

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE BAURU
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU

MARIO CESAR ITO

**Avaliação Numérico-Experimental da
Convecção Natural em uma Placa Plana
Horizontal**

Bauru, SP
2020

MARIO CESAR ITO

Avaliação Numérico-Experimental da Convecção Natural em uma Placa Plana Horizontal

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, no programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Vicente Luiz Scalon

Bauru, SP

2020

Ito, Mario Cesar.

Avaliação Numérico-Experimental da Convecção
Natural em uma Placa Plana Horizontal / Mario Cesar
Ito, 2020

131 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Vicente Luiz Scalon

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2020

1. Convecção Natural. 2. OpenFOAM. 3. Placa plana
horizontal. I. Universidade Estadual Paulista.
Faculdade de Engenharia.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE MARIO CESAR ITO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 27 dias do mês de agosto do ano de 2020, às 14:30 horas, no(a) Via Sistema de videoconferência e outras ferramentas de comunicação a distância, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. VICENTE LUIZ SCALON - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. MAURÍCIO SILVA FERREIRA do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Escola Politécnica - USP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de MARIO CESAR ITO, intitulada **AVALIAÇÃO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DA CONVECÇÃO NATURAL EM UMA PLACA PLANA HORIZONTAL**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. VICENTE LUIZ SCALON

Prof. Dr. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA p/

Prof. Dr. MAURÍCIO SILVA FERREIRA p/

Agradecimentos

Agradeço imensamente à minha família, em especial aos meus pais, Maria Inês Duarte Ito e Mario Hideki Ito, por todo apoio que me deram até hoje, em todas as minhas escolhas e ao meu irmão, Willian Eduardo Ito, por sempre ser uma inspiração nos estudos e na busca por novos conhecimentos.

Agradeço à minha noiva, Dandara Peraro de Sousa, por ser uma parceira que sempre esteve ao meu lado e me manteve nos trilhos, fornecendo todo suporte, discussões, apoio e amor necessários para conclusão desse trabalho.

Agradeço ao meu orientador Professor Dr. Vicente Luiz Scalon, que sempre se mostrou disponível e me guiou e deu suporte em todas as etapas da minha graduação e mestrado.

A Faculdade de Engenharia de Bauru por permitir que eu passasse boa parte dos últimos anos dentro dos laboratórios e salas de aula.

A Capes pelo suporte financeiro.

Aos meus amigos da graduação e pós-graduação por todas as conversas produtivas e encorajadoras.

Epígrafe

*“A aparente dificuldade pode ser só mais um passo para o sucesso.”
(Masaharu Taniguchi)*

Resumo

Ito, M. C., AVALIAÇÃO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DA CONVECÇÃO NATURAL EM UMA PLACA PLANA HORIZONTAL, Bauru, Faculdade de Engenharia, UNESP – Universidade Estadual Paulista, 2020, 131 p., Dissertação de Mestrado.

Este estudo simula a convecção natural em uma placa plana horizontal com temperatura uniforme, através do software livre OpenFOAM e valida as simulações de CFD experimentalmente. Modelos bidimensionais foram utilizados para resolver o problema, junto aos modelos de turbulência $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$ SST, para uma faixa de Rayleigh (Ra_{Lc}) de $8,015 \times 10^4$ à $8,015 \times 10^9$. O aparato experimental utilizado para validação dos resultados numéricos consiste em uma placa aquecida por resistores, onde a temperatura foi mantida constante através de um regulador de tensão. O experimento foi reproduzido para valores de Rayleigh (Ra_{Lc}), de $2,5 \times 10^6$ e $5,2 \times 10^6$. A visualização do escoamento na placa, no procedimento experimental foi realizada utilizando o efeito Schlieren. Com efeito, correlações de potência do tipo $\overline{Nu_{Lc}} = C Ra_{Lc}^m$ entre os dados numéricos foram levantadas e comparações com os resultados experimentais e os resultados disponíveis na literatura, indicaram uma boa previsão do modelo numérico bem como uma extensão da faixa de aplicação das correlações existentes para convecção natural em placas planas horizontais.

Palavras-chave: *Convecção natural. OpenFOAM. Placa plana horizontal.*

Abstract

Ito, M. C., NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF NATURAL CONVECTION OVER A HORIZONTAL FLAT PLATE, Bauru, Engineering College, UNESP – São Paulo State University, 2020, 131 p., Master Dissertation.

This study simulates the natural convection over a horizontal flat plate with a uniform temperature using the benefit of the open source OpenFOAM software and forward validates the numerical results experimentally. Bidimensional models were used to model the problem and the $\kappa - \varepsilon$ and $\kappa - \omega$ SST turbulence models also were used, for a Rayleigh (Ra_{Lc}) range from $8,015 \times 10^4$ to $8,015 \times 10^9$. The experimental apparatus used to validate the numerical results, is composed by a plate heated by a resistor heater, where the temperature of the surface was maintained constant by using a voltage regulator. The experimental procedure was replicated for Rayleigh number (Ra_{Lc}) of $2,5 \times 10^6$ and $5,2 \times 10^6$. The visualization of the flow over the plate in the experimental procedure was done using the Schlieren effect. Therefore, power law correlations, like $\overline{Nu_{Lc}} = C Ra_{Lc}^m$, were used to fit the numerical results and further comparison with experimental results and results available in the literature, shows that the numerical model did good predictions and extended the range of Ra_{Lc} with the correlations for natural convection over a horizontal plate are applicable.

Key words: *Natural convection. OpenFOAM. Horizontal flat plate*

Sumário

Agradecimentos	i
Epígrafe	ii
Resumo.	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Simbologia	xvi
1 Introdução	1
1.1 Objetivos.	6
2 Revisão Bibliográfica.	7
2.1 Trabalhos experimentais.	7
2.2 Trabalhos numéricos	15
3 Materiais e Métodos	20
3.1 Equações de Conservação e modelos matemáticos	20
3.1.1 Equações de conservação básicas	20
3.1.2 Modelos de Turbulência	22
3.1.3 Aproximação de Boussinesq	27
3.2 Método dos volumes finitos	27
3.2.1 Termo difusivo	30
3.2.2 Termo advectivo	31
3.2.3 Termo fonte	33
3.2.4 Termo temporal	33
3.2.5 Acoplamento pressão-velocidade	34
3.3 Análise numérica	38
3.3.1 Problema físico	38
Caso 2D	38
3.3.2 Condições de contorno	40
3.3.3 Estudo de domínio e malha	43
Estudo de domínio	43

	Estudo de malha	44
	Caso 3D	46
	Fenômenos físicos associados ao problema 3D	47
	Condições de contorno	47
	Malha do modelo 3D	50
3.3.4	Verificação do y^+	51
3.3.5	Crítérios e configurações das simulações	52
3.4	Análise experimental	54
3.4.1	Aparato experimental	54
3.4.2	Instrumentação	57
3.4.3	Visualização do escoamento	58
4	Resultados	63
4.1	Resultados das simulações	63
4.1.1	Resultados do estudo de domínio e de malha	63
4.1.2	Simulação bidimensional	66
	Modelo de Turbulência $\kappa - \varepsilon$	70
	Modelo de Turbulência $\kappa - \omega$ SST	73
4.1.3	Simulação tridimensional	79
	Estimativa da potência	82
4.2	Resultado do procedimento experimental	85
4.2.1	Caso 1	85
4.2.2	Caso 2	86
4.2.3	Visualização do escoamento	90
4.3	Correlações	95
5	Conclusões	99
5.1	Trabalhos futuros	100
	Referências	107
	Apêndice	108
A	Propagação de Incertezas	109
A.1	Exemplo : Cálculo da incerteza de $P, \dot{Q}_{rad}, \dot{Q}_{conv}, \dot{Q}_{tot}, \Delta T, \bar{h}$ e $\overline{Nu}$	111

Lista de Figuras

1	Mecanismos de transferência de calor. (a) Condução. (b) Convecção. (c) Radiação	2
2	Publicações no banco de dados da Scopus que fazem referência ao OpenFOAM até 02 de fevereiro de 2020.	3
3	Exemplo de pipeline para simulação em CFD. (a) Geometria. (b) Malha. (c) Resultados	4
4	Particionamento do escoamento em placas planas horizontais de diferentes geometrias para $Ra \simeq 2 \times 10^6$	8
5	Escoamento sobre a superfície superior de uma placa horizontal -90° . (a) $Ra_L = 5,89 \times 10^7$. (b) $Ra_L = 3,55 \times 10^{10}$	9
6	Padrões de escoamento por convecção natural em placas planas horizontais. (a) Padrão de escoamento paralelo. (b) Padrão de escoamento radial.	11
7	Linhas de corrente para o escoamento tridimensional em uma placa plana horizontal a uma temperatura uniforme	12
8	Visualização do escoamento com auxílio de fumaça em uma placa plana horizontal para $Ra_W = 4,43 \times 10^5$	13
9	Deposição de cobre no caso da placa a -90° , horizontal virada para cima.	14
10	Contorno de temperatura para placa de 15cm x 30cm a 80°C . (a) Termografia óptica. (b) Schlieren com fundo orientado. (c) Simulação 2D. (d) Simulação 3D.	14
11	Curvas de iso-temperaturas de uma placa uniformemente aquecida na parte superior e inferior. (a) Variação da inclinação. (b) Variação da magnitude de Pr.	16
12	Contorno de velocidade e temperatura para $Gr_L = 2 \times 10^6$. (a) Velocidade adimensional. (b) Temperatura adimensional	17
13	Contorno da magnitude velocidade para $Gr_L = 10^6$, variação de ângulos de 0° a 15°	18
14	Resultados de pressão para $Gr_L = 10^6$ e ângulos de 0° e 90°	19
15	Volume de controle diferencial com propriedade Φ sendo transportada.	21
16	Comportamento típico da velocidade em um escoamento turbulento medido por um sensor pontual.	23
17	Esquema de apresentação do método dos volumes finitos	28

18	Nomenclatura utilizada para discretização.	29
19	Nomenclatura utilizada para discretização 3D.	30
20	Representação de problema advectivo 1D.	32
21	Algoritmo SIMPLE	37
22	Esquema da geometria do problema 2D	38
23	Esquema da malha do problema 2D	44
24	Estudo do tamanho do domínio.	45
25	Estudo de malha.	46
26	Domínio da simulação 3D.	46
27	Dimensões do domínio 3D.	47
28	Fronteiras do domínio 3D. (a)Fronteiras I. (b) Fronteiras II. (c) Fronteiras III	48
29	Malha do domínio 3D.	51
30	Detalhes da malha próximo a placa. (a) Modelo 2D. (b) Modelo 3D	52
31	Aparato experimental.	54
32	Materiais do aparato experimental.	55
33	Detalhes do aparato experimental. (a) Corte na placa. (b) Detalhes do interior. . . .	56
34	Divisão da placa de alumínio.	56
35	Localização dos sensores DS18B20 no aparato experimental.	58
36	Amperímetro de alicate Minipa ET-3166.	59
37	Termômetro IR MX4-Raygner	59
38	Aparato para visualização do escoamento através do efeito Schlieren	60
39	Posicionamento dos equipamentos para se obter o efeito Schlieren	60
40	Espelho de 8"utilizado para reproduzir o efeito Schlieren.	61
41	Lâmina e fonte de luz utilizadas para reproduzir o efeito Schlieren.	61
42	Setup de visualização completo. (a) Lateral. (b) Frontal	62
43	Localização dos gráficos da figura 44 foi plotada.	64
44	Resultados do estudo de domínio. (a) Temperatura ao longo do domínio para $y/H = 0,5$. (b) Magnitude da velocidade ao longo do domínio para $y/H = 0,5$	64
45	Estudo de convergência de malha.	65
46	Tempos de simulação para os modelos 2D $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \Omega$ SST.	66
47	Oscilações no escoamento da placa para $Ra_L = 10^9$, isotemperaturas.	68
48	Oscilações no escoamento da placa para $Ra_L = 10^9$, campo de temperaturas e vetores de velocidade	69
49	Curvas de isotemperaturas para as simulações 2D com modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$	71
50	Contorno de velocidades para simulação 2D $\kappa - \varepsilon$. (a) $10^4 \leq Ra_L \leq 10^6$. (b) $10^7 \leq Ra_L \leq 10^9$	72
51	Comparação dos resultados de $\overline{Nu_L}$ dos modelos $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$ SST.	73

52	Curvas de isotemperaturas para as simulações 2D com modelo de turbulência $\kappa-\omega$ SST.	75
53	Espessura da camada limite térmica para $Ra_L = 10^9$. Resultados para modelos de turbulência $\kappa-\varepsilon$ e $\kappa-\omega$ SST.	75
54	Subida da pluma térmica para $Ra_L = 10^9$. Resultados para modelos de turbulência $\kappa-\varepsilon$ e $\kappa-\omega$ SST.	76
55	Contorno de velocidades para simulação 2D $\kappa-\omega$ SST. (a) $10^4 \leq Ra_L \leq 10^6$. (b) $10^7 \leq Ra_L \leq 10^9$	77
56	Comparação entre os resultados do modelo $\kappa-\varepsilon$, $\kappa-\omega$ SST e as correlações de Kitamura et al. (2015)	78
57	Trajetória do ar próximo a placa.	79
58	Contorno de velocidade para $Z=0,075m$, junto com os vetores de velocidade e a temperatura da placa.	80
59	Componente de velocidade Y para $Z=0,075m$	80
60	Contorno de temperatura para $Z = 0,075m$ e placa com contorno de fluxo de calor. .	81
61	Curvas isotérmicas do domínio 3D.	81
62	Divisão das regiões para levantamento da potência	82
63	Fluxo de calor local para $Z = 0,075m$ e fluxo de calor médio para cada $0,04m$ da placa.	83
64	Estimativa da potência necessária para obter uma temperatura uniforme na placa. .	83
65	Comparativo dos resultados da simulação 3D com a simulação 2D.	84
66	Temperaturas da placa medidas pelos DS18B20 ao longo do tempo.	85
67	Resistências, tensões, temperaturas e potência para as 5 regiões da placa. Caso 1 . .	86
68	Resistências, tensões, temperaturas e potência para as 5 regiões da placa. Caso 1 . .	87
69	Resistências, tensões, temperaturas e potência para as 5 regiões da placa. Caso 2 . .	88
70	Comparação das potências dissipadas experimentalmente no Caso 2 e as calculadas pela simulação.	89
71	Região da simulação 3D, onde as imagens da camada limite térmica foram retirada. .	90
72	Comparação das camadas limites térmica para $x = 0,00377m$.(a) Experimental. (b) CFD	92
73	Comparação das camadas limites térmica para $x = 0,005m$.(a) Experimental. (b) CFD	93
74	Comparação das camadas limites térmica para $x = 0,01m$.(a) Experimental. (b) CFD .	94
75	Correlações de $\overline{Nu}_{Lc}=f(Ra_{Lc})$ derivadas da simulação 2D e modelo de turbulência $\kappa-\omega$ SST.	95
76	Correlações de $\overline{Nu}_L=f(Ra_L)$ derivadas da simulação 2D e modelo de turbulência $\kappa-\omega$ SST.	96

77	Comparação dos resultados de $\overline{Nu}_{Le}$. (a) Caso 1. (b) Caso 2	97
78	Retângulo com medidas x e y com erros $\pm\Delta x$ e $\pm\Delta y$ respectivamente.	109

Lista de Tabelas

1	Constantes empíricas do modelo $\kappa - \varepsilon$	25
2	Constantes empíricas do modelo $\kappa - \omega$ SST	26
3	Legenda com os nomes dos δ	29
4	Coeficientes da discretização do termo difusivo.	31
5	Valores das propriedades termo-físicas utilizadas nas simulações 2D.	39
6	Valores de gravidade utilizados nas simulações 2D.	40
7	Condições de contorno para simulações 2D.	42
8	Condições iniciais dos problemas 2D.	43
9	Estudo de convergência de malha.	45
10	Condições de contorno para o caso 3D.	49
11	Condições iniciais dos problemas 3D.	50
12	Discretização dos Operadores Matemáticos	53
13	Parâmetros do algoritmo para acoplamento pressão-velocidade.	53
14	Parâmetros do algoritmo para solução de sistemas lineares.	53
15	Coeficientes de sub-relaxação.	54
16	Valores das resistências utilizadas no procedimento experimental	57
17	y^+ para $Ra_L = 10^9$ para os casos 2D.	67
18	Resultados de taxa de transferência de calor, h e Nusselt para o caso 2D $\kappa - \varepsilon$	70
19	Resultados de $\overline{Nu}_{Lc}$ para o caso 2D $\kappa - \varepsilon$	71
20	Resultados de taxa de transferência de calor, h médio e Nusselt médio para o caso 2D $\kappa - \omega$ SST.	73
21	Resultados de $\overline{Nu}_{Lc}$ para o caso 2D $\kappa - \omega$ SST	74
22	Erros relativos dos resultados simulados.	78
23	y^+ para o modelo 3D.	79
24	Valores experimentais utilizados para o cálculo de Nu_{Lc} . Caso I	86
25	Valores experimentais utilizados para o cálculo de Nu_{Lc} . Caso 2	87
26	Espessuras da camada limite térmica antes da pluma.	91
27	Coeficientes para $\overline{Nu}_{Lc}=f(Ra_{Lc})$	98
28	Coeficientes para $\overline{Nu}_L=f(Ra_L)$	98

29	Expressões para o cálculo de propagação de incertezas de P , $\dot{Q}_{rad}$, $\dot{Q}_{conv}$, $\dot{Q}_{tot}$, ΔT , $\bar{h}$ e $\overline{Nu}$	111
----	--	-----

Simbologia

Abreviações

2D Bidimensional

3D Tridimensional

CFD *Computational Fluid Dynamics*

EDP Equação diferencial parcial

LES *Large Eddy Simulations*

OpenFOAM *Open source Field Operation And Manipulation*

RANS *Reynolds-Average Navier Stokes*

SIMPLE *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*

SST *Menter's shear stress transport*

Símbolos Gregos

α Difusividade Térmica [m^2/s]

β Coeficiente de expansão térmica [$1/K$]

Δ Variação

δ Distância [m]

ϵ Emissividade

Γ Difusividade [m^2/s^2]

κ Energia cinética turbulenta [m^2/s^2]

μ Viscosidade dinâmica [$N \cdot s/m^2$]

ν Viscosidade cinemática [m^2/s]

ω	Taxa específica de dissipação da energia cinética turbulenta $[1/s]$
ϕ	Propriedade transportada exemplo
ψ	Termo de dissipação de energia $[W]$
ρ	Massa específica $[kg/m^3]$
σ	Constante de Stefan–Boltzmann $[W/(m^2 \cdot K^4)]$
τ	Tensão $[Pa]$
ε	Taxa de dissipação da energia cinética turbulenta $[m^2/s^3]$

Subscrito

∞	Ambiente
ϕ	Propriedade ϕ
L	Comprimento da placa
L_c	Comprimento característico
0	Referência
c	Característico
conv	Convecção
E	Ponto leste
e	Face leste
rad	Radiação
s	Superfície
t	Turbulenta
W	Ponto oeste
w	Face oeste

Símbolos

U	Vetor velocidade média (U, V, W) $[m/s]$
u	Vetor velocidade (u, v, w) $[m/s]$

$\dot{Q}$	Taxa de transferência de calor $[W]$
$\bar{h}$	Coeficiente de transferência de calor por convecção médio $[W/(m^2 K)]$
$\overline{Nu}$	Número de Nusselt médio
Φ	Escalar ϕ médio
g	aceleração da gravidade $[m/s^2]$
i	Energia Interna específica $[J/kg]$
p	Pressão $[Pa]$
S_i	Termo fonte de energia
S_M	Termo fonte de momento
S_{ij}	Tensor de deformações $[m]$
T	Temperatura $[K]$
U	Média da componente x da velocidade $[m/s]$
u	Componente da velocidade na direção x $[m/s]$
V	Média da componente y da velocidade $[m/s]$
v	Componente da velocidade na direção y $[m/s]$
W	Média da componente z da velocidade $[m/s]$
w	Componente da velocidade na direção z $[m/s]$
x	Coordenada x $[m]$
y	Coordenada y $[m]$
z	Coordenada z $[m]$
A	Área $[m^2]$
C	Constante da curva de regressão
D	Cota do comprimento do domínio utilizado $[m]$
d_e	Diâmetro hidráulico
Gr	Número de Grashof

H	Cota da altura do domínio utilizado $[m]$
k	Condutividade Térmica $[W/(m\ K)]$
L	Comprimento $[m]$
m	Expoente da curva de regressão
P	Perímetro $[m]$
Pot	Potência $[W]$
Pr	Número de Prandtl
q''	Fluxo de Calor $[W/m^2]$
Ra	Número de Rayleigh
W	Largura $[m]$
y^+	Distância adimensional da parede

Sobrescrito

'	Flutuação da média
*	Correção do algoritmo SIMPLE

Capítulo 1

Introdução

Diversos problemas de engenharia envolvem a compreensão da transferência de calor e massa. Dentre eles podemos citar projetos como de um dissipador de calor, um coletor solar, um painel fotovoltaico, o conforto térmico de pessoas em um ambiente, um secador de grãos e diversos outros problemas que os engenheiros necessitam solucionar de forma adequada e viável. (BERGMAN & LAVINE, 2014)

A transferência de calor é a energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperaturas. Ou seja, sempre que existir uma diferença de temperaturas, obrigatoriamente existirá um fluxo de energia migrando da maior temperatura para a menor temperatura. Existem três formas para o calor ser transferido, que são apresentados a seguir.

Condução, onde a energia é transferida por difusão de partículas mais energéticas para partículas menos energéticas devido a interação entre elas.

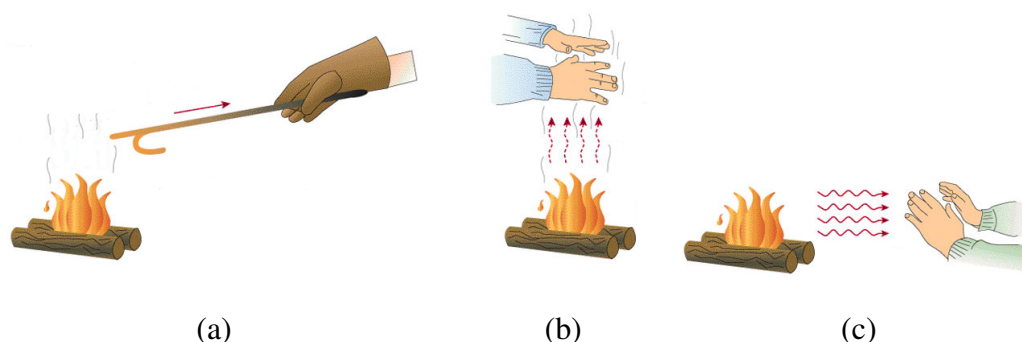
Convecção, onde o movimento macroscópico de um fluido em contato com um outro corpo também influencia na troca energética, somando então a interação microscópica das partículas com o movimento macroscópico do fluido, chamado transporte advectivo.

Radiação, que é a energia emitida pela matéria que se encontra a uma temperatura diferente de zero absoluto. Essa emissão ocorre por ondas eletromagnéticas que se propagam sem necessitar de um meio.

Exemplos clássicos desses mecanismos são apresentados na Figura 1. A Figura 1a apresenta o calor sendo transportado por condução em uma barra. A Figura 1b a mão de uma pessoa sendo aquecida devido a troca de calor por convecção com o ar aquecido que emerge da fogueira. A Figura 1c apresenta a radiação sendo emitida da fogueira para a mão da pessoa aquecendo-a.

Para o entendimento dos mecanismos de transferência de calor utilizam-se as leis básicas de conservação de massa, quantidade de movimento e energia. A partir dessas leis, pode-se modelar qualquer problema aplicado a um determinado sistema. Com efeito, quando esse sistema de equações é resolvido, derivam-se comportamentos como distribuições de temperatura e pressão e campos de velocidade e conseqüentemente as taxas de interesse para a engenharia, como

Figura 1: Mecanismos de transferência de calor. (a) Condução. (b) Convecção. (c) Radiação



Fonte: (BERGMAN & LAVINE, 2014)

coeficientes de arrasto e sustentação e coeficientes de troca de calor.

Os coletores solares para aquecimento de água, estudos de carga térmica em ambientes, dissipação de energia em componentes eletrônicos, processos de fabricação como produção de lâminas de vidro, são exemplos de equipamentos e processos de engenharia que possuem uma geometria simples de estudo, e as leis de conservação podem ser aplicadas para compreender os fenômenos físicos envolvidos.

Porém, a solução dessas equações, mesmo para essas geometrias mais simples, não possuem soluções analíticas diretas. As soluções analíticas desse sistema de equações é obtido somente quando diversas hipóteses simplificadoras são realizadas, a fim de eliminar alguns termos das equações possibilitando a solução direta.

Apesar desse conjunto de equações simplificadas ser limitado, diversos problemas de escoamento podem ser resolvidos dessa forma. Um exemplo de aplicação dessas soluções analíticas são os escoamentos potenciais, onde simplificações de fluido incompressível, irrotacional e invíscido são adotadas para o escoamento (CENGEL & CIMBALA, 2013). Com resultado pode-se obter por exemplo o campo de velocidades ao redor de um aerofólio.

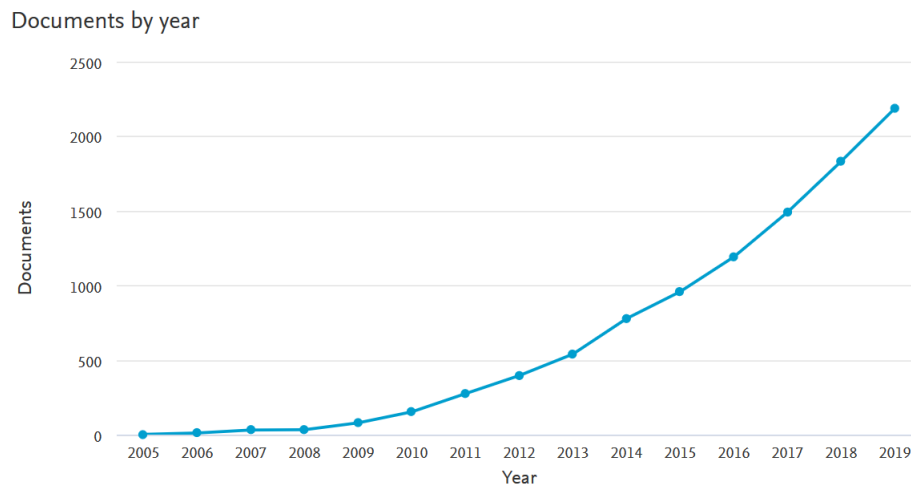
Por outro lado, para problemas mais complexos, nos quais as simplificações comprometem os resultados obtidos, as equações de conservação podem ser resolvidas utilizando métodos numéricos. Diversas metodologias numéricas são utilizadas atualmente para resolver problemas de escoamento, dentre elas destacam-se o método dos volumes finitos, diferenças finitas e método dos elementos finitos.

Diversos softwares comerciais e softwares de código aberto, que utilizam esses métodos numéricos, são utilizados por empresas e instituições de pesquisa para realizar análises dos mais diversos problemas de escoamento que necessitam ser superados ou melhor compreendidos (ESSS, 2014).

O software de CFD de código aberto OpenFOAM criado em 1980 por Henry Weller na Inglaterra e lançado oficialmente como OpenFOAM em 2004 (WIKIPÉDIA, 2019), vem ganhando

espaço tanto no ramo acadêmico quanto nas indústrias e centros de pesquisa. A curva ascendente da Figura 2 mostra a evolução dos artigos publicados que utilizaram o OpenFOAM nos últimos anos.

Figura 2: Publicações no banco de dados da Scopus que fazem referência ao OpenFOAM até 02 de fevereiro de 2020.



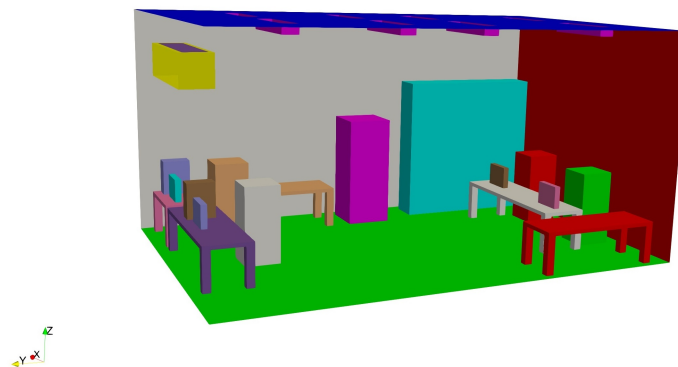
Fonte: Adaptado de Elsevier (2018)

A Figura 3 mostra as etapas que geralmente são seguidas em uma análise numérica em CFD. Na Figura 3a é a etapa de criação e tratamento da geometria a ser estudada, é a representação física do domínio que necessita ser estudado.

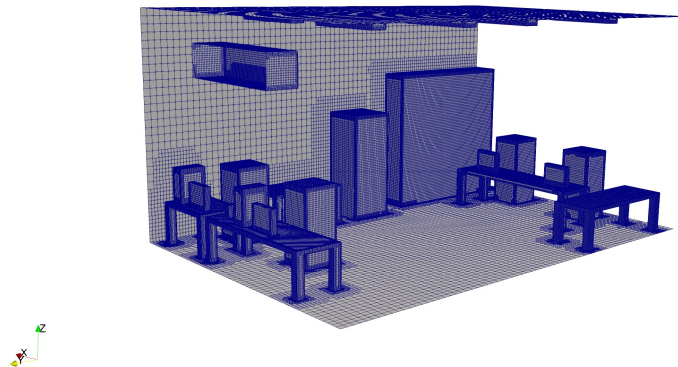
A Figura 3b apresenta a malha, ou discretização desse domínio físico em pequenos volumes, onde as equações de conservação serão aplicadas para cada um desses volumes e a partir do entendimento da conservação em cada volume tem-se a compreensão do domínio como um todo.

Finalmente a Figura 3c mostra alguns possíveis resultados que podem ser obtidos nesse tipo de análise. Nesse caso a Figura 3c mostra a trajetória do fluxo que sai de um aparelho de ar condicionado, viaja pela sala e volta para o retorno do aparelho, essas linhas de trajetória são coloridas com a intensidade da magnitude da velocidade e as superfícies do domínio são coloridas com as intensidades das temperaturas do domínio.

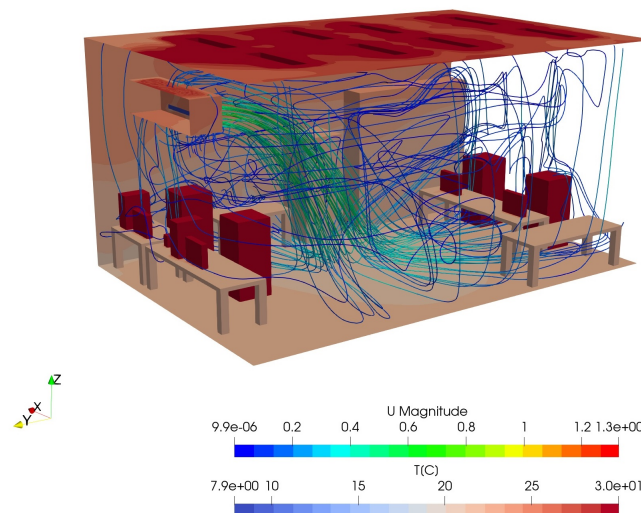
Figura 3: Exemplo de pipeline para simulação em CFD. (a) Geometria. (b) Malha. (c) Resultados



(a)



(b)



(c)

Fonte: Elaborado pelo autor

A convecção natural é uma subdivisão do mecanismo de transferência de calor por convecção, onde nenhum mecanismo atua sobre o fluido gerando um escoamento. Na convecção natural as

forças de empuxo resultante dos gradientes de temperatura são responsáveis por induzir a movimentação macroscópica do fluido possibilitando a troca térmica (BERGMAN & LAVINE, 2014).

A fluidodinâmica computacional se encaixa perfeitamente para o estudo e compreensão de problemas dessa natureza, uma vez que com seu auxílio é possível resolver as equações de conservação para um determinado domínio de interesse, com objetivo de obter as taxas resultantes de transferência de calor.

Os estudos da convecção natural em placas planas horizontais tem registros desde 1965 com os estudos experimentais de Fishenden & Saunders (1965). Atualmente diversas correlações empíricas existem a fim de se quantificar o coeficiente de transferência de calor.

Os resultados desses estudos experimentais em sua grande maioria são apresentados em função de números adimensionais. Para o caso da convecção natural dois adimensionais são de grande importância, sendo eles o número de Rayleigh apresentada pela equação 1.1,

$$Ra_{L_c} = \frac{\beta g (T_s - T_\infty) L_c^3}{\nu \alpha} \quad (1.1)$$

sendo β é o coeficiente de expansão térmica, g a aceleração da gravidade T_s a temperatura da superfície, T_∞ a temperatura do fluido adjacente à superfície, L_c o comprimento característico, ν a viscosidade cinemática e α a difusividade térmica. Esse adimensional quantifica o regime do escoamento que pode variar de laminar para turbulento, sendo valores mais baixos característica de regime laminar e valores maiores para regime turbulento.

Outra forma em que o número de Rayleigh pode ser escrito de acordo com a equação 1.2, em função de outros dois adimensionais,

$$Ra_{L_c} = Gr_{L_c} Pr \quad (1.2)$$

sendo a equação 1.3 representa o número de Grashof, que mede a intensidade das forças de empuxo sobre as forças viscosas de um determinado escoamento. E a equação 1.4 representa o número de Prandtl, que relaciona a intensidade de difusividade de momento com a intensidade de difusividade térmica em um escoamento (BERGMAN & LAVINE, 2014).

$$Gr_{L_c} = \frac{\beta g (T_s - T_\infty) L_c^3}{\nu^2} \quad (1.3)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (1.4)$$

O outro número adimensional que é utilizado para apresentação dos resultados é o número de Nusselt médio, apresentado pela equação 1.5,

$$\overline{Nu}_{L_c} = \frac{\bar{h} L_c}{k} \quad (1.5)$$

onde $\bar{h}$ representa o coeficiente médio de transferência de calor por convecção, L_c é o comprimento característico e k a condutividade térmica do fluido.

Os resultados geralmente são apresentados em funções de potência como mostra a equação 1.6,

$$\overline{Nu_{L_c}} = C Ra_{L_c}^m \quad (1.6)$$

onde Nu_{L_c} é o número de Nusselt médio, C e m são constantes oriundas da regressão linear. A equação 1.6 é extremamente importante para os estudos de convecção natural em placas planas horizontais uma vez que essa forma de equação vem sendo usada para expressar os resultados obtidos desde os primeiros trabalhos publicados na área.

1.1 Objetivos

Este estudo tem o objetivo geral de avaliar o coeficiente de transferência de calor por convecção natural em uma placa plana horizontal tanto numericamente quanto experimentalmente.

Para isso alguns objetivos específicos são colocados como etapas desse processo:

- Modelar numericamente o fenômeno da convecção natural em uma placa plana horizontal;
- Esquematizar, montar e realizar um procedimento experimental que possa validar o modelo numérico;
- Utilizar a técnica de Schlieren para efeitos visuais do escoamento do procedimento experimental;
- Levantar correlações do modelo numérico na forma de lei de potência, correlacionando o número de Nusselt e o número de Rayleigh;
- Levantar as incertezas do procedimento experimental;
- Comparar as espessuras da camada limite térmica obtida na visualização com o efeito Schlieren e o resultado da análise CFD.

Espera-se que os resultados obtidos nessas etapas possam contribuir para um melhor entendimento do escoamento por convecção natural em placas planas horizontais.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo visa apresentar as principais referências sobre convecção natural. A divisão do capítulo é feita em duas partes, a primeira contém os principais trabalhos experimentais que lidam com o fenômeno da convecção natural em placas planas. Alguns trabalhos que contemplaram modelos teóricos ou numéricos e procedimentos experimentais, também foram apresentados na primeira seção. Já a segunda parte apresenta unicamente os principais trabalhos numéricos sobre o tema.

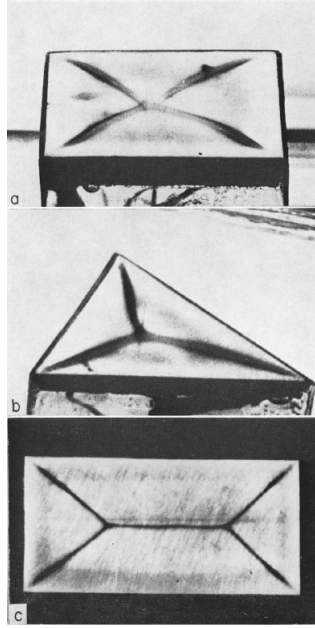
2.1 Trabalhos experimentais

Uma das referências mais citadas e clássicas a respeito da convecção natural em placas planas horizontais é o trabalho de [Fishenden & Saunders \(1965\)](#), onde os autores realizaram testes com placas planas quadradas com uma temperatura uniforme e utilizaram ar como fluido. A partir dos resultados a correlação do tipo $Nu = C Ra^n$ foi proposta, onde o coeficiente de troca de calor adimensional é escrito em função do número de Rayleigh.

O trabalho de [Husar & Sparrow \(1968\)](#) apresenta resultados de padrões de escoamento sob placas planas horizontais de diferentes geometrias, sendo elas, placas quadradas, retangulares, triangulares e circulares. Para valores de número de Ra na faixa de 10^6 um padrão de linhas bem definido é observado nas placas apresentada na Figura 4, esse padrão é ocasionado devido à formação de uma pluma térmica central nas placas.

[Rotem & Claassen \(1969\)](#) modelaram a camada limite para uma placa plana vertical semi-infinita com uma borda de entrada para o fluido, com objetivo de obter a espessura da camada limite e o coeficiente de troca de calor. Combinado ao trabalho numérico, realizaram uma validação experimental onde conseguiram visualizar o escoamento de ar sob a placa plana horizontal com auxílio da técnica de Schlieren. Os valores obtidos pelo modelo foram compatíveis apenas com uma porção da camada limite observada no experimento, uma vez que o modelo teórico não previa a formação da pluma térmica no centro das placas.

Figura 4: Particionamento do escoamento em placas planas horizontais de diferentes geometrias para $Ra \simeq 2 \times 10^6$.



Fonte: Adaptado de *Husar & Sparrow (1968)*

Vliet (1969) realizou um experimento para analisar a convecção natural em placas planas inclinadas. O procedimento experimental foi realizado utilizando água e ar, e a placa plana era submetida a um fluxo de calor constante. A inclinação da placa foi variada de 30° a 90° com a horizontal e o valor do número de Ra^* apresentado na equação 2.1, foi variado até 10^{16} . O Ra^* é um número de Rayleigh modificado para um fluxo de calor constante.

$$Ra^* = \frac{g\beta q_w'' x^4}{k\nu^2} Pr \quad (2.1)$$

Hassan & Mohamed (1970) realizaram testes com placas retangulares posicionadas horizontalmente e com algumas inclinações sendo 0° a placa vertical $+90^\circ$ a placa horizontal para cima e -90° placa horizontal para baixo.

As placas eram aquecidas até que a diferença de temperatura entre os termopares fixados na placa e a temperatura do ar adjacente se mantivessem contantes dentro da faixa estipulada para o experimento. Além dos termopares a placa foi instrumentada com medidores de fluxo de calor possibilitando o cálculo do Nusselt local para cada caso.

O aquecimento da placa foi realizado com auxílio de um trocador de calor instalado adjacente a placa. Os resultados para Nu médio em função do número de Ra_L , baseado no comprimento da placa foi descrito através de correlações para faixas de inclinações.

As condições para placa horizontais ($+90^\circ$ e -90°), não se enquadraram nas correlações de-

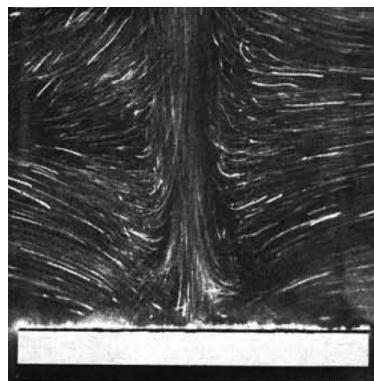
vido o efeito tridimensional do escoamento, onde os autores justificam a importância de um comprimento característico que leve em consideração a razão de aspecto da placa. Para essas condições são levantadas duas equações que podem ser utilizadas para casos onde as placas horizontais são muito grandes e os efeitos tridimensionais do escoamento podem ser negligenciados.

Fujii & Imura (1972) realizaram um procedimento experimental com placas planas aquecidas para varias inclinações variando de -90° horizontal para cima até $+90^\circ$ horizontal virada para baixo. No aparato experimental, as laterais da placa foram fechadas com placas de acrílico a fim de simular um escoamento bidimensional.

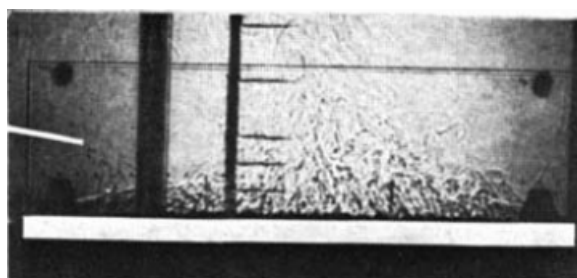
As placas eram aquecidas através de resistências elétricas até que as diferenças entre os termopares da placa e da água ambiente se mantinham abaixo da tolerância estipulada. Para a faixa de Ra_L baseado no comprimento da placa, foram levantadas correlações para todos as condições inclinadas viradas para cima, inclinadas virada para baixo, horizontal virada para cima e horizontal virada para baixo.

O aparato possibilitava a visualização do escoamento sob as placas inserindo partículas de alumínio no aparato e iluminando a parte de acrílico. As Figuras 5a e 5b apresentam o escoamento desenvolvido no experimento.

Figura 5: Escoamento sobre a superfície superior de uma placa horizontal -90° . (a) $Ra_L = 5,89 \times 10^7$. (b) $Ra_L = 3,55 \times 10^{10}$.



(a)



(b)

Fonte: (FUJII & IMURA, 1972)

Goldstein et al. (1973) utilizaram em seus experimentos a transferência de massa sob superfícies horizontais para levantarem curvas de Sh, número de Sherwood em função do número de Rayleigh, e consequentemente Nusselt em função de Rayleigh. Diversas geometrias de placas planas foram utilizadas.

Pela primeira vez, foi utilizado um comprimento característico L^* definido pela equação 2.2

$$L^* = \frac{A}{P} \quad (2.2)$$

onde A é a área da placa e P o perímetro. Com auxílio desse novo comprimento característico foi possível definir uma correlação independente da geometria da placa.

Pera & Gebhart (1973) realizaram um procedimento experimental a fim de estudar a camada limite laminar em placas planas horizontais e levemente inclinadas. O aparato experimental contava com placas laterais para restringir o escoamento em uma direção para simular um escoamento bidimensional e o ar foi utilizado como fluido de operação. A placa era aquecida através de resistores elétricos instalados na parte inferior da placa.

Os resultados obtidos experimentalmente para a placa plana horizontal, foram comparados com soluções analíticas de similaridade e se adequaram bem para o início da camada limite.

No trabalho de Lloyd & Moran (1974) foi realizado experimentos em placas planas horizontais com diferentes geometrias, dentre elas, placa quadrada, retangular, circular e triangular. O comprimento característico L^* definido na equação 2.2.

O experimento consistia na transferência de massa de CuSO_4 . Com efeito, foram levantadas curvas de correlação para regime laminar definido no experimento como sendo $Ra < 8 \times 10^6$ e para regime turbulento definido como $Ra \geq 8 \times 10^6$.

Al-Arabi & El-Riedy (1976) em seu trabalho experimental utilizaram placas horizontais quadradas, retangulares e circulares. As placas eram aquecidas por vapor d'água, o aparato experimental consistia em diversas câmaras individuais onde era possível coletar o vapor condensado e estimar o fluxo de calor local na placa.

O número de Ra_{L_c} para as correlações foram baseados no lado para placas quadradas, diâmetro para placas circulares e na largura para placas retangulares.

Uma análise do coeficiente de transferência local foi realizado para as placas retangulares com diferentes razões de aspecto. A partir dessa análise os autores concluirão que os efeitos de borda no coeficiente global médio poderiam ser negligenciados caso a largura da placa fosse utilizada como comprimento característico.

Lewandowski & Kubski (1984) em seu procedimento experimental trabalharam com configurações de placa planas na vertical e horizontal. Os testes foram realizados com água destilada, glicerina 100% e glicerina técnica.

No procedimento experimental foi utilizado um aparato para medir o gradiente de temperaturas

nas placas, que consistia de uma rede de termopares uniformemente espaçados na direção normal a placa. Com efeito, foi possível levantar o fluxo de calor que era transferido da placa para o ar por convecção natural.

Duas correlações foram levantadas para a placa plana horizontal sendo uma válida para a faixa de $10^4 \leq Ra_L \leq 10^7$ e outra correlação válida para a faixa de $10^5 \leq Ra_L \leq 10^8$. Sendo o Ra_{Lc} baseado na largura da placa. Já para a placa vertical apenas uma correlação válida para toda a faixa de $10^4 \leq Ra_L \leq 10^8$ foi estabelecida.

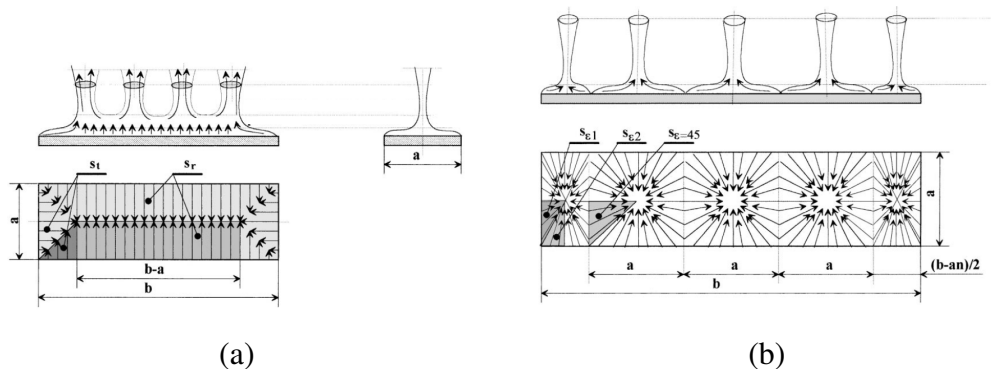
A análise de [Kitamura & Kimura \(1995\)](#) utilizou diversas placas retangulares aquecidas por um fluxo de calor constante de um aquecedor. Primeiramente foi feito um estudo visual do escoamento de água sobre as placas e posteriormente foram levantadas correlações de Nusselt médio e local em função do número de Rayleigh baseado na largura da placa.

Os autores identificaram a influência da razão de aspecto também para Ra_{Lc} acima da 10^{12} . Quatro regiões foram identificadas ao longo do comprimento da placa, uma primeira onde o escoamento é laminar, segunda região onde ocorre uma transição de mínimo para um pico no coeficiente de transferência de calor, a terceira região identificada como sendo após o pico e a quarta região onde o coeficiente de transferência é independente da posição.

[Lewandowski et al. \(2000\)](#) realizaram trabalhos numéricos e análises teóricas para diversas razões de aspecto de placas planas horizontais retangulares.

No trabalho teórico eles propuseram uma solução da camada limite levando em conta o escoamento partindo das bordas e se encontrando no centro da placa e outro padrão onde o escoamento teria um padrão radial ao longo de toda a extensão da placa. As figuras 6a e 6b mostram esses padrões.

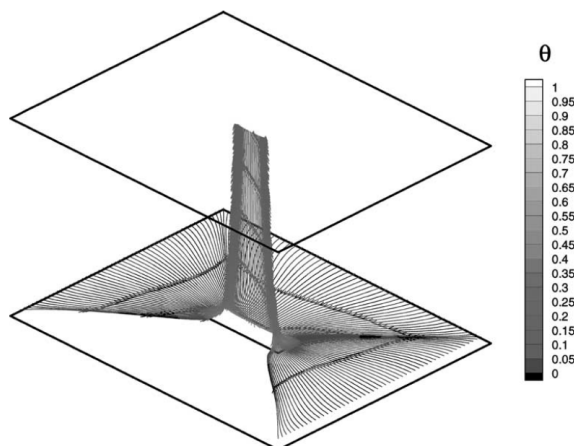
Figura 6: Padrões de escoamento por convecção natural em placas planas horizontais. (a) Padrão de escoamento paralelo. (b) Padrão de escoamento radial.



Fonte: Adaptado de [Lewandowski et al. \(2000\)](#)

O procedimento experimental foi realizado com diversas razões de aspecto de placas, e curvas de Ra_{Lc} por Nu_{Lc} , sendo L_c baseado na razão área pelo perímetro da placa.

Figura 7: Linhas de corrente para o escoamento tridimensional em uma placa plana horizontal a uma temperatura uniforme



Adaptado de *Martorell et al. (2003)*

Na mesma linha, *Pretot et al. (2000)* também propuseram um modelo teórico e validaram o modelo com procedimentos experimentais. A parte numérica se baseou em uma discretização em diferenças finitas utilizando o algoritmo de acoplamento pressão-velocidade SIMPLE, onde resolveram o problema de uma placa semi-infinita submetida a um fluxo de calor constante dentro de um domínio finito de ar.

A parte experimental consistiu em uma placa de alumínio também submetida a um fluxo de calor constante. Os experimentos foram realizados para taxas de calor de 7 a 16 W.

Martorell et al. (2003) realizaram investigações numéricas e experimentais para uma faixa de Ra_{L_c} de 290 a $3,3 \times 10^5$, sendo L_c baseado na largura da placa. O objetivo do trabalho era melhor compreender as condições de temperatura na placa plana horizontal para aplicação em projetos de PCB's.

Para o procedimento numérico resolveram o escoamento bidimensional com o algoritmo CUTFLOWS e para o modelo 3D foi utilizado o software comercial FLUENT. Sendo um dos primeiros trabalhos a utilizar os volumes finitos para resolver o problema numérico. A figura 7 mostra o pós processamento dos resultados obtidos no FLUENT.

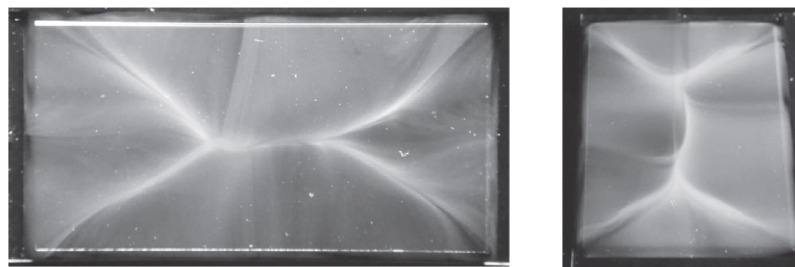
Os resultados experimentais obtidos para placas de cobre e aço se adequaram bem aos previstos numericamente. Os autores ressaltam a importância da pluma térmica e alertam que as comparações da solução da convecção natural em placas planas com a solução apenas da camada limite leva a resultados não tão precisos.

Kitamura et al. (2015) apresentam em seu trabalho uma visão geral de algumas equações empíricas para convecção natural em placas planas horizontais, também organizada no formato de

tabel. Algumas divergências são encontradas nos resultados principalmente pelo fato de diferentes razões de aspectos serem utilizadas para realização dos experimentos e por consequência diferentes definições de comprimentos característicos serem definidos.

O aparato experimental consistia em placas de alumínio de diferentes tamanhos aquecidas através de resistência elétrica e isoladas na sua parte inferior. Os autores realizaram um estudo visual do escoamento para diferentes razões de aspecto de placa e para diferentes valores de número de Rayleigh. A figura 8 mostra um exemplo de como o escoamento na placa se comporta.

Figura 8: Visualização do escoamento com auxílio de fumaça em uma placa plana horizontal para $Ra_W = 4,43 \times 10^5$.



Fonte: Adaptado de *Kitamura et al. (2015)*

Após o estudo visual *Kitamura et al. (2015)* levantaram curvas de Nusselt médio por Ra_{de} , onde definiram um novo comprimento característico dado pela equação 2.3,

$$de = \frac{4A}{P} \quad (2.3)$$

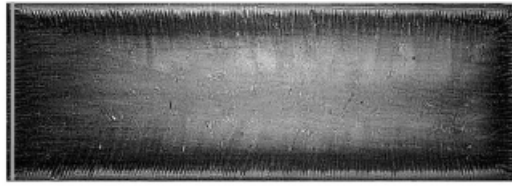
onde A é a área da placa e P o perímetro. Com auxílio desse novo comprimento característico foi possível ajustar todos os resultados obtidos no experimentos para todas as razões de aspecto. As curvas para Nusselt médio foram divididas em faixas de Ra_{de} . Outra característica observada foi a transição de um regime laminar para turbulento em um $Ra_{de} = 2 \times 10^6$ de acordo com o estudo visual do escoamento.

Lim & Chung (2015) utilizaram a transferência de massa de sulfato de cobre - ácido sulfúrico ($CuSO_4-H_2SO_4$) para estudar a convecção natural em placas planas. Eles variaram a inclinação do aparato de -90° (horizontal para cima) até $+90^\circ$ (horizontal para baixo).

Com auxílio da analogia entre transferência de massa e transferência de calor, resultados para o numero de Nusselt foram estimados para cada caso.

Com os padrões de deposição deixados na placa foi possível estimar o comprimento no qual a pluma térmica surge na placa. Esse comprimento foi denominado de comprimento crítico. A figura 9 mostra o resultado da deposição para a placa horizontal virada para cima.

Figura 9: Deposição de cobre no caso da placa a -90° , horizontal virada para cima.

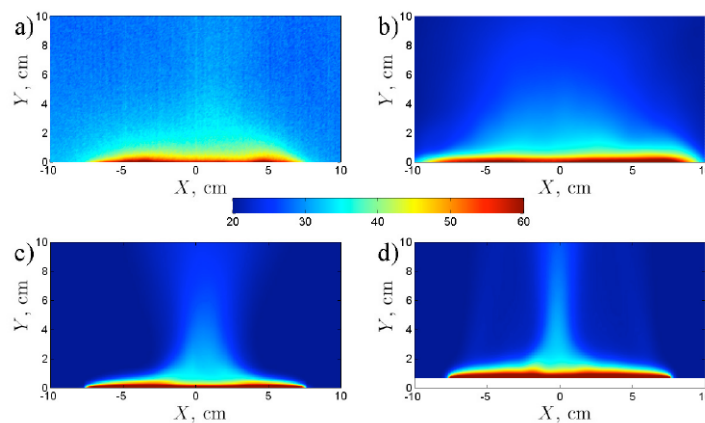


Fonte: Adaptado de *Lim & Chung (2015)*

Os autores propõem correlações de $\overline{Nu}_L$ tanto para placas inclinadas viradas para baixo quanto para a placas inclinadas viradas para cima baseado no comprimento da placa.

Vinnichenko et al. (2016) utilizaram técnicas de visualização como termografia óptica e efeito Schlieren com orientação de fundo para quantificar e visualizar os padrões de escoamento em uma placa plana uniformemente aquecida. Os resultados obtidos foram comparados com valores experimentais coletados através de termopares e com simulações 2D e 3D do aparato experimental. A figura 10 mostra a comparação visual dos resultados de temperatura obtidos pelos autores.

Figura 10: Contorno de temperatura para placa de 15cm x 30cm a 80°C . (a) Termografia óptica. (b) Schlieren com fundo orientado. (c) Simulação 2D. (d) Simulação 3D.



Fonte: Adaptado de *Vinnichenko et al. (2016)*

Apesar de ser um efeito antigo, são escassos os trabalhos que o utilizam o efeito Schlieren para o estudo da convecção natural.

2.2 Trabalhos numéricos

Ackroyd (1976) criou um modelo matemático para a camada limite laminar em uma placa plana horizontal retangular. Para considerar o descolamento da pluma térmica a placa foi dividida em quatro regiões que se encontravam no centro da placa. O modelo então era aplicado a cada uma dessas regiões e então o número de Nusselt calculado em função do número de Rayleigh.

O modelo matemático de Bandrowski & Rybski (1976) se baseou na transferência de massa em regime laminar em camadas limites de placas planas horizontais. O modelo usou como base as correlações de similaridade para uma placa plana horizontal. A camada limite foi modelada como tendo uma espessura máxima no centro da placa e mínima na borda de entrada do fluxo.

Goldstein & Lau (1983) utilizaram o método das diferenças finitas para simular diversas condições de convecção natural em placas planas horizontais.

As simulações variaram o número de Rayleigh de 10 a 10^4 , caracterizando unicamente um regime laminar. O modelo era bidimensional, estacionário e adotava a aproximação de Boussinesq (BOUSSINESQ, 1897).

Diversas geometrias foram modeladas, para verificar a influência de superfícies estendidas na placa plana. Uma comparação entre as geometrias e seus respectivos números de Nusselt e Sherwood é feita e uma correlação de potência é estabelecida para os resultados obtidos.

O modelo de Chen et al. (1986) trabalha soluções de camada limite laminar para placas planas horizontais, verticais e inclinadas.

Diferente dos outros trabalhos, a condição de contorno imposta na superfície da placa são funções de fluxo de calor e perfil de temperatura apresentadas nas equações 2.4 e 2.5 respectivamente.

$$q_w''(x) = bx^m \quad (2.4)$$

$$T(x) = T_\infty + ax^n \quad (2.5)$$

As equações diferenciais foram resolvidas utilizando o método das diferenças finitas para Pr de 0,7 e 7,0. Equações para Nusselt local e médio foram derivadas baseados no número de Grashof levando em conta o comprimento da placa.

Wei et al. (2003) utilizaram o método dos volumes finitos para resolver o escoamento em uma placa plana horizontal em um domínio bi-dimensional. As investigações se deram para uma faixa de Ra_{L_c} de 10^5 a 10^7 sendo o comprimento da placa a dimensão característica. Estudos para a placa virada para cima, virada para baixo e com ambos os lados aquecidos foram realizados. Os resultados foram comparados com os obtidos pelo modelo analítico de Pera & Gebhart (1973).

Corcione (2007) apresenta uma tabela com diversas correlações para convecção natural em placa planas horizontais disponíveis na literatura. O trabalho aborda principalmente as diferen-

ças de resultados entregues por essas equações levantando a questão principal de serem equações elaboradas para diferentes fluidos de operação e diferentes geometrias de placas planas horizontais, o que levaram a diferentes correções. As comparações foram realizadas tanto para resultados numéricos quanto para experimentais e uma diferença de até $\pm 50\%$ pode ser encontrada entre as correlações disponíveis na literatura.

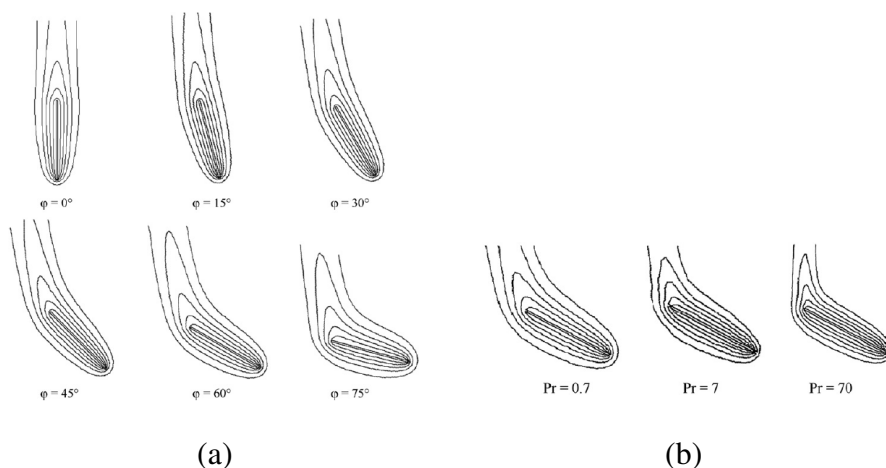
Ao final o autor agrupa os resultados das correlações por fluido de trabalho utilizado e geometria da placa, e com esses resultados levanta outras correlações cobrindo apenas determinada situação de geometria e fluido de trabalho para faixas de Rayleigh.

Corcione et al. (2011) realizaram simulações numéricas em placas uniformemente aquecidas dos dois lados. As hipóteses adotadas foram, escoamento 2D em regime permanente, a aproximação de Boussinesq e o escoamento era sempre laminar. Para a solução foi utilizado o método das diferenças finitas junto com o algoritmo de acoplamento SIMPLE para solução das equações de conservação.

A inclinação da placa foi variada ao longo das simulações e o efeito da inclinação discutido. A figura 11a mostra um resultado parcial dessa variação de parâmetro.

Outra variação de parâmetro realizada, foi a variação da grandeza do número de Pr, o que traduz diretamente em um fluido diferente. A figura 11b ilustra esse resultado.

Figura 11: Curvas de iso-temperaturas de uma placa uniformemente aquecida na parte superior e inferior. (a) Variação da inclinação. (b) Variação da magnitude de Pr.



Fonte: Adaptado de Corcione et al. (2011)

Ao final, correlações para o Nusselt médio foram propostas em função do número de Rayleigh (baseado no comprimento da placa), Pr e ângulo de inclinação.

Guha & Pradhan (2014) em seu trabalho numérico resolveram o problema da camada limite para convecção natural uma placa plana horizontal 2D para fluidos não Newtonianos regidos por uma lei de potência. A solução foi obtida com auxílio do método das diferenças finitas. A solução

mostrou-se dependente de apenas dois parâmetros, o índice de potência do fluido não Newtoniano e do número de Pr.

Para fluidos dilatantes com o índice de potência maior que a unidade o perfil de velocidade u tem intensidades de velocidade maiores a medida que o valor do índice aumenta, porém a espessura da camada limite diminui.

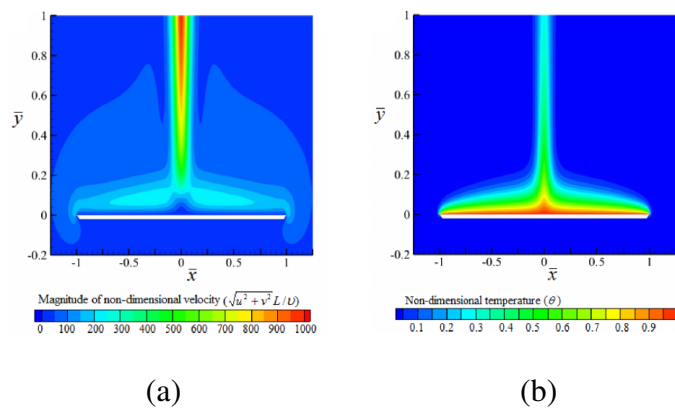
Já para pseudo-plásticos com o índice de potência menor que a unidade o contrário acontece. Ou seja, a medida que o índice se afasta da unidade a magnitude da velocidade u diminui e a espessura da camada limite aumenta.

O trabalho de [Abdulateef \(2015\)](#) utilizou o método das diferenças finitas para resolver as equações de conservação para o problema da convecção natural em uma placa plana quadrada. As soluções foram obtidas para um número de Grashof de 10^3 , 10^4 e 5×10^4 e inclinações de 0° até 180° , sendo 0° o caso da placa horizontal virada para cima, 90° a placa vertical e 180° a placa horizontal virada para baixo.

Correlações para o Nusselt médio foram levantadas para faixas de inclinação em função do número de Rayleigh e ângulo de inclinação.

[Guha & Sengupta \(2016\)](#) modelaram o problema da convecção natural em placas planas horizontais utilizando o software comercial FLUENT. O estudo contemplou escoamentos laminares e em regime estacionário e para diferentes razões de aspecto da placa, variando de 1 até ∞ representado pelos casos 2D. Os resultados obtidos até uma certa região antes da pluma térmica se formar, foram comparados com a solução da similaridade.

Figura 12: Contorno de velocidade e temperatura para $Gr_L = 2 \times 10^6$. (a) Velocidade adimensional. (b) Temperatura adimensional



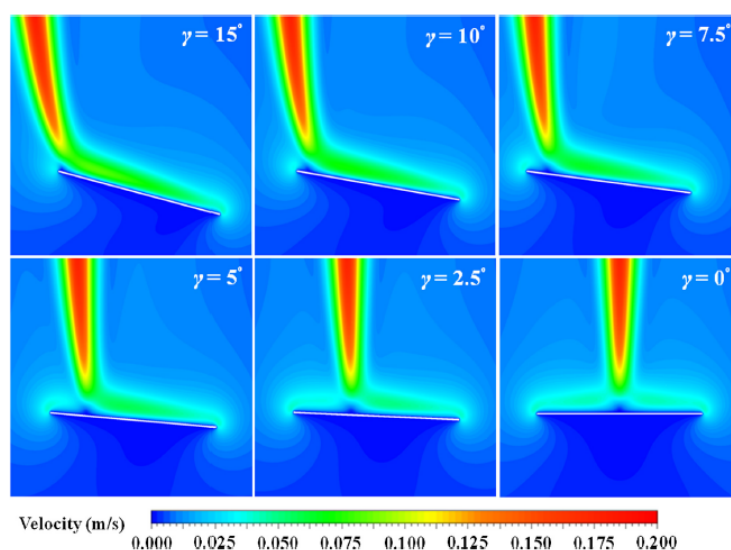
Fonte: Adaptado de [Guha & Sengupta \(2016\)](#)

As figuras 12a e 12b apresentam o contorno de velocidade e temperaturas adimensionais para o caso 2D, ou razão de aspecto igual a ∞ para um número de Grashof, baseado no comprimento da placa, igual a 2×10^6 .

Pradhan & Guha (2017) modelaram o problema da convecção natural em uma placa plana semi-infinita e estudaram o a influência de campos magnéticos atuando junto a transferência de calor. Para a solução foi utilizado o método das diferenças finitas modificada para levar em conta a influência do campo magnético. Como principal resultado observou-se que a medida que a intensidade do campo magnético aumenta, o número de Nusselt diminui, efeito esse atribuído a diminuição da velocidade pela força de amortecimento gerada pelo campo magnético.

Guha et al. (2019) utilizaram o software comercial FLUENT para modelar o comportamento fluido-térmico de uma placa uniformemente aquecida desde uma posição horizontal (0°) até a posição vertical (90°). O trabalho traz uma análise do ponto de levantamento da pluma, e a variação desse ponto de levantamento com a inclinação da placa. A figura 13 apresenta o efeito da variação da inclinação da placa para $Gr_L = 10^6$, um dos resultados apresentados no trabalho.

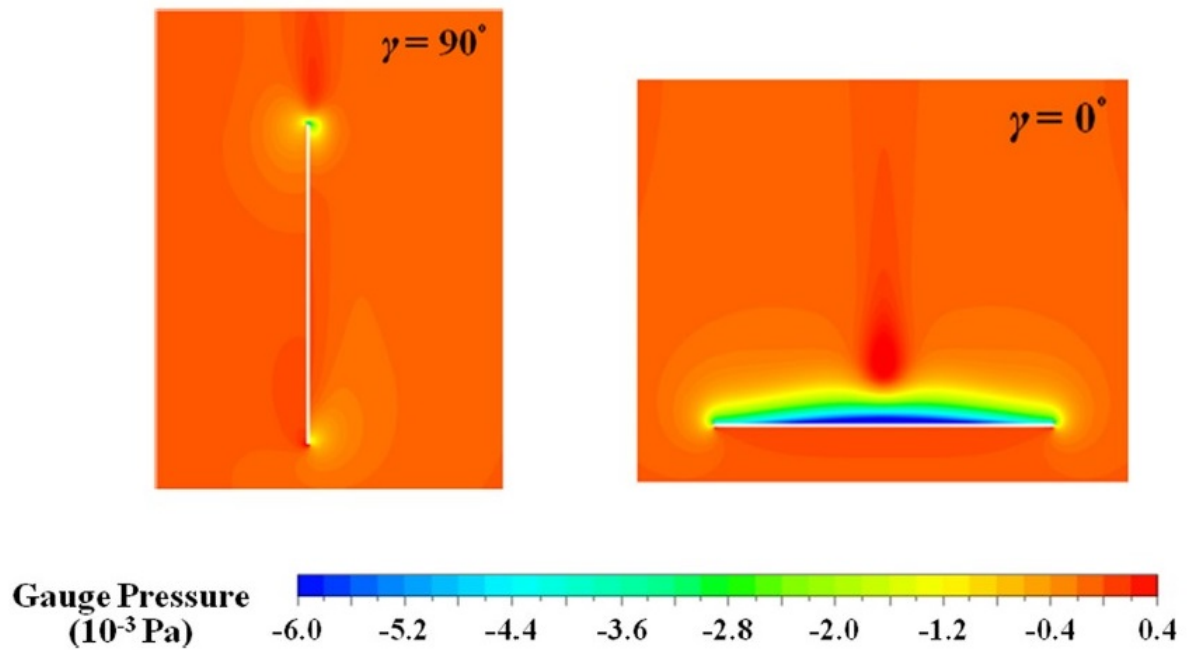
Figura 13: Contorno da magnitude velocidade para $Gr_L = 10^6$, variação de ângulos de 0° a 15° .



Fonte: Adaptado de Guha et al. (2019)

Uma análise da distribuição de pressão é feita com objetivo de destacar os diferentes efeitos de escoamento entre a placa na horizontal e na vertical, como apresentado na Figura 14. Enquanto na placa vertical a força de empuxo é predominante para a formação da camada limite, na placa horizontal gradientes de pressão paralelos a placa ajudam a formação da camada limite e da pluma térmica.

O número de Nusselt tende a diminuir com o aumento da inclinação para escoamentos onde os gradientes de pressão são mais influentes para o escoamento, ou seja, casos próximos a placa horizontal atingindo um mínimo próximo aos $7,5^\circ$. Em contra partida, para casos onde a força de empuxo é predominante o número de Nusselt tende a aumentar com o aumento da inclinação, para casos a partir de $7,5^\circ$ de inclinação da placa.

Figura 14: Resultados de pressão para $Gr_L = 10^6$ e ângulos de 0° e 90° .

Fonte: Adaptado de [Guha et al. \(2019\)](#)

É notório que entre todos os trabalhos numéricos levantados, sempre o escoamento é resolvido em regime laminar. A modelagem de turbulência agregada ao fenômeno da convecção natural é pouco difundida nos trabalhos numéricos que abordam esse fenômeno físico, fato que também pode ser observado no resumo de correlações numéricas levantado por [Corcione \(2007\)](#).

Capítulo 3

Materiais e Métodos

O capítulo de materiais e métodos está dividido em quatro seções. Primeiramente são introduzidas brevemente as equações básicas de conservação e modelos de turbulência para o estudo de problemas de escoamento e transferência de calor.

A segunda seção destaca o método dos volumes finitos e sua funcionalidade na resolução das equações de conservação. Já na terceira parte é apresentado o modelo numérico do problema de convecção natural em placas planas horizontais e como ele será analisado neste trabalho.

Finalmente, a metodologia elaborada para realização do procedimento experimental, que servirá como validação do modelo resolvido numericamente.

3.1 Equações de Conservação e modelos matemáticos

As equações base de qualquer problema de mecânica dos fluidos ou transferência de calor podem ser derivadas do estudo de um volume de controle diferencial.

A definição de volume de controle é uma região do espaço que se escolhe para ser estudada. A fronteira de um volume de controle é chamada de superfície de controle (CENGEL & CIMBALA, 2013).

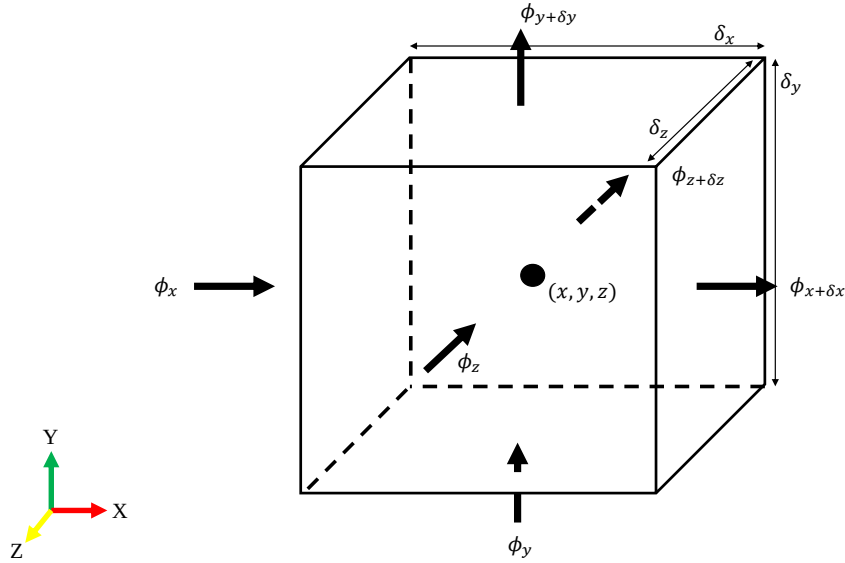
Outra definição importante para derivar as equações de conservação é o conceito de sistema. Um sistema é uma quantidade fixa de massa que se deseja estudar (CENGEL & CIMBALA, 2013).

A figura 15 mostra um volume de controle diferencial onde a conservação da massa, conservação da quantidade de movimento linear e energia podem ser derivadas.

3.1.1 Equações de conservação básicas

As equações de conservação são derivadas a partir de um modelo de que a propriedade Φ entra ou sai por faces através de um fluxo, ou se acumula dentro do volume.

Junto ao modelo intuitivo, as leis básicas como a definição de sistema, primeira lei de Newton

Figura 15: Volume de controle diferencial com propriedade Φ sendo transportada.

Fonte : Elaborado pelo autor.

e primeira lei da termodinâmica são aplicadas para deduzir as equações de conservação de massa, quantidade de movimento linear e energia.

A equação de conservação da massa é apresentada na equação 3.1. As equações da quantidade de movimento linear, ou equações de Navier-Stokes são apresentadas nas equações 3.2, 3.3 e 3.4. E por último a equação da energia apresentada na equação 3.5.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu \nabla u) + S_{M_x} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu \nabla v) + S_{M_y} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot (\mu \nabla w) + S_{M_z} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \rho i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho i \mathbf{u}) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \psi + S_i \quad (3.5)$$

Pode-se observar que existem algumas similaridades entre as equações de conservação apresentadas, o que possibilita a apresentação delas como uma equação de transporte geral conforme a equação 3.6

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \quad (3.6)$$

O significado físico de cada um dos termos da equação 3.6 é apresentado a seguir.

Taxa de aumento de ϕ no volume	+	Taxa de transporte de ϕ para fora do volume	=	Transporte difusivo de ϕ no volume	+	Taxa de aumento de ϕ devido sua produção dentro do volume
--	---	---	---	---	---	---

A propriedade ϕ sendo um transporte genérico podendo ser uma espécie, quantidade de movimento ou energia.

Esse conjunto de EDP's consistem em um sistema de equações que podem ser resolvidas numericamente com auxílio de condições iniciais e condições de contorno.

3.1.2 Modelos de Turbulência

A maioria dos escoamentos encontrados no cotidiano da engenharia são escoamentos turbulentos, ou seja acima de um certo valor de número de Reynolds ou Rayleigh o escoamento se torna instável. (VERSTEEG & MALALASEKERA, 2007)

A turbulência se caracteriza por ser um fenômeno aleatório e transitório, em outras palavras, os campos de pressão, temperatura e velocidade estão em constante mudança com o passar do tempo.

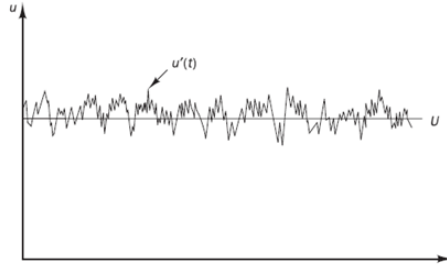
As equações apresentadas na seção anterior são válidas para escoamentos totalmente laminares. Caso um problema turbulento seja modelado com as equações apresentadas anteriormente, certamente erros quantitativos serão observados nos resultados.

Com objetivo de captar os fenômenos induzidos em um escoamento turbulento, modelos de turbulência foram criados para superar esse desafio.

A figura 16 apresenta a característica aleatória do escoamento turbulento juntamente com um valor médio dessas flutuações. Com efeito, pode-se escrever a velocidade ao longo do tempo ($u(t)$) como sendo uma velocidade média (U) mais o valor da flutuação ($u'(t)$). Essa decomposição pode ser realizada para todas as variáveis do escoamento, e essa decomposição é chamada decomposição de Reynolds. As equações 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 e 3.11 apresentam essa decomposição para uma propriedade escalar ϕ , as componentes de velocidade u, v e w e a pressão p . Onde as grandezas apresentadas em maiúsculo são uma média temporal e as grandezas com um apóstrofo são as flutuações da grandeza a partir do valor médio.

$$\phi = \Phi + \phi' \quad (3.7)$$

Figura 16: Comportamento típico da velocidade em um escoamento turbulento medido por um sensor pontual.



Fonte: Adaptado de *Versteeg & Malalasekera (2007)*

$$u = U + u' \quad (3.8)$$

$$v = V + v' \quad (3.9)$$

$$w = W + w' \quad (3.10)$$

$$p = P + p' \quad (3.11)$$

A combinação das médias temporais das flutuações a partir da médias, das componentes x, y e z do vetor velocidade, caracterizam a energia cinética turbulenta. A equação 3.12 apresenta a energia cinética turbulenta por unidade de massa.

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (3.12)$$

Uma das possibilidades para se resolver problemas que tenham escoamento turbulento é substituir nas equações de conservação as propriedades com auxílio da decomposição de Reynolds. Como resultado, são obtidas as equações RANS, ou equações de Navier-Stokes com média de Reynolds.

Os termos de flutuações não são descritos por nenhuma outra equação de conservação, portanto, modelos de turbulência foram criados para serem acoplados as equações RANS e possibilitar a solução do sistema de equações.

As equações de conservação para as médias das propriedades do escoamento, são apresentadas a seguir. A equação 3.13, é a conservação da massa, nas equações 3.14, 3.15 e 3.16 são equações da quantidade de movimento e a equação 3.17 para uma grandeza escalar ϕ qualquer.

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{U}}) = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{U} \tilde{\mathbf{U}}) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu \nabla \tilde{U}) + \left[-\frac{\partial(\bar{\rho} u' u')}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{\rho} u' v')}{\partial y} \frac{\partial(\bar{\rho} u' w')}{\partial z} \right] + S_{M_x} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{V} \tilde{\mathbf{U}}) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu \nabla \tilde{V}) + \left[-\frac{\partial(\bar{\rho} v' u')}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{\rho} v' v')}{\partial y} \frac{\partial(\bar{\rho} v' w')}{\partial z} \right] + S_{M_y} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{W})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{W} \tilde{\mathbf{U}}) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \nabla \cdot (\mu \nabla \tilde{W}) + \left[-\frac{\partial(\bar{\rho} w' u')}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{\rho} w' v')}{\partial y} \frac{\partial(\bar{\rho} w' w')}{\partial z} \right] + S_{M_z} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{\Phi})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{U}}) = \nabla \cdot (\Gamma_{\Phi} \nabla \tilde{\Phi}) + \left[-\frac{\partial \bar{\rho} u' \varphi'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\rho} v' \varphi'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\rho} w' \varphi'}{\partial z} \right] + S_{\Phi} \quad (3.17)$$

As grandezas com o símbolo $\sim$ são grandezas avaliadas a partir de uma média com peso na massa específica.

Nota-se que após os termos difusivos, das equações de conservação para as médias, aparecem termos referentes às flutuações do escoamento, ou seja, onde os modelos de turbulência entram para possibilitar a resolução dessas equações de conservação. Esses adicionais são conhecidos como tensões de Reynolds.

[Boussinesq \(1877\)](#) propôs que as tensões de Reynolds são proporcionais às taxas médias de deformação como apresentado na equação 3.18

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \kappa \delta_{ij} \quad (3.18)$$

Onde τ_{ij} são as tensões de Reynolds, μ_t é a viscosidade dinâmica turbulenta e δ_{ij} o delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i=j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$).

A partir da hipótese proposta por Boussinesq, é necessário acoplar modelos que contabilizem o valor da viscosidade dinâmica turbulenta, chamada também de viscosidade devido o turbilhonamento.

Os modelos mais utilizados no cotidiano da engenharia, são modelos de duas equações, ou seja mais duas equações de transporte são adicionadas ao sistema de equações para resolver o escoamento.

Um dos modelos de duas equações mais conhecidos é o modelo $\kappa - \varepsilon$ ([LAUNDER & SPALDING, 1974](#)), muito difundido no meio da engenharia.

O modelo $\kappa - \varepsilon$ define a viscosidade turbulenta como apresentado na equação 3.19

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \quad (3.19)$$

onde C_μ é uma constante empírica.

O modelo consiste em uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta (κ), equação 3.20 e outra equação de transporte para a dissipação da energia cinética turbulenta (ε), equação 3.21. Sendo as constantes que aparecem no modelo apresentadas na tabela 1.

$$\frac{\partial(\rho\kappa)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\kappa\mathbf{U}) = \nabla \cdot \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \nabla \kappa \right] + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\varepsilon\mathbf{U}) = \nabla \cdot \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\kappa} \mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{\kappa} \quad (3.21)$$

Taxa de mudança de κ ou ε	+	Transporte advectivo de κ ou ε	=	Transporte difusivo de κ ou ε	+	Taxa de produção de κ ou ε	-	Taxa de destruição de κ ou ε
--	---	---	---	--	---	---	---	---

Assim resolvendo as equações 3.20 e 3.21, pode-se resolver a equação 3.19 dando sequencia a resolução das tensões de Reynolds e por fim as equações do modelo RANS.

Um modelo que consegue lidar melhor com regiões próximas a paredes, onde existe a predominância do efeito da camada limite viscosa, é o modelo $\kappa - \omega$ SST (MENTER, 1994).

O modelo $\kappa - \omega$ SST é baseado tanto no modelo $\kappa - \omega$ de Wilcox (1988) quanto no modelo $\kappa - \varepsilon$ de Launder & Spalding (1974). Menter (1994) verificou que os resultados do modelo $\kappa - \varepsilon$ para regiões próximas as paredes não eram quantitativamente satisfatórios. Com efeito, ele modificou o modelo $\kappa - \varepsilon$ para se comportar como um modelo $\kappa - \omega$ em regiões próximas as paredes, e para regiões afastadas voltava a ser um $\kappa - \varepsilon$ comum.

Tabela 1: Constantes empíricas do modelo $\kappa - \varepsilon$

Constante	Valor
C_μ	0.09
σ_κ	1.00
σ_ε	1.30
$C_{1\varepsilon}$	1.44
$C_{2\varepsilon}$	1.92

As equações 3.22 e 3.24 apresentam as duas equações de transporte para o modelo $\kappa - \omega$ SST. Sendo κ a energia cinética turbulenta e ω a frequência de turbulência. As constantes que aparecem no modelo são apresentadas na tabela 2.

$$\frac{\partial(\rho\kappa)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\kappa\mathbf{U}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \right) \nabla(\kappa) \right] + P_\kappa - \beta^* \rho\kappa\omega \quad (3.22)$$

$$P_\kappa = \left(2\mu S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}\rho\kappa \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\omega\mathbf{U}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega,1}} \right) \nabla(\omega) \right] + \gamma_2 \left(2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}\rho\omega \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \\ - \beta_2 \rho\omega^2 + 2(1 - F_C) \frac{\rho\sigma_{\omega,2}}{\omega} \frac{\partial \kappa}{\partial x_\kappa} \frac{\partial \omega}{\partial x_\omega} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Tabela 2: Constantes empíricas do modelo $\kappa - \omega$ SST

Constante	Valor
σ_κ	1.0
$\sigma_{\omega,1}$	2.0
$\sigma_{\omega,2}$	1.17
γ_2	0.44
β_2	0.083
β^*	0.09

A função F_C é uma função que pode assumir um valor entre 0 e 1 e é dependente da distância da célula até a parede mais próxima a ela. A função permite a transição entre os modelos $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$, sendo 0, totalmente $\kappa - \varepsilon$ e 1 totalmente $\kappa - \omega$.

Como o modelo $\kappa - \omega$ SST é uma mistura entre o $\kappa - \omega$ e $\kappa - \varepsilon$ as constantes do modelo também necessitam estar de acordo e uma função é utilizada para computar esses valores. A equação 3.25 apresenta essa função

$$C = F_C C_\omega + (1 - F_C) C_\varepsilon \quad (3.25)$$

onde C_ω são as contantes do modelo $\kappa - \omega$ e $\kappa - \varepsilon$

A viscosidade dinâmica turbulenta no modelo $\kappa - \omega$ SST é calculada de acordo com a equação 3.26

$$\mu_t = \frac{a_1 \rho \kappa}{\max(a_1 \omega, S F_2)} \quad (3.26)$$

onde a_1 é uma constante e F_2 uma função que limita o valor da viscosidade dinâmica turbulenta e depende diretamente da distância da célula até a parede mais próxima.

Assim ao resolver as equações de transporte para κ e para ω e calcular a viscosidade turbulenta, pode-se calcular as tensões de Reynolds de acordo com a hipótese de Boussinesq e finalmente resolver as RANS.

3.1.3 Aproximação de Boussinesq

Para problemas de convecção natural onde a variação de temperaturas entre a superfície e o fluido adjacentes não são tão elevadas e as intensidades de velocidade do escoamento estão bem abaixo da velocidade do som, a aproximação de Boussinesq é muito recorrente.

Boussinesq (1897) propôs que fluidos submetidos a essas condições poderiam ser tratados como incompressíveis, com exceção do termo das forças de campo, no caso o empuxo, onde a massa específica se altera com a temperatura de acordo com a equação 3.27.

$$\rho \approx \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (3.27)$$

Onde as quantidades com o subscrito 0 são valores de referência, tomados na temperatura do fluido adjacente onde não está sendo afetado pelas superfícies e β é o coeficiente de expansão térmica.

A vantagem da aproximação de Boussinesq é a diminuição do grau das não linearidades das EDP's do sistema de equações que necessitam ser resolvidas. Consequentemente o tempo computacional é reduzido também.

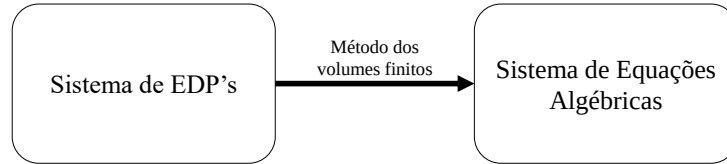
3.2 Método dos volumes finitos

Nas seções anteriores foram definidas todas as equações diferenciais parciais necessárias para modelar qualquer problema de escoamento e transferência de calor.

Essas EDP's na sua forma completa não possuem soluções, como discutido anteriormente. Portanto são necessários métodos numéricos para resolvermos essas equações e finalmente obter os campos de pressão, velocidade e temperatura para derivarmos as quantidades de interesse para engenharia como taxas e fluxos.

Um método bastante para resolver essas equações de transporte é conhecido como método dos volumes finitos. Neste método um domínio a ser estudado é dividido em pequenos volumes onde são aplicadas as equações de conservação e realizado a integração dessas equações diferenciais parciais para cada volume. Com efeito, a partir do entendimento de cada volume pode-se compreender o domínio por completo, uma vez que os pequenos volumes são conectados entre si através de suas faces formando o domínio completo como um todo. A Figura 17 apresenta um esquema

Figura 17: Esquema de apresentação do método dos volumes finitos



Fonte: Elaborado pelo autor.

para solução das EDP's através dos método dos volumes finitos, que resultará em um conjunto de equações algébricas a serem resolvidas.

O método dos volumes finitos vai transformar essa integração em somas já que temos um número finito de volumes para serem contabilizados e ao final temos um sistema de equações algébricas à serem resolvidas.

A equação 3.6 apresenta a equação de transporte geral para uma quantidade ϕ , se realizarmos a integração dessa equação obtemos a equação 3.28

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \phi dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \nabla \phi) dA + \int_V S_\phi dV \quad (3.28)$$

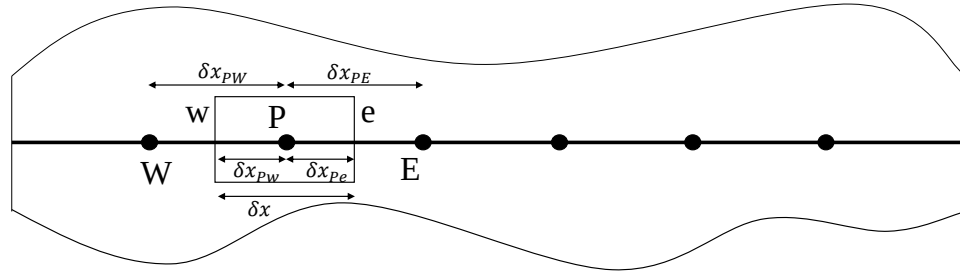
Novamente temos os seguintes termos na equação:

$$\text{Termo transiente} + \text{Termo advectivo} = \text{Termo difusivo} + \text{Termo fonte}$$

O primeiro passo do método é a discretização do domínio em um número finito de volumes, também chamada de etapa de criação da malha. A figura 18 mostra um exemplo da nomenclatura que geralmente é adotada para representação de uma discretização 1D.

A Figura 18 apresente vários pontos que representam a discretização da linha em um número finitos de pontos. O ponto "P" é identificado com um volume e possui as faces "e" e "w", representando leste e oeste respectivamente. Os pontos vizinhos ao ponto "P" são representados pelas letras "E" e "W", novamente indicando leste e oeste respectivamente. Os δ com os subscritos são as distâncias, por exemplo δx_{PW} indica a distância do ponto "P" ao ponto "W", já δ_{Pe} representaria a distância entre o ponto "P" e face leste do volume.

Figura 18: Nomenclatura utilizada para discretização.



Fonte: Elaborado pelo autor.

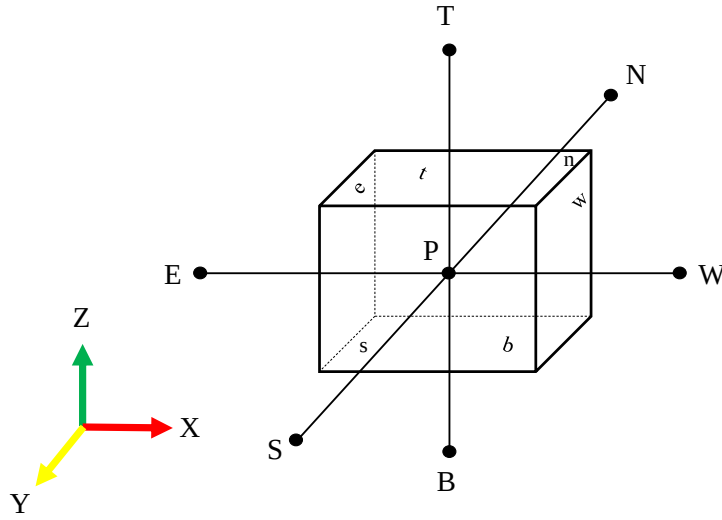
distância	Legenda
δ_{PE}	distância do ponto P ao ponto leste "E"
δ_{PW}	distância do ponto P ao ponto oeste "W"
δ_{Pe}	distância do ponto P a face leste "e"
δ_{Pw}	distância do ponto P a face oeste "w"

Tabela 3: Legenda com os nomes dos δ

O exemplo de malha mostrado é referente a uma discretização de um domínio 1D, porém na maioria das análises em volumes finitos os domínios são tridimensionais, ou seja o numero de pontos ou volumes que fazem fronteira com o ponto "P" são maiores que dois. Por exemplo para um volume hexaédrico regular, além dos pontos vizinhos "E" e "W", também existiria os vizinhos "N" e "S" e "T" e "B" como mostrado na figura 19.

Criada a malha é necessário aplicar a equação 3.28 para cada volume, e como não conseguimos realizar essa integração por completo, são utilizados métodos de discretização de cada termo da equação 3.28 para que se tenham equações algébricas que possam ser resolvidas através de um sistema no formato $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Figura 19: Nomenclatura utilizada para discretização 3D.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2.1 Termo difusivo

Se levarmos em conta o termo difusivo da equação 3.28, temos a seguinte igualdade apresentada na equação 3.29.

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (3.29)$$

Onde A é a área transversal. A equação 3.29 apresenta um formato do balanço clássico de uma grandeza. Se pensássemos em um problema de condução de calor em regime permanente por exemplo teríamos o fluxo de calor que entra na face leste é igual ao fluxo de calor que deixa o volume na face oeste.

Para conseguirmos uma discretização desse termo, necessitamos encontrar como avaliar Γ_e e Γ_w além dos gradientes $d\phi/dx$ nas faces leste e oeste. A prática estabelece que essas grandezas sejam avaliadas de acordo com os valores dos pontos. Assim pode-se utilizar os pontos "W" e "P" por exemplo para avaliar Γ_w , como apresentado na equação 3.30.

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2} \quad (3.30)$$

O mesmo pode ser realizado para Γ_e .

Os gradientes $d\phi/dx$ também podem ser avaliados utilizando os pontos vizinhos como apresentado na equação 3.31. Essa aproximação linear é chamada de diferenças centrais.

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) \quad (3.31)$$

Assim tem-se uma equação totalmente algébrica apresentada na equação 3.32.

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) \quad (3.32)$$

Rearranjando os termos da equação 3.32, temos a equação 3.33.

$$a_P \phi_P - a_W \phi_W - a_E \phi_E \quad (3.33)$$

Onde a_P , a_W e a_E são coeficientes apresentados na tabela 4. Os termos da equação 3.33 podem se adequar facilmente no produto matricial $\mathbf{A}\mathbf{X}$ uma vez que a_P , a_W e a_E são coeficientes ($\mathbf{A}$) e ϕ as incógnitas do problema ($\mathbf{X}$).

Tabela 4: Coeficientes da discretização do termo difusivo.

a_P	a_W	a_E
$a_W + a_E$	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$

Para malhas uniformes e regulares a aproximação de diferenças centrais se dá muito bem, porém outros métodos também podem ser utilizados para discretizar esses gradientes e outras funções de interpolação utilizadas para avaliar a difusividade na face desejada.

3.2.2 Termo advectivo

O termo advectivo da equação 3.28 tem a particularidade que para sua discretização é necessário avaliar a propriedade ϕ nas faces do volume, para contabilização do balanço dessa propriedade que entra ou sai do volume com o fluxo.

Para o termo difusivo, o esquema das diferenças centrais consegue modelar o fenômeno físico da difusão muito bem, uma vez que a difusão afeta a distribuição da propriedade ϕ em todas as direções de acordo com o seus gradientes. Em contra partida, o problema advectivo, é predominante na direção onde o fluxo acontece.

$$\int_A \mathbf{n} (\rho \phi u) dA = (\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w \quad (3.34)$$

$$\int_{\Delta V} \frac{d(\rho u)}{dx} = (\rho u A)_e - (\rho u A)_w \quad (3.35)$$

Para o problema advectivo, as equações 3.34 e 3.35 mostram o termo de advecção de uma propriedade ϕ integrada, junto a equação da continuidade integrada para um problema 1D genérico.

Pode-se definir uma variável $F = \rho u$, e as equações 3.34 e 3.35 passam a ter a forma mostrada nas equações 3.36 e 3.37.

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = F_e A_e \phi_e - F_w A_w \phi_w \quad (3.36)$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = F_e A_e - F_w A_w \quad (3.37)$$

O trabalho agora consiste em encontrar esquemas para aproximar os valores de ϕ para as faces leste e oeste em função dos valores dos pontos.

Uma dessas metodologias é utilizar uma interpolação linear, ou chamada diferenças centrais, como no problema difusivo.

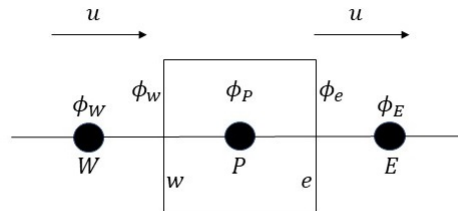
O inconveniente é que essa aproximação pode levar a divergências quantitativas dependendo da intensidade do escoamento onde a advecção é mais intensa e portanto arrasta a propriedade ϕ de uma forma mais rápida através do domínio.

Por via de regra é avaliado uma razão entre a intensidade do escoamento e a difusividade. Quando essa razão é baixa, o método das diferenças centrais é uma boa alternativa para avaliação da propriedade ϕ na face, caso contrário, divergências numéricas podem ocorrer.

Uma alternativa à diferenças centrais é o método chamado de upwind, que leva em consideração na determinação da propriedade na face, a direção do fluxo.

Para problemas onde a advecção é dominante, a tendência da face é sempre que a propriedade ϕ seja mais influenciada pelo ponto anterior a face, levando em conta o sentido do escoamento.

Figura 20: Representação de problema advectivo 1D.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme a Figura 20, se o valor do produto $(u_w \cdot A_w)$ é menor do que zero, o fluxo está entrando no volume e portanto o valor de ϕ_w é adotado como sendo igual a ϕ_W . O mesmo acontece

para a face A_e . Se o produto $(u_e \cdot A_e)$ é maior que zero, então o fluxo está saindo do volume na face "e", a propriedade ϕ_e é igualada a ϕ_P . E vice-versa, caso o fluxo estivesse no sentido contrário.

Outra possibilidade para avaliar a propriedade ϕ nas faces é a utilização do esquema upwind com uma correção do valor de ϕ de acordo com o gradiente de ϕ . A equação 3.38

$$\phi_{w,e} = \phi_{W,P} + \nabla \phi \cdot \delta x_{P-w,e} \quad (3.38)$$

Esses esquemas de discretização também são conhecidos de acordo com o número de pontos utilizados para descrever a propriedade na face. Por exemplo, o esquema upwind descreve o valor de ϕ na face com um outro ponto, então é chamado de esquema de primeira ordem. Já o esquema upwind com correção do valor de ϕ de acordo com o gradiente, necessita de dois pontos, pois é necessário avaliar o gradiente, sendo um esquema de segunda ordem.

Esses são alguns dos esquemas de discretização do termo advectivo mais utilizados no dia a dia do engenheiro de simulação. Porém uma infinidade de outros esquemas existem.

Da mesma forma que foi apresentado para o termo difusivo, pode-se substituir os termos de ϕ_e e ϕ_w da equação 3.37 e obter os coeficientes para a equação ser escrita na forma matricial $\mathbf{A}\mathbf{X}$.

3.2.3 Termo fonte

Para a discretização do termo fonte, pode-se exemplificar um caso onde a geração ou dissipação é independente da propriedade ϕ . Para esses casos a integração é puramente depende do tamanho do volume da discretização, como apresentado na equação 3.39

$$\int_V S_\phi dV = S_\phi \Delta V \quad (3.39)$$

onde S_ϕ é um termo contante de geração ou dissipação de ϕ por unidade de volume. Com efeito, por ser um termo constante, ele entra direto do lado direito da equação na forma matricial $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Outra possibilidade é o termo de geração ser dependente linearmente de ϕ , no formato da equação 3.40.

$$S_\phi = S_A \phi + S_B \quad (3.40)$$

O termo de S_ϕ , quando integrado no volume, leva uma contribuição para os coeficiente que acompanha $\mathbf{X}$ e para o lado direito da equação $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

3.2.4 Termo temporal

Para a discretização do termo temporal, o tempo também é divididos em intervalos finitos.

A integração no tempo ocorre de forma que é definido uma variável θ levando a integral no tempo a ter a seguinte forma apresentada na equação 3.41.

$$I_\phi = \int_t^{t+\Delta t} \phi_P dt = [\theta \phi_P + (1 - \theta) \phi_P^o] \Delta t \quad (3.41)$$

onde os termos com o índice "o" correspondem ao tempo t . Essa integral permite definir se a discretização será totalmente explícita, totalmente implícita ou será uma mistura de implícita com explícita.

Se θ for zero, as propriedades serão sempre avaliadas no tempo t que é conhecido para determinar a propriedade no tempo posterior $t + \Delta t$, ou seja a solução é direta.

Se θ for igual a um, a determinação de I_ϕ é dependente de ϕ no novo passo de tempo e uma solução de sistemas de equações é necessário para cada passo de tempo.

Caso o valor de θ estiver entre 0 e 1 temos uma combinação dos dois casos extremos e como temos a parte implícita, também faz-se necessário resolver um sistema de equações para cada intervalo de tempo. Uma particularidade é o esquema conhecido como Crank-Nicolson que ocorre quando θ é igual a 0,5.

A equação 3.42 exemplifica a equação de condução, transiente com geração de energia.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S \quad (3.42)$$

Integrando a equação 3.42 tanto no volume quanto no tempo e aplicando o modelo de diferenças centrais para o termo difusivo, temos a equação 3.43

$$\rho c_p \left(\frac{T_P - T_P^o}{\Delta t} \right) \Delta x = \theta \left[\frac{k_e(T_E - T_P)}{\delta x_{PE}} - \frac{k_w(T_P - T_W)}{\delta x_{WP}} \right] + (1 - \theta) \left[\frac{k_e(T_E^o - T_P^o)}{\delta x_{PE}} - \frac{k_w(T_P^o - T_W^o)}{\delta x_{WP}} \right] + S \Delta x \quad (3.43)$$

A equação 3.43 exemplifica a discretizaçãodo termo temporal e a influência de θ no esquema.

3.2.5 Acoplamento pressão-velocidade

Na grande maioria dos casos, as componentes da velocidade não são variáveis conhecidas para o escoamento e as equações de conservação para massa, quantidade de movimento, energia, energia cinética turbulenta, dissipação da energia cinética turbulenta, frequência de dissipação da energia cinética turbulenta e transporte de escalares dependem diretamente do valor da velocidade em seu termo advectivo.

Por essa razão são utilizados algoritmos de acoplamento de pressão-velocidade para encontrar valores de pressão e velocidade que satisfaçam todas essas equações de conservação simultaneamente.

Se verificarmos o conjunto de equações 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, observamos que não linearidades existem nas equações de quantidade de movimento, além disso, a pressão aparece apenas nas equações de conservação da quantidade de movimento. E não existe nenhuma outra equação onde a pressão apareça.

Os algoritmos de acoplamento pressão-velocidade baseiam-se no princípio que um valor de pressão é utilizada para obter um campo de velocidade nas equações de conservação de quantidade de movimento, essa velocidade deve satisfazer a equação da continuidade.

O algoritmo mais utilizado em simulações em regime estacionário é o algoritmo SIMPLE (PATANKAR & SPALDING, 1972), uma sigla para *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*.

O método SIMPLE em sua essência segue os seguintes passos:

1. No início do procedimento o campo de pressão p^* é estimado como sendo igual ao da iteração anterior, caso esteja no início do processo, será igual a condição inicial do campo de pressão. O mesmo acontece para as velocidades, são utilizados os valores da iteração anterior para inicializar a nova iteração.
2. Então a equação de conservação da quantidade de movimento é resolvida através dos métodos de discretização e valores para as componentes de velocidade u^* , v^* e w^* são determinados.
3. O próximo passo são as definições de correções para pressão e velocidade, definidos como p'' , u'' , v'' e w'' , levando as componentes corrigidas dadas pelas equações 3.44, 3.45, 3.46 e 3.47. Essas correções são em relação aos valores utilizados no início do processo.

$$p = p^* + p'' \quad (3.44)$$

$$u = u^* + u'' \quad (3.45)$$

$$v = v^* + v'' \quad (3.46)$$

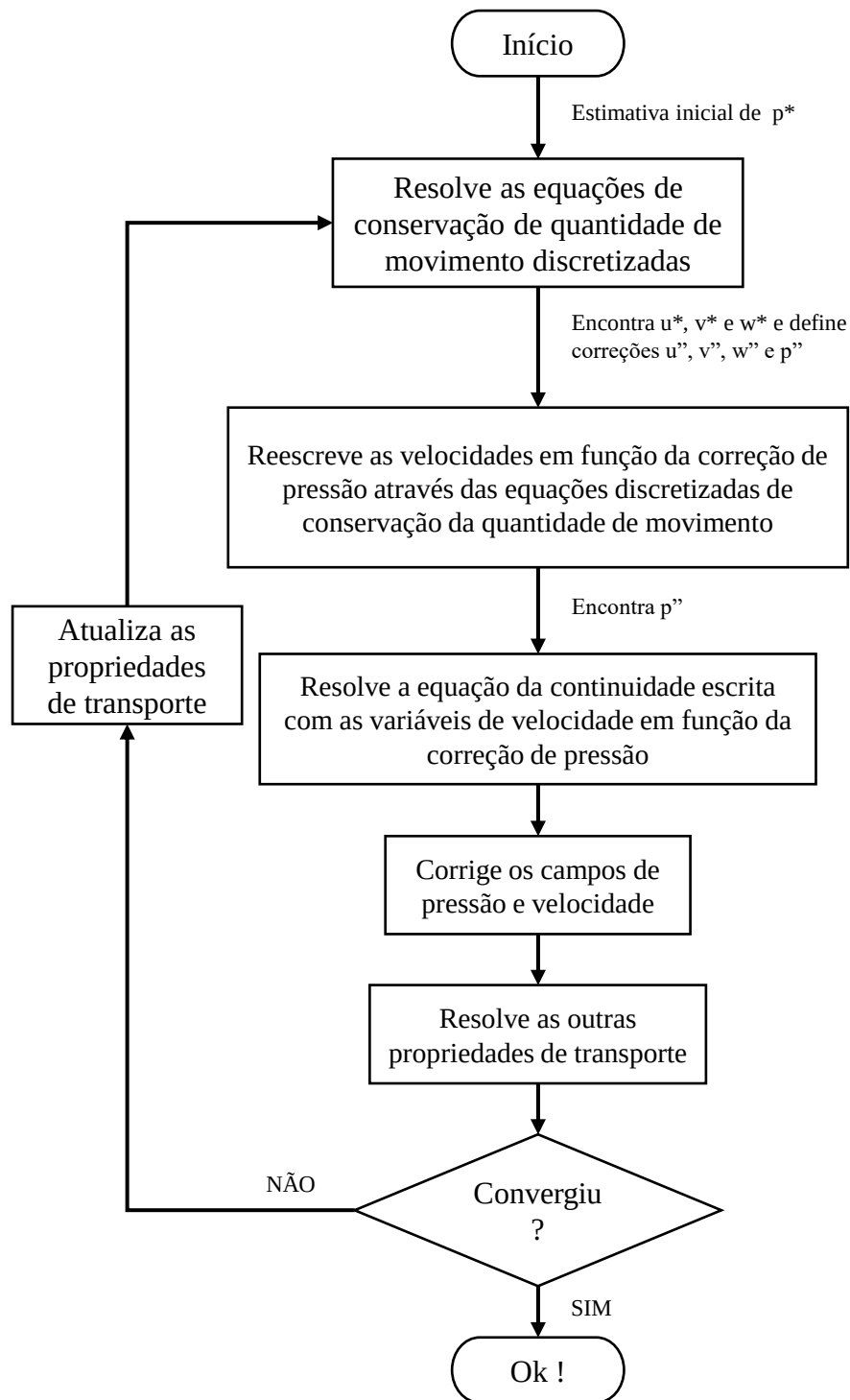
$$w = w^* + w'' \quad (3.47)$$

4. Então esses corretores de velocidade e pressão são utilizados para montar a equação da quantidade de movimento e nesse ponto do algoritmo uma simplificação dos termos que acompanham a velocidade no lado direito da equação discretizada é feita, com objetivo de se obter uma equação da correção da velocidade em função unicamente da correção da pressão.

5. O próximo passo é utilizar a equação da continuidade reescrita com os termos de correção da pressão e resolvê-la encontrando os valores de correção de pressão p'' .
6. Por fim os valores das velocidades corrigidas são encontrados utilizando as equações para as componentes de velocidade em função das correções de pressão 3.45, 3.46, 3.47 e a pressão é atualizada com a equação 3.44.
7. Com os valores das componentes de velocidade encontrados as outras equações de transporte podem ser resolvidas e se a convergência não for atingida o processo iterativo é atualizado onde os valores estimados no começo do processo são atualizados para os novos valores encontrados.

No momento de atualização das componentes de velocidade e pressão, passo 6, fatores de sub-relaxação podem ser utilizados a fim de melhorar a convergência do processo iterativo. Esses coeficientes de sub-relaxação devem ser escolhidos com muito cuidado uma vez que valores muito altos podem levar a uma divergência ou oscilações muito bruscas nos resultados e valores muito baixos induzem uma convergência muito lenta ao problema. A figura 21 apresenta um diagrama do desenvolvimento do algoritmo SIMPLE.

Figura 21: Algoritmo SIMPLE



Fonte : Adaptado de *Versteeg & Malalasekera (2007)*

3.3 Análise numérica

Esta seção apresenta a metodologia utilizada para a análise numérica do trabalho. Primeiramente é apresentado o problema físico do modelo 2D, junto as suas condições de contorno e estudos de domínio e malha. Em seguida o panorama da simulação 3D é apresentada junto a malha e condições de contorno utilizada. Por fim, são abordados as configurações e critérios adotados nas simulações.

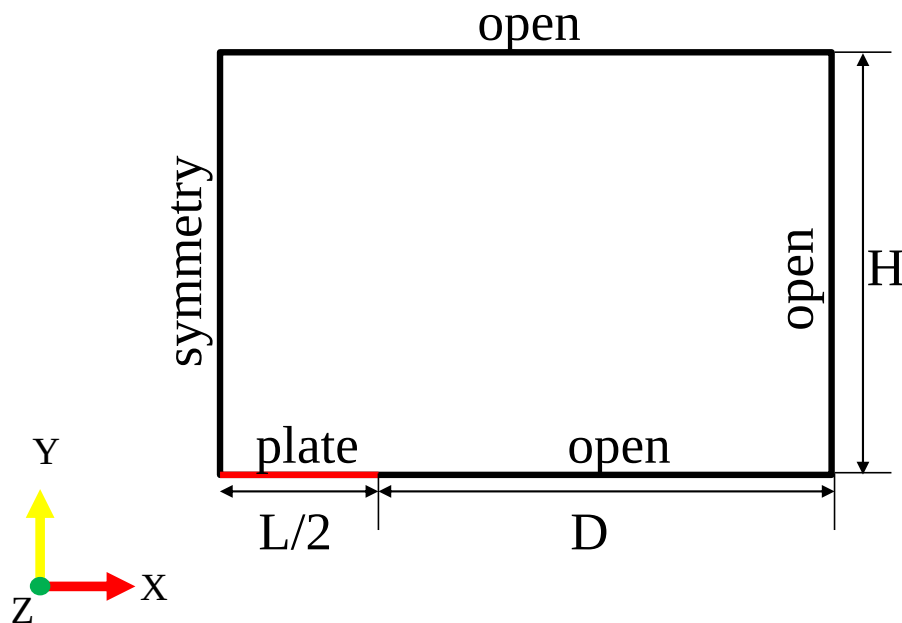
3.3.1 Problema físico

As simulações sempre se conduzirão em torno do problema de uma placa plana horizontal com temperatura uniforme, T_s e um domínio de ar a uma temperatura T_∞ que envolve a placa, sendo $T_s > T_\infty$.

Caso 2D

Os casos bidimensionais foram modelados de acordo com a geometria apresentada na figura 22. O domínio possui seis fronteiras, sendo as fronteiras da frente e de trás, na direção Z, definidas como vazias, pelo fato de ser uma simulação 2D.

Figura 22: Esquema da geometria do problema 2D



Fonte: Elaborado pelo autor.

A placa, chamada de *plate*, é dividida ao meio e uma condição de simetria é adotada na fronteira

que divide a placa ao meio, essa fronteira da esquerda é chamada de *Symmetry*. As fronteiras de cima, da direita e a fronteira adjacente a placa, são denominadas de *Open*, são modeladas como se fossem abertas, permitindo entrada e saída de massa.

A placa possui um comprimento L a cota da borda direita da placa até o final do domínio é D e a altura do domínio é H . As hipóteses escolhidas para modelar o problema 2D foram:

- Modelo 2D;
- Regime estacionário;
- Ar é o fluido de operação;
- O ar é incompressível;
- A aproximação de Boussinesq é válida;
- A aceleração da gravidade atua em $-Y$;
- O acoplamento de pressão e velocidade nas equações de conservação se dão pelo algoritmo SIMPLE;
- As simulações foram conduzidas utilizando os modelos de turbulência $\kappa - \varepsilon$ e posteriormente $\kappa - \omega$ SST.

As propriedades termo-físicas e de transporte, fornecidas ao programa foram tomadas na temperatura de filme, que é uma média entre a temperatura do meio (T_∞) e a temperatura da superfície da placa (T_s). Os valores das propriedades físicas utilizadas são apresentadas na tabela 5

Tabela 5: Valores das propriedades termo-físicas utilizadas nas simulações 2D.

T_∞	290 [K]
T_s	310 [K]
Pr	0,711 []
β	0,00333 [1/K]
cp	1007,33 [J/(kg · K)]
ρ	1,1837 [kg/m ³]
ν	$1,55 \times 10^{-5}$ [m ² /s]
k	0,0262 [W/(m · K)]
T_{ref}	290 [K]

Fonte : Elaborado pelo autor.

A fim de variar o número de Rayleigh de 10^4 a 10^9 , um valor fictício de gravidade foi calculado para resultar no Ra_L desejado.

Tabela 6: Valores de gravidade utilizados nas simulações 2D.

Ra_L	g [m/s ²]
10^4	0,0000537
10^5	0,000537
10^6	0,00537
10^7	0,0537
10^8	0,537
10^9	5,37

Fonte : Elaborado pelo autor.

Os valores de gravidade utilizados são apresentados na tabela 6. Vale ressaltar que os valores de gravidade foram calculados com base no Ra_L , ou seja, o número de Rayleigh com o comprimento da placa L , tomado como comprimento característico. Posteriormente, os valores de Ra_{Lc} serão calculados com base no diâmetro hidráulico apresentado na equação 2.3.

O software de código aberto OpenFOAM v1906, foi utilizado para simular todos os casos com o solver bouyantBoussinesqSimpleFoam, que é um solver capaz de lidar com todas as hipóteses apresentadas.

3.3.2 Condições de contorno

As condições de contorno impostas no modelo são apresentadas na tabela 7. Elas são apresentadas de acordo com o tipo de condição utilizada no OpenFOAM.

A condição de temperatura especificada ou condição de primeira espécie, foi atribuída à placa. Essa temperatura foi estabelecida como 310 K. Para as regiões abertas a condição de inletOutlet, permite mesclar condições, ou seja, se o fluxo estiver entrando no domínio um valor estabelecido é imposto, caso contrário um valor de gradiente nulo é imposto à fronteira. O valor caso o fluxo esteja entrando no domínio é estabelecido como 290 K.

A condição de zeroGradient é uma condição de segunda espécie, onde o gradiente da grandeza é especificado como nulo.

As condições de valor calculado é estabelecida para pressão, pelo fato dessa grandeza ser derivada a partir das condições de p_{rgh} , como apresentado pela equação 3.48

$$p_{rgh} = p - (\rho gh) \quad (3.48)$$

onde p é a pressão, ρ é a massa específica, g a gravidade e h a posição de acordo com a carga hidrostática.

A condição `fixedFluxPressure`, é aplicada para superfícies onde a componente de forças de campo nas equações de Navier-Stokes são presentes, neste caso a condição ajusta o gradiente de pressão nessa superfície de acordo com as forças atuantes nela.

A condição `pressureInletOutletVelocity`, especifica um gradiente nulo para velocidade na fronteira quando o fluxo está saindo. Quando o fluxo entra no domínio ela muda para um valor de velocidade tangencial específico igual a 0 m/s.

Para as propriedades turbulentas tem-se a combinação no modelo $\kappa - \omega$ SST, especificada como `fixedValue` e função de parede para κ e ω respectivamente. Já para o modelo $\kappa - \varepsilon$ funções de parede para ambas as grandezas.

A condição `symmetry` é utilizada para regiões de simetria e a condição `empty` para as direções das fronteiras que não serão resolvidas.

Tabela 7: Condições de contorno para simulações 2D.

Nome	T	U	p	p_{rgh}	nut	alphat	ε	κ	ω
plate	fixedValue	noSlip	calculated	fixedFlux Pressure	nutk WallFunction	alphat WallFunction	epsilon WallFunction	kLowRe WallFunction / fixed Value	omega Wall Function
open	inletOutlet	pressureInlet OutletVelocity	calculated	totalPressure	zero Gradient	zero Gradient	zero Gradient	zero Gradient	zero Gradient
symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry
frontAndBack	empty	empty	empty	empty	empty	empty	empty	empty	empty

Fonte: Elaborado pelo autor.

As condições iniciais do problema são apresentadas na tabela 8. e são estabelecidas para todo o interior do domínio.

A unidade da pressão não é o usual Pa ou $kg/(s^2m)$, pois o solver bouyantBoussinesqSimpleFoam trabalha com a aproximação de Boussinesq, ou seja, o fluido é incompressível então a massa específica passa dividindo o gradiente de pressão na equação da conservação de quantidade de movimento, e a equação é resolvida em termos de p/ρ , também chamada de pressão cinemática.

Tabela 8: Condições iniciais dos problemas 2D.

Campo	valor
T	290 [K]
U	(0 0 0) [m/s]
p	0 [m ² /s ²]
p_{rgh}	0 [m ² /s ²]
nut	0 [m ² /s]
alphat	0 [m ² /s]
κ	3,75e-4 [m ² /s ²]
ε	4,00e-6 [m ² /s ³]
ω	0,17 [1/s]

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.3 Estudo de domínio e malha

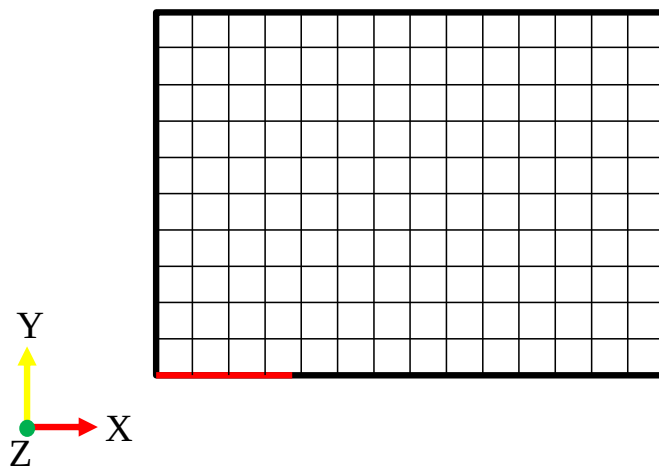
Definido os fenômenos físicos do problema e as respectivas condições de contorno de cada fronteira, é necessário partir para a parte que mais consome tempo dos engenheiros e analistas, que é a geração da malha ou discretização do domínio.

Como o OpenFOAM trabalha com o método dos volumes finitos, apresentado anteriormente, é indispensável a divisão do domínio esboçado na figura 22 em diversos volumes. A figura 23 mostra uma representação esquemática desse processo.

Estudo de domínio

Com objetivo de compreender a influências do tamanho do domínio simulado na região próxima da placa plana, um estudo de domínio foi realizado. Para isso três simulações variando a cota D da figura 22. Sendo os valores de D iguais a 2,5m, 5,5m e 9,5m. Os valores de L e H sempre se mantiveram constantes e iguais a 1,0 m e 2,0 m respectivamente. Para esses estudo de domínio

Figura 23: Esquema da malha do problema 2D



Fonte: Elaborado pelo autor.

e o futuro estudo de malha, o número de $Ra_L = 10^9$ com modelo de turbulência $\kappa - \omega$ SST foi escolhido.

Os estudos foram conduzidos de forma a sempre manter a mesma razão de aspecto dos volumes, ou seja, a medida que o domínio aumenta, é necessário aumentar o número de volumes para cobrir toda a área do domínio. A figura 24 mostra as três malhas utilizadas nesse estudo. A cota da altura do domínio, H , foi mantida constante em todos os estudos, com o valor de 2,0m.

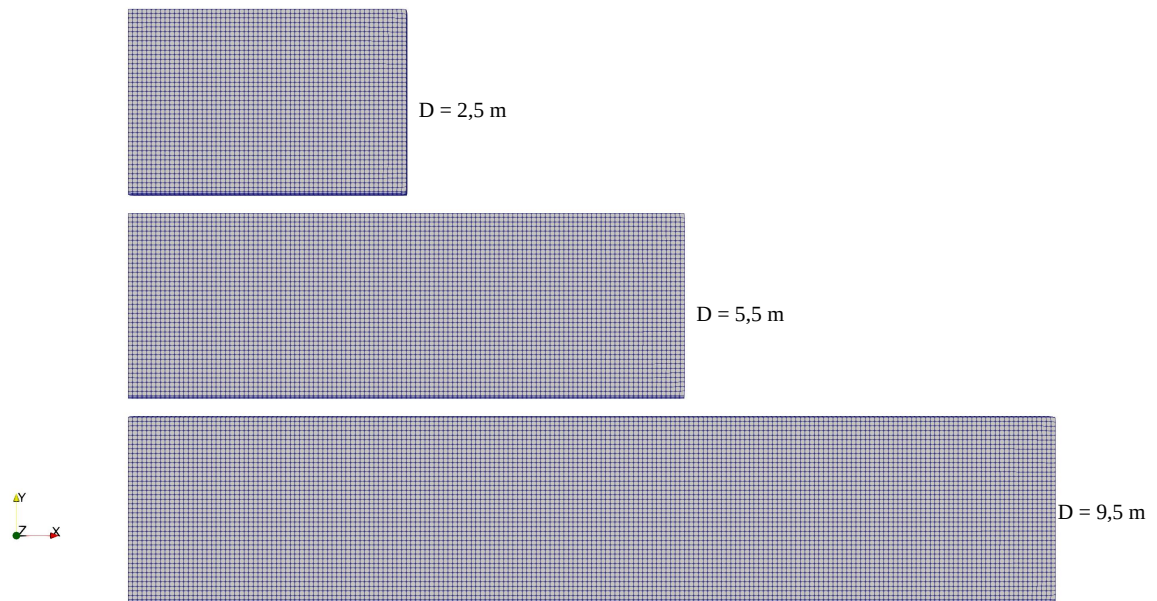
Em seguida foi analisado os contornos de velocidade e temperatura para os três casos simulados. Com efeito, comparações foram realizadas a fim de determinar a influência do comprimento do domínio nos resultados obtidos. Assim, o tamanho do domínio utilizado nas outras simulações pode ser estabelecido.

Estudo de malha

Conhecendo o tamanho do domínio, um estudo de malha foi conduzido posteriormente. Esse estudo também foi realizado para a condição de $Ra_L = 10^9$ com o modelo de turbulência $\kappa - \omega$ SST.

O tamanho dos elementos são muito importantes em qualquer simulação numérica. A dimensão dos volumes dita a importância para se obter quantitativamente resultados coerentes. Sendo válida, em geral, a regra de quando mais elementos mais preciso são os resultados. Porém, o inconveniente é que quanto maior a quantidade de volumes, maior o tempo para resolver as equações de conservação para esses volumes.

Figura 24: Estudo do tamanho do domínio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O estudo de malha objetiva obter uma malha otimizada que entregue bons resultados sem consumir muito tempo computacional.

Novamente, três casos foram simulados, e eles diferem uns dos outros pela quantidade de volumes do modelo. A quantidade de volumes de cada malha é apresentado na tabela 9.

Tabela 9: Estudo de convergência de malha.

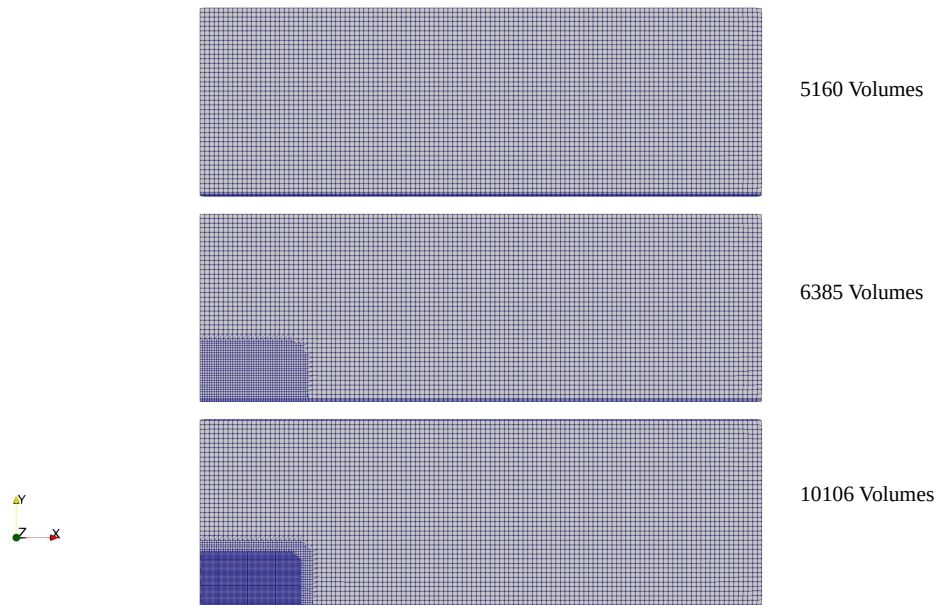
Nº da malha	Nº de volumes
1	5160
2	6385
3	10106

Fonte: Elaborado pelo autor.

Foi priorizado o refinamento apenas na região de interesse do estudo que é a região próxima a placa. A figura 25 mostra as três malhas que foram utilizadas nesse estudo.

Para a escolha da malha mais adequada para continuar a resolver os casos, a taxa de transferência de calor foi calculada para os três casos. A partir de uma análise onde aumentando o número de volumes não é observado grandes alterações na taxa de transferência de calor, pode-se determinar a quantidade otimizada de volumes a ser utilizada nos estudos.

Figura 25: Estudo de malha.

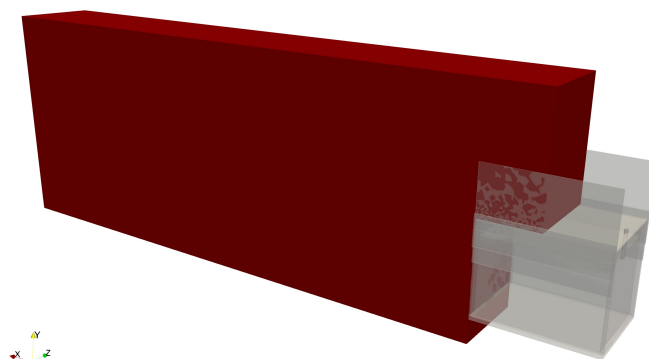


Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso 3D

Para auxiliar o procedimento experimental, uma simulação do experimento foi realizada.

Figura 26: Domínio da simulação 3D.



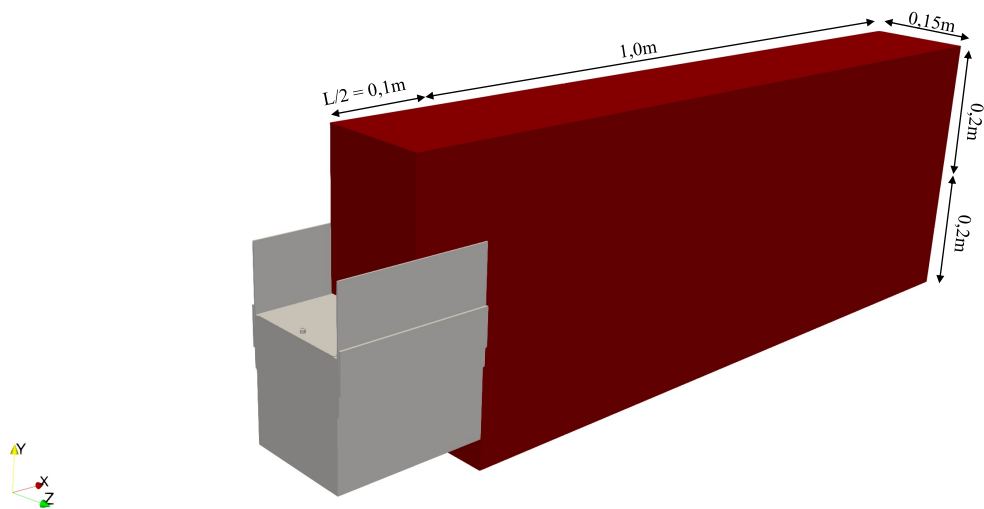
Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 26 mostra o aparato experimental utilizado, destacado em cinza translúcido, e em vermelho o domínio de ar extraído para realização da simulação.

O domínio se estende por 1m depois da borda da placa e possui 40cm de altura, sendo 20cm

para cima e 20cm para baixo da placa. A 27 apresenta essas cotas.

Figura 27: Dimensões do domínio 3D.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O modelo tridimensional foi utilizado como base para estimar a potência necessária a ser dissipada pelas cargas resistivas utilizadas para aquecer a placa.

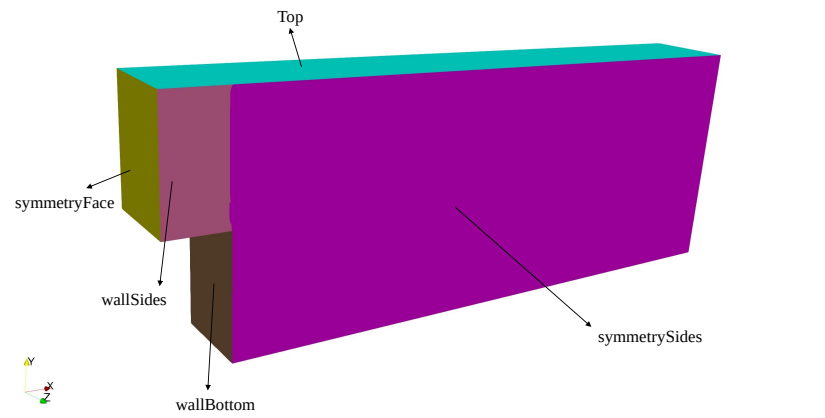
Fenômenos físicos associados ao problema 3D

Os mesmos fenômenos físicos das simulações 2D serão utilizadas para a simulação 3D, com apenas duas ressalvas. O modelo agora é tridimensional e apenas o modelo de turbulência $\kappa - \omega$ SST foi utilizado.

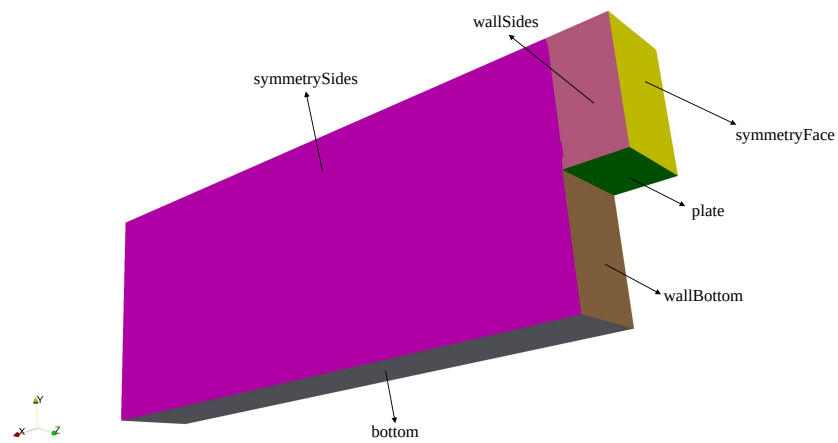
Condições de contorno

As fronteiras do domínio são apresentadas nas figuras 28a, 28b e 28c. A tabela 10 apresenta as condições de contorno utilizadas no modelo 3D.

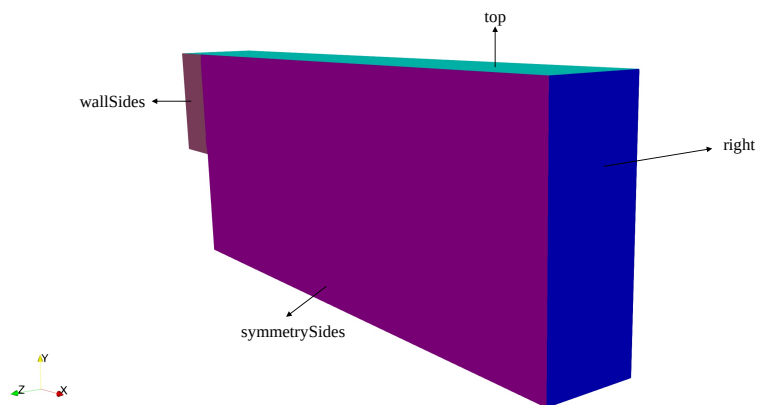
Figura 28: Fronteiras do domínio 3D. (a) Fronteiras I. (b) Fronteiras II. (c) Fronteiras III



(a)



(b)



(c)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 10: Condições de contorno para o caso 3D.

Nome	T	U	p	p_{rgh}	nut	alphanut	ω	κ
plate	fixedValue	noSlip	calculated	fixedFlux Pressure	nutk WallFunction	alphanut WallFunction	omega WallFunction	fixedValue
right	inletOutlet	pressureInlet OutletVelocity	calculated	totalPressure	zero Gradient	zero Gradient	zero Gradient	zero Gradient
bottom	inletOutlet	pressureInlet OutletVelocity	calculated	totalPressure	zero Gradient	zero Gradient	zero Gradient	zero Gradient
top	inletOutlet	pressureInlet OutletVelocity	calculated	zeroGradient	zero Gradient	zero Gradient	zero Gradient	zero Gradient
wallBottom	zero Gradient	noSlip	calculated	fixedFlux Pressure	nut WallFunction	alphanut WallFunction	omega WallFunction	fixedValue
wallSides	zero Gradient	noSlip	calculated	fixedFlux Pressure	nut WallFunction	alphanut WallFunction	omega WallFunction	fixedValue
symmetryFace	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry
symmetrySides	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry

Fonte: Elaborado pelo autor.

A diferença de temperaturas da simulação foi de 15°C , sendo a temperatura do meio $T_{\infty} = 27^{\circ}\text{C}$ e a temperatura da placa fixada em $T_s = 42^{\circ}\text{C}$.

Tabela 11: Condições iniciais dos problemas 3D.

Campo	valor
T	299 [K]
U	(0 0 0) [m/s]
p	0 [m ² /s ²]
p_{rgh}	0 [m ² /s ²]
nut	0 [m ² /s]
alphat	0 [m ² /s]
κ	$3,75 \times 10^{-4}$ [m ² /s ²]
ε	$4,00 \times 10^{-6}$ [m ² /s ³]

Fonte: Elaborado pelo autor.

As condições iniciais impostas aos campos do escoamento do modelo 3D são apresentadas na tabela 11.

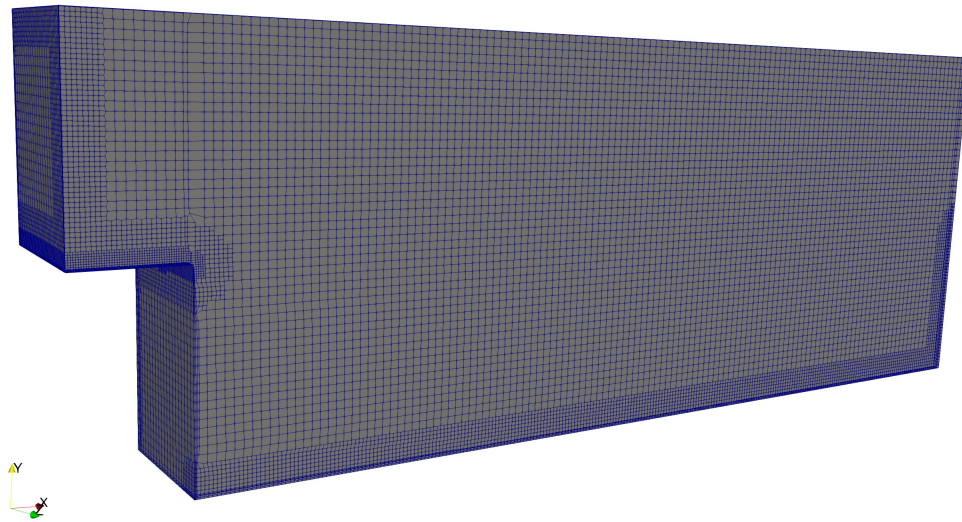
Malha do modelo 3D

A malha para o domínio de ar na simulação 3D possui 225284 volumes e refinamento na região próxima a placa. Procurou-se manter uma razão de aspecto o mais próximo de 1.

Camadas de células ou volumes prismáticos foram geradas na região próxima as paredes do domínio para lidar com a modelagem da camada limite.

O utilitário do OpenFOAM snappyHexMesh se mostrou muito capacitado em gerar malha hexa dominantes baseados em superfícies de .STL gerado por um software CAD.

Figura 29: Malha do domínio 3D.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.4 Verificação do y^+

Os modelos de turbulência, quando utilizados, possuem restrições de uso nas condições de contorno para paredes, as chamadas leis de paredes. Essas leis de paredes geralmente são recomendadas para faixas de um parâmetro adimensional chamado y^+ .

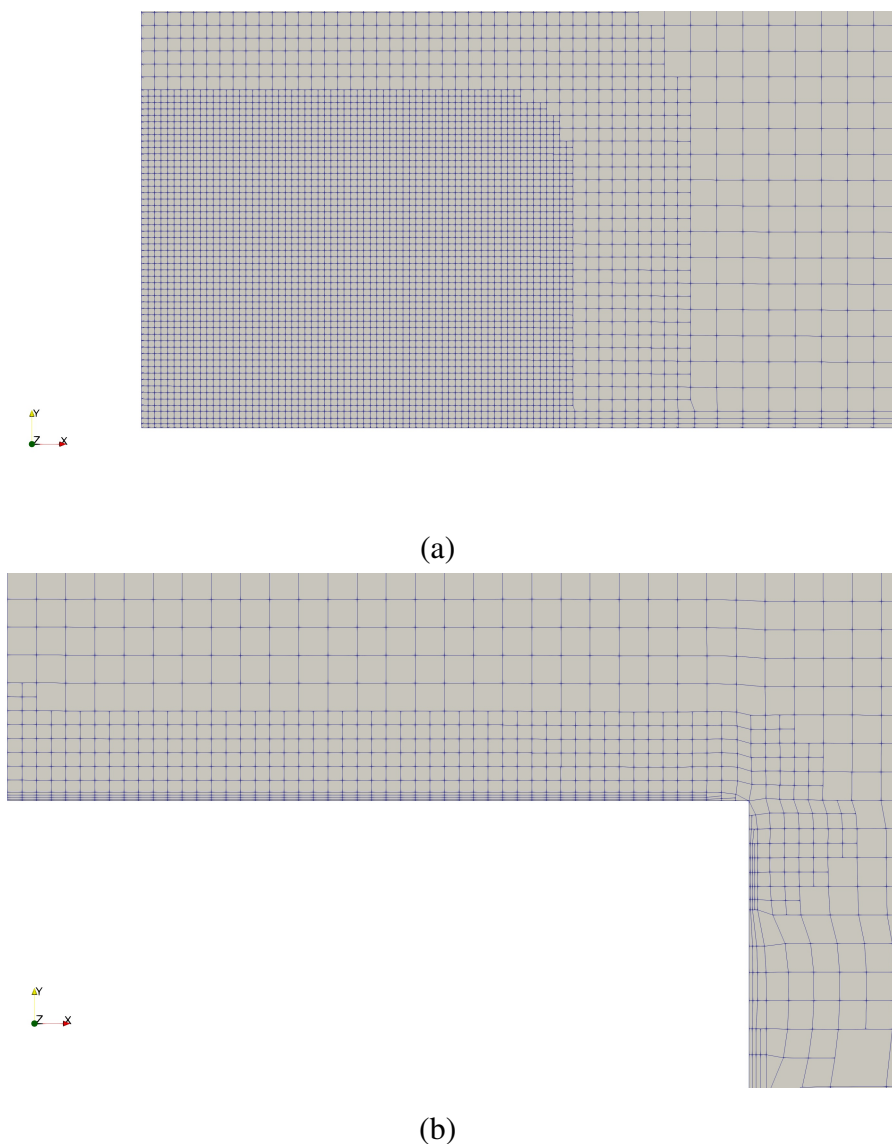
O y^+ identifica a região da camada limite em que determinada análise é realizada, ou seja tem muita influência da direção normal a placa, que descreve a altura de onde está sendo analisado a camada limite. A divisão dessas regiões são dadas pela região sub-viscosa, região de amortecimento e região logarítmica.

Nos modelos 2D, com o modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$, foram utilizadas leis de parede para modelar a camada limite. Dentro do OpenFOAM a condição utilizada tem especificação de leis de parede de Reynolds baixo, e o calculo do valor κ , para a parede, depende diretamente do valor do y^+ (LIU, 2017). Sendo o $y_{laminar}^+ = 11,5$ um valor de transição que determinará se expressões para camada viscosa será utilizado ($y^+ \leq y_{laminar}^+$) ou se expressões para a região logarítmica será utilizada ($y^+ \geq y_{laminar}^+$).

Já nos modelos 2D com modelo de turbulência $\kappa - \omega$ SST e no modelo 3D, a camada limite foi resolvida por completo, atribuindo uma condição de energia cinética turbulenta igual a zero na placa no lugar de uma lei de parede.

A figura 30 mostra com detalhes o tamanho das células próximas a região da placa, para possibilitar um y^+ adequado dentro dos valores estabelecidos pelo software.

Figura 30: Detalhes da malha próximo a placa. (a) Modelo 2D. (b) Modelo 3D



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.5 Critérios e configurações das simulações

Em todas as simulações o gradiente de temperatura normal à placa foi acompanhado para garantir a convergência e para verificar se a simulação atingiu o regime estacionário.

Para simulações 2D, foram realizadas 60000 iterações. Já para o caso 3D 18000 iterações foram suficientes para estabilidade do gradiente.

Os esquemas numéricos de discretização utilizados nas simulações 2D e 3D são apresentados na Tabela 12. Já o acoplamento pressão-velocidade utilizado é apresentado na Tabela 13.

Os solvers utilizados para os sistemas de equações lineares resultantes, tanto para os casos 2D quanto para os casos 3D são apresentados na Tabela 14

Coeficientes de sub-relaxação foram utilizados para pressão, velocidade, energia e grandezas

Operador	Método
Operador Gradiente Explícito	Gauss linear
Operador Divergente (U)	Gauss upwind
Operador Divergente ($\kappa; \omega; \varepsilon; T$)	Gauss upwind
Operador Laplaciano	Gauss linear corrected
Operador Gradiente Implícito	corrected

Tabela 12: Discretização dos Operadores Matemáticos

Parâmetro	Atribuição
Acoplamento p-U	SIMPLE
nNonOrthogonalCorrectors	0

Tabela 13: Parâmetros do algoritmo para acoplamento pressão-velocidade.

Parâmetro	Atribuição
Solver linear para p_{rgh}	PCG
preconditioner	DIC
relTol	1e-2
tolerance	1e-6
Solver linear para U, $\kappa, \omega, \varepsilon, T$	PBiCGStab
preconditioner	DILU
relTol	1e-4
tolerance	1e-10

Tabela 14: Parâmetros do algoritmo para solução de sistemas lineares.

de turbulência. Esses Coeficientes são apresentados na tabela 15.

A taxa de transferência de calor tanto das simulações bidimensionais quanto da simulação tridimensional foi computada para posterior pós-processamento. Com a taxa de transferência de calor para cada caso, o coeficiente de transferência de calor médio e número de Nusselt médio podem ser calculados de acordo com as equações 3.52 e 1.5 respectivamente.

Tabela 15: Coeficientes de sub-relaxação.

Coeficientes de sub-relaxação	Valor
Pressão	0,3
Velocidade	0,7
Energia	0,9
Energia cinética turbulenta	0,7
Dissipação da energia cinética turbulenta	0,7
Frequência de Dissipação da energia cinética turbulenta	0,7

Fonte : Elaborado pelo autor.

3.4 Análise experimental

Esta seção é dividida em três subseções, a primeira contendo os materiais e montagem do aparato experimental e a segunda sobre a instrumentação utilizada para aquisição das medidas e por fim o procedimento utilizado para visualização do escoamento.

3.4.1 Aparato experimental

A análise experimental foi baseada na simulação prévia, com uma placa de alumínio de 200 mm x 150 mm que foi aquecida por resistências elétricas.

O esquema do aparato experimental é apresentado na figura 68.

Figura 31: Aparato experimental.

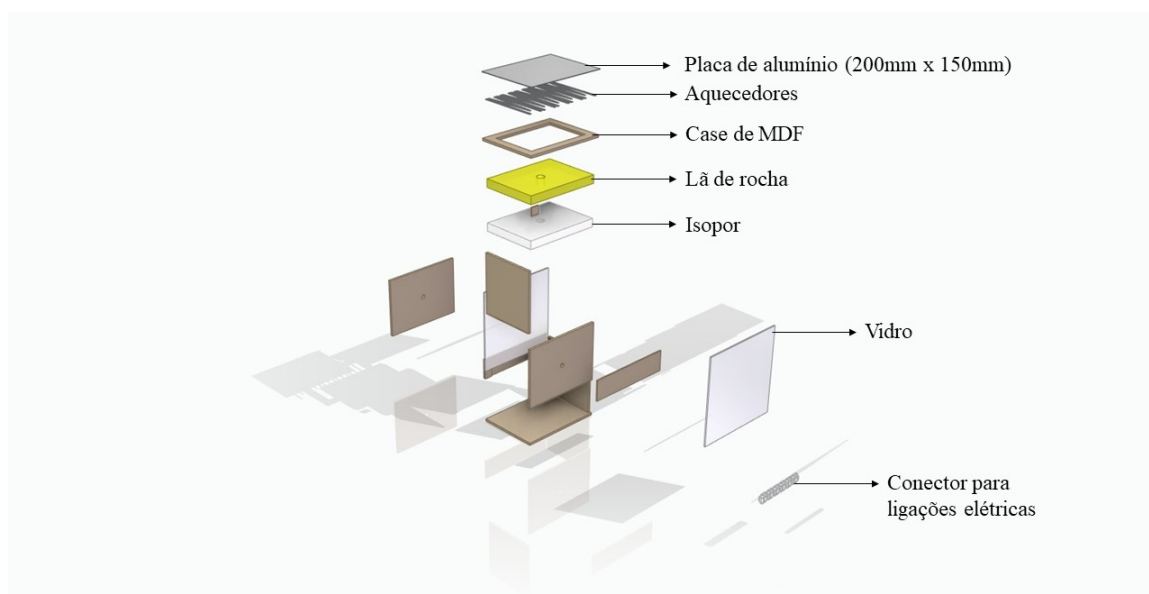


Fonte: Elaborado pelo autor.

O aparato tem como objetivo representar a simulação realizada, portanto foram utilizados vidros ao longo do comprimento da placa na tentativa de suprimir o escoamento na direção da largura da placa e representar um escoamento bidimensional.

A figura 69 mostra os materiais utilizados para construção do aparato. As figuras 33a e 33b mostram mais detalhes do aparato.

Figura 32: Materiais do aparato experimental.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na parte inferior da placa foi utilizado uma camada de lã de rocha e uma camada de isopor com objetivo de permitir a transferência de calor apenas para a placa.

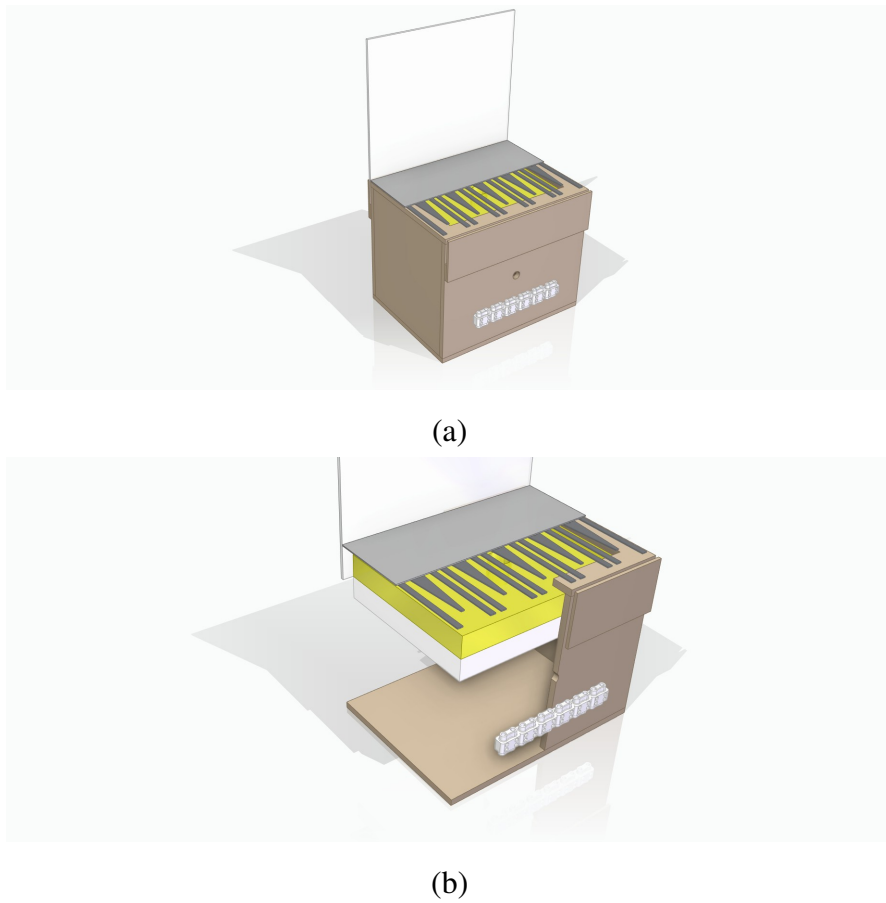
A placa de alumínio de 200mm x 150mm foi dividida em 5 seções uniformes ao longo de seu comprimento, onde cada seção possui um sistema de aquecimento individual que é realizado através de resistências elétricas instaladas na parte inferior da placa. As resistências consistiram em fios de Kanthal com uma resistência por unidade de metro igual a $280 \Omega/m$.

A tabela 16 apresenta os valores das resistências instaladas em cada seção da placa e localizações das resistências numeradas de 1 a 5 são mostradas na figura 34.

Essas resistências foram ligadas a uma fonte DC de 12V. Onde para cada resistência um regulador de tensão LM317 permitia a variação da tensão de 1,0V a 12,0V sob a resistência. Com efeito, ajustes podem ser realizados para uma maior uniformidade na temperatura a fim de replicar a condição da simulação.

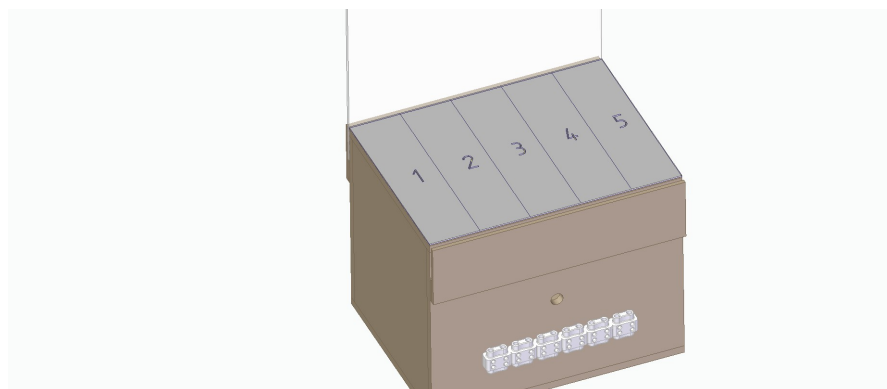
O procedimento da análise consiste em determinar a potência fornecida para a placa de acordo com a equação de potência para cargas resistivas, representada pela equação 3.49.

Figura 33: Detalhes do aparato experimental. (a) Corte na placa. (b) Detalhes do interior.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 34: Divisão da placa de alumínio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (3.49)$$

Adotando as hipóteses que a placa é muito fina e tem espessura desprezível e está a uma

Tabela 16: Valores das resistências utilizadas no procedimento experimental

Resistência N°	Valor [Ω]
1	172,00 $\pm$ 2,06
2	192,00 $\pm$ 2,30
3	185,60 $\pm$ 2,23
4	190,40 $\pm$ 2,28
5	180,60 $\pm$ 2,17

temperatura uniforme, propriedades físicas constantes e a análise acontece em regime estacionário, temos a seguinte expressão apresentada pela equação 3.50.

$$Pot = \dot{Q}_{conv} + \dot{Q}_{rad} \quad (3.50)$$

Ou seja, a potência é dissipada para o ambiente através da convecção natural e da radiação com o ar.

Para determinar a parcela de radiação é utilizada a lei de Stefan-Boltzman apresentada na equação 3.51

$$\dot{Q}_{rad} = \sigma \epsilon A (T_s^4 - T_{viz}^4) \quad (3.51)$$

Já a parcela de convecção é calculada a partir da lei de resfriamento de Newton apresentada na equação 3.52

$$\dot{Q}_{conv} = hA(T_s - T_{\infty}) \quad (3.52)$$

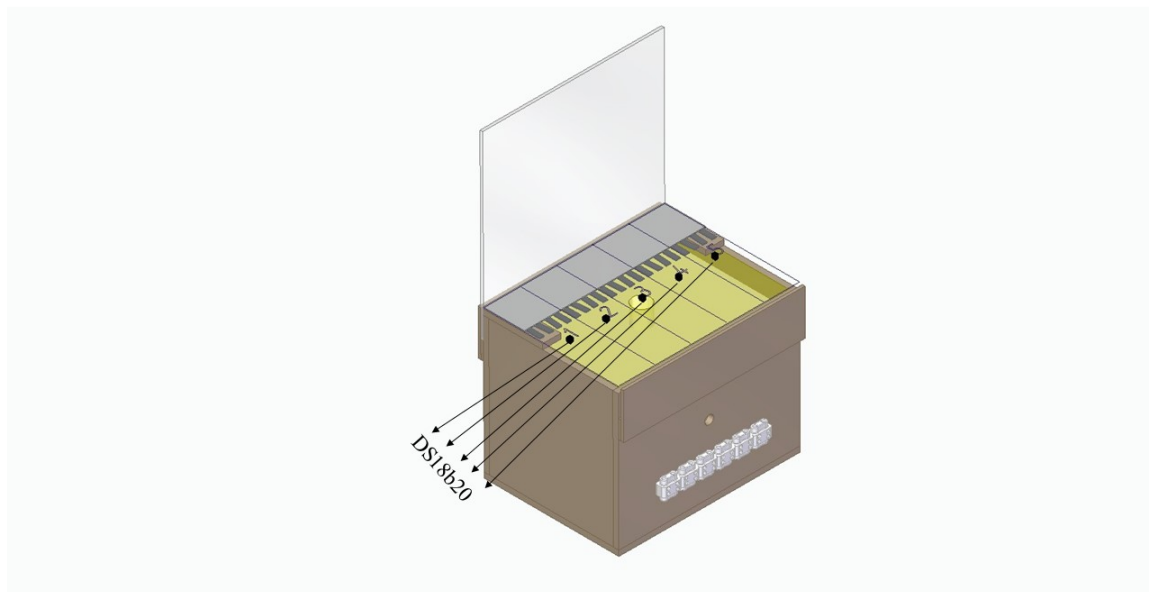
Assim, pode-se calcular o valor do h médio para a placa e consequentemente calcular o valor de Nusselt para esse caso de acordo com a expressão 1.5

3.4.2 Instrumentação

Para realizar as medidas de temperatura foram utilizados sensores de digitais Dallas DSB18B20 com exatidão de leitura de $\pm 0,5^\circ\text{C}$. Foram utilizados cinco sensores dispostos ao longo do comprimento da placa e centralizados em sua espessura. A figura 35 mostra a localização dos sensores no aparato experimental. Além dos cinco sensores na placa, um sensor ficava exposto ao ambiente para medir a temperatura do ar ambiente.

Os sensores DS18B20 foram conectados a uma placa de aquisição Arduino UNO que coletava os dados a cada minuto.

Figura 35: Localização dos sensores DS18B20 no aparato experimental.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para medir a tensão em cada resistência foi utilizado um amperímetro de alicate Minipa ET-3166 (MINIPA, 2017) que também possui a capacidade de realizar leituras de tensão com uma exatidão de $\pm 0,8\%$ do valor medido. A figura 36 apresenta o multímetro utilizado.

Para a medida da emissividade (ϵ) da placa, foi utilizado um termômetro infravermelho MX4 da Raygner, com exatidão de $\pm 0,1^\circ\text{C}$. A figura 37 mostra o termômetro infravermelho.

A metodologia utilizada para medir a emissividade consistiu em ajustar o valor da emissividade do termômetro para que a temperatura medida ficasse o mais próximo possível da registrada pelo DSB18b20. O valor de emissividade obtido com esse método foi de 0,67.

3.4.3 Visualização do escoamento

Para realizar uma comparação visual do escoamento obtido na simulação, o efeito Schlieren será utilizado.

O efeito Schlieren, descoberto em 1864 pelo alemão August Toepler (ROLFE, 2015), é baseado no conceito base de refração. Onde um meio com diferentes densidades possuem índices de refração diferente e, portanto, refratam a luz de forma diferente (HARVARD, 2014).

O setup experimental possui um espelho côncavo, uma fonte de luz pontual, uma lâmina e um aparato ou câmera para visualização.

A figura 38 mostra os equipamentos necessários para se obter o efeito Schlieren.

Tanto a lâmina quanto o ponto de luz devem estar exatamente a uma distância de duas vezes o

Figura 36: Amperímetro de alicate Minipa ET-3166.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37: Termômetro IR MX4-Raygner

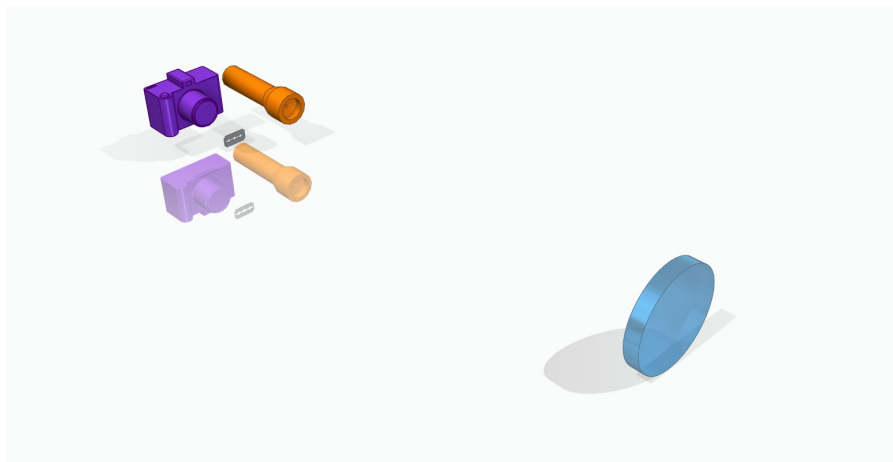


Fonte: Elaborado pelo autor.

foco do espelho. A lâmina é utilizada para desviar parte da luz que volta para a câmera e dar um contraste maior para a imagem.

A câmera é posicionada atrás da lâmina sendo o anteparo onde a imagem será projetada, além de possibilitar que essa imagem seja gravada. A figura 39 mostra os feixes de luz emitido pela

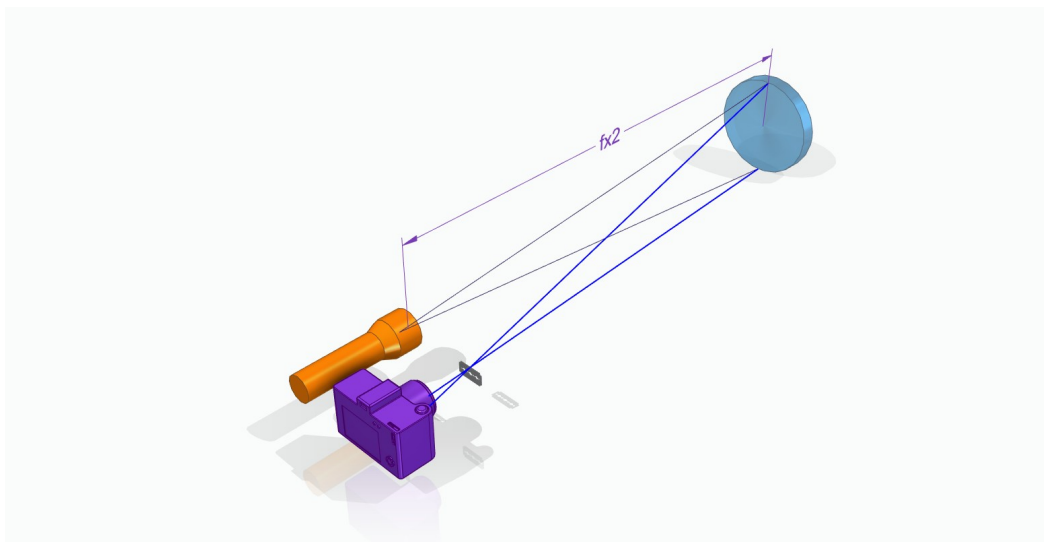
Figura 38: Aparato para visualização do escoamento através do efeito Schlieren



Fonte: Elaborado pelo autor.

fonte pontual de luz, representado pela linha mais fina e a luz refletida pelo espelho côncavo, representada pela linha mais espessa.

Figura 39: Posicionamento dos equipamentos para se obter o efeito Schlieren



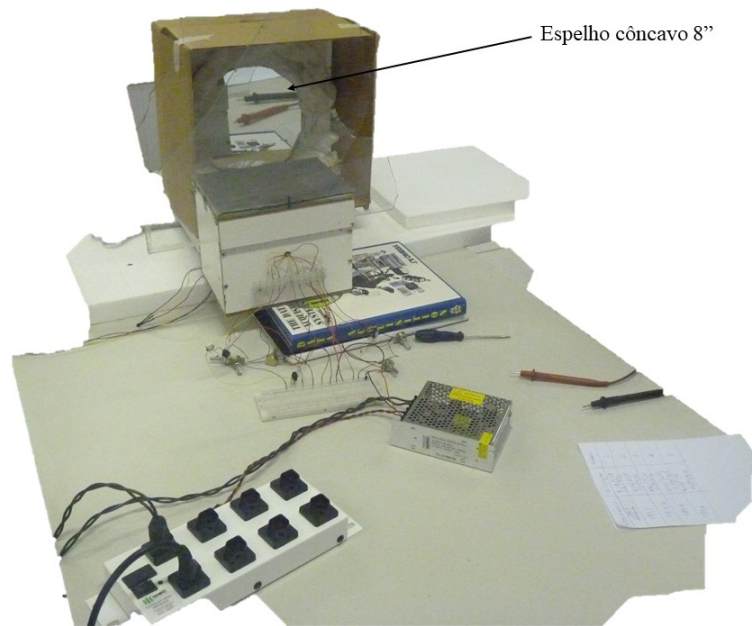
Fonte: Elaborado pelo autor.

A montagem do aparato foi realizada com um espelho côncavo de 8", utilizado em telescópios Newtonianos, um LED como fonte pontual de luz e uma câmera digital Lumix DMC-FZ18 8.3 megapixel.

As figuras 40, 41, 42a e 42b mostram a montagem do setup para obtenção do efeito.

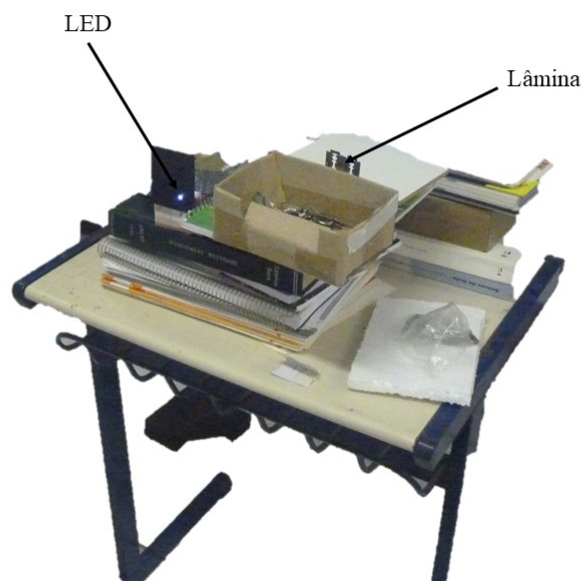
Devido a limitação do tamanho do espelho, as imagens coletadas para a visualização do esco-

Figura 40: Espelho de 8" utilizado para reproduzir o efeito Schlieren.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 41: Lâmina e fonte de luz utilizadas para reproduzir o efeito Schlieren.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 42: Setup de visualização completo. (a) Lateral. (b) Frontal



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

amento cobriram apenas uma parte da placa.

Quanto à análise das imagens coletadas, o software Tracker será utilizado para estimar o tamanho da camada limite formada no escoamento.

Capítulo 4

Resultados

O capítulo de resultados está dividido em três partes. A primeira apresenta os resultados das simulações realizadas. A segunda parte os resultados do procedimento experimental. Por fim, as correlações levantadas pelos resultados obtidos.

4.1 Resultados das simulações

4.1.1 Resultados do estudo de domínio e de malha

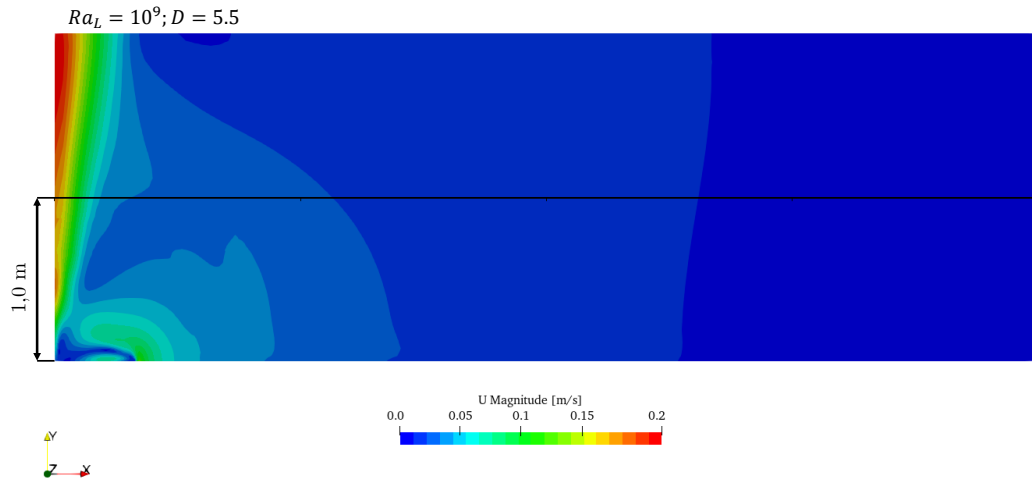
Os campos de velocidade e temperatura do estudo do tamanho do domínio adequado são apresentados na figura 44a e 44b. Esses gráficos são referentes a uma linha de 0,5 m no sentido de +X e a uma distância de 1,0m acima da placa, como mostra a figura 43.

Para uma comparação mais efetiva, as dimensões do domínio foram adimensionalizadas. Ou seja, as posições ao longo dos 0,5 m da linha utilizada para plotar os resultados foram divididas pelo comprimento da placa de 1,0 m. Com efeito, os efeitos nos campos de temperatura e velocidade podem ser comparados sem distorção entre os tamanhos de domínios utilizados.

Como observado na figura 44a a curva de temperaturas até $x/L = 0,3$ apresenta maiores valores de temperatura mais para o domínio menor, revelando uma influência da fronteira à direita, na região próxima a placa, evidenciado por uma menor dissipação de energia. Já o caso da 44b na curva da magnitude da velocidade percebe-se que a medida que a cota D aumenta a velocidade de entrada sofre uma perturbação maior.

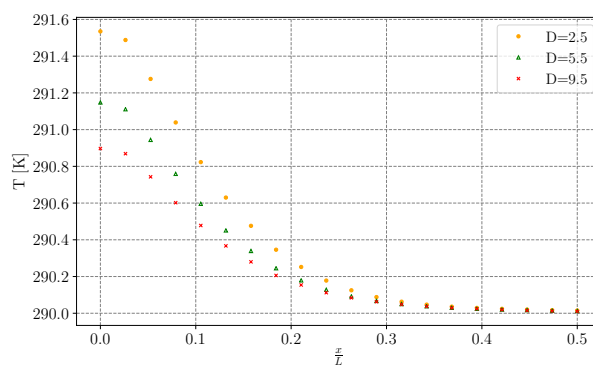
Com efeito, foi estabelecido que as simulações prosseguiriam com o domínio intermediário com $D = 5,5m$. Nesse caso a velocidade se restituir a um valor mais próximo de zero, quando comparado com o caso de $D = 9,5m$ e para a pluma térmica identificada também se dissipar de uma maneira que perturba menos o escoamento próximo a placa quando comparado ao caso de $D = 2,5m$.

Figura 43: Localização dos gráficos da figura 44 foi plotada.

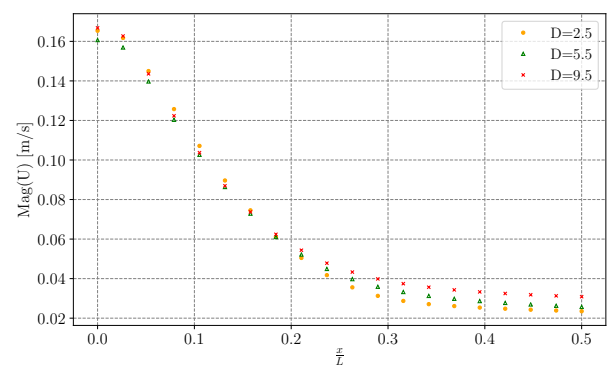


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 44: Resultados do estudo de domínio. (a) Temperatura ao longo do domínio para $y/H = 0,5$.
 (b) Magnitude da velocidade ao longo do domínio para $y/H = 0,5$



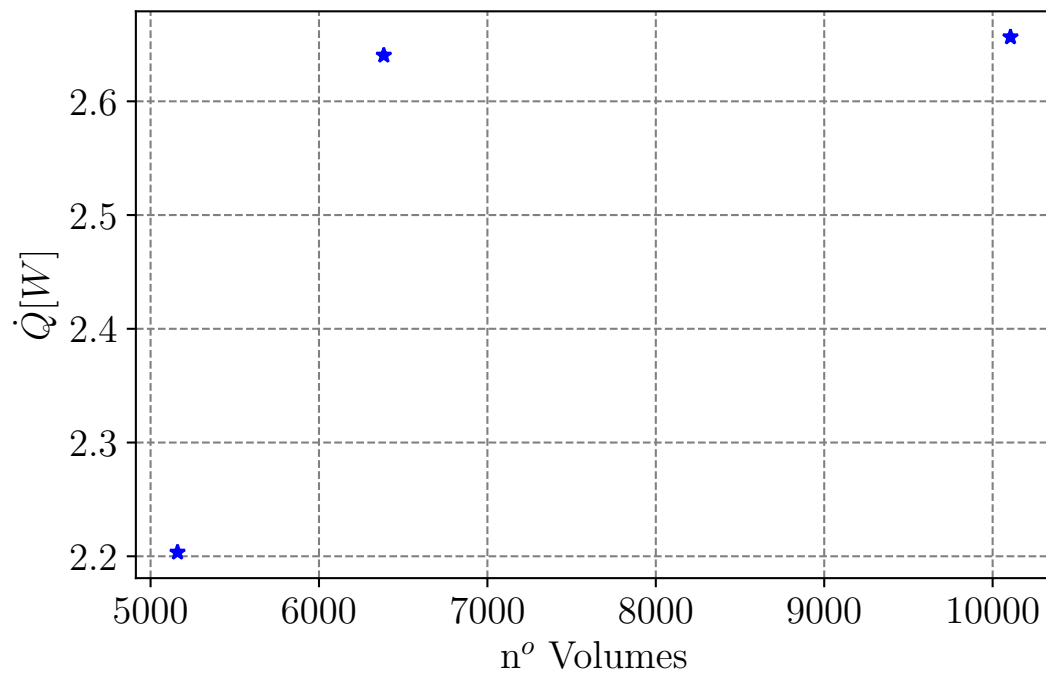
(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 45: Estudo de convergência de malha.



Fonte: Elaborado pelo autor.

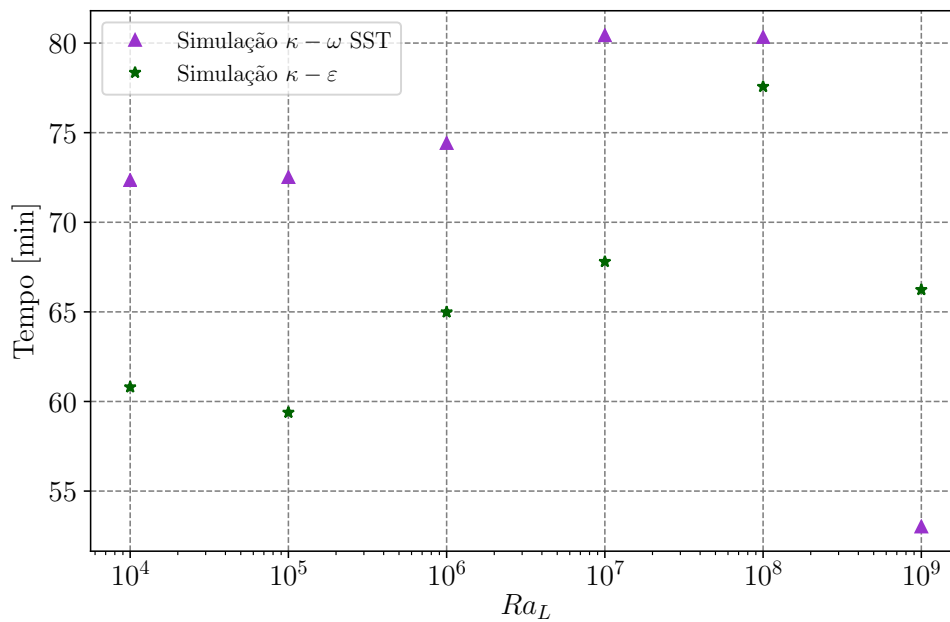
O resultado da convergência de malha é apresentado na figura 45, onde pode ser observado que da malha de 5395 volumes para a malha de 7456 volumes houve uma mudança de 0,0232% nos valores de taxa de transferência de calor computada para a placa. Assim sendo, pode-se admitir que a malha de 5395 volumes é a mais adequada para prosseguir com os estudos.

4.1.2 Simulação bidimensional

Os resultados das simulações bidimensionais foram divididos em duas subseções. A primeira apresenta os resultados do modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$ e segunda os resultados do $\kappa - \omega$ SST.

Os tempos de simulação de ambos os casos são apresentados na figura 46. Todos os casos foram simulados em um notebook Acer Intel Core i7-7500U CPU 2.70GHz - 2.90 GHz com 16.0 GB de memória RAM e as simulações foram executadas sem processamento paralelo.

Figura 46: Tempos de simulação para os modelos 2D $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$ SST.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma característica comum aos dois modelos 2D resultados foi a transitoriedade do escoamento para os resultados acima de $Ra_L \geq 10^7$. O comportamento transitório da simulação se dá por formações de pequenas plumas térmicas na borda da placa e sua advecção para o centro da placa, formando a pluma central. As figuras 47 e 48 apresentam a característica transitória para o escoamento de um $Ra_L = 10^9$, sendo as numerações romanas de I a V representando a evolução conforme aumentam-se as iterações.

Cabe ressaltar que apesar do solver utilizado não levar em consideração a discretização temporal, as oscilações são observadas através das iterações, que não representa um tempo físico real.

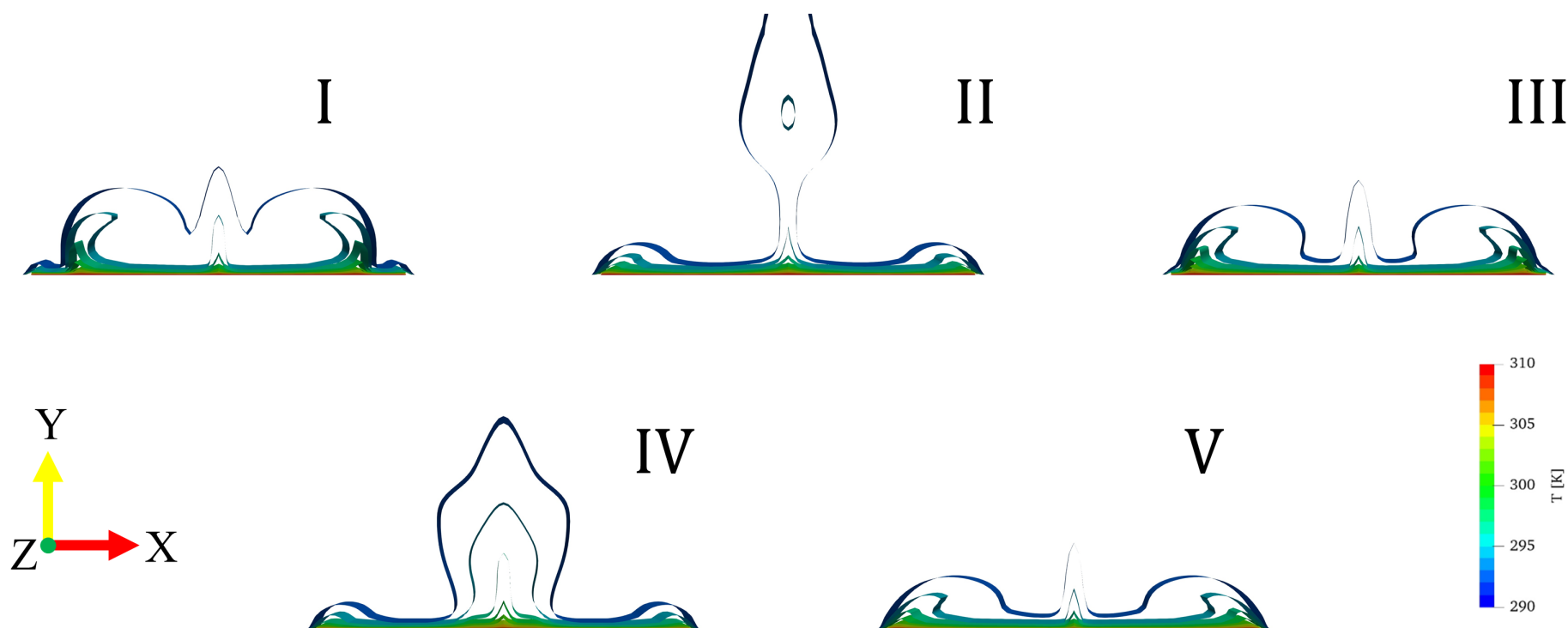
Sabendo que o interesse dos resultados é no Nusselt médio, para o levantamento das correlações, essa característica oscilatória não atrapalha a análise, uma vez que se é analisado o valor médio das taxas de transferência de calor, pelas últimas 5000 iterações das simulações onde esse padrão oscilatório é observado.

Tabela 17: y^+ para $Ra_L = 10^9$ para os casos 2D.

	y^+	
	$[máx]$	$[med]$
2D - $\kappa - \varepsilon$	3.7	2.6
2D - $\kappa - \omega$ SST	2.9	1.2

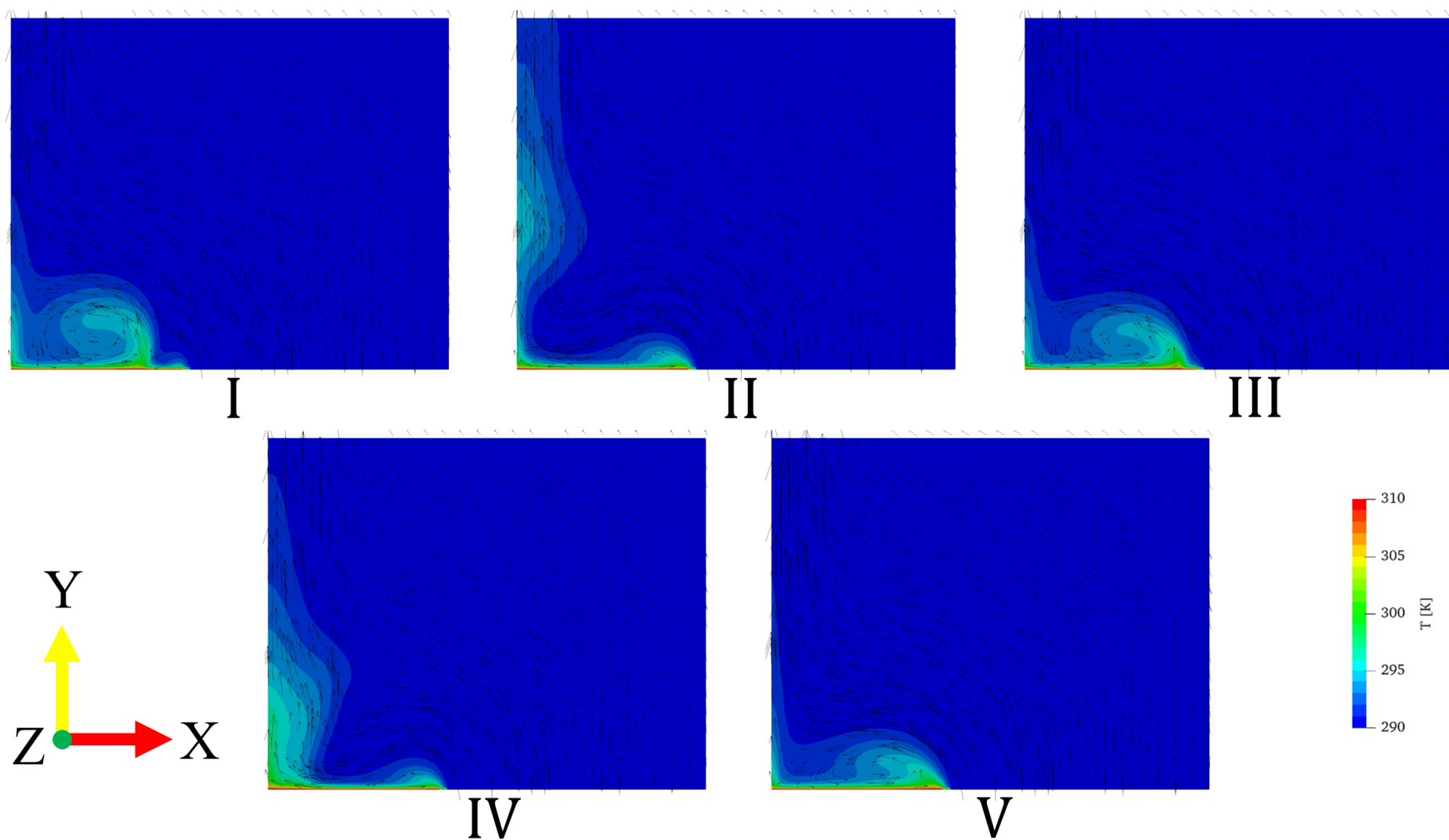
Quanto ao y^+ das malhas geradas, a tabela 17 apresenta os resultados de y^+ máximo e médio para o cenário mais crítico que é o $Ra_L = 10^9$. Assim, pode-se destacar que os valor desse adimensional está de acordo com a modelagem utilizada para a turbulência do caso, seja no modelo $\kappa - \varepsilon$ com leis de parede de baixo Reynolds, seja para a resolução completa como o modelo $\kappa - \omega$ SST.

Figura 47: Oscilações no escoamento da placa para $Ra_L = 10^9$, isotemperaturas.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Figura 48: Oscilações no escoamento da placa para $Ra_L = 10^9$, campo de temperaturas e vetores de velocidade .



Fonte : Elaborado pelo autor.

Modelo de Turbulência $\kappa - \varepsilon$

A tabela 18 apresenta os resultados da taxa de transferência de calor obtida nas simulações realizadas para os casos 2D com o modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$. Junto a taxa de transferência de calor as grandezas calculadas a partir da taxa como coeficiente de transferência de calor médio e número de Nusselt médio também são apresentado na tabela.

Tabela 18: Resultados de taxa de transferência de calor, h e Nusselt para o caso 2D $\kappa - \varepsilon$.

Ra_L	$\dot{Q}$ [W]	$\overline{h_L}$ [W/(m ² K)]	$\overline{Nu_L}$
10^4	0,1571	0,1571	5,997
10^5	0,2212	0,2212	8,442
10^6	0,3660	0,3660	13,97
10^7	0,7501	0,7501	28,63
10^8	1,456	1,456	55,59
10^9	3,398	3,398	129,7

Fonte: Elaborado pelo autor.

O cálculo de $\overline{Nu_L}$ pode ser realizado pela equação 4.1.

$$\overline{Nu_L} = \frac{2\dot{Q}L}{A(T_s - T_\infty)k} \quad (4.1)$$

O valor da taxa de transferência de calor $\dot{Q}$ é dobrado pelo fato do pós processamento contabilizar a taxa para meia placa.

Para comparar os resultados com os resultados experimentais de [Kitamura et al. \(2015\)](#), o valor de $\overline{Nu_{Lc}}$ é calculado com base no diâmetro hidráulico. Para esse cálculo na equação 4.1 o valor de L é substituído por L_c . Para efeitos de comparação com as equações do trabalho de [Kitamura et al. \(2015\)](#) o número de Ra_{Lc} referente a gravidade utilizada na simulação também foi calculado.

A tabela 19 mostra os resultados para o comprimento característico sendo o diâmetro hidráulico definido na equação 2.3.

Para o caso bidimensional a equação 2.3 pode-se considerar que a largura da placa é muito maior que seu comprimento. A expressão 4.2 apresenta o resultado desse efeito.

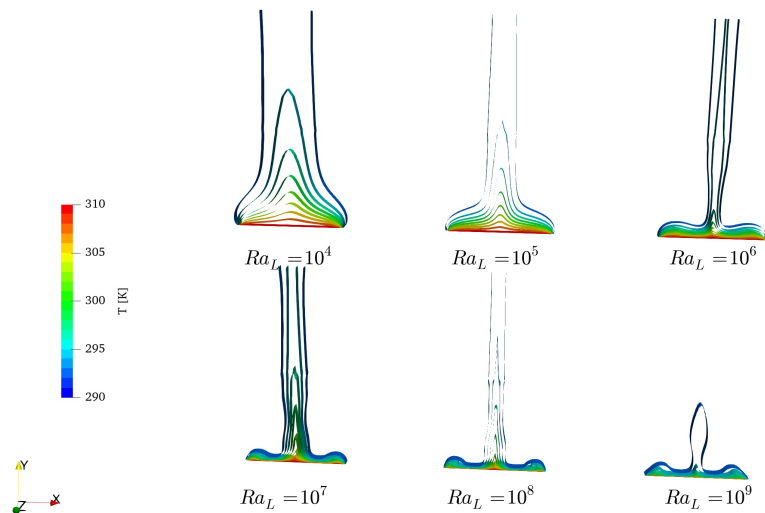
$$L_{c2D} = \frac{4A}{P} = \frac{4Lw}{\underbrace{2(L+w)}_{w \gg L}} \approx \frac{4Lw}{2w} \approx 2L \quad (4.2)$$

As isotérmicas de cada simulação 2D são apresentadas na figura 49. Nota-se que o resultado foi espelhado no plano Y-Z para todos os casos, ressaltando que esse plano foi definido como simétrico nas condições de contorno do modelo.

Tabela 19: Resultados de $\overline{Nu}_{Lc}$ para o caso 2D $\kappa - \varepsilon$

Ra_{Lc}	$\dot{Q}$ [W]	$\overline{h}_{Lc}$ [W/(m ² K)]	$\overline{Nu}_{Lc}$
$8,015 \times 10^4$	0,1571	0,1571	11,99
$8,015 \times 10^5$	0,2212	0,2212	16,88
$8,015 \times 10^6$	0,3660	0,3660	27,94
$8,015 \times 10^7$	0,7501	0,7501	57,26
$8,015 \times 10^8$	1,456	1,456	111,2
$8,015 \times 10^9$	3,398	3,398	259,3

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 49: Curvas de isotemperaturas para as simulações 2D com modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse resultado comparativo entre os diferentes números de Ra_L simulados evidencia o efeito advectivo a medida que Ra_L aumenta. Se para um $Ra_L = 10^4$ a difusão está bastante presente, lembrando até um caso de condução, para o caso de $Ra_L = 10^9$ os efeitos advectivos estão bastante presentes, deixando a camada limite bem menos espessa.

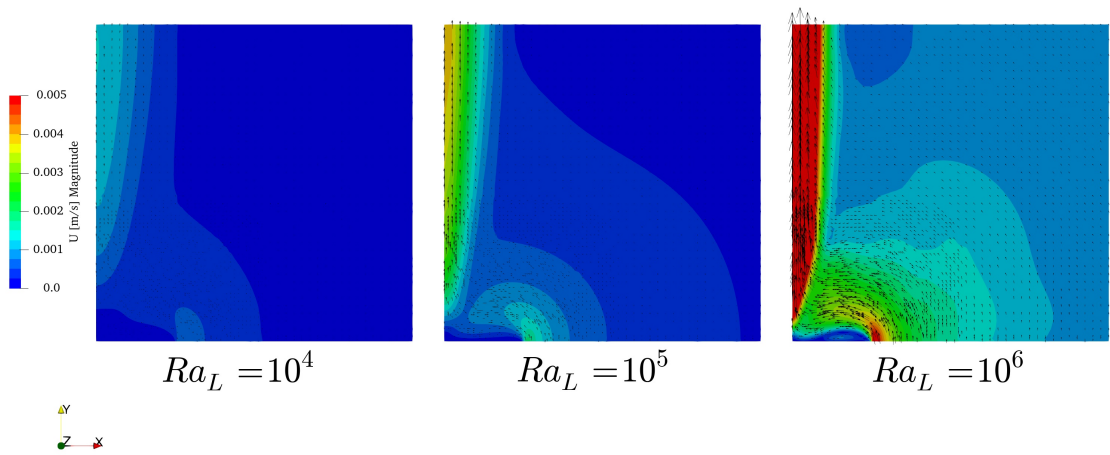
A figura 50a e 50b apresenta os contornos de velocidade para um pedaço do domínio. Os três contornos da figura 50a estão com a mesma escala de valores e tamanhos de vetores, e o mesmo acontece para a figura 50b.

Um corte foi realizado na direção normal a X, a 2,0m do centro da placa. Assim é possível pós-processar diversos gráficos um ao lado do outro para efeito comparativo e o efeito da mesma

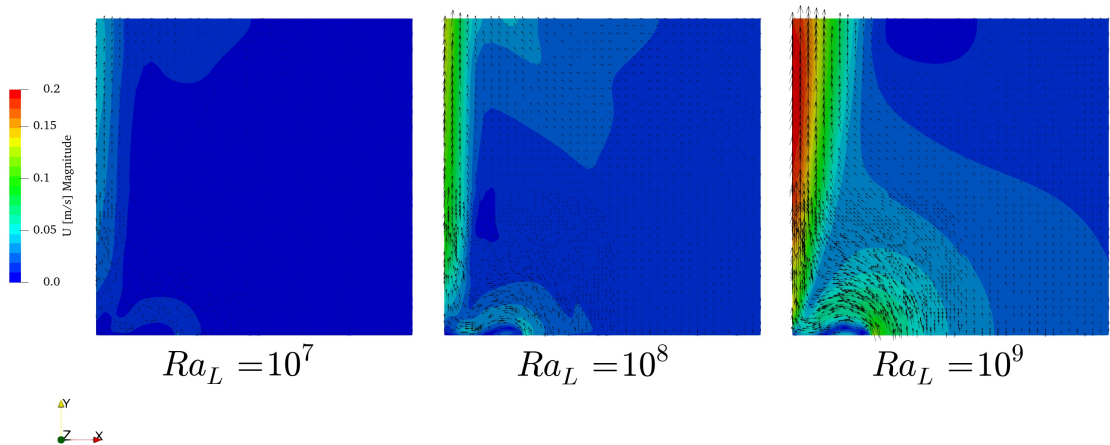
escala de cores também auxilia na comparação.

Observa-se que o comportamento físico esperado realmente ocorreu durante as simulações, onde a medida que o número de Ra_L é aumentado, as intensidades das velocidades também crescem. Sendo o Ra_L , diretamente proporcional ao número de Grashof, que significa a razão entre as forças de empuxo pelas forças viscosas do escoamento. Em outras palavras o aumento da intensidade dessas forças de empuxo são refletidas diretamente no aumento da velocidade.

Figura 50: Contorno de velocidades para simulação 2D $\kappa - \varepsilon$. (a) $10^4 \leq Ra_L \leq 10^6$. (b) $10^7 \leq Ra_L \leq 10^9$



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Modelo de Turbulência $\kappa - \omega$ SST

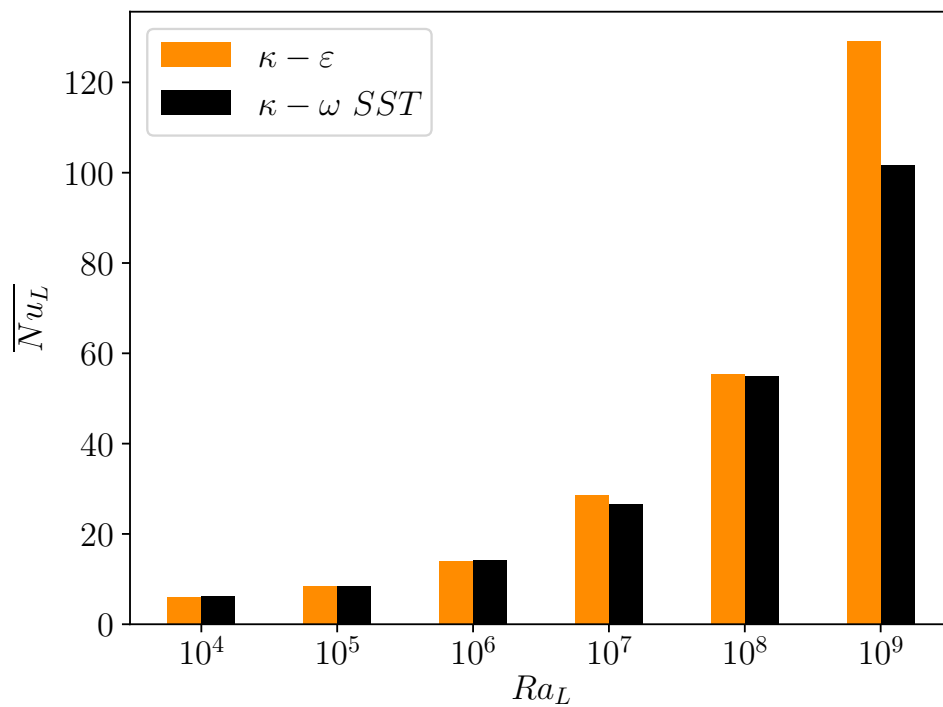
Os resultados obtidos levando em consideração o comprimento da placa como comprimento característico são apresentados na tabela 20.

Tabela 20: Resultados de taxa de transferência de calor, h médio e Nusselt médio para o caso 2D $\kappa - \omega$ SST.

Ra_L	$\dot{Q}$ [W]	$\overline{h_L}$ [W/(m ² K)]	$\overline{Nu_L}$
10^4	0,1604	0,1604	6,123
10^5	0,2197	0,2197	8,386
10^6	0,3711	0,3711	14,17
10^7	0,7017	0,7017	26,78
10^8	1,445	1,445	55,15
10^9	2,674	2,674	102,0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 51: Comparação dos resultados de $\overline{Nu_L}$ dos modelos $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$ SST.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se na figura 51 que no geral os resultados de $\overline{Nu_L}$ tiveram pouco desvio entre si. Exceção ao resultado de $Ra_L = 10^9$ onde uma diferença de 27,54 foi observada entre os resultados dos dois modelos. Nota-se que o modelo $\kappa - \varepsilon$ a partir de $Ra_L = 10^7$ resulta em valores superiores para o $\overline{Nu_L}$ quando comparado com os valores previstos no modelo $\kappa - \omega$ SST isso se deve principalmente ao fato do modelo de turbulência $\kappa - \omega$ SST contar com a modelagem próxima a parede o que favorece uma melhor quantificação dos efeitos de descolamento da pluma que ocorrem em situações onde o Ra_L é mais elevado.

A tabela 21 apresenta os resultados levando em conta o diâmetro hidráulico como comprimento característico. Da mesma forma que no modelo $\kappa - \varepsilon$ esse comprimento característico foi calculado a partir da equação 4.2.

Tabela 21: Resultados de $\overline{Nu_{Lc}}$ para o caso 2D $\kappa - \omega$ SST

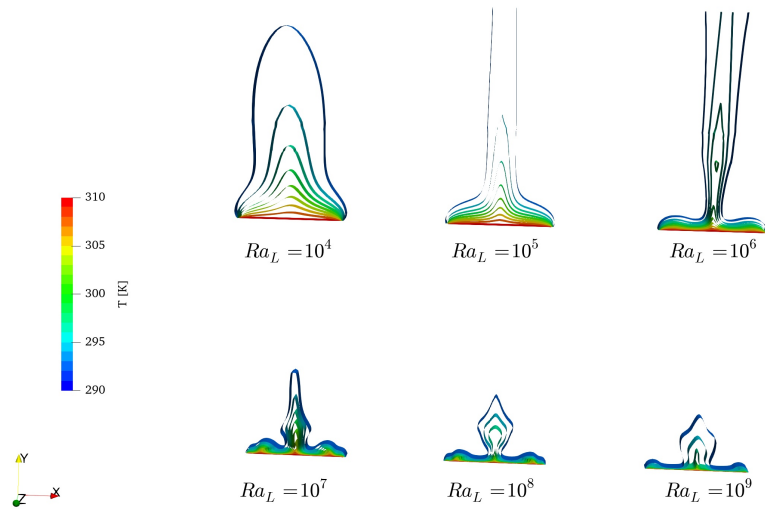
Ra_{Lc}	$\dot{Q}$ [W]	$\overline{h_{Lc}}$ [W/(m ² K)]	$\overline{Nu_{Lc}}$
$8,015 \times 10^4$	0,1604	0,1604	12,25
$8,015 \times 10^5$	0,2197	0,2197	16,77
$8,015 \times 10^6$	0,3711	0,3711	28,33
$8,015 \times 10^7$	0,7017	0,7017	53,56
$8,015 \times 10^8$	1,445	1,445	110,3
$8,015 \times 10^9$	2,674	2,674	204,1

Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 52 mostra as isotemperaturas do modelo $\kappa - \omega$ SST, onde é possível notar a variação do escoamento a medida que o número de Ra é aumentado.

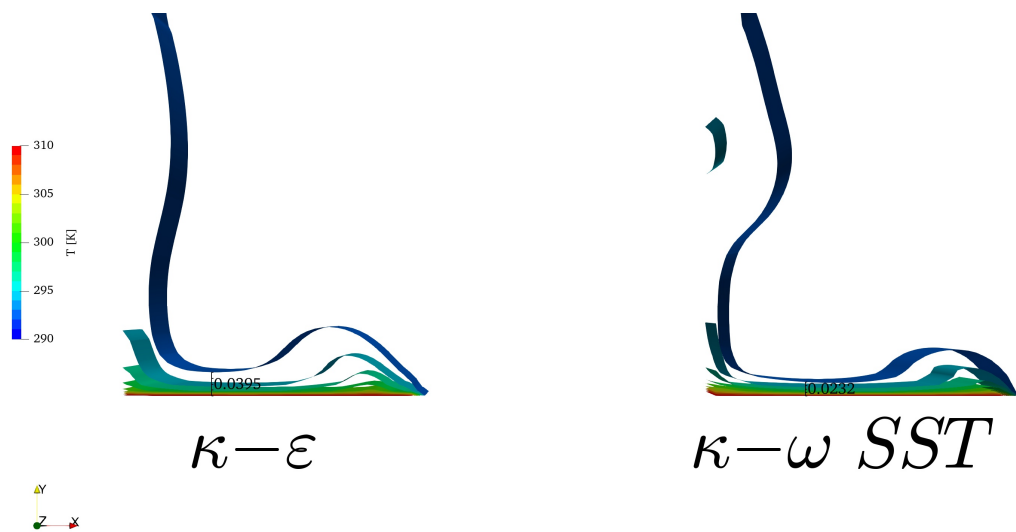
Apesar dos resultados aparentarem serem semelhantes entre os modelos de turbulência $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$ SST, algumas diferenças estão presentes. As figuras 53 e 54 apresentam algumas diferenças para os resultados de $Ra_L = 10^9$.

Figura 52: Curvas de isotemperaturas para as simulações 2D com modelo de turbulência $\kappa - \omega$ SST.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 53: Espessura da camada limite térmica para $Ra_L = 10^9$. Resultados para modelos de turbulência $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$ SST.

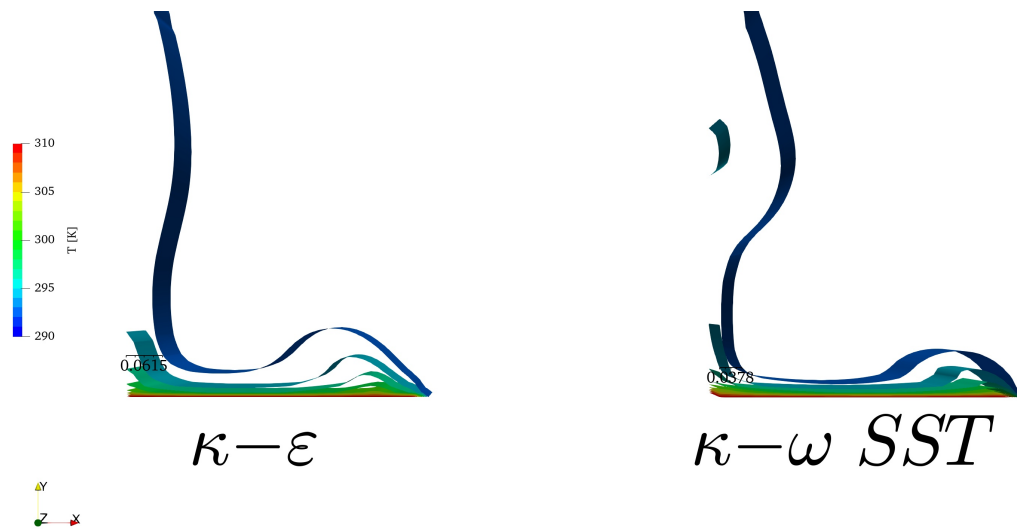


Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 53 mostra as espessuras aproximadas das camadas limites térmica que se formaram sob a placa para os dois casos. A espessura corresponde a uma posição em X de 0,25m da borda direita da placa. Nota-se que apesar da pouca diferença, o modelo $\kappa - \omega$ SST tem uma espessura menor.

Outra característica é que o modelo $\kappa - \omega$ SST desenvolve mais a camada limite até uma região mais central da placa. Já no modelo $\kappa - \varepsilon$ a pluma térmica tende a subir antes. A figura 54 apresenta essa sutil diferença.

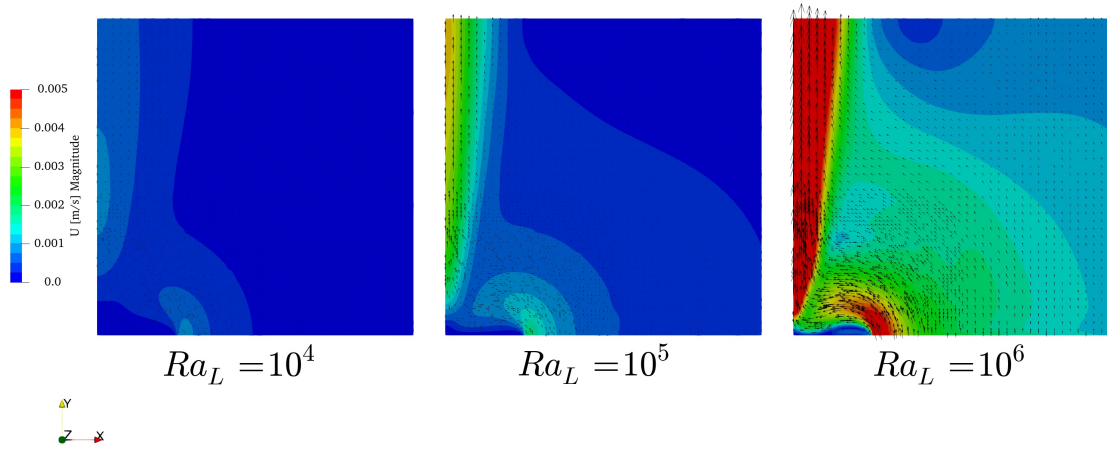
Figura 54: Subida da pluma térmica para $Ra_L = 10^9$. Resultados para modelos de turbulência $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$ SST.



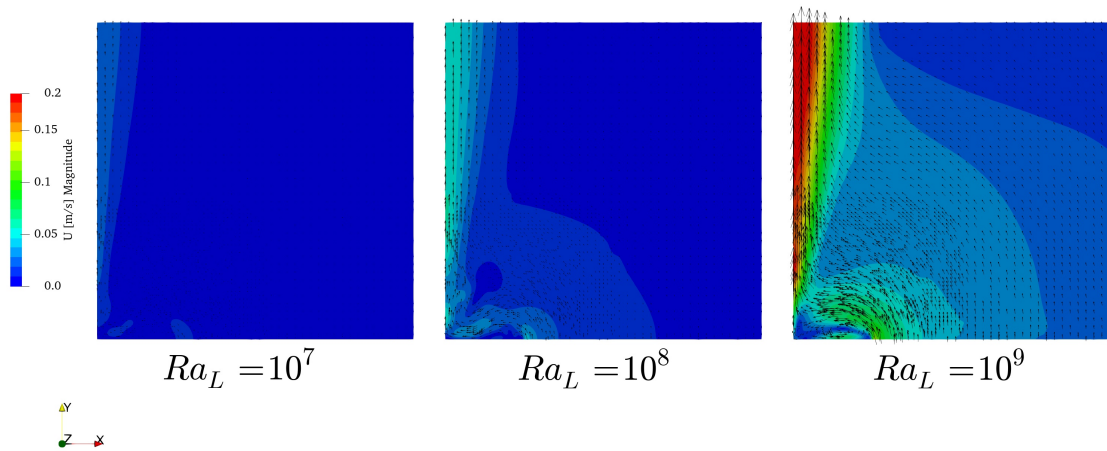
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os contornos de velocidade para o modelo $\kappa - \omega$ SST são apresentados na figura 55. Como os gráficos de Ra_L correspondentes estão com a mesma escala, a comparação fica mais fácil entre os resultados. Nota-se que os resultados do modelo $\kappa - \varepsilon$ tiveram magnitudes de velocidades na mesma ordem de grandeza do modelo $\kappa - \omega$ SST, e essa magnitude de velocidade aumenta a medida que o número de Ra_L aumenta.

Figura 55: Contorno de velocidades para simulação 2D $\kappa - \omega$ SST. (a) $10^4 \leq Ra_L \leq 10^6$. (b) $10^7 \leq Ra_L \leq 10^9$



(a)



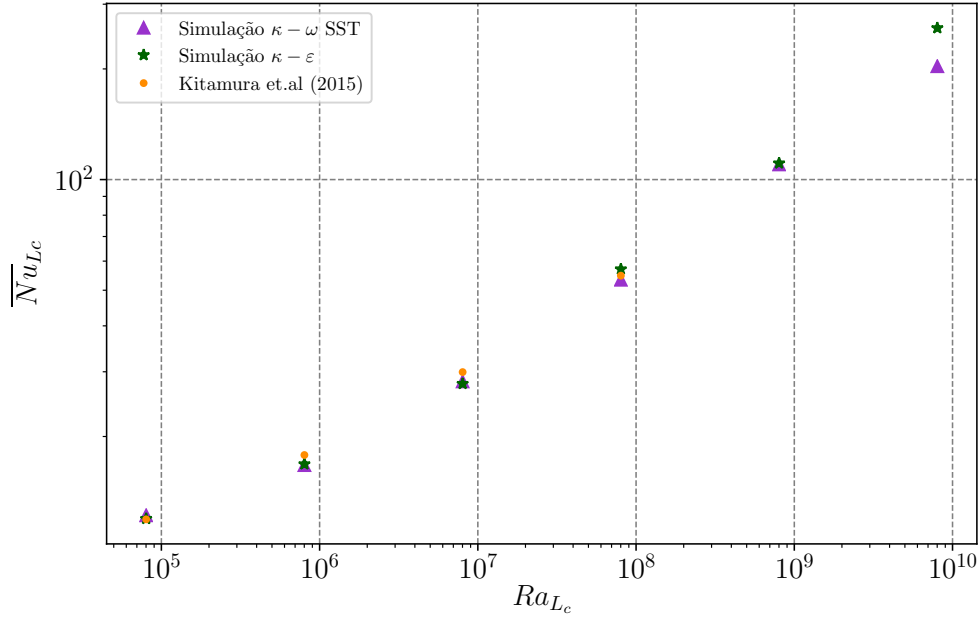
(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 56 apresenta uma comparação dos resultados obtidos na simulação, com as expressões empíricas obtidas por Kitamura et al. (2015). Os resultados plotados são do número de Nusselt médio baseado no diâmetro hidráulico como comprimento característico, em função do número de Rayleigh também baseado no diâmetro hidráulico.

Os dois modelos de turbulência se mostraram muito competentes ao modelar o problema evidenciado pela comparação com os resultados da figura 56. A Tabela 22 mostra os erros relativos

Figura 56: Comparação entre os resultados do modelo $\kappa - \varepsilon$, $\kappa - \omega$ SST e as correlações de Kitamura et al. (2015)



Fonte: Elaborado pelo autor.

dos resultados simulados com os resultados obtidos por Kitamura et al. (2015), onde é possível observar que os resultados obtidos através do modelo $\kappa - \omega$ SST, apresentou menores erros relativos a medida que se aumenta o valor de Ra_{Lc} , o que resultou em uma menor média de erros relativos para o modelo $\kappa - \omega$ SST. Esse fato era esperado devido as diferenças entre a modelagem de parede entre os dois modelos de turbulência utilizados.

Tabela 22: Erros relativos dos resultados simulados.

Ra_{Lc}	E.R. $\kappa - \varepsilon$ [%]	E.R. $\kappa - \omega$ SST [%]
$8,015 \times 10^4$	0.3785	2.487
$8,015 \times 10^5$	5.556	6.184
$8,015 \times 10^6$	7.041	5.733
$8,015 \times 10^7$	4.127	2.595
Média	4.276	4.250

4.1.3 Simulação tridimensional

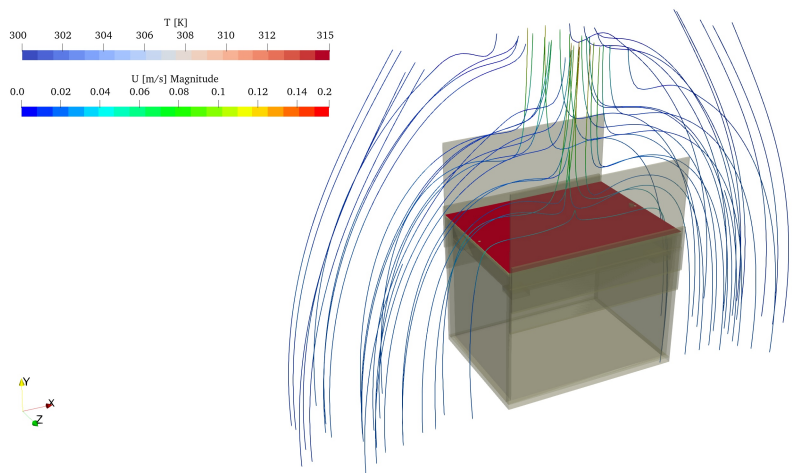
A simulação 3D foi realizada para um número de $Ra_L = 9,80 \times 10^6$ ou $Ra_{Le} = 6,2 \times 10^6$. Novamente os resultados foram refletidos no plano Y-Z, uma vez que a condição de simetria foi utilizada nesse plano do domínio. Para essa análise foram utilizadas 7 horas e 32 minutos de simulação.

O resultado de y^+ da malha é apresentado na tabela 23, onde verifica-se que o y^+ atingido também se encontra dentro do padrão que será utilizado para o modelo de turbulência desse caso que é solução da camada limite como o $\kappa - \omega$ SST.

Tabela 23: y^+ para o modelo 3D.

	y^+	
	$[máx]$	$[med]$
3D - $\kappa - \omega$ SST	1.3E-2	7.3E-4

Figura 57: Trajetória do ar próximo a placa.

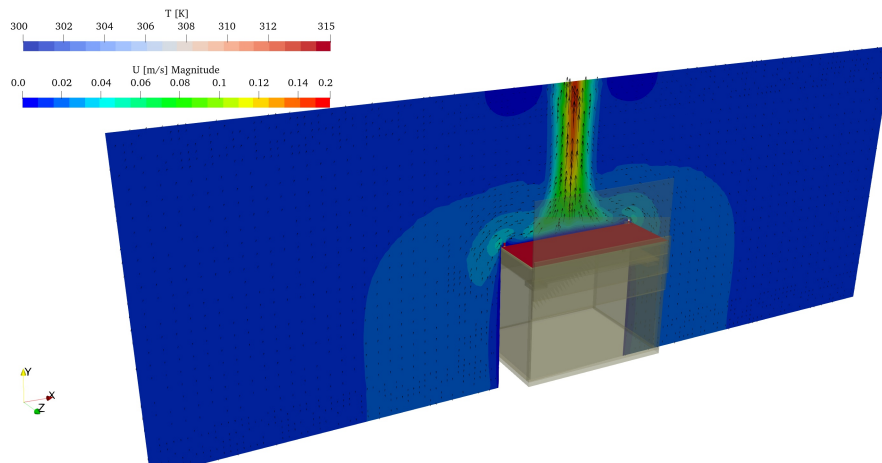


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os tubos ou linhas da figura 57 representam as trajetórias que o ar percorre ao passar pela placa, coloridos pela magnitude da velocidade e a placa é apresenta a escala de temperaturas, onde podemos observar a condição de contorno imposta de 315 K.

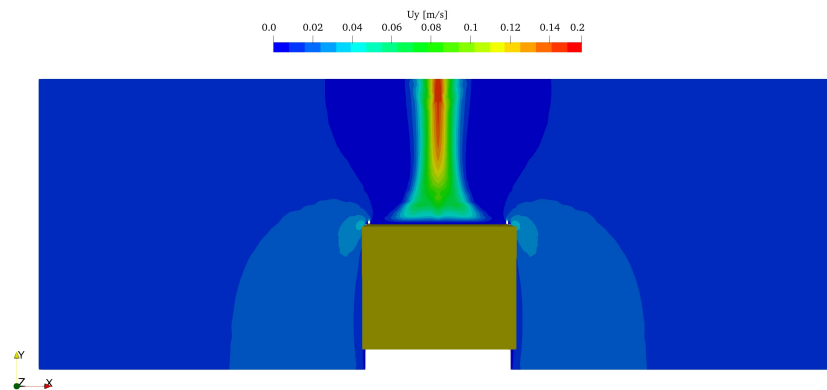
A figura 58 apresenta em detalhes um plano normal a Z no meio da placa em $Z = 0,075\text{m}$. Esse contorno mostra a magnitude da velocidade no domínio e as direções representadas pelos vetores. O comportamento qualitativo do resultado numérico está dentro do esperado, uma camada limite se desenvolve das bordas ao longo do comprimento da placa até se encontrarem próximo ao centro e formar a pluma térmica.

Figura 58: Contorno de velocidade para $Z=0,075\text{m}$, junto com os vetores de velocidade e a temperatura da placa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 59: Componente de velocidade Y para $Z=0,075\text{m}$.



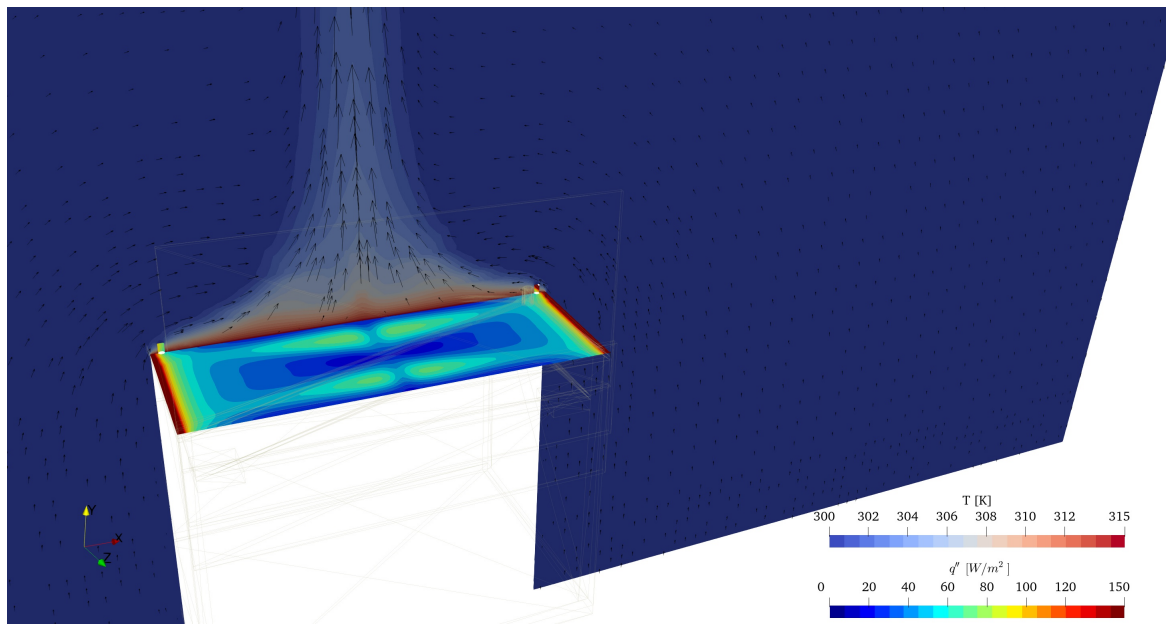
Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se observar que para o contorno da magnitude da velocidade, o efeito de borda está mais presente. A figura 59 apresenta o contorno da componente Y da velocidade onde é notado um aumento da velocidade nas bordas da placa.

O fluxo de calor na placa é apresentado no domínio pela figura 60. Onde além do fluxo de calor o contorno de temperatura para $Z = 0,075\text{m}$ também é plotado. Pode-se observar que o comportamento da pluma térmica é muito semelhante aos obtidos nas simulações bidimensionais.

As isotérmicas do domínio são apresentadas na figura 61. Essa figura evidencia que realmente

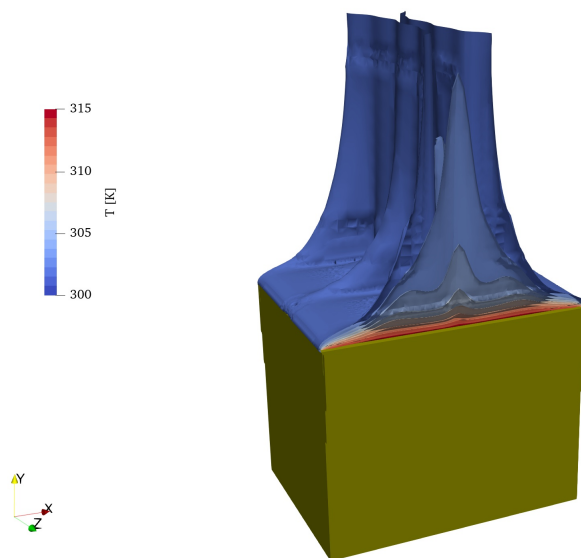
Figura 60: Contorno de temperatura para $Z = 0,075\text{m}$ e placa com contorno de fluxo de calor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

as barreiras de vidro tendem a diminuir as variações dos campos na direção Z , aproximando de um comportamento bidimensional.

Figura 61: Curvas isotérmicas do domínio 3D.



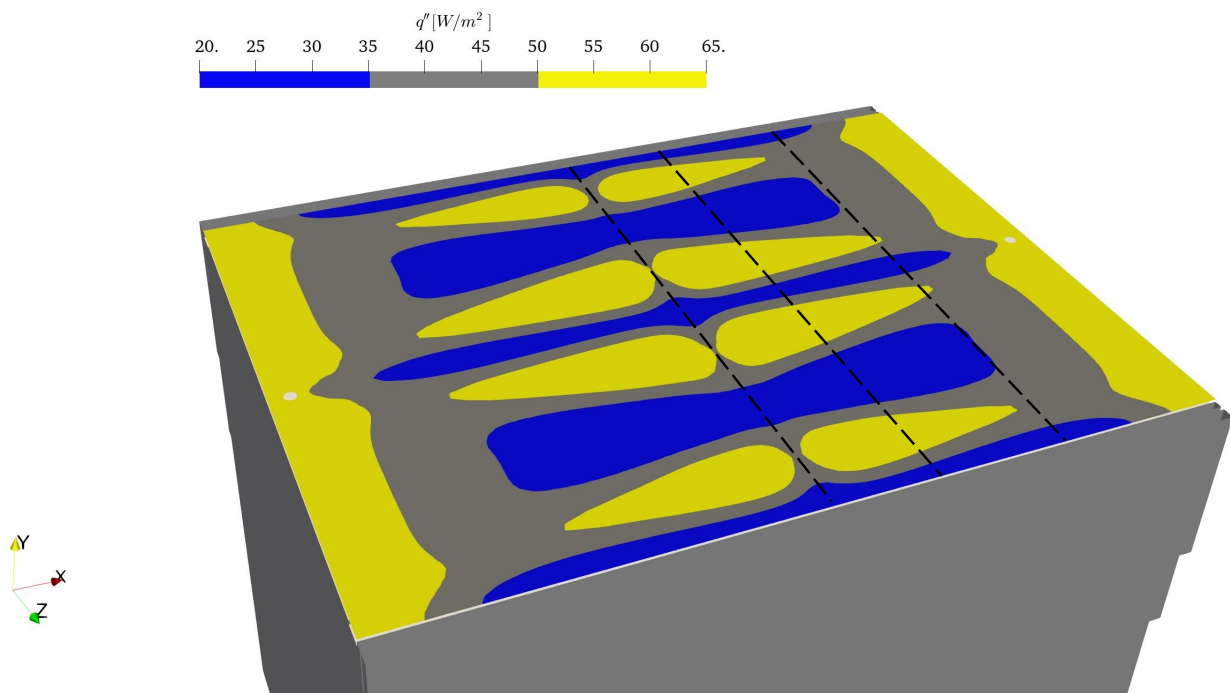
Fonte: Elaborado pelo autor.

Estimativa da potência

Para estimar a potência a ser dissipada por cada região na placa, como indicado na figura 34. Os resultados da simulação 3D foram utilizados.

A figura 62 mostra o contorno do fluxo de calor na placa separado em três cores. Onde conseguimos ver aproximadamente como seria a potência média para cada uma das cinco divisões da placa.

Figura 62: Divisão das regiões para levantamento da potência



Como a figura 62 indica a linha de $Z = 0,075\text{m}$ o fluxo de calor é plotado para essa linha da placa e apresentado na figura 63.

O gráfico da figura 63 mostra a distribuição do fluxo de calor local e média de fluxo de calor para cada $0,04\text{m}$ de placa. Com efeito, pode-se utilizar esses fluxos médios para determinar a potência a ser dissipada pela área de $0,04\text{m} \times 0,15\text{m}$.

As potências necessárias são apresentadas no gráfico da figura 64.

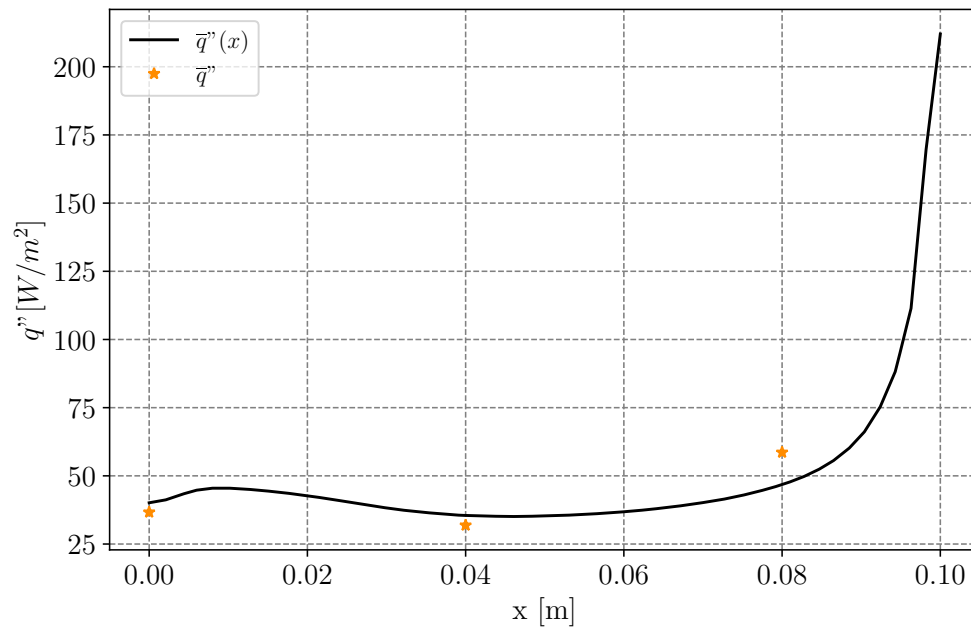
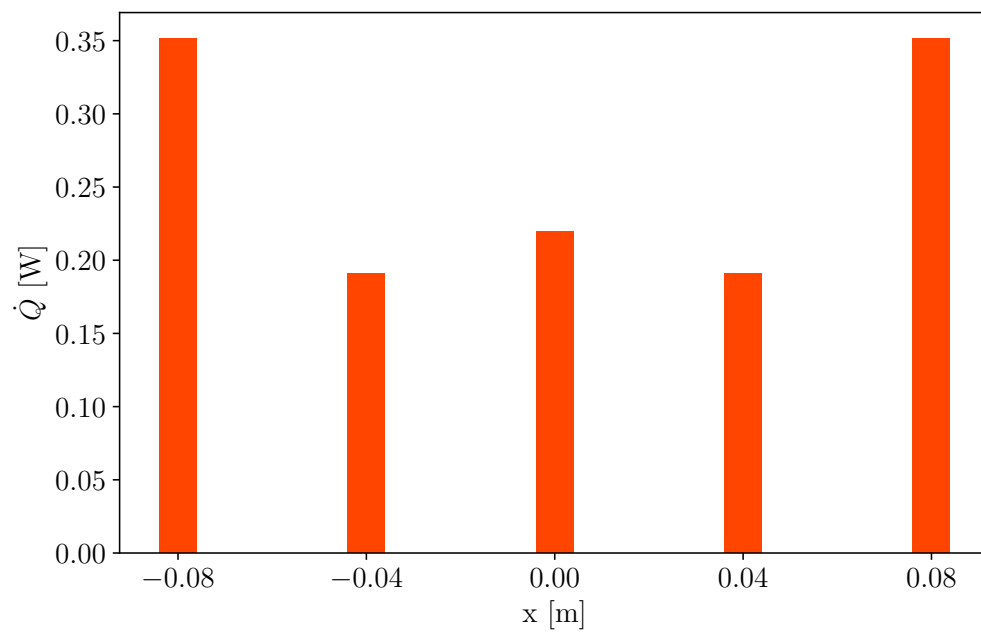
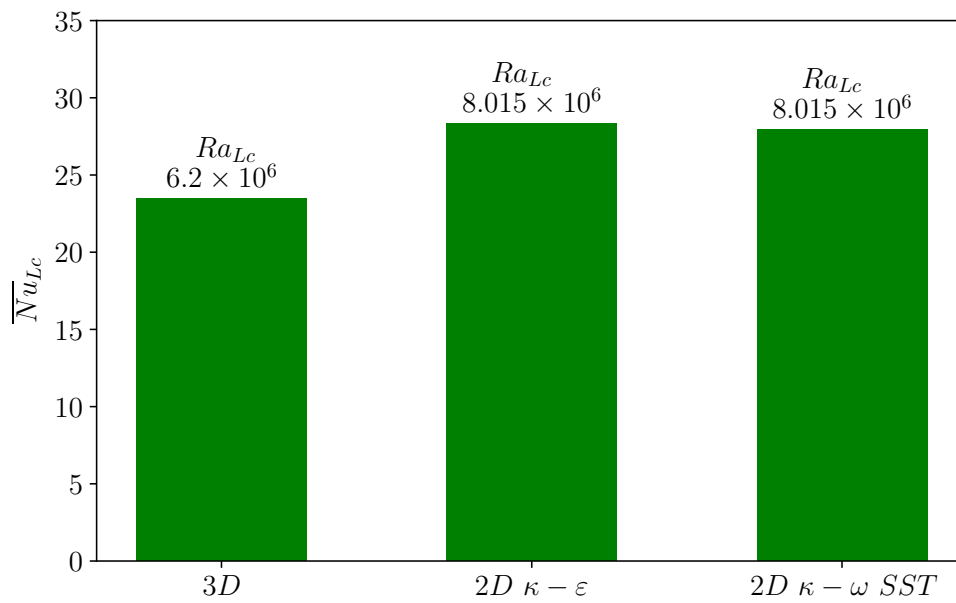
Figura 63: Fluxo de calor local para $Z = 0,075\text{m}$ e fluxo de calor médio para cada $0,04\text{m}$ da placa.

Figura 64: Estimativa da potência necessária para obter uma temperatura uniforme na placa.



A taxa de transferência de calor obtida através da simulação 3D foi de 0,8268 W o que resulta em um Nusselt médio com base no diâmetro hidráulico de 23.46. A Figura 65 mostra um comparativo dos resultados de $\overline{Nu}_{Lc}$ para o resultado 3D com um Ra_{Lc} de $6,2 \times 10^6$ e os resultados 2D dos modelos $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega SST$ para Ra_{Lc} de $8,015 \times 10^6$. Pode-se observar que o resultado da simulação 3D está na tendência dos resultados obtidos na simulação 2D, uma vez que nas simulações 2D tem-se um Ra_{Lc} maior.

Figura 65: Comparativo dos resultados da simulação 3D com a simulação 2D.

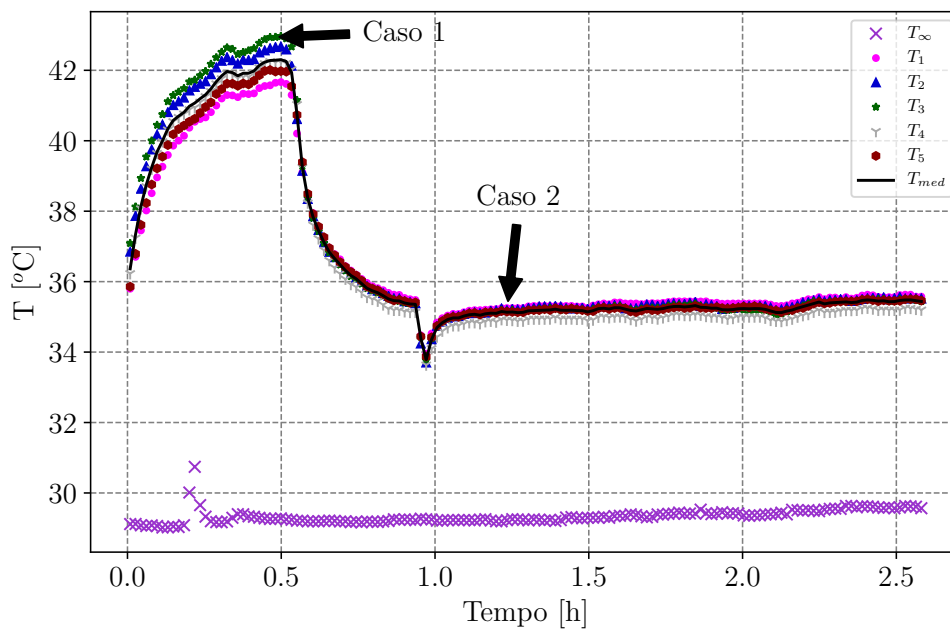


4.2 Resultado do procedimento experimental

Para o procedimento experimental duas situações foram testadas. A primeira consistiu no aparato dissipando a máxima potência, ou seja os cinco potenciômetros estavam ajustados no máximo. Neste caso a temperatura da placa estabilizou em torno dos $42,3^{\circ}\text{C}$. O número de Rayleigh do primeiro caso é de $Ra_{Lc} = 5,2 \times 10^6$.

No segundo caso, a tensão foi diminuída para que a potência dissipada fosse próxima a da estimada na simulação 3D. A temperatura média da superfície ficou em torno dos 35°C e o número de Ra_{Lc} foi de $2,5 \times 10^6$. A figura 66 mostra o desenvolvimento da temperatura com o tempo para as duas condições que foram realizadas o experimento.

Figura 66: Temperaturas da placa medidas pelos DS18B20 ao longo do tempo.

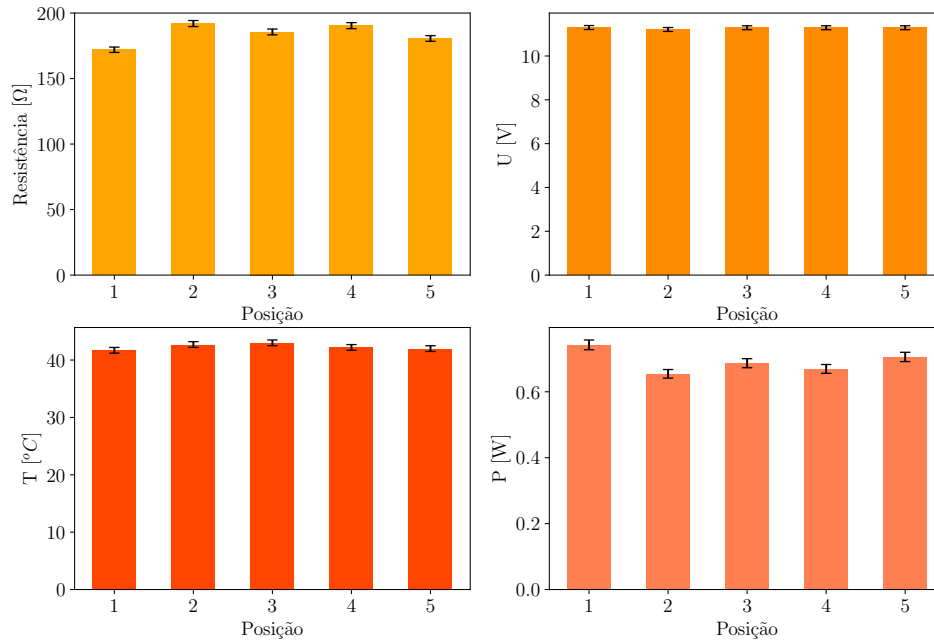


4.2.1 Caso 1

Para o primeiro caso, os resultados das resistências, tensões, temperaturas e potências para as 5 posições da placa são apresentadas na figura 68

Os dados e incertezas utilizadas para o cálculo do número de Nusselt médio são apresentados na tabela 24. As incertezas propagadas foram calculadas de acordo com as expressões do Apêndice A.

Figura 67: Resistências, tensões, temperaturas e potência para as 5 regiões da placa. Caso 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 24: Valores experimentais utilizados para o cálculo de Nu_{Lc} . Caso I

T_{∞} [°C]	(29,3 ± 0,5)
$\overline{T}_s$ [°C]	(42,3 ± 0,5)
$\dot{Q}_{tot}$ [W]	(3,46 ± 0,03)
$\dot{Q}_{rad}$ [W]	(1,75 ± 0,15)
$\dot{Q}_{conv}$ [W]	(1,71 ± 0,15)
$\overline{Nu}_{Lc}$	(27,80 ± 2,85)

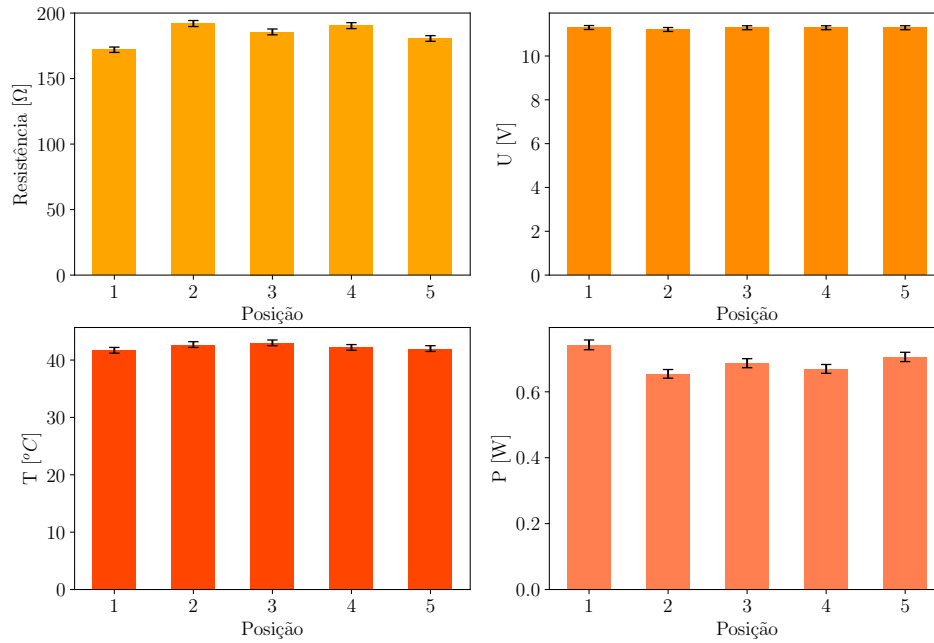
Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.2 Caso 2

A tabela 25 apresenta os valores e incertezas das medidas para o cálculo de $\overline{Nu}_{Lc}$. Percebe-se tanto no primeiro quanto no segundo caso que a radiação teve uma contribuição considerável na transferência de calor.

A figura 69 apresenta as medidas e incertezas individuais para cada posição da placa. O gráfico da figura 70 faz a comparação entre a potência estimada na simulação e a potência dissipada pelo aparato experimental. Os ajustes foram realizados de maneira que os valores ficassem os mais

Figura 68: Resistências, tensões, temperaturas e potência para as 5 regiões da placa. Caso 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 25: Valores experimentais utilizados para o cálculo de Nu_{Lc} . Caso 2

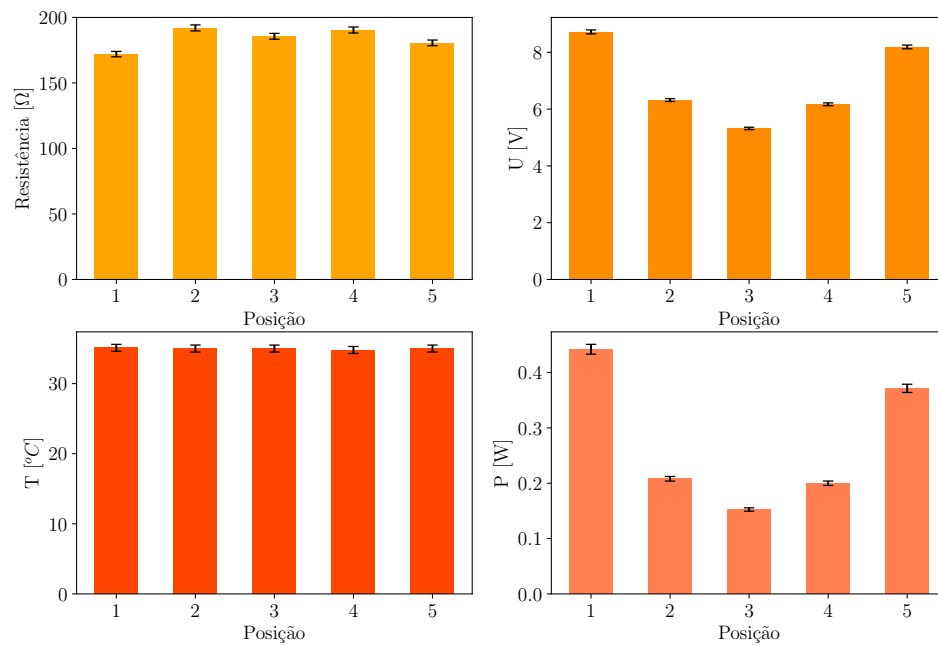
T_{∞} [°C]	(29,2 ± 0,5)
$\overline{T}_s$ [°C]	(35,0 ± 0,5)
$\dot{Q}_{tot}$ [W]	(1,37 ± 0,01)
$\dot{Q}_{rad}$ [W]	(0,75 ± 0,07)
$\dot{Q}_{conv}$ [W]	(0,62 ± 0,07)
$\overline{Nu}_{Lc}$	(22,02 ± 3,79)

Fonte: Elaborado pelo autor.

próximos possível.

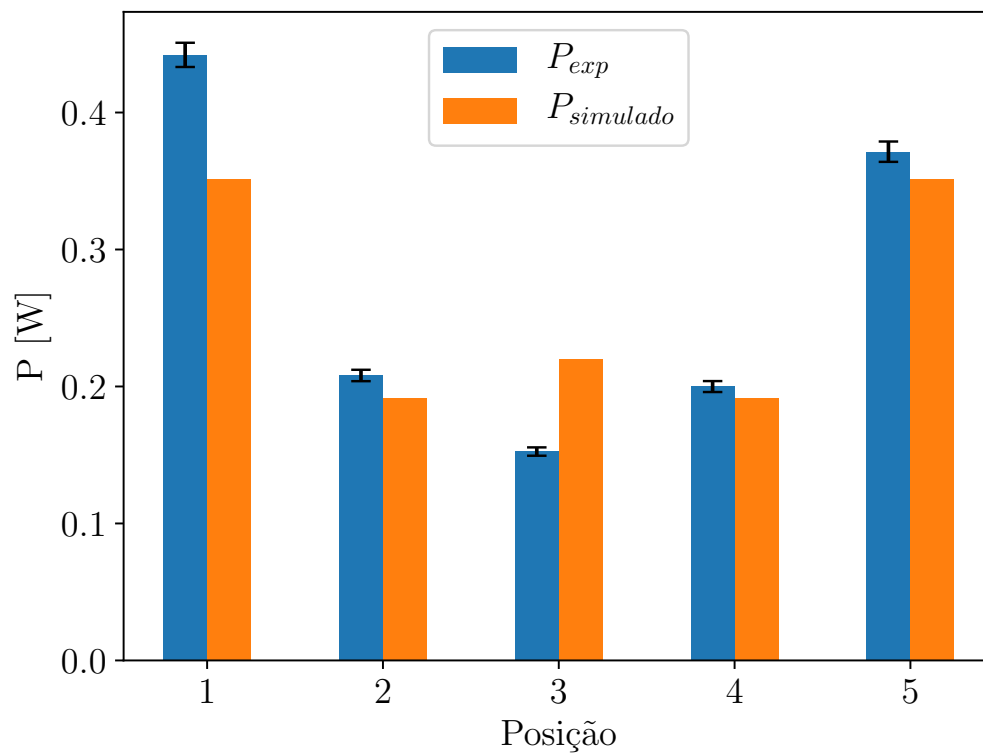
De acordo com os resultados da tabela 25 verifica-se que a temperatura média da placa ficou abaixo do valor da simulação 3D. A razão para esse acontecimento se da pelo fato de que na simulação 3D, os efeitos de radiação não foram considerados. Portanto apenas a convecção natural dissipava a energia da placa, resultando em temperaturas maiores para a superfície.

Figura 69: Resistências, tensões, temperaturas e potência para as 5 regiões da placa. Caso 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 70: Comparação das potências dissipadas experimentalmente no Caso 2 e as calculadas pela simulação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

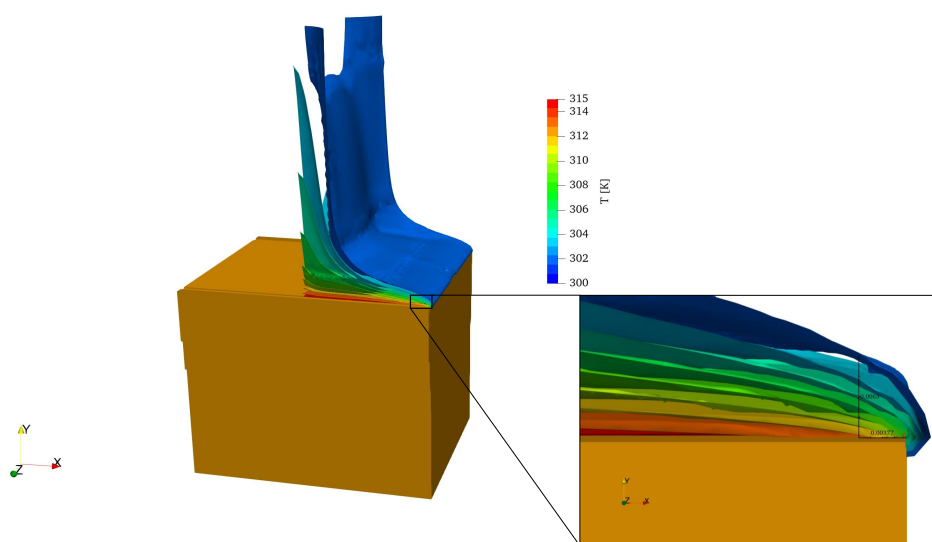
4.2.3 Visualização do escoamento

A imagem do escoamento pelo efeito Schlieren foi fornecida como input do software Tracker, que permite a realizações de medidas através de um comprimento referente da imagem. No caso do aparato experimental sabe-se que a medida da placa até o case de madeira onde ela é fixa tem um vão de 0,005m. Essa é a medida de referência fornecida ao Tracker.

Para uma comparação mais efetiva, foi utilizado a imagem do experimento onde a placa se manteve a $\overline{T}_s = 42,3^\circ\text{C}$. Lembrando que a condição de contorno da para placa na simulação 3D foi de 42°C .

A fim de comparar os valores simulados com o experimental, foi utilizado a simulação 3D para realizar esse efeito comparativo da camada limite térmica. A figura 71 mostra o zoom das imagens da simulação que serão comparadas com as imagens do Tracker.

Figura 71: Região da simulação 3D, onde as imagens da camada limite térmica foram retirada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A tabela 26 apresenta os resultados quantitativo para a espessura das camadas limites térmica tanto para a simulação 3D quanto para o experimento.

Em seguida o comparativo visual dos escoamentos é realizado, onde as figuras 72a e 72b comparam os resultados para a espessura em $X = 0,00377\text{m}$, as figuras 73a e 73b para $X = 0,005\text{m}$ e as figuras 74a e 74b as espessuras para $X = 0,01\text{m}$.

Com a visualização do escoamento pelo efeito Schlieren, percebe-se que realmente as barreiras deixam o escoamento na direção Z mais uniforme uma vez que não é percebido nenhum outro efeito de borda a não ser a direita que as fotos mostram.

Tabela 26: Espessuras da camada limite térmica antes da pluma.

posição x [m]	δ_T CFD [m]	δ_T exp [m]
0,00377	0,0071	0,0063
0,005	0,0078	0,0072
0,1	0,010	0,011

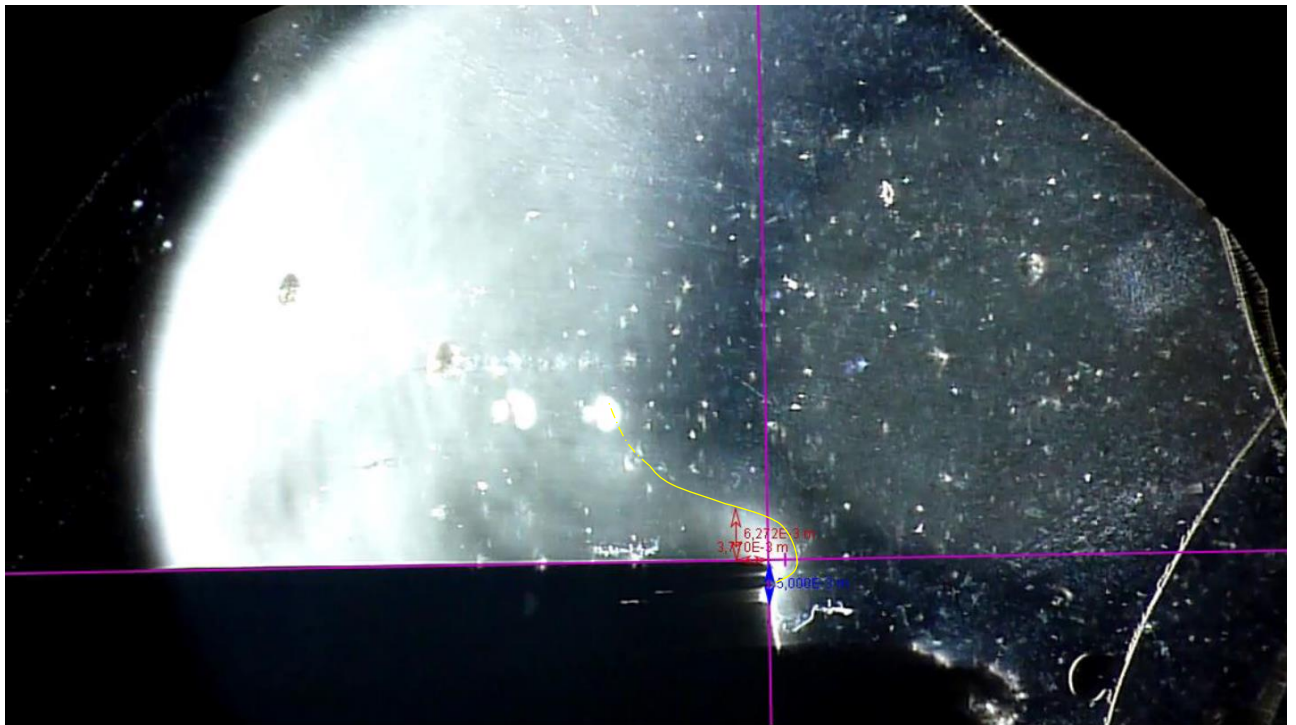
Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma característica que foi percebida durante a realização do experimento, é que mesmo após a temperatura entrar em regime permanente, o escoamento sobre a placa é instável, onde novas plumas térmicas se formam de uma maneira aleatória e após algum tempo se extinguem, voltado a uma imagem como a das figuras apresentadas.

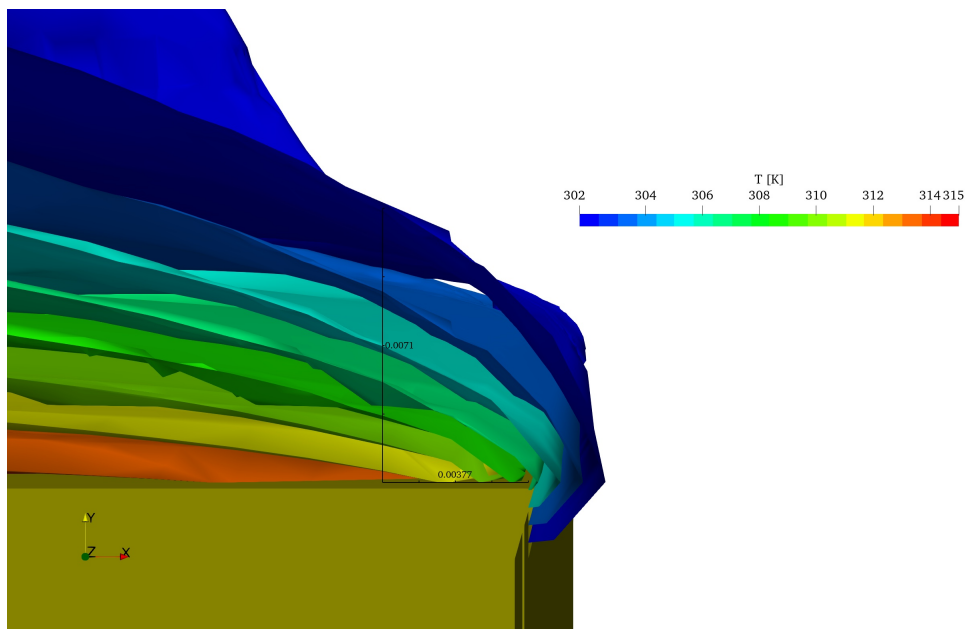
A limitação do tamanho do espelho, impossibilitou que toda a região da placa fosse capturada na imagem.

Apesar dos valores serem aproximados pelo fato de não existir uma escala com valores para se adotar um critério para o final da camada limite térmica, os resultado simulado e experimental convergiram a uma mesma ordem de grandeza para a espessura das camadas limites térmica.

Figura 72: Comparação das camadas limites térmica para $x = 0,00377\text{m}$. (a) Experimental. (b) CFD



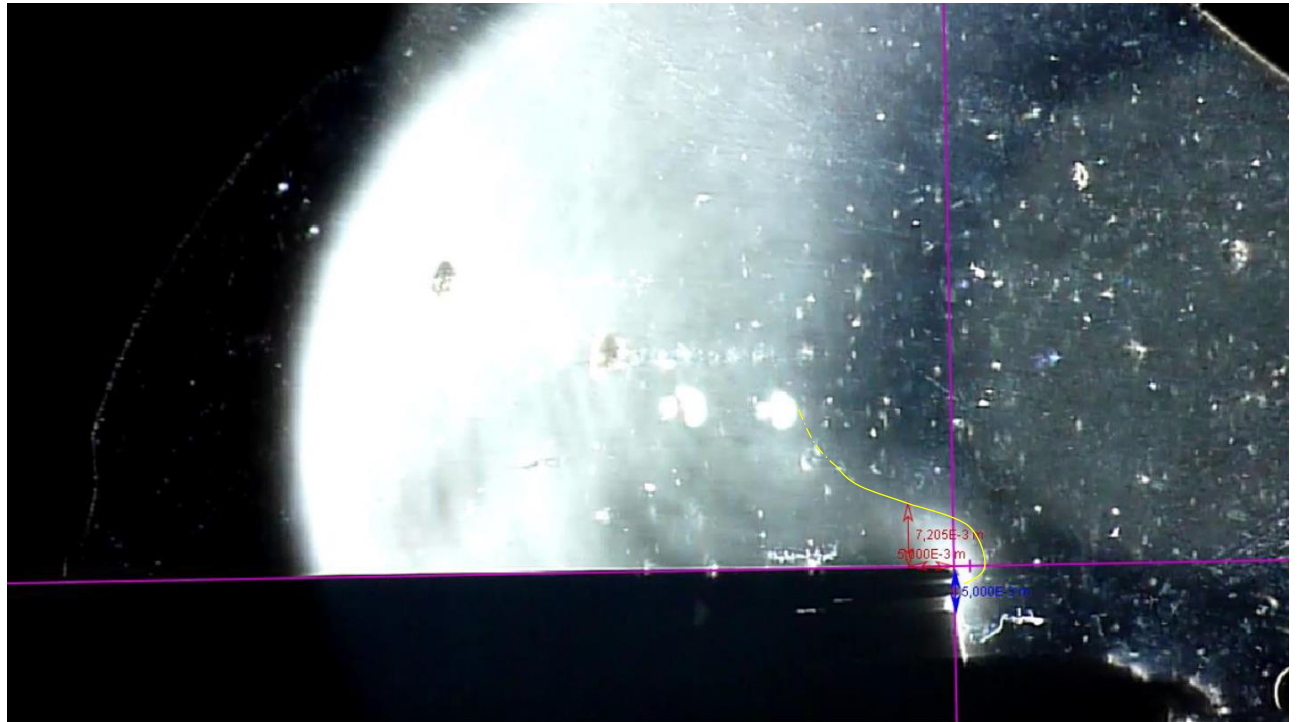
(a)



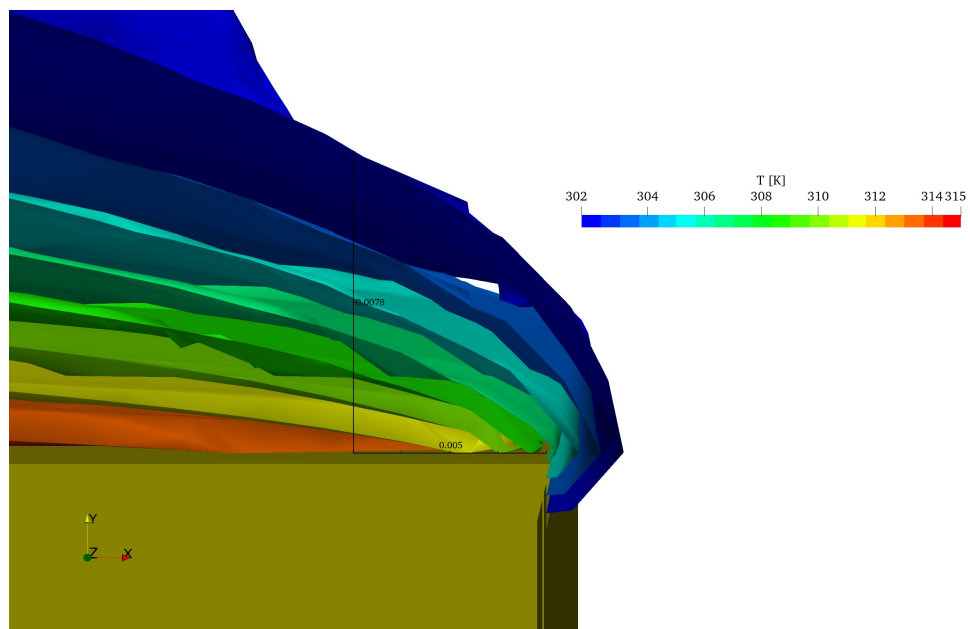
(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 73: Comparação das camadas limites térmica para $x = 0,005\text{m}$. (a) Experimental. (b) CFD



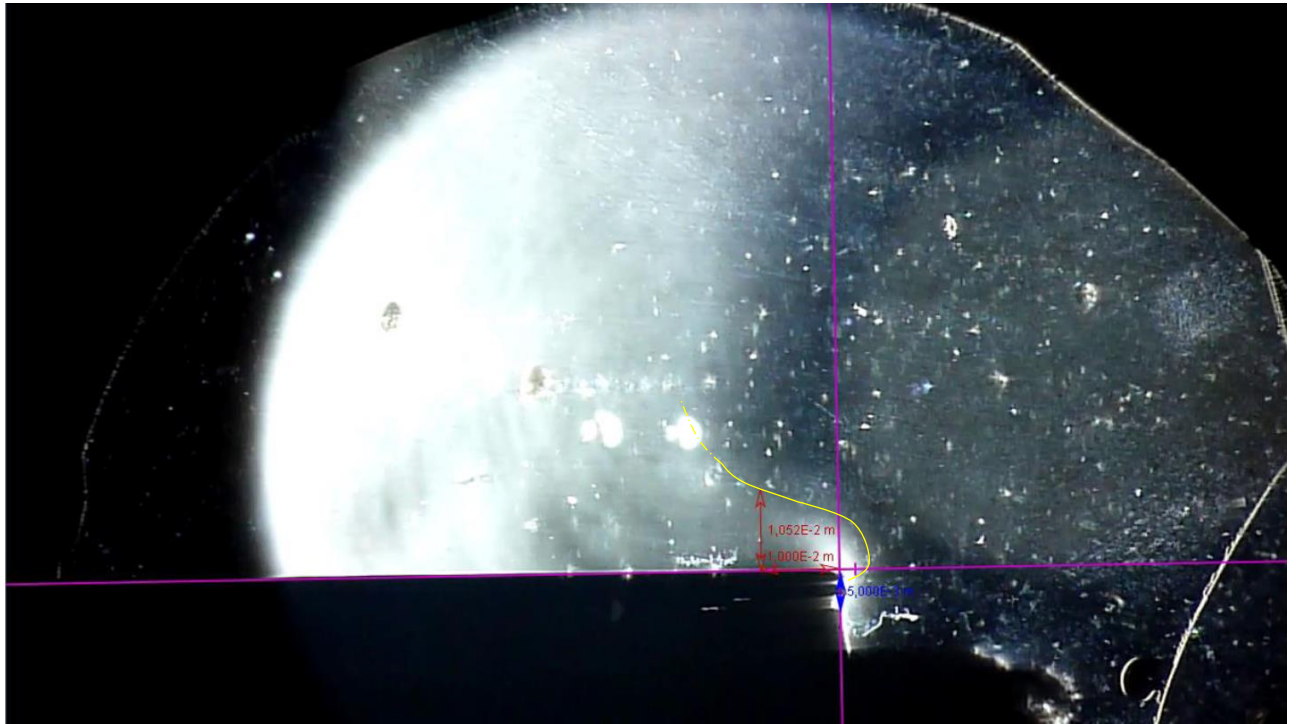
(a)



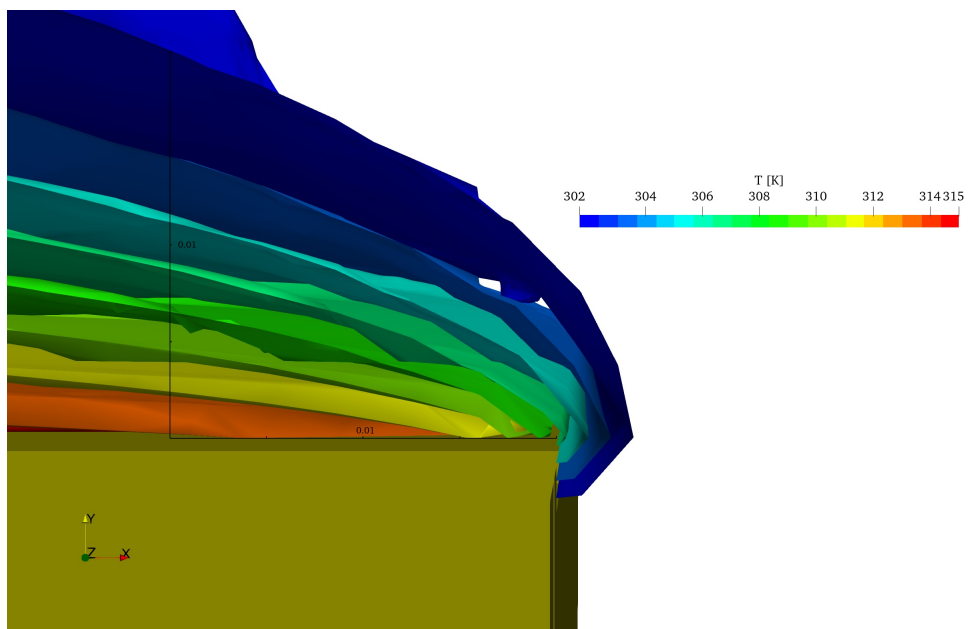
(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 74: Comparação das camadas limites térmica para $x = 0,01\text{m}$. (a) Experimental. (b) CFD



(a)



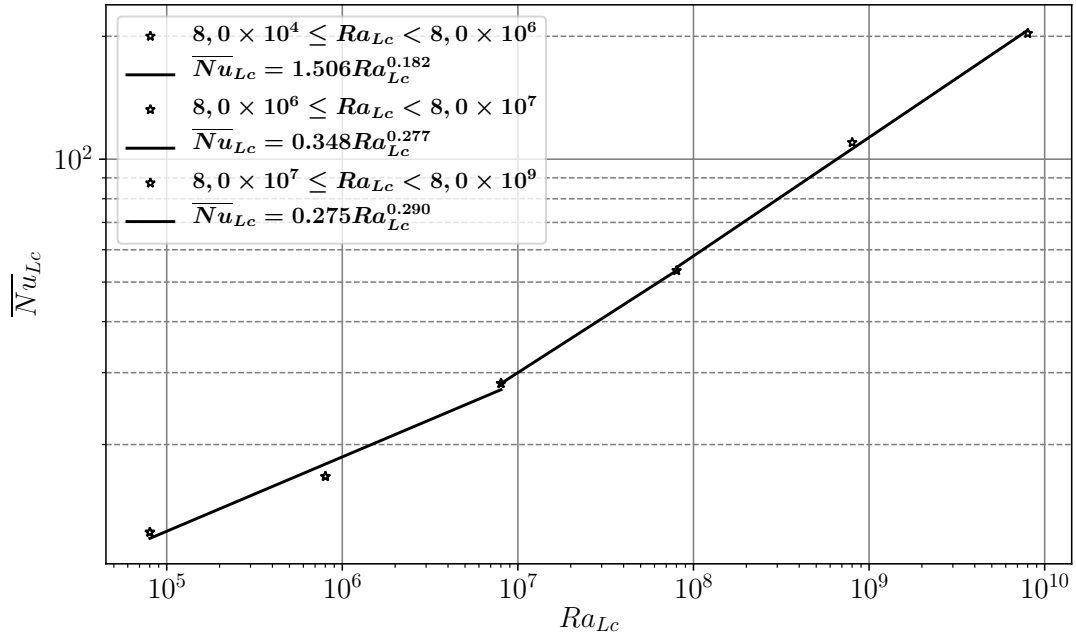
(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3 Correlações

As correlações apresentadas nas figuras 75 e 76 são leis de potências, como o usual para se apresentar correlações de convecção.

Figura 75: Correlações de $\overline{Nu}_{Lc} = f(Ra_{Lc})$ derivadas da simulação 2D e modelo de turbulência $\kappa - \omega$ SST.

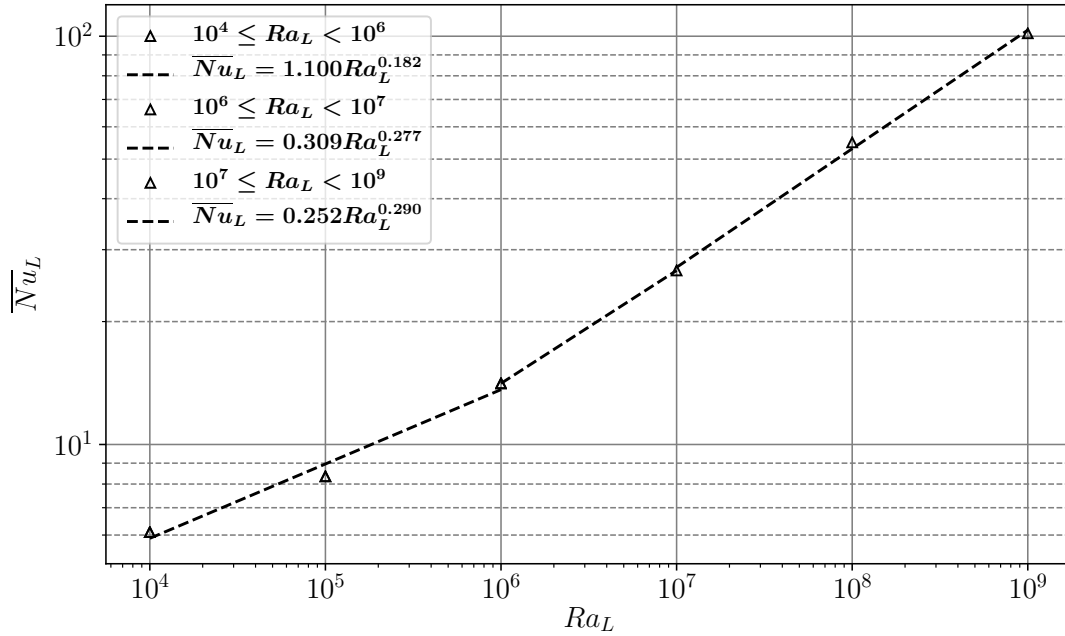


Fonte: Elaborado pelo autor.

As correlações foram levantadas com base no método dos mínimos quadrados. E para diminuir os erros dos resultados obtidos através da correlação, os resultados simulados foram divididos em três faixas, que separam os resultados simulados em $8,0 \times 10^4 \leq Ra_{Lc} < 8,0 \times 10^6$, de $8,0 \times 10^6 \leq Ra_{Lc} < 8,0 \times 10^7$ e $8,0 \times 10^7 \leq Ra_{Lc} < 8,0 \times 10^9$. Representando uma faixa que vai do laminar ao totalmente turbulento.

Os dados utilizados para elaborar essas correlações são provenientes das simulações 2D para o modelo de turbulência $\kappa - \omega$ SST. Não foram levantadas correlações com os dados simulados com o modelo $\kappa - \varepsilon$, uma vez que os dados do modelo $\kappa - \omega$ SST se correlacionaram melhor com os dados experimentais apresentados por Kitamura et al. (2015).

Figura 76: Correlações de $\overline{Nu}_L = f(Ra_L)$ derivadas da simulação 2D e modelo de turbulência $\kappa - \omega$ SST.



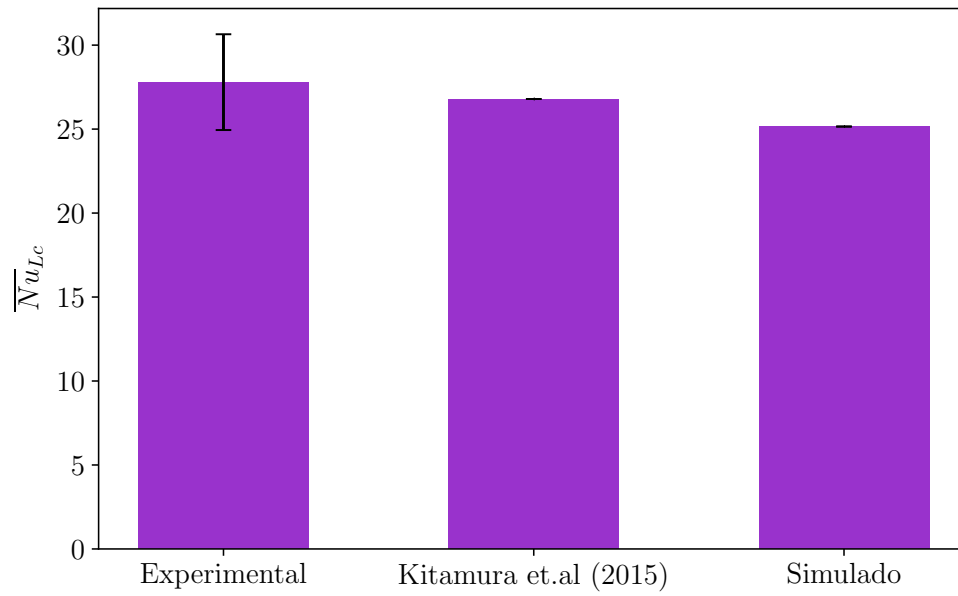
Fonte: Elaborado pelo autor.

Com os resultados apresentados as correlações de Kitamura et al. (2015) foram estendida para um $Ra_{Lc} = 8,0 \times 10^9$, abrangendo uma faixa um pouco maior para regimes turbulentos.

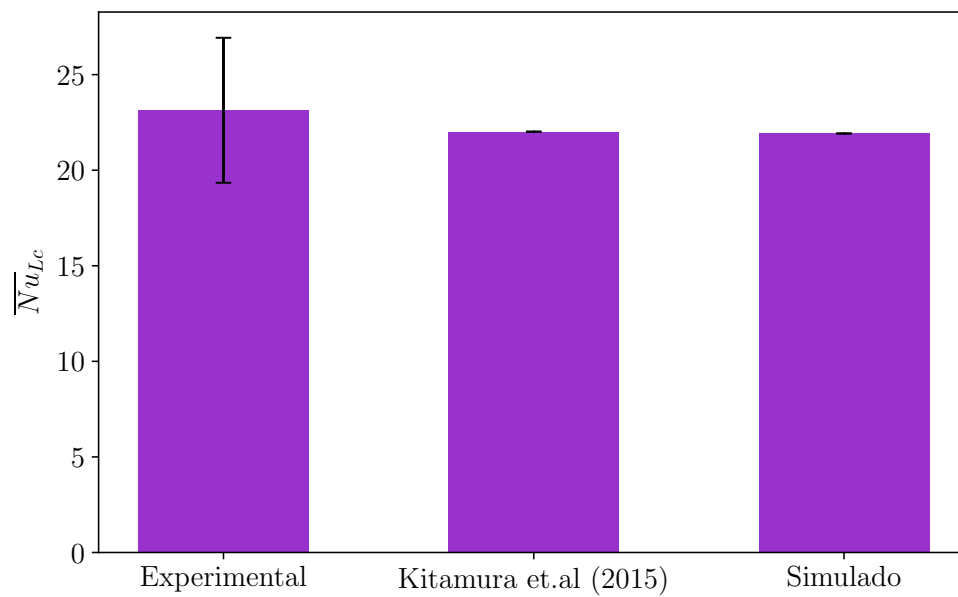
As figuras 77a 77b trazem a comparação entre os resultados de $\overline{Nu}_{Lc}$ obtidos através do procedimento experimentais, através das correlações de Kitamura et al. (2015) e através das correlações derivadas da simulação deste trabalho. Sendo a figura 77a referente ao caso 1 do procedimento experimental e a 77b o caso 2.

Através do gráfico de barras observa-se que a diferença entre os resultados é pequena. Sendo o maior erro relativo entre os resultados das correlações obtidas pela simulação e ao resultado experimental no caso 1 que chegou a um máximo de 9,51 %.

As tabelas 27 e 28 apresentam os coeficientes da equação 1.6 de acordo com a faixa do número de Rayleigh baseado no diâmetro hidráulico e comprimento respectivamente.

Figura 77: Comparação dos resultados de $\overline{Nu}_{Lc}$. (a) Caso 1. (b) Caso 2

(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 27: Coeficientes para $\overline{Nu}_{Lc}=f(Ra_{Lc})$.

Coeficiente	C	m
$8,0 \times 10^4 \leq Ra_{Lc} < 8,0 \times 10^6$	1,506	0,182
$8,0 \times 10^6 \leq Ra_{Lc} < 8,0 \times 10^7$	0,348	0,277
$8,0 \times 10^7 \leq Ra_{Lc} < 8,0 \times 10^9$	0,275	0,290

*Fonte: Elaborado pelo autor.*Tabela 28: Coeficientes para $\overline{Nu}_L=f(Ra_L)$.

Coeficiente	C	m
$10^4 \leq Ra_L < 10^6$	1,100	0,182
$10^6 \leq Ra_L < 10^7$	0,309	0,277
$10^7 \leq Ra_L < 10^9$	0,252	0,290

Fonte: Elaborado pelo autor.

Capítulo 5

Conclusões

No presente trabalho, simulações utilizando o método dos volumes finitos, com o domínio representativo de uma placa plana horizontal com temperatura uniforme foram realizadas.

Entre essas simulações casos 2D com modelos de turbulência $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \Omega$ SST e um caso 3D foram efetuados a fim de se compreender melhor as condições do escoamento sobre a placa, e derivar correlações no formato da equação 1.6.

Junto ao procedimento numérico, um procedimento experimental foi conduzido, também com objetivo de compreender o fenômeno físico da convecção natural.

Por fim, como conclusões do que foi descrito no trabalho temos:

- O software de código livre responsável por resolver os casos, o OpenFOAM se mostrou muito eficaz em resolver todas as simulações. Além disso o software livre Paraview também se mostrou muito competente em realizar alguma das etapas de pós processamentos;
- Tanto o modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$, quanto o modelo $\kappa - \omega$ SST se mostraram competentes em modelar o problema da convecção natural em uma placa plana, uma vez que os resultados quantitativos se correlacionaram muito bem com os apresentados em outra referência e com os resultados obtidos do procedimento experimental;
- O modelo de turbulência $\kappa - \omega$ SST levou uma leve vantagem quando comparado os resultados simulados com os resultados experimentais de [Kitamura et al. \(2015\)](#), sendo as maiores diferenças para maiores número de Rayleigh;
- Os efeitos advectivos são aumentados a medida que o número de Rayleigh aumenta. Além de velocidades maiores no escoamento, percebe-se que a camada limite e a pluma térmica se tornam menos espessos;
- A partir de $Ra_L \geq 10^7$ o escoamento se mostrou totalmente instável, oscilando na formação da camada limite térmica. A camada limite se levanta na borda de entrada da placa

caminha até o centro e sobe através de uma pluma térmica e esse comportamento se repete continuamente;

- Os efeitos da troca de calor por radiação são muito relevantes quando trata-se de convecção natural no ar, não podendo ser desprezada;
- A placa de vidro, adjacente a placa aquecida, e utilizada para restringir o escoamento na direção da largura da placa foi muito efetiva, podendo ser notado tanto nas simulações 3D quando nas imagens do efeito Schlieren;
- A metodologia para se estimar a potência dissipada no experimento, antes de se construir o aparato experimental foi de grande valia. Uma vez que a simulação numérica foi pouco trabalhosa e trouxe bons resultados na estimativa;
- A visualização do escoamento com o efeito Schlieren é muito efetiva para visualização de escoamentos no ar. Porém o empecilho maior é o espelho parabólico côncavo que é difícil de se encontrar no mercado;
- As espessuras da camada limite obtidas pela simulação 3D e pelas imagens do efeito Schlieren apresentaram uma boa concordância de valores;
- As correlações de Nusselt médio baseada do diâmetro hidráulico ou comprimento da placa, entregam bons resultados quando comparadas com outras correlações derivadas de procedimentos experimentais. E ela amplia a faixa de aplicação das correlações quando comparada com o trabalho de [Kitamura et al. \(2015\)](#).

5.1 Trabalhos futuros

O trabalho foi realizado e vários resultados foram obtidos, porém melhorias e possibilidades para outras investigações podem ser listadas:

- A utilização de outros modelos de turbulência para RANS nas análises numéricas, como $\text{RNG-}\kappa - \varepsilon$, $\kappa - \varepsilon - \phi - f$, dentre outros;
- Realizar simulações levando em conta a discretização temporal e estudar os efeitos de desenvolvimento do escoamento devido a convecção natural, utilização do solver `buoyantBoussinesqPimpleFoam`;
- A utilização de modelos LES (*Large Eddy Simulations*) para turbulência;
- A utilização de modelos com equações de estado, como gás ideal;

- Realizar as mesmas simulações porém levando em conta a radiação, com modelos de fator de forma, P1 ou fvDom;
- A utilização de Softwares comerciais e comparações entre os resultados obtidos com o Open-FOAM;
- Realizar o procedimento experimental para um maior número de valores de Ra_{Lc} ;
- Realizar o procedimento experimental com temperaturas mais elevadas para melhor visualização por efeito Schlieren;
- Realizar o procedimento experimental com um espelho maior para possibilitar a visualização de toda a placa;
- Variar a geometria e orientação da placa. Utilização de placas corrugadas de diferentes geometrias ou placas inclinadas ou combinação dos dois casos;
- Utilizar métodos de visualização utilizando a técnica Schlieren com fundo orientado para medir o campo de temperaturas;
- Utilizar a técnica Schlieren para visualizar o escoamento em cavidades aquecidas;
- Realizar o procedimento experimental dentro de um tanque d'água e utilizar outras técnicas de visualização, como marcadores ou bolhas de hidrogênio.

Referências Bibliográficas

- Abdulateef, Jasim. Correlations for Nusselt Number in Free Convection from an Isothermal Inclined Square Plate by a Numerical Simulation. *American Journal of Mechanics and Applications*, 3:8, janeiro 2015. doi: 10.11648/j.ajma.20150302.11. Citado na página 17.
- Ackroyd, J. a. D. Laminar natural convection boundary layers on near-horizontal plates. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 352(1669):249–274, dezembro 1976. ISSN 0080-4630, 2053-9169. doi: 10.1098/rspa.1976.0173. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/352/1669/249>. Citado na página 15.
- Al-Arabi, M. & El-Riedy, M. K. Natural convection heat transfer from isothermal horizontal plates of different shapes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19(12):1399–1404, dezembro 1976. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/0017-9310(76)90069-7. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931076900697>. Citado na página 10.
- Bandrowski, J. & Rybski, W. Free convection mass transfer from horizontal plates. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19(8):827–838, agosto 1976. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/0017-9310(76)90195-2. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931076901952>. Citado na página 15.
- Bergman, Theodore & Lavine, Andrienne. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. LTC, edição: 7^a, nova edição, janeiro 2014. ISBN 978-85-216-2504-9. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 5.
- Boussinesq, Joseph. *Essai Sur La Theorie Des Eaux Courantes...* Nabu Press, novembro 1877. ISBN 978-1-271-79872-8. Citado na página 24.
- Boussinesq, Joseph. *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section*. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897. URL <http://archive.org/details/thbeoriedelbeco01bousrich>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 27.
- Cengel, Yunus A. & Cimbala, John M. *Fluid Mechanics Fundamentals and Applications*.

- McGraw-Hill Education, New York, edição: 3, janeiro 2013. ISBN 978-0-07-338032-2. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 20.
- Chen, T. S.; Tien, H. C. & Armaly, B. F. Natural convection on horizontal, inclined, and vertical plates with variable surface temperature or heat flux. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 29(10):1465–1478, outubro 1986. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/0017-9310(86)90061-X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/001793108690061X>. Citado na página 15.
- Corcione, M. Heat Transfer Correlations for Free Convection from Upward-Facing Horizontal Rectangular Surfaces. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*, 2, janeiro 2007. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 19.
- Corcione, Massimo; Habib, Emanuele & Campo, Antonio. Natural convection from inclined plates to gases and liquids when both sides are uniformly heated at the same temperature. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(8):1405–1416, agosto 2011. ISSN 12900729. doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2011.03.012. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1290072911000883>. Citado na página 16.
- Elsevier. Scopus - Document search, 2018. URL <https://www.scopus.com/search/form.uri?display=basic>. Citado na página 3.
- ESSS, Engineering Simulation and Scientific Software. Engenharia Assistida por Computador: o que é e como funciona?, agosto 2014. URL <https://www.esss.co/blog/engenharia-assistida-por-computador-o-que-e-e-como-funciona/>. Citado na página 2.
- Fishenden, M. & Saunders, O. A. *An Introduction to Heat Transfer*. Clarendon Press, 1965. Google-Books-ID: 19UlnQEACAAJ. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 7.
- Fujii, Tetsu & Imura, Hideaki. Natural-convection heat transfer from a plate with arbitrary inclination. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(4):755–767, abril 1972. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/0017-9310(72)90118-4. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931072901184>. Citado na página 9.
- Goldstein, R. J. & Lau, Kei-Shun. Laminar natural convection from a horizontal plate and the influence of plate-edge extensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 129:55–75, abril 1983. ISSN 1469-7645, 0022-1120. doi: 10.1017/S0022112083000646. URL <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/laminar-natural-convection-from-a-horizontal-plate-and-the-influence-D9656B9FCC20F91B2A66BA734F624704>. Citado na página 15.

- Goldstein, R. J.; Sparrow, E. M. & Jones, D. C. Natural convection mass transfer adjacent to horizontal plates. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16(5):1025–1035, maio 1973. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/0017-9310(73)90041-0. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931073900410>. Citado na página 9.
- Guha, A. & Sengupta, S. Effects of finiteness on the thermo-fluid-dynamics of natural convection above horizontal plates. *Physics of Fluids*, 28(6), 2016. doi: 10.1063/1.4953382. Citado na página 17.
- Guha, Abhijit & Pradhan, Kaustav. Natural convection of non-Newtonian power-law fluids on a horizontal plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 70:930–938, março 2014. ISSN 00179310. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.11.001. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0017931013009538>. Citado na página 16.
- Guha, Abhijit; Jain, Akshat & Pradhan, Kaustav. Computation and physical explanation of the thermo-fluid-dynamics of natural convection around heated inclined plates with inclination varying from horizontal to vertical. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 135:1130–1151, junho 2019. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.01.054. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931018334380>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- Harvard, University. Schlieren Optics, 2014. URL <https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/schlieren-optics>. Citado na página 58.
- Hassan, Kamal-Eldin & Mohamed, Salah A. Natural convection from isothermal flat surfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 13(12):1873–1886, dezembro 1970. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/0017-9310(70)90090-6. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931070900906>. Citado na página 8.
- Husar, R. B. & Sparrow, E. M. Patterns of free convection flow adjacent to horizontal heated surfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 11(7):1206–1208, julho 1968. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/0017-9310(68)90036-7. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931068900367>. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 8.
- Kitamura, K.; Mitsuishi, A.; Suzuki, T. & Kimura, F. Fluid flow and heat transfer of natural convection adjacent to upward-facing, rectangular plates of arbitrary aspect ratios. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 89:320–332, outubro 2015. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.075. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931015005694>. Citado 10 vezes nas páginas ix, 12, 13, 70, 77, 78, 95, 96, 99 e 100.

- Kitamura, Kenzo & Kimura, Fumiyoshi. Heat transfer and fluid flow of natural convection adjacent to upward-facing horizontal plates. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(17):3149–3159, novembro 1995. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/0017-9310(95)00066-I. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/001793109500066I>. Citado na página 11.
- Launder, B. E. & Spalding, D. B. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(2):269–289, março 1974. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/0045-7825(74)90029-2. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782574900292>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- Lewandowski, W. M. & Kubski, P. Effect of the use of the balance and gradient methods as a result of experimental investigations of natural convection action with regard to the conception and construction of measuring apparatus. *Wärme - und Stoffübertragung*, 18(4):247–256, dezembro 1984. ISSN 0042-9929, 1432-1181. doi: 10.1007/BF01007137. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01007137>. Citado na página 10.
- Lewandowski, Witold M.; Radziemska, Ewa; Buzuk, Maciej & Bieszk, Henryk. Free convection heat transfer and fluid flow above horizontal rectangular plates. *Applied Energy*, 66(2):177–197, junho 2000. ISSN 0306-2619. doi: 10.1016/S0306-2619(99)00024-0. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306261999000240>. Citado na página 11.
- Lim, Chul-Kyu & Chung, Bum-Jin. Natural convection experiments on the upward and downward faces of inclined plates using an electroplating system. *Heat and Mass Transfer*, 51(5):713–722, maio 2015. ISSN 0947-7411, 1432-1181. doi: 10.1007/s00231-014-1450-x. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s00231-014-1450-x>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- Liu, Fangqing. A Thorough Description Of How WallFunctions Are Implemented In OpenFOAM, janeiro 2017. URL http://www.tfd.chalmers.se/~hani/kurser/OS_CFD_2016/FangqingLiu/openfoamFinal.pdf. Citado na página 51.
- Lloyd, J. R. & Moran, W. R. Natural Convection Adjacent to Horizontal Surface of Various Planforms. *Journal of Heat Transfer*, 96(4):443–447, novembro 1974. ISSN 0022-1481. doi: 10.1115/1.3450224. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.3450224>. Citado na página 10.
- Martorell, Ingrid; Herrero, Joan & Grau, Francesc X. Natural convection from narrow horizontal plates at moderate Rayleigh numbers. *International Journal of Heat*

- and Mass Transfer*, 46(13):2389–2402, junho 2003. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/S0017-9310(03)00010-3. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931003000103>. Citado na página 12.
- Mauá, Instituto de Tecnologia & Stem, Nair. (2) EFB205 - Física I [Propagação de Incertezas - parte 1] - YouTube. URL <https://www.youtube.com/watch?v=NeLa-dAwieo&t=1s>. Citado na página 109.
- Menter, F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32:1598–1605, agosto 1994. doi: 10.2514/3.12149. URL <https://doi.org/10.2514/3.12149>. Citado na página 25.
- Minipa, do Brasil. ET-3166A - Manual de instruções, janeiro 2017. Citado na página 58.
- Patankar, S. V & Spalding, D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(10):1787–1806, outubro 1972. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/0017-9310(72)90054-3. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931072900543>. Citado na página 35.
- Pera, Luciano & Gebhart, Benjamin. Natural convection boundary layer flow over horizontal and slightly inclined surfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16(6):1131–1146, junho 1973. ISSN 0017-9310. doi: 10.1016/0017-9310(73)90126-9. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931073901269>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 15.
- Pradhan, Kaustav & Guha, Abhijit. CFD solutions for magnetohydrodynamic natural convection over horizontal and vertical surfaces. *Journal of Molecular Liquids*, 236:465–476, junho 2017. ISSN 01677322. doi: 10.1016/j.molliq.2017.03.110. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S016773221630681X>. Citado na página 17.
- Pretot, S; Zeghmami, B & Le Palec, G. Theoretical and experimental study of natural convection on a horizontal plate. *Applied Thermal Engineering*, 20(10):873–891, julho 2000. ISSN 1359-4311. doi: 10.1016/S1359-4311(99)00067-8. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431199000678>. Citado na página 12.
- Rolfe, Bryan. Schlieren Imaging: How to See Air Flow!, 2015. URL <https://www.instructables.com/id/Schlieren-Imaging-How-to-see-air-flow/>. Citado na página 58.

- Rotem, Zeev & Claassen, Lutz. Natural convection above unconfined horizontal surfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 39(1):173–192, outubro 1969. ISSN 1469-7645, 0022-1120. doi: 10.1017/S0022112069002102. URL <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/natural-convection-above-unconfined-horizontal-surfaces/4F4767ECA743F64A220E4F56B667DDE6>. Citado na página 7.
- Versteeg, H. K. & Malalasekera, W. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson Education Ltd, Harlow, England ; New York, 2nd ed , 2007. ISBN 978-0-13-127498-3. OCLC: ocm76821177. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 37.
- Vinnichenko, Nikolay A; Plaksina, Yulia Yu; Yakimchuk, Olga S; Soldatenkova, Ksenia S & Uvarov, Alexander V. Comparison of Infrared and Background Oriented Schlieren Techniques for Air Flow Temperature Measurements. page 8, 2016. Citado na página 14.
- Vliet, G. C. Natural Convection Local Heat Transfer on Constant-Heat-Flux Inclined Surfaces. *Journal of Heat Transfer*, 91(4):511–516, novembro 1969. ISSN 0022-1481. doi: 10.1115/1.3580235. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.3580235>. Citado na página 7.
- Wei, J. J.; Yu, B. & Kawaguchi, Y. Simultaneous Natural-Convection Heat Transfer Above and Below an Isothermal Horizontal Thin Plate. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 44(1):39–58, julho 2003. ISSN 1040-7782. doi: 10.1080/713838175. URL <https://doi.org/10.1080/713838175>. Citado na página 15.
- Wikipédia. Openfoam, maio 2019. URL <https://pt.wikipedia.org/wiki/OpenFOAM>. Citado na página 2.
- Wilcox, David C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11):1299–1310, 1988. ISSN 0001-1452. doi: 10.2514/3.10041. URL <https://doi.org/10.2514/3.10041>. Citado na página 25.

Apêndices

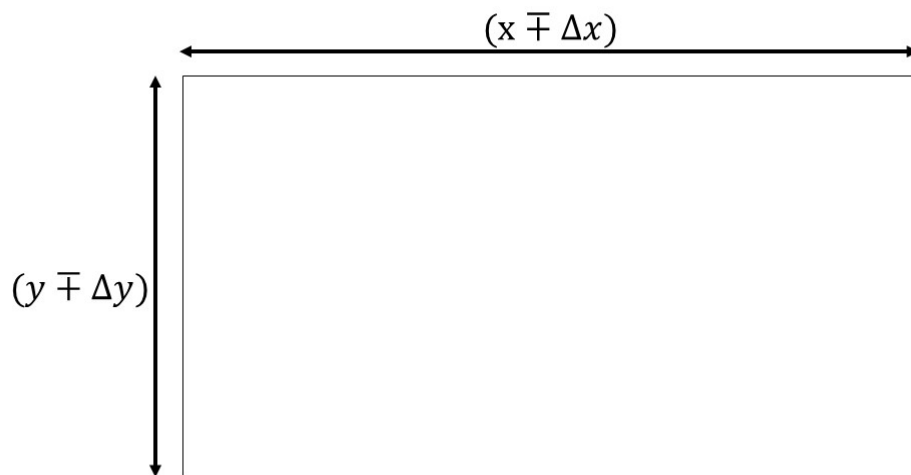
Apêndice A

Propagação de Incertezas

Um exemplo de propagação de incerteza é apresentado a seguir [Mauá & Stem](#).

Seja um retângulo de médias x e y com essas medidas possuindo um erro de medida igual a Δx e Δy respectivamente.

Figura 78: Retângulo com medidas x e y com erros $\pm\Delta x$ e $\pm\Delta y$ respectivamente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para calcularmos a incerteza da área desse retângulo que é uma função genérica apresentada na equação A.1.

$$G = f(x, y, z) \tag{A.1}$$

E a incerteza dessa função genérica apresentada na equação A.2.

$$s_G^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) s_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) s_z^2 \quad (\text{A.2})$$

No caso da área do retângulo a função G será igual a equação A.3.

$$G = xy \quad (\text{A.3})$$

Aplicando a incerteza para o produto apresentada na equação A.2, temos:

$$s_G^2 = (y)^2 s_x^2 + (x)^2 s_y^2 \quad (\text{A.4})$$

sendo as derivadas $\partial G/\partial x = y$ e $\partial G/\partial y = x$.

Se dividirmos a equação A.4 por G^2 , temos a equação A.5.

$$\frac{s_G^2}{(xy)^2} = \left(\frac{s_x^2}{x^2}\right) + \left(\frac{s_y^2}{y^2}\right) \rightarrow \frac{s_G^2}{G^2} = \left(\frac{s_x^2}{x^2}\right) + \left(\frac{s_y^2}{y^2}\right) \quad (\text{A.5})$$

o que resulta na incerteza de G apresentada na equação A.6

$$s_G = G \sqrt{\left[\left(\frac{s_x^2}{x^2}\right) + \left(\frac{s_y^2}{y^2}\right)\right]} \quad (\text{A.6})$$

A fim de evitar o desenvolvimento dessas expressões para os cálculos de incertezas, expressões genéricas foram desenvolvidas e são apresentadas a seguir.

Quando a função for constituída de adição ou subtração ($G = x \pm y \pm z \pm \dots$) temos a expressão geral para a incerteza apresentada pela equação A.7

$$s_G = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + \dots} \quad (\text{A.7})$$

Quando a função G possuir as demais operações matemáticas como a função apresentada na equação A.8

$$G = a \frac{x^p y^q}{z^\gamma} \quad (\text{A.8})$$

sendo a, p, q e γ constantes. Com efeito, temos o cálculo de propagação de incertezas igual a equação A.9.

$$s_G = G \sqrt{\left(p \frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{s_y}{y}\right)^2 + \left(\gamma \frac{s_z}{z}\right)^2} \quad (\text{A.9})$$

A.1 Exemplo : Cálculo da incerteza de $P, \dot{Q}_{rad}, \dot{Q}_{conv}, \dot{Q}_{tot}, \Delta T, \bar{h}$ e $\overline{Nu}$

Para o cálculo das incertezas de $\dot{Q}_{rad}, \dot{Q}_{conv}, \dot{Q}_{tot}, \Delta T, \bar{h}$ e $\overline{Nu}$, partimos das expressões para essas grandezas e aplicamos a Equação A.8. A tabela 29 apresenta as expressões para o cálculo da incerteza para as grandezas utilizadas.

Tabela 29: Expressões para o cálculo de propagação de incertezas de $P, \dot{Q}_{rad}, \dot{Q}_{conv}, \dot{Q}_{tot}, \Delta T, \bar{h}$ e $\overline{Nu}$.

Grandeza	Expressão	Incerteza
P	$P = \frac{U^2}{R}$	$P \sqrt{\left(\frac{2s_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{s_R}{R}\right)^2}$
$\dot{Q}_{rad}$	$\dot{Q}_{rad} = \sigma \varepsilon A (T_s^4 - T_{viz}^4)$	$\sqrt{\dot{Q}_{rad} \left(\frac{4 \cdot s_{T_s}}{T_s}\right)^2 + \dot{Q}_{rad} \left(\frac{4 \cdot s_{T_{amb}}}{T_{amb}}\right)^2}$
$\dot{Q}_{tot}$	$\dot{Q}_{tot} = \sum_{i=0}^5 P_i$	$\sqrt{\sum s_P^2}$
$\dot{Q}_{conv}$	$\dot{Q}_{conv} = hA(T - T_\infty)$	$\sqrt{s_{\dot{Q}_{rad}}^2 + s_{\dot{Q}_{tot}}^2}$
ΔT	$\Delta T = T_s - T_{amb}$	$\sqrt{s_{T_{amb}}^2 + s_{T_s}^2}$
$\bar{h}$	$\bar{h} = \frac{\dot{Q}_{conv}}{A(T - T_\infty)}$	$h \sqrt{\left(\frac{s_{\dot{Q}_{conv}}}{\dot{Q}_{conv}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\Delta T}}{\Delta T}\right)^2}$
$\overline{Nu}$	$\overline{Nu} = \frac{hL_c}{k}$	$\overline{Nu} = \sqrt{\frac{s_{\bar{h}}}{\bar{h}}}$

onde os valores de $s_{T_s}, s_{T_{amb}}, s_R, s_U$ são iguais as incertezas dos instrumentos de medida de temperatura, resistência elétrica e tensão respectivamente.