neste caso que $(a, 0), (0, b), (1, 3), (4, 1)$, com $a \geq 6$, $b \geq 4$ satisfazem o sistema (ω). Além disso, $\nu(f) = 12$.

Por fim, observemos que o caso $c = 2$, $f \geq 3$ não nos interessa. (Padrão 2).

Concluímos portanto que o **Padrão 3** só aparece quando $\nu(f) \geq 12$, que é atingido se, e somente se $d = e = 1$. □

Teorema 5.1 (*) *Sejam $f \in M_2^2$ e $(0, b_1) > (a_2, b_2) > \ldots > (a_{n-1}, b_{n-1}) > (a_n, 0)$, $n \geq 4$, segundo a ordem lexicográfica reversa, os vértices de $\Gamma(f)$. Então,*

$$\nu(f) = 1 + b_1(a_2 - 1) + a_n(b_{n-1} - 1) + \sum_{j=2}^{n-2}(a_j k_j + h_j b_{j+1} + h_j k_j),$$

onde

$$\begin{cases} a_{j+1} &= a_j + h_j, \quad h_j \in \mathbb{N} \\ b_j &= b_{j+1} + k_j, \quad k_j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Prova.

$$\begin{aligned} \nu(f) &= \sum_{j=1}^{n-1}(a_{j+1} - a_j)(b_j - b_{j+1}) + 2\sum_{j=1}^{n-2}(a_{j+1} - a_j)b_{j+1} - a_n - b_1 + 1 \\ &= (a_n - a_{n-1})b_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-2}(a_{j+1} - a_j)(b_j + b_{j+1}) - a_n - b_1 + 1 \\ &= (a_n - a_{n-1})b_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-2} a_{j+1}(b_j + b_{j+1}) - \sum_{j=2}^{n-2} a_j(b_j + b_{j+1}) - a_n - b_1 + 1 \\ &= 1 + b_1(a_2 - 1) + a_n(b_{n-1} - 1) + \sum_{j=2}^{n-2}(a_{j+1}b_j - a_j b_{j+1}). \end{aligned}$$

Agora, fazendo

$$\begin{cases} a_{j+1} &= a_j + h_j, \\ b_j &= b_{j+1} + k_j \end{cases}$$

obtemos

$$\nu(f) = 1 + b_1(a_2 - 1) + a_n(b_{n-1} - 1) + \sum_{j=2}^{n-2}(a_j k_j + h_j b_{j+1} + h_j k_j).$$

□

Corolário 5.1 (*) *Nas condições do Teorema 5.1, temos que*

$$\nu(f) \geq (n-2)^2.$$

Prova. Basta notarmos que

$$\begin{cases} a_j \geq j-1, \\ b_j \geq n-j+1, \\ h_j, k_j \geq 1. \end{cases}$$

□

Observação. Se $n \geq 6$, então $\nu(f) \geq 16$.

Para $n = 5$, temos:

$$\nu(f) = b_1(a_2-1) + a_5(b_4-1) + 1 + (a_2k_2 + h_2b_3 + h_2k_2) + (a_3k_3 + h_3b_4 + h_3k_3).$$

- Caso $a_2 > 1$ ou $b_4 > 1$, temos que $\nu(f) \geq 15$.

- Caso $a_2 = b_4 = 1$.

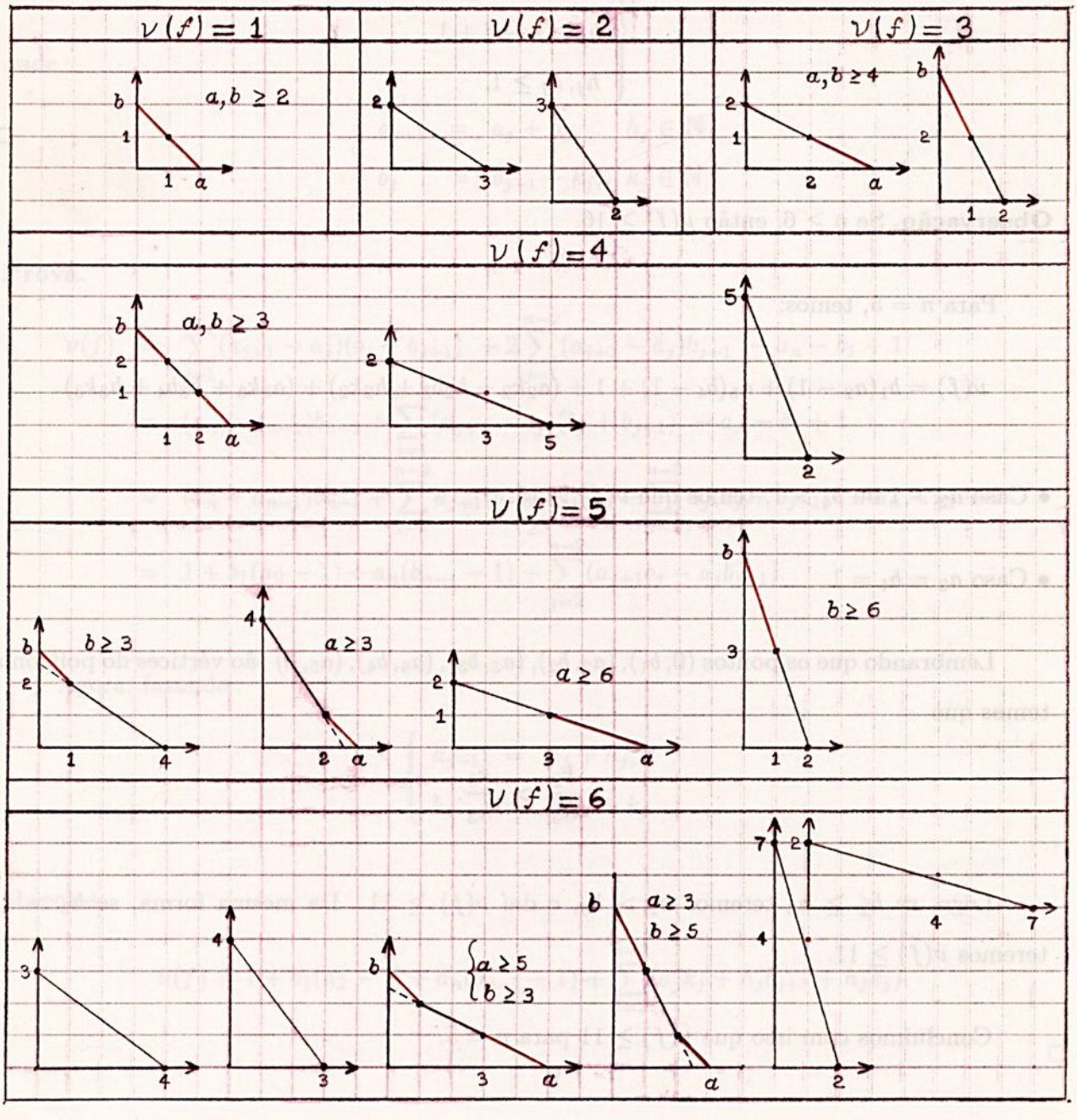
Lembrando que os pontos $(0, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, 0)$ são vértices do polígono, temos que

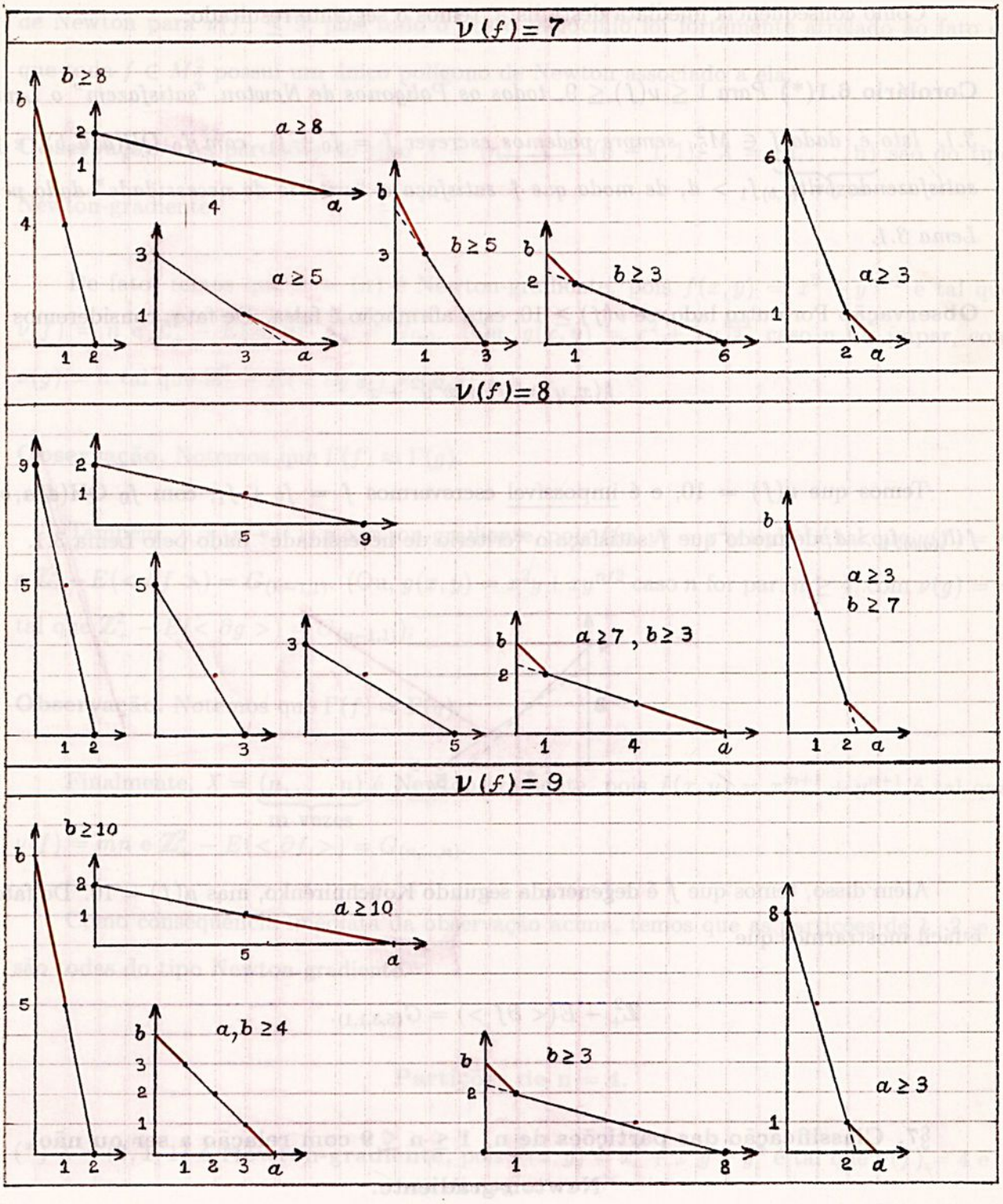
$$\frac{k_2}{h_2} > \frac{k_3}{h_3}.$$

Logo, se $h_2 \geq h_3$ teremos $k_2 > k_3$, e daí $\nu(f) \geq 11$. Da mesma forma, se $h_3 > h_2$ teremos $\nu(f) \geq 11$.

Concluímos com isso que $\nu(f) \geq 11$ para $n = 5$.

§6. Lista de Polígonos de Newton para $1 \leq \nu(f) \leq 9$.




ν(f) = 7
b ≥ 8
a ≥ 8
a ≥ 5
b ≥ 5
b ≥ 3
a ≥ 3
ν(f) = 8
a ≥ 3
b ≥ 7
a ≥ 7, b ≥ 3
ν(f) = 9
b ≥ 10
a ≥ 10
a, b ≥ 4
b ≥ 3
a ≥ 3

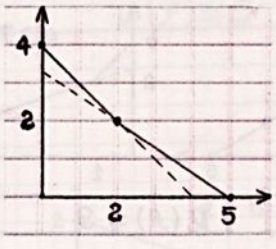
Como conseqüência imediata desta lista, temos o seguinte resultado:

Corolário 6.1(*) *Para* $1 \leq \nu(f) \leq 9$, *todos os Polígonos de Newton "satisfazem" o Lema 3.1. Isto é, dada* $f \in M_2^2$, *sempre podemos escrever* $f = f_0 + f_1$, *com* f_0 $QH(d; a, b)$, *e* f_1 *satisfazendo* $filt_{(a,b)} f_1 > d$, *de modo que* f *satisfaça o "critério de necessidade" dado pelo Lema 3.1.*

Observação Por outro lado, se $\nu(f) \geq 10$, esta afirmação é falsa. De fato, consideremos

$$f(x, y) = y^4 + x^2y^2 + x^5.$$

Temos que $\nu(f) = 10$, e é impossível escrevermos $f = f_0 + f_1$, com f_0 $\mathrm{QH}(d; a, b)$, $filt_{(a,b)} f_1 > d$, de modo que f satisfaça o "critério de necessidade" dado pelo Lema 3.1.



Além disso, temos que f é degenerada segundo Kouchnirenko, mas $\mu(f) = 10$. De fato, é fácil mostrarmos que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(5,3,1,1)}.$$

§7. Classificação das partições de n, $1 \leq n \leq 9$ com relação a ser ou não Newton-gradiente.

Para realizarmos a tal classificação, foi fundamental o estudo do "padrão " dos polígonos

de Newton para $\nu(f) \leq 9$, pois todo o nosso raciocínio foi fortemente atrelado ao fato de que toda $f \in M_2^2$ possui um único polígono de Newton associado a ela.

Observação. As partições do tipo $\lambda = (n)$, $\lambda = (n-1,1)$, $\lambda = \underbrace{(n,\ldots,n)}_{\text{m vezes}}$ são do tipo Newton-gradiente.

De fato, temos que $\lambda = (n)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^2 + y^{n+1}$ é tal que $\nu(f) = n$ e $\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(n)}$. (Ou, $g(x,y) = x^2 + xy^{\frac{n+1}{2}}$ caso n for ímpar, com $\nu(g) = n$ tal que $\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial g >) = G_{(n)}$).

Observação. Notemos que $\Gamma(f) \approx \Gamma(g)$.

Também, $\lambda = (n-1,1)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^2y + y^{n-1}$ é tal que $\nu(f) = n$ e $\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(n-1,1)}$. (Ou, $g(x,y) = x^2y + xy^{n/2}$ caso n for par, $n \geq 4$, com $\nu(g) = n$ tal que $\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial g >) = G_{(n-1,1)}$).

Observação. Notemos que $\Gamma(f) \approx \Gamma(g)$.

Finalmente, $\lambda = \underbrace{(n,\ldots,n)}_{\text{m vezes}}$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^{m+1} + y^{n+1}$ é tal que $\nu(f) = mn$ e $\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(n,\ldots,n)}$.

Como conseqüência imediata da observação acima, temos que as partições de 1, 2, e 3 são todas do tipo Newton-gradiente.

Partições de n = 4.

(*) $\lambda = (2,1,1)$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^5 + x^3y + y^2$ é tal que $\nu(f) = 4$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(2,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 5x^4 + 3x^2y, x^3 + 2y >,$$

e daí$(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Além disso,

$$5x\ \partial_2 f\ + (-1)\partial_1 f = 10xy - 3x^2y = xy(10 - 3x).$$

Logo, $xy \in < \partial f >$, pois $10-3x$ é invertível. Mais ainda, $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.Agora, como f é SQH$(10;2,5)$, temos que $\mu(f) = 4$, e daí necessariamente $(0,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Portanto, provamos nossa afirmação. □

Partições de n = 5.

(*) $\lambda = (3,1,1)$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^4 + xy^2$ é tal que $\nu(f) = 5$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(3,1,1)}.$$

(*) $\lambda = (2,2,1)$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^3y + y^2$ é tal que $\nu(f) = 5$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(2,2,1)}.$$

(*) $\lambda = (2,1,1,1)$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^6 + y^2 + x^4y$ é tal que $\nu(f) = 5$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(2,1,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 6x^5 + 4x^3y, x^4 + 2y >,$$

e daí $(4,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Também,

$$6x\ \partial_2 f\ +\ (-1)\partial_1 f = 12xy - 4x^3y = 4xy(3 - x^2),$$

e então $xy \in < \partial f >$. Mais ainda, $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Agora, como f é SQH$(6;1,3)$, temos que $\mu(f) = 5$ e portanto $(0,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Portanto, provamos nossa afirmação. □

Partições de n = 6.

(*) $\lambda = (4,2)$ **é Newton-gradiente,**pois $f(x,y) = x^3 + y^4 + x^2y^2 + xy^3$ é tal que $\nu(f) = 6$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(4,2)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f > = < 3x^2 + 2xy^2 + y^3, 4y^3 + 2x^2y + 3xy^2 >,$$

e daí $(2,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Também,

$$y\ \partial_1 f + (-3/2)\partial_2 f = 2xy^3 + y^4 - 6y^3 - 9/2xy^2,$$

e portanto, $(1,2) \in E(< \partial f >)$. Notemos também que $(1,1) \notin E(< \partial f >)$, e portanto $(1,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Também, f é SQH$(12;4,3)$, e daí $\mu(f) = 6$. Logo, temos necessariamente que $(0,4) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$, e portanto provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (3,2,1)$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^3y + xy^2$, é tal que $\nu(f) = 6$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(3,2,1)}.$$

(Ou, $g(x,y) = x^4 + y^3 + x^2y^2$, com $\nu(g) = 6$ tal que $\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial g >) = G_{(3,2,1)}$.)

Prova. De fato, consideremos $f(x,y) = x^3y + xy^2$. Temos que

$$< \partial f >=< 3x^2y + y^2, x^3 + 2xy >,$$

e daí $(3,0)$, $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Agora, observemos que f é SQH$(5;1,2)$, e portanto $\mu(f) = 6$. Logo, temos necessariamente que $(1,2), (0,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$, provando assim nossa afirmação.

Consideremos agora $g(x,y) = x^4 + y^3 + x^2y^2$. Temos que

$$< \partial g >=< 4x^3 + 2xy^2, 3y^2 + 2x^2y > .$$

Logo, vemos que $(3,0), (2.1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Também, como g é SQH$(12;3,4)$, temos que $\mu(g) = 6$ e portanto, temos necessariamente $(1,2), (0,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$, provando assim nossa afirmação. □

Observação. Vemos através deste resultado que $E(< \partial f >) = E(< \partial g >)$, $\nu(f) = \nu(g)$, porém

$$\Gamma(f) \not\approx \Gamma(g).$$

Em outras palavras, temos que a aplicação que leva $f \in M_2^2$ em sua escada $E(< \partial f >)$ "não é injetora com relação ao Polígono de Newton". Isto é,

$$E(< \partial f >) = E(< \partial g >),\ \nu(f) = \nu(g) \text{ não implicam } \Gamma(f) \approx \Gamma(g).$$

(*) $\lambda = (3,1,1,1)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^5 + xy^2$ é tal que $\nu(f) = 6$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(3,1,1,1)}.$$

(*) $\lambda = (2,2,1,1)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^7 + x^4y + y^2$ é tal que $\nu(f) = 6$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(2,2,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 7x^6 + 4x^3y, x^4 + 2y >,$$

e então $(4,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Também,

$$\partial_1 f + (-7x^2)\partial_2 f = 4x^3y - 14x^2y = x^2y(4x - 14),$$

e então $x^2y \in < \partial f >$. Observemos agora que $(1,1) \notin E(< \partial f >)$, e daí $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Também, f é SQH$(14;2,7)$, e portanto $\mu(f) = 6$, acarretando $(0,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (2,1,1,1,1)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^7 + x^5y + y^2$ é tal que $\nu(f) = 6$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(2,1,1,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 7x^6 + 5x^4y, x^5 + 2y >,$$

e daí $(5,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Também,

$$7x\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 14xy - 5x^4y = xy(14 - 5x^3),$$

e então $xy \in < \partial f >$. Mais ainda, $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Agora, como f é SQH$(14;2,7)$, temos que $\mu(f) = 6$ e portanto $(0,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (4,1,1)$ não é Newton-gradiente.

Prova. De fato, mostremos que não existe $f \in M_2^2$ com $\nu(f) = 6$ de modo que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(4,1,1)}.$$

Portanto, suponhamos que $\lambda = (4,1,1)$ seja Newton-gradiente. Logo, existe $f \in M_2^2$ satisfazendo as condições acima.

Temos portanto que $(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$, pois

$$G_{(4,1,1)} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(2,0)\}.$$

Logo, será preciso que o monômio ax^3y ou o monômio bx^4 "faça parte" da expressão de f, ou seja,

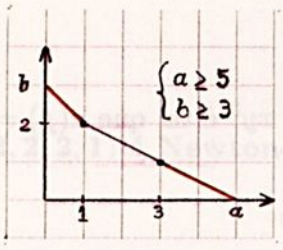
$$\begin{cases} \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) \neq 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) \neq 0 \end{cases}$$

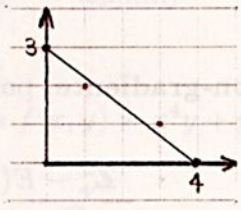
Além disso, como queremos que $(2,0) \notin E(< \partial f >)$, será preciso que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Portanto, temos que os únicos Polígonos de Newton $\Gamma(f)$ que satisfazem estas condições

são:





No caso (1), podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_3y^3 + a_2xy^2 + a_1x^3y + a_0x^5,$$

com $a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,1)\}$.

Temos que

$$< \partial f > = < a_2y^2 + 3a_1x^2y + 5a_0x^4, 3a_3y^2 + 2a_2xy + a_1x^3 > .$$

Agora, como $a_2 \neq 0$, temos que

$$2a_2xy \text{ em } \partial_2 f \rightsquigarrow a_1x^3 \text{ em } \partial_2 f,$$

que não pode ser obtido de $\partial_1 f$.

Logo, $(1,1) \notin E(< \partial f >)$.

Caso (2). Queremos $(1,1) \in E(< \partial f >)$, mas para isso é preciso que

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0 \quad (i) \\ \text{ou} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \neq 0 \quad (ii) \end{cases}$$

Acontece que no caso (i) teremos $(2,0) \in E(< \partial f >)$, o que não queremos. Além disso, não podemos ter o caso (ii), pois $(0,2), (1,2) \notin \Gamma_+(f)$.

Logo, temos que é impossível $(1,1) \in E(< \partial f >)$. □

Partições de n = 7.

(*) $\lambda = (5,2)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^3 + xy^3$ é tal que $\nu(f) = 7$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(5,2)}.$$

(*) $\lambda = (3,3,1)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^3y + y^3$ é tal que $\nu(f) = 7$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(3,3,1)}.$$

(*) $\lambda = (3,2,1,1)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^6 + xy^2 + x^4y$ é tal que $\nu(f) = 7$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(3,2,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 6x^5 + y^2 + 4x^3y, x^4 + 2xy >,$$

e daí $(4,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Também,

$$6x\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 12x^2y - y^2 - 4x^3y,$$

e daí $(2,1) \in E(< \partial f >)$. Além disso, $(1,1) \notin E(< \partial f >)$, e portanto $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Agora, como f é SQH$(12;2,5)$, temos que $\mu(f) = 7$, e portanto necessariamente $(1,2),(0,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (3,1,1,1,1)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^6 + xy^2$ é tal que $\nu(f) = 7$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(3,1,1,1,1)}.$$

(*) $\lambda = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^4y + y^2$ é tal que $\nu(f) = 7$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(2,2,2,1)}.$$

(*) $\lambda = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^8 + x^5y + y^2$ é tal que $\nu(f) = 7$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(2,2,1,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f > = < 8x^7 + 5x^4y, x^5 + 2y >,$$

e daí $(5,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Além disso,

$$8x^2\, \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 16x^2y - 5x^4y,$$

implicando $x^2y \in < \partial f >$. Notemos também que $(1,1) \notin E(< \partial f >)$, e portanto $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Agora, como f é SQH$(8;1,4)$, temos que $\mu(f) = 7$, e portanto necessariamente $(0,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^8 + x^6y + y^2$ é tal que $\nu(f) = 7$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(2,1,1,1,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 8x^7 + 6x^5y, x^6 + 2y >,$$

e daí $(6,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Além disso,

$$8x\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 16xy - 6x^5y,$$

implicando $xy \in < \partial f >$. Mais ainda, temos que $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Agora, como f é SQH$(8;1,4)$, temos que $\mu(f) = 7$, e portanto necessariamente $(0,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (5,1,1)$ não é Newton-gradiente.

Prova. De fato, suponhamos que $\lambda = (5,1,1)$ seja Newton-gradiente. Logo, existe $f \in M_2^2$ com $\nu(f) = 7$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(5,1,1)} = \{(0,0), \ldots, (0,4), (1,0), (2,0)\}.$$

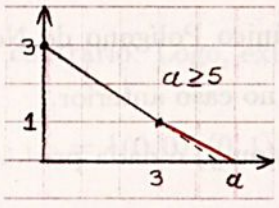
Portanto, teremos $(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, será preciso que

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) \neq 0$$

e que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Temos que o único Polígono de Newton com $\nu(f) = 7$ satisfazendo estas condições é:



Mas, queremos $(1,1) \in E(< \partial f >)$, e para isso é preciso que

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq 0 \quad (i) \\ \text{ou} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \neq 0 \quad (ii) \end{cases}$$

Acontece que no caso (i) teremos $(2,0) \in E(< \partial f >)$, o que não queremos. Além disso, não podemos ter o caso (ii), pois $(0,2), (1,2) \notin \Gamma_+(f)$.

Logo, temos que é impossível $(1,1) \in E(< \partial f >)$. □

(*) $\lambda = (4,2,1), (3,2,2)$ não são Newton-gradientes.

Prova. De fato, suponhamos o contrário. Logo, existem $f, g \in M_2^2$ com $\nu(f) = 7 = \nu(g)$ tais que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(4,2,1)} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (2,0)\},$$

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial g >) = G_{(3,2,2)} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1)\}.$$

Temos portanto que

$$\begin{cases} (3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)), \\ (3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >)). \end{cases}$$

Logo, temos novamente que o único Polígono de Newton com $\nu(f) = 7$ satisfazendo estas condições é o polígono descrito no caso anterior.

Portanto, podemos supor que f (ou g) é dada por

$$f(x,y) = a_3y^3 + a_2x^2y^2 + a_1x^3y + a_0x^5 + bx^4y + cxy^3,$$

onde $a_1, a_3 \neq 0$, pois f (ou g) é E-suficiente com relação à $\{(1,2)\}$. Observemos que em ambos os casos $(1,2)$ pertence à fronteira da escada.

Temos que

$$< \partial f >=< 2a_2xy^2 + 3a_1x^2y + 5a_0x^4 + 4bx^3y + cy^3, 3a_3y^2 + 2a_2x^2y + a_1x^3 + bx^4 + 3cxy^2 > .$$

1) Supondo $a_2 \neq 0$,temos que

$(\alpha)\partial_1 f \rightsquigarrow 3a_1x^2y$ em $\partial_1 f \rightsquigarrow 2a_2x^2y$ em $\partial_2 f \rightsquigarrow a_1x^3$ em $\partial_2 f$, que não pode ser obtido de $\partial_1 f$.

2) Como $a_3 \neq 0$, temos que

$(\alpha x)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha x^4$ em $\partial_2 f \longrightarrow$

$$\begin{cases} \longrightarrow (\beta)\partial_2 f \rightsquigarrow \beta a_1x^3 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f, \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ \longrightarrow (\beta)\partial_1 f \rightsquigarrow \text{ caso 1).} \end{cases}$$

Logo, temos que é impossível $(1,2) \in E(< \partial f >)$, ou $(1,2) \in E(< \partial g >)$.

Portanto, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (4,1,1,1)$ não é Newton-gradiente.

Prova. De fato, suponhamos o contrário. Logo, existe $f \in M_2^2$ com $\nu(f) = 7$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(4,1,1,1)} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(2,0),(3,0)\},$$

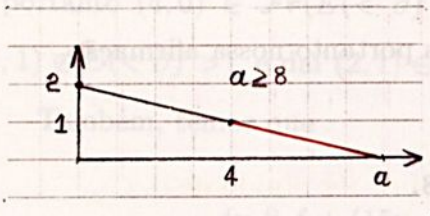
e portanto $(4,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Desta forma, será preciso que

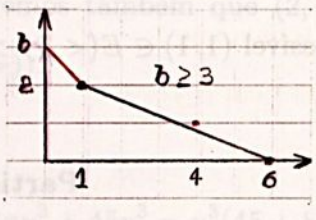
$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^5 f}{\partial x^4 \partial y}(0,0) \neq 0$$

e que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Temos portanto que os únicos Polígonos de Newton com $\nu(f) = 7$ satisfazendo estas condições são:





No caso (1), podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_2y^2 + a_1x^4y + a_0x^8 + bx^5y,$$

com $a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,1)\}$. Lembremos que estamos supondo $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Temos que

$$< \partial f >=< 4a_1x^3y + 8a_0x^7 + 5bx^4y, a_1x^4 + 2a_2y + bx^5 > .$$

Como $a_2 \neq 0$, temos que

$(\alpha x)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1 x^5$ em $\partial_2 f \longrightarrow (\beta)\partial_2 f \rightsquigarrow \beta a_1 x^4$ em $\partial_2 f$, que não pode ser obtido de $\partial_1 f$.

Logo, é impossível $(1,1) \in E(< \partial f >)$.

No caso (2), podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_3y^3 + a_2xy^2 + a_1x^4y + a_0x^6,$$

com $a_0, a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,1)\}$.

Temos que

$$< \partial f >=< a_2y^2 + 4a_1x^3y + 6a_0x^5, 3a_3y^2 + 2a_2xy + a_1x^4 > .$$

Como $a_2 \neq 0$, temos que

$$(\alpha)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1 x^4 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Logo, é impossível $(1,1) \in E(< \partial f >)$, e provamos portanto nossa afirmação. □

Partições de n = 8.

(*) $\lambda = (5,3)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^5$ é tal que $\nu(f) = 8$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(5,3)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 3x^2 + 2xy^2, 2x^2y + 5y^4 >,$$

e portanto $(2,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Observemos também que $(1,2) \notin E(< \partial f >)$, e

$$(2/3)y\ \partial_1 f + (-1)\partial_2 f = (4/3)\ xy^3 - 5y^4,$$

implicando $(1,3) \in E(< \partial f >)$. Logo, $(1,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Agora, como f é SQH(15:5,3), temos que $\mu(f) = 8$, e portanto, necessariamente $(0,5) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (3,3,1,1)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^5 + x^2y^2 + y^3$ é tal que $\nu(f) = 8$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(3,3,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 5x^4 + 2xy^2, 2x^2y + 3y^2 >,$$

e portanto $(4,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Observemos também que $(2,1) \in E(< \partial f >)$, e $(1,1) \notin E(< \partial f >)$, e daí $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Também, temos que

$$4y\ \partial_1 f + (15y - 10x^2)\partial_2 f = 8xy^3 + 45y^3 = y^3(45 + 8x),$$

e portanto $y^3 \in E(< \partial f >)$, provando nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (3,2,2,1)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^4y + xy^2$ é tal que $\nu(f) = 8$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(3,2,2,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 4x^3y + y^2, x^4 + 2xy >,$$

e portanto $(4,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)), (3,1) \in E(< \partial f >)$. Além disso, $(2,1) \notin E(< \partial f >)$, e daí $(3,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Agora, como f é SQH(7; 1. 3), temos que $\mu(f) = 8$, e portanto teremos necessariamente $(1,2), (0,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (\mathbf{3,2,1,1,1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^7 + xy^2 + x^5y$ é tal que $\nu(f) = 8$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(3,2,1,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 7x^6 + y^2 + 5x^4y, 2xy + x^5 >,$$

e portanto $(5,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Observemos também que $(1,1) \notin E(< \partial f >)$, e

$$7x\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 14x^2y - y^2 - 5x^4y,$$

e portanto $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Agora, como f é SQH(7; 1, 3), temos que $\mu(f) = 8$, e portanto teremos necessariamente $(1,2), (0,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (\mathbf{3,1,1,1,1,1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^7 + xy^2$ é tal que $\nu(f) = 8$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(3,1,1,1,1,1)}.$$

(*) $\lambda = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x, y) = x^9 + y^2 + x^5y$ é tal que $\nu(f) = 8$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(2,2,2,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 9x^8 + 5x^4y, 2y + x^5 >,$$

e portanto $(5, 0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Observemos também que $(2, 1) \notin E(< \partial f >)$, e

$$9x^3\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 18x^3y - 5x^4y,$$

e portanto $x^3y \in < \partial f >$, implicando $(3, 1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Agora, como f é SQH(18: 2, 9), temos que $\mu(f) = 8$, e portanto necessariamente $(0, 2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x, y) = x^9 + y^2 + x^6y$ é tal que $\nu(f) = 8$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(2,2,1,1,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 9x^8 + 6x^5y, 2y + x^6 >,$$

e portanto $(6, 0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Observemos também que $(1, 1) \notin E(< \partial f >)$, e

$$9x^2\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 18x^2y - 6x^5y,$$

e portanto $x^2y \in < \partial f >$, implicando $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Agora, como f é SQH(18:2.9), temos que $\mu(f) = 8$, e portanto necessariamente $(0,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (\mathbf{2,1,1,1,1,1,1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^9 + y^2 + x^7y$ é tal que $\nu(f) = 8$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(2,1,1,1,1,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f > = < 9x^8 + 7x^6y, 2y + x^7 >,$$

e portanto $(7,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Além disso,

$$9x\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 18xy - 7x^6y,$$

e portanto $xy \in < \partial f >$. Mais ainda, $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Agora, como f é SQH(18;2,9), temos que $\mu(f) = 8$, e portanto necessariamente $(0,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (\mathbf{6,1,1}), (\mathbf{5,2.1}), (\mathbf{4,3.1}), (\mathbf{4,2,2}), (\mathbf{3,3,2})$ **não são Newton-gradientes.**

Prova. Temos que

$$
\begin{aligned}
G_\lambda \;=\; & \{(0,0),\ldots,(0,5),(1,0),(2,0)\},\\
& \{(0,0),\ldots,(0,4),(1,0),(1,1),(2,0)\},\\
& \{(0,0),\ldots,(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0)\},\\
& \{(0,0),\ldots,(0,3),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\} \text{ e}\\
& \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1)\},
\end{aligned}
$$

respectivamente. Portanto, supondo que em todos os casos λ seja Newton-gradiente, teremos que existe $f_\lambda \in M_2^2$ com $\nu(f_\lambda) = 8$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f_\lambda >) = G_\lambda$$

para cada λ. Para simplificar, escrevamos simplesmente f.

Daí, teremos que $(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$ para cada λ. Logo, será preciso que

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) \neq 0$$

e que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \;,\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0 \;,\; \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Porém, temos que não existe Polígono de Newton $\Gamma(f)$ com $\nu(f) = 8$ satisfazendo estas condições. Portanto, concluímos que em todos os casos λ não é Newton-gradiente. □

(*) $\lambda = (6,2)$ não é Newton-gradiente.

Prova. De fato, suponhamos o contrário. Logo, existe $f \in M_2^2$ com $\nu(f) = 8$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(6,2)} = \{(0,0),\ldots,(0,5),(1,0),(1,1)\}$$

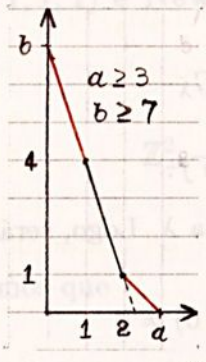
Portanto, teremos $(2,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$, e para isso será preciso que

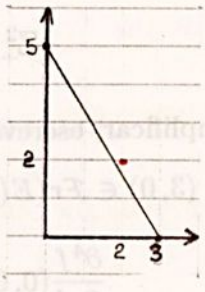
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) \neq 0$$

e que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (0,0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & (0,0) = 0 \end{cases}$$

Temos que os únicos Polígonos de Newton satisfazendo estas condições são:





No caso (1), mostremos que $(1,1) \in E(< \partial f >)$. Podemos supor f dada por

$$f(x,y) = a_1 x^2 y + a_4 x y^4 + \sum_{i=3}^{r} A_i x^i + \sum_{j=3}^{s} B_j x^j y,$$

com $a_1, a_4 \neq 0$, pois outros monômios "não colaboram" para uma possível não-obtenção do monômio xy.

Temos que

$$< \partial f > = < 2a_1 xy + a_4 y^4 + \sum_{i=3}^{r} i A_i x^{i-1} + \sum_{j=3}^{s} j B_j x^{j-1} y, a_1 x^2 + 4 a_4 x y^3 + \sum_{j=3}^{s} B_j x^j >,$$

e fazendo

$$(1 + \sum_{j=3}^{s} \frac{B_j}{a_1} x^{j-2}) \partial_1 f + (- \sum_{i=3}^{r} \frac{i A_i}{a_1} x^{i-3}) \partial_2 f,$$

teremos $(1,1) \in E(< \partial f >)$. Logo, concluímos que é impossível a igualdade

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(6,2)},$$

pois estamos supondo $(1,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

No caso (2), podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_5y^5 + a_2x^2y^2 + a_0x^3,$$

com $a_0, a_5 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,2)\}$. Lembremos que estamos supondo $(1,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Temos que

$$< \partial f >=< 2a_2xy^2 + 3a_0x^2, 5a_5y^4 + 2a_2x^2y > .$$

Supondo $a_2 \neq 0$, temos que

$$(\alpha)\partial_1 f \rightsquigarrow 3a_0\alpha x^2 \text{ em } \partial_1 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_2 f.$$

Logo, temos que é impossível $(1,2) \in E(< \partial f >)$, e provamos portanto nossa afirmação.

□

(*) $\lambda = (5,1,1,1), (4,2,1,1)$ não são Newton-gradientes.

Prova. Temos que

$$\begin{aligned} G_\lambda &= \{(0,0), \ldots, (0,4), (1,0), (2,0), (3,0)\}, \\ &\quad \{(0,0), \ldots, (0,3), (1,0), (1,1), (2,0), (3,0)\} \end{aligned}$$

respectivamente. Portanto, supondo nos dois casos que λ seja Newton-gradiente, teremos que existe $f_\lambda \in M_2^2$ com $\nu(f_\lambda) = 8$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f_\lambda >) = G_\lambda$$

para cada λ.

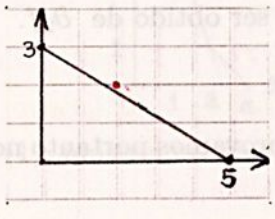
Daí, teremos que $(4,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$ para cada λ. Logo, será preciso que

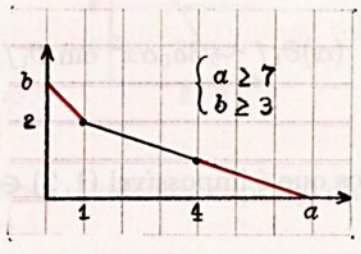
$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^5 f}{\partial x^4 \partial y}(0,0) \neq 0$$

e que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Temos então que os únicos Polígonos de Newton $\nu(f) = 8$ que satisfazem estas condições são:





No caso (1), podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_3 y^3 + a_0 x^5 + a_2 x^2 y^2 + a_1 x^4 y + b x^3 y^2,$$

com $a_0, a_3 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,2),(2,1)\}$. Lembremos que para $\lambda = (4,2,1,1)$ estamos supondo $(1,2),(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Primeiramente, observemos que em relação a $\lambda = (5,1,1,1)$, estamos supondo $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Mas para isso, é preciso que

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq 0 \quad (i) \\ \text{ou} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \neq 0 \quad (ii) \end{cases}$$

Acontece que no caso (i) teremos $(2,0) \in E(< \partial f >)$, o que não queremos. Além disso, não podemos ter o caso (ii), pois $(0,2),(1,2) \notin \Gamma_+(f)$.

Logo, temos que é impossível $(1,1) \in E(< \partial f >)$, e portanto a escada relacionada a $\lambda = (5,1,1,1)$ não pode ser obtida através deste polígono.

Continuando nosso raciocínio, temos que

$$< \partial f >=< 5a_0x^4 + 2a_2xy^2 + 4a_1x^3y + 3bx^2y^2, 3a_3y^2 + 2a_2x^2y + a_1x^4 + 2bx^3y > .$$

Agora, suponhamos por um momento que $a_2 \neq 0$. Logo, como $a_3 \neq 0$, temos que

$$(\alpha x)\partial_2 f \rightsquigarrow 2\alpha a_2 x^3 y \text{ em } \partial_2 f \longrightarrow (\beta)\partial_1 f \rightsquigarrow 5\beta a_0 x^4 \text{ em } \partial_1 f \longrightarrow (\gamma)\partial_2 f \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow 2\gamma a_2 x^2 y \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Logo, concluímos que se $(1,2) \in E(< \partial f >)$, então $a_2 = 0$, acarretando $(2,1) \notin E(< \partial f >)$.

Portanto, a escada relacionada a $\lambda = (4,2,1,1)$ não pode ser obtida através deste polígono.

No caso (2), podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_3y^3 + a_2xy^2 + a_1x^4y + a_0x^7 + bx^2y^2 + cx^5y,$$

com $a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,1)\}$ e à $\{(2,1)\}$. Temos que

$$< \partial f >=< a_2y^2 + 4a_1x^3y + 7a_0x^6 + 2bxy^2 + 5cx^4y, 3a_3y^2 + 2a_2xy + a_1x^4 + 2bx^2y + cx^5 > .$$

Como $a_2 \neq 0$, temos que

$$(\alpha x)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1 x^5 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Logo, $(2,1) \notin E(< \partial f >)$, e portanto as escadas relacionadas a $\lambda = (5,1,1,1)$ e a $\lambda = (4,2,1,1)$ não podem ser obtidas através deste polígono.

Concluímos assim que $\lambda = (5,1,1,1)$ e $\lambda = (4,2,1,1)$ não são Newton-gradientes. □

(*) $\lambda = (4,1,1,1,1)$ não é Newton-gradiente.

Prova. De fato, suponhamos o contrário. Logo, existe $f \in M_2^2$ com $\nu(f) = 8$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(4,1,1,1,1)} = \{(0,0), \ldots, (0,3), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\}.$$

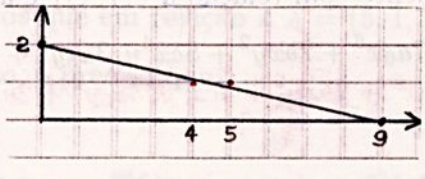
Logo,teremos $(5,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Daí, será preciso que

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^6 f}{\partial x^5 \partial y}(0,0) \neq 0$$

e que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^5 f}{\partial x^5}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^5 f}{\partial x^4 \partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Temos então que o único Polígono de Newton com $\nu(f) = 8$ satisfazendo estas condições é:



Neste caso, podemos supor que a expressão de f pode ser dada por

$$f(x,y) = a_2y^2 + a_0x^9 + a_1x^5y + bx^6y,$$

com $a_0, a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,1)\}$. Lembremos que estamos supondo $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)$.

Temos que

$$< \partial f > = < 9a_0x^8 + 5a_1x^4y + 6bx^5y, 2a_2y + a_1x^5 + bx^6 > .$$

Como $a_2 \neq 0$, temos que

$$(\alpha x)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1 x^6 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Logo, $(1,1) \notin E(< \partial f >)$, e provamos portanto nossa afirmação. □

Partições de n = 9.

(*) $\lambda = (5,3,1)$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^3y + xy^3$ é tal que $\nu(f) = 9$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(5,3,1)}.$$

(Ou, $g(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$, onde $\nu(g) = 9$ e $\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial g >) = G_{(5,3,1)}$.)

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f > = < 3x^2y + y^3, x^3 + 3xy^2 >,$$

e portanto $(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Também, temos que $(2,1) \in E(< \partial f >)$, e como $(1,1) \notin E(< \partial f >)$, obtemos $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Observemos também que $(1,2) \notin E(< \partial f >)$. Porém, temos

$$3y\ \partial_2 f + (-x)\partial_1 f = 8xy^3,$$

e portanto $xy^3 \in < \partial f >$. Mais ainda, $(1,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Agora, como f é SQH(4; 1, 1), temos que $\mu(f) = 9$, e então teremos necessariamente $(0,5) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Portanto, $\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(5,3,1)}$.

Consideremos agora $g(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$. Temos que

$$< \partial g > = < 4x^3 + 2xy^2, 2x^2y + 4y^3 >,$$

e portanto $(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$. Também, $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$, pois $(1,1) \notin E(< \partial g >)$ e $(2,1) \in E(< \partial g >)$.

Observemos também que $(1,2) \notin E(< \partial g >)$. Porém, temos

$$y\ \partial_1 g + (-2x)\partial_2 g = -6xy^3,$$

e portanto $xy^3 \in < \partial g >$. Mais ainda, $(1,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$. Novamente, como g é SQH(4; 1, 1), temos que $\mu(g) = 9$, e então teremos necessariamente $(0,5) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$. Portanto, $\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial g >) = G_{(5,3,1)}$. □

Observação. É interessante notarmos que $\Gamma(f) \approx \Gamma(g)$.

(*) $\lambda = (5,2,2)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^4 + xy^3$ é tal que $\nu(f) = 9$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(5,2,2)}.$$

(*) $\lambda = (4,4,1)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^3y + y^4$ é tal que $\nu(f) = 9$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(4,4,1)}.$$

(*) $\lambda = (4,3,2)$ é Newton-gradiente, pois $f(x,y) = x^4 + y^4 + x^2y^3$ é tal que $\nu(f) = 9$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(4,3,2)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 4x^3 + 2xy^3, 4y^3 + 3x^2y^2 >,$$

e portanto $(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Além disso, $(2,1), (1,2) \notin E(< \partial f >)$, e como $(2,2) \in E(< \partial f >)$, temos então que $(2,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Agora, como f é SQH$(4;1,1)$, temos que $\mu(f) = 9$, e então teremos necessariamente $(1,3), (0,4) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (\mathbf{3,2,2,1,1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^8 + xy^2 + x^5y$ é tal que $\nu(f) = 9$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(3,2,2,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 8x^7 + y^2 + 5x^4y, 2xy + x^5 >,$$

e portanto $(5,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Além disso, $(2,1) \notin E(< \partial f >)$. Porém,

$$8x^2\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 16x^3y - y^2 - 5x^4y,$$

e portanto $(3,1) \in E(< \partial f >)$. Logo, $(3,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Agora, como f é SQH$(16;2,7)$, temos que $\mu(f) = 9$, e então teremos necessariamente $(0,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (\mathbf{3,2,1,1,1,1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^8 + xy^2 + x^6y$ é tal que $\nu(f) = 9$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(3,2,1,1,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 8x^7 + y^2 + 6x^5y, 2xy + x^6 >,$$

e portanto $(6,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Além disso, $(1,1) \notin E(< \partial f >)$. Porém,

$$8x\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 16x^2y - y^2 - 6x^5y,$$

e portanto $(2,1) \in E(< \partial f >)$. Logo, $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Agora, como f é SQH(16: 2, 7), temos que $\mu(f) = 9$, e então teremos necessariamente $(0,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (\mathbf{3,1,1,1,1,1,1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^8 + xy^2$ é tal que $\nu(f) = 9$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(3,1,1,1,1,1,1)}.$$

(*) $\lambda = (\mathbf{2,2,2,2,1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^5y + y^2$ é tal que $\nu(f) = 9$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(2,2,2,2,1)}.$$

(*) $\lambda = (\mathbf{2,2,2,1,1,1})$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^{10} + y^2 + x^6y$ é tal que $\nu(f) = 9$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(2,2,2,1,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 10x^9 + 6x^5y, 2y + x^6 >,$$

e portanto $(6,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Além disso, $(2,1) \notin E(< \partial f >)$. Porém,

$$10x^3\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 20x^3y - 6x^5y,$$

e portanto $x^3y \in < \partial f >$. Logo, $(3,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Agora, como f é SQH(10; 1, 5), temos que $\mu(f) = 9$, e então teremos necessariamente $(0,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (2,2,1,1,1,1,1)$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^{10} + y^2 + x^7y$ é tal que $\nu(f) = 9$ e

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(2,2,1,1,1,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 10x^9 + 7x^6y, 2y + x^7 >,$$

e portanto $(7,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Além disso, $(1,1) \notin E(< \partial f >)$. Porém,

$$10x^2\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 20x^2y - 7x^6y,$$

e portanto $x^2y \in < \partial f >$. Logo, $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Novamente, como f é SQH(10; 1, 5), temos que $\mu(f) = 9$, e então teremos necessariamente $(0,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (2,1,1,1,1,1,1,1)$ **é Newton-gradiente,** pois $f(x,y) = x^{10} + y^2 + x^8y$ é tal que $\nu(f) = 9$ e

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(2,1,1,1,1,1,1,1)}.$$

Prova. De fato, temos que

$$< \partial f >=< 10x^9 + 8x^7y, 2y + x^8 >,$$

e portanto $(8,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Além disso,

$$10x\ \partial_2 f + (-1)\partial_1 f = 20xy - 8x^7y,$$

e portanto $xy \in < \partial f >$. Mais ainda, $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Novamente, como f é SQH$(10; 1, 5)$, temos que $\mu(f) = 9$, e então teremos necessariamente $(0,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (6,1,1,1), (5,2,1,1), (4,3,1,1), (4,2,2,1), (3,3,2,1), (3,2,2,2)$ não são Newton-gradientes.

Prova. Temos que

$$\begin{aligned} G_\lambda \ = \ & \{(0,0), \ldots, (0,5), (1,0), (2,0), (3,0)\}, \\ & \{(0,0), \ldots, (0,4), (1,0), (1,1), (2,0), (3,0)\}, \\ & \{(0,0), \ldots, (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (3,0)\}, \\ & \{(0,0), \ldots, (0,3), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0)\}, \\ & \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (3,0)\} \text{ e} \\ & \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1)\}, \end{aligned}$$

respectivamente. Portanto, supondo em todos os casos que λ seja Newton-gradiente, teremos que existe $f_\lambda \in M_2^2$ com $\nu(f_\lambda) = 9$ tal que

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f_\lambda >) = G_\lambda$$

803/98

Inst. de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Unesp
BIBLIOTECA

unesp

para cada λ.

Daí, teremos que $(4,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$ para cada λ. Logo, será preciso que

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^5 f}{\partial x^4 \partial y}(0,0) \neq 0$$

e que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Porém, não existe Polígono de Newton com $\nu(f) = 9$ satisfazendo estas condições, e portanto provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (7,2), (6,3)$ não são Newton-gradientes.

Prova. De fato, ficou provado que as escadas relacionadas a estas partições não são obtidas de nenhum dos 3 polígonos descritos na seção §4. □

(*) $\lambda = (7,1,1)$ não é Newton-gradiente.

Prova. De fato, suponhamos que $\lambda = (7,1,1)$ seja Newton-gradiente. Logo, existe $f \in M_2^2$ com $\nu(f) = 9$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(7,1,1)} = \{(0,0), \ldots, (0,6), (1,0), (2,0)\}.$$

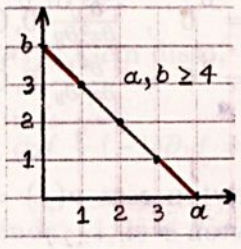
Portanto, teremos $(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Logo, será preciso que

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) \neq 0$$

e que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Temos que o único Polígono de Newton com $\nu(f) = 9$ satisfazendo estas condições é:



Mas, queremos $(1,1) \in E(< \partial f >)$, e para isso é preciso que

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) \neq 0 \ \text{ ou } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0 \ \text{ ou } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq 0 \quad (i) \\ \text{ou} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \neq 0 \ \text{ ou } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \neq 0 \quad (ii) \end{cases}$$

Acontece que no caso (i) teremos $(2,0) \in E(< \partial f >)$, o que não queremos. Além disso, não podemos ter o caso (ii), pois $(0,2), (1,2) \notin \Gamma_+(f)$.

Logo, temos que é impossível $(1,1) \in E(< \partial f >)$, e provamos portanto nossa afirmação.

□

(*) $\lambda = (6,2,1)$ não é Newton-gradiente.

Prova. De fato, suponhamos o contrário. Logo, existe $f \in M_2^2$ com $\nu(f) = 9$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(6,2,1)} = \{(0,0), \ldots, (0,5), (1,0), (1,1), (2,0)\},$$

e portanto $(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Daí, como anteriormente, teremos que o único Polígono de Newton com $\nu(f) = 9$ satisfazendo esta condição será o polígono descrito no último caso.

Desta forma, podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_4y^4 + a_3xy^3 + a_2x^2y^2 + a_1x^3y + a_0x^4,$$

com $a_0 \neq 0$ ou $a_1 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(2,1),(1,2)\}$. Lembremos que estamos supondo $(2,1),(1,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Temos então que

$$< \partial f > = < a_3y^3 + 2a_2xy^2 + 3a_1x^2y + 4a_0x^3, 4a_4y^3 + 3a_3xy^2 + 2a_2x^2y + a_1x^3 > .$$

Caso $a_0 = 0$, temos que

$$\begin{cases} \partial_1 f &= a_3y^3 + 2a_2xy^2 + 3a_1x^2y \\ \partial_2 f &= 4a_4y^3 + 3a_3xy^2 + 2a_2x^2y + a_1x^3 \end{cases}$$

Supondo $a_3 \neq 0$, temos que

$$(\alpha)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1x^3 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Supondo $a_2 \neq 0$, temos que

$$(\alpha)\partial_1 f \rightsquigarrow 3a_1\alpha x^2y \text{ em } \partial_1 f \longrightarrow (\beta)\partial_2 f \rightsquigarrow \beta a_1x^3 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Logo, temos neste caso que $(1,2) \notin E(< \partial f >)$.

Caso $a_1 = 0$, temos que

$$\begin{cases} \partial_1 f &= a_3y^3 + 2a_2xy^2 + 4a_0x^3 \\ \partial_2 f &= 4a_4y^3 + 3a_3xy^2 + 2a_2x^2y \end{cases}$$

Agora, se $a_2 = 0$, teremos $(2,1) \notin E(< \partial f >)$. Logo, suponhamos $a_2 \neq 0$.

Desta forma, teremos $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Também,

$$(\alpha\partial_1 f) \rightsquigarrow 4a_0\alpha x^3 \text{ em } \partial_1 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_2 f.$$

Da mesma forma, se $a_3 \neq 0$, teremos

$$(\beta)\partial_2 f \rightsquigarrow 2a_2\beta x^2 y \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Portanto, neste caso($a_1 = 0$), temos que $(1,2) \notin E(< \partial f >)$.

Caso $a_0, a_1 \neq 0$.

Temos que

$$\begin{cases} \partial_1 f &= a_3y^3 + 2a_2xy^2 + 3a_1x^2y + 4a_0x^3 \\ \partial_2 f &= 4a_4y^3 + 3a_3xy^2 + 2a_2x^2y + a_1x^3 \end{cases}$$

Observemos que a única forma de obtermos $g \in < \partial f >$ tal que $ordem(g) = (2,1)$ é fazendo

$$\partial_1 f + (-\beta)\partial_2 f,$$

com $\beta = 4a_0/a_1$, anulando assim os monômios $4a_0x^3$ e a_1x^3. Porém, este é também o único meio de obtermos $h \in < \partial f >$ tal que $ordem(h) = (1,2)$.

Logo, para que $(1,2) \in E(< \partial f >)$, deveremos ter necessariamente $3a_1 - 2\beta a_2 = 0$. Mas isto acarreta $(2,1) \notin E(< \partial f >)$.

Portanto, concluímos também neste caso que é impossível $(2,1), (1,2) \in E(< \partial f >)$, e provamos assim nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (5,1,1,1,1), (4,2,1,1,1), (3,3,1,1,1)$ não são Newton-gradientes.

Prova. Temos que

$$G_\lambda = \{(0,0),\ldots,(0,4),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)\},$$
$$\{(0,0),\ldots,(0,3),(1,0),(1,1),(2,0),(3,0),(4,0)\} \text{ e}$$
$$\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(3,0,(4,0))\},$$

respectivamente. Portanto, supondo que em todos os casos λ seja Newton-gradiente, teremos que existe $f_\lambda \in M_2^2$ com $\nu(f_\lambda) = 9$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f_\lambda >) = G_\lambda$$

para cada λ.

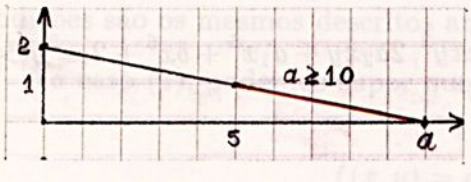
Daí, teremos que $(5,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$ para cada λ. Logo, será preciso que

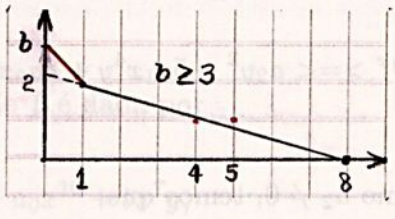
$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^6 f}{\partial x^5 \partial y}(0,0) \neq 0$$

e que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^5 f}{\partial x^5}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^5 f}{\partial x^4 \partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Desta forma, temos que os únicos Polígonos de Newton com $\nu(f) = 9$ que satisfazem estas condições são:





No caso (1), podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_2y^2 + a_1x^5y + a_0x^{10} + bx^6y + cxy^2 + dx^2y^2,$$

com $a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,1)\}$ e à $\{(2,1)\}$. Lembremos que para $\lambda = (5,1,1,1,1)$ estamos supondo $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$, e para $\lambda = (4,2,1,1,1)$ e $\lambda = (3,3,1,1,1)$ estamos supondo $(2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Temos que

$$< \partial f > = < 5a_1x^4y + 10a_0x^9 + 6bx^5y + cy^2 + 2dxy^2, 2a_2y + a_1x^5 + bx^6 + 2cxy + 2dx^2y > .$$

Agora, como $a_2 \neq 0$, temos que

$$(\alpha x^2)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1 x^7 \text{ em } \partial_2 f \longrightarrow (\beta x)\partial_2 f \rightsquigarrow \beta a_1 x^6 \text{ em } \partial_2 f \longrightarrow$$
$$(\gamma)\partial_2 f \rightsquigarrow \gamma a_1 x^5 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Logo, concluímos que $(2,1) \notin E(< \partial f >)$, e com mais razão $(1,1) \notin E(< \partial f >)$. Portanto, as escadas relacionadas a $\lambda = (5,1,1,1,1), (4,2,1,1,1), (3,3,1,1,1)$ não podem ser obtidas deste polígono.

No caso (2), podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_2xy^2 + a_1x^5y + a_0x^8 + bx^6y + cx^2y^2,$$

com $a_0, a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,1)\}$ e à $\{(2,1)\}$.

Temos que

$$< \partial f > = < a_2y^2 + 5a_1x^4y + 8a_0x^7 + 6bx^5y + 2cxy^2, 2a_2xy + a_1x^5 + bx^6 + 2cx^2y > .$$

Como $a_2 \neq 0$, temos que

$$(\alpha x)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1 x^6 \text{ em } \partial_2 f \longrightarrow (\beta)\partial_2 f \rightsquigarrow \beta a_1 x^5 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Logo, concluímos que $(2,1) \notin E(< \partial f >)$, e com mais razão $(1,1) \notin E(< \partial f >)$. Portanto, as escadas relacionadas a $\lambda = (5,1,1,1,1), (4,2,1,1,1), (3,3,1,1,1)$ não podem ser obtidas deste polígono.

Portanto, provamos nossa afirmação. □

(*) $\lambda = (4,1,1,1,1,1)$ não é Newton-gradiente.

Prova. De fato, suponhamos o contrário. Logo, existe $f \in M_2^2$ com $\nu(f) = 9$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(4,1,1,1,1,1)} = \{(0,0), \ldots, (0,3), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0)\}.$$

Logo,teremos $(6,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$. Daí, será preciso que

$$\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^7 f}{\partial x^6 \partial y}(0,0) \neq 0$$

e que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^5 f}{\partial x^5}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^5 f}{\partial x^4 \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^6 f}{\partial x^5 \partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Desta forma, temos que os únicos Polígonos de Newton com $\nu(f) = 9$ satisfazendo estas condições são os mesmos descritos anteriormente.

No caso (1), podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_2 y^2 + a_1 x^6 y + a_0 x^{10} + b x^7 y,$$

com $a_0, a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,1)\}$. Lembremos que estamos supondo $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Temos que

$$< \partial f >=< 6a_1x^5y + 10a_0x^9 + 7bx^6y, 2a_2y + a_1x^6 + bx^7 > .$$

Como $a_2 \neq 0$, temos

$$(\alpha x)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1 x^7 \text{ em } \partial_2 f \longrightarrow (\beta)\partial_2 f \rightsquigarrow \beta a_1 x^6 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Portanto, a escada relacionada a partição $\lambda = (4,1,1,1,1,1)$ não pode ser obtida deste polígono.

No caso (2), podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_2xy^2 + a_1x^6y + a_0x^8,$$

com $a_0, a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,1)\}$.

Temos que

$$< \partial f >=< a_2y^2 + 6a_1x^5y + 8a_0x^7, 2a_2xy + a_1x^6 > .$$

Como $a_2 \neq 0$, temos

$$(\alpha)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1 x^6 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Portanto, a escada relacionada a partição $\lambda = (4,1,1,1,1,1)$ não pode ser obtida deste polígono, e provamos portanto nossa afirmação. □

§8. Uma conexão entre o número de partições do tipo Newton-gradiente, a "falsa" série de Hilbert e o número de covariantes de uma forma binária de grau n.

Definição 8.1(*) *Denotamos por $\nu(\mu)$ o número de partições de μ do tipo Newton-gradiente.*

Provamos, portanto, o seguinte teorema:

Teorema 8.1 (*)

$$\begin{cases} \nu(\mu) = p(\mu), \ \mu = 1, 2, 3, 4, \\ \nu(5) = 6, \\ \nu(6) = 10 = \nu(7), \\ \nu(8) = 13, \\ \nu(9) = 15, \end{cases}$$

onde $p(n)$ é o número de partições de n.

Obtemos assim a seguinte seqüência para $\nu(\mu)$, $1 \leq \mu \leq 9$:

$$1, 2, 3, 5, 6, 10, 10, 13, 15, \ldots$$

Recentemente, encontramos uma seqüência muito parecida com esta em [18]. Ao perguntarmos por uma referência, N.J.A. Sloane nos indicou [1]. Vamos agora interpretar a série encontrada conforme [1].

Seja G um grupo com p elementos, onde p é um número primo, e seja k um corpo de característica p. Então

$$V_n \cong k[x]/(x-1)^n, \text{ para } n = 1, 2, \ldots, p$$

são os únicos indecomponíveis $k[G]$-módulos (observemos que $V_p = k[G]$ é livre). A r-ésima potência simétrica $S^r V_{n+1}$ pode ser escrita como uma soma direta de indecomponíveis. Seja $b_{n,r}$ o número de indecomponíveis para $p > nr + 1$ e definamos a "falsa" série de Hilbert por

$$\psi_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{n,r} t^r.$$

Uma maneira de encontrar e.g., $\psi_3(t)$ é de fato computar as decomposições de $S^r V_4$ e contar os componentes. Então temos a seguinte seqüência para $b_{3,r}$:

$$1, 1, 2, 3, 5, 6. 8, 10, 13, 15, 18, 21, 25, 28, 32, 36, 41, 45, 50, \ldots$$

Observação. Os últimos 5 termos foram tirados de [18].

Consideremos agora uma forma binária de grau n

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^{n-i} y^i \ ; \ a_i \in \mathbb{Q}.$$

Então um polinômio

$$F(a_0, \ldots, a_n, x, y) = \sum_{j=0}^{m} c_j x^{m-j} y^j,$$

onde $c_j = c_j(a_0, \ldots, a_n)$ são polinômios com coeficientes inteiros, é chamado de um covariante de índice λ e ordem m se a condição seguinte for satisfeita:

Façamos a substituição

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

com $det\ T \neq 0$. A forma f se torna

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A_i \xi^{n-i} \eta^i.$$

Então,

$$F(A_0, \ldots, A_n, \xi, \eta) = (det\ T)^{\lambda} F(a_0, \ldots, a_n, x, y).$$

Atribua um *peso* k a a_k. Então $c_j(a_0, \ldots, a_n)$ é homogênea de grau r, onde

$$nr = 2\lambda + m$$

e é isobárica (todos os termos têm o mesmo peso) de *peso* $\lambda + j$.

Definição 8.2 *Denotamos por* $p(r, m, n)$ *o número de partições de* n *em até* m *partes, todas de tamanho* $\leq r$.

Proposição 8.1 (Faà di Bruno) (i) F *é unicamente determinado pelo seu termo dominante* c_0.

(ii) *O número de covariantes linearmente independentes* F *da* n*-forma* f *com termo dominante* c_0 *de grau* r *é*

$$p(n, r, \lfloor \frac{r\ n}{2} \rfloor).$$

Agora, fixando $r = 3$ e variando n, obtemos a seqüência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 13, 15, 18, 21, 25, 28, 32, 36, 41, 45, 50, \ldots$$

que é nada mais que nossa seqüência anterior,(para $b_{3,r}$). De fato, em [1] é provado que as duas seqüências são iguais.

Diante destes fatos, fazemos a seguinte conjectura:

Conjectura 8.1 (*) $\nu(\mu) \geq p(\mu, 3, \lfloor \frac{3\mu}{2} \rfloor)$:

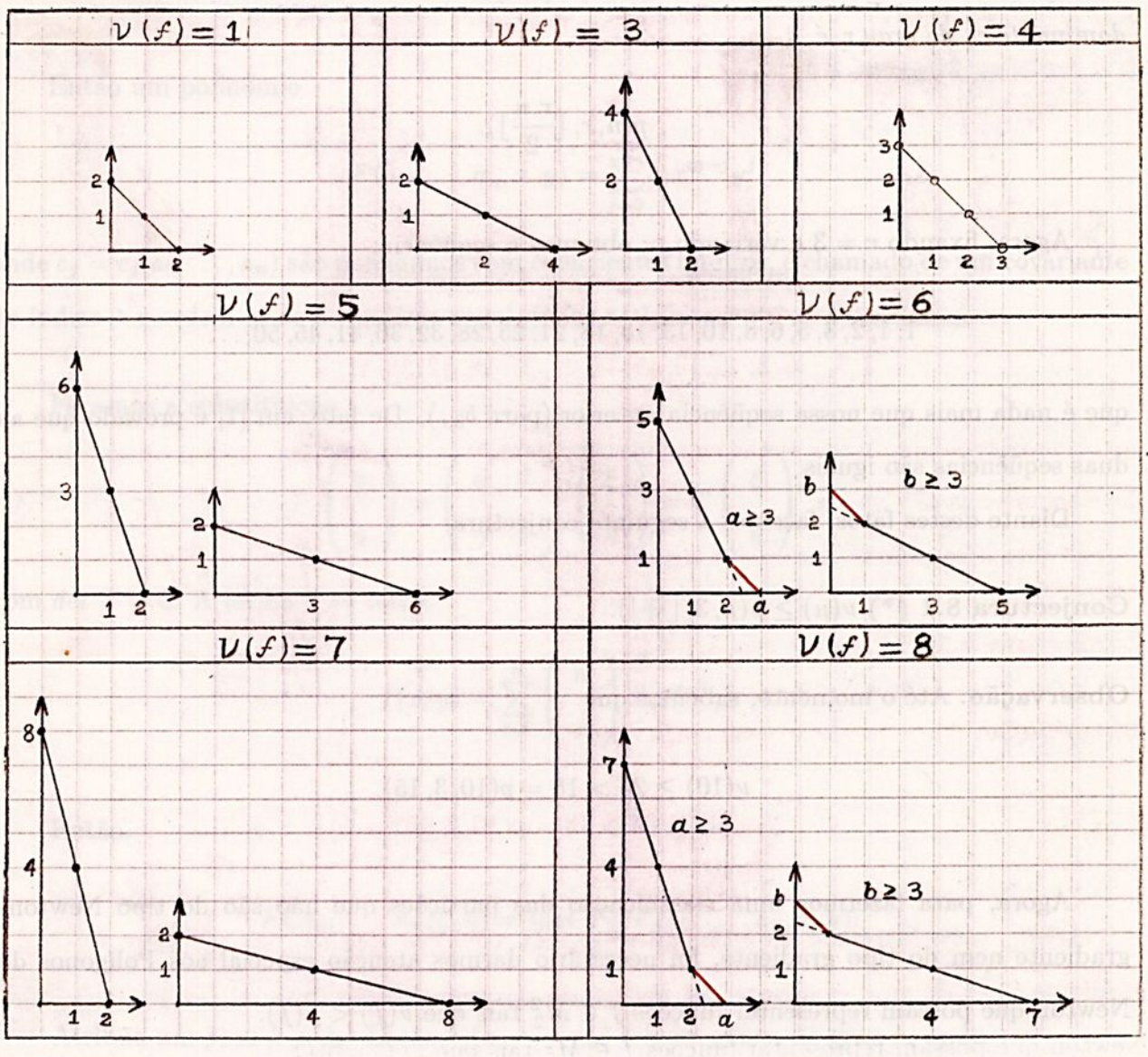
Observação. Até o momento, sabemos que

$$\nu(10) \geq 23 > 18 = p(10, 3, 15).$$

Agora, para fazermos uma classificação das partições que não são do tipo Newton-gradiente nem do tipo gradiente, foi necessário darmos atenção especial aos Polígonos de Newton que possam representar funções $f \in M_2^2$ tais que $\nu(f) < \mu(f)$.

§9. Estudo dos Polígonos de Newton de funções $f \in M_2^2$ que não são SQH, para $1 \leq \nu(f) \leq 8$.

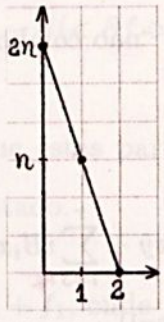
•Lista dos possíveis Polígonos de Newton que representem funções não SQH.



Como conseqüência imediata desta lista, temos o seguinte resultado:

Corolário 9.1 (*) *Não existe* $f \in \mathcal{M}_2^2$ *com* $\nu(f) = 2$ *e* $\mu(f) > 2$.

Temos que os polígonos do tipo

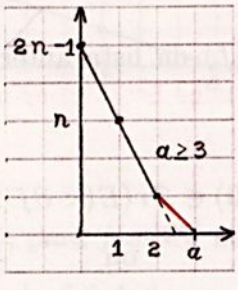


que possuem $\nu(f) = 2n - 1,\ n \geq 1$, fornecem escadas do tipo

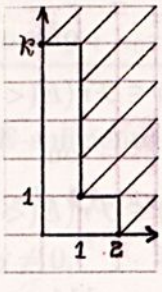


onde $k \geq 2n - 1$, ou $k = \infty$, pelo fato de $(1,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Os polígonos do tipo



que possuem $\nu(f) = 2n,\ n \geq 3$, fornecem escadas do tipo



onde $k \geq 2n-1$, ou $k = \infty$, pelo fato de $(1,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$.

Prova (*). Sem perda de generalidade, podemos supor que f é dada por

$$f(x,y) = a_0 y^{2n-1} + a_1 xy^n + a_2 x^2 y + \sum_{i=3}^{r} B_i x^i + \sum_{j=3}^{s} C_j x^j y,$$

com $a_0, a_1, a_2 \neq 0$, pois outros monômios "não colaboram" para uma possível não-obtenção do monômio xy.

Temos que

$$\begin{aligned} < \partial f > \;\; = \;\; & < a_1 y^n + 2a_2 xy + \sum_{i=3}^{r} iB_i x^{i-1} + \sum_{j=3}^{s} jC_j x^{j-1} y, \\ & (2n-1)a_0 y^{2(n-1)} + na_1 xy^{n-1} + a_2 x^2 + \sum_{j=3}^{s} C_j x^j > \end{aligned}$$

Agora, fazendo

$$(1 + \sum_{j=3}^{s} \frac{C_j}{a_2} x^{j-2})\partial_1 f \;\; + \;\; (-\sum_{i=3}^{r} \frac{iB_i}{a_2} x^{i-3})\partial_2 f,$$

obtemos $(1,1) \in E(< \partial f >)$. □

Primeiras conseqüências.

9.1) Observando os polígonos $\Gamma(f)$ da lista anterior, vemos que todos possuem uma propriedade em comum:

$$\begin{cases} (1,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)) \\ \text{ou} \\ (2,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)) \\ \text{ou} \\ (3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)) \\ \text{ou} \\ (4,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)) \end{cases}$$

para $f \in M_2^2$, genérica, não SQH, obtida através de um dos polígonos $\Gamma(f)$.

Portanto, concluímos que as partições $\lambda = (5,1,1,1,1), (4,2,1,1,1), (4,1,1,1,1,1)$, $(3,3,1,1,1), (4,1,1,1,1)$ *não são do tipo gradiente, i.e., não existe* $f \in M_2^2$ *tal que*

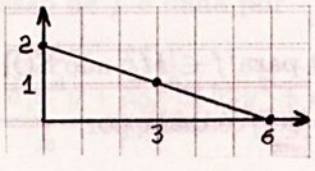
$$\mathbb{Z}_+^2 - E(<\partial f>) = G_\lambda.$$

Prova (*). De fato, já provamos que estas partições não são do tipo Newton-gradiente. Logo, considerando 9.1, temos o resultado.

Afirmação 9.1 Seja $f \in M_2^2$, $f = f_0 + f_1$, onde f_0 é QH$(d;a,b)$ e $filt_{(a,b)} f_1 > d$. Então, se $\mu(f_0) < \infty$, teremos necessariamente $\mu(f) = \nu(f)$.

De fato, por definição teremos que f será SQH$(d;a,b)$, e portanto pelo Teorema 3.1 $\mu(f) = \nu(f)$. Logo, para que $\mu(f) > \nu(f)$, será preciso que $\mu(f_0) = \infty$.

9.2) Consideremos agora o polígono



e mostremos que $(1,1) \notin E(<\partial f>)$, para $f \in M_2^2$ não SQH, obtida deste polígono.

Podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = \underbrace{a_2y^2 + a_1x^3y + a_0x^6}_{f_0} + bxy^2 + cx^4y,$$

com $a_1^2 = 4a_0a_2$, $a_0, a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,1)\}$, e queremos que $\mu(f_0) = \infty$, (pela Afirmação 9.1). Logo, pela Proposição 2.1 e pelo Teorema 2.1, deveremos ter necessariamente $a_1^2 = 4a_0a_2$, $a_0, a_1, a_2 \neq 0$.

Temos que

$$< \partial f >=< 3a_1x^2y + 6a_0x^5 + by^2 + 4cx^3y, 2a_2y + a_1x^3 + 2bxy + cx^4 > .$$

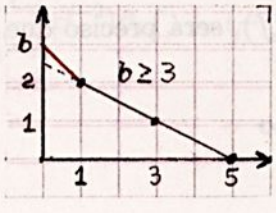
Como $a \neq 0$, temos

$(\alpha x)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1 x^4$ em $\partial_2 f \longrightarrow (\beta)\partial_2 f \rightsquigarrow \beta a_1 x^3$ em $\partial_2 f$, que não pode ser obtido de $\partial_1 f$.

Logo, temos que $(1,1) \notin E(< \partial f >)$.

Observação. Mais ainda, temos que $(2,1) \notin E(< \partial f >)$, pelo fato de $a_1^2 = 4a_0a_2$, $a_0, a_1, a_2 \neq 0$.

9.3) Agora, consideremos o polígono



e mostremos que $(1,1) \notin E(< \partial f >)$ para $f \in M_2^2$ não SQH, obtida deste polígono.

Podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_3y^3 + \underbrace{a_2xy^2 + a_1x^3y + a_0x^5}_{f_0},$$

com $a_1^2 = 4a_0a_2$, $a_0, a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(1,1)\}$, e queremos que $\mu(f_0) = \infty$.

Temos que

$$< \partial f >=< a_2y^2 + 3a_1x^2y + 5a_0x^4, 3a_3y^2 + 2a_2xy + a_1x^3 > .$$

Agora, como $a_2 \neq 0$, temos que

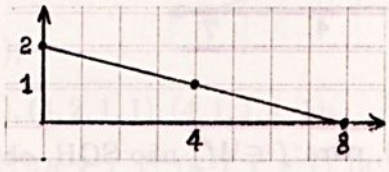
$$2a_2xy \text{ em } \partial_2 f \rightsquigarrow a_1x^3 \text{ em } \partial_2 f,$$

que não pode ser obtido de $\partial_1 f$.

Logo, $(1,1) \notin E(< \partial f >)$.

Conclusão. *Através de 9.2) e 9.3), podemos concluir que as partições* $\lambda = (7,1,1), (6,1,1), (5,1,1), (4,1,1)$ *não são do tipo gradiente.*

9.4) Consideremos o polígono



e mostremos que $(2,1) \notin E(< \partial f >)$, para $f \in M_2^2$ não SQH, obtida deste polígono.

Podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = \underbrace{a_2y^2 + a_1x^4y + a_0x^8}_{f_0} + bxy^2 + cx^5y + dx^6y + ex^2y^2,$$

com $a_1^2 = 4a_0a_2$, $a_0, a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(2,1)\}$ e à $\{(1,1)\}$, e queremos que $\mu(f_0) = \infty$.

Temos que

$$\begin{aligned} < \partial f > \;\; = \;\; & < 4a_1x^3y + 8a_0x^7 + by^2 + 5cx^4y + 6dx^5y + 2exy^2, \\ & 2a_2y + a_1x^4 + 2bxy + cx^5 + 2dx^2y + ex^6 > . \end{aligned}$$

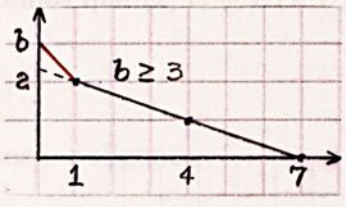
Como $a_2 \neq 0$, temos

$$(\alpha x^2)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1 x^6 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Logo, $(2,1) \notin E(< \partial f >)$, e com mais razão $(1,1) \notin E(< \partial f >)$.

Observação. Mais ainda, temos que $(3,1) \notin E(< \partial f >)$, pelo fato de $a_1^2 = 4a_0a_2$, $a_0, a_1, a_2 \neq 0$.

9.5) Consideremos o polígono



e mostremos que $(2,1) \notin E(< \partial f >)$, para $f \in M_2^2$ não SQH, obtida deste polígono.

Podemos supor que a expressão de f é dada por

$$f(x,y) = a_3y^3 + \underbrace{a_2xy^2 + a_1x^4y + a_0x^7}_{f_0} + bx^2y^2 + cx^5y,$$

com $a_1^2 = 4a_0a_2$, $a_0, a_1, a_2 \neq 0$, pois f é E-suficiente com relação à $\{(2,1)\}$ e à $\{(1,1)\}$, e queremos que $\mu(f_0) = \infty$.

Temos que

$$< \partial f >=< a_2y^2 + 4a_1x^3y + 7a_0x^6 + 2bxy^2 + 5cx^4y, 3a_3y^2 + 2a_2xy + a_1x^4 + 2bx^2y + cx^5 > .$$

Como $a_2 \neq 0$, temos

$$(\alpha x)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha a_1 x^5 \text{ em } \partial_2 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_1 f.$$

Logo, $(2,1) \notin E(< \partial f >)$, e com mais razão $(1,1) \notin E(< \partial f >)$.

Conclusão. *Podemos concluir de 9.4) e 9.5) que as partições*

$$\lambda = (6,1,1,1), (5,1,1,1), (4,1,1,1)$$

e as partições

$$\lambda = (5,2,1,1), (4,3,1,1), (4,2,1,1,)$$

não são do tipo gradiente..

Desta forma, provamos:

Teorema 9.1 (*). *As partições*

i) $\lambda = (4,1,1)$;

ii) $\lambda = (5,1,1), (4,1,1,1)$;

iii) $\lambda = (6,1,1), (5,1,1,1), (4,2,1,1), (4,1,1,1,1)$;

iv) $\lambda = (7,1,1), (6,1,1,1), (5,2,1,1), (5,1,1,1,1), (4,3,1,1), (4,2,1,1,1), (4,1,1,1,1,1),$
$(3,3,1,1,1)$

não são do tipo gradiente.

Definição 9.1 (*) *Denotamos por $g(\mu)$ o número de partições de μ do tipo gradiente.*

Teorema 9.2 (*) $g(\mu) < p(\mu),\ \mu \geq 6$.

Prova. É suficiente mostrarmos que $\lambda = (n,1,1),\ n \geq 4$ não é do tipo gradiente.

Portanto, supondo que $\lambda = (n,1,1),\ n \geq 4$ seja gradiente, existirá $f \in M_2^2$ tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(<\partial f>) = G_{(n,1,1)} = \{(0,0), \ldots, (0,n-1), (1,0), (2,0)\},$$

e portanto $(3,0), (1,1) \in \mathcal{F}r(E(<\partial f>))$. Logo, será preciso que

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) \neq 0,$$

que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

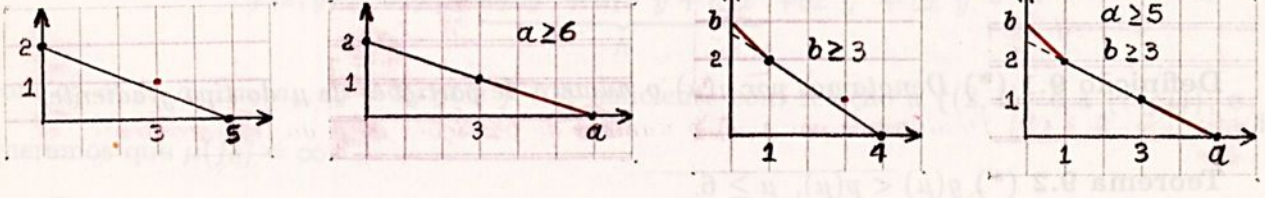
e também que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \neq 0$$

Logo, os únicos Polígonos de Newton $\Gamma(f)$, $f \in M_2^2$ tais que

$$\begin{cases} (4,0) \text{ ou } (3,1) \in \Gamma_+(f) \\ (0,2) \text{ ou } (1,2) \in \Gamma_+(f) \\ (3,0), (2,1), (2,0), (1,1) \notin \Gamma_+(f) \end{cases}$$

são:



No caso (1), temos que f é SQH$(10;2,5)$, pois podemos escrever $f = f_0 + f_1$, com f_0 QH$(10;2,5)$, $filt_{(2,5)} f_1 > 10$, e $\mu(f_0) < \infty$. Portanto, $\mu(f) = 4$.

No caso (2), temos que $(1,1) \notin E(< \partial f >)$, pois a demonstração é totalmente análoga à do item 9.2).

No caso (3), temos que f é SQH$(8;2,3)$, pois podemos escrever $f = f_0 + f_1$, com f_0 QH$(8;2,3)$, $filt_{(2,3)} f_1 > 8$, e $\mu(f_0) < \infty$. Portanto, $\mu(f) = 5$.

No caso (4), temos que $(1,1) \notin E(< \partial f >)$, como no item 9.3). □

Teorema 9.3 (*) *Não existe* $f \in \mathcal{M}_2$ *tal que* $< \partial f >= \mathcal{M}_2^k,\ k \geq 2$.

Prova. De fato, se $< \partial f >= \mathcal{M}_2^k$, então $f \in \mathcal{M}_2^{k+1}$, e

$$\frac{< \partial f >}{\mathcal{M}_2^{k+1}} = \frac{\mathcal{M}_2^k}{\mathcal{M}_2^{k+1}}.$$

Portanto,

$$[j^k\partial_1 f, j^k\partial_2 f]_{\mathbb{R}} = [x^k, x^{k-1}y, \ldots, xy^{k-1}, y^k]_{\mathbb{R}},$$

e como

$$dim_{\mathbb{R}} [x^k, x^{k-1}y, \ldots, xy^{k-1}, y^k]_{\mathbb{R}} \geq 3,$$

temos uma contradição. □

Observação. O teorema vale para $f \in \mathcal{M}_n,\ n \geq 2$.

§10. Conclusões.

1) $\nu(\mu) = p(\mu),\ 1 \leq \mu \leq 4$.

2) $g(\mu) = p(\mu),\ 1 \leq \mu \leq 5$.

3) $\nu(\mu) = g(\mu),\ \mu(f) = 1, 2, 3.4, 6$.

4) $g(\mu) < p(\mu),\ 1 \leq \mu \leq 6$.

5) $\nu(\mu) < g(\mu),\ \mu(f) = 2k+1,\ k \geq 2$.

6) Seja $\mathcal{I} \subseteq M_2^2$ um ideal. Logo, se $\mathbb{Z}_+^2 - E(\mathcal{I}) = G_\lambda$, para algum λ pertencente à lista dada pelo Teorema 9.1, então não existe $f \in M_2^2$ tal que $\mathcal{I} =< \partial f >$.

6.1) A recíproca não é verdadeira. De fato, consideremos $\mathcal{I} = M_2^2 =< x^2, xy, y^2 >$. Sabemos que não existe $f \in M_2^2$ tal que $\mathcal{I} =< \partial f >$, porém

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(\mathcal{I}) = G_{(2,1)}$$

6.2) Consideremos $f(x,y) = x^2y + y^2$. Temos que $E(M_2^2) = E(< \partial f >)$, porém

$$M_2^2 \neq < \partial g >, \ \forall g \in M_2^2.$$

Da mesma forma, $E(M_2^3) = E(< \partial f >)$, para $f(x,y) = x^3y + xy^2$. Porém,

$$M_2^3 \neq < \partial g >, \ \forall g \in M_2^2.$$

Observação. É interessante notar que:

1) $\lambda = (3,2)$ não é Newton-gradiente, mas $\lambda = (4,3,2)$ é.

2) $\lambda = (4,3,1)$ e $\lambda = (4,3,1,1)$ não são Newton-gradientes, mas $\lambda = (4,3,1,1,1)$ e $\lambda = (4,3,1,1,1,1)$ são.

3) $\lambda = (4,2,2)$ não é Newton-gradiente, mas $\lambda = (4,2,2,2)$ é.

§11. Partições do tipo gradiente que não são Newton-gradientes.

Provamos na seção §4 que as partições $\lambda = (3,2), (4,3), (5,4)$ não são do tipo Newton-gradiente, porém são do tipo gradiente. Mostraremos agora que também as partições

$$\lambda = (3,2,2), (3,3,2), (4,3,1), (3,2,2,2), (3,3,2,1)$$

são do tipo gradiente. (Já provamos que elas não são Newton-gradientes).

(*) $\lambda = (3,2,2)$ é do tipo gradiente.

Prova. De fato, sejam $f(x,y) = x^2 + y^8$, $\varphi(x,y) = (x^3 + y, x)$ um germe de difeomorfismo, e consideremos

$$g(x,y) = (f \circ \varphi)(x,y) = (x^3+y)^2 + x^8.$$

Agora, como $\mathcal{M}_2^7 \subset < \partial f >$, temos pelo Corolário 4.1 que

$$\mathcal{M}_2^7 \subset < \partial g > .$$

Temos que

$$< \partial g > = < \underbrace{3x^5 + 3x^2y + 4x^7}_{A}, \underbrace{x^3+y}_{B} >,$$

e portanto $(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$. Também,

$$(y^2 - x^3y)B = y^3 - x^6y,$$
$$(xy - x^4)B = xy^2 - x^7.$$

Logo,

$$y^3, xy^2 \in < \partial g > .$$

Agora, como $\mu(g) = \mu(f) = 7$, temos necessariamente que

$$(0,3), (1,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >)),$$

provando que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial g >) = G_{(3,2,2)}.$$

□

(*) $\lambda = (3,3,2)$ é do tipo gradiente.

Prova. De fato, sejam $f(x,y) = x^2 + y^9$, $\varphi(x,y) = (x^3+y, x)$ um germe de difeomorfismo, e consideremos

$$g(x,y) = (f \circ \varphi)(x,y) = (x^3+y)^2 + x^9.$$

Agora, como $\mathcal{M}_2^8 \subset < \partial f >$, temos pelo Corolário 4.1 que

$$\mathcal{M}_2^8 \subset < \partial g > .$$

Temos que

$$< \partial g > = < \underbrace{2x^5 + 2x^2y + 3x^8}_{A}, \underbrace{x^3+y}_{B} >,$$

e portanto $(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$. Também,

$$(y^2 - x^3y + x^6)B = y^3 + x^9.$$

Logo,

$$y^3 \in < \partial g > .$$

Agora, como $\mu(g) = \mu(f) = 8$, temos necessariamente que

$$(0,3), (2,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >)),$$

provando que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial g >) = G_{(3,3,2)}.$$

□

(*) $\lambda = (4,3,1)$ **é do tipo gradiente.**

Prova. De fato, sejam $f(x,y) = x^2y + y^7$, $\varphi(x,y) = (x^2+y, x)$ um germe de difeomorfismo, e consideremos

$$g(x,y) = (f \circ \varphi)(x,y) = x(x^2+y)^2 + x^7.$$

Agora, como $\mathcal{M}_2^7 \subset < \partial f >$, temos pelo Corolário 4.1 que

$$\mathcal{M}_2^7 \subset < \partial g > .$$

Temos que

$$< \partial g > = < 5x^4 + 6x^2y + y^2 + 7x^6, \underbrace{x^3 + xy}_{B} >,$$

e portanto $(3,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$. Agora, fazendo

$$(ay + bx^2)\partial_1 g + (cx^3 + dxy)B,$$

obtemos

$$(5a + 6b + c + d)x^4y + (6a + b + d)x^2y^2 + (5b + c)x^6 + ay^3 + 7ax^6y + 7bx^8.$$

Portanto, para que $y^3 \in < \partial g >$, devemos resolver o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 5a + 6b + c + d = 0 & i) \\ 6a + b + d = 0 & ii) \\ 5b + c = 0 & iii) \end{cases}$$

Mas, fazendo $ii) - i) + iii)$, obtemos $a = 0$. Portanto,

$$y^3 \notin < \partial g >,$$

pois a <u>única</u> maneira de eventualmente obtermos $y^3 \in < \partial g >$ seria fazendo

$$(ay + bx^2)\partial_1 g + (cx^3 + dxy)\partial_2 g.$$

Mostremos agora que $y^4 \in < \partial g >$. De fato, temos que

$$(y^2 - 6x^2y)\partial_1 g + 31x^3y\ B = y^4 + 7x^6y^2 + x^6y - 42x^8y,$$

e daí $y^4 \in < \partial g >$.

Além disso,

$$\partial_1 g + (-5x - 7x^3)B = x^2y - 7x^4y + y^2,$$

e portanto $(2,1) \in E(< \partial g >)$.

Observemos também que $(1,1) \notin E(< \partial g >)$. Agora, como $\mu(g) = \mu(f) = 8$ e

$$(0,4), (2,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >)),$$

teremos necessariamente que $(1,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$, e portanto

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial g >) = G_{(4,3,1)}.$$

□

(*) $\lambda = (3,2,2,2)$ é do tipo gradiente.

Prova. De fato, sejam $f(x,y) = x^2 + y^{10}$, $\varphi(x,y) = (x^4 + y, x)$ um germe de difeomorfismo, e consideremos

$$g(x,y) = (f \circ \varphi)(x,y) = (x^4 + y)^2 + x^{10}.$$

Agora, como $\mathcal{M}_2^9 \subset < \partial f >$, temos pelo Corolário 4.1 que

$$\mathcal{M}_2^9 \subset < \partial g > .$$

Temos que

$$< \partial g >=< \underbrace{4x^7 + 4x^3y + 5x^9}_{A}, \underbrace{x^4 + y}_{B} >,$$

e portanto $(4,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$. Também,

$$(y^2 - x^4y)B = y^3 - x^8y,$$
$$(xy - x^5)B = xy^2 - x^9.$$

Logo,

$$y^3, xy^2 \in < \partial g > .$$

Agora, como $\mu(g) = \mu(f) = 9$, temos necessariamente que

$$(0,3), (1,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >)),$$

provando que

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial g >) = G_{(3,2,2,2)}.$$

□

(*) $\lambda = (3,3,2,1)$ é do tipo gradiente.

Prova. De fato, sejam $f(x,y) = x^2y + y^8$, $\varphi(x,y) = (x^3 + y, x)$ um germe de difeomorfismo, e consideremos

$$g(x,y) = (f \circ \varphi)(x,y) = x(x^3 + y)^2 + x^8.$$

Agora, como $\mathcal{M}^8_2 \subset < \partial f >$, temos pelo Corolário 4.1 que

$$\mathcal{M}_2^8 \subset < \partial g > .$$

Temos que

$$< \partial g > = < 7x^6 + 8x^3y + y^2 + 8x^7, \underbrace{x^4 + xy}_{B} >,$$

e portanto $(4,0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >))$. Agora, temos que

$$(y - 8x^3)\partial_1 g + 57x^5\ B = y^3 + 8x^7y + x^9 - 64x^{10},$$

e portanto $y^3 \in < \partial g >$. Também,

$$\partial_1 g + (-7x^2 - 8x^3)B = x^3y + y^2 - 8x^4y,$$

e portanto $(3,1) \in E(< \partial g >)$. Agora, como $\mu(g) = \mu(f) = 9$, temos que

$$(0,3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >)).$$

Agora, como $(3,1) \in E(< \partial g >)$, teremos necessariamente que

$$(3,1), (2,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial g >)),$$

provando que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial g >) = G_{(3,3,2,1)}.$$

□

Temos portanto uma pequena quantidade de partições que ainda podem ser do tipo gradiente, mas acreditamos na seguinte conjectura:

Conjectura 11.1 (*) *As partições*

$$\begin{cases} \lambda = (4,2,1), \\ \lambda = (6,2),(5,2,1),(4,2,2), \\ \lambda = (7,2),(6,3),(6,2,1),(4,2,2,1) \end{cases}$$

não são do tipo gradiente.

Relacionaremos a seguir os conceitos $p(\mu)$, $\nu(\mu)$ e $g(\mu)$ para $\mu \leq 9$:

μ	p	ν	$p-\nu$	g	$p-g$	$g-\nu$
1	1	1	0	1	0	0
2	2	2	0	2	0	0
3	3	3	0	3	0	0
4	5	5	0	5	0	0
5	7	6	1	7	0	1
6	11	10	1	10	1	0
7	15	10	5	(12)	(3)	(2)
8	22	13	9	(15)	(7)	(2)
9	30	15	15	(18)	(12)	(3)

Observação. Estamos denotando $p = p(\mu)$, $\nu = \nu(\mu)$, $g = g(\mu)$. Além disso, os números entre parênteses estão em relação direta com a Conjectura 11.1.

§12. Estudo das partições do tipo $\lambda = (\mathbf{n}, \mathbf{n-1}, \ldots, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, $\mathbf{n \geq 2}$.

Como vimos na seção §7, temos que

$$E(< \partial f >) = E(M_2^2),$$

para $f(x,y) = x^2y + y^2$, $\nu(f) = 3$, e que

$$E(< \partial f >) = E(M_2^3),$$

para $f(x,y) = x^3y + xy^2,\ \nu(f) = 6.$

Mostremos agora que

$$E(< \partial f >) = E(M_2^4),$$

para $f(x,y) = x^6 + x^4y + y^3,\ \nu(f) = 10.$

Prova (*). De fato, mostremos primeiro que

$$\mu(f) = \nu(f) = 10.$$

Temos que

$$< \partial f > = < 6x^5 + 4x^3y, x^4 + 3y^2 > .$$

Logo,

$$(\omega) \begin{cases} x\ \partial_1 f = 0 \\ y\ \partial_2 f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(6x^5 + 4x^3y) &= 0 \\ y(x^4 + 3y^2) &= 0 \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x^2 + 2y &= 0 \\ y = 0 \quad \text{ou} \quad x^4 + 3y^2 &= 0 \end{cases}$$

Suponhamos então que o sistema (ω) tenha solução em $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$. Portanto, como o eixo $x = 0$ e o eixo $y = 0$ não são soluções de (ω), teremos que

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y &= 0 \\ x^4 + 3y^2 &= 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} 9x^2y + 6y^2 &= 0 \\ 2x^4 + 6y^2 &= 0 \end{cases},$$

e daí

$$9x^2y - 2x^4 = 0, \text{ i.e., } x^2(9y - 2x^2) = 0.$$

Portanto,

$$x = 0 \text{ ou } y = 2/9\ x^2,$$

o que é um absurdo, pois nenhuma dessas curvas é solução de (ω).

Portanto, temos que f é não degenerada segundo Kouchnirenko, e daí

$$\mu(f) = \nu(f) = 10.$$

Continuando nosso raciocínio, vemos que

$$(4, 0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)).$$

Além disso,

$$\partial_1 f + (-6x)\partial_2 f = 4x^3y - 18xy^2,$$

e portanto $(3, 1) \in E(< \partial f >)$. Agora, como $(2, 1) \notin E(< \partial f >)$, temos que

$$(3,1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)).$$

Também,

$$(-1/6)x\ \partial_1 f + (x^2 + 2/3\ y)\partial_2 f = 3x^2y^2 + 2y^3,$$

e portanto $(2,2) \in E(< \partial f >)$. Agora, temos que

$$(1,2) \notin E(< \partial f >),$$

pois

$$(\alpha x)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha x^5 \text{ em } \partial_2 f \longrightarrow (\beta)\partial_1 f \rightsquigarrow 4\beta x^3 y \text{ em } \partial_1 f, \text{ que não pode ser obtido de } \partial_2 f.$$

Logo, temos que

$$(2,2) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)).$$

Finalmente, como $\mu(f) = \nu(f) = 10$, teremos necessariamente que

$$(1,3), (0,4) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)).$$

Portanto, concluímos que

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(< \partial f >) = G_{(4,3,2,1)} = \mathbb{Z}^2_+ - E(M_2^4),$$

e daí

$$E(< \partial f >) = E(M_2^4).$$

□

Observação. Poderíamos ter chegado à mesma conclusão observando que:

i) $(3,0) \notin E(< \partial f >)$.

ii) $(2,1) \notin E(< \partial f >)$.

iii) $(1,2) \notin E(< \partial f >)$.

iv) $(0,3) \notin E(< \partial f >)$, pois

$(ay)\partial_2 f \rightsquigarrow ax^4 y$ em $\partial_2 f \longrightarrow (bx)\partial_1 f \rightsquigarrow 6bx^6$ em $\partial_1 f \longrightarrow (cx^2)\partial_2 f \rightsquigarrow 3cx^2y^2$ em $\partial_2 f$, que não pode ser obtido de $\partial_1 f$.

Desta forma, teríamos necessariamente que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_{(4,3,2,1)},$$

pois este é o único subconjunto de $\mathbb{Z}_+^2$ do tipo G_λ, possuindo 10 elementos e "contendo $G_{(3,2,1)}$ em seu interior". Esta afirmação é no sentido seguinte:

Sejam $R, S \subset \mathbb{Z}_+^2$. Então

$$R \subset_{int} S \text{ se, e somente se } (i,j) \in R \Rightarrow (i+1,j), (i,j+1) \in S.$$

Estudo das partições do tipo $\lambda = (\mathbf{2(k-1), 2k-3, \ldots, 2, 1})$, $\mathbf{k \geq 3}$.

Considere a função $f(x,y) = x^{2k} + x^{2(k-1)}y + y^k$. Temos que

$$< \partial f > = < 2kx^{2k-1} + 2(k-1)x^{2k-3}y, x^{2(k-1)} + ky^{k-1} > .$$

Logo, vemos que

$$(2(k-1), 0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)).$$

Também, como

$$(2k-3,1) \in E(<\partial f>),$$
$$(2(k-2),1) \notin E(<\partial f>),$$

temos que

$$(2k-3,1) \in \mathcal{F}r(E(<\partial f>)).$$

Além disso,

$$(-1/2)x\ \partial_1 f + (kx^2 + (k-1)y)\partial_2 f = k^2x^2y^{k-1} + k(k-1)y^k,$$

e portanto $(2, k-1) \in E(<\partial f>)$. Agora, observemos que

i) $(2, k-2) \notin E(<\partial f>)$.

ii) $(1, k-1) \notin E(<\partial f>)$, pois

$$(\alpha x)\partial_2 f \rightsquigarrow \alpha x^{2k-1} \text{ em } \partial_2 f \longrightarrow (\beta)\partial_1 f \rightsquigarrow 2\beta(k-1)x^{2k-3}y \text{ em } \partial_1 f,$$

que não pode ser obtido de $\partial_2 f$.

Portanto,

$$(2,(k-1)) \in \mathcal{F}r(E(<\partial f>)).$$

Mostremos agora que $y^{2(k-1)} \in <\partial f>$. Temos que

$$(\sum_{i=0}^{k-2} a_i x^{2(k-i)-3}y^i)\partial_1 f + (bx^{2(k-1)} + cy^{k-1})\partial_2 f = 2ka_0x^{4(k-1)} + (\sum_{i=1}^{k-2} 2ka_i x^{2(2k-i-2)}y^i) +$$
$$+(\sum_{i=1}^{k-1} 2(k-1)a_{(i-1)}x^{2(2k-i-2)}y^i) + bx^{4(k-1)} + bkx^{2(k-1)}y^{k-1} + cx^{2(k-1)}y^{k-1} + cky^{2(k-1)}.$$

Logo, queremos resolver o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2ka_0 + b = 0 \\ \left[\begin{array}{lcll} ka_1 & + & (k-1)a_0 & = 0 \\ ka_2 & + & (k-1)a_1 & = 0 \\ & \vdots & & \\ ka_{(k-2)} & + & (k-1)a_{(k-3)} & = 0 \end{array}\right. \\ bk + c + 2(k-1)a_{(k-2)} = 0 \end{cases}$$

Agora, fazendo $b = -2k$, teremos

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \frac{1-k}{k} \\ a_2 = (\frac{1-k}{k})^2 \\ a_3 = (\frac{1-k}{k})^3 \\ \vdots \\ a_j = (\frac{1-k}{k})^j \end{cases}$$

Portanto,

$$a_{(k-2)} = (-1)^{k-2} \ (\frac{k-1}{k})^{k-2}.$$

Logo,

$$-2k^2 + c + 2\frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}} \ (-1)^{k-2} = 0,$$

acarretando

$$c = 2 \ \frac{k^k + (-1)^{k-1}(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}} > 0.$$

Portanto, temos que $y^{2(k-1)} \in < \partial f >$, o que significa que

$$\mu(f) = \#(\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >)) < \infty.$$

Agora, como f é QH$(2k; 1.2)$ com $\mu(f) < \infty$, concluímos que

$$f \text{ é SQH}(2k; 1, 2),$$

e portanto

$$\mu(f) = (k-1)(2k-1) \ (= \nu(f)).$$

Somando isso ao fato de que

i) $(2(k-1), 0) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$,

ii) $(2k-3, 1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$,

iii) $(2, k-1) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >))$,

iv) $(2(k-2), k-2) \notin E(< \partial f >)$,

v) $(0, 2(k-1)) \in E(< \partial f >)$,

teremos necessariamente

$$(0, 2(k-1)), (1, 2k-3) \in \mathcal{F}r(E(< \partial f >)),$$

e vemos portanto que $E(< \partial f >)$ é tal que

$$\mathbb{Z}_+^2 - E(< \partial f >) = G_\lambda,$$

onde

$$\lambda = (2(k-1), 2k-3, \underbrace{k-1, \ldots, k-1}_{2k-5 \text{ vezes}}, 1).$$

Observação. Notemos que quando $k = 3$, teremos $\lambda = (4, 3, 2, 1)$.

Seja agora $\varepsilon = (\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1})$ e consideremos a $(k+1)$-upla

$$\theta_\varepsilon = (1, 1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}, 1), \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_k = 1,$$

e a função

$$f_{\theta_\varepsilon}(x, y) = x^{2k} + x^{2(k-1)}y + (\sum_{j=2}^{k-1} \varepsilon_j x^{2(k-j)} y^j) + y^k.$$

Acabamos de mostrar que

$$f_{\theta_0}(x, y) = x^{2k} + x^{2(k-1)}y + y^k$$

é SQH$(2k; 1, 2)$, com

$$\mu(f_{\theta_0}) = (k-1)(2k-1),$$

onde $\theta_0 = (1, 1, 0, \ldots, 0, 1)$.

Agora, pelo Teorema de Damon([6]), sabemos que para $\varepsilon \sim 0$ teremos

$$\mu(f_{\theta_\varepsilon}) \leq \mu(f_{\theta_0}).$$

Daí, como $f_{\theta\varepsilon}$ é QH$(2k; 1, 2)$, teremos para $\varepsilon \sim 0$ que f_{θ_ε}é SQH$(2k; 1, 2)$, e portanto

$$\mu(f_{\theta_\varepsilon}) = (k-1)(2k-1) = \mu(f_{\theta_0}).$$

Agora, se mostrarmos que

$$(2(k-1)-(i+1), i) \notin E(<\partial f_{\theta_\varepsilon}>),$$

para $i = 0, 1, \ldots, 2k-3$, estaremos provando que

$$\mathbb{Z}^2_+ - E(<\partial f_{\theta_\varepsilon}>) = \mathrm{G}_\lambda,$$

para $\lambda = (2(k-1), 2k-3, \ldots, 2, 1)$, pois este é o único subconjunto de $\mathbb{Z}^2_+$ do tipo $G_{\tilde{\lambda}}$ possuindo $(k-1)(2k-1)$ elementos, "contendo $G_{(2k-3,2(k-2),\ldots,2,1)}$ em seu interior".

Para efeito de simplificação, escrevamos f ao invés de f_{θ_ε}. Logo, teremos que mostrar que

i) $(2(k-s)-3, 2s) \notin E(<\partial f>)$, para $1 \leq s \leq k-2$,

ii) $(2(k-s-2)-3, 2s+1) \notin E(<\partial f>)$, para $1 \leq s \leq k-2$,

pois $(2k-3, 0), (2(k-2), 1) \notin E(<\partial f>)$, claramente.

Primeiramente, observemos que o fato de f ser $\mathrm{QH}(2k; 1, 2)$ implica $\partial_1 f$ ser $\mathrm{QH}(2k-1; 1, 2)$ e $\partial_2 f$ ser $\mathrm{QH}(2(k-1); 1, 2)$. Logo, fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases},$$

teremos

$$\partial_1 f = at^{2k-1}, \quad \partial_2 f = bt^{2(k-1)}.$$

Agora, no caso i), como queremos mostrar que

$$(2(k-s)-3, 2s) \notin E(<\partial f>), \ 1 \leq s \leq k-2,$$

deveremos tentar obter o monômio

$$\alpha x^{2(k-s)-3}y^{2s}$$

através de $\partial_1 f$ e $\partial_2 f$, de forma a esgotar todas as possibilidades.

Agora, usando a mudança de variáveis acima, temos que

$$x^{2(k-s)-3}y^{2s} = t^{2(k+s)-3},$$

e portanto deveremos multiplicar $\partial_1 f$ por $\beta t^{2(s-1)}$ e $\partial_2 f$ por γt^{2s-1} de forma a obter o monômio desejado, i.e.,

$$(\beta t^{2(s-1)})(at^{2k-1}) + (\gamma t^{2s-1})(bt^{2(k-1)}).$$

Agora, "desomogeneizando" estes monômios, obtemos

$$(\sum_{i=0}^{s-1} a_i x^{2(s-1-i)}y^i)\partial_1 f + (\sum_{i=0}^{s-1} b_i x^{2(s-i)-1}y^i)\partial_2 f.$$

Lembramos que

$$< \partial f > = < 2kx^{2k-1} + 2(k-1)x^{2k-3}y + \sum_{j=2}^{k-1} 2(k-j)\varepsilon_j x^{2(k-j)-1}y^j,$$
$$x^{2(k-1)} + 2\varepsilon_2 x^{2(k-2)}y + \sum_{j=2}^{k-1}(j+1)\varepsilon_{j+1}x^2(k-j-1)y^j > .$$

Logo, temos que

$$(\sum_{i=0}^{s-1} a_i x^{2(s-1-i)}y^i)\partial_1 f = c_0 x^{2(k+s)-3} + c_1 x^{2(k+s)-5}y + \cdots + c_{(s-1)+(k-1)}xy^{s+k-2},$$

onde $c_r = \sum_{i=0}^{s-1} a_i 2(k-r+i)\varepsilon_{r-i}$, com

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2s-1 \\ 1 \leq s \leq k-2 \end{cases},$$

pois os monômios com coeficiente $c_{2s+j},\ j \geq 0$ não nos interessam, pelo fato de sua potência em y ser maior que $2s-1$.

Da mesma forma, temos que

$$(\sum_{i=0}^{s-1} b_i x^{2(s-i)-1} y^i)\partial_2 f = d_0 x^{2(k+s)-3} + d_1 x^{2(k+s)-5} y + \cdots + d_{(s-1)+(k-1)} x y^{s+k-2},$$

onde $d_r = \sum_{i=0}^{s-1} b_i (r-i+1)\varepsilon_{r-i+1}$, com

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2s-1 \\ 1 \leq s \leq k-2 \end{cases},$$

Observemos agora que estamos considerando

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \epsilon_1 = \varepsilon_k = 1, \\ \varepsilon_{-t} = 0,\ t = 1, 2, \ldots \\ \varepsilon_{k+j} = 0,\ j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

No caso ii), queremos mostrar que

$$(2(k-s-2), 2s+1) \notin E(<\partial f>),\ 1 \leq s \leq k-2,$$

e raciocinando da mesma forma que no caso i), vemos que será necessário fazermos

$$(\sum_{i=0}^{s-1} \bar{a}_i x^{2(s-i)-1} y^i)\partial_1 f + (\sum_{i=0}^{s} \bar{b}_i x^{2(s-i)} y^i)\partial_2 f.$$

Logo, teremos

$$(\sum_{i=0}^{s-1} \bar{a}_i x^{2(s-i)-1} y^i)\partial_1 f = \bar{c}_0 x^{2(k+s-1)} + \bar{c}_1 x^{2(k+s-2)} y + \cdots + \bar{c}_{(s-1)+(k-1)} x^2 y^{s+k-2},$$

onde $\bar{c}_r = \sum_{i=0}^{s-1} \bar{a}_i 2(k-r+i)\varepsilon_{r-i}$, com

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2s \\ 1 \leq s \leq k-2 \end{cases},$$

pois os monômios com coeficiente $\bar{c}_{2s+1+j}$, $j \geq 0$ não nos interessam, pelo fato de sua potência em y ser maior que $2s$.

Da mesma forma, temos que

$$(\sum_{i=0}^{s} \bar{b}_i x^{2(s-i)} y^i)\partial_2 f = \bar{d}_0 x^{2(k+s-1)} + \bar{d}_1 x^{2(k+s-2)} y + \cdots + \bar{d}_{s+(k-1)} y^{s+k-1},$$

onde $\bar{d}_r = \sum_{i=0}^{s} \bar{b}_i (r-i+1)\varepsilon_{r-i-1}$, com

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2s \\ 1 \leq s \leq k-2 \end{cases},$$

Da mesma forma, estamos considerando

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_k = 1, \\ \varepsilon_{-t} = 0, \ t = 1, 2, \ldots \\ \varepsilon_{k+j} = 0, \ j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Observemos agora que teremos no caso (i) um sistema linear homogêneo com $2s$ equações e $2s$ incógnitas, onde as $2s$ incógnitas são $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{s-1}$, e a matriz dos

coeficientes é dada por:

$$M_{2s} = \begin{pmatrix} 2k\varepsilon_0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 2(k-1)\varepsilon_1 & 2k\varepsilon_0 & \dots & 0 & 2\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & & & \\ 2(k-j)\varepsilon_j & 2(k-j+1)\varepsilon_{j-1} & \dots & 0 & (j+1)\varepsilon_{j+1} & j\varepsilon_j & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & & & \\ 2(k-2s+1)\varepsilon_{2s-1} & 2(k-2s+2)\varepsilon_{2(s-1)} & \dots & 0 & (2s)\varepsilon_{2s} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$(m_{ij}) = \begin{cases} 2(k-i+j)\varepsilon_{i-j} & \text{se} \quad 1 \leq j \leq s \\ (i-j+s+1)\varepsilon_{i-j+s+1} & \text{se} \quad s+1 \leq j \leq 2s \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 2s$$

Da mesma forma, no caso (ii) teremos

$$(\bar{m}_{ij}) = \begin{cases} 2(k-i+j)\varepsilon_{i-j} & \text{se} \quad 1 \leq j \leq s \\ (i-j+s+1)\varepsilon_{i-j+s+1} & \text{se} \quad s+1 \leq j \leq 2s+1 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 2s+1$$

Logo, temos de provar que estas matrizes têm como determinante polinômios não nulos.

Temos que como o número de raízes de um polinômio não nulo é um número finito, e para cada $k \in \mathbb{N}$ teremos um número finito de determinantes$(f_{k,2s}(x),\ f_{k,2s+1}(x))$, segue que a quantidade de raízes de todos os determinantes não nulos para $k \geq 4$ será enumerável. Portanto, teremos necessariamente que se todos os determinantes$(f_{k,2s}(x),\ f_{k,2s+1}(x))$ forem não nulos, existirá uma quantidade não enumerável de números ω tais que $f_{k,2s}(\omega) \neq 0, f_{k,2s+1}(\omega) \neq 0,\ \forall (k,s)$.

Desta forma, o sistema linear homogêneo terá apenas a solução trivial, provando assim que

i) $(2(k-s)-3, 2s) \notin E(<\partial f>)$, para $1 \leq s \leq k-2$,

ii) $(2(k-s-2)-3, 2s+1) \notin E(<\partial f>)$, para $1 \leq s \leq k-2$.

Façamos agora a seguinte simplificação:

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 \text{ se } j \in \{0, 1, k\} \\ \varepsilon \text{ se } j \in \{\lfloor \frac{k}{2^i} \rfloor;\ 1 \leq i \leq r\}, \text{onde } r = máx\{n \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{k}{2^n} \rfloor \geq 2\} \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, consideraremos daqui em diante

$$f(x,y) = x^{2k} + x^{2(k-1)}y + (\sum_{j=1}^{r} \varepsilon x^{2(k-\lfloor \frac{k}{2^j} \rfloor)} y^{\lfloor \frac{k}{2^j} \rfloor}) + y^k,$$

onde $r = máx\{n \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{k}{2^n} \rfloor \geq 2\}$.

Fazemos agora a seguinte conjectura:

Conjectura 12.1(*) *Existe* $\varepsilon \sim 0$ *tal que*

$$E(M_2^{2(k-1)}) = E(< \partial f >),$$

onde $f(x,y) = x^{2k} + x^{2(k-1)}y + (\sum_{j=1}^{r} \varepsilon x^{2(k-\lfloor \frac{k}{2^j} \rfloor)} y^{\lfloor \frac{k}{2^j} \rfloor}) + y^k,$

com $r = máx\{n \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{k}{2^n} \rfloor \geq 2\}$.

Observação. M. Polezzi e T. Nóbrega fizeram um programa no GAP(Groups, Algorithms and Programs) para calcular

$$det(m_{ij}),\ \ det(\bar{m}_{ij}),$$

para $4 \leq k \leq 70$, gastando para isso aproximadamente 19 horas de C.P.U. de uma Work Station (Power PC IBM).

Afortunadamente, todos os determinantes (tomando $\omega = 1$) foram **não nulos**, e além disso os últimos determinantes possuiam mais de 270 dígitos.

Mais adiante, anexaremos o programa feito.

Referências

[1] G. Almkvist, *Invariants, mostly old ones*, Pac. Journal of Math., vol.86, No. 1, 1980, 1-13.

[2] G.E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[3] V.I.Arnol'd, *Normal forms of functions in neighbourhoods of degenerate critical points*, Russian Mathematical Surveys 29:2 (1974), 10-50.

[4] V.I. Arnol'd, *Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weil groups* A_k, D_k, E_k *and Lagrange singularities*, Functional. Anal. Appl. vol. 6, No. 4, (1972), 254-272.

[5] G. Berman, K.D. Fryer, *Introduction to Combinatorics*, Academic Press, 1972.

[6] J. Damon,

[7] J. Damon, A. Galligo, *A Topological invariant for stable map germs*, Inventiones Mathematicae 32, 1976, 1-51.

[8] L.E. Dickson, *History of The Theory of Numbers, vol.1*, New York, 1966.

[9] T. Gaffney, *Proprieties of finitely determined germs*, Ph.D. Thesis, Brandeis University, Waltham, Massachusetts, June, 1975.

[10] J.M. Gandhi, K.S. Williams, *On Certains Sums of Fractional Parts*, Archiv der Mathematik 25, 1974, 41-44.

[11] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics - A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[12] A.G. Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Inventiones Mathematicae 32, 1976, 1-31.

unesp

[13] J.N. Mather, *Stability of C^∞ mappings III*, Publ. Sc. IHES 35, (1969), 127-156.

[14] S. Mima, *On the Milnor number of a generic hyperplane section*, Journal Math. Soc. Japan, vol. 41, No. 4, 1989, 709-724.

[15] M.Oka, *On the stability of the Newton-Boundary*, Proc. of Symp. in Pure Mathematics, vol. 40, (1983), Part 2, 259-268.

[16] M. Polezzi, *A Geometrical Method for Finding an Explicit Formula for the Greatest Common Divisor*, The American Mathematical Monthly, volume 104, number 5, 1997, 445-446.

[17] K. Saito, *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*, Inventiones Mathematicae, 14 (1971), 123-142.

[18] N. J. A. Sloane, *A Handbook of Integer Sequences*, Academic Press, 1973.

[19] W.M. Tadini, *Escadas de Ideais e Polígonos de Newton*, V Semana da Matemática (Mini-curso), IBILCE/UNESP, 1993.

[20] W.M. Tadini, *Sobre alguns invariantes diferenciáveis de Germes de Funções C^∞*, Tese de Doutorado, I.C.M.S.C., 1980.

[21] W.M. Tadini, *Extensões Jacobianas de Ideais*, Naturália 1:99-130, 1975, Fac. Fil. Ciênc. e Letras de S. José do Rio Preto - S.P.

[22] W.M.Tadini, *On Boardman Symbol of the sum of two germs*, Rev. Mat. Estat., São Paulo, v. 9, 1991, 69-74.

```
mar:=function(n)
local k,s,x,y,A,B,D,E,r,i,j,n,l1,l2,l3,l4,m,Rx;
 x:= Indeterminate(Rationals);
 x.name:= "x";
 Rx:= LaurentPolynomialRing(Rationals);
for k in [4..n] do
 l1:=[];
 for i in [1..n] do
  y:=Int(k/(2^i));
  if y>1 then
  Append(l1,[i]);
  fi;
 od;
  r:=Maximum(l1);
  l2:=List([1..r],i->Int(k/(2^i)));
  ##Print(l2);
  for s in [1..k-2] do
  ######################################################################
   A:=[];
   l4:=[];
   for i in [1..2*s] do
    l3:=[];
     for j in [1..s] do
      if i-j in [0,1,k]  then Append(l3,[2*(k-i+j)]);
      fi;
      if i-j in l2 then Append(l3,[2*(k-i+j)]);
      fi;
      if Intersection([i-j],[0,1,k])=[] and Intersection([i-j],l2)=[]
      then Append(l3,[0]);
      fi;
     od;
       for j in [s+1..2*s] do
      if i-j+s+1 in [0,1,k] then Append(l3,[i-j+s+1]);
      fi;
      if i-j+s+1 in l2 then Append(l3,[(i-j+s+1)]);
      fi;
      if Intersection([i-j+s+1],[0,1,k])=[] and
      Intersection([i-j+s+1],l2)=[] then Append(l3,[0]);
      fi;
       od;
     Append(A,[l3]);
    od;
     ##Print(A);
     Append(l4,[DeterminantMat(A)]);
     Print(l4);
     if l4=[0] then
     Print([k,2*s]);
     fi;
     Print("    ");
  ######################################################################
   A:=[];
   l4:=[];
   for i in [1..2*s+1] do
    l3:=[];
     for j in [1..s] do
      if i-j in [0,1,k] then Append(l3,[2*(k-i+j)]);
      fi;
      if i-j in l2 then Append(l3,[2*(k-i+j)]);
      fi;
      if Intersection([i-j],[0,1,k])=[] and Intersection([i-j],l2)=[]
      then Append(l3,[0]);
```

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

```
      fi;
     od;
      for j in [s+1..2*s+1] do
     if i-j+s+1 in [0,1,k] then Append(l3,[i-j+s+1]);
     fi;
     if i-j+s+1 in l2 then Append(l3,[i-j+s+1]);
     fi;
     if Intersection([i-j+s+1],[0,1,k])=[] and
     Intersection([i-j+s+1],l2)=[] then Append(l3,[0]);
     fi;
      od;
     Append(A,[l3]);
    od;
     ##Print(A);
     Append(l4,[DeterminantMat(A)]);
     Print(l4);
     if l4=[0] then
     Print([k, 2*s+1]);
     fi;
     Print("    ");

  od;
od;

  end;
```