



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

José Milton Lopes Pinheiro

O MOVIMENTO E A PERCEPÇÃO DO MOVIMENTO EM AMBIENTES
DE GEOMETRIA DINÂMICA

RIO CLARO – SP

2018

JOSÉ MILTON LOPES PINHEIRO

**O MOVIMENTO E A PERCEÇÃO DO MOVIMENTO EM AMBIENTES DE
GEOMETRIA DINÂMICA**

Tese realizada no programa de Pós-Graduação/Doutorado em Educação Matemática da UNESP – Universidade Estadual Paulista, *campus* Rio Claro – Área de Concentração: Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos – sob orientação da Prof.^a Dr.^a Maria Aparecida Viggiani Bicudo e coorientação do Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni.

Rio Claro - SP

2018

P654m	<p>Pinheiro, José Milton Lopes</p> <p>O movimento e a percepção do movimento em ambientes de Geometria Dinâmica / José Milton Lopes Pinheiro. – Rio Claro, 2018</p> <p>285 f. + 1CD-ROM</p> <p>Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro</p> <p>Orientadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo Coorientador: Adlai Ralph Detoni</p> <p>1. Educação Matemática. 2. Geometria Dinâmica. 3. Fenomenologia. 4. Percepção. 5. Movimento. I. Título.</p>
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo Autor(a)

Essa ficha não pode ser modificada.

JOSÉ MILTON LOPES PINHEIRO

**O MOVIMENTO E A PERCEPÇÃO DO MOVIMENTO EM AMBIENTES DE
GEOMETRIA DINÂMICA**

Tese realizada no programa de Pós-Graduação/Doutorado em Educação Matemática da UNESP – Universidade Estadual Paulista, *campus* Rio Claro – Área de Concentração: Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos – sob orientação da Prof.^a Dr.^a Maria Aparecida Viggiani Bicudo e coorientação do Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni.

Tese aprovada pela Comissão Examinadora

Prof.^a Dr.^a Maria Aparecida Viggiani Bicudo (Orientadora)
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Rio Claro/SP

Prof.^a Dr.^a Rúbia Barcelos Amaral Schio
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Rio Claro/SP

Prof.^a Dr.^a Verilda Speridião Kluth
Universidade Federal de São Paulo – UNIFESP – Diadema/SP.

Prof.^a Dr.^a Marli Regina dos Santos
Universidade Federal de Viçosa – UFV – Viçosa/MG

Prof. Dr. Mauricio Rosa
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre - RS

Rio Claro – SP

14 de dezembro de 2018

Dedico este trabalho à minha esposa Suliane,
aos meus pais Cristalino e Graciete e aos meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

estar-se-no-mundo-com oferece possibilidade de eclodir o espanto da constatação de que ao indivíduo nunca é dada a possibilidade de ser tão somente ego-sujeito, mas que em sua própria subjetividade carrega o outro e o mundo, inclusive na medida em que no próprio movimento de sua constituição outro e mundo já fazem parte.

Por Bicudo (2011, p.34)

Embora aqui se dedique uma página aos agradecimentos àqueles que auxiliaram nesse percurso e aos que fizeram possível o início do mesmo, entendo que agradecer deva ser um ato rotineiro, a ser realizado a cada informação conseguida, a cada e-mail recebido, a cada aprendizado e a cada incentivo. Mas, infelizmente o tempo e a complexidade do trabalho nos envolvem de tal modo que deixamos passar muitas das oportunidades que nos são dadas para agradecer. Este momento, em que pela última vez me volto ao arquivo da tese, mostra-se como mais uma oportunidade, na qual o agradecimento não é mera formalidade, mas um modo de expressar a importância do *outro*, sem o qual não teria tese, não teria o pesquisador José Milton.

Agradeço:

Ao Adlai, que se faz presente em boa parte de minha formação acadêmica, que vem sendo professor, orientador e amigo.

À Maria, que com carinho conduziu a orientação deste trabalho, mostrando que o orientando, para ela, não é um ser puramente acadêmico, mas alguém para conversar, com quem também se brinca e se alegra.

Maria e Adlai, aprendi muito com vocês. Sou muito grato por isso!

Aos sujeitos desta pesquisa e à professora Rúbia, que contribuíram para que tivéssemos os dados com os quais trabalhamos neste estudo.

Ao grupo FEM, especialmente a alguns de seus membros que atuaram mais efetivamente lendo e escutando sobre esta pesquisa: Rosa, Jamur, Flávio, Taís (*in memoriam*) e Daniel, Anderson, Rose, Carla, Nelem, Bruno e João. Faço uma referência especial à Taís, que esse ano nos deixou e deixou também saudade, ensinamentos e muitos motivos para sorrir quando lembrada.

Aos membros da Banca de Qualificação, que com suas compreensões abriram possibilidades que certamente fizeram desta tese uma tese melhor.

Aos Professores do Programa, com os quais aprendi muito sobre Educação Matemática.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Portanto, agradeço ao apoio desta instituição.

Aos amigos de sempre Nilson, Sergio e Gisele, pelo apoio e incentivo aos estudos.

Aos amigos que conheci no Programa: Luiz, Bruno Leite, Juliana, Alex, Miliam, Carol, Federico, Diego, Egídio, Erika, dentre outros, e aos amigos que conheci fora do mesmo: Fabiano, Isabela, Marley, Paulo, Daniel, Kendi, Alessandro, Nati, Alan. Agradeço por fazerem desse lugar (o Programa, Rio Claro, São Carlos) um lar, ambiente alegre, agradável e familiar.

Aos que não foram citados, e que nesse agora em que escrevo estão presentes em meus pensamentos, também fica meu agradecimento. Muito obrigado!

RESUMO

Esta pesquisa interroga *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica*. Tem-se por objetivo compreender o fenômeno *movimento-percepção-conhecimento* no processo de constituir sentidos e significados geométricos, indo aos sujeitos que vivenciam modos de estar com o computador, trabalhando com Geometria Dinâmica. Para tanto, um grupo de graduandos em Licenciatura em Matemática foi convidado a desenvolver atividades junto aos demais sujeitos de aprendizagem, aos recursos didáticos e ao ambiente de Geometria Dinâmica. As experiências assim vivenciadas são dadas ao conhecimento mediante descrições realizadas por nossos sujeitos de pesquisa. Essas descrições foram analisadas mediante o movimento de voltar-se à interrogação da pesquisa aqui apresentada e de constituir sentidos do que o dito pelo sujeito faz para o pesquisador. Nesse movimento, foram destacadas nas descrições Unidades de Sentido, com as quais tecemos as Unidades Significativas, compreendidas como o dito nas Unidades de Sentido. Atentos às individualidades de cada Unidade Significativa, mas pensando-as com cada uma das outras, vimos possibilidades de convergências, que ao serem atualizadas evidenciaram grupos que explicitaram ideias abrangentes. Mediante três movimentos de convergência, nos quais foi se ampliando cada vez mais um pensar articulador sobre o fenômeno interrogado, foram constituídos quatro núcleos estruturantes do mesmo, que chamamos de Ideias Nucleares, são elas: *modos pelos quais o movimento se evidencia; as percepções que se evidenciam, que constituem um solo para novas percepções e para argumentações; a unidade que abarca o sujeito-movente e o que lhe é disponível ao movimento; a constituição do conhecimento ao se trabalhar com Geometria Dinâmica*. Ao interpretar e tecer compreensões sobre cada uma dessas Ideias Nucleares, e sobre o entrelaçamento delas, expomos ao leitor o entendimento que se constituiu na duração da pesquisa sobre a interrogação proposta e sobre o que ela indaga, explicitando a motricidade como modo de espacializar de um sujeito que se move *movendo-percebendo-refletindo-compreendendo-expressando*, o que evidencia que o fenômeno *movimento-percepção-conhecimento* se mostra como unidade no agora dos atos realizados por esse sujeito.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria Dinâmica. Fenomenologia. Percepção. Movimento. Motricidade.

ABSTRACT

This research inquires how the movement and the perception of the movement take place when one is with the computer, and students performing activities in a Dynamic Geometry environment. It aims to understand the movement-perception-knowledge phenomenon in the process of to constitute geometric senses and meanings up, going to the subjects who experience ways of being with the computer, working with Dynamic Geometry. In order to do so, a group of undergraduate students in teacher training in mathematics were invited to develop activities enjoyed with other learning co-subjects, with teaching resources, and with the dynamic geometry environment. The experiences thus experienced are given to knowledge through descriptions made by our research subjects up. These descriptions were analyzed by means of the movement to return to the interrogation of the research presented here and to constitute sense of what the said by the subject brings to the researcher. In this movement, they were highlighted out in the descriptions Units of Sense, with which we weave the Significant Units, understood as the said in Units of Sense. Attentive to the individualities of each Significant Units, but considering them with each other, we saw possibilities of convergence, which when updated revealed groups that made explicit ideas. By means of three convergence movements, in which an articulating thinking about the inquired phenomenon was increasingly extended, four structuring nuclei of the same, which we called Nuclear Ideas, were formed: they are the ways in which the movement is evidenced; the perceptions that are evident, that constitute a ground for new perceptions and for arguments; the unit that embraces the subject-mover and what is available to the movement; the constitution of knowledge when working with Dynamic Geometry. In interpreting and weaving understandings about each of these Nuclear Ideas, and on their interweaving, we present to the reader the understanding that was constituted in the length of the research on the proposed interrogation and on what it inquires, explaining the motricity as a way of “spatializing” a subject moving-perceiving-reflecting-understanding-expressing, which shows that the movement-perception-knowledge phenomenon is shown as a unit in the now of the acts performed by that subject.

Keywords: Mathematics Education. Dynamic Geometry. Phenomenology. Perception. Movement. Motricity.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO - A INTERROGAÇÃO DE PESQUISA: O SOLO SOBRE O QUAL SE CONSTITUI E OS HORIZONTES QUE ABRE	9
PRIMEIRA SEÇÃO - ASSUMINDO A FENOMENOLOGIA E A POSTURA FENOMENOLÓGICA.....	19
1.1 O conhecimento e sua constituição visados da perspectiva fenomenológica	19
1.1.1 Explicitando o entendimento de percepção	26
1.1.2 Explicitando a ideia do corpo-próprio em movimento: abertura ao perceber e ao perceber-se percebendo	32
1.2 A postura e metodologia que assume o pesquisador que realizar uma pesquisa que tem como fundo concepções fenomenológicas.....	42
SEGUNDA SEÇÃO - A CONSTITUIÇÃO DA GEOMETRIA DINÂMICA: UM OLHAR AO DINAMISMO QUE SE EVIDENCIA	49
2.1 Uma geometria dinâmica se constituindo no âmbito das Transformações Geométricas: abertura ao pensar sobre a Geometria trabalhada em <i>softwares</i> gráficos.....	49
2.2 A Geometria Dinâmica do <i>software</i> como um modo de ser do fazer dinâmico vivenciado no mundo-vida	54
2.3 O dinamismo na Geometria Dinâmica projetada e trabalhada em <i>softwares</i> : focando o movimento e a expressão do movimento em interfaces computacionais.....	58
2.4 O ato de arrastar e sua extensão que possibilita articular variantes e invariantes percebidos em interfaces de <i>softwares</i> de Geometria Dinâmica	70
2.4.1 Variantes, invariantes e inconformidades em ambientes de Geometria Dinâmica.....	75
TERCEIRA SEÇÃO - O CUIDADO COM O AMBIENTE DA PESQUISA	83
3.1 Os sujeitos significativos, a constituição do campo para a realização das atividades e a transcrição dos relatos expressos pelos sujeitos sobre experiências por eles vivenciadas	83
QUARTA SEÇÃO - TRANSCRIÇÃO E ANÁLISE: MOVIMENTOS DE INVESTIGAÇÃO.....	93
4.1 Procedimentos de transcrição e de análise das entrevistas e dos relatos sobre o desenvolvimento das atividades	93
4.2 A Análise Ideográfica: explicitando as unidades significativas	99

4.2.1 Dialogando sobre o desenvolvimento das atividades	99
4.2.2 Dialogando sobre a percepção do movimento ao realizar atividades em Geometria Dinâmica.....	106
4.3 A Análise Nomotética: buscando as convergências das Unidades Significativas e constituindo as Ideias Nucleares.....	115
QUINTA SEÇÃO - AS IDEIAS NUCLEARES: O QUE ELAS DIZEM?	129
5.1 Modos pelos quais o movimento se evidencia.....	130
5.2 As percepções que se evidenciam, que constituem um solo para novas percepções e para argumentações.....	142
5.3 A Unidade que abarca o sujeito-movente e o que lhe é disponível ao movimento	153
5.4 A constituição do conhecimento ao se trabalhar com Geometria Dinâmica	162
SEXTA SEÇÃO - DANDO CONTA DA INTERROGAÇÃO E TECENDO CONSIDERAÇÕES	174
BIBLIOGRAFIA	185
APÊNDICE 1 - As Transformações Geométricas da teoria à prática em ambiente de GD: o fundo dinâmico sobre o qual constituímos as atividades trabalhadas nesta pesquisa	189
APÊNDICE 2 - Transcrição e Análise Ideográfica do desenvolvimento das Atividades (de 2 a 8).....	197
APÊNDICE 3 - Transcrição e Análise Ideográfica das respostas dadas às perguntas 2, 3 e 4.....	237
APÊNDICE 4 - Primeiro Movimento de Convergência	248
APÊNDICE 5 - Segundo Movimento de Convergência	278

INTRODUÇÃO

A INTERROGAÇÃO DE PESQUISA: O SOLO SOBRE O QUAL SE CONSTITUI E OS HORIZONTES QUE ABRE

o que nos é dado é um caminho, uma experiência que esclarece a si própria, que se retifica e prossegue o diálogo consigo mesma e com o outro. Portanto, o que nos arranca da dispersão dos instantes não é uma razão acabada, é – como se disse sempre – uma luz natural, nossa abertura a alguma coisa.

Por Merleau-Ponty (1990, p. 56)

✓ *Introduzindo o tema e especificando a interrogação*

Pesquisas realizadas em torno da região da Informática na Educação Matemática, dentre as quais Powell e Alqahtani (2015) e Silva e Penteado (2009) mostram que os recursos tecnológicos levados à escola levantam seguidamente interrogações quanto às suas possibilidades didáticas e pedagógicas. O conhecimento matemático constituído em ambientes informatizados é foco de muitos estudos. Porém, compreender o mesmo, ou seus aspectos, é uma tarefa complexa, até porque ele incide sobre concepções em torno de temas como o ensino e a aprendizagem que, ao serem tomados junto à informática, solicitam mais estudos.

Como professor formado em um contexto cuja informática se faz presente na escola e em atividades de ensino, tornei-me um profissional com inquietações concernentes às implicações que remetem às tecnologias informatizadas nas escolas.

Isso pois, em todas as direções da produção humana, vemo-nos implicados com novas possibilidades e exigências: “a tecnologia no mundo-vida¹ em que estamos hoje [...] traz-nos desafios a respeito da constituição desse mundo, tanto em termos de compreender sua própria realidade, como compreendermos a nós mesmos” (BICUDO; ROSA, 2013, p. 62).

¹ “[...] lugar de nossas vivências, lugar onde ‘somos com os outros’, cujo significado é o de nunca sermos indivíduos separados do mundo e, portanto, dos outros (sujeitos individuais, coletivos, instrumentos, ciberespaço, etc.). Nele, ‘somos sempre com’, isto é, tornamo-nos, vimos a ser, estando com, agindo sobre e abraçando o que nos chega pela percepção, construindo-nos com a matéria/forma que nos expõe e que, alimenta pelos nossos atos intencionais, conforma-nos em um movimento estruturante, marcando nossos estilos, configurando os nossos modos de ser, por sermos (o mundo e nós mesmos) aquela matéria-forma do que está no horizonte de nossa compreensão” (BICUDO, 2010, p. 131). Nas obras de Husserl em Alemão, consta como *Lebenswelt* que é traduzido por muitos autores, para a língua latina como *mundo-da-vida*. Preferimos neste texto a tradução de Bicudo (2012), *mundo-vida*, por concordarmos com a autora que “a concepção de *Lebenswelt* expõe o mundo como vivo no sentido de o mundo, ao ser constituído continuamente mediante expressões das vivências e do que é nelas compreendido, interpretado e mantido em materialidades histórico-culturais, se tece de modo firme, dando-se como o solo em que nos movimentamos. Trata-se em minha compreensão, da vida do mundo no qual nos encontramos e não no mundo da vida, o que nos lançaria para outras discussões” (BICUDO, 2012, p. 79, grifo da autora)

Nutrido por essas inquietações, no início de 2012, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) e desenvolvi a pesquisa que originou a dissertação intitulada: “*A Aprendizagem Significativa em ambientes colaborativo-investigativos de aprendizagem: um estudo de conceitos de Geometria Analítica Plana*” (PINHEIRO, 2013).

Nessa pesquisa, os sujeitos², professores e futuros professores de Matemática, foram convidados a realizar atividades projetadas no ambiente de Geometria Dinâmica (GD) do *software* Geogebra. Foi solicitado a eles que se voltassem para a vivência³ da pesquisa e se manifestassem a respeito: das possibilidades que se abriram a eles ao vivenciarem um estudo de Geometria e uma proposta de metodologia que se vale de aparatos tecnológicos; de possíveis contribuições desta vivência para sua formação acadêmica e profissional; e de modos de pensar práticas pedagógicas subsidiadas por tecnologias informatizadas.

Essa investigação focou a prática pedagógica e a formação de professores com tecnologias informáticas. Ela iluminou e abriu compreensões também sobre as implicações do dinamismo da GD para a aprendizagem de conceitos geométricos. Ao finalizá-la, novas questões foram se colocando para mim. Elas diziam do dinamismo presentificado nas atividades realizadas junto a *softwares*. Questionava-me: como o dinamismo se mostra ao se estar realizando atividades em *softwares*? Continuamente, ficava me perguntando sobre o movimento em figuras geométricas e suas relações passíveis de visualização e, especialmente, sobre a presença do sujeito que realiza movimentos e visualiza as implicações dos mesmos, materializando-se em interfaces computacionais.

Nas leituras sobre GD iniciadas no mestrado, fui compreendendo que o sujeito que realiza o movimento, ou não está presente, ou é posto em segundo plano quando se busca definir ou caracterizar a GD. Essa compreensão ampliou e aprofundou as perguntas que iam se avolumando em mais inquietações. Agora se mostrava importante compreender a Ciência Geometria, a GD, as atividades passíveis de bem conduzir o ensino visando à aprendizagem do

² Sujeito é entendido enquanto entidade orgânica que se apresenta como singular, única e que é aquele que age ou que realiza ação. Entretanto, o sujeito não é um conceito vazio, abstrato, que gira em torno de si mesmo, de modo autocentrado e disparador de ações geradas por si mesmo, sem qualquer inter-relação com o que ou com quem está à sua volta. Aprofundando esse movimento, abre-se o entendimento de pessoa que apresenta um núcleo subjetivo, singular e cuja constituição vai se expandindo em complexidades. Um aspecto importante é entender o seu ser como um feixe de possibilidades que se realizam no movimento do acontecer, ou seja, da própria vida em que estão escolhas.

³ A vivência “não é entendida como algo dado, pois somos nós que penetramos no interior dela e que a experienciamos de maneira imediata. O significado explicitado diz do sentido da experiência vivida, dizendo, com isso, do contato imediato com a vida, não se tratando de um conteúdo de experiências, mas do ato de vivê-las. No momento em que a experiência ocorre ela ainda não é refletida. Porém pode se tornar foco sobre a qual a reflexão se volta, abrindo, no fluxo do vivido, momentos de tomar ciência do vivenciado” (BICUDO, 2011, p. 33).

aluno, o modo pelo qual o aluno entra no dinamismo configurado pela tarefa solicitada, pelo conteúdo subjacente a essa tarefa, pela disponibilidade oferecida pelas ferramentas computacionais. Focando a complexidade desse dinamismo, destacou-se a mim com força o aluno, visto como sujeito desencadeador do movimento. Passei a indagar: como ele é entendido nas pesquisas produzidas na área da Educação Matemática a respeito da Geometria Dinâmica?

Richit (2015) descreve a GD ambientada no computador ou equipamento similar com sua potencialidade, como aquela que permite construir, explorar e conhecer propriedades de uma figura geométrica disponíveis na interface de um *software*, por meio da visualização do movimento de objetos pertencentes à figura e através do estudo das implicações gráficas e/ou algébricas desse movimento. Silva e Penteadó (2009) explicitam que ela é assim chamada pelas possibilidades dinâmicas de um *software*, como: arrastar, mover, transladar, etc.

Essas leituras foram evidenciando que o sujeito movente não estava sendo focado. Entendo que o objeto, em si e por si, não se move na interface do *software*, mas é movido pelo sujeito que está em situação de mover-se enquanto o move. Entretanto, *o que desencadeia o movimento do sujeito?* Abre-se, com essa inquietação, mais um campo de pesquisa, o referente ao sujeito que se põe em movimento para realizar sua espacialidade frente a uma tarefa geométrica e com atenção ao que ela solicita, ao que dela emerge, constituindo conhecimentos.

Com esse entendimento, passei a indagar-me sobre como o movimento desse sujeito ao responder à solicitação das atividades trabalhadas em GD, se presentifica na constituição do conhecimento geométrico. Mais perguntas se colocaram: *Quais as implicações do mover-se para aquele que se move, dando-se conta de estar em movimento, movendo-se e movendo o que lhe é disponível em GD? Como compreender esse sujeito móvel e movente?*

Como ponto de partida, sabia que é na ação “que a espacialidade do corpo se realiza, e a análise do movimento próprio deve levar-nos a compreendê-la melhor” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 149). Portanto, para compreender as questões acima postas sobre o movimento, dei-me conta de precisar propor situações em que sujeitos de pesquisa realizassem tarefas em ambientes de GD, para que eu pudesse focar o ato de mover e suas implicações.

Com essas inquietações dispus-me a continuar minhas buscas e, nessa tentativa, ingressei no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista - *campus* Rio Claro, para cursar o Doutorado em Educação Matemática. Dada a exigência de um projeto de pesquisa, como um dos requisitos para o ingresso nesse Programa, voltei às minhas inquietações, agora em diálogo que buscava esclarecer a mim mesmo o que procurava. Mantive-me em contato com o meu orientador do mestrado – Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni - que trabalha com Geometria e com GD e com a possível orientadora do doutorado –

A Prof.^a Dr.^a Maria Aparecida Viggiani Bicudo - que estuda a constituição da subjetividade, da intersubjetividade, do conhecimento, inclusive na realidade do ciberespaço.

Dos encontros e conversas havidas, em um movimento que se alongou em experiências vivenciadas de clareza e de obscuridade, de leituras de trabalhos de autores significativos para a área e de debates com colegas, minhas perplexidades, inquietações e perguntas não muito bem delineadas foram, aos poucos, tomando forma e constituindo uma interrogação norteadora, com a qual me lanço em um movimento de pesquisa buscando compreender: *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica?*

✓ *O que a interrogação questiona*

Questionando o que interroga a interrogação, damo-nos conta de que ela abrange questões sobre o significado de *GD* na Geometria, vista no âmbito da ciência Matemática tal como compreendida na civilização do Mundo Ocidental, bem como sobre atividades didático-pedagógicas desenvolvidas com *GD*.

Este significado de *GD*, solicita estudos sobre a própria Geometria, sua constituição como ciência no mundo ocidental e sobre a *GD* em termos de suas características quando vista no âmbito da Geometria instituída.

As atividades didático-pedagógicas desenvolvidas com *GD* sugerem que se investigue trabalhos de autores da área da Educação Matemática que as esclarece e as caracterize, apontando modos de proceder, bem como, explicitando as razões pelas quais se procede deste ou daquele modo, com vistas ao movimento das figuras geométricas correspondente ao problema proposto. Esses estudos podem contribuir para que se visualize a sustentação do cerne da interrogação, qual seja, pelo modo de o sujeito, que realiza o movimento junto ao *software*, compreender o movimento por ele efetuado e compreender-se realizando esse movimento que, por sua vez, acarreta o movimento de figuras geométricas na tela do computador.

O modo de o sujeito que realiza o movimento junto ao *software* compreender o movimento por ele efetuado e compreender-se realizando esse movimento, adentra por estudos sobre concepção de sujeito, de constituição de conhecimento em Geometria junto à *GD*. Pelos estudos que realizamos em obras de Husserl e Merleau-Ponty, entendemos que a constituição desse conhecimento carrega consigo o próprio movimento do corpo vivente. Assim, a

interrogação solicita que na investigação se busque explicitar sobre essa constituição e os modos pelos quais o movimento intencional⁴ do corpo-próprio⁵ revela-se como seu primado.

Com isso, evidenciamos que o *como o sujeito compreende o movimento que realiza e como dá-se conta de estar realizando esse movimento* é o que está posto em destaque, constituindo-se o âmago desta pesquisa.

Sendo assim, enquanto as questões envolvidas na interrogação solicitam estudos que as esclareçam e revelem concepções assumidas, o seu núcleo, ou seja, o que está sendo interrogado, clama por uma investigação junto aos sujeitos que realizam o movimento, dele dando-se conta. Coloca-se em destaque, fenomenologicamente falando em *epoché*, o modo pelo qual os sujeitos expressam sua percepção⁶ de movimento, ao movimentarem com o *mouse* as figuras na tela do computador, realizando as tarefas solicitadas.

Esta investigação solicita que se esteja junto a sujeitos que se coloquem desenvolvendo atividades de Geometria em ambientes de GD, visando compreender como, de que modo e por que realizam o movimento e como percebem ou se dão conta de si ao estar realizando-o.

Ao questionar o que interroga a interrogação, é possível esclarecer o que se está entendendo pelo indagado e, também, evidenciar outras questões que se vão colocando junto à interrogação norteadora, que, ao serem analisadas, poderão esclarecer apropriadamente o fenômeno⁷ interrogado. Essas questões se entrelaçam quando se foca o movimento, o realizado e o percebido da perspectiva do sujeito que o realiza. Nesse entrelaçamento vimos constituir-se nosso fenômeno de pesquisa, *movimento-percepção-conhecimento*, escrito desta maneira por entendermos que, por mais que se possa dizer separadamente dos atos de mover, de perceber e de conhecer, nas vivências esses atos estão entrelaçados, visualizada como uma unidade de ação. Podemos explicitar que: o movimento é realização de um corpo-próprio que sempre se

⁴ “Modo de ser intencional, intencionalidade é característica da consciência na visão fenomenológica husserliana. Consciência é compreendida como movimento intencional, efetuado pelo corpo-encarnado, ao ir de modo atento em direção ao focado como figura destacada de fundo, totalidade em que sempre estamos com os outros” (BICUDO, 2011, p. 31).

⁵ Entendido como *Leib*, corpo com movimento intencional. Nele, está compreendida todas as experiências vivenciadas, sendo ele também, ponto zero para novas experiências. Ele realiza e se realiza em movimento, assumindo perspectivas diversas e pondo-se em movimento no mundo-vida que incessantemente vai se configurando junto às também incessantes configurações e reconfigurações desse corpo (MERLEAU-PONTY, 2011).

⁶ A Percepção é aqui entendida como ato realizado pelo sujeito na carnalidade de seu corpo-vivente. Para Merleau-Ponty (2011) a percepção é uma porta que nos abre vários horizontes, que nos dá acesso às *coisas* do mundo, porém, nunca em suas completudes imediatas, tal como entendido em um pensamento objetivo, que, por dar o mundo inteiramente pronto, acaba por ignorar o sujeito que percebe.

⁷ “Fenômeno é o que se mostra no ato de intuição efetuado por um sujeito individualmente contextualizado, que olha em direção ao que se mostra de modo atento e que percebe isso que se mostra nas modalidades pelas quais se dá a ver no próprio solo em que se destaca como figura de um fundo. A figura, delimitada como o fenômeno e fundo, carregando o entorno em que o fenômeno faz sentido” (BICUDO, 2011, p. 30).

move intencionalmente em busca de..., em direção a algo. A percepção é a ação de perceber. Perceber, então, é ato que, quando atualizado, evidencia ao sujeito-perceptivo a essência do fenômeno, ou seja, o que o fenômeno é na perspectiva e nos modos pelos quais ele se mostra ao sujeito no momento do *agora*. O conhecimento, conforme assumimos nesta investigação, diz da sua (do fenômeno) constituição. Esta envolve as vivências, abarcando os atos sensoriais que, pelas sensações, vai preenchendo o percebido, que se evidencia como uma totalidade no momento do *agora*, com presenças do sensorialmente sentido pelo corpo-próprio; a temporalidade dos atos vivenciados; os atos da consciência, envolvendo os físicos, os psíquicos e os espirituais; a articulação do que vai sendo compreendido na realização desses atos e a articulação de um modo de dizer dessa compreensão que já aponta para a expressão do compreendido.

Um desafio filosófico que se mostra ao voltarmos-nos a esse fenômeno é a compreensão da unidade que abarca o mover, o perceber, o conhecer e o sujeito realizador destes atos. Trata-se de um desafio, pois transcende o estudo da percepção de objetos se movendo, pondo-nos a refletir sobre o dar-se conta de estar percebendo, sobre o móvel e o movente e sobre o ato de mover que os une em uma mesma expressão de movimento. Ainda, sobre a materialização de uma intencionalidade do movimento, especialmente aquelas que avançam e se expõem em interfaces computacionais.

✓ *Procedimentos antevistos para compreender o interrogado*

Para dar conta de nossa interrogação e do que ela questiona, realizamos um primeiro movimento de pesquisa com o qual buscamos, na literatura, autores e suas obras que versam sobre temas que emergem dessa interrogação, bem como sobre modos pelos quais podemos compreendê-la. No caso aqui focado, sobre procedimentos que, de modo apropriado, permitam olhar as experiências vivenciadas por sujeitos que realizam atividades em ambientes de GD, bem como, compreender a percepção ao se darem conta a respeito dessas vivências.

Inicialmente, buscamos pesquisadores em Educação Matemática que tratam de GD. Entendemos que com essas leituras é possível avançar e articular compreensões sobre uma geometria dinâmica⁸ que se expõe em nosso mundo-vida, focando-a da perspectiva do sujeito. Ele, movendo-se faz o dinamismo acontecer, seja em ambientes computacionais ou em

⁸ Essa não é especificamente a Geometria Dinâmica, aquela projetada, trabalhada e definida apenas no âmbito dos *softwares* gráficos. Por isso, a nomenclatura aqui utilizada não é a mesma utilizada ao mencionar uma ciência ou conteúdo científico, com iniciais em maiúsculo.

ambientes cuja tecnologia disponível não é a dos *softwares*, como, por exemplo, o chão, o papel, a lousa, nos quais se pode trabalhar com um palito, um compasso, um copo um lápis, um giz.

A interrogação aqui posta solicita um estudo sobre o movimento e a percepção do movimento. A complexidade que se mostra ao estudar a percepção do movimento aponta para estudos junto aos autores que trabalham com sinestesia⁹ e motricidade¹⁰ e que assumem uma visão de corpo-próprio olhado em sua totalidade e como ponto zero para as realizações do sujeito que está no mundo-vida (MERLEAU-PONTY, 2011), que é solo de todas suas percepções e teorizações produzidas de modo intersubjetivo. No mundo-vida, estamos todos envolvidos pelas redes de significados, expressos pela linguagem e por ela mantidos. Essa manutenção e transporte são auxiliados e melhorados pelos recursos técnicos e tecnológicos disponíveis, destacando-se, dentre eles, aqueles pertinentes ao campo da informática.

Na *Fenomenologia da Percepção* de Merleau-Ponty (2011) há uma ampla e importante articulação sobre esses temas. Isso contribui com a justificativa da presença do pensar desse autor nesta investigação. Nessa direção, em obras de Husserl (2006) como *Ideias para uma Fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica*, avançamos em estudos sobre a sinestesia, que abarca todo o ato de mover e o fluxo que dele emerge, evidenciando-se como a unidade que enlaça o movente e o móvel. Compreendemos que a sinestesia, olhada da perspectiva do sujeito que age com *software*, pode oferecer possibilidades de articular compreensões de Husserl e Merleau-Ponty com GD. Essas articulações podem abrir um campo de compreensões a respeito da GD e da tecnologia informática habitada¹¹ por um sujeito.

Entendemos, ainda, que ao estudar esses filósofos, especialmente Husserl (2006), compreensões sobre Geometria poderão se desdobrar, possibilitando articulá-las com o fazer geométrico em ambientes de GD. Até onde compreendemos, esses estudos ajudam a esclarecer aspectos do *fazer geometria*.

Compreender o *como se dá* presente na interrogação se mostra uma tarefa complexa, visto que esse *como* direciona-se à percepção do que se manifesta na vivência. A imprevisibilidade do que se manifesta sustenta a originalidade da pesquisa e evidencia a importância de o pesquisador estar investigando aberto ao que pode se mostrar. A complexidade

⁹ A Sinestesia contempla todo o “eu movo”, o “eu faço”, que estão interligados na unidade universal, onde a paralisação sinestésica é um modo do “eu faço”. Diz do movimento; não se trata da Cinestesia, que diz de um corpo somático que contempla os “órgãos da percepção” (olhos, mãos, ouvido, etc.) (HUSSERL, 2012).

¹⁰ Motricidade é expressa por Merleau-Ponty (2011) como o modo intencional de a pessoa se movimentar. É vivência da espacialidade do corpo-vivente intencionado às ações solicitadas pelo mundo-vida, que, neste estudo, é focado da perspectiva do *software* de GD.

¹¹ Habitar tem o sentido de sentirmo-nos acolhidos em moradas onde permanecemos demoradamente, familiarizando-nos com o “em torno” e experienciando situações.

do investigado solicita que sejam assumidos procedimentos de pesquisa que permitam abranger a própria vivência do movimento realizado e o como os sujeitos expressam a percepção do sentido que para eles faz suas vivências.

Compreendemos assim que a interrogação indica a importância de um estudo de campo, em que sujeitos vivenciem experiências com GD. Tendo como foco de nosso estudo o *movimento*, buscamos constituir um campo de pesquisa no qual os sujeitos possam se mover, movendo, e de expressando em/com movimento.

Nesta pesquisa, dar abertura e incentivar o movimento implica apresentar atividades que solicitem movimentos e propor essas atividades com um *software* no qual o mover seja uma possibilidade que se mostre ao sujeito. Essas atividades são aqui pensadas junto ao *software* Geogebra, visando disponibilizar em sua interface figuras potencialmente dinâmicas e ferramentas com as quais o dinamismo das ações pode ser atualizado.

A Matemática oferece um conteúdo que pode constituir um fundo para a elaboração dessas atividades. Vemos nas Transformações Geométricas possibilidade para focar o *movimento*, visto que elas solicitam transformações de posições. Compreendendo as transformações como um modo de movimento possível ao sujeito, proporemos atividades que possibilitem constituir conhecimentos geométricos ao estar realizando movimentos, dentre os quais os de rotação, de translação e de simetria. Pensamos, com isso, o fundo das atividades, mas não o produto do conhecimento que dele poderia emergir.

Um modo de proceder, visando compreender a vivência de nossos sujeitos com as atividades propostas, é abarcado pela pesquisa qualitativa fenomenológica, que busca por compreensões dos sentidos e interpretações dos significados que dizem do fenômeno investigado. Para tanto, buscaremos sujeitos significativos, ou seja, os que estejam em situação de realizar as atividades propostas, de se darem conta delas, dos movimentos que elas solicitam e de colocarem-se em movimento junto a essas solicitações. Para além dessas atividades, realizaremos uma entrevista para interrogar nossos sujeitos sobre os modos pelos quais o movimento se mostrou para eles, evidenciando o dar-se conta de seus atos nas experiências vivenciadas com/em movimento.

Os procedimentos de constituição de dados, de análise e interpretação serão especificados na seção a eles destinados.

✓ *Da organização do texto*

Para entender como se dá o movimento e a percepção do movimento de um sujeito que também se move, compreendemos que devemos articular o modo pelo qual se entende o ato de mover e de mover-se, que no momento de sua realização, pode ser entendido como um ato de perceber. Para tanto, na *Primeira Seção*, buscamos abrir compreensões sobre o movimento, sobre a percepção do sujeito que se move enquanto se compreende em movimento e sobre como a percepção se constitui como primado de todo e qualquer conhecimento humano. Conhecimento este, que é focado nesta seção da perspectiva fenomenológica, por entendermos que essa mesma perspectiva nos permite visar o movimento e percepção do movimento no âmbito das vivências, tal qual objetivamos nesta pesquisa.

Ainda, na *Primeira Seção*, evidenciamos como a Fenomenologia propõe modos de olhar o fenômeno de pesquisa. Buscamos expor a postura que assume um pesquisador que tem como concepção de mundo a Fenomenologia, para com isso, evidenciar como estaremos em campo, com nossos sujeitos, assumindo a postura fenomenológica ao focar e interrogar o fenômeno *movimento-percepção-conhecimento*, buscando conhecê-lo.

As compreensões abertas na *Primeira Seção* nos permitem focar o sujeito-movente movendo-se com o que lhe é disponível em interfaces computacionais, especialmente aquelas em que se expõe a GD. Com essas compreensões, avançamos e articulamos a *Segunda Seção*, na qual buscamos explicitar e aproximar o modo de ser-movente no mundo-vida e o modo de ser-movente em ambientes de GD. Nessa seção, expomos nossas compreensões sobre o movimento do/no corpo-próprio que atualiza e faz realizar-se o dinamismo posto como possibilidade dinâmica programada em interfaces computacionais.

Na *Segunda Seção*, trazemos também compreensões sobre GD no âmbito da Educação Matemática e abrimos ideias iniciais sobre a realização e a atualização do movimento junto a *softwares* de GD. No entanto, entendemos ser preciso avançar em estudos que focam o *como se dá* a percepção dessa atualização, que acontece tanto no *software* quanto no sujeito-movente. Para isso é preciso investigar situações em que sujeitos se coloquem nesse movimento e pedir que os mesmos relatem como o percebem e como se percebem sendo eles seus realizadores. Isso é o que propomos na pesquisa de campo, que apresentamos na *Terceira Seção*.

Na *Terceira Seção* expomos como se dá a realização desta pesquisa. Apresentamos os sujeitos - alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), *campus* Rio Claro - e explicitamos porque os entendemos como significativos à pesquisa. Apresentamos, ainda, o conteúdo matemático trabalhado, o *software* de GD escolhido e os procedimentos de pesquisa. O modo de realizar a investigação solicita que seja assumida uma postura. Explicitamos nessa seção como se deu esse modo de estar pesquisando, que se

mostrou presente em cada momento da pesquisa. Sendo a transcrição um momento importante na realização da mesma, expressamos também o que entendemos pelo ato de transcrever, bem como sobre a importância desse ato para nós. Essa articulação inicial abre caminhos para delinear as transcrições dos relatos por nós ouvidos e registrados em campo de pesquisa.

Na *Quarta Seção* expomos as transcrições. Evidenciamos os modos pelos quais nos voltamos a elas, buscando expressões que dizem da questão diretriz. Expomos e realizamos procedimentos de análise dessas transcrições, constituindo *Ideias Nucleares*¹² que emergem de convergências possíveis entre unidades que entendemos ser significativas à compreensão do fenômeno aqui pesquisado, qual seja, o *movimento-percepção-conhecimento*.

Uma vez constituídas Ideias Nucleares, nos voltamos a elas para articular o que se evidenciou a respeito desse fenômeno. Isto é feito na *Quinta Seção*, onde tematizamos cada ideia nuclear, destacando o que elas dizem sobre a pergunta desta pesquisa, bem como sobre o fenômeno que ela interroga, visando compreender e expor compressões a respeito dele, especialmente sobre a estrutura que o constitui.

Articularemos também a *Sexta Seção*, na qual apresentamos uma síntese compreensiva do movimento de teorização e nos direcionaremos a uma metacompreensão, dizendo do modo pelo qual estamos compreendendo/interpretando o que foi dito do movimento e da percepção do movimento em ambientes de GD, quando se está trabalhando com sujeitos de aprendizagem, o que nos leva a compreender melhor o fenômeno interrogado.

¹² Em muitos trabalhos do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática (FEM) tem-se denominado também por invariantes, categorias abertas. Ideias Nucleares, invariantes e categorias abertas são modos de dizer de um grupo abrangente, constituído em movimentos de redução que evidencia sentidos, significados, seus entrelaçamentos e confluências. “A modificação de denominação foi acontecendo na medida em que pelas críticas recebidas ou questionamentos havidos ‘invariantes’ conduzia à compreensão de algo estruturado e preso nessa estruturação e ‘categorias abertas’, por mais que se explicasse, o entendimento de ‘categoria’ no sentido aristotélico se mantinha” (VENTURIN, 2015, p. 465).

PRIMEIRA SEÇÃO

ASSUMINDO A FENOMENOLOGIA E A POSTURA FENOMENOLÓGICA

A filosofia é uma ocupação do homem, que encontra nele o seu ponto de partida como também o seu ponto de chegada. Sua própria essência só é compatível com um comportamento cujas raízes se encontram no sentido de abertura, de disponibilidade, de consentimento admirativo ao ser. Consentido ao ser, realiza-se o homem com liberdade e com inteligência.

Por Bornheim (1983, p. 100)

Nesta seção, expomos a visão fenomenológica de conhecimento, de como ele se constitui, e evidenciamos como a percepção e o movimento do/no corpo-próprio - sendo a própria percepção um movimento desse corpo - mostram-se como primado dessa constituição, como solo do qual emerge todo e qualquer conhecimento humano.

Tecemos sobre como a compreensão fenomenológica move um pesquisador no processo investigativo. Com isso, expomos a postura que ele assume ao focar a vivência, interrogando o que nela se manifesta. Ao dizer desse modo de estar com uma pesquisa, expomos ao leitor desta tese nosso próprio modo de pesquisar, de vivenciar cada momento de nossa pesquisa, especialmente aqueles em que estamos em campo com nossos sujeitos, investigando *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica*.

1.1 O conhecimento e sua constituição visados da perspectiva fenomenológica

Visando posicionar este trabalho para o leitor, é importante, conforme nossa compreensão, que se diga que a fenomenologia husserliana busca compreender sempre o modo pelo qual o conhecimento do mundo é constituído. Não se trata de explicitar a constituição do mundo, mas tão somente do conhecimento que nós, seres humanos, produzimos ao habitá-lo.

Husserl (2012)¹³ toma como dado tão somente o corpo-vivente, pois fazendo uma descrição do mundo-vida e analisando-a, compreende que ele é o primado de que dispomos

¹³ Para compreender o conhecimento visado da perspectiva fenomenológica, trazendo especialmente Husserl e Merleau-Ponty, é importante atentar-se à cronologia de suas produções. Assim, destacamos que: “Husserl (1996)” é tradução da obra original *Logischen Untersuchungen: Elemente einer phänomenologischen Aufklärung der Erkenntnis*, **publicada em 1901**; “Husserl (2006)” é tradução da obra original *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Erstes Buch: Allgemeine Einführung in die reine Phänomenologie*, **publicada em 1913**; “Husserl (1994)” é tradução da obra *Zur phänomenologie des inneren zeitbewusstseins*, **publicada em 1928**; “Husserl (2001)” é tradução da obra original *Méditations cartésiennes*, **publicada em 1931**; “Husserl (2012)” é tradução da obra original *Die Krisis der europäischen Wissenschaften*

para compreendermo-nos e ao mundo. Mundo, entendido como mundo-vida. Portanto, não se trata de um recipiente, mas de onde estamos com os outros, seres humanos, nossos cossujeitos, demais seres vivos e naturais, teorias, ideologias....

Trata-se de uma realidade em que o espaço e o tempo se fazem junto com nossas ações, sendo que elas nunca são isoladas, mas, sempre se dão no aqui (mundo-vida) e agora, ou seja, no presente. Não é uma realidade objetivamente dada, mas percebida. Daí pode-se falar em fenômeno e em percepção.

Assim, o conhecimento do mundo, no âmbito da Fenomenologia, não é tomado a partir de pressuposto teóricos. A Fenomenologia, conforme entendemos em Ales Bello e Mangarano (2012), não se interessa por isso que é o mundo, mas por como o mundo aparece à consciência¹⁴ e como a objetividade materializada nesse mundo pode ser indagada em seu manifestar-se.

Ao avançar tecendo suas compreensões sobre o conhecimento e sua produção, Husserl (2012) indaga, trazendo como contraponto, a visão de conhecimento que emerge no âmbito da ciência ocidental. Mais especificamente, questiona o conhecimento tido como “verdadeiro” pelas ciências teórico-formais, como a Matemática. As ciências teórico-formais são vistas “como estando assentada na teoria que pré-determina deduções possíveis cujas demonstrações visam à obtenção da ‘verdade’ concebida como provável ou aproximada ao que é” (BICUDO, 2012, p. 78). A indagação de Husserl “se encontra no cerne da crise das ciências europeias, que se manifesta como a crise dos fundamentos” (BICUDO, 2012, p. 77).

Apoiando-se em Husserl, Merleau-Ponty (2011) descreve a “verdade” que nos dá a percepção, que segundo ele é distinta das verdades tais quais as anunciadas pela ciência. A ciência produz verdades em um processo de antecipação no qual o conhecimento é construído seguindo o rastro deixado por padrões e leis teoricamente formuladas. “Sua argumentação se articula em termos dos modos de produção dos raciocínios lógicos assentados em um sistema axiomático com regras bem definidas” (BICUDO, 2012, p. 78).

und die transzente Phänomenologie: Eine Einleitung in die phänomenologische Philosophie, **publicada em 1936**; “Husserl (2006)” é tradução da obra original *Der Ursprung der Geometria als intentional-historisches Problem*, escrito em 1936, porém **publicado em 1939**. Merleau-Ponty (2011) é tradução da obra original *Phénoménologie de la perception*, **publicada em 1945**; Merleau-Ponty (1990) é composto por três textos, o primeiro deles *Projet de travail sur la nature de la perception* (1933), o segundo, *La nature de la perception* (1934) e o terceiro *Le primat de la perception et ses conséquences philosophiques*, que retoma o texto exporto por Merleau-Ponty em **1946** à Sociedade Francesa e Filosofia.

¹⁴ Husserl apresenta a estrutura da consciência enquanto *intencionalidade*, que significa: “dirigir-se para, visar alguma coisa. A *consciência é intencionalidade*, significa: toda consciência é *consciência de*. Portanto, a consciência não é uma substância (alma), mas, uma atividade constituída por atos (percepção, imaginação, especulação, volição, paixão, etc.), com os quais visa algo” (CHAUI, 1996, p. 7, grifos da autora).

Na *percepção*, vista da perspectiva fenomenológica, a verdade se mostra como *presença*¹⁵, pois o percebido “mostra-se de modo claro, no momento em que a percepção está ocorrendo. Numa dimensão existencial, não há dúvida sobre os atos de ver e o visto nesse ato” (BICUDO, 2010, p. 33). Não se trata de verdade intelectual ou logicamente construída, pois a percepção é um ato que constitui originalmente o agora e a verdade de se estar vivenciando esse agora, que nos põe vivenciadas as coisas e o mundo como sendo elas mesmas. “Há sempre um solo perceptual, dado pelo contexto sócio-histórico-cultural no qual a percepção ocorre, o que a impede de ser uma ilusão ou uma ação totalmente subjetiva” (BICUDO; GARNICA, 2011, p. 35). Não se trata, portanto, de uma representação, pois representar é um ato que “não põe o objeto, ele próprio, diante dos olhos, mas, precisamente o presentifica, o põe diante dos olhos em imagem, por assim dizer, mesmo que não diretamente segundo o modo de uma autêntica consciência de imagem” (HUSSERL, 1994, p. 72).

É relevante enfatizar que o conhecimento científico visado da perspectiva da própria ciência e da perspectiva da Fenomenológica, tem como primado atos distintos. Merleau-Ponty (2011) propõe uma reflexão sobre a origem do conhecimento científico, que, segundo Nobrega (2008), se põe pela ciência na sociedade atual como obra que se constitui e avança por meios puramente racionais/intelectuais. Com isso, entendemos que a ciência cede o “trono” de primado do conhecimento científico aos atos reflexivos/intelectuais, dos quais destacam-se a observação, o ajuizamento, a sintetização e a articulação de ideias.

Por outro lado, Merleau-Ponty (2011) articula a coexistência entre o sentir e o conhecer para argumentar que todo conhecimento tem como primado a percepção; “o sensível é necessário na medida em que une o sujeito que conhece ao objeto que é conhecido. Sendo assim, fica clara a preocupação com a definição de que todo conhecimento presente em nossa consciência trilhou a estrada da percepção” (OLIVEIRA, 2011, p. 232).

[...] a percepção não deve nada àquilo que nós sabemos de outro modo sobre o mundo, sobre os estímulos tais como a física os descreve e sobre os órgãos do sentido tais como a biologia os descreve. [...] Se acreditamos em um passado do mundo, no mundo físico, nos “estímulos”, no organismo tal como nossos livros apresentam, é primeiramente porque temos um campo perceptivo presente e atual, uma superfície de contato com o mundo ou percentualmente enraizado nele, é porque sem cessar ele vem assaltar e investir a subjetividade, assim como as ondas envolvem um destroço na praia. Todo saber se instala nos horizontes abertos pela percepção (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 280).

¹⁵ Presença é o estar-se no próprio momento em que as coisas, as verdades, os valores se constituem para nós. É o momento em que o sentido se faz. Ela se constitui como um *logos* nascente, pois é na experiência perceptiva que a unidade do mundo se constitui, que a existência é sentida como um *viver o presente do corpo-próprio* (MERLEAU-PONTY, 2011).

Com isso, entendemos que, para Merleau-Ponty (2011), o mundo tal como a ciência dele fala, constitui-se no mundo-vida do sujeito-perceptivo¹⁶, mundo no qual sempre vivemos em ação. Esses atos, por serem realizados pelo corpo-vivente em um mundo em que as coisas estão disponíveis à vivência sensível, antes mesmo de estarem envoltos por determinações conceituais, acabam por ser esquecidos diante das “deslumbrantes descobertas científicas”, nas quais as contribuições dadas pela percepção, mesmo sendo consideradas, não são mencionadas.

Ao dizer desse primado, que é a percepção, Merleau-Ponty (1990) tem por intenção evidenciar a importância da atitude irrefletida, dos atos perceptivos para constituição do conhecimento científico. “O mundo percebido seria o fundo sempre pressuposto por toda racionalidade, todo valor e toda existência. Uma concepção desse gênero não destrói nem a racionalidade, nem o absoluto. Busca fazê-los descer à terra” (MERLEAU-PONTY, 1990, p. 42). E, o mundo-vida “é a fonte do sentido dos conceitos científicos. Se esses não puderem referir-se ao mesmo, carecem de sentido” (HUSSERL, 2012, p. 33).

Assim, tem-se que o voltar-se ao mundo-vida e às coisas, dá-se assumindo posturas. Estamos aqui destacando a postura reflexiva (teórica) e a postura perceptiva (não teórica). A crítica de Husserl (2012) ao modo como as ciências ocidentais concebem o conhecimento solicita uma mudança de postura, de atitude perante ao mundo tal qual trazido por elas. Trata-se de um retorno ao pré-científico, de vivenciar o mundo e as coisas sensivelmente, deixando que elas se mostrem e mostrem suas nuances, sem de imediato vinculá-las a teorias e definições, assumindo assim uma *postura perceptiva*. Quando em nosso cotidiano deixamos de vivenciar as coisas para de imediato tomá-las como um todo já definido, sobre o qual fazemos ajuizamentos, a postura assumida é outra, estamos deste modo com uma *postura teórica*.

O desafio que se coloca é o de assumir a *postura não teórica*, de estar aberto ao que as coisas podem mostrar no ato de percebê-las, no qual o sujeito-perceptivo visa e vivencia face a face isso para o qual está voltado. Nesse ato, por exemplo, esse sujeito pode sentir a textura das páginas de um livro, experienciar a sensação que provoca a cor de sua capa, pode sentir-se vivenciando o que o personagem desse livro vivencia, pode se emocionar, sorrir, se enraivar. Vivencia-se assim toda a duração da história contada.

Em uma leitura em que se assume uma postura teórica, antes que a última página seja lida, o sujeito teórico já busca premeditar o fim, fazendo relações com leituras outras. Ou, com

¹⁶ “Entendido como o corpo que realiza experiências fenomenais; olha, sente..., diz-se da corporeidade que se abre ao mundo mediante atos sensórios, dentre os quais a autora cita o tato, que permite registrar os limites do corpo-próprio e do de outros, pessoas ou não. Essa, a dimensão da corporeidade que é encarnada, efetuando movimentos, espacializando-se” (COELHO, 2015, p. 14).

um pré-julgamento que caracteriza o livro como ruim, por exemplo, esse sujeito pode não chegar à última página, encerrando a leitura.

A preocupação em captar a totalidade do texto ou em julgar fazendo uma leitura analítica faz com que se perca o espetáculo da vivência da leitura, que se constitui nos entrelaçamentos que abarcam a duração da história e o leitor que a ela habita. Assim, uma experiência vivenciada pode evidenciar-se privilegiada por “viver fenomenologicamente o ato de ver, de lembrar-se do visto, de demorar-se no sentir-se embevecido [...] destacando modos pré-predicativos de operar julgamentos, emitindo juízos sobre objetualidades, exemplificando desse modo a atitude pré-teórica” (BICUDO, 2012, p. 83).

No que concerne aos modos de estar com o mundo-vida, Husserl (2012, p.38) abre questão para uma intuitividade que opera sobre idealidades¹⁷. Lembra que o “único mundo efetivo, o que é efetivamente devido à medida da percepção”, é, por exemplo, o da agrimensura prática, que precedeu a geometria antiga, essa já de idealidades. Seus agrimensores realizavam operações que eram, “para a geometria, fundamento de sentido, fundamento para a grande invenção da idealização” (HUSSERL, 2012, p.39). Galileu, ao deixar às margens esse mundo fundamental, é criticado por Husserl (2012, p.39), que aponta as consequências disso ao abraçar a tese de figuras exatas nascidas de uma pretensa obviedade obtida pela lógica, criação de ilusões geométricas a partir de cada “verdade absoluta autônoma”.

Mas, “a natureza não é inteiramente matemática, nem tem de ser pensada como um sistema matemático unitário [...] como abrangida por um sistema de leis ‘axiomático’ quanto à forma. [...] não temos qualquer perspectiva de descobrir o sistema de axiomas específico da natureza” (HUSSERL, 2012, p. 44). O pensamento galilaico, no fundo, se escora na crença em um inatismo das ideias básicas para uma matemática pura, que é a mesma para uma “faculdade da evidência apodítica em axiomas e deduções” (HUSSERL, 2012, p. 48). “Não é de se admirar que possamos encontrar já em Descartes a ideia de uma matemática universal”, arremata Husserl (2012, p. 49).

Pelo dito até aqui, podemos ver Husserl delineando uma história para um objetivismo matemático. Husserl (2012) desnuda as bases psicológicas das pretensões desse objetivismo, requerendo, contra isso, o retorno do mundo-vida como inexorável fonte de criação e ponto de partida para o processo da subjetividade à objetivação.

Para constituir e expressar esse processo, Bicudo (2012), citando o texto *A Origem da Geometria*, explicita que Husserl indaga:

¹⁷ Retomamos a “idealidade” mais adiante.

Como algo intuído na subjetividade de um sujeito transcende essa subjetividade e constitui-se como uma objetividade passível de duração, mantendo-se inteligível para além da comunidade em que viviam o sujeito que experienciou aquela evidência e seus companheiros e da cultura que lhes serviu de solo de ideias teóricas, valorativas e práticas? (BICUDO, 2012, p. 77).

A *origem* se presentifica nessa obra como um *estar lá original*, que emerge no ato intuitivo confiado à subjetividade de um sujeito chegando a constituir-se “em um objeto historicamente estável, embora tendo em sua essência a mobilidade de avanços e regressões, capaz de ser retomada e reativada por sujeitos de outras épocas e culturas, bem como aplicada a uma variedade de situações” (HUSSERL, 2006, p. 25). Esse objeto é evidenciado nessa obra como *objeto ideal*, o qual Husserl (2006) busca descrever seu movimento de constituição. Tomando como exemplo a Geometria, tem-se que ela “tem sua esfera temática em produtos ideais, em idealidades a partir das quais mais e mais idealidades em vários níveis mais altos são produzidas” (HUSSERL, 2006, p. 15).

A idealidade husserliana refere-se ao que se constitui na intencionalidade da subjetividade transcendental, no solo onde ocorrem e fazem sentido as experiências vivenciadas, dentre as quais as experiências geométricas, tanto para o sujeito como para a comunidade de cossujeitos. O objeto ideal, uma vez constituído possui uma duração temporal, que perpassa historicamente o tempo e o espaço. Isso se dá pelos meios de registro, como por exemplo o escrito, que fixa na cultura e na história do conhecimento o que no passado foi pensado, discutido, rediscutido e objetivado.

Mas como se dá esse movimento de objetivação? Entendemos em Husserl (2006), que junto à percepção avança um pensar articulador, que vai constituindo compreensões que eclodem em expressão pela linguagem, explicitando sobre isso que se mostra junto ao ato de perceber e ao que se compreende. Expressão essa compartilhada na intersubjetividade de cossujeitos que se voltam ao que é dito, compreendendo o expresso e dele pondo-se a falar, trazendo contribuições, concordando, discordando e evidenciando articulações possíveis, aperfeiçoando-as. A objetivação, ou a constituição do conhecimento objetivo vai se materializando na repetição e práticas dessas compreensões expressas pelos cossujeitos, sejam eles de uma mesma época, de uma mesma cultura e sociedade, ou não.

Esse movimento de constituição e duração temporal e histórico-cultural de conhecimento acima descrito evidencia conceitos relevantes à Fenomenologia como: *percepção*, *subjetividade*, *intersubjetividade* e *objetividade*. Sobre a percepção, embora já tenhamos dela falado, trazemos mais explicitações no tópico que segue. Sobre os demais conceitos podemos agora expor.

“Tudo aquilo que sei do mundo, mesmo por ciência, eu o sei a partir de uma visão minha ou de uma experiência do mundo sem a qual os símbolos da ciência não poderiam dizer nada” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 3). Com isso buscamos evidenciar a *subjetividade* de cada sujeito que visa o mundo. As perspectivas de visada se abrem mediante essa subjetividade, que abarca o que esse sujeito traz de suas vivências. Há subjetividade no modo de olhar o mundo, dessa forma também há no modo de conhecer. A subjetividade “se constitui no movimento de abertura ao mundo-vida, levando o percebido à consciência e operando os atos que avançam na dimensão da compreensão e dos atos de expressão” (BICUDO, 2010, p. 35).

A constituição do conhecimento, seja ele científico ou não, segundo Merleau-Ponty (2011), dá-se no fluir que avança e entrelaça a subjetividade e a *intersubjetividade*, quando por meio da expressão do percebido um sujeito expõe a outros os sentidos que a ele se mostraram junto ao ato de perceber. A comunicação é ponto de partida para um diálogo estruturante, que enquanto expõe o percebido e os modos de perceber de cada um (a subjetividade) vai tecendo uma rede de possibilidades de convergências dos sentidos e significados expressos nesse diálogo, permitindo com isso o movimento de generalização, podendo constituir um conhecimento mais abrangente e articulado.

Constitui-se assim a *objetividade*, um saber que está posto e que pode se tornar comum a todos, que é trazido tradicionalmente pela cultura, que todos podem buscar e dizer do mesmo. “A objetividade não é um fato nem um objeto exato e externo à subjetividade que o pensa, mas é constituída no movimento da compreensão intersubjetiva e na respectiva manutenção dos modos culturais possibilitados pela tradição¹⁸” (BICUDO, 2010, p. 35).

Em Husserl (2012) entendemos que a compreensão do mundo constituída por atos sensíveis credita existencialidade às coisas desse mundo e a nós mesmos. Somos corpos-viventes que sentem, que afetam e são afetados, somos fontes expressivas de nossa existência. Existimos, pois percebemo-nos sendo, respirando, tocando e sendo tocados.

Este olhar propõe novas reflexões acerca da concepção de René Descartes, mundialmente conhecido por seus grandes feitos junto à ciência e por sintetizar a existência humana na frase “penso, logo existo”, que credita nossa existência à racionalidade. O pensamento cartesiano situa o mundo como sendo visto por um sujeito que o pensa. Nessa perspectiva, coloca-se “o pensar ‘sobre’ o mundo antes que dele seja feita qualquer análise.

¹⁸ Compreende-se que a *tradição* “é peculiar à historicidade do modo de ser do homem. A historicidade está arraigada na temporalidade, característica essencial do Dasein, ser-aí ou pre-sença entendido como o modo de ser do homem em seu viver próprio no mundo com os outros. Ela movimenta pela linguagem e pelos modos de viver assumidos pelas comunidades, sedimentados no solo do *a priori* histórico” (BICUDO, 2003, p.76, grifo da autora).

Introduz-se, assim, o conceito de juízo, que, agora, se constitui no ponto de ligação entre a existência e a realidade, elemento de unificação sem o qual o pensamento seria desenraizado do ser” (ESPOSITO, 1997, p. 128).

Para Merleau-Ponty (2011), a originalidade do compreendido é constituída em/com atos perceptivos que permitem assistir ao nascimento desse conhecimento. Isso corrobora o pensamento de Bicudo (1997, p. 118), que entende que “a percepção não dá conta do entendimento de si mesma, nem do entendimento do mundo, não indo além de seus próprios atos perceptivos. É a atividade do *logos*, o qual na percepção está em estado nascente, que viabiliza a constituição do conhecimento”.

Sentir e compreender constituem-se em um mesmo ato de significação, possíveis pela nossa condição corpórea e pelo acontecimento do gesto, cuja estesia inaugura a possibilidade de uma racionalidade que emerge do corpo e de seus sentidos biológicos, efetivos sociais históricos. Essa compreensão é significativa para redimensionar o fenômeno do conhecimento, relacionando-o à experiência vivida, ao corpo e aos sentidos (NÓBREGA, 2011, p. 147).

A compreensão de que o conhecimento se dá em estado nascente em experiências perceptivas nos leva a nos colocar atentos aos modos pelos quais estamos com as coisas, aos detalhes de cada movimento realizado que nos dá sensações e nos abre horizontes¹⁹ de sentidos e de significados. Trata-se de um fazer em que estamos intencionalmente voltados às coisas e a nós mesmos, voltados ao nosso movimento perceptivo e ao que ele enlaça, seja em nosso mundo circundante, seja em nosso corpo, no qual os atos perceptivos se materializam como movimento, sensação e expressão.

Dada relevância da percepção e do movimento do/no corpo-próprio no fluxo da subjetividade que caminha e se entrelaça à intersubjetividade constituindo objetivações, abrimos nos tópicos 1.1.1 e 1.1.2 explicitações sobre percepção, sobre o movimento do/no corpo-próprio, sobre a percepção do movimento e sobre o perceber-se em movimento junto ao ato de mover-se e de mover o que está disponível ao movimento.

1.1.1 Explicitando o entendimento de percepção

A percepção é posta em suspensão pela fenomenologia desde sua concepção nos trabalhos do filósofo alemão Edmund Husserl (1859-1938), cujos estudos contribuíram para as

¹⁹ O horizonte “é aquilo que assegura a identidade do objeto no decorrer da exploração, é o correlativo da potência próxima que meu olhar conserva sobre os objetos que acaba de percorrer e que já tem sobre os novos detalhes que vai descobrir” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 105).

reflexões do francês, também filósofo, Maurice Merleau-Ponty (1908-1961). Merleau-Ponty tece, em *Fenomenologia da Percepção* (obra de 1945) suas compreensões sobre o tema e, mais tarde, em 1946, perante a *Société française de philosophie*, expõe a obra *O primado da percepção e suas consequências filosóficas*, na qual evidencia e explicita as compreensões trazidas na *Fenomenologia da Percepção*.

Nesta obra, Merleau-Ponty critica o pensamento objetivo, fundado no intelectualismo, que trata a percepção como uma “operação intelectual pela qual os dados inextensivos (as sensações) são postos em relação e explicados de tal sorte que acabam por constituir um universo objetivo. A percepção assim considerada é como uma ciência incompleta, é uma operação mediata” (MERLEAU-PONTY, 1990, p. 11).

A percepção, tomada pelo pensamento objetivo como uma operação intelectual sugere a possibilidade de premeditar o percebido, tomando-o enquanto algo prévio, uma “verdade” já conhecida, cuja constituição depende de atos como observar, verificar e relacionar. Nessa perspectiva, tomamos aquilo que por juízo supomos ou acreditamos estar nas coisas. Desta forma, há um movimento em que o percebido é anterior à percepção, ou seja, a percepção é vista e construída através de verdades já postas por nós mesmos, ou pela ciência.

As pretensas condições da percepção só se tornam anteriores à própria percepção quando, em lugar de descrever o fenômeno perceptivo como primeira abertura ao projeto, nós supomos em torno dele um meio onde já estejam inscritas todas as explicitações e todas as confrontações que a percepção analítica obterá, onde estejam justificadas todas as normas da percepção efetiva – um lugar da verdade, um *mundo*. Ao fazer isso, nós subtraímos à percepção a sua função essencial, que é a de fundar ou de inaugurar o conhecimento, e a vemos através de seus resultados (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 40, grifo do autor).

Esta construção da percepção se valendo de pressupostos/resultados antevistos é criticada por Merleau-Ponty (2011), que considera a percepção como um “ato humano que de um só golpe atravessa todas as dúvidas possíveis para instalar-se em plena verdade” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 71). Quando intencionamos o percebido antes do ato da percepção, “não compreendemos finalmente nem um nem outro. Estamos presos ao mundo e não chegamos a nos destacar dele para passar à consciência do mundo. Se nós o fizéssemos, veríamos que a qualidade nunca é experimentada imediatamente e que toda consciência é consciência de algo” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 25).

Entendemos que um dos motivos desse conflito de compreensões é a concepção de *mundo* na visada da ciência e da filosofia, da qual destacamos a filosofia husserliana. A primeira diz de um mundo construído pela soma de objetos em si, determinados, justapostos, e a segunda se refere a um mundo constituído pelo horizonte latente de nossas experiências, sempre

presente, sem cessar, indeterminado, no qual os objetos estão *aí*, sempre imbricados numa dialética sujeito-objeto que se dá nas diferentes vivências “que defluem da maneira como se referem aos objetos e se há diferentes modos de dar-se o objeto, há diferentes objetividades e esses diferentes modos pelos quais o objeto se apresenta ressaltam a necessidade de se estudar o fenômeno” (PUGLIESI, 2001, p. 16). Na filosofia husserliana “temos a experiência de um mundo, não no sentido de um sistema de relações que determinam inteiramente cada acontecimento, mas no sentido de uma totalidade aberta cuja síntese não pode ser acabada” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 25).

Merleau-Ponty (2011) enfatiza que a percepção é um ato que nos dá as coisas do mundo, porém, não de forma imediata, mas, gradativamente, por meio de perspectivas de visada, nas quais o corpo-próprio, em movimentos intencionais, busca a percepção do todo junto às percepções diversas e distintas do que vai se mostrando em cada ato de perceber. Por isso, Merleau-Ponty (2011) chama o corpo-próprio, também, de *ponto zero* de visada, que permite estar no mundo compreendendo-o, estando sempre em situação de lançar fios condutores, sensíveis às nuances mais simples doadas pelo mundo que habitamos. Fios que nos permitem sentir o mundo e sentirmo-nos nele.

Quando assumimos perspectivas de visada distintas, percebemos junto às coisas, algumas faces que se mostram, sendo que outras faces, *a priori* não visíveis, se mostram quando o corpo-próprio assume outras perspectivas das quais pode vê-las. Essas *coisas* são impregnadas de significações imanentes, são organismos repletos de “cores, de odores de sons, de aparências táteis que se simbolizam e se modificam uns aos outros e concordam uns com os outros segundo uma lógica real²⁰ que a ciência tem por explicar, e da qual ela está muito longe de ter acabado a análise” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 68).

Mesmo a coisa percebida sendo visada de múltiplas maneiras, ela não se perde em meio à multiplicidade das percepções. Husserl (2012) afirma que há sempre uma unidade articulada pelo entrelaçamento de modos pelos quais a coisa se doa; essa unidade se mostra como uma síntese, que ele chama de *síntese de transição*. Nela, o lado não visto de um objeto é antecipado quando realizado o ato de perceber suas faces que se mostram. Por exemplo, ao tocar e ver ²¹

²⁰ Real nessa citação diz do modo pelo qual nós costumamos no cotidiano, organizar nossas experiências vivenciadas.

²¹ Ver, de acordo com trabalhos de autores fenomenólogos, notadamente Merleau-Ponty, “é entrar em um universo de seres que *se mostram*, e eles não se mostrariam se não pudessem estar escondidos uns atrás dos outros ou atrás de mim. Em outros termos: olhar um objeto é vir habitá-lo e dali apreender todas as coisas segundo a face que elas voltam para ele. Mas, na medida em que também as vejo, elas permanecem moradas em meu olhar e, situado virtualmente nelas, percebo sob diferentes ângulos o objeto central de minha visão atual. Assim cada objeto é espelho de todos os outros” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 105, grifo do autor).

um objeto arredondado tenho uma face do mesmo em meu campo visual. A outra face, presente do outro lado, pode ser sentida por meus dedos, que a tomam sensivelmente. Dessa forma, posso dizer que “vejo” a outra face com o meu toque e que ela é antecipada pela experiência tátil-visual que se expõe na percepção da face à qual estou voltado.

A vivência, por exemplo, de tocar uma pedra de gelo é carregada de significações não objetivadas e não vistas de imediato, uma vez que o frio que adormece os dedos, antes de ser quimicamente explicado, é sentido por quem toca essa pedra. Articulado com Merleau-Ponty (2011), entendemos que a percepção do frio não se dá apenas estudando os livros de química ou física, mas indo à pedra de gelo para sensivelmente experienciá-la, habitá-la. “O sujeito que percebe deixa de ser um sujeito pensante ‘acósmico’ e, a ação, o sentimento e a vontade devem ser explorados como maneiras originais de pôr um objeto, já que um objeto parece atraente ou repulsivo antes de parecer negro ou azul, circular ou quadrado” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 50). A pedra de gelo, quando olhada de uma perspectiva, mostra uma de suas faces; as outras, dentre as quais a sensação térmica, de início não se mostram; encontram-se “adormecidas”, porém, presentes, podendo ser percebidas com/no movimento do corpo-próprio, que assume outras perspectivas, visando experimentar o *a priori* não visto.

Cada aspecto da coisa que cai sob nossa percepção é novamente apenas um convite a perceber para além de uma parada momentânea no processo perceptivo. Se a coisa mesma fosse atingida, doravante ela estaria exposta diante de nós e sem mistério. Ela deixaria de existir como coisa no momento mesmo em que acreditaríamos possuí-la. Portanto, o que faz a realidade da coisa é justamente aquilo que a subtrai à nossa posse (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 313).

O que se mostra e o que pode se mostrar se entrelaçam mediante intencionalidade do sujeito-perceptivo, que se projeta ao mundo do objeto da percepção para buscar sentidos junto ao mesmo, criando-o e recriando-o ao se situar em diferentes perspectivas. Assim, tudo aquilo que é percebido, que se presentifica de forma clara, ou ainda obscura, “possui na unidade de seu todo e na articulação de seus aspectos relevantes o caráter do ‘aí’, do disponível; caráter sobre o qual se pode fundar, por essência, a expressão (predicação) de um juízo existencial de acordo com ele” (HUSSERL, 2006, p. 78).

Vivenciamos o mundo e as coisas enquanto *presenças* (MERLEAU-PONTY, 1990) que se materializam nos momentos que enlaçam o *Eu* que está em um movimento de ir e as coisas as quais esse *Eu* se volta e que a ele se doam em seus modos de aparecer. A presença se manifesta na vivência do sensível. O Sentir torna o mundo “presente para nós como lugar familiar de nossa vida. É a ele que o objeto percebido e o sujeito que percebe devem sua espessura” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 84). Sobre o lado não visto de uma lâmpada, Merleau-Ponty (1990, p. 45) diz que ele “é apreendido por mim como presente, e não afirmo

que o dorso da lâmpada existe no mesmo sentido que digo ‘a solução do problema existe’. O lado oculto está presente a seu modo”.

Com isso, entendemos que na diversidade de um grupo de pessoas, cada uma pode ver diferentes tons de amarelo na gema de um ovo, outros veem outra cor, que não o amarelo, como o caso dos daltônicos. No entanto, o que mostra que essas pessoas estão inseridas em um mesmo mundo é que elas certamente estão percebendo a mesma gema de ovo, assim como percebem a mesma louça que o contém. “[...] o mundo só seria privado a cada pessoa se na experiência perceptiva do corpo-encarnado não estivesse sempre, como contraponto, a coisa percebida, presente em sua concretude” (BICUDO, 1997, p. 116).

Cada um tem seu lugar, a partir do qual vê as coisas disponíveis, e respectivamente ao qual elas se manifestam diferentemente para cada um deles. Os atuais campos de percepção, de recordação, etc., também são diferentes para cada um, sem contar que também aquilo de que estão intersubjetivamente conscientes vem à consciência de modos diferentes, em diferentes modos de apreensão, em diferentes graus de clareza, etc. A despeito disso tudo, nós nos entendemos como nossos próximos e estabelecemos em conjunto uma realidade espaço-temporal objetiva *como mundo que nos circunda, que está para todos aí, e do qual, no entanto, nós mesmos fazemos parte* (HUSSERL, 2006, p. 77, grifo do autor).

É desse modo que os objetos intencionais “passam a existir para a consciência com os significados a eles atribuídos mediante o modo pelo qual se fizeram presentes no mundo-horizonte. É assim que a realidade do mundo-vida passa pela subjetividade e que a certeza do mundo se estabelece” (BICUDO, 1996, p. 84).

O percebido e o modo pelo qual uma percepção é realizada podem ser relatados por aquele que se pôs a perceber. Porém, as sensações, o conhecimento sensível, e o todo realizado em um plano atual se dissipam, escapam ao intelecto que busca *a posteriori* articulações e estruturas para relatar *a Experiência Vivenciada*. “A experiência perceptiva é contraditória porque confusa, quando for pensada, suas contradições se dissiparão à luz da inteligência. Enfim, me dizia um correspondente, somos convidados a nos reportar ao mundo-vida tal como o percebemos” (MERLEAU-PONTY, 1990, p. 52).

Como já mencionado neste texto, a percepção se dá em um agora. Esse agora traz o presente e indica que haverá algo que o sucederá. Isso mostra que a vivência flui e que ela revela a duração dos atos e o escoar do tempo, o que nos faz compreender que “não se trata do tempo que acolhe o fluxo, mas que o tempo se dá no fluxo. As vivências duram e vão escorregando do momento do agora, em que a ação está sendo realizada, para o já foi e antecipando ações delineadas na antevisão do porvir intencionado” (BARBARIZ, 2016, p. 143). Descrever e analisar o percebido são atos que estão em um porvir. Esses atos são voltados ao que a percepção mostrou. Desta forma, são possíveis de serem retomadas pela recordação,

pelas lembranças que permitem “reviver o realizado no momento presente (no agora) que já passou” (BARBARIZ, 2016, p. 143).

A *Experiência Vivenciada* foi acima substantivada para que aqui se possa dizer da impossibilidade de abarcar toda uma realidade vivenciada relatando-a. Não é possível relatar a totalidade da experiência perceptiva vivenciada, mas há a possibilidade de relatar *sobre* essa experiência. Falar sobre a percepção e sobre o percebido é possibilidade dada à reflexão de articular e sintetizar *o que é isso, o percebido*. Possibilidade de estudá-lo, de compreender suas características situando-o em contextos distintos, para que, seguindo as normas da coerência linguística, possa-se dizer do mesmo.

Entre mim que analiso a percepção, e o eu que percebe há sempre uma distância. Mas, no ato concreto de reflexão, eu transponho essa distância, provo pelo fato que sou capaz de saber aquilo que eu percebia, domino praticamente a descontinuidade dos dois Eus, e finalmente o cogito teria por sentido não revelar um constituinte universal ou reconduzir a percepção à intelecção, mas constatar este fato da reflexão, que ao mesmo tempo domina e mantém a opacidade da percepção (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 74).

A distância dos dois *Eus* supracitada diz do modo de estar com uma vivência, um modo temporal; o *Eu que percebe* está na vivência, atualmente, sentindo. O *Eu que analisa* a percepção se distancia dessa vivência para refletir sobre a mesma, buscando compreender o que se deu. Trata-se de um ato posterior à vivência da percepção, ou seja, trata-se de outra vivência. Enfim, *há um Eu que faço e um Eu que penso sobre o feito, há sempre dois atos, o da percepção e o da intelecção, o primeiro nos dá a certeza do presente e o segundo a certeza do passado*.

Assim, é preciso avançar em compreender experiências com o mundo tal como ele se manifesta a nós enquanto estamos nele com nosso corpo e, enquanto corpo-próprio percebemos nele as coisas e os outros, reaprendendo a sentir nosso corpo e retomando o contato com ele e com o mundo e, com isso, reencontrando a nós mesmos enquanto corpos que percebem, enquanto sujeitos-perceptivos. Para isso, precisa-se efetuar o *primeiro ato filosófico*²², de forma a “colocar a consciência em presença de sua vida irrefletida nas coisas e despertá-la para sua própria história que ela esquecia” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 60).

²² “O primeiro ato filosófico seria então retornar ao mundo vivido aquém do mundo objetivo já que é nele que poderemos compreender tanto o direito como os limites do mundo objetivo, restituir à coisa sua fisionomia concreta, aos organismos sua maneira própria de tratar o mundo, à subjetividade sua inerência histórica, reencontrar os fenômenos, a camada de experiência viva através da qual primeiramente o outro e as coisas nos são dados, o sistema ‘Eu-outro-as coisas’ no estado nascente” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 90).

1.1.2 Explicitando a ideia do corpo-próprio em movimento: abertura ao perceber e ao perceber-se percebendo

Em *Fenomenologia da Percepção*, obra anteriormente citada, Merleau-Ponty (2011) explicita o movimento do corpo-próprio sob a ótica da motricidade e da percepção. Ele entende que a motricidade é o modo intencional de uma pessoa se movimentar, de realizar ações no mundo-vida que solicitam o mover e o mover-se. Nessa perspectiva, “a motricidade deixa de ser a simples consciência de minhas mudanças de lugar presentes ou futuras para tornar-se a função que, a cada momento, estabelece meus padrões de grandeza, a amplitude variável de meu ser no mundo” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 283).

Com isso, se entende que o corpo humano não é apenas um conjunto de órgãos, mas um corpo que possui um conjunto extensivo de experiências que estão com o sujeito em todos seus atos, incluindo os motores. Por exemplo, o ato de pegar não é uma experiência puramente tátil, é uma experiência na qual o corpo todo está empenhado e todas as experiências vivenciadas que solicitaram o ato de pegar fazem parte desse movimento (MERLEAU-PONTY, 2011). Nesse ato o sujeito tem a posse indivisa de seu corpo, que “projeta em torno de si um certo ‘meio’, enquanto suas ‘partes’ se conhecem dinamicamente umas às outras, e seus receptores se dispõem, de maneira a tornar possível, por sua sinergia, a percepção do objeto” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 312).

O movimento desse corpo não se fragmenta em pensamento de movimento, e não se realiza numa distribuição hierárquica que coloca cada parte desse corpo assumindo funções mediante uma tarefa que solicite movimento. Podemos tomar como exemplo para o movimento de um “sujeito normal”,²³ o realizado por um jogador de vôlei que, quando salta para uma “cortada”, toca a bola com a mão. Não é apenas a sua mão que está nessa situação de tocar, todo seu corpo está empenhado na tarefa. O jogador não calcula objetivamente: quantos passos, qual pé de apoio e a força de impulsão que pode exercer com suas pernas para um melhor salto. Ele apenas salta, tendo consigo um saber absoluto de seu corpo que lhe permite saber como se posicionar para maior e melhor empreendimento desse corpo na tarefa de “cortar”, que lhe permite compreender seus movimentos junto ao todo que o engloba. O corpo, nesse caso, aparece como postura em vista de uma certa tarefa atual ou possível.

Esse saber não diz apenas de um corpo físico, mas dos modos pelos quais ele se coloca como movente, da potência motora que enlaça todo o “eu movo”, todo o “eu faço”, das

²³ Merleau-Ponty fala do sujeito normal como sendo aquele que não possui uma patologia, como por exemplo, a motora.

experiências motoras que em nós estão encarnadas (no caso do jogador, “cortar” é uma experiência vivenciada constantemente em treinos e jogos; ela lhe permite saber o que e como fazer quando uma nova experiência lhe solicitar esse ato). Esse saber encarnado constitui e é constituído junto às ações do corpo-próprio, que, por ser ponto zero de nossas realizações, nos abre as possibilidades de nos movimentar ou de pensar sobre movimentos que podemos vir a realizar, de diferentes modos, considerando diferentes situações, diferentes possibilidades de colocarmo-nos em movimento e, desta forma, compreendendo de diferentes perspectivas nosso movimento e o que dele emerge.

Conforme evidenciado por Merleau-Ponty (2011, p. 312), esse corpo se movimenta, “sai de sua dispersão, se ordena, se dirige por todos os meios para um termo único de seu movimento, e quando pelo fenômeno da sinergia, uma intenção única se concebe nele”.

Entendemos que esse movimento tem uma duração fluida que, na vivência do agora, traz o passado e abre possibilidades ao futuro. A cada instante de um movimento, o instante precedente está presente, sendo fundo no qual o movimento agora realizado se expõe e avança. Essa constituição que enlaça o movimento sendo realizado agora e o que o precedeu, enlaça também o que está por vir enquanto possibilidade de movimento. “Cada momento do movimento abarca toda a sua extensão, e em particular o primeiro momento, iniciação cinética, inaugura a ligação entre um aqui e um ali, entre um agora em um futuro, que os outros momentos se limitaram a desenvolver” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 194).

Desta forma, o movimento do corpo-próprio não abarca o tempo e o espaço como uma soma de pontos justapostos, como fragmentos que possam ser ordenados. Além disso, Merleau-Ponty (2011) afirma também que espaço e tempo não constituem uma infinidade de relações das quais minha consciência operaria a síntese em que dela implicaria meu corpo. Para ele, não estamos no espaço e no tempo, não pensamos o espaço e o tempo; nós somos no espaço e no tempo, vivenciamos-os originalmente sem mesmo tocá-los e explicá-los.

Espaço e tempo, são entendidos aqui como espaço e tempo vivenciados na profundidade do mundo-vida. Ir a esse mundo buscando percebê-lo, é pôr-se em movimento, é sobrevoá-lo dirigindo-se ao que *ai está*, deixando que sentidos se mostrem e constituindo face a face o percebido. É o corpo-próprio em movimentos intencionais, assumindo perspectivas distintas de visada, que busca essa totalidade do percebido, gradativamente, pondo-se a perceber cada face do objeto que se mostra e movendo-se em direção a outras faces *a priori* “escondidas”, sem nunca abandonar a face anteriormente percebida (MERLEAU-PONTY, 2011).

A busca pelo que em uma primeira visada não se mostra é possível, pois o sujeito da percepção, o corpo-próprio, é ele mesmo dinâmico, móvel e movente. Ele pode experimentar

uma diversidade de objetos e pode experienciar um mesmo objeto em diversos modos de mover e de mover-se; pode ir ao objeto com ou sem uma teorização que o subentenda; pode realizar a variação do mesmo na imaginação ou pode tê-lo “em mãos” para sentir seus vincos, suas pontas, sua forma; pode intuitivamente antever suas faces que não se mostram ou pode ir até as mesmas para tocá-las, vê-las, senti-las.

A percepção e o que ela enlaça se atualizam no movimento constante em que o corpo-próprio se projeta em direção ao mundo, configurando-se em movimento e configurando o mundo com movimentos. Isso ocorre, pois “todas as operações exigem um mesmo poder de traçar fronteiras no mundo dado, traçar direções, estabelecer linhas de força, dispor perspectivas, em suma organizar o mundo dado segundo os projetos do momento” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 161). Com isso, entendemos que estamos com o mundo criando sistemas de significações que expressam no espaço objetivo nossa intencionalidade. Cada atribuição de significados nos joga em outro mar de *ter para onde ir*.

O movimento trata-se, portanto, de um fazer criador em que o corpo-próprio, ao se situar em diferentes pontos de visada e em diferentes olhares que perpassam o mundo, percebe sentidos que se mostram e atribui significados a isso que se mostra. No movimento desse corpo, podemos “fazer a leitura, com lentes sensíveis dos aspectos visíveis e invisíveis do *Ser*, do conhecimento e da cultura. As significações que surgem, o sentido, são, em última instância, significações vividas” (NOBREGA, 2008, p. 147, grifo da autora).

Em Merleau-Ponty (2011), o corpo-próprio é entendido como um campo sinestésico criador de sentidos, sob o qual se constitui o ato de perceber, que entendemos ser, ele mesmo, um modo pelo qual a sinestesia se expõe. A percepção sinestésica nos permite perceber sentidos se constituindo e sendo constituídos por/em um fundo dinâmico, que se expande, produz mudança e acolhe iniciação de movimentos daquele/naquele que realiza movimento.

O corpo-próprio, como campo sinestésico, move-se e faz do mundo seu campo de realizações, faz o mundo também sinestésico. Merleau-Ponty (2011), estabelecendo analogia com a Física, diz que o movimento desse corpo é *centrífugo*, ele adentra e provoca uma expansão do mundo, ao mesmo tempo em que ele mesmo se realiza, expandindo-se. Entendemos que esse movimento pode ser percebido e compreendido por quem intencioná-lo, o próprio movente ou outrem. Essa expansão não só provoca mudança, mas é ela mesma mudança, o que nos permite dizer que o movimento se configura como mudança e configura mudanças que se expõem e constituem esses campos sinestésicos criadores de sentidos, o mundo e o corpo-próprio.

Compreendemos, assim, que todo movimento, em sua realização, vai se atualizando e atualiza um fundo também móvel. O fundo de um movimento é dinâmico e seu dinamismo é sempre abertura ao movimento. Assim, o “fundo do movimento não é uma representação associada ou ligada exteriormente ao próprio movimento, ele o anima e o mantém a cada momento” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 159). Cada “movimento e cada objeto convidam à realização de um gesto, não havendo, pois, representação, mas criação, novas possibilidades de interpretação das diferentes situações existenciais” (NOBREGA, 2008, p. 142).

Assim, entendemos que o fundo do movimento é também sinestésico e criador de sentidos, e ele não é separado do corpo-próprio, que constitui e é constituído por ele em um fluxo do qual não podemos destacar um do outro, mas apenas tomá-los na unidade que os enlaça. Disso, compreendemos que o sujeito que se move, as implicações de seu movimento, o móvel e o movente e o fundo sobre o qual o movimento se dá não estão um diante do outro como entes externos, separados por uma barreira que os coloca em um sistema de posicionamento, como se esses entes estivessem posicionados, por exemplo, no sistema de coordenadas cartesiano. Quem percebe e o percebido são indissociáveis no movimento perceber-percebido. Esse movimento os abarca e dá sentido à experiência de perceber. “É meu olhar que subtende a cor, é o movimento de minha mão que subtende a forma do objeto, ou antes meu olhar acopla-se à cor, minha mão acopla-se ao duro e ao mole, e nessa troca entre o sujeito da sensação e o sensível não pode dizer que um aja e o outro padeça” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 288).

Há uma coexistência entre aquele que sente e o sensível; o mundo que nos circunda *está para todos aí* (HUSSERL, 2006), ao mesmo tempo em que todos nós estamos nele. Estou eu e as coisas *no mundo e com o mundo*, não sou diante delas um sujeito acósmico, não as possuo em pensamentos e ideias que racionalmente me darão seus segredos, mas me lanço a elas, me movimento, movimentando-as. As vivencio, enveredo-me no mistério que cada uma mostra, que me afeta, provoca e faz-me movimentar. Sou eu *com* as coisas, sou parte delas e elas parte de mim, meu olhar as percorre e as habita.

Esta coexistência enlaça também o *estar com* outros sujeitos. Sobre isso, Merleau-Ponty (2011) afirma que o engajamento do corpo-próprio, via motricidade, constitui uma linguagem que, no ato perceptivo, afeta o outro, alguém que se volta ao gesto realizado e que, por sua vez, atribui significados ao que vê. Os gestos de um sujeito, portanto, não são oferecidos a outro sujeito “como uma coisa a ser assimilada; eles são retomados por um ato de compreensão, cujo fundamento nos remete à situação em que os sujeitos da comunicação – eu e o outro – estão

mutuamente envolvidos em uma relação de troca de intenções e gestos” (FURLAN; BOCCHI, 2003, p. 448). Em outras palavras:

O sentido dos gestos não é dado, mas compreendido, quer dizer, retomado por um ato do espectador. [...]. Obtém-se a comunicação ou a compreensão dos gestos pela reciprocidade entre minhas intenções e os gestos do outro, entre meus gestos e intenções legíveis na conduta do outro. Tudo se passa como se a intenção do outro habitasse meu corpo ou como se minhas intenções habitassem o seu (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 251).

A comunicação constitui uma situação em que um sujeito se expressa buscando ser compreendido por outros sujeitos que atentos estão ao que ele está expressando, ou seja, a comunicação está entrelaçada à *percepção do outro*, com o qual o sujeito compartilha o mundo. Nesse mundo, conforme diz Bicudo (1997, p. 84), “o que existe, em qualquer modalidade que seja, tem seus modos de dar-se à experiência, e o sujeito tem suas variações subjetivas de perceber-se e de realizar sínteses perceptivas comunicadas, de acordo com as peculiaridades, aos outros sujeitos”.

Por exemplo, quando me deparo com um grupo de amigos do outro lado da rua, um complexo fundo de possibilidades de significados solicita minha manifestação gestual. Concretizo um aceno, porém esse movimento está nesse fundo de atribuições possíveis de significado. Mesmo ao longe, os amigos comungam desse fundo, donde o simples gesto é interpretado por eles na grandeza significativa que a comunicação exige. Com isso, entendemos que o corpo é, portanto, o lugar ou a própria atualidade do *fenômeno de expressão* (*Ausdruck*) (MERLEAU-PONTY, 2011). Ele tem um valor expressivo que constitui a antepredicatividade “do mundo percebido e, através dela, a expressão verbal (*Darstellung*) e a significação intelectual (*Bedeutung*). Meu corpo é textura comum a todos os objetos e é, pelo menos em relação ao mundo percebido, o instrumento geral de minha compreensão” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 315, grifos do autor).

Desta forma entendemos que o gesto que realizo ou o gesto do qual sou testemunha está diante de mim como uma pergunta. Ele me indica “alguns pontos sensíveis do mundo, ele me convida a encontrá-lo lá. [...] O sentido do gesto assim compreendido não está por detrás dele, confunde-se com a estrutura do mundo que o gesto designa e que retomo à vontade, ele se abre no próprio gesto” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 253). Entendemos que é pelo corpo que cria e realiza gestos que se pode compreender o outro, as coisas e nós mesmos.

Em Furlan e Bocchi (2003, p. 449), tem-se que o corpo é “a expressão de uma conduta e, ao mesmo tempo, criador de seu sentido a partir de uma intenção que se esboça e reclama a sua complementação. Antes da expressão há apenas uma ausência determinada que o gesto ou a linguagem procura preencher e completar”.

Assim, a significação expressa na realização motora do outro encontra em mim a legitimação dos sentidos que se mostram nesse fundo sinestésico que abarca o movimento do sujeito e o que ele pretende com seu movimento. O mesmo acontece com ele em relação a mim: vejo no outro um reflexo das possibilidades que a mim também se abrem, vejo nele modos de realizar movimentos intencionais que podem fazer parte dos modos pelos quais me coloco em movimento. Disso, entendemos que a intencionalidade motora para/com o outro constitui um comportamento que tem uma conotação intersubjetiva, desde os primórdios das possibilidades que se abrem a parcerias e troca de informações. A comunicação se realiza quando há “confirmação do outro por mim e de mim pelo outro” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 252).

Embora o percebido possa ser comunicado e com isso pode tornar-se percebido também pelo outro, Merleau-Ponty (2011) enfatiza que, dadas as perspectivas variadas, a diversidade de situações e posições em que se está inserido no tocante à percepção, ao meio social, ao meio sociocultural, histórico ou religioso, a percepção nos abre uma infinidade de aspectos perceptíveis, dados pela subjetividade de cada um, levando a compreensões diversas, que dependem de ações individuais e coletivas. A “percepção do outro, forma a moralidade, realizando o paradoxo de um *alter ego*, de uma situação comum colocando a mim, a minha perspectiva e a minha solidão, no campo de visão de um outro e de todos os outros” (MERLEAU-PONTY, 1990, p. 65, grifo do autor).

Assim, Merleau-Ponty (2011) entende que a compreensão do mundo está entrelaçada à experiência perceptiva, ao movimento intencional de cada sujeito de dirigir-se ao mundo e de voltar-se a outros sujeitos que coabitam esse mundo. Essa experiência constitui e mantém o ato de *ser como o outro*, não apenas o sujeito-outro, mas também as coisas-outras que contemplam nossa existência. O movimento do sujeito-perceptivo, que percebe seu movimento e também o movimento do outro, permite-lhe vivenciar “trazendo necessariamente em si o mesmo mundo objetivo” (HUSSERL, 2001, p. 168). O mundo tem uma plenitude concreta, objetiva, que acolhe todas as subjetividades, o estilo de cada um, a percepção de cada um, o que abre ao sujeito a possibilidade de dar-se conta estar vivenciando um mesmo mundo que o outro também está vivenciando.

O olhar de cada sujeito capta cores distintas, espaços distintos, movimentos distintos. Isso se dá, pois, cada olhar carrega a historicidade do sujeito que olha, historicidade que permite a cada um situar-se em perspectivas distintas. Mesmo que o “alvo” da percepção seja um objeto comum a um grupo de pessoas, os sentidos que se mostram ao envolverem-se com o mesmo são de ordem pessoal, visto que se mostram mediante perspectivas históricas, sociais e culturais que são particulares a cada sujeito. “Todo e qualquer um a priori vive na mesma natureza, e

numa natureza que a cada um por uma comunalização necessária da sua vida com a dos outros, deu a forma, numa ação e numa vida individual e comunalizada, de um mundo cultural, de um mundo com significatividade humana” (HUSSERL, 2001, p. 171).

Desta forma, o que nos permite imediatamente apontar para um objeto, dizer algo sobre ele e saber que o outro poderá compreender do que estamos falando é o solo mundano em que estamos com esse outro, comunicando com ele o que percebemos em nossa individualidade e o como percebemos. Quando, pela comunalização²⁴, pela linguagem, pela troca de informações, todos os modos de perceber e o visto nesse ato de perceber se entrelaçam, constitui-se uma compreensão mais abrangente do mundo e das coisas que nele estão presentes.

Entendemos que os movimentos do corpo-próprio, dentre os quais o movimento de comunicar-se, constituem os conhecimentos e os modos de conhecer de uma pessoa. Perceber, pensar e comunicar são possibilidades do/no corpo-próprio, e são modos pelos quais vivenciamos o mundo, compreendendo-o e compreendendo a nós mesmos. Nessa vivência, o conhecimento humano vai se constituindo.

Entendemos com Merleau-Ponty (2011), que os atos primeiros que constituem todo e qualquer conhecimento são os perceptivos. O sujeito-perceptivo, ao realizar esses atos, se dá conta, tem consciência de estar percebendo. Pode perceber seu próprio movimento se atualizando em seu corpo-vivente e pode perceber o que esse movimento realiza fora dele, em seu mundo circundante. “[...] a percepção pode ser colocada sob análise e neste ponto damos conta de realizar tal ato por *medium* da sensibilidade, pelo qual se torna explícito o tema da corporeidade”²⁵ (ALES BELLO; MANGARANO, 2012, p.209, tradução nossa).

No segundo volume do *Ideias para uma Fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica*, Husserl (2005) analisa a percepção enquanto ato vivenciado por nós, o qual nos envia às sensações que a constituem. Ele faz uma descrição dos atos dos sentidos, como os relacionados à audição, ao tato, ao olfato, ao paladar, à visão e evidencia o que a realização desses atos nos dá: sensações. Estas se entrelaçam associativamente na totalidade físico-psíquica do corpo-vivente, que ao entrar em contato físico com alguma coisa material, recebendo, por exemplo, um golpe, um empurrão, uma alfineta, etc., “não oferece tanto a experiência do evento físico, com referência ao corpo-vivente e com a coisa, porém eventos somáticos específicos, do gênero que chamamos sensações localizadas” (HUSSERL, 2005, p.

²⁴ Comunalização diz da ação de tornar comum sentidos e significados constituídos e re-ativados, em um movimento de retomada intencional do dito.

²⁵ “[...] la percezione può essere sottoposta ed a questo punto ci rendiamo conto di compiere tale atto attraverso il *medium* della sensibilità, per cui diventa esplicito il tema della corporeità” (ALES BELLO; MANGARANO, 2012, p. 209, grifo das autoras).

148). Percepção da coisa física é simultânea à percepção do corpo-vivente, o qual, por sua vez, está junto à coisa física.

As sensações localizadas junto com as que derivam de outros sentidos nos dão a possibilidade de apreender o objeto no espaço; estamos naquela esfera que Husserl define amplamente como hyletica [...] Essa esfera não mantém apenas a relação do corpo-próprio com isso que é externo, mas abrange também outros grupos de sensações que são definidas como ‘sentimentos sensoriais’, como o prazer, a dor, a tensão e o relaxamento, o bem estar e o mal estar, que estão à base da vida dos sentimentos e da valoração²⁶ (ALES BELLO; MANGARANO, 2012, p. 211, tradução nossa).

A percepção, entretanto, não é constituída por soma de sensações localizadas, porém pelo entrelaçamento dessas sensações com a apreensão do objeto no espaço com os sentimentos que vão, no fluxo dinâmico do corpo-vivente constituindo uma totalidade que possibilita o ato de olhar intencionalmente e ver o que se mostra, de modo direto, no agora, como verdade em estado nascente, conforme já mencionamos ao nos referirmos à Merleau-Ponty (1990), notadamente em *O Primado da percepção e suas consequências filosóficas*.

A percepção do movimento do corpo-próprio está entrelaçada à *kinestesia*, ato de sentir movimento. Sensação de movimento e percepção de estar em movimento dão-se ao mesmo tempo. Sendo assim, ao perceber o movimento, o corpo-próprio sabe-se *em movimento*. Temos assim que a “consciência do ligado pressupõe a consciência do ligante e de seu ato de ligação” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 318).

Ao *dar-se conta de* estar percebendo, o sujeito-perceptivo pode compreender como se dá seu movimento de perceber, pode dizer do mesmo, pois ele está atento ao que está percebendo. Ou seja, esse sujeito percebe-se no ato de perceber, percebe-se em movimento e percebe as implicações de seus movimentos que fazem com que a situação perceptiva se mantenha, tenha uma duração em fluxo, e avance.

Desta forma, quando o sujeito-perceptivo realiza uma experiência de se voltar a algo, a um objeto, “é preciso que ele saiba que o apreende ou o olha, que ele se conheça apreendendo ou olhando, que seu ato seja inteiramente dado a si mesmo e que, enfim, esse sujeito seja somente aquilo que ele tem consciência de ser” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 318). Isso pois “aquele que pode delimitar nos objetos certos aspectos perceptivos, únicos atualmente dados, e, ao mesmo tempo, superá-los [...] é meu corpo como campo perceptivo e prático” (MERLEAU-PONTY, 1990, p. 47).

²⁶ “Le sensazioni localizzate insieme siamo in quella sfera che Husserl definisce largamente hyletica [...] Tale sfera non riguarda solo il rapporto del corpo próprio con ciò che è esterno, ma comprende anche altri gruppi di sensazioni che sono definiti “sentimenti sensoriali”, come il piacere, il dolore, la tensione e il rilassamento, il benessere e il malessere che sono allá base della vita dei sentimenti e delle valutazioni” (ALES BELLO; MANGARANO, 2012, p. 211).

Ao perceber-se, o sujeito não assume uma postura reflexiva, com a qual visa a si mesmo percebendo, buscando compreender como percebe. Por exemplo, se, no ato de perceber a mesa, ele distrai a atenção e se volta reflexivamente ao seu corpo que a toca, tentando entender como ele o faz, coloca-o como objeto a ser *observado*, e com isso deixa de realizar o ato de perceber a mesa, passando a realizar o ato de analisar como a percebe. O Eu que *realiza* a percepção e o Eu que *analisa* a percepção assumem posturas diferentes. Entendemos em Bicudo (2012) que na vivência que enlaça o ato de perceber e o ato de analisar a percepção, há uma “virada no olhar”, no modo de visar o que nos é disponível. Essa “virada” se dá pela modificação da intencionalidade. Exemplificando, Bicudo (2012, p. 85) descreve nossa percepção ao “vivenciar a experiência da ‘azulidade’ do céu em uma manhã de primavera”.

[...] quando nos damos conta do prazer sentido e da correspondência entre a percepção, a percepção refletida e o objeto percebido, [...] mudo a atitude do olhar e afirmo: “o céu é azul”. O ato teorizante efetua uma abstração; com ele passamos do percebido sensorialmente para o afirmado predicativamente. O correlato não é mais o objeto percebido, mas os atos da consciência que efetua a articulação e que se mostram objetivados no predicado “o céu é azul”.

Aqui, nos referimos a modos distintos de olhar o objeto da percepção, modos que constituem a passagem do sentir ao teorizar. No ato de teorizar, entendemos que há uma reflexão que produz e articula ajuizamentos. Essa reflexão não é a mesma que está embrenhada em uma realização perceptiva; na duração desta realização posso estar refletindo sobre o que sinto, sobre meu corpo que percebe, sobre como o movimento desse corpo se materializa nesse ato de perceber. A vivência desta reflexão que se dá com a percepção, “instala o ato de nos dar conta de nós, do que estamos fazendo” (BICUDO, 2010, p. 36). “Estamos nos atos interligados sentindo/percebendo/refletindo” (BICUDO, 2012, p. 85).

Com isso, quando dizemos que em um ato perceptivo, percebo meu corpo em movimento, não se trata de estar observando e analisando ele mesmo. Para assim fazer, Merleau-Ponty (1990) afirma que seria preciso de um segundo corpo que não seria ele mesmo observável. Então, quando afirmarmos que no ato de perceber um objeto estamos sempre percebendo nosso corpo “essas palavras não devem então ser entendidas em um sentido simplesmente estático e deve haver na apresentação do corpo-próprio algo que torne impensável sua ausência ou mesmo sua variação” (MERLEAU-PONTY, 1990, p. 135). É esse “entrelaçamento” que põe o sujeito-perceptivo sentindo/percebendo/refletindo, que lhe permite dar-se conta de estar percebendo, de perceber-se percebendo. A reflexão que se mantém no perceber-se/percebendo não se dá por uma “virada no olhar”, tal qual a reflexão que sustenta uma teorização, ela acontece e avança no fluir do ato perceptivo.

Perceber-se fazendo, em uma postura intelectualista, seria então, a nosso ver, um modo de atentar-se analiticamente ao *como faço*, para assim explicar o feito. Para isso, devemos nos revestir de um “poder” analítico que o aproxima do conhecimento intelectual sobre um corpo que se move e dos mistérios que, uma vez articulados racionalmente, podem desvelar sua constituição. Em contrapartida, isso distancia o sujeito do espetáculo da descoberta atual dada pela síntese da percepção.

Vale frisar que as experiências perceptivas, dentre as quais esta, de perceber-se percebendo, que nos permite compreender e constituir conhecimentos sobre o movimento que nosso corpo-próprio realiza, não é uma experiência empírica, visto que, na perspectiva empirista, o mundo é pensado “pela investigação científica, o qual o empirista retoma com a simples perspectiva de epistemólogo, para quem o mundo já é por si mesmo determinado e encerra uma verdade que nossa subjetividade pode representar” (OLIVEIRA, 2011, p. 239). Apesar de os empiristas se valerem de experiências com objetos, não os entendem como algo a ser compreendido em sua incompletude, mas algo já constituído enquanto “verdade”, podendo ser manipulado junto a outras “verdades” referentes a outros objetos.

A percepção, entendida nesta seção como um ato humano de pôr-se em movimento, sendo ela mesma um movimento, constitui o solo sobre o qual articulamos nossas compreensões sobre o sujeito-movente. O movimento do/no corpo-próprio, a intencionalidade de pôr-se em movimento e a mudança que se realiza no mundo e no sujeito realizador da mudança constituem esse solo. Ele pode nos permitir compreensões sobre o sujeito que se move com *softwares* de GD, que realiza o ato de *preenchimento de sentidos* junto ao que se mostra em interfaces computacionais e que percebe a realização de seus movimentos se expondo nessas interfaces: a que se materializa na tela computacional – na qual a expressão do movimento se realiza – e as interfaces que, quando tocadas, tornam-se parte do corpo-próprio realizador do movimento, o *mouse* e o teclado, por exemplo.

Destacamos o *preenchimento de sentidos* no parágrafo acima para evidenciarmos sua relevância à pesquisa e para que no decorrer deste texto ele possa ser lido da perspectiva com a qual o compreendemos, a husserliana. O *preenchimento* em Husserl (1996, p. 50) é evidenciado como *ato de preenchimento*, ou *ato de conhecimento*. Na realização desse ato:

[...] temos num primeiro passo o “mero pensar” [...] enquanto intenção de significação absolutamente insatisfeita, que num segundo passo recebe um preenchimento mais ou menos adequado; os pensamentos repousam, como que satisfeitos, na intuição do pensado que justamente em virtude dessa consciência de unidade, anuncia-se como o pensado desse pensamento, como o que nele é visado, como a meta do pensamento, atingida de uma maneira mais ou menos perfeita.

Buscando compreender *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica*, focamos o preenchimento em interfaces de ambientes de GD. As figuras construídas e o movimento dessas figuras são para nós atos de preenchimento, visando expressar na interface o pensado. Assim, a interface materializa de forma “mais ou menos perfeita”, o que é visado em pensamento. Ao voltar-se ao que se mostra na interface, o sujeito que pensou e se moveu para “fixar” em desenho dinâmico seu pensamento, pode conhecer o que intencionou conhecer com o movimento realizado. Caso contrário, novos atos de preenchimento podem ser realizados de modo a ir constituindo o conhecimento que se busca.

Com isso, entendemos que preencher interfaces computacionais é um ato dinâmico de preenchimento de sentidos, cujo entrelaçamento pode nos dar as significações que buscamos. Portanto, há uma unidade que enlaça a interface e o sujeito que a habita, pois, o preenchimento traz significações, ou seja, o sujeito ao preencher a interface preenche também a si mesmo.

Compreender como se realiza preenchimento de interfaces computacionais é um modo de voltarmos-nos à nossa questão interrogadora. Portanto, espaços potencialmente dinâmicos precisam ser compreendidos, para que se possa também compreender como eles podem ser preenchidos.

Para tanto, é preciso assumir uma postura com a qual essa compreensão possa vir no fluir de um movimento de pesquisa. Vemos que um modo de proceder visando compreender a vivência de nossos sujeitos com as atividades propostas é ensejado pela pesquisa qualitativa fenomenológica, que busca por compreensões dos sentidos e interpretações dos significados que dizem do fenômeno investigado.

A pesquisa qualitativa que procede fenomenologicamente trabalha com qualidades dos dados da pesquisa, olhando tanto para o modo pelo qual foram construídos, como para a própria constituição do que está sendo investigado.

1.2 A postura e metodologia que assume o pesquisador que realizar uma pesquisa que tem como fundo concepções fenomenológicas

A crítica permanente de Edmund Husserl (2006) aos limites da razão como conhecedora do mundo o põe numa busca incessante cuja interrogação diretriz é *como conhecer, como decidir pela verdade?* Essa busca o leva na contramão dos movimentos acadêmicos mais incisivos de sua época, quando as correntes predominantes, infladas por um positivismo

subjacente, preconizam a razão científica, especialmente a garantida e operacionalizada pela Matemática, e querem mais e mais metrificar o inquérito sobre as ocorrências.

As críticas que faz aos limites da razão humana em conhecer, Husserl (2006) as têm em maior densidade quando se dirigem às ciências humanas, como a psicologia, que, nos primórdios do século passado, em suas tendências hegemônicas buscava se espelhar nos sucessos das ciências da natureza.

Na Fenomenologia foca-se o fenômeno que se manifesta a quem está ali para testemunhar sua manifestação (HUSSERL, 2006). Essa afirmação, longe de simplificar uma metodologia, antes, inaugura um problema para Husserl, que tem de responder como o pesquisador pode carregar suas concepções científicas, suas visões de mundo, suas hipóteses, e, ao mesmo tempo, vivenciar as manifestações genuínas que se mostram ao visar o fenômeno.

A fenomenologia é uma filosofia que coloca em suspenso as afirmações da atitude natural²⁷, “mas é também uma filosofia para a qual o mundo já está sempre ‘ali’, antes da reflexão, como uma presença inalienável, e cujo esforço todo consiste em reencontrar este contato ingênuo com o mundo, para dar-lhe enfim um estatuto filosófico” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 1). Ela busca nas vivências intencionais da consciência, compreender como nelas se produz o sentido dos fenômenos. “Trata-se, para empregar uma metáfora aproximativa, de distender o tecido da consciência e do mundo para fazer aparecer os seus fios, que são de uma extraordinária complexidade e de uma arânea finesa” (DARTIGUES, 2008, p. 26).

Para compreender esse mundo e perceber os fios que o constituem, assume-se uma postura, que é trabalhada por Husserl (2012) no âmbito do que ele denominou a *epoché*, “uma abstenção da validade total do mundo com todas as validades lá contidas, empíricas, cognitivas, de todos os interesses, de todos os atos referentes ou a referir à coisas mundanas que, como tal, pertenceriam eles próprios ao mundo em sua validade” (HUSSERL, 2012, p. 390), que é imprescindível para que o pesquisador vá ao encontro do mundo dos fenômenos que, na sua intuição primeira, é o seu campo de pesquisa; é uma conformação que se dá no próprio pesquisador, antes mesmo de ser uma atitude instrumental. O ato de abdicar de pressupostos é de uma requisição existencial, de uma preparação metodológica que vai além de simplesmente se assumir um protocolo de ações de um método.

²⁷ “Modo de orientação no qual se encontra mergulhada a consciência das ciências positivas. É a atitude por meio da qual atribuo a mim um corpo em meio a outros corpos e me insiro no mundo através da experiência sensível, sem que haja, ao menos, um exame crítico, a posição de existência do mundo (concebido como ‘realidade factual’), bem como a possibilidade de conhecê-lo. Dá-se, portanto, na atitude natural, a possibilidade do conhecimento do mundo – entendido como ‘realidade factual’ – como algo certo e inquestionável” (TOURINHO, 2012, p. 855).

Realizar a *epoché* é, portanto, colocar o fenômeno em suspensão. Desse modo abre-se uma experiência geradora de compreensões novas, imprevisíveis e, a busca por saber evidencia-se como um *retornar-à-coisa-mesma*, que, segundo Merleau-Ponty (2011, p. 4), é retornar ao “mundo anterior ao conhecimento do qual o conhecimento sempre fala, e em relação ao qual toda determinação científica é abstrata, significativa e dependente, como a geografia em relação à paisagem – primeiramente nós aprendemos o que é uma floresta, um prado ou um riacho”. É um retorno aos fenômenos, indo ao *mundo mesmo* onde ocorrem as manifestações genuínas, desconstruindo uma transparência pressuposta e afirmando a opacidade do mundo, que tem de ser vivida pelo pesquisador para que seja doadora de sentidos para sua pesquisa.

Ao estar em uma investigação com essa postura, o pesquisador põe-se sempre em situação de estar aberto para..., de voltar-se a..., sempre atento ao que se mostra na vivência, doando-se em atos perceptivos e deixando que as percepções lhe cheguem como dados percebidos, ou seja, dados não pressupostos, mas que se mostram a ele junto ao seu ato de pôr-se na humildade de assumir o não saber, buscando saber o *como se dá*, e não de imediato determinar esse como. A postura fenomenológica “solicita atenção com as coisas que estão no campo de percepção, não as tomando como verdades apodíticas, mas compreendendo que o que aí está pode ser entendido subjetivamente e constituído intersubjetivamente com o outro” (VENTURIN, 2015, p. 19).

Este modo de estar com a pesquisa expressa o correlato da síntese husserliana *noesis-noema*, que diz da unidade que enlaça: o ver e o visto (ver-visto), o *cogito* e o *cogitatum* (*cogito-cogitatum*), o perceber e o percebido (perceber-percebido), o mover e o movido (mover-movido), ou seja, o sujeito que realiza e suas realizações que se materializam no mundo-vida. Os atos da consciência (*noesis*) nos colocam em situação de estar atentos ao fenômeno de pesquisa. Esses atos trazem consigo seus correlatos, os correlatos da consciência (*noema*). Essa síntese “se trata do mesmo campo de análise no qual a consciência aparece como se projetando para fora de si própria em direção a seu objeto e o objeto como se referindo sempre aos atos da consciência” (DARTIGUES, 2008, p. 23).

O mundo se abre à percepção. Ao interroga-lo, podemos lê-lo e compreendê-lo pois quando intencionalmente voltamos às suas páginas dispostos a efetuar leituras diversas, buscando o sentido do dito nas palavras e frases dessas páginas, deixando que o sentido seja fruto de um fazer que abre e que se abre ao que o mundo oferta à percepção. Para Bicudo (2011), a fenomenologia busca pelo sentido do mundo-vida, atenta à sua totalidade, mas destacando do mesmo, figuras, visando compreendê-las com um olhar interrogador.

Merleau-Ponty (2011) expõe o mundo e a razão que está presente na compreensão do mesmo. Aqui, mundo e compreensão do mundo não são um problema. É certo que aí reside algo de misterioso, que não nos permite tê-lo de imediato e nem na duração de uma investigação como um todo conhecido e definido. A cada *ver claro*, configuram-se novas possibilidades de visualização e de compreensão, que solicitam constantes desvelamentos. É esse mistério e os modos pelos quais estamos com ele que justamente define o mundo e sua compreensão.

Abre-se com isso a perplexidade frente ao mistério do mundo, da vida, do conhecimento disso que a nós se mostra e de nós mesmos que avançamos buscando compreender o que é por nós interrogado. A perplexidade afeta e anima quem interroga um fenômeno que, mesmo sendo familiar, ainda se encontra em uma zona densa de sentidos e significados, solicitando esclarecimento.

Podemos falar de uma perplexidade perante o mundo e sua compreensão, visto que, em nossas ações cotidianas, não intencionamos uma razão para vivê-lo em sua imediatez, estamos em sua atualidade, fazendo parte dele e nos dando ao seu inacabamento. Ficamos perplexos no sentido de nos jogarmos nessa indeterminação imediata, sem, no entanto, estarmos como quem se joga num vazio, mas em horizonte de um todo que se põe e junto aos quais exercemos nossa racionalidade. Racionalidade que, segundo Merleau-Ponty (2011), é um ato criador e não uma linguagem formalizada. Ela não é um problema, não há atrás dela “um desconhecido que tentamos determinar dedutivamente ou provar indutivamente a partir dela: assistimos a cada momento a este prodígio da conexão de experiências, e ninguém sabe melhor do que nós como se faz, posto que somos esse nó de relações” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 18).

Se o investigador tem uma interrogação genuína, ele desconhece. Assim, o ato e movimento da pesquisa configura-se como ato de conhecimento. Em Husserl (2012), entendemos que uma pesquisa não é o movimento de confirmar hipóteses prévias. O conhecimento não é *a priori*, ele vai se constituindo na duração da investigação, o que evidencia um movimento de “descoberta, na liberdade de agir, de pensar e repensar caminhos a seguir. Contrário a isso, têm-se a predeterminação, a imposição, a domesticação. Nesse caso, segue-se o que lhe é dado, como quem segue um roteiro, não sendo possível improvisar” (PINHEIRO *et al.*, 2017, p. 198).

Um complexo campo de sentidos e significados vai se constituindo na unidade pesquisador-fenômeno pesquisado. Assim, em uma pesquisa que procede de modo fenomenológico, foca-se nesse campo, o que se mostra significativo ao que se pretende investigar, assumindo perspectivas sustentadas por uma interrogação. O que se mostra no fenômeno pesquisado, se mostra mediante uma pergunta sobre ele incidida.

Para Bicudo (2011, p. 23), a interrogação expõe a perplexidade que move o pesquisador e que acolhe muitas perguntas e possibilidades de pesquisa. A interrogação “se constitui no norte que dá direção aos procedimentos da pesquisa. [...] Ela diz da perplexidade do investigador diante do mundo, a qual se manifesta inclusive como força que o mantém alerta buscando, inquirindo, não se conformando com respostas quaisquer” (BICUDO, 2011, p. 23). Perseguir essa interrogação, da perspectiva fenomenológica, é preservar também um *rigor* de pesquisa, que transcende um fazer metodológico. Esse rigor enlaça o pesquisador, a pesquisa e o fenômeno pesquisado em um modo de perguntar que busca “pelo inquirido sempre atento ao *o que* se busca conhecer, suas características antevistas, e os modos de proceder para dar conta do indagado” (BICUDO, 2011, p. 56, grifo da autora).

Assim, entendemos que não é possível almejar a realização de uma pesquisa se o pesquisador não estiver aberto ao que ele quer saber mediante uma interrogação, sobre a qual não tem uma resposta prévia. Ele não constitui uma pesquisa se não se assume *sendo pesquisador* movido por uma interrogação e se não percebe a ou as razões de por que está interrogando. Esse *perceber-se sendo* é um movimento que pode fazer pesquisador e pesquisa transcenderem os limites de uma curiosidade ingênua, vislumbrando um modo de pesquisar e uma investigação em que compreensões emergem no âmbito da complexidade que se põe ao pesquisador a cada momento da investigação.

Nesse modo de *ser-com-a-pesquisa*, o pesquisador constitui dados, analisa-os e formula indagações, perfazendo e evidenciando um movimento de análise que mostra que compreensões sobre o fenômeno se dão em um processo de constituição. As articulações do compreendido são explicitações do que o pesquisador compreendeu na experiência vivenciada, que fez sentido para ele, mesmo sendo a pesquisa um movimento no qual ele não é solitário, em que ele está com o outro – os autores significativos à pesquisa, os sujeitos de pesquisa, coautores – em um diálogo constante.

A construção desses dados e o movimento de análise dos mesmos, da perspectiva fenomenológica aqui trabalhada, solicitam um solo em que se possa voltar-se reflexivamente à vivência. Esse solo é o que nos dá a *transcrição* da vivência. Nela, não se cria o discurso, busca-se “fixar” na linguagem o que se mostrou nas experiências vivenciadas.

Por exemplo, ao realizar uma atividade, o sujeito pode buscar dar-se conta do que está realizando. Para tanto, ele foca o ato de realizar. Porém, o ato ocorre no agora, no momento da ação e, ao tentar dela falar, se valendo da lembrança, há um deslizamento, ela escapa, detalhes vão se “escondendo” ou constituindo compreensões mais generalizadas. Fica posta a impossibilidade de trazer pela lembrança a totalidade de uma vivência. “Passado o momento,

restam os atos da consciência – psicológicos, cognitivos, de ajuizamento – que articulam o percebido, organizando-o e expressando-o em linguagem. Assim, o que se tem é a expressão do percebido expressado pela linguagem” (BICUDO, 2011, p. 19). Com isso, entendemos que a transcrição da expressão do percebido mostra-se um “ponto chave” para pesquisas que ensejam compreensões no âmbito do estudo do que se manifesta em uma vivência.

Uma experiência é vivenciada no agora, “tem uma estrutura temporal, ela nunca é tomada na imediaticidade de sua ocorrência, mas sempre é revelada na recolha e reunião do passado vivido, que também se projeta a um porvir” (BICUDO, 2011, p. 49). Compreendemos em Husserl (1994) que essa estrutura temporal evidencia o fluxo de continuidade em que se dá a vivência. Se anteriormente enfatizamos que não é possível relatar a totalidade de uma vivência, enfatizamos agora a não possibilidade de trazer pela lembrança o fluxo contínuo em que ela se deu. Na imediaticidade da vivência, damos-nos conta de estar vivenciando momentos que estão entrelaçados uns aos outros em uma unidade dinâmica. Esses momentos vão se deslizando a outros momentos. Nessa imediaticidade, não nos preocupamos com o início e fim de um momento, sabemos que eles se entrelaçam, mas não visualizamos as amarras desse entrelaçamento. Vivenciamos não um momento ou outro, mas um fluxo de momentos que evidencia uma “duração”, um contínuo.

“Porém, pela atitude assumida mediante o olhar, podemos destacar unidades dentro do fluxo, focando-se e adentrando em compreensões mais profundas dessas vivências” (BICUDO, 2012, p. 89). Quando nos pomos a transcrever ou a falar sobre a vivência e com isso sobre a continuidade que mostra seu movimento, nós a *discretizamos*; pela lembrança trazemos à atualidade do relato falado ou do relato transcrito os momentos como destaques de um todo. São momentos que se evidenciam no âmbito da narrativa que contamos a propósito de uma indagação posta no momento presente. Ao relatar, trazemos momentos lembrados como *flashes*, que vão fazendo sentido no movimento da lembrança.

Quanto mais claro o relato, mais se pode vislumbrar o que aconteceu em uma vivência. Desta forma entendemos que ele, mesmo não dando conta de trazer o fluxo, constitui-se como um exercício reflexivo de articulação de momentos buscando a continuidade que se perde e escapa ao intelecto de quem tenta retomá-lo pela lembrança. Não é essa continuidade algo que se alcança, que com um esforço se pode ter “em mãos”, mas ao relatar ou ao transcrevermos um relato de experiências vivenciadas, podemos realizar esse exercício de buscar compreendê-la. Nessa busca, o relato, a transcrição vai se configurando e desconfigurando a cada retomada da vivência, vai desta forma trazendo-a cada vez com mais detalhes, fazendo-a presente no agora em que avança o relato, mas, presente a seu modo, com novas configurações.

Assim, pesquisadores que assumem postura fenomenológica, como Detoni (2003) e Santos (2013), solicitam em suas pesquisas que os sujeitos, logo após uma vivência, a relatem. Relato que é registrado e transcrito. Intenciona-se com isso uma análise de um conjunto de dados amplo, que articula o dito pelo sujeito e as experiências por ele vivenciadas.

Com o que tecemos até então buscamos evidenciar o modo de estar fenomenologicamente com uma pesquisa, a postura que se assume nos vários momentos da pesquisa, dentre os quais o de transcrever os relatos das experiências vivenciadas. Com isso, visamos evidenciar o solo sobre o qual avançamos com o fenômeno que buscamos compreender, o *movimento-percepção-conhecimento* visado da perspectiva que enlaça o sujeito-movente e o que ele move, as interfaces de GD e o que nela se expõe. Compreendendo e assumindo a postura fenomenológica, voltamo-nos atentamente a esse fenômeno, buscando compreendê-lo da perspectiva de nossa interrogação.

A postura fenomenológica assumida nesta pesquisa nos coloca – pesquisador, orientadora, coorientador e pesquisados - como cossujeitos imbricados em uma tarefa de compreender, de conhecer. Tal postura solicita os atos de perceber e ouvir o outro, de expressar compreensões do fenômeno interrogado focando experiências vivenciadas e relatadas pelos sujeitos da pesquisa.

Na *Terceira Seção* desta tese, retomamos a questão da postura fenomenológica, porém com maior direcionamento ao nosso campo de pesquisa, evidenciando os sujeitos significativos e como estivemos em campo com essa postura, tanto na preparação do mesmo, quanto ao habitá-lo, vivenciando com os sujeitos o fenômeno interrogado. Evidenciamos também, como com essa postura apresentamos e trabalhamos com os dados produzidos em campo.

Esta *Primeira Seção* permite uma compreensão inicial dos modos pelos quais o sujeito ocupa a espacialidade do mundo-vida. Essa espacialidade, uma vez compreendida, constitui também uma concepção de mundo-geométrico que, ao ser visado, abre possibilidades para articular analogias e aproximar situações como as vivenciadas no contexto da tecnologia informática, em especial o da GD. As compreensões aqui abertas permitem pensar sobre uma “fenomenologia do movimento”, o que nos pôs de imediato a pensar também sobre possibilidades de articulação entre essa fenomenologia e a Geometria Dinâmica, visto que em ambos os casos podemos focar o movimento e o dinamismo que se evidencia.

É isso que propomos na seção que segue, a *Segunda Seção*. Além de trazer compreensões no âmbito da Educação Matemática sobre GD, buscamos tecer, com o devido cuidado, um fundo fenomenológico à Geometria Dinâmica, aproximando e articulando estudos sobre GD com o que foi evidenciado sobre movimento na *Primeira Seção*.

SEGUNDA SEÇÃO

A CONSTITUIÇÃO DA GEOMETRIA DINÂMICA: UM OLHAR AO DINAMISMO QUE SE EVIDENCIA

O sujeito da geometria é um sujeito motor. Isso significa em primeiro lugar, que nosso corpo não é um objeto, nem um simples deslocamento no espaço objetivo. É preciso que exista [...] um movimento gerador do espaço, que é nosso movimento intencional.

Por Merleau-Ponty (2011, p. 517)

Buscamos nesta pesquisa compreender *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica*. Essa compreensão solicita, antes de qualquer conjectura, um estudo sobre GD em autores significativos na comunidade de Educação Matemática, principalmente a do Brasil, que se presentifica como contraponto de nossos debates, visando o que dizem da GD, do trabalho didático-pedagógico e da epistemologia respectiva que lhe sustenta.

Portanto, trazemos na *Segunda Seção* o que emergiu desses estudos, bem como articulamos as compreensões abertas na seção anterior sobre o movimento do/no corpo-próprio com o dinamismo que aqui se faz presente, constituindo-se também com *softwares* geométricos.

Quando questionamos o que dizem pesquisadores sobre a GD, buscamos também por como eles a definem. Ao nos depararmos com essas definições, questionamos a ênfase ao dinâmico creditado apenas ao *software* e nos pomos a pensar sobre um fazer geométrico dinâmico que também pode se realizar fora dele. Desse pensar surge uma questão: *é só a presença das tecnologias informáticas que faz a Geometria vir a ser dinâmica?* Indagando e estudando, vimos horizontes para iniciarmos um discurso visando adentrar esta questão nas possibilidades de movimento que se abrem no mundo-vida e no mundo constituído pela Matemática, mais especificamente, aquele que se mostra nas Transformações Geométricas.

Com isso, nesta seção, trazemos também, um pensar sobre o dinamismo que vemos mostrar-se no mundo-vida e nas Transformações Geométricas e avançamos tecendo nossas compreensões sobre o ser ou vir a ser dinâmico que se destacam na questão acima posta.

2.1 Uma geometria dinâmica se constituindo no âmbito das Transformações Geométricas: abertura ao pensar sobre a Geometria trabalhada em *softwares* gráficos

A Geometria e sua história são amplamente discutidas em pesquisas das mais diversas áreas, como Matemática, História, Educação Matemática e Filosofia. Em consonância com o foco deste estudo, privilegiamos e destacamos na história da Geometria o movimento de constituição da chamada Geometria das Transformações.

A Geometria das Transformações é apontada por Klein (1984) como um meio pelo qual se revolucionou a produção do conhecimento geométrico. Ela surge junto aos esforços que buscavam compreensões além das euclidianas, tão presentes na segunda metade do século XIX. O produto desses esforços, segundo Detoni e Pinheiro (2016, p. 233), “é celebrado por muitos matemáticos e educadores matemáticos como um revigoramento científico do pensamento geométrico, desde o século XIX”.

Nos primeiros trabalhos com a Geometria a ideia de transformação estava presente, como nas construções, sejam como efetivações gráficas ou como componentes de raciocínio demonstrativo, em que um segmento ou ângulo era transportado. Com isso, foi-se inicialmente constituindo uma ideia intuitiva dessas transformações enquanto modos de fazer emergir novos procedimentos, até ensejar outras geometrias. Essa ideia, mesmo que intuitiva, abriu caminho para a compreensão de que as geometrias produzidas e já conhecidas poderiam se expandir e/ou gerar novas geometrias. Em meio ao movimento que constituiu e fez possível essa percepção, surge a noção de Grupo de Transformações, que veio como proposta de elevar a ideia intuitiva de Transformações Geométricas, formalizando-a e atribuindo-lhe “caráter científico”.

Encontramos em Felix Klein (1849-1925), no *Programa de Erlangen*²⁸, o que entendemos ser uma formulação mais clara para o conceito de Grupo de Transformação, o qual ele mostrou ser aplicável a todas as geometrias constituídas até o século XIX. Esse conceito, uma vez formalizado, concedeu caráter científico à agora chamada Geometria das Transformações. “Desta vez é Felix Klein que vai formular de modo magistral o novo ponto de vista. Uma nova etapa será assim inaugurada. A passagem da etapa das transformações projetivas à etapa das estruturas de grupos constitui uma lição preciosa” (PIAGET; GARCIA, 1987, p. 105). Com o conceito de Grupo formalizado por Klein, pôde-se melhor tratar as especificidades de cada Geometria, incluindo as que sustentavam cada uma como distinta das demais, apontando convergências e divergências.

Em Bachelard (1968) um Grupo não é de objetos em si, mas das *relações* (e operações) que determinam objetos que possam estar numa circunscrição conceitual característica de determinado Grupo. Por meio de transformações de posição, pode-se compreender

²⁸ Anunciado na conferência de Felix Klein, em 1972, na abertura do ano acadêmico da Universidade de Erlangen, Alemanha.

propriedades e relações que tornam determinado objeto um entre os demais, e até mesmo as relações dele para consigo mesmo. Esse processo diz de uma estruturação lógico-matemática de organização e ocupação de um espaço com suas regras (DETONI; PINHEIRO, 2016).

Ao trazer a ideia de Grupo de Transformações, Klein (1984) classifica como sendo um desses grupos, o Grupo de Isometrias²⁹, que ele chama também de Grupo de Deslocamento. Pensar o Deslocamento como um Grupo de Transformação que gera mudanças, seja em uma figura, em sua posição ou até mesmo em uma Geometria, abrindo possibilidades de se conjecturar outras geometrias como correlatas das mudanças percebidas, compreendidas e articuladas, solicita um olhar à epistemologia que subjaz às Transformações Geométricas.

Para Piaget e Garcia (1987), a evolução dos métodos e conceitos geométricos e algébricos, dentre os quais os que fizeram possível tornar a ideia intuitiva de transformação em ideia formalizada, não evidencia apenas a concepção de novos conhecimentos, mas, também, uma retomada aos conceitos já “adquiridos”, fazendo uma reinterpretação dos fundamentos conceituais, indicando, com isso, que o desenvolvimento epistemológico não é linear e nem é uma ida sem volta, pois exige sempre uma reconstrução e reorganização dos conhecimentos já constituídos ao assumir outros pontos de vista e abrir possibilidades para aquisições novas.

Encontramos no pensamento de Bachelard (1968), aportes epistemológicos que movimentam nossa compreensão. Seguindo esse pensador, dizemos da constituição e desdobramento da personalidade de cada Geometria – no pensamento dinâmico e comparativo que a ideia de Grupo permite - no que as faz *seres* diferentes. Esse modo de ver revela valores epistemológicos que permeiam as possibilidades de tratamento dos conceitos geométricos e dos modos pelos quais eles foram historicamente sendo constituídos e transmitidos pela linguagem. O “pensamento matemático progride com a aparição das ideias de transformação, de correspondência, de aplicação variada” (BACHELARD, 1968, p. 29).

Dentre as novas concepções que emergem com as Transformações Geométricas, estão as *Geometrias Não-Euclidianas*. Bachelard, em sua obra *O novo Espírito Científico* (1968), evidencia que o entendimento da ideia de Grupo contribui para a compreensão dessas *novas* geometrias. “Sendo [...] um grupo de invariantes que se manifestam dada uma transformação, promove-se, epistemologicamente, uma grande guinada na definição do que é (são) geometria

²⁹ Ao dizer das Transformações Geométricas, Madeiros e Gravina (2007, p. 6) definem que: “Se Π e Π' são dois planos, uma transformação $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ é uma *isometria* quando a distância entre os pontos $T(A)$ e $T(B)$ é igual à distância entre os pontos A e B , para quaisquer pontos A e B ; ou seja, quando $d(T(A), T(B)) = d(A, B)$ para quaisquer pontos A e B ”.

(s), quando os invariantes físicos é que dariam valor racional aos princípios da permanência” (DETONI; PINHEIRO, 2016, p. 237).

Assim, o estudo de uma Geometria é assumido da perspectiva de suas características e propriedades, sendo que cada uma delas é sempre posta em questão junto às outras. Nessa visada, em meio à diversidade de possibilidades geométricas, algo vai se mostrando característico: um invariante estrutural que permite dizer de uma Geometria estudada, ao mesmo tempo que dizer desta Geometria como sendo diferente de outras geometrias, embora tenham pontos convergentes.

Desta forma, passando de uma figura a outra “transportando as suas propriedades, o estudo das figuras é substituído pelo estudo das propriedades das transformações” (BONGIOVANNI, JAHN. 2010, p. 48). Entendemos ser esse procedimento um modo pelo qual se possam abordar problemas geométricos de resolução complexa, uma vez que uma transformação fornece a figura em movimento, e deixa o rastro sinestésico desse movimento.

O que até então vem sendo discutido mostra que o trabalho com Transformações Geométricas marca a retomada e a criação de geometrias. Entendemos que o fundo que sustenta o fazer matemático que possibilita às *transformações* retomar e criar é o que se materializa em/com *movimentos*. Klein (1984, p. 6) explicita que “um exemplo de grupo de transformações é dado pelo conjunto dos movimentos (considerando cada movimento como uma operação efetuada sobre todo o espaço. Um grupo contido neste é, por exemplo, o das rotações ao redor de um ponto”. Ao explicitar a rotação (considerada em muitas obras um deslocamento) como sendo um movimento, Klein (1984) deixa implícita a ideia de não diferenciação entre deslocamento e movimento (que se assume nesta tese).

Quando o movimento de uma figura é realizado em espaços matemáticos distintos (o cartesiano e o esférico, por exemplo) podemos perceber as características desses espaços e da própria figura quando ela, em movimento, preserva *invariantes* em sua estrutura na deformação provocada por esse movimento. Em espaços distintos, têm-se configurações e desconfigurações distintas para um mesmo objeto. Desta forma, um quadrado pode manter-se quadrado em um espaço e pode assumir uma forma arredondada em outro. Nesse segundo caso, “as propriedades geométricas se conservam somente em parte. O restante aparece como propriedade não mais dos próprios entes³⁰, mas como propriedades do sistema resultante do acréscimo de um ente especial aos entes originais” (KLEIN, 1984, p. 11).

³⁰ Objeto que encontra na ciência Geometria uma determinação, um conceito que o situa como parte de um conjunto abarcado por um espaço caracteristicamente determinado por leis matemáticas.

Em *Os Elementos*, “para evidenciar a igualdade de figuras planas, Euclides trabalha a ideia de *ajustamento* de uma figura sobre a outra, sendo que figuras iguais podem ser justapostas sem que haja diferenças entre as medidas dos objetos que as constituem” (DETONI; PINHEIRO, 2016, p. 234, grifo dos autores). No entanto, o movimento em Euclides não é explicitamente um modo metodológico, não sendo uma ferramenta intelectual para um pensamento geométrico.

No plano que contém as figuras rígidas³¹, realizam-se transformações que preservam sua rigidez, como a translação, a rotação, a simetria e suas composições que constituem o Grupo de Transformações: Isometrias. “Klein considerou as homotetias e semelhanças como transformações mais gerais que as isometrias, e, portanto [...] as homotetias e as semelhanças constituem o grupo principal da geometria euclidiana” (MABUCHI, 2000, p. 16).

Quando dizemos dos *invariantes* em Klein (1984) e das *relações* em Bachelard (1968), entendemos que o movimento se mostra como fundo sobre o qual podem acontecer. No movimento, invariantes e relações podem se mostrar. Assim, entendemos que, na medida em que as Transformações Geométricas possibilitam destacar os estruturantes de cada Geometria, vai-se evidenciando que seu próprio estruturante é o movimento, que nas possibilidades de rotacionar, transladar e refletir, provoca mudança, transforma e pode criar algo novo.

Assim, o discurso epistemológico que aqui trazemos propõe expor como um fazer matemático, mas especificamente, um fazer geométrico, se realiza desrealizando geometrias, ou modos de fazer geometria. O fazer geométrico das Transformações Geométricas propõe o movimento como um modo de estar com as geometrias, um modo de estudá-las, de pô-las em suspensão sob um fundo dinâmico que, em movimento, evidencia o que varia e o que não varia, assim como, o que é semelhante, desigual ou congruente.

Entendemos que as Transformações Geométricas inauguram um ato, um fazer matemático, visto que o movimento é uma realização e tem um realizador, o sujeito, que se coloca em movimento no movimento. Essa afirmação é possível especialmente pela presença de tecnologias, sendo algumas delas a régua e o compasso, com as quais historicamente vêm-se realizando as Transformações Geométricas. Vale frisar que a Álgebra é um modo de fazer Transformações Geométricas. As isometrias possuem suas equações gerais. Ela foi fundamental para a formalização do conceito de Transformações Geométricas, incidindo na Teoria dos Grupos de Felix Klein.

³¹ Figuras que não se desconfiguram quando incididos nelas movimento. Suas medidas angulares e lineares se preservam nesse movimento.

Entendemos que as transformações com régua e compasso evidenciam um modo de espacializar mais dinâmico (no que tange as possibilidades de realização de movimentos) do que as transformações com Álgebra, pois envolve atos de girar e traçar retas, realizados por alguém que também se põe em movimento e faz dessas ferramentas extensões de seu corpo. Elas fazem realizar-se em desenho a intencionalidade dessa pessoa.

Com o que articulamos até o momento expomos o que para nós são compreensões que nos permitem dizer de um fazer geométrico dinâmico. Em nenhum momento Klein (1984) e Bachelard (1968) falam frontalmente de uma geometria dinâmica, mas nas ideias geométricas que constroem e em algumas consequências filosóficas e epistemológicas que concluem fica presente o fato de o movimento – como o de deslocamentos ou mudança de posição de objetos em projeção – ser determinante para resultar em podermos dizer estar constituindo um novo ideário geométrico. Com o Grupo Deslocamento já se dizia do movimento de figuras e do estudo do que emerge desse movimento, como por exemplo, dos invariantes. Isso, ao nosso ver, pode pôr-nos a pensar sobre uma geometria dinâmica vindo a se tornar.

2.2 A Geometria Dinâmica do *software* como um modo de ser do fazer dinâmico vivenciado no mundo-vida

Pesquisadores como Paulo e Bicudo (2010), Detoni (2003) e Santos *et al.* (2010) concebem a Geometria como ciência do espaço enquanto espacialidade vivenciada, portanto, que pode ser posta em compreensão se uma tematização incidir sobre a questão do espaço e sobre a espacialidade. Desse modo, das relações científicas que envolvem formas e medidas, pode-se abarcar o fazer humano, uma vez que a espacialidade é, antes de objetivar-se em conhecimento geométrico expresso de modo predicativo na linguagem da ciência, um modo de ser do homem no mundo. “Noções de grandeza: grande, pequeno, maior, menor; de posição: alto, baixo, direita, esquerda; de distância: longe, perto, são constituídas a cada momento num nível espacial em relação ao qual as coisas se situam. Essa é uma experiência primordial” (BICUDO, KLUTH, 2010, p. 138).

Concordando com esses autores, nos pomos a pensar, conjecturando, que a Geometria é por constituição dinâmica, pois a vivência da espacialidade solicita movimento e nos põe em constante movimento. A Geometria constitui-se com a “presença do homem no mundo, no seu mundo de vivência, que é um mundo de possibilidades – e não de coisas realizadas – no qual ele age, espacializa-se, exerce sua espacialização. Por extensão, afirmamos que fazer geometria é ocupar-se de sua espacialidade” (DETONI, 2012, p. 192). A vivência espacial da qual a

Geometria emerge solicita movimentos do sujeito-movente, dentre os quais os de deslocar, de dimensionar, de aproximar, de rotacionar, de transladar e de ajustar, todos eles abarcados pelo movimento de espacializar, realizados em nosso mundo circundante. Quando a ciência Geometria formaliza o que se dá na vivência, define objetos geométricos e expressa suas representações, entendemos que há um processo no qual a dinamicidade do fazer geométrico vivenciado vai se perdendo, tornando-se “estática”, pois os manuais e livros em que a ciência busca expressar suas compreensões não enlaça a complexidade da espacialidade na qual estamos com o mundo, movendo-nos e movendo o que nele nos é disponível.

No entanto, entendemos que esse processo não se conclui, pois da mesma forma que a ciência Geometria caminha em um processo de fixar o que é móvel, constituindo entes geométricos, distanciando-o do mundo-vida, é possível, ao nosso ver, olhar para esses entes buscando pelo dinamismo que os constituem antes de serem formalizados matematicamente, buscando por sua forma originária no mundo.

As teorias lógico-matemáticas substituíram o mundo da vida pela natureza idealizada na linguagem dos símbolos. Cabe a nós recuperá-lo, tirá-lo do anonimato, pois o humano pertence, sem dúvida, ao universo dos fatos objetivos; mas, enquanto pessoas, enquanto eu, os homens têm fins, perseguem metas, referem-se às normas da tradição, às normas da verdade; normas eternas (HUSSERL, 2012, p. 32).

As Transformações Geométricas discutidas no tópico anterior, embora tenham sido também formalizadas, podem auxiliar na busca pelo dinamismo que subjaz o que se mostra estático. Assim, entendemos o Grupo Isometrias, ou Deslocamento como modo de mover objetos geométricos, mesmo que eles sejam tomados como entes estáticos ou potencialmente dinâmico no âmbito da Geometria, entendida como ciência do mundo ocidental. Portanto, entendemos que as isometrias são modos de atualizar a Geometria, de fazê-la dinâmica.

A compreensão que se abre com o exposto até aqui, neste tópico, e no tópico anterior, nos leva a pensar sobre a GD que é projetada e trabalhada em *softwares* gráficos.

Klein e Bachelard não vivenciaram a era do desenvolvimento de *softwares* matemáticos. No entanto, no que diz respeito às propostas, entendemos que as ideias vinculadas à GD e os pensamentos desses matemáticos se aproximam quando se foca o movimento, o dinamismo. Indo em direção a esse modo de ver, nos valemos do pensar sobre uma geometria dinâmica que entendemos ir se constituindo com Klein (1984) e Bachelard (1968), para enfatizar que nossa compreensão sobre a produção da GD transcende a funcionalidade da tecnologia computacional presente em um *software*.

Entendemos que *o dinamismo não é específico do software, mas é também correlato dos modos pelos quais o habitamos*. Modos esses que se presentificam também em nossas ações

fora desse ambiente, no mundo circundante, quando nos posicionamos, movemos objetos, organizamos ou desorganizamos o que nos é disponível nesse mundo. Nessa perspectiva, podemos fazer geometria dinâmica fora do computador. Podemos fazê-la com um copo, com palitos, com uma corda, com um livro, com nossas mãos.

Como evidência do dinâmico presente em Klein (1984) e Bachelard (1968), destacamos que suas ideias, mesmo sendo desenvolvidas em uma época distante desse tempo e espaço constituído fortemente pela informática, podem ser trabalhadas em *softwares*, dentre os quais os de GD. Vemos a proposta de Klein (1984) acerca dos Grupos de Transformações e a ideia de deslocamento em sintonia com a GD, pois os *softwares* nos quais ela se expõe oferecem ferramentas que possibilitam movimentos diversos, que, quando acessadas, permitem o deslocamento de objetos cujas imagens são projetadas na tela computacional. O “deslocamento” em Klein (1984) e em *softwares* de GD, conforme compreendemos, mesmo que de formas distintas, dizem da possibilidade de “levar” um objeto geométrico de um lugar para outro, podendo, depois, trazê-lo de volta ao seu lugar de origem, que, tecnicamente, chama-se *transformação de posição*. A proposta de Bachelard (1968) também pode ser trabalhada com *softwares* de GD, visto que, para focar relações, o *software* permite ao sujeito diversidade de movimentos, dentre os quais o de aproximar figuras, até mesmo ao ponto de fazê-las coincidir, sobrepondo-as. Com esse movimento, à medida que objetos são aproximados, pode-se compreender suas relações. Da mesma forma, por contrapartida, esses objetos podem ir se distanciando em termos de características comuns, evidenciando assim suas diferenças.

No *software* de GD podemos mover objetos geométricos com auxílio do *mouse* (ou diretamente com os dedos, ao trabalhar com dispositivos com manipulação *touchscreen*) (BAIRRAL *et al.*, 2013) e visualizar as implicações desse movimento materializando-se em interfaces computacionais. Os *softwares* de GD potencializam movimentos como: deslocar, fazer, desfazer, aproximar, distanciar, apresentando em uma mesma tela inúmeras possibilidades espaciais que podem ser atualizadas e vistas em um fluxo contínuo e acelerado de movimentos realizados por um sujeito que a foca intencionando atividades.

No espaço que nos é disponível fora do computador, fora dos *softwares* de GD, os objetos estão ao alcance de nossas mãos e, quando não estão, podemos alcançá-los com uma ferramenta que nos permita estendermo-nos até ele. Assim, o movimento que realizamos, valendo-nos de ferramentas ou não, se expõe em variadas interfaces presentes em nosso mundo

de vivências, sendo a interface dos *softwares* de GD, uma entre as outras disponíveis nesse mundo (um interruptor, uma tela multimídia, um aparelho elétrico, um controle remoto, etc.)³².

A preeminência do mundo espacial aberto com a tela informática e seus ambientes de produção de construções articuladas, e toda a potencialidade de navegação e comunicação, dispõe para nós, pesquisadores da Geometria, uma obrigatória reflexão sobre a Geometria trabalhada fora desses ambientes. Com isso, evidenciamos também, nosso entendimento de que ao trabalhar com Desenho Geométrico, que tem como ferramentas elementares a régua e o compasso, estamos em um fazer dinâmico, que solicita transformações de figuras geométricas e de suas posições, que avançam e se materializam no papel mediante atos motores como os de girar e traçar retas, realizados por alguém que também se põe em movimento fazendo atualizar-se em desenho sua intencionalidade de mover-se e de mover o que lhe é dado.

Evidenciamos com isso nossa compreensão de que a Geometria disponível em *softwares* é um modo de ser da Geometria que se presentifica dinamicamente no mundo-vida. No mundo cibernético em que se presentificam os *softwares*, inaugura-se um modo específico de vivenciar a espacialidade; “as experiências são vividas em um mundo fisicamente constituído por bytes, mas que é expresso em cenários de maneira livre, muitas vezes expandindo os já percebidos na realidade do cotidiano mundano” (BICUDO; ROSA, 2010, p. 78). É com o movimento, seja ele realizado ou passível de ser realizado, e com a presença do sujeito-movente que entendemos constituir-se a chamada Geometria Dinâmica, mesmo que por definição, no âmbito dos estudos em tecnologias informáticas ela não seja assim constituída.

Aproximando compreensões sobre GD ao trabalho de Bicudo e Rosa (2010), podemos entender que modos de mover e os próprios movimentos realizados em nosso cotidiano mundano podem expandir-se quando realizados em *software* de GD. No entanto, não se configuram como outros movimentos, desconhecidos por nós. Com esses autores entendemos que a realidade cibernética é um modo de ser da realidade mundana por nós vivenciada.

Assim, compreendemos que as possibilidades de movimento estão dadas no mundo de nossas vivências no qual também estão as tecnologias informáticas, dentre as quais, os *softwares* de GD. No entanto, essa possibilidade não se efetua se não houver a intencionalidade de um corpo-próprio que visa o *software* ou o mundo e põe-se em ação, provocando movimento, provocando mudança e percebendo mudança.

Desta forma, a Geometria que se mostra dinâmica e que aqui buscamos evidenciar, pode ser trabalhada em um papel, na lousa, em um *software*, no chão, no silêncio do pensamento

³² Essas são interfaces com as quais estão presentes o homem e a máquina com seus aspectos de funcionamento físicos e lógicos. Nessa presença, a interface vai adaptando homem e máquina um ao outro.

articulador, etc. Esse trabalho se faz como um horizonte de atribuições de sentidos. Os desdobramentos desta maneira de estar geometricamente desenham o potencial de investigação que se abre a uma pesquisa que visa a Geometria, buscando compreender como ela se mostra e como fazer geometria em ambientes distintos, com suas características.

Tendo exposto nossa compreensão do que entendemos por uma Geometria que se expõe dinamicamente e sobre onde ela pode ser trabalhada, evidenciamos que no decorrer deste texto, quando nos referirmos à Geometria Dinâmica, ou à abreviatura GD, estaremos dizendo da Geometria produzida em *softwares*, pois entre os modos de fazer geometria dinâmica e entre os espaços em que esse fazer se potencializa, que acima evidenciamos, é a Geometria projetada e trabalhada em *softwares* que questionamos e é com ela que avançamos com os sujeitos de pesquisa buscando compreensões sobre o movimento e a percepção de movimentos em espaços computacionais.

Paralelo ao que aqui se argumenta vai se desenhando que as Transformações Geométricas não são para nós apenas um conteúdo matemático a ser trabalhado. Concebemo-las como um fazer geométrico que se constitui e se mantém em um fundo dinâmico, que anima o movimento, que se abre à realização de movimentos. Transladar, Rotacionar e Refletir são modos de um movimento se realizar, modos que se expõem como intenção de um sujeito de mover-se e de mover. As transformações vistas da perspectiva do *software* de GD reforçam essa nossa concepção e evidenciam nosso intuito de focar o *movimento*, visto que a própria GD tem como constituinte uma programação computacional que o privilegia.

2.3 O dinamismo na Geometria Dinâmica projetada e trabalhada em *softwares*: focando o movimento e a expressão do movimento em interfaces computacionais

Ales Bello e Mangarano (2012) entendem que todo movimento se constitui enquanto mudança. Concordamos com as autoras, pois entendemos que o movimento implica sempre novas configurações, seja do movente, seja do móvel. Essas configurações se mostram entre as perspectivas da percepção de mudanças junto ao ato de mover-se, movendo. Mover é perturbar e perturbar-se, é configurar e configurar-se, é constituir e constituir-se. Há sempre a unidade *movimento-sujeito-movente*.

Todo ato que envolve o movimento realizado por aquele que o realiza, e as mudanças que esse movimento conduz, tem um fundo, o que permite expressar que esses atos e o fundo que os abarca são momentos de uma totalidade única.

Entendemos fenomenologicamente que o movimento do corpo-próprio é sempre intencionalidade de movimento, é sempre um *movimento para...*, que ao avançar constitui e é constituído, provoca mudança ao mesmo tempo em que se modifica. Isto é, a intencionalidade é “como o que se estende em direção ao mundo, como movimento e que, ao se dirigir, de modo atento, focalizando algo no mundo-vida, traz de volta o que foi percebido, ou seja, o visto como os elementos disponibilizados aos atos da consciência” (BICUDO, 2010, p. 128).

A computação é um campo privilegiado por manifestar uma amplitude de possibilidades de movimento e percepção de mudanças num campo em que se constituem sinestesticamente: textos, ícones, *links*, figuras, vídeos, que ao serem acessados pelo sujeito na interface computacional, se expandem e são expandidos em uma dialética constante em que o computador abre ao sujeito-perceptivo um campo de realizações possíveis. Ao materializar uma dessas possibilidades, realizando movimentos, há uma modificação naquele que realiza o movimento e, por sua vez, no modo de efetuar o movimento no próprio campo de possibilidades presentes na lógica do *software*. Agimos com o computador disparando intencionalmente “comandos que se atualizarão em tarefas específicas, efetuadas com a materialidade disponível pelo programa com o qual está operando” (BICUDO, 2014, p. 60).

Na experiência vivenciada ao se estar com o computador, inaugura-se um modo específico de estar com a espacialidade, abrindo possibilidades de percepções de mudanças que se dão também em interfaces. Então, compreender o movimento e a percepção de mudanças em *softwares* de GD passa por compreender essas interfaces, as bifurcações de possibilidades que se manifestam na lógica que as sustentam, bem como o movimento que faz manifestar nelas sentidos diversos. Destacamos a relevância de discutir as interfaces neste estudo, pois é com elas que o sujeito age e pode perceber as expressões de seus atos.

Interface designa, “ao pé da letra, algo que se coloca no encontro de duas faces, que se volta para ambos os lados que se encontram, caracterizam uma fronteira” (FIGUEIREDO, 2014, p. 138). A interface do *software* de GD se “volta” para o lado de sua programação à medida que é capaz de gerar, sobre alguns comandos/regras, figuras e possibilidade de movimento, e se “volta” para o lado do sujeito que realiza ações nela e se põe atento às implicações das mesmas. Assim, as interfaces agem como mediadoras que atuam entre dois polos: a programação do *software* e a pessoa que a ele se direciona.

Em outras palavras, uma interface reveste os códigos de linguagem de programação com uma vestimenta mais limpa, atraente, convidativa, ou seja, assume funções para melhor atender necessidades humanas de habitar um ambiente que lhes seja agradável. As interfaces escondem o mecanismo que as constitui, ou seja, os códigos. Se a computação é “por um lado fortemente

baseada em códigos, por outro, ela evita mostrá-los o quanto pode. Isso faz da computação uma realidade oculta. [...] seus mecanismos e funcionamentos [...] estão encobertos pelas *interfaces*” (FIGUEIREDO, 2014, p. 139, grifo do autor).

Assim, entendemos que toda a roupagem das interfaces carrega o objetivo de possibilitar às pessoas, mesmo desconhecendo os códigos de programação, que intuem ações ao trabalhar com as mesmas. A comodidade, as articulações e os alcances dados por uma interface fazem com que coloquemos à margem toda a linguagem de programação que dá sustentação ao movimento possibilitado, bem como às mudanças que dele emergem.

Uma interface, por ser, também, uma criação humana, é carregada de sentidos que enlaçam a intencionalidade do programador de programar algo condizente com um saber ao qual ele deseja que seja percebido por aquele que de modo atento *olha* a interface criada. As interfaces da GD, por exemplo, são construídas por traduções de regras de Geometrias como a Euclidiana e a Analítica, em comandos para o computador. Nelas, são visíveis menus com ícones ilustrados, junto os quais, quando o cursor do *mouse* é aproximado, palavras que definem suas funcionalidades aparecem. Tanto as figuras quanto as palavras carregam sentidos intencionados pelo programador, que se expandem na presença do sujeito, que percebe esses sentidos em várias faces, mediante uma tarefa que se põe a realizar.

Ao selecionar um ícone e executar sua funcionalidade na tela do *software*, realizando assim a solicitação de uma tarefa, o sujeito não está materializando a proposta de um ícone, pois a proposta não é do *ícone mesmo*, ela está “atrás” dele, ou *com* ele, como um fundo. Ela é a própria intenção do programador expressa na interface em forma de ícone. Ou seja, o que o sujeito faz materializar-se na tela do *software* ao escolher e executar um ícone é aquilo que é intencionado pelo próprio sujeito junto ao que o programador apresenta como possibilidade. Portanto, ao considerar que há a intencionalidade do programador e a intencionalidade da pessoa que se volta ao *software*, podemos entender que a interface é um espaço onde essas pessoas se encontram, onde suas intencionalidades se entrelaçam.

Em uma via, a máquina age em mim através de suas respostas, isso é, expondo suas potencialidades de ação e efeitos. Essas respostas chegam até mim como um misto puro de comportamento de resposta, que eu percebo, e como um conjunto de sentidos que o acompanha, na forma de palavras e desenhos. Esse todo comportamento-decoração é recebido por uma rede de sentidos que se estabelece em torno da máquina e suas funções. Na via contrária, eu ajo sobre a máquina, me apropriando dos sentidos pelos quais ela se doa e os manipulando de acordo com um sentido mais amplo de mundo que eu trago comigo e estão presentes quando uso a máquina (FIGUEIREDO, 2014, p. 134).

É na ação do sujeito-movente junto à interface do *software* de GD que o encontro entre essas intencionalidades se expõe; o movimento do sujeito permite *transportar* a interface do

software, não chegando com isso aos códigos de programação, mas antevendo as possibilidades programadas. Nós *transpomos* a interface, por exemplo, quando clicamos sobre um ponto e o arrastamos, pois antes desse ato, já sabemos por experiências anteriores que a programação nos permite fazer isso. Se esse ponto pertence a uma reta r perpendicular a uma reta s , podemos saber, antes do movimento do mesmo, que r continuará perpendicular a s , pois isso foi intencionado pelo programador e, no ato, nos encontramos com essa intencionalidade. Acessamos o que está por trás da interface, o que nos põe em situações diversas de mover e/ou pensar em mover.

A ideia de transpor nos ilumina quando passamos a entender interface como *fronteira*. Podemos melhor compreender o que é isto, uma fronteira, quando pensamos nos modos pelos quais ela se presentifica em nosso cotidiano. Por exemplo, a linha que demarca o limite do território de um país é a mesma linha que demarca o início do território de outro país. Essa linha é uma fronteira. Podemos viajar de um país para o outro e retornar, ou seja, uma fronteira não se caracteriza como um muro de isolamento, que não permite o ir e vir, ela pode ser *transposta* (desde que não haja bloqueio político-militar). O mesmo acontece quando estamos com uma interface: intencionalmente nós a focamos, percebemos o que nela nos é dado, visamos horizontes de possibilidades que nos são abertos pelo programador e, de imediato, nos pomos em movimentos perceptivos ou reflexivos junto à interface. Esse *estar-com-a-interface-com-o-programador* se dá em fluxo, em atos de transpor, estando o sujeito em situações que o solicitam constantemente transitar entre as faces e a interface.

A interface do *software* de GD, quando preenchida por uma atividade que solicita ações que possam provocar um querer avançar, podem fazer aflorar no sujeito – que, em situação se coloca frente a ela – a curiosidade, a vontade de clicar, de mover, de estender-se ao que a interface lhe mostra. O sujeito age com a interface, com o computador, mas notemos que ele “o faz acionando comandos; porém, já está distante da ação simples e mecânica, pois com a racionalidade binária entrelaçam-se modos de ele ser ao estar com os outros e com o mundo; entrelaçam-se expectativas, sentimentos, modos de compreender-se e ao mundo” (BICUDO, 2014, p. 63).

Estar em ação, ser movente, traz o sentido humano da vontade de estar com o que o circunvizinha, de ocupar-se com aquilo que no mundo a ele se disponibiliza, os manuais. Essa ocupação pode acabar trazendo ao sujeito-movente as significações das coisas e dos outros, e se articulam como sementes de compreensões, que nos atos intencionais da consciência vão se constituindo como conhecimento. Estando com o *software*, os manuais são comandos para se habitar o horizonte que a tela informacional permite.

O poder que o sujeito exerce sobre as coisas, quando está realizando uma tarefa, é entendido com Merleau-Ponty (2011) como a força presente na motricidade do corpo-próprio, que, estando intencionalmente movendo, movendo-se, define “o lugar que está por meio da tarefa, do que intenciona efetuar, e das situações específicas, delineadas por sua unidade harmônica com o mundo-horizonte” (BICUDO; KLUTH, 2010, p. 133). Assim, entendemos que o corpo-próprio é presente e presença onde há algo a ser realizado.

Junto à ação do sujeito, um fundo sinestésico vai se constituindo, e constituindo a interface do *software*; novos *preenchimentos de sentidos*, que se fazem nas vivências, se mostram, e o sujeito que se move, movendo, se percebe nesse ato, percebe o movimento e o que o mesmo lhe traz à percepção: conhecimentos já explicitados e culturalmente materializados, configurações, desconfigurações, variantes, invariantes, ou, simplesmente, a expressão do movimento realizado.

Essas percepções se evidenciam mediante uma tarefa a ser realizada, uma atividade proposta pelo próprio sujeito a si mesmo, ou, proposta por outra pessoa, como por exemplo, um professor que propõe a seu aluno. Dentre essas atividades, e por tratarmos aqui da GD, destacamos as atividades geométricas que subjazem à interface do *software* de GD. Elas pressupõem objetos extrageométricos, que se doam antes dessas atividades, na esfera da experiência. De forma mais ampla, Barco (2013), conforme entende em Husserl (2006) traz a mesma compreensão no âmbito de atividades matemáticas, nas quais:

[...] não se trata de encontrar objetos abstratos que existem de alguma forma indefinida, mas sim de perceber as propriedades abstratas dos objetos através de um tipo de percepção análoga à percepção sensorial denominada intuição de essência (*Wesensschau*). Nessa intuição a intencionalidade não está direcionada aos objetos enquanto corpos materiais, mas às propriedades destes objetos e, especialmente às suas possibilidades (mudança, uso, movimento, combinação com outros objetos, etc.) (BARCO, 2013, p. 4, grifo do autor).

Um conjunto de informações geométricas, e outras mais, é o que constitui a interface de um *software* de GD, que, quando acessada, evidencia possibilidades de movimentos e de construções diversas, que podem ser expressas em uma mesma tela, à qual estamos “plugados”. Nesse ato de acessar, percebemos um conjunto de coisas – figuras, pontos, ícones, etc. – e, justamente por percebermos esse conjunto, ao assumirmos uma atitude analítica, podemos discernir semelhanças ou contiguidades. “Isso não significa apenas que sem a percepção do todo, nós não pensaríamos em observar a semelhança ou a contiguidade de seus elementos, mas, literalmente, que eles não fariam parte do mesmo mundo e elas não existiriam de forma alguma” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 39).

É estando com a totalidade de uma construção geométrica que percebemos suas propriedades mais intrínsecas. Ver essa construção, de uma perspectiva fenomenológica, é voltar-se atentamente a ela, deixá-la em suspensão, de forma que sua circunvizinhança se mantenha, mas como um fundo, ou campo de realizações já acontecidas, do qual ela pode ser destacada. No espaço cibernético em que a GD está sendo trabalhada, o fundo aqui referido, contempla todo o aparato tecnológico e suas possibilidades que potencializam o movimento. Esse fundo é dinâmico. O movimento possível com *software* faz vibrar constantemente novos tons e perspectivas junto a esse fundo, que também faz vibrar a figura que se renova ao sujeito que a movimenta ao também movimentar-se.

A interface é, portanto, a janela que nos mostra a GD, em toda sua constituição geométrica e algébrica. Essa interface é devidamente programada para abrir possibilidades de movimento, cerne da GD.

Estar intencionalmente com essa interface, habitando-a, é pôr-se em realizações cujas experiências tátil-visual-sonora-sinestésicas (sentidos próprios do corpo vivente, juntamente com o olfato e o paladar) se expõem. Merleau-Ponty, em *Fenomenologia da Percepção* (2006), afirma que toda experiência de sentidos é “integral”, não é só a que está ocorrendo num instante considerado. Parafraseando o filósofo, o quadrado que experencio agora não é este quadrado, mas todos os quadrados que já experenciei, mesmo em experiências não geométricas, e ainda as que vou experienciar no futuro.

Vamos destacar as vivências que privilegiam o tato, a visão e a sinestesia para focar o ato de *estar com* a GD. A experiência tátil, por exemplo, possibilita arrastar; a visual possibilita a visualização do objeto se modificando; a sinestésica, o mover o objeto e o mover-se. Meu corpo vivente carrega consigo as lembranças de vivências prévias que, juntamente com as vivências atuais, traçam caminhos para a ação.

Entendemos que no movimento do *mouse* e na atenção à tela, especialmente quando se realiza uma atividade, o sujeito se preocupa e se lança ao fluxo do movimento que vai se materializando na tela computacional. O que é visual se destaca. Nessa situação, a mecânica do mover o *mouse* e o próprio *mouse* vão para o fundo, escondem-se, assim como o fluxo presente no abrir de uma porta; o ranger das dobradiças esconde o girar da maçaneta e a própria maçaneta. Aqui, a experiência tátil vai escorregando para o fundo da experiência sinestésica que enlaça movimento realizado e movimento visto. Com o *mouse* e o movimento realizado no *mouse* indo para o fundo, fica a impressão de estar-se apenas com a tela, de estar-se apenas visualmente. Mas, notemos, estar no fundo não é estar ausente, o *mouse* e a experiência de mover o *mouse* são presentes no movimento expresso na tela computacional.

Em uma tarefa de mover um ponto criado e disponível na interface do *software* de GD, muitas vezes não voltamos nossos olhos ao *mouse*. Por experiências visuais anteriores, sabemos que devemos clicar em um “botão” destinado ao objetivo de selecionar e, visualmente, temos seu posicionamento. Ainda, por experiências visuais, sabemos que ações também realizadas com o *mouse* se expõem como expressões na interface do *software* de GD. As experiências táteis, por sua vez, permitem modos diferentes de tocar o *mouse*: apoiando toda a mão sobre o mesmo, clicando com o indicador ou outro dedo, realizando uma força adequada para pressionar os botões, movendo o *mouse*, etc. As sinestésicas permitem espacializar, ou seja, ocupar o espaço que abarca o movimento e sua expressão. Sinestesticamente, movimento-me enquanto movimento o *mouse*, percebo-me como realizador desse movimento e também do movimento que se evidencia na interface do *software* de GD.

Aqui, falamos desses sentidos de modo separado. No entanto, no ato de mover o *mouse*, intuindo mover o ponto expresso na tela, experiências táteis, visuais e sinestésicas se entrelaçam. Toco o *mouse* sem direcionar o olhar, mas ele já foi direcionado anteriormente na mesma ação. Posso ver sem abrir os olhos e executar tarefas, por compreender o que preciso fazer e por haver uma lembrança encarnada. Os atos de tocar e ver são abarcados por um fundo sinestésico, eles mesmos são movimentos que se dão em movimento, eles constituem experiências sinestésicas.

Merleau-Ponty (2011) aponta que o *ser* não concebe ao longo de sua vivência experiências táteis e experiências visuais, assim postas como conjuntos distintos a serem apreendidos. Diz que, mesmo sendo dissociáveis, vêm enquanto “experiência integral”, ou seja, ao conceber uma experiência tátil, junto a ela se concebe a experiência visual. O que permite dizer que é impossível o estudo de um tátil puro.

Se o comportamento é uma forma em que os “conteúdos visuais” e os “conteúdos táteis”, a sensibilidade e a motricidade só figuram a título de momentos inseparáveis, ele permanece inacessível ao pensar causal, ele só é apreensível por um outro tipo de pensamento – aquele que surpreende seu objeto no estado nascente, tal como ele aparece àquele que o vive, com a atmosfera de sentido na qual ele está então envolvido (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 170).

Os menus presentes nas interfaces dos *softwares* são percebidos visualmente, no entanto, as possibilidades de movimento e de construção de cada um dos ícones que compõem esses menus são postas por códigos de programação não visíveis na interface do *software*. No entanto, focando essas ferramentas, é possível vislumbrar possibilidades de construções e de movimentos mesmo sem ver as leis geradoras das mesmas.

Isso se dá, pois essas possibilidades se abrem ao sujeito enquanto sentidos táteis-visuais-sonoros-sinestésicos, que se fazem nesse ato de estar com o ambiente de GD. A possibilidade

de uso de cada ferramenta pode enlaçar recordações de experiências motoras, visuais e sinestésicas diversas. Com isso, o sujeito sabe em qual ícone clicar para realizar o solicitado por uma tarefa. O caráter icônico está presente, aludindo a um mundo geométrico anterior ao ambiente cibernético do *software*, mundo que é próximo e comum do programador e do sujeito que o habita.

A estada de um sujeito em um ambiente de GD expõe um horizonte de vivências que ele pode trazer ao momento presente pela lembrança, conforme o que lhe for solicitado a fazer. Para Merleau-Ponty (2011), recordar é enveredar no horizonte passado aberto pelas lembranças. A recordação é sempre recordação de algo, portanto, me recordo de algo específico, pois uma experiência presente ganhou forma e sentido que me fez recordar, e que agora fornece imediatamente ao percebido uma atmosfera e uma significação presente.

Na tarefa, por exemplo, de estudar a congruência de dois triângulos tendo como ferramenta auxiliar o *software* de GD, o sujeito precisa apenas arrastar um triângulo até sobrepô-lo ao outro para com isso perceber igualdades e/ou desigualdades. Os triângulos não são objetos em si, nem mesmo o movimento de sobrepor o é. É a presença do sujeito-movente que torna possível a manifestação de sentidos diversos de triângulo e de movimento. Nas vivências no mundo-vida, o sujeito vivencia também triângulos, movimentos e congruências, e ao trabalhar com Geometria em *softwares*, essas vivências se fazem novamente presentes, porém a seu modo, com novas configurações, e se constituem como fundo para as ações ali realizadas e para ações possíveis de serem realizadas.

As possibilidades de movimento presentes no *software* de GD se tornam possíveis, na realidade cibernética que viabiliza a compreensão do movimento, pelo ato de *imaginar o movimento* e de proceder à variação do movimento. Husserl (2006, p. 153), ao referir-se ao geômetra, diz que, na imaginação, “ele tem a liberdade inigualável de reconfigurar como quiser as figuras fictícias, de percorrer as formas possíveis em contínua modificação e, portanto, de gerar um sem-número de novas construções; uma liberdade que lhe franqueia acesso às imensidões das possibilidades eidéticas”.

No ato de imaginar o movimento de arrastar um objeto disponível na interface do *software*, não é necessário buscar sua objetivação com auxílio do *mouse*, mas apenas vislumbrar esse movimento e, posteriormente, levantar e testar conjecturas, tendo como pano de fundo o imaginado. A GD contribui para as experiências da imaginação. Elas podem constituir um campo para o pensar a respeito das geometrias trabalhadas em *softwares* de GD. Elas abrem um leque de compreensões possíveis a respeito de desenhos, construções, movimentos e pela realização do imaginado como sendo a efetivação de uma possível tarefa ou problemas ou uma

resposta a uma solicitação, viabilizam a validação ou invalidação de possibilidades sugestionadas pela imaginação.

Os desenhos [...] seguem as construções da imaginação e o pensamento eidético puro que se efetua com base nelas, e servem principalmente para fixar etapas do processo já concluído e, assim, torná-lo mais facilmente de novo presente. Também ali onde se reflete a respeito da figura, os novos processos de pensamento que se acrescentam são, em base sensível, processos imaginativos, cujos resultados fixam as novas linhas da figura (HUSSERL, 2006, p. 153).

Nesta perspectiva, imaginar o movimento já é estar realizando-o, já é estar imerso nele. Na imaginação posso realizar um movimento e vivenciar toda sua duração, antes mesmo de efetivá-lo e visualizá-lo se materializando na interface do *software*.

Podemos, em um ambiente de GD, fazer conjecturas sobre possíveis movimentos, pois em algum momento em que estivemos sensivelmente com o *software*, vivenciamos esse movimento, realizando-o e vendo-o acontecer. Movemos, damo-nos conta de que movemos, podendo pensar no próprio movimento realizado ou no movimento a ser realizado.

Os atos perceptivos e reflexivos do sujeito que se volta à interface de um *software* de GD fazem com que ela se expanda, transformando-se e transcendendo as intenções do realizador da programação. Com isso, a Geometria do *software* pode ser caracterizada como dinâmica, pois solicita sempre a ação do sujeito, daquele que atualiza o programa e, especialmente, daquele que se lança em atitudes intencionais expressas em movimentos do corpo-próprio, junto às interfaces e ao ferramental disponível no computador.

Não há GD, bem como não há Geometria, conforme compreendido por Detoni (2012) em Poincaré, se não houver o sujeito-movente. Mesmo o programador estabelecendo regras que sustentam movimentos diversos possíveis, essas serão apenas possibilidades de movimento se não houver intencionalidade de um sujeito que, em sua carnalidade, tem no o corpo-próprio o ponto zero de todo e qualquer movimento.

A janela de programa que eu movo na tela, com suas sombras, transparências e movimento tão fiel à movimentação que eu faço no mouse, é uma realidade inquestionável para mim. Difícil é entender que não passa da sobreposição de camada e camadas de sentidos transformadas na linguagem de programação e que ali estão pré-programados, operando tão bem porque outra pessoa os alinhou com esse efeito em vista (FIGUEIREDO, 2014, p. 145).

No entanto, entendemos que as interfaces são convites abertos ao mover e ao mover-se; sua programação subentende o movimento. Por haver essa abertura que se expressa em convites ao movimento, especialmente o de arrastar, entendemos que as pesquisas em torno desta Geometria a chamam de Geometria Dinâmica.

O que sustenta e faz a dinamicidade possível de uma geometria dinâmica acontecer, seja ela trabalhada em *smartphones*, *tablets* ou computador de mesa é a presença do sujeito-

movente. Essa compreensão é o fio condutor que articula nesta tese nossa afirmativa de que um estudo filosófico em GD evidencia a presença do sujeito-perceptivo, pois é ele que se movimenta e é a extensão desse movimento que ganha uma expressão na interface do *software*.

Ao *estar-com* e nesse espaço, o corpo-próprio se movimenta e as coisas nesse espaço vão ganhando novas configurações a cada movimento desse corpo. É o movimento do sujeito-perceptivo e a percepção que o mesmo tem de seu movimento se materializando na interface computacional que entendemos fazer a Geometria expressa no *software* vir a ser dinâmica.

Os movimentos do corpo-próprio são naturalmente investidos de certa significação perceptiva, eles formam, com os fenômenos exteriores, um sistema tão bem ligado que a percepção externa “leva em conta” o deslocamento dos órgãos perceptivos, encontra neles, senão a *explicitação expressa*, pelo menos o motivo das mudanças que intervieram no espetáculo, e assim pode compreendê-las imediatamente (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 78, grifo do autor).

Os objetos dispostos na interface do *software* são presenças que se manifestam enquanto *potência*, que “significa característica do que é potente, do que tem força para ser, do que traz em si as potencialidades para tornar-se” (BICUDO, 2010, p. 125). Essa potência está imbricada na presença do sujeito junto ao *software*, que, ao se movimentar, enlaça o próprio movimento, produzindo mudança.

O ato é o que atualiza a potência, abrangendo o movimento para fazer avançar o acontecer. Ele inclui uma certa operação e é entendido pela mudança. Esse movimento é importante na filosofia aristotélica, porque significa “levar a cabo, a efeito” o que existe potencialmente, enquanto existe potencialmente. Com esse movimento, o ser passa da potência de ser ao ato de ser. Assim, a mudança de um objeto é passagem de um estado de potência ou potencialidade (modo de ser potencial) a um estado de ato ou atualidade (modo de ser atual) (BICUDO, 2010, p. 125).

Com o *software* de GD, o sujeito-movente efetua movimentos. Ao responder a solicitações postas por atividades a serem realizadas e ao atualizar esses movimentos, configura-se a interface com preenchimentos distintos. A interface agora preenchida, modificada é, antes do movimento, um estado de potência de ser, de tornar-se. “A existência dá-se com a atualização do que já está em potência. Assim, o atual é o que se apresenta como realidade, ainda que em dimensões de atualizações individualizadas, isto é, em casos específicos em relação à potência” (BICUDO, 2010, p. 125).

O ato de mover os objetos na interface do *software* é o disparador da atualização. Ele transforma uma intenção de movimentar no próprio movimento. Esse ato se realiza com a materialidade disponível, no caso do mundo da computação, que se reveste de características próprias, inusitadas e “não passíveis de determinações completas, uma vez que o pluralismo e a multiplicidade possibilitados pela tela informacional são ramificados com rapidez e com

fluidez em redes que, por sua vez, também são plurais e atualizadas pelas ações dos sujeitos que as operam” (BICUDO, 2010, p. 127).

Entendemos que as operações de atualização realizadas pelo sujeito-movente se dão por comandos junto a essa materialidade disponível no mundo computacional, como, por exemplo, no teclado e no *mouse*. É no encontro entre a solicitação do movimento e a realização do movimento que a GD acontece, e é na intencionalidade de atentar-se ao que essa realização mostra na interface do *software* que ela pode ser estudada e compreendida. Essas operações de atualização respondem a solicitações de outros sujeitos que estão presentes, podendo ser: do programador que disponibiliza na interface ícones que convidam à atualização de movimentos possíveis; de sujeitos outros que estão imbricados em uma mesma tarefa; do sujeito que elaborou e disponibilizou a tarefa a ser realizada.

Portanto, entendemos que, em interfaces, há também abertura à intersubjetividade; um sujeito percebe o que ali está, é afetado de forma a querer enveredar-se pelas possibilidades que a ele se abrem, e percebe em outras pessoas, que compartilham visualmente a mesma interface à qual se lança, um modo de afetar-se que se manifesta em suas expressões: sorrisos, gestos que simulam movimentos, falas que expressam percepções.

Com isso, a interface, conforme entendemos, é um convite, que não é dado só a esse sujeito, ou a mim, ela promove um encontro entre todos nós intencionados ao que nela se presentifica. Assim, a comunicação entre pessoas se estabelece, pois intencionalidades se *encontram* nas tarefas realizadas com o *software*; nunca é apenas o reconhecimento de recursos técnicos por um usuário. Desta forma, o sujeito compreende seu movimento e/ou faz com que seu movimento seja compreendido na comunicação, ao realizá-lo, explicitando-o. Esse sujeito é no ambiente de GD com os outros; trocando informações, indicando possibilidades, dizemos sobre o movimento do outro, e escutamos, do outro, observações sobre seus movimentos.

Cada movimento junto à interface do *software* de GD define novas experiências: de focar, de desfocar, de mover, de arrastar. Essas experiências deixam um rastro sinestésico no corpo-próprio do (ou dos) sujeito (ou sujeitos) em atividade. Trata-se da sinestesia que abarca homem-computador-GD e evidencia os modos pelos quais a motricidade humana enlaça o núcleo de movimentos e de percepção e compreensão de movimentos, podendo conduzir à constituição de conhecimento geométrico que se dá no encontro entre o sujeito-movente e as coisas disponíveis na interface dos *softwares* de GD.

Ao estar com o mundo que se abre nessa interface, o sujeito vai em direção aos objetos disponíveis à percepção, percebe sua estrutura com o auxílio do movimento de seu corpo e, com isso, o objeto regula diretamente seus movimentos. “Esse diálogo do sujeito com o objeto,

essa retomada pelo sujeito do sentido esparso no objeto e pelo objeto das intenções do sujeito que é a percepção fisionômica, dispõe em torno do sujeito um mundo que lhe fala de si mesmo e instala no mundo seus próprios pensamentos” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 185).

O mundo que habitamos não se mostra disponível para mim como um mero *mundo das coisas*, “mas, em igual imediatez, como *mundo de valores*, como *mundo de bens*, como *mundo prático*. Descubro, sem maiores dificuldades, que as coisas à minha frente estão dotadas tanto de propriedades materiais como de caracteres de valor” (HUSSERL, 2006, p. 75, grifos do autor). Assim, entendemos que o mundo tecnológico, do qual destacamos os ambientes de GD, também é disponível para nós como *mundo de vivências* possíveis que nos convida a habitar o que se mostra na tela informacional, sendo isso que se mostra e a própria tela, horizontes de possibilidades aos quais visamos. Estar com a interface da GD é organizá-la, expandi-la, estudá-la, compreendê-la, ou seja, é tudo o que já fazemos no mundo-vida, é espacializar, é se mover, movendo, empreendendo projetos que “polarizam o mundo e fazem aparecer nele, como por magia, mil sinais que conduzem à ação” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 161).

Este mundo é também sociocultural e, com isso, nos deparamos com barreiras que precisam ser desconstruídas, as quais são vivenciadas mediante dificuldades sentidas com tecnologias informáticas, expondo-se também por problemas com visualização gráfica, espacial ou plana, com a percepção de dificuldade em relacionar as possibilidades do *software* com o exigido por uma tarefa, etc. Isso mostra que o mundo cibernético não é transparente, sem sombras ou sem opacidade. Mostra que nele posso encontrar prazeres ou desprazeres, paixão ou raiva, momentos agradáveis ou desagradáveis.

Habitar esse mundo sensivelmente, aprendendo a lidar com essa diversidade e opacidade, sempre buscando aclará-la, é um modo de buscar compreensões que podem se mostrar na constituição do conhecimento que é fruto da vivência com o *software*. Estudando Husserl e Merleau-Ponty e trazendo suas ideias para melhor compreender o ambiente de GD, entendemos que esse espaço cibernético e tudo que o constitui podem ser para mim um “*horizonte de realidade indeterminada, de que se tem obscuramente consciência*. Com resultados variáveis, posso lançar sobre ele o olhar clarificador da atenção. Presentificações determinadas, primeiro obscuras, mas que vão se verificando, fazendo com que algo surja para mim” (HUSSERL, 2006, p. 74, grifo do autor).

Estando atentos a essa opacidade que envolve o mundo tecnológico é que propomos a investigação que busca compreender *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica*.

2.4 O ato de arrastar e sua extensão que possibilita articular variantes e invariantes percebidos em interfaces de *softwares* de Geometria Dinâmica

A GD, que se expõe em ambientes cibernéticos e que pode ser acessado via computadores ou equipamentos com funcionalidade similar, se caracteriza por seu potencial dinâmico, que permite que objetos geométricos dispostos em interfaces computacionais possam ser movidos. Esse movimento é realizado por um sujeito com o auxílio do *mouse*, ou outras ferramentas que possibilitam trabalhar com as atuais telas *touchscreen*. Por exemplo, o *software* de GD Geogebra possui a opção “Mover”, que, uma vez selecionada, após clicar sobre um determinado objeto disposto na interface, é possível arrastá-lo com a precisão motora desejada.

O ato de arrastar realizado por um sujeito em ambientes de GD é sempre um arrastar para..., mesmo que esse movimento, aos olhos de alguém que olha a atividade realizada por esse sujeito, pareça sem sentido, sem objetividade ou meta. Borba e Penteadó (2010, p. 64) afirmam que as atividades mediadas por *softwares*, “além de naturalmente trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação”. Nessa perspectiva, o aluno, ao explorar, percebe visualmente as implicações de seus atos e, com isso, ele é ativo na constituição dos conhecimentos apreendidos ao estar explorando.

Compreendemos em pesquisas como as de Pinheiro (2013), Alqahtani e Powell (2016), dentre outras, a ênfase em atividades que valorizam as construções geométricas, o arrastar dessas construções e a visualização de invariantes junto às figuras movidas. O *software* de GD permite aos alunos construir uma figura geométrica partindo de suas propriedades e características fundamentais.

Com esses autores, entendemos que em GD uma construção carrega o caráter dinâmico, ou seja, ela pode ser movida. Nessa perspectiva, trabalha-se com atividades que conduzem à percepção de invariantes, entendidas na literatura matemática como *constantes*, ou *invariável*, como por exemplo, propriedades pré-estabelecidas na construção da figura geométrica. Nessas atividades a figura é posta previamente e o todo é dado, para que suas partes sejam visualizadas junto ao ato de movimentar. No movimento, a figura preserva as propriedades estabelecidas na construção e, segundo essas pesquisas, é a aprendizagem por meio da visualização dessas propriedades invariantes um dos principais objetivos das atividades trabalhadas em GD.

Entendemos que os invariantes geométricos, como explicitados no parágrafo anterior, são correlatos de uma atualização realizada pelo sujeito junto ao *software*. É o sujeito-movente

que atualiza isto que está disponível na interface de *softwares* de GD como potencialmente dinâmico. O sujeito empreende seu corpo inteiro nesse movimento de atualização. Podemos ver a atualização materializar-se quando focamos o movimento de suas mãos, seja movendo um *mouse* ou tocando diretamente a tela computacional com as extremidades de seus dedos.

Essa segunda possibilidade vem sendo trabalhada por pesquisadores como Arzarello *et al.* (2002) e Bairral *et al.* (2013), que buscam compreender como o trabalho com recursos *touchscreen* pode contribuir com o ensino e com a aprendizagem de Matemática. Bairral *et al.* (2015, p.2) assumem “a manipulação *touchscreen* como sendo uma expressão gestual advinda da ação humana, consciente, simulada e contextualmente situada”.

Focamos nesta pesquisa o movimento e a percepção do movimento, o que nos leva a estudar os modos de expressão, dentre os quais os gestos que se expõem em interfaces computacionais. Com isso, entendemos que o trabalho com dispositivos *touchscreen* como os *smartphones* e *tablets* poderia ser um modo de realizar nossa pesquisa. Uma característica relevante desse trabalho, que é apontado por Ladel e Kortekamp (2012) é a possibilidade de ver em um mesmo campo de visão a interface do *software* e a mão que a toca. Com isso, o movimento das mãos e as implicações desse movimento são vistos em um mesmo plano na imediaticidade da realização do ato de mover. Isso, em nosso entendimento, pode melhorar a coordenação motora, uma vez que com essa visualização, pode-se trabalhar o ajuste do movimento do objeto na interface ajustando o modo de realizar o movimento com as mãos.

No entanto, entendemos que o trabalho com computadores, cujo movimento realizado se dá com auxílio do *mouse*, também pode dar-nos compreensões sobre o movimento e percepção do movimento. Da perspectiva aqui trabalhada, a fenomenológica, compreendemos que quando movemos o *mouse*, há o *mouse visto*, há dados visuais do *mouse* e de experiências motoras com o *mouse* que nos permitem movê-lo compreendendo e controlando o movimento sem olhar para ele. Assim, entendemos que podemos ver o movimento materializando-se na tela computacional no mesmo tempo e espaço em que estamos em uma experiência tátil-visual-sonora com o *mouse*. Desta forma, mesmo estando com meus olhos voltados apenas à tela, mesmo que o mouse não esteja em meu campo de visão, no agora do ato de mover e ver o movimento realizado estou tátil-visualmente com o mouse e com a tela computacional.

Se o *mouse* for compreendido como um utensílio, mesmo quando estiver na mão de um sujeito que o move, estar-se-á arbitrando uma “distância” entre esse sujeito (o “usuário”) e a tela onde o movimento realizado por ele junto ao *mouse* se expressa. No entanto, munir-se de uma ferramenta, em nossa compreensão, não quer dizer se apossar de algo complementar e exterior; Merleau-Ponty nos mostra, em sua *Fenomenologia da Percepção*, como o cego e sua

bengala formam uma só corporeidade, num todo perceptivo indiviso. Analogamente, entendemos que o cego sente o chão, podendo vê-lo e tocá-lo com a ponta de sua bengala, assim como um sujeito pode tocar diretamente a tela computacional quando está com um *mouse*. Quando entendemos o *mouse* como extensão de nosso corpo, que nos leva à interface, entendemos que não há mais uma distância entre sujeito-movente e tela.

Selecionar com o *mouse* um ponto em um *software* de GD e movê-lo é um modo de mover distinto do realizado em dispositivos com manipulação *touchscreen*, mas, em ambos os casos, entendemos que há o contato direto com a tela computacional intencionalmente visada e com o ponto movido. O termo *manipulação direta*, focado da perspectiva da computação, é correlato específico da dinamicidade *touchscreen*. Mas, da perspectiva filosófica que aqui assumimos, ele pode ser creditado também à dinamicidade da interface *mouse-teclado-tela computacional*³³. Em ambos os casos, é a intencionalidade motora que faz constituir-se o movimento e é a precisão motora do corpo, da mão, dos dedos, que controla o movimento.

Queremos com isso evidenciar a relevância e o potencial do trabalho em sala de aula com dispositivos com manipulação *touchscreen*, bem como evidenciar nossa compreensão de que os movimentos realizados e percebidos poderiam ser estudados e compreendidos nesta pesquisa se focados da perspectiva tecnológica da dinamicidade proposta nesses dispositivos. No entanto, entendemos que mesmo de modos distintos, movimento e percepção de movimento podem ser estudados e compreendidos quando investigados trabalhos em ambientes de GD programados no computador em que sujeitos realizam movimentos com o *mouse*, pois como já enfatizamos, o *mouse* em nossas mãos também é corpo, e nosso movimento com ele também é corporal. É com esse entendimento que avançamos em nossa pesquisa propondo um trabalho em ambientes de GD cuja interface abarca o teclado, o *mouse* e a tela computacional.

Alves e Soares (2003, p.278) destacam, dentre os recursos “interessantes e essenciais” dos *softwares* de GD, o “arrastar”. Quando uma figura é construída na interface do *software*, esse arrastar promove ampliação da mesma, e em cada parada do movimento, tem-se figuras semelhantes à inicial. Assim, as propriedades preestabelecidas na construção da figura se preservam. Nesse contexto, a ideia de movimento é inseparável da ideia de invariantes

³³ Entendemos a interface como a unidade constituída por “camadas” físicas e lógicas. No caso da interface computacional, por exemplo, tem-se o *mouse*, o teclado, a tela e a lógica funcional que os enlaça, que faz com que ações junto ao *mouse* e ao teclado materializem mudanças na tela ao mesmo tempo que o que se mostra nela modifica e direciona as ações junto ao *mouse* e ao teclado. No entanto, para que não tenhamos que dizer isso a todo momento que surgirem neste texto as palavras interface, teclado, *mouse* e tela, optamos por separar, por dizer de interfaces físicas (*mouse*, teclado, tela) e interfaces lógicas (o que se mostra na tela computacional, o que foi programado). Por exemplo, quando dizemos da interface de *softwares* de GD, objetivamos evidenciar o que se mostra na tela do computador quando esses *softwares* são acessados.

isométricos; o que não varia só se mostra quando a construção está em um movimento que intencionamos realizar. A variação do objeto nos mostra seus invariantes e, “o desenho em movimento torna-se revelador dos invariantes que são decorrências implícitas da construção feita” (SOUZA; GRAVINA, 2009, p. 04).

Esse ato de arrastar que nos dá invariantes e também variantes pode ser coordenado; o sujeito realiza movimentos atendendo às solicitações que ele mesmo coloca em suspensão. Trata-se, por um lado, de movimentos precisos, cautelosos, que podem doar à percepção alguma informação. O movimento desarticulado, acelerado, também caracteriza uma coordenação do movimento que pode, em muitos casos, validar uma intuição e ir ao encontro do compreendido no ato da percepção inicial de possíveis invariantes. Na ação de arrastar um objeto geométrico na interface do *software* de GD, o corpo-próprio se coordena e coordena seu movimento com a tecnologia informática envolvida. Borba e Penteadó (2010, p. 62) afirmam que a coordenação de movimentos é “ao mesmo tempo, difícil, possível e relevante. Essa coordenação permite aos alunos verem o gráfico não como um desenho do movimento, mas como uma perspectiva que fragmenta esse movimento e destaca um aspecto do mesmo”.

Entendemos que o desenho não é representação do movimento, mas uma expressão do mesmo que evidencia a intencionalidade de quem o realiza. O termo *representação*, de acordo com o Dicio – Dicionário Online de Português, diz da “imagem ou ideia que traduz nossa concepção de alguma coisa ou do mundo”. No caso do movimento do corpo-próprio, ele é presente, atual e atualizante, portanto ele mostra, expressa e, na expressão, traz indícios da imagem ou da ideia que foi se constituindo para o sujeito.

O *desenho-em-movimento* que se presentifica na interface sustentada pelo programa do *software* de GD pode ser visto, da perspectiva fenomenológica, como manifestação da intencionalidade do sujeito de se movimentar, movimentando. Segundo Husserl (2006), se essa intencionalidade estiver direcionada para a espacialidade dos objetos que se mostram ao sujeito como fenômeno, bem como as qualidades que nesse olhar se mostram, então, no estar voltado ao que se busca, podem se atualizar atos imaginativos que articulam o invariante na variação percebida nas perspectivas das quais o fenômeno é visto pelo sujeito-perceptivo que percebe na evidência, em um ato de intuição essencial, o invariante, o constante, que se mantém mediante a abstração de todos os predicados possíveis. *Nesse movimento vai-se constituindo uma idealidade objetivada da objetualidade matemática na e pela linguagem, mediante a expressão do compreendido como eidética essencial, como o que se mantém como nuclear da ideia articulada, expressão essa compartilhada na intersubjetividade entre os cossujeitos que compreendem o expresso e dele se valem, avançando em compreensões que o complementam,*

*modificam, aperfeiçoam etc. A constituição das idealidades dos objetos matemáticos vai se materializando na repetição de compreensões expressas pelos sujeitos (de uma mesma época, cultura, sociedade ou não) e práticas bem sucedidas.*³⁴

Um objeto individual “possui sua *especificidade*, ele é composto de *predicáveis* essenciais que têm de lhe ser atribuídos (enquanto ele é como é em si mesmo), a fim de que outras determinações secundárias, relativas, lhe possam ser atribuídas” (HUSSERL, 2006, p. 35). Para Husserl, a essência de um fenômeno interrogado, que é o “invariante do percebido, sujeito a reduções e materializado pela linguagem, portanto histórica e culturalmente presente no mundo-vida” (BICUDO; KLUTH, 2010, p. 20) é compreendida pela chamada *técnica de variação imaginativa*. Na imaginação, “somente poderá variar enquanto variação *daquilo* que se intenciona em um *cogito* atual, na medida em que necessariamente tais variações compartilham algo de ‘invariante’, coincidindo em relação ao caráter necessário do que é intencionado” (TOURINHO, 2012, p. 861, grifos do autor).

É na variação do objeto que sua essência se mostra. Ao vê-lo, e vê-lo de diferentes modos: pela percepção, pela intuição, pela imaginação, posso ver muitas coisas e posso ver muitas vezes *as mesmas coisas*, e outras pessoas podem ver essas *mesmas coisas*. O núcleo invariante, isto é, o que se preserva na coisa pensada, mesmo após submetida a todas as variações que realizo em minha imaginação é o que entendemos, em Husserl (2006, p.35), ser sua essência, o que designa, antes de mais nada, “aquilo que se encontra no ser próprio de um indivíduo como o que ele é”.

No sentido fenomenológico, essa essência não é preposta ou pressuposta, logo não é atingida. Ela não é um ideal platônico, assim como posto na filosofia de Platão. Ela é constituída em um movimento em que sentidos se fazem ao sujeito que intencionalmente está com a coisa, ora a experienciando sensivelmente, ora refletindo sobre o que ela lhe doa à percepção.

Com o dito sobre variação e invariantes em Husserl (2006) podemos discutir a intencionalidade de *estar com* a GD, com objetos geométricos, buscando compreendê-los na sinestesia que sustenta o movimento, a variação, a mudança, tornando possível a evidência de invariantes que dizem da constituição dos mesmos.

O movimento realizado em um desenho disponível na interface de um *software* de GD, “fornece a impressão de que o desenho está sendo deformado continuamente em todo processo de arrastar, enquanto mantém as relações que foram especificadas como essenciais da construção original” (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1069).

³⁴ Explicação da Prof.^a Dr.^a Maria A.V. Bicudo em sessão de orientação em 12-12-2017.

A possibilidade de arrastar torna possível o *deslocamento* de objetos presentes na tela do computador. Em se tratando de uma experiência humana *com* o computador, e buscando compreensões em Merleau-Ponty (2011), entendemos que no deslocamento de um objeto geométrico no ambiente de GD o corpo-próprio está presente em movimentos intencionais. Ele move os objetos geométricos presentes na tela do computador e percebe, assim, o movimento dos objetos acionado por seu ato de mover-se em direção ao intencionado, sempre visando algo.

As ações possíveis junto ao *software* e à GD “supõem que o aprendiz pode assumir o controle das representações e construções executadas, pois é ele quem executa cada uma das etapas de uma determinada construção geométrica” (RICHIT, 2005, p. 45). Nesse espaço, um universo de possibilidades que se abre junto ao ato de “arrastar” permite que o usuário refine suas crenças e convicções, “faça conjecturas e caminhe no sentido de realizar provas de resultados geométricos, unindo os aspectos intuitivo e lógico, fundamentais para a aprendizagem da geometria” (ALVES; SOARES, 2003, p. 285).

Assim, a percepção do que se mostra se dá no ato perceptivo de ir à GD sensivelmente realizando movimentos, selecionando e arrastando figuras. Nessa realização vai-se mostrando sentidos e significados, que na duração do movimento e do pensar sobre o movimento vão se ampliando e se entrelaçando. É a atatividade que nos permite destacar desse emaranhado que vai se constituindo no entrelaçamento de sentidos e significados aquilo que se mostra significativo, podendo ser propriedades e/ou relações possíveis.

Por exemplo, quando movo o vértice de um quadrado construído no *software* de GD, percebo que as medidas de seus lados se preservam sempre iguais umas com as outras, assim como seus ângulos internos se mantêm 90° . Com isso, estar atento ao movimento e às configurações que o mesmo vai mostrando faz-me perceber que o quadrilátero, *já* intuído, mas não confirmado, trata-se de um quadrado que, junto ao movimento, foi-se mostrando quadrado. A legitimação é realizada pelo sujeito ao estar atento, enlaçamos as formas da figura em movimento e a expressão de uma infinidade de *figuras-semelhantes-em-movimento* que carregam as características de um quadrado.

2.4.1 Variantes, invariantes e inconformidades em ambientes de Geometria Dinâmica

Com autores que pesquisam sobre GD, dentre os quais Bairral *et al.* (2015), Powell e Alqahtani (2015), Silva e Penteado (2009) e Souza e Gravina (2009), e com o que viemos explicitando sobre o sujeito que atualiza o dinamismo da GD, fomos compreendendo e

articulando aspectos que se mostram invariantes e que nós os entendemos como estruturantes da GD:

- a) *seu dinamismo que se dá por programação computacional, que possibilita que objetos nela construídos possam ser movidos;*
- b) *a possibilidade que abre à atualização de seu dinamismo, que é realizada por um sujeito;*
- c) *seu aspecto visual que mostra os variantes e invariantes, que se expõem quando realizados movimentos em uma figura ou em objetos pertencentes à mesma.*

O estruturante (b), além de dizer do ato que faz o dinamismo da GD acontecer, diz de um modo de validar conjecturas sobre uma figura projetada na interface do *software*. Os três estruturantes nos levam a questionar e a estudar a figura que agora vemos nessa interface. A possibilidade que se abre em (a) nos faz questionar: Será ela a Figura G? Podemos fazer conjecturas sobre a indagação e dizer intuitivamente, por exemplo, é sim, é a Figura G! Com o que abre o item (b) nos pomos em ação, movemos essa figura, atualizamos o dinamismo evidenciado no item (a). O que emerge de (a) e (b) são configurações em movimento, que podem nos dar visualmente variantes e/ou invariantes (referente ao item (c)).

A configuração do movimento que distorce a figura, não preservando assim invariantes, nos dá outras figuras, com características e propriedades distintas da Figura G intuída. No entanto, pode haver uma configuração de movimento que preserve propriedades tais quais as da figura que a princípio intuí. Propriedades essas, dadas como invariantes, que, uma vez percebidos junto ao movimento, abrem a possibilidade de afirmar que o projetado é a Figura G, ou é uma figura semelhante à mesma, uma G' , G'' .

Podemos olhar para a GD e apontar especificidades, características que a constituem. No entanto, quando há um sujeito frente a ela, agindo no ambiente em que ela se expõe, todas essas características se entrelaçam, constituindo assim a unidade que abarca o movimento realizado, o movimento percebido e o sujeito que realiza o movimento. Portanto, (a), (b) e (c) não estão separados no *agora* da realização de um ato. Como já citamos, em Ales Bello e Mangarano (2012), todo movimento gera mudança. O *software* abre a possibilidade do movimento, uma tarefa solicita o movimento e o sujeito atualiza a solicitação e a possibilidade. Ao atualizar, o que estava diante de seus olhos muda, ganha novas configurações.

Em GD, o movimento que leva a figura de um lugar da interface do *software* para outro pode preservar as características e propriedades que a constitui ou pode provocar deformações, inconformidades que descaracterizam a figura que está dada anteriormente ao movimento. O que vai determinar a deformação ou preservação das características de uma figura é o

movimento realizado pelo sujeito-movente e o modo pelo qual ela foi projetada na interface do *software*. Esse movimento vai evidenciar se essa figura assume na interface apenas caráter *ilustrativo* ou se além disso, ela é projetada de modo a evidenciar uma *construção geométrica*.

Assim como na lousa, uma figura projetada na interface do *software* pode assumir caráter ilustrativo ou pode ser construída seguindo suas propriedades constituintes. Uma *construção* realizada em GD fixa as propriedades da figura de modo que um movimento realizado provoca nela mudanças, mas, ao mesmo tempo, um grupo de invariantes predefinidos na construção se preserva. Se construo um retângulo, um movimento realizado nele pode variar suas dimensões, mostrando com isso retângulos outros, podendo ser um deles, um quadrado. No entanto, esse grupo de invariantes, faz com que não se possa ter após realização do movimento, um triângulo, um pentágono, por exemplo.

Já na figura desenhada com objetivo de *ilustrar*, sem a preocupação com o entrelaçamento de propriedades que constituem a figura a qual se busca ilustrar, um movimento realizado pode distorcer essa figura tornando-a outras figuras com características que não correspondem àquela figura inicial, que se pretendeu mostrar via ilustração. Com isso, mesmo em ambientes de GD, nos deparamos com a diferença entre desenhar e construir.

Nesta direção, Powell e Alqahtani (2015) ponderam sobre a GD, explicitando um discurso acerca da possibilidade de construção de figuras geométricas em harmonia com as propriedades pelas quais são construídas, indo ao encontro dos discursos presentes em uma diversidade de artigos sobre esse tema. Afirmam que o dinamismo que se abre junto às possibilidades dinâmicas dos *softwares* de GD possibilita mover figuras e objetos pertencentes às mesmas (pontos, segmentos, retas, etc.), de forma que uma multiplicidade de construções semelhantes seja visualizada. Semelhança que é possível detectar justamente pelas propriedades preestabelecidas no ato de construir que, segundo Souza e Gravina (2009), permite associar a um objeto ou propriedade, uma coleção de “desenhos em movimento”.

Com isso, podemos retomar a estrutura da GD que evidenciamos no início deste tópico. Uma figura projetada na interface do *software*, quando visada, se mostra da perspectiva do potencial dinâmico da GD, que abre a possibilidade ao sujeito de mover essa figura e de atualizar essa possibilidade ao pôr-se em movimento, movendo-a e atentando-se ao que visualmente emerge desse movimento: variação com ou sem invariantes. Compreendemos que essa estrutura permite ao sujeito definir se a figura vista na interface e que se intui ser um retângulo, é ou não é um retângulo, pois em GD, essa confirmação se dá pelo movimento realizado e com a visualização do que emerge dele. Isso ocorre, pois se o projetado na interface

do *software* não foi eu quem realizei, não há como antes do movimento saber ao certo se tenho uma figura desenhada ou se tenho uma figura construída.

Nesta mesma perspectiva, vamos pensar sobre o exemplo da Figura 1, que segue:

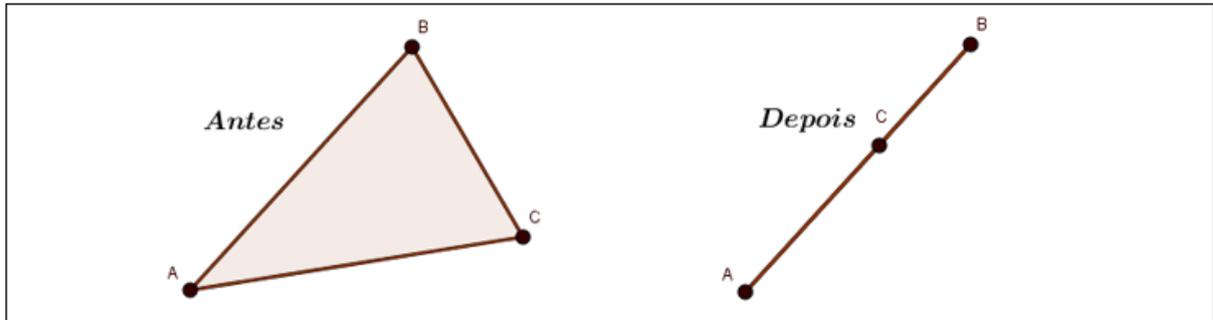


Figura 1: Figura que ilustra um triângulo na interface do software

Fonte: O autor.

Compreendemos que em GD nunca temos *a priori* a “figura mesma”. Podemos ter uma figura rígida, mas, se não a projetamos, antes de movê-la, o conhecimento de sua rigidez não nos pertence de antemão. O movimento realizado em uma figura não rígida pode nos dar outras figuras, distintas daquela que inicialmente visualizamos na interface do *software*. Podemos ter ao fim desse movimento uma figura semelhante à primeira, ou, mediante deformação, ter outro tipo de figura. Ao nos voltarmos à interface do *software* de GD e depararmos-nos com a figura “Antes”, de imediato podemos intuir o triângulo, pois ela apresenta a forma de um triângulo. Porém, como nesse texto já evidenciamos, o *software* é para nós potencialmente dinâmico, as figuras são potencialmente móveis, disso, avançamos e tecemos que a figura acima expressa, antes do movimento, é potencialmente triângulo, por estar ela projetada no ambiente de GD.

É o movimento desta figura que a coloca em um fluxo de poder vir a ser.

No entanto, como podemos perceber no “Depois”, o que inicialmente se mostrava triângulo tornou-se após um movimento realizado três segmentos colineares (AB, BC e AC). Com isso, há uma *inconformidade* passível de ser visualizada na GD, pois nela, o triângulo percebido se mostrará se após o ato de mover, ele se expor sempre como *triângulo-em-movimento*. Em GD as conformidades e inconformidades são materializadas e podem ser percebidas na imediaticidade do ato de mover o *mouse*.

Entendemos que a GD é abertura para um modo pelo qual podemos nos abrir à compreensão da estrutura de objetos matemáticos. Tomando como exemplo o quadrado, podemos perguntar: qual o estruturante do quadrado? Sabemos que é o que o constitui quadrado, suas características que se mostram sempre, que se preservam, mesmo havendo variações no modo de experienciá-lo, mesmo vivenciando experiências com uma diversidade de quadrados. O ambiente de GD é propício para essa compreensão. Nele, o sujeito move o

vértice de um quadrado (construído para ser sempre quadrado) provocando ampliação ou redução na medida de seus lados, constituindo uma variedade de quadrados outros. Esse ato, visando ao questionamento sobre o estruturante de quadrado, traz à percepção do sujeito os invariantes que se mostram no/com o movimento: quatro lados, sendo eles iguais entre si, e quatro ângulos internos de amplitude 90° . Esses invariantes são essenciais para a compreensão do fenômeno interrogado, a estrutura do quadrado.

O estruturante de uma figura geométrica, entendemos não se constituir pela quantidade de invariantes que se mostram quando a experiência do movimento anima essa figura. Ele é a unidade que abarca todos os invariantes em uma síntese de preenchimento de sentidos que se entrelaçam. É a percepção do entrelaçamento dos invariantes que pode nos dar a estrutura da figura. Nessa percepção, não dizemos separadamente de um ou outro invariante, mas desta estrutura que se mostra e que é ela mesma invariante.

O que acontece se tomarmos o triângulo por seu invariante *sempre três segmentos*? E se o tomarmos pelo invariante *sempre três vértices*, ou *sempre três ângulos*? Algumas possibilidades apresentamos na Figura 2, que segue.

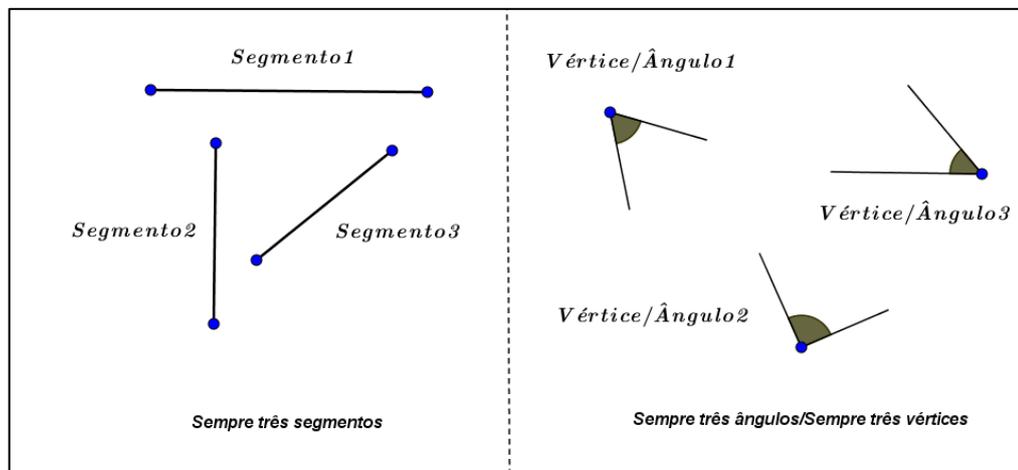


Figura 2: Exemplos de invariantes de um triângulo pensados separadamente

Fonte: O autor

Vê-se na Figura 2, que os invariantes tomados separadamente não constituem um *triângulo*. Essa constituição se realiza quando os *sempre três segmentos* são tomados como lados que, unidos dois a dois por suas extremidades, apresentam os *sempre três vértices* e os *sempre três ângulos*. Cada invariante se constitui junto a outros, de modo que, em suas constituições, fazem emergir a estrutura do triângulo e o próprio triângulo.

Nesta perspectiva, cada invariante tem sua função no conjunto que constitui o fenômeno. Por exemplo, “o raio de um círculo não se restringe à função de um segmento de reta. É um elemento que se constitui como raio ao constituir o círculo. O mesmo pode-se dizer

da curvatura que se constitui como círculo ao constituir o raio” (BICUDO; KLUTH, 2010, p. 140). Entendemos que *raio* e *curvatura* são invariantes na constituição do círculo, no entanto, se tomarmos cada um deles em separado, o raio como segmento e a curvatura como curva, não poderíamos afirmar com exatidão que o objeto ao qual nos referimos é o círculo. É ao perceber o raio e a curvatura como invariantes inseparáveis que percebemos, também, a essência do círculo, o que é essencial no *ser círculo*.

Em GD, a estrutura *sempre três segmentos – sempre três vértices – sempre três ângulos* deve manter-se invariante após a realização, por parte do sujeito, de movimentos diversos junto ao *mouse*, para que o objeto movido seja definível como triângulo. Destacamos abaixo duas situações em que figuras com potencialidade de ser triângulo são movidas. Vale lembrar que neste texto já expressamos nossa compreensão de que, em GD, uma figura projetada na interface do *software* tem o potencial de ser a figura que agora intuo ao vê-la, no entanto, essa intuição valida-se, ou não, quando nessa figura se realiza movimentos diversos; a legitimação da figura é realizada pelo sujeito em atos de atualização.

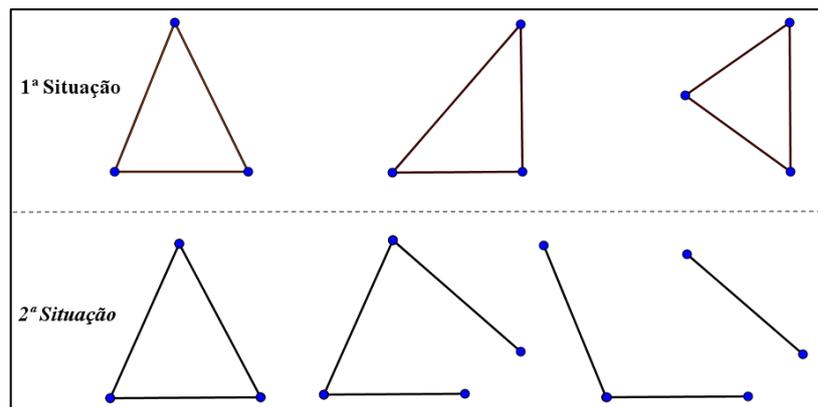


Figura 3: Desenho de um triângulo sendo movido a partir dos aparentes vértices
Fonte: O autor.

Vê-se, na Figura 3, que na primeira situação a estrutura *sempre três segmentos – sempre três vértices – sempre três ângulos* não varia. Já na segunda situação, não há essa preservação, o que nos dá no movimento, figuras outras, que deixam de ser um triângulo. Portanto, em GD, a figura da segunda situação, por mais que pareça ser triângulo antes do movimento, não o é, pois no movimento de seus aparentes vértices, o aparente triângulo se desfaz. Nela, da estrutura acima mencionada, só se preserva o *sempre três segmentos*. Com isso, reafirmamos que não basta um invariante isolado para dizer o *que é*, ele deve ser compreendido na unidade harmônica que enlaça todos os invariantes que se constituem e que constituem o objeto geométrico intencionado. Essa unidade é construída. O que gera a deformação na segunda situação é o desenho de caráter *ilustrativo* do triângulo, que traz elementos de um triângulo (pontos e

segmentos), porém, sem que estes estejam amarrados ao conceito de triângulo, ou seja, sem se *construir* o triângulo.

Entendemos que essa compreensão não se daria sem as possibilidades dinâmicas dos *softwares* de GD e sem a realização por parte de um sujeito de experiências visando *dirigir-se ao mundo do dinamismo da GD*. Esse dirigir-se pode proporcionar um conhecer mais articulado acerca dos conceitos geométricos, que permita compreendê-los, aproximando-os, distinguindo-os, visto que o fundo dinâmico possibilita novas formas de ver e conceituar entes geométricos. Na dinamicidade da atividade assistida pelo *software*, os “objetos” geométricos renovam-se em sua indeterminação, e sua pretendida determinação se vê aberta em ações do realizador de atividades de conhecimento. Assim, por exemplo, um círculo pode ser percebido também como “um único ponto flutuante que perpetua um movimento circular”, e não apenas como um conjunto de infinitos pontos equidistantes a um único ponto, chamado de centro, conforme destacam os livros e manuais.

O que vai dizer da compreensão das possibilidades geométricas no ambiente da GD, dentre outras coisas, são os modos pelos quais o sujeito que o habita é afetado. Esses modos podem abrir horizontes para a constituição de uma Geometria transcendente a tarefas mais diretas, que traz novas concepções e possibilidades de um fazer geométrico. Esse “salto” que estabelece diferentes concepções se dá pela presença do corpo-próprio, que torna imprevisível qualquer movimento de habitar esse ambiente, bem como qualquer compreensão que emerge desse movimento.

As definições de “elipse”, “circunferência”, “parábola”, “hipérbole”, bem como os gráficos que representam as mesmas, ganharam outras expressões, que as compreendem a partir do movimento de um ponto que flutua em uma região não evidenciada. Chegamos a isso, ao lançar luz às expressões que evidenciam o movimento do ponto no espaço em branco, como sendo especificamente representações destes lugares geométricos (PINHEIRO, 2013, p. 165).

Isso nos leva ao movimento de um pensar que vai constituindo a compreensão de que, em GD, em ambientes tecnológicos, o pensamento geométrico, estando junto à percepção de movimento, pode ser distinto do pensamento geométrico que se estabelece sem evidenciar deslocamentos, às vezes tomando-os tacitamente como já realizados, como é uma característica de uma educação geométrica mais usual em nossas escolas. A percepção do movimento estabelecido pelo tocar (clicar) e arrastar, junto à expressão desse movimento na interface do *software* abre horizontes de compreensão do que vai se mostrando nesse mundo cibernético. Caminhamos com isso, compreendendo que a imprevisibilidade do que se mostra junto ao movimento possibilita horizontes para o novo.

Se entendermos que o conhecimento geométrico é apenas aquele já produzido pelo geômetra, pelo matemático, nossa ideia de habitarmos o ambiente de GD pode ficar em segundo plano, pois *o novo* que ações com o *software* permitem pode se diluir em conceitos e esquemas conhecidos. O *software* trabalha com propriedades geométricas, com axiomas e, ao se trabalhar com eles, a produção poderá estar limitada aos modos de geometrizar já conhecidos, mesmo que esse trabalho tenha como fundo o dinamismo do *software*.

Sabemos que a GD é uma construção computacional cuja programação buscou encaixar geometrias já conhecidas, em especial a Geometria Plana, a Espacial e a Analítica. Isso nos leva a questionar: o que se discute é a Geometria Dinâmica, como um novo modo de geometrizar, ou ela como um modo de se trabalhar geometrias já existentes? O que fazemos neste tópico traz possibilidades outras às geometrias aqui mencionadas, ou indica modos distintos de trabalhar geometricamente em espaços distintos nos quais se expõem essas Geometrias?

Essas questões foram ganhando forma em nosso pensamento e texto. Consideramo-las importantes. Elas tangenciam nosso foco de pesquisa, solicitam um aprofundamento reflexivo e teórico, respondê-las agora, não nos daria as compreensões que essa pesquisa busca. Com isso, deixamo-las aqui em aberto.

Mas, conjecturando, entendemos que o pensamento geométrico que se estabelece em espaços não computacionais, quando situado na computação, ganhou novos componentes, nova estética, oportunidades outras de produção de mudança, de construção e de movimento, o que produz novos modos de espacializar e de pensar geometricamente.

A Geometria Dinâmica possibilita percepções, compreensões, modos de perceber e de compreender que são correlatos dos trabalhos com *softwares*. No entanto é preciso avançar em um estudo que possibilite compreender como se dá esse trabalho, como as percepções se evidenciam na vivência de movimentos realizados mediante solicitações de tarefas e como o conhecimento vai se constituindo quando se está com sujeitos realizando essas tarefas.

Por isso fomos à campo, impulsionados pela interrogação: *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica?* Campo esse que descrevemos na seção que segue.

TERCEIRA SEÇÃO

O CUIDADO COM O AMBIENTE DA PESQUISA

É igualmente claro que os homens só podem ser apreendidos como encontrando (na realidade ou em potência) outros homens em torno de si. A própria natureza infinita e ilimitada torna-se então uma natureza que abarca uma multiplicidade ilimitada de homens, distribuídos não se sabe como no espaço infinito, como sujeitos de uma intercomunhão possível.

Por Edmund Husserl (2001, p. 165)

Vimos até então tecendo compreensões sobre o corpo-próprio que se movimenta produzindo mudança, e que atualiza a programação do *software*. Tal atualização é realizada em atos do sujeito-perceptivo junto às interfaces físicas (*mouse* e teclado, por exemplo) que sustentam e animam o movimento expresso na tela informacional do *software* de GD.

Nesse horizonte de compreensões que dizem da realização e da atualização do movimento junto a *softwares* de GD, entendemos ser preciso investigar o *como se dá* a percepção dessa atualização. Para isso, pomo-nos a investigar situações em que sujeitos de pesquisa se põem nesse movimento e pedir que os mesmos relatem como o percebem e como se percebem sendo eles seus realizadores.

Para tanto, desenvolvemos uma pesquisa de campo com sujeitos que, após trabalharem em/com um ambiente de GD, relataram as experiências vivenciadas. Explicitamos, nesta seção, como se deu a realização desta pesquisa; apresentamos os sujeitos significativos, o conteúdo matemático e o *software* com o qual foi trabalhado, bem como o modo como estivemos com os sujeitos em campo de pesquisa. Ainda, expomos como se deu os registros das experiências vivenciadas, dentre eles a transcrição, sobre a qual evidenciamos sua complexidade mediante diversidade de modos de linguagens que se mostraram em campo.

3.1 Os sujeitos significativos, a constituição do campo para a realização das atividades e a transcrição dos relatos expressos pelos sujeitos sobre experiências por eles vivenciadas

Investigar *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica* solicita um estudo da vivência em que as compreensões do pesquisador se constituam no movimento de atribuição de significados e sentidos que se fazem ao focar o fenômeno investigado, estando

junto aos sujeitos de pesquisa na situação que os abarca. Assim, fez-se significativo realizarmos um estudo de campo para que as percepções, além de serem realizadas, pudessem ser expressas.

De início, propusemos aos sujeitos um desenvolvimento junto ao *software* de GD Geogebra, pois entendemos que, sobre o mesmo, poderíamos lançar um olhar filosófico, destacando o *movimento realizado por um sujeito-movente* sobre o potencial dinâmico que ele apresenta em sua programação.

Para a pesquisa de campo, perguntamo-nos qual conteúdo geométrico expresso nos livros didáticos poderia melhor se entrelaçar à nossa intenção de estudar o movimento do corpo-próprio. Compreendendo que a ciência Geometria pode abranger o fazer humano, o movimento, a espacialização de um sujeito que se põe em movimento, conseguimos destacar um conteúdo que entendemos ser significativo ao nosso intento: as *Transformações Geométricas*. Esse conteúdo contempla os movimentos de Reflexão, Rotação e Translação, denominadas por Felix Klein (1984), em *O programa de Erlangen*, como *isometrias*. Para explicitar esses movimentos, elaboramos o Apêndice 1, no qual propomos um olhar à teoria das isometrias. Nele, trazemos ainda, as isometrias da perspectiva do *software* Geogebra, evidenciando as ferramentas de transformação dadas pelo *software* e como com elas se pode trabalhar.

Entendemos que todo movimento – objeto de nosso estudo – é *transformação*, é mudança, e com esse entendimento justificamos nossa escolha pelo conteúdo.

O *software* e o conteúdo escolhido, embora possam ser postos e discutidos separadamente nesta pesquisa, foram pensados e articulados por nós sob um mesmo objetivo: o de estudar o movimento e a percepção do movimento. Com isso, no ato nosso de realizar esta pesquisa e no ato dos sujeitos de atualizarem as solicitações do pesquisador, *software* e conteúdo se constituíram uno, objetos inseparáveis, um ambiente a ser habitado. A proposta de trabalhar com nossos sujeitos o tema geral das transformações, mais especificamente as isometrias, junto a *softwares* de GD, permitiu-nos propor situações nas quais se pode pensar a espacialização geométrica possível pelas isometrias, bem como fazer emergir as *relações* entre objetos geométricos e os *invariantes* que se mostram junto ao deslocamento dos mesmos.

Entendemos que as características dinâmicas dessa espacialização convergiram com as potencialidades de um *software* de GD. Situações características provenientes desta convergência nos auxiliaram na elaboração das atividades entregues aos sujeitos, em que o movimento pudesse ser realizado, percebido e expresso por seus realizadores. Desenvolvemos atividades propondo situações a serem interpretadas e discutidas mediante o ato de envolver-se com as mesmas, questionando-as, buscando respostas. Foram privilegiadas situações para as quais as noções de reflexão, rotação e translação sobrevissem como caminhos para soluções.

Para desenvolvimento das atividades concernentes às Transformações Geométricas na GD e descrição do mesmo, constituindo assim os dados que foram analisados, foi oferecida uma proposta de estudo para graduandos em Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), *campus* Rio Claro, que são compreendidos por nós como sujeitos significativos, pois vivenciam experiências com o movimento geométrico, quer seja em ambientes tecnológicos, quer seja fora deles, em seus atos mais corriqueiros que lhes permitem espacializar. O trabalho com as Transformações Geométricas nem sempre é oportunizado na formação inicial do professor de Matemática. Apesar disso, esse trabalho é possível com a formação geométrica básica dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

Ainda, licenciandos em Matemática são significativos a este estudo, pois a vivência do movimento e a retomada reflexiva da mesma podem transcender as realizações no campo de pesquisa, abrindo horizontes para um estudo sobre os temas que podem vir a emergir nas atividades, bem como dos modos pelos quais eles podem se mostrar em situações dinâmicas. Tendo o horizonte da geometria vivida nas atividades, eles podem se fazer conhecedores, se constituindo enquanto vão constituindo o conhecimento geométrico que se expõe. Entendemos que a vivência de uma pedagogia do movimento junto ao *software*, que é o que propomos, possa fazer sentido aos alunos, pois nela eles podem ver possibilidades relevantes ao ensino e à aprendizagem de Geometria. Com isso, podem acrescentar à vivência que se deu no campo de pesquisa um vislumbre de suas práticas docentes, que estão em processo. Desse modo, a Geometria pode se mostrar a eles como ciência motora, que se estabelece e se constitui junto ao movimento intencional de um sujeito mediante tarefas a serem realizadas.

Buscamos compreender como esses sujeitos percebem um movimento materializando-se na interface de um *software*, e como esse movimento pode ser compreendido por eles quando convidados a pensar sobre o que, ou quem o faz acontecer. Assim, buscamos compreender o mover-se, movendo, e abrimos possibilidade à compreensão do perceber-se/percebendo, uma vez que se os sujeitos se percebem como realizadores do movimento que faz avançar e provoca mudança na interface do *software*, e se conseguem dizer dessa unidade que enlaça o movente e o móvel, eles estarão, em nosso entendimento, descrevendo como se percebem nesse ato de perceber o movimento, como se percebem, percebendo.

Como o conteúdo das Transformações Geométricas mostrou-se significativo ao nosso estudo, pensamos inicialmente em ofertar um curso específico sobre esse tema. Nele pretendíamos propor leituras e aulas dialogadas sobre as Transformações Geométricas, bem como atividades a serem desenvolvidas em ambientes de GD, nas quais as transformações poderiam sobressair como meio de resolução. Porém, antes mesmo de iniciarmos os

procedimentos junto à instituição, necessários à apresentação e desenvolvimento de qualquer curso, demo-nos conta de que para compreender nosso fenômeno de pesquisa - o *movimento-percepção-conhecimento* - o desenvolvimento de atividades por nossos sujeitos de pesquisa já poderia constituir um campo de realizações amplo do qual poderia emergir uma gama de dados significativos a essa compreensão. Assim, demo-nos conta de não precisarmos de toda uma extensão e complexidade de um curso, mas apenas de um espaço e tempo em que nossos sujeitos de pesquisa pudessem desenvolver algumas atividades e expressar sobre o movimento e a percepção do movimento em ambientes de GD.

Com esse entendimento, vislumbramos a possibilidade de desenvolver a pesquisa junto a disciplinas que tinham como objeto de estudo as Transformações Geométricas. Foi quando buscamos no currículo do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP, *campus* Rio Claro, disciplinas nas quais esse conteúdo poderia ser trabalhado. Encontramos que ele fazia parte das ementas das disciplinas Geometria Euclidiana Plana (disciplina do segundo semestre do curso), e Desenho Geométrico e Geometria Descritiva (disciplina do quarto semestre do curso), mostrando-se sob perspectivas distintas, porém de modo mais aprofundado na segunda disciplina. Após essa busca, entramos em contato com a professora responsável por essas disciplinas - naquele ano e respectivo semestre, a professora era a Dra. Rúbia Barcelos Amaral. Conversamos sobre a pesquisa e sobre a possibilidade de realizá-la com seus alunos. A professora concordou e nos deu autorização para iniciarmos nossa pesquisa com duas turmas, uma que cursava a disciplina Geometria Euclidiana Plana e outra que cursava a disciplina Desenho Geométrico e Geometria Descritiva.

Portanto, a pesquisa contou com a colaboração desta professora, que permitiu a participação de seus alunos em horários em que ela estaria ministrando suas aulas. Já estava em seu cronograma acadêmico levar seus alunos ao laboratório de informática para realizarem atividades próprias aos conteúdos trabalhados em sala. Com isso, a proposta desta pesquisa foi recebida pela professora como complemento aos estudos dos alunos.

Com a autorização da professora, foram constituídos três grupos de estudantes. Cada grupo participou de dois encontros realizados no laboratório de informática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), ou seja, o desenvolvimento da pesquisa de campo contou com seis encontros entre pesquisador e pesquisados. Cada encontro foi realizado em dias distintos, tendo eles duração de 2 horas. A turma que cursava a disciplina Geometria Euclidiana Plana, devido ao número elevado de alunos, foi dividida em dois grupos, GRUPO 1 e GRUPO 2. Ambos os grupos eram formados por 20 alunos. O GRUPO 3 foi composto por 22 alunos que cursavam a disciplina Desenho Geométrico e Geometria Descritiva.

Tendo em vista a questão concernente à ética na realização da investigação e visando a clareza para o entendimento dos sujeitos de pesquisa sobre sua presença enquanto geradores de ações a serem analisadas, no primeiro encontro em campo com esses alunos, na presença da professora, conversamos sobre a pesquisa, sobre as gravações que seriam realizadas e sobre a análise que viríamos a realizar com os dados trazidos nessas gravações. Expusemos a necessidade de autorização a ser por eles concedida, se assim entendessem que deveriam, para que pudéssemos realizar a investigação. Os alunos concordaram e permitiram que pudéssemos trabalhar com as imagens, falas e produções registradas em vídeo. Essa conversa inicial foi registrada áudio-visualmente.

Pedimos aos alunos que desenvolvessem atividades e apresentassem os modos pelos quais esse desenvolvimento avançou na direção das respostas encontradas e, em uma entrevista ocorrida no último encontro, realizada em grupo, pedimos que nos relatassem o percebido sobre o movimento e sobre a percepção do movimento. Esses procedimentos com os quais propomos e registramos o desenvolvimento das atividades e das entrevistas são melhor detalhados na próxima seção.

Um desafio que se mostrou diz respeito ao tratamento de um mesmo tema em turmas distintas, cursando disciplinas e semestres acadêmicos também distintos. Pusemo-nos a pensar em como propor um trabalho que contemplasse ambas as turmas e que fosse possível às mesmas, sem limitações e restrições a uma ou à outra. Ao interrogar a situação, vimos a necessidade de desenvolver atividades que envolviam as isometrias (translação, rotação e reflexão), mas que não as tomassem em sua formalização matemática.

Propusemos, então, atividades que contemplassem as isometrias, mas que, para o desenvolvimento das mesmas, não fosse necessária uma teorização formal prévia sobre esse conteúdo. Os alunos da disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva tinham um conhecimento teórico sobre o tema, pois o mesmo estava na ementa da disciplina, e a professora propôs que o estudo de campo fosse posterior ao seu ensino. Os alunos de Geometria Euclidiana Plana não tinham o mesmo conhecimento teórico, mas, intuitivamente, por vivenciar cotidianamente a translação, a rotação e a reflexão, já eram familiarizados com elas. Também, uma noção intuitiva junto a essa turma foi trabalhada pela professora antes de se iniciarem os encontros. Ainda assim, apresentamos a ambas as turmas todas as ferramentas disponíveis no *software*, destacando as ferramentas destinadas às Transformações Geométricas.

Entendemos, no ato de preparar as atividades, e vimos acontecer em campo, que a vivência, associada ao conhecimento das ferramentas do *software*, foi se mostrando e constituindo compreensões com as quais os sujeitos se voltaram às solicitações das atividades

buscando resolvê-las. Então, o desafio de trabalhar com as diferenças anteriormente apontadas mostrou-se como um horizonte de possibilidades à pesquisa, visto que uma tematização incidida sobre os temas das atividades pôde ser percebida de diferentes perspectivas.

O desenvolvimento das atividades se deu com essa preocupação, de possibilitar que turmas distintas, com saberes distintos, pudessem desenvolvê-las. Com isso, nos enunciados das atividades não solicitamos ações como: translate, rotacione ou determine a reflexão de um determinado objeto. Criamos situações geométricas contextualizadas que, em seus horizontes de possibilidades, contemplassem tais movimentos, mesmo sem mencioná-los. Esse desenvolvimento implicou em muito estudo, muitas construções e desconstruções, vistas e revistas por mim, pela orientadora, pelo coorientador e pela professora das disciplinas.

As atividades foram elaboradas com base em exercícios de construção geométrica que destacamos da apostila Desenho Geométrico, elaborada por Detoni (2015). Exercícios que envolviam construções geométricas, figuras planas e suas propriedades, como por exemplo, “construir um ângulo, conhecendo sua amplitude, sua bissetriz e um ponto de um de seus lados”. Realizamos um movimento de fazer desses exercícios, situações investigativas nas quais as Transformações Geométricas fossem presentes como horizonte de possibilidades que os sujeitos pudessem visar no decorrer do envolvimento com as atividades.

As atividades foram entregues aos alunos em folha impressa. Cada atividade, exceto a ATIVIDADE 1, além da folha impressa, teve a situação geométrica do enunciado expressa na interface do Geogebra. Portanto, cabia aos sujeitos, valendo-se das possibilidades do ambiente de GD, realizar movimentos, construir outras possibilidades, solicitadas ou não pelo contexto apresentado, na busca por solucionar os problemas que se mostrariam nesse processo.

Conseguimos elaborar e propor aos sujeitos oito atividades. Pensamos, para cada uma delas, isometrias possíveis, que poderiam se destacar nos desenvolvimentos dos alunos, o que não implica em dizer que essas atividades foram fechadas a uma solução ou a isometrias predeterminadas. A postura fenomenológica que assumimos nos situou, atentos, ao que se mostrou na vivência dos sujeitos com as atividades. Com isso, soluções e possibilidades de movimento foram acontecimentos os quais não pudemos controlar e/ou fixar.

Em campo, com cada um dos três grupos, deixamos em aberto a possibilidade de trabalho individual ou coletivo com as atividades. No entanto, percebemos que muitos desenvolvimentos que se iniciavam individualmente rapidamente iam ganhando um formato coletivo; alunos que trabalhavam em computadores próximos compartilhavam informações, juntavam-se em torno de um mesmo computador, revezavam-se no controle do *mouse* e do teclado. O foco da pesquisa é a percepção do movimento ao realizar a atividade e a constituição

do conhecimento que se dá com essa percepção. Assim, a proximidade entre os alunos e as trocas de informações vieram contribuir para um aprendizado coletivo, no qual as percepções individuais, uma vez compartilhadas, constituíram saberes mais complexos e abrangentes.

Foram realizados dois encontros com cada grupo, nos quais propusemos duas atividades no primeiro encontro e uma no segundo, ou seja, cada grupo realizou três atividades. Poder-se-á com isso, questionar a quantidade de atividades elaboradas, oito, já que com a divisão dos grupos poderíamos trabalhar as mesmas três atividades com cada um deles.

Nos primeiros movimentos de elaboração das atividades não estávamos pensando na quantidade de encontros e na duração dos mesmos. Fomos produzindo atividades com intenção de mais adiante escolhermos as que entendêssemos melhor trazer possibilidades de movimento. Tendo definido o número de encontros (três) e a duração de cada um deles (duas horas), retomamos as atividades para escolher algumas delas. A escolha foi-se mostrando complexa, pois vimos que conseguimos com nosso empenho desenvolver o que foram para nós, boas atividades, com características relevantes à pesquisa. Com isso, entendemos que todas as atividades mereciam um tratamento no âmbito de uma pesquisa de doutorado, para que pudessem ser vistas, compreendidas e trabalhadas por quem a elas se voltassem, por exemplo, professores de Matemática que lerem a tese. Nesse pensar sobre as atividades e sobre a escolha de algumas delas, fomos compreendendo que estávamos nos impondo um fazer desnecessário, uma vez que cada grupo poderia realizar atividades distintas, se envolver com o movimento presente em todas elas e pôr-se em movimento mediante suas solicitações. Contemplando as oito atividades, conseguimos manter as propostas de estudo e, ainda, temos agora relatos não de três, mas de oito atividades cuja estrutura possa vir a ser relevante para quem procura, pensa e elabora atividades a serem trabalhadas em aulas de Matemática.

Ao final do desenvolvimento das atividades, em cada encontro, solicitamos aos alunos que relatassem como se deu o envolvimento com as mesmas. Para o relato, disponibilizamos aos alunos um computador ligado ao projetor (*data show*). Assim, puderam relatar como desenvolveram as atividades ao mesmo tempo em que estabeleciam os movimentos e as construções no *software*, que, uma vez projetadas, foram visíveis pelos demais alunos e pelo pesquisador. Esse relato foi realizado, na maioria das vezes, por duplas de alunos; um tomou controle do *software* e o outro expressou junto à projeção o que fizeram em cada atividade.

Por ser uma exposição do feito, outros alunos foram complementando o dito. Nós levantamos seguidas questões sobre o que haviam percebido e compreendido. Tais questões não faziam parte de um escopo predeterminado, foram se mostrando quando buscamos entender os modos pelos quais os alunos realizaram e perceberam o movimento no decorrer das

atividades. Cada atividade e cada relato solicitaram interrogações distintas, condizentes com o que estava sendo expresso. Portanto, não destacamos aqui as perguntas, elas poderão ser vistas na transcrição de cada desenvolvimento (no tópico 4.2.1), que foi possível mediante gravação audiovisual por nós realizada. Nessa gravação, posicionamos uma câmera de modo a focar o sujeito com *software* e o sujeito com a projeção.

No primeiro encontro com cada grupo, registramos apenas os relatos e expressões gráficas no *software* sobre o feito e o percebido em cada atividade. No segundo encontro com os grupos, além do registro do desenvolvimento da atividade entregue, registramos o momento em que propusemos aos alunos uma entrevista promovendo um diálogo em torno de quatro questões (evidenciadas no tópico 4.2.2), sendo três delas previamente elaboradas e uma que emergiu durante a primeira entrevista, realizada com o Grupo 1. Elas interrogam sobre o estar com o computador, com o *software*, percebendo o movimento e percebendo-se em movimento. Foi o momento que escolhemos para estabelecer um diálogo acerca da percepção do movimento, transcendendo a percepção do movimento dos objetos geométricos na interface do *software*, avançando em direção à nossa questão de pesquisa, que busca compreender a percepção da unidade que abarca o móvel e o movente, o perceber e o percebido, a pessoa que percebe e os modos pelos quais ela percebe.

Os dados que nos permitiram realizar tal estudo enlaçam a linguagem da fala³⁵, dos gestos e das expressões intencionadas na interface do *software*. Todos os registros audiovisuais constituídos em campo foram considerados como dados importantes à pesquisa e foram tomados na análise. Eles foram transcritos, de maneira que as falas, gestos e expressões gráficas dos movimentos realizados (as que se mostraram na interface do *software*) foram postas em frases seguidas de uma descrição complementar que disseram da ambientação.

Cientes da relevância da transcrição para o estudo que foca a vivência, solicitamos aos sujeitos de pesquisa que relatassem suas realizações, e, tendo esses relatos gravados, os transcrevemos. O relato da vivência busca expressar a intencionalidade do sujeito de dizer de sua compreensão. Ele carrega características de cada um desses sujeitos, buscando evidenciar os modos de ser e de ver o mundo que habitam. Assim, o investigador precisa ficar atento ao *o que* está sendo dito pelo sujeito. A análise que se volta à transcrição de relatos que dizem desse

³⁵ A fala é uma operação paradoxal “em que tentamos alcançar, por meio de palavras cujo sentido é dado, e de significações já disponíveis, uma intenção que por princípio vai além e modifica, em última análise fixa ela mesma o sentido das palavras pelas quais ela traduz” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 520).

o que solicita do pesquisador atenção às possibilidades e ambiguidades do que pode se mostrar como algo dito no que é expresso pela linguagem.

Nesta pesquisa, realizamos filmagem e descrevemos situações buscando constituir dados concernentes à motricidade e à percepção do movimento. Nesse caso:

[...] a descrição apresenta aspectos qualitativos diferenciados, uma vez que a linguagem mediante a qual a descrição se dá à análise se expressa pela oralidade e pela intencionalidade do corpo-próprio, expondo-se em gestos, ações, movimentos cujo sentido se compreende no contexto da cena, em que estão figura e fundo, portanto, o sujeito, cossujeitos e tema trabalhado que sustentam a cena (BICUDO, 2011, p. 26).

Assumindo a postura fenomenológica, que destacamos anteriormente, pomo-nos a analisar as vivências relatadas. Estivemos atentos e buscamos adentrar as possibilidades do dito estudando e interpretando frases e palavras, buscando os sentidos das mesmas no texto e no contexto em que se constituem. Mostrou-se significativa uma análise hermenêutica, visto que as palavras carregam uma densidade de sentidos, sejam os transpostos tradicionalmente ou os que se constituem nas distintas vivências de cada sujeito.

Conforme nossa compreensão, o caráter qualitativo da pesquisa assim efetuada advém das vivências percebidas e expressas, as quais carregam consigo, já em sua estrutura, a hermenêutica, na medida em que se autointerpreta e dá-se, pela linguagem, à interpretação. Por serem duradouras, ou seja, por transcorrerem em um contínuo de momentos duradouros, elas se expandem em possibilidades históricas as quais se materializam na temporalidade, espacialidade e dinamismo do mundo-vida, com o qual somos (BICUDO, 2011, p. 38).

Realizar a transcrição mostrou-se um trabalho complexo, pois a linguagem que expressa a compreensão do vivenciado em experiências evidenciou diferentes movimentos, que, por sua vez, são carregados de expressões, sentidos e significados; o ato de atentar-se às falas causava um desprendimento momentâneo da atenção aos gestos que caminhavam junto, ou complementavam as mesmas. Muitos *plays*, *pauses*, avanços, idas e voltas foram necessários para constituirmos uma transcrição da linguagem.

[...] expomos o texto em sentido articulado com a linguagem textual na modalidade escrita. O movimento de transcrição dá origem a um texto que expressa o que está sendo dito pelo depoente, bem como a exposição-disposição com que o pesquisador apresenta o texto. Esses, conforme entendemos, são os modos pelos quais os aspectos dos sentidos do percebido se manifestam na linguagem textual. Portanto, para nós, a descrição descreve os modos pelos quais o percebido se doou ao pesquisador no processo das entrevistas (VENTURIN, 2015, p. 96).

A transcrição é um movimento cujo dinamismo se potencializa junto ao que se mostra nessa realização. A intenção de articular falas, gestos e expressão gráfica evidenciou a pluralidade dos dados que tínhamos, bem como a complexidade do ato de enveredar-nos pelos mesmos. Na tentativa de focar esses modos de expressão, percebemos o quanto estiveram entrelaçadas nas falas dos sujeitos. A cada retomada de trechos dos vídeos, novos movimentos se doaram a nossa percepção, e, com isso, novos contornos foram se constituindo e se

presentificando no texto da transcrição. O texto ia se configurando e se desconfigurando a cada momento em que voltávamos atentamente às gravações.

A vivência expressa continuamente sua duração e o fluir de seus momentos. Entendemos o relato da mesma como sendo outra vivência, agora do pesquisador, que realiza o ato de relatar. Dessa forma ela também se dá em fluxo; falas e gestos/movimentos ocupam uma mesma unidade de expressão. Se fala ao mesmo tempo em que se move. Transcrever considerando e preservando essa unidade é um desafio. Dar conta desse desafio é realizar uma transcrição que pode permitir ao leitor o vislumbre da ambientação das experiências vivenciadas, e ao próprio pesquisador, a lembrança da vivência, que permite-o refletir sobre o vivenciado, que entendemos passível de ser retomado.

Novamente, podemos falar do ato de discretizar, desta vez realizado pelo pesquisador, que busca colocar no papel o que ele tem em uma gravação audiovisual. Nesta pesquisa, assim como já foi dito, junto com falas e gestos, há a expressão de movimentos que se materializam em interfaces computacionais.

Transcrevemos os relatos dos sujeitos evidenciando seus modos de expressão, de forma que se possa na leitura vislumbrar como se deram esses relatos e as vivências por eles expressas. Articulamos esses modos de expressão buscando evidenciar como eles avançaram no agora da vivência de relatar. Trata-se de uma articulação de “unidades” (o que foi dito; o que não foi dito, mas apenas apontado; os gestos; o que foi movido; como foi movido; as implicações gráficas dos movimentos) visando expressar o fluxo, a continuidade antes da discretização, o fluir dos momentos antes de tomá-los como unidades. Nessa situação, visar é um movimento em direção a horizontes de possibilidades. Nesse horizonte avistamos o fluxo que almejamos expressar no papel, em nossa transcrição. É ao continuar visando o que se mostra nesse horizonte que pudemos trazer na transcrição não o próprio fluxo da vivência, mas um modo de expressá-lo, para com isso dar ao leitor o vislumbre da continuidade em que avançou o relato.

Ao destacarmos a complexidade que se mostra no ato de transcrever, não estamos criando motivos para um prejulgamento que a toma de forma negativa, como uma dificuldade para pesquisas que se valem da mesma no processo de análise, mas destacamos a relevância de assumir uma postura de ver, ouvir e, novamente, ver e ouvir, com atenção às singularidades de uma expressão, ao mesmo tempo em que se busca ficar atento ao todo.

É com essa postura que nos atentamos aos relatos dos sujeitos desta pesquisa. Com ela, transcrevemos esses relatos e nos voltamos reflexivamente a eles, buscando compreender o que dizem a respeito do fenômeno aqui interrogado. O movimento de transcrição e de análise dos dados constituídos neste estudo é explicitado na seção que segue.

QUARTA SEÇÃO

TRANSCRIÇÃO E ANÁLISE: MOVIMENTOS DE INVESTIGAÇÃO

A verdadeira filosofia é reaprender a ver o mundo e nesse sentido uma história narrada pode significar o mundo com tanta “profundidade” quanto um tratado de filosofia.

Por Merleau-Ponty (2011, p.19)

Tendo explicitado o campo de pesquisa e o modo pelo qual estivemos nele com os sujeitos significativos, constituindo dados para a pesquisa, expomos agora, na *Quarta Seção*, o movimento de análise desses dados. A análise tem como solo as transcrições do dito e realizado pelos sujeitos no relato sobre o desenvolvimento das atividades e nas entrevistas por eles concedidas. Nesta seção, expomos essas transcrições. Evidenciados os modos pelos quais nos voltamos a elas, buscando e deixando mostrar-se o que dizem quando focadas da perspectiva da interrogação desta pesquisa. Explicitamos e realizamos procedimentos de análise, evidenciando a metodologia que os abarca e que é assumida no estudo.

4.1 Procedimentos de transcrição e de análise das entrevistas e dos relatos sobre o desenvolvimento das atividades

Ao iniciarmos a realização da transcrição, buscamos dar nomes aos sujeitos. Conforme explicitado na *Terceira Seção*, os alunos de duas turmas foram organizados de forma a constituírem três grupos. Os pertencentes ao Grupo 1 foram nomeados como: Aluno A1, Aluno B1, Aluno C1... Os alunos do Grupo 2, chamamos de Aluno A2, Aluno B2, Aluno C2... Os alunos do Grupo 3, de Aluno A3, Aluno B3, Aluno C3, e assim por diante. Distinguimos os gêneros escrevendo “o Aluno” ou “a Aluna”.

Estando atentos às gravações, compreendemos que os sujeitos, em muitos momentos, completavam suas falas com gestos e/ou movimentos junto ao Geogebra. Muitas vezes, o movimento do cursor do *mouse* e até mesmo das mãos sobre a tela ampliava a expressividade de um e contribuía para o avanço de compreensão de todos de um grupo. A falta dessas informações (gestos e movimentos junto ao *software*), poderia causar dificuldade na leitura do relato, além do mais, esses dados são importantes para a investigação, visto que são movimentos realizados pelos sujeitos que buscam expressar sobre o que perceberam. Portanto, *descrevemos esses dados em frente às falas, entre colchetes*. Compreendemos, também, que palavras não

ditas poderiam causar estranhamento na leitura dos relatos e, com isso, dificuldades na compreensão dos mesmos. Por exemplo, os sujeitos se referiram recorrentemente a pontos dispostos na interface do Geogebra, sem dar nomes aos mesmos, mas, o pesquisador, por vivenciar o momento, sabe a quais pontos eles se referiam. *Essas palavras não ditas, o nome do ponto, por exemplo, destacamos na descrição colocando-as entre parênteses.*

No entanto, entendemos que o texto, os colchetes e os parênteses, que aqui já enfatizamos a relevância, poderiam não ser suficientes para um entendimento do dito, ou para um vislumbre por parte do leitor do que foi vivenciado. Dizer de quais pontos e quais figuras foram movidas poderia não dar ao leitor a imagem desse movimento, as configurações da figura em movimento. Por exemplo, uma fala como “movemos o ponto A e ficou assim” poderia gerar um vazio de entendimento a quem não presenciou o desenvolvimento das atividades. Visando contribuir para a compreensão do que foi vivenciado no campo de pesquisa, optamos por trazer na transcrição dos relatos as imagens dos movimentos materializados na interface do *software*. Essas imagens foram por nós elaboradas buscando representar as imagens evidenciadas em campo, quando os sujeitos apresentaram suas resoluções com auxílio do projetor.

Essas são iniciativas que visam, na medida do possível, propor uma leitura mais corrente, sem truncamentos causados por vazios de compreensões. Visam, também, trazer o leitor para a situação da vivência dos sujeitos, na medida em que estabelecem um fundo sobre o qual os modos de expressão foram se dando, ou seja, esses complementos textuais e gráficos ofertam uma ambientação, que envolve o dito, o não dito e a expressão gestual junto ao *software*, ao ambiente e aos sujeitos. Ainda, entendemos que essas iniciativas nos ajudaram na constituição dos dados e na compreensão dos mesmos.

Os relatos, tanto os que dizem do desenvolvimento das atividades quanto os que dizem das entrevistas, foram transcritos em quadros. Segundo Bicudo (2011), esse modo de expor os relatos é um fazer comum aos pesquisadores que assumem a postura fenomenológica, por considerarem que contribuem com a compreensão do movimento do pensar do pesquisado.

Os quadros que elaboramos são compostos por quatro linhas; na primeira, evidenciamos a numeração das atividades. Quando descrevemos as entrevistas, nessa primeira linha evidenciamos as perguntas levantadas. Na segunda linha, expomos a transcrição dos relatos na qual poder-se-á ver frases sublinhadas. Elas são *Unidades de Sentido*, frases que se destacam quando nos voltamos à interrogação de pesquisa. Em uma mesma frase, ou parágrafo, podemos destacar mais dessas unidades. Para que fique evidente a separação entre elas, deixamos em negrito a primeira palavra da frase sublinhada, que é antecedida por uma numeração, para que se possa contar a quantidade de Unidades de Sentido. A terceira linha, contempla o título “O

sentido do dito – Unidades Significativas”, que prepara o espaço da quarta linha, na qual destacamos as *Unidades Significativas*, que são articulações nossas sobre o que entendemos se mostrar como o dito nas Unidades de Sentido. São

[...] frases que se relacionam umas com as outras, indicando momentos distinguíveis na totalidade do texto da descrição. Elas não estão postas no texto, mas são articuladas pelo pesquisador. Transformam uma expressão da linguagem cotidiana do sujeito, ou ingênua, em uma linguagem condizente com aquela do campo de inquérito do pesquisador, mediante um procedimento de análise dos significados das palavras, de reflexão sobre o dito e de variação imaginativa (BICUDO, 2011, p. 58).

Como com cada Unidade de Sentido se articula uma Unidade Significativa, tem-se um mesmo número dessas unidades.

As Unidades Significativas foram nomeadas. Por exemplo, na Atividade 1 destacamos a US1A1 (Unidade Significativa 1 da Atividade 1), US2A1 (Unidade Significativa 2 da Atividade 1), e assim por diante. Na Atividade 2, tem-se: a US1A2 (Unidade Significativa 1 da Atividade 2), US2A2 (Unidade Significativa 2 da Atividade 2), continuando desse modo. Essa nomeação é assumida em todas as atividades.

Com relação às entrevistas, seguimos a mesma prática de nomeação. Como foram postas quatro perguntas, optamos por assim chamar as Unidades Significativas: US1P1 (Unidade Significativa 1 da Pergunta 1), variando apenas o número da unidade (US2, US3, ..., US15, ...). O mesmo é feito ao nomearmos as unidades referentes às demais perguntas. Para a Pergunta 2, nomeamos: US1P2, US2P2, US3P2, e assim por diante. Para a Pergunta 3, nomeamos: US1P3, US2P3, US3P3, etc. Para a Pergunta 4, nomeamos: US1P4, US2P4, US3P4, indo desta forma até ser destacada a última Unidade Significativa.

Apresentamos no Quadro 1 o modelo ilustrativo de como realizamos a transcrição e início de análise:

Transcrição – Atividade X (ou perguntas da entrevista)	
<p>Aluna A: Faz para vermos (solicita à Aluna BX que mova no Geogebra)</p> <p>Aluno F: Realmente, (1) é constante! [Afirma após mover o ponto D e constatar que a soma dos segmentos AD e BD é constante, com medida sempre igual à medida do segmento EF - eixo maior da elipse]</p>	
<p>Aluno L: Vimos que, (2) quando movíamos (o ponto C), as retas ficavam sempre paralelas (retas r e s) [conclui após mover o ponto C]</p>	
O sentido do dito – Unidades Significativas	
<p>US1AX: Afirma que mesmo com um movimento realizado, o valor da soma de dois segmentos não varia</p> <p>US2AX: Afirma que ao mover um ponto da figura, visualizou um invariante junto ao movimento</p>	

Quadro 1: Modelo de quadro para organização das análises

Fonte: O autor

Este modo de expor os dados de pesquisa visa expressar como se deu o processo de análise, evidenciando o percurso de um pensar junto ao que tínhamos, as transcrições. Um pensar que vai avançando e se constituindo junto ao ato de *ir-à-coisa-mesma*, atentos ao que se deu nas vivências e deixando que se manifestem os sentidos, sem premeditá-los. Esse movimento se inicia ao habitarmos o dito nas transcrições visualizando particularidades, que, sob a luz de nossa questão de pesquisa, foram convergindo e constituindo uma estrutura que as abarca, dizendo das mesmas e evidenciando o que elas dizem.

A análise dos dados constituídos em campo se deu por dois momentos: a *Análise Ideográfica* e a *Nomotética*. Na primeira, na constante retomada dos dados, voltamos-nos para aspectos pontuais e singulares que se revelaram ao adentrarmos os dados da pesquisa. Foi nesse momento que atentamos às manifestações que puderam culminar em Unidades Significativas,

compreendidas como o dito nas Unidades de Sentido, destacadas nas transcrições. Esse movimento de análise foi exemplificado acima na organização do Quadro 1.

No segundo momento, o da *Análise Nomotética*, voltamo-nos às Unidades Significativas indagando o que cada uma delas nos diz, ao focarmos nossa interrogação. Nesse movimento de pensar sobre cada Unidade Significativa, focando a interrogação da pesquisa, o pesquisador pode perceber convergências e divergências entre elas. Ele já está com esse pensar avançando e realizando a *Análise Nomotética*, que entendemos ser o momento de transcender a análise dos dados individuais expressos na *Análise Ideográfica*, atentando às convergências e divergências que, uma vez articuladas apontam para “grandes convergências” cujas interpretações e articulações solicitam *insights*³⁶, evidências e “esforços para expressar essas articulações pela linguagem. Solicita, enfim, compreensão da estrutura do fenômeno interrogado, tomando os individuais como casos de compreensões mais gerais que dizem agora de ideias estruturais concernentes à região de inquérito” (BICUDO, 2011, p. 59).

Ao proceder toda a investigação, da interrogação à *Análise Ideográfica* e à *Nomotética*, estivemos realizando a chamada *redução fenomenológica*.

A redução fenomenológica caracteriza-se como um movimento do pensar, expondo por meio das articulações de ideias, a complexidade de sentidos e de significados que se entrelaçam em ideias mais abrangentes. O movimento de exposição das compreensões do fenômeno abarca o processo de destacar o fenômeno do fundo em que se mostra, expressando as compreensões abertas ao investigador em torno de seus sentidos e significados. O movimento de redução é tomado como a intencionalidade, determinada pelos atos de consciência. Como sujeitos intencionais, estamos abertos ao mundo-vida que se apresenta à nossa percepção, de modo que o movimento de redução pode contribuir para que compreendamos aspectos essenciais desse mundo. Deve-se esclarecer que redução, no âmbito da fenomenologia, não se refere a uma simplificação ou a um resumo do apresentado no texto, mas a um movimento de pensar articulador em que os sentidos vão se entrelaçando com mais sentidos e pelos significados atribuídos, postos em linguagem, vão se configurando em ideias que os abrangem em uma totalidade compreensiva³⁷ (BICUDO 2016 apud BARBARIZ, 2017, p.61).

A redução fenomenológica institui um movimento de compreensões, que implicam, como é denominado por Husserl (2012, p. 110), a *epoché*, o processo de “suspensão de validades natural-ingênuas e, em todo caso, de validades que já estão em efetivação”. Em pesquisa, realizar a *epoché* trata-se de um fazer fenomenológico que institui um lançar-se aos manifestos e suas possíveis articulações, como um indivíduo sem conceitos prévios, regido pela “humildade do *querer saber como*, ausentando-se do *querer determinar como*” (PINHEIRO,

³⁶ “*Insight* significa evidência, ver dentro da situação, para além do onticamente manifesto. É um ato cognitivo que mostra com clareza, em um lance, a reunião de articulações” (BICUDO, 2011, p. 59, grifo da autora).

³⁷ Conforme exposição da Prof.^a Dr.^a Maria Aparecida Viggiani Bicudo em seção de orientação com Tais Alves Moreira Barbariz.

2013, p. 63, grifos do autor). Não se trata de desprender-se da própria existência, de arrancar de si todo o saber teórico³⁸, mas de embrenhar-se no que *aí está*, efetuando um constante exercício de estar atento ao que se manifesta na originalidade da vivência, não cabendo, portanto, uma determinação prévia do que pode se manifestar.

Esse exercício da *epoché* foi realizado em todos os momentos da pesquisa, dentre eles: as primeiras leituras, o estudo de campo, a construção e análise dos dados, e a articulação de nossas compreensões em torno do fenômeno interrogado.

Estivemos atentos às convergências, buscando o que elas dizem da interrogação. Compreensões em torno dessas convergências foram constituindo horizontes para uma síntese aberta, na qual transcendemos as primeiras análises, trazendo reflexões acerca do que interrogamos junto aos sujeitos da pesquisa. Essas são articulações mais estruturadas, com as quais nos dirigiremos academicamente à comunidade científica, oferecendo considerações que se espera sejam contribuintes a ela, ao apresentar nosso estudo.

A compreensão da constituição do conhecimento que se evidencia nas reduções solicita ao leitor que pense junto ao realizado pelo pesquisador. Isso quer dizer que leia, passo a passo as descrições e o movimento das reduções sucessivas que confluem em Ideias Nucleares para que as articulações do pensar possam ser visualizadas e compreendidas.

Por esse motivo, os estudos que expõem investigações fenomenológicas trazem no corpo do texto todo esse movimento. Isso, aparentemente, traz repetições do já exposto e, certamente, aumenta o número de páginas do texto, podendo incomodar leitores que preferem ver a que se chegou com a pesquisa, dada a interrogação.

Essa é uma leitura possível, quando se busca respostas às quais se chegou, raciocinando com a pergunta da pesquisa, a área em que ela se insere, os procedimentos realizados.

Respeitando os leitores que assim se posicionam, decidimos colocar como apêndice desta tese o movimento do pensar realizado nas análises *Ideográfica* e *Nomotética*, o que não sugere a não leitura, visto que, como foi dito, nesse apêndice está o fluir de um pensar, que por si só já produz reflexões sobre o interrogado, antes mesmo de se discutir resultados. No entanto, expomos no corpo deste texto o modo pelo qual procedemos, e trazemos exemplos; recortes de cada um dos movimentos de redução. Com isso, buscamos trazer o como as articulações foram sendo geradas para que as “respostas” fossem expressas.

³⁸ Teorias “significam aqui toda e qualquer espécie de preconcebimento, nesta investigação nós nos mantemos rigorosamente afastados delas. As teorias entram em nossa esfera apenas como fatos de nosso mundo circundante, não como unidade de validade, efetivas ou supostas” (HUSSERL, 2006, p. 77).

No tópico 4.2.1, trazemos o exemplo da Atividade 1 para explicitar como realizamos a Análise Ideográfica nas oito atividades desenvolvidas pelos sujeitos. Foi elaborado o Apêndice 2, no qual constam as atividades (de 2 a 8), a explicitação da resolução dos sujeitos, as Unidades de Sentido e as Unidades Significativas, tal qual exemplificado no Quadro 2, no qual expomos o desenvolvimento da Atividade 1.

No tópico 4.2.2, apresentamos a Pergunta 1, as respostas dadas a ela, e a Análise Ideográfica realizada. Buscamos com isso, trazer um recorte da totalidade das entrevistas para exemplificar como se deu a transcrição das mesmas e a articulação das Unidades Significativas. No Apêndice 3, expomos as outras três perguntas, que são postas conforme evidenciado no Quadro 3, no qual trazemos como exemplo o diálogo em torno da Pergunta 1.

4.2 A Análise Ideográfica: explicitando as Unidades Significativas

A “análise fenomenológica da descrição não toma o descrito como um dado pragmático cujos significados já estariam ali contidos, mas percorre um trajeto pavimentado por camadas constantes à atenção do que está sendo realizado pelo investigador” (BICUDO, 2011, p. 57).

Neste primeiro momento, em que nos voltamos às descrições, evidenciamos Unidades de Sentido, que são passagens do texto que nos afetam, que nos chamam a atenção, que se mostram relevantes para compreendermos nossa interrogação. Com as Unidades de Sentido, como dito anteriormente, tecemos Unidades Significativas.

Nesse movimento, estivemos atentos aos sentidos que se mostravam junto ao dito pelos sujeitos na leitura intencional, que nós como investigadores realizamos tendo como norte a interrogação formulada. Os sentidos se revelam a quem se volta a um fenômeno estando num movimento constante de interrogar.

4.2.1 Dialogando sobre o desenvolvimento das atividades

Desenvolvemos as atividades e as numeramos de 1 a 8. Conforme explicitado na *Terceira Seção*, em campo, foram distribuídas duas atividades no primeiro encontro com cada grupo e uma atividade no segundo encontro. Reservamos um espaço no segundo encontro para propor uma entrevista com os sujeitos sobre as experiências por eles vivenciadas, momento em que levantamos algumas perguntas pensadas junto à interrogação desta pesquisa. A transcrição e análise desta entrevista são expostas no tópico posterior a este.

Preocupamo-nos apenas em estabelecer que duas atividades, dentre as 1, 2 e 3, não fossem desenvolvidas em um mesmo encontro, pois entendemos que elas demandariam maior concentração e tempo. Tendo essa preocupação, distribuímos as atividades mantendo a sequência, conforme evidenciado na Tabela 1, abaixo:

Tabela 1: Distribuição das atividades

<i>Grupos</i>	<i>Atividades</i>	
	1º Encontro	2º Encontro
Grupo 1	1 e 4	7
Grupo 2	2 e 5	8
Grupo 3	3 e 6	1

Fonte: O autor

Transcrevemos o desenvolvimento das oito atividades, na sequência, e realizamos a Análise Ideográfica. Destacamos quais grupos as desenvolveram e em qual encontro, a começar pela Atividade 1 relatada pelas alunas A1 e B1. Os demais alunos, representados por C1, D1, E1, ..., são os que se manifestaram durante a apresentação das alunas A1 e B1.

A colocação do número 1, que acompanha as letras, é o modo pelo qual buscamos distinguir alunos de grupos distintos. Alunos do Grupo 2, por exemplo, são chamados de alunos A2, B2, C2, e assim por diante.

Antes do relato, apresentamos a Atividade 1. Realizamos o mesmo procedimento na transcrição e análise dos relatos sobre o desenvolvimento das demais atividades.

✓ **Atividade 1**

A Tabela 1 evidencia que a Atividade 1 foi proposta duas vezes; para o Grupo 1 e o Grupo 3. Como as soluções e os relatos sobre a realização desta atividade se mostraram similares, optamos por trazer para este texto apenas o desenvolvimento realizado pelo Grupo 1.

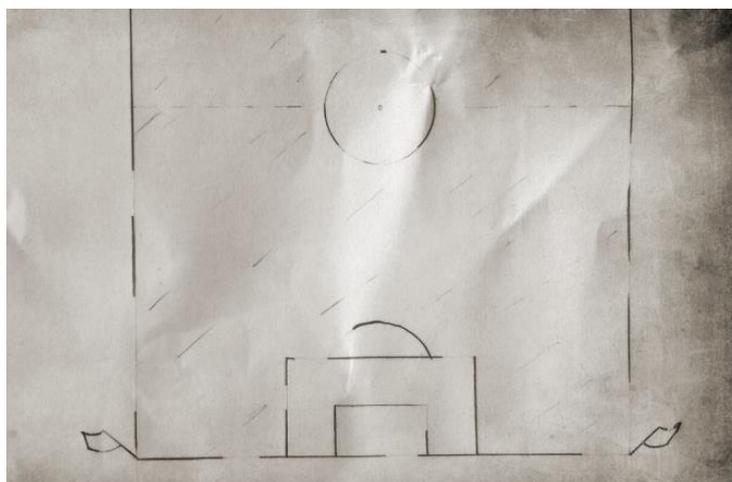
Solicitamos aos alunos que apresentassem suas resoluções, bem como expressassem o modo pelo qual as mesmas foram se dando. Dispuseram-se para essa apresentação a Aluna A1, que ficou responsável por realizar as construções no Geogebra e a Aluna B1, que optou por relatar junto ao projetor (*data show*) o que foi feito. Essa divisão de tarefas foi realizada e acordada pelas próprias alunas.

Segue abaixo o enunciado da Atividade 1 e, em seguida, o Quadro 2 com a descrição do desenvolvimento desta atividade, que foi a primeira a ser entregue ao Grupo 1:

ATIVIDADE 1 - CÁPSULA DO TEMPO

Os representantes dos clubes mineiros América, Atlético e Cruzeiro resolveram prestar uma homenagem simbólica aos clubes e aos seus torcedores. Enterraram sob o gramado do Mineirão uma cápsula do tempo que guarda arquivos que contam a história dos clubes até a data em que a cápsula foi enterrada. A ideia é que 100 anos depois a cápsula possa ser desenterrada e os arquivos possam ser disponibilizados ao público.

Um dos representantes guardou consigo um manuscrito e um esboço que permitiriam saber a localização exata da cápsula. No momento de enterrá-la, foram considerados três pontos de referência: as bandeirinhas sobre uma das *linhas de fundo* e uma bola posta sobre a *linha de meio de campo*. Com o passar do tempo, o esboço se desgastou e a marcação sobre a *linha de meio de campo* (ilustração da bola) se apagou, conforme pode-se ver no esboço, que segue.



Mas, o manuscrito se manteve legível. Ele dizia:

“Para encontrar a cápsula, basta que duas pessoas, uma posicionada em cada canto do campo (posição das bandeirinhas) se coloquem de frente para a marcação da posição da bola, olhando em sua direção, girem 90° (quem está na posição da bandeirinha esquerda, gire sentido anti-horário e quem está na posição da bandeirinha direita, gire no sentido horário) e andem uma distância igual a que a respectiva bandeirinha está da bola - nesse giro, essas pessoas podem sair das dimensões do campo podendo sair também do estádio (não se atravessam as arquibancadas, mas considera-se suas dimensões no cálculo da distância percorrida). Após esse percurso, as duas pessoas devem ficar paradas. Uma terceira pessoa deve cavar exatamente na metade do caminho entre elas para encontrar a cápsula”

----- ~~~ -----

Sabendo que as dimensões do Mineirão após reforma exigida pela FIFA para a realização da Copa do Mundo de 2014 passou a ser 105m x 68m, e que a cápsula foi enterrada após essa reforma, determine onde, no futuro, deverá ser cavado um único buraco para que se desenterre a cápsula sem maiores danos ao gramado do Mineirão.

Transcrição – Atividade 1

Aluna B1 – Primeiro, nós desenhamos o campo; fizemos um segmento de comprimento fixo de tamanho 68. Ficou assim, um segmento AB. Depois, saindo de B, fizemos outro segmento de comprimento fixo de tamanho 105, que ficou BC. (1) Movemos C para o ângulo ABC ficar de 90° (2) [gesticula com a mão direita o movimento do ponto C e, com o indicador da mão esquerda, aponta para o ângulo ABC].



Aluna A1 – [seleciona a ferramenta *Segmento com Comprimento Fixo* e clica na tela do *software*, surgindo com isso o ponto A e a janela para determinar o tamanho do segmento. Determina o tamanho 68, o que faz surgir o ponto B distanciado 68 de A. Com essa ferramenta já selecionada, a Aluna A1 clica sobre B e determina C distanciado 105 de B. Em seguida, (3) com o botão esquerdo do *mouse* seleciona o ponto C e, sem soltar este botão, arrasta o *mouse* de forma a mover também o ponto C. (4) A aluna interrompe o movimento quando entende que o ângulo ABC está reto, 90°]

Pesquisador: Tudo bem, você parou o movimento aí. Mas o que garante que este ângulo é reto?

Aluna A1: (5) Dá pra ver. Se não é 90 , é bem próximo.

Pesquisador: Vamos medir? Clica na ferramenta *Ângulo* e depois sobre os pontos no sentido horário (solicita à Aluna A1).

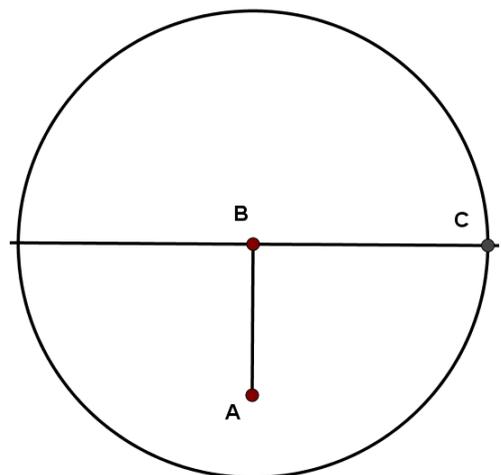
Aluna A1: Ééé, o ângulo aqui é de $90,14^\circ$ (conclui após realizar o sugerido pelo pesquisador).

Aluno C1: O problema é que vocês primeiro estão pensando em garantir o tamanho dos segmentos. O que nós fizemos foi primeiro construir o ângulo reto. Traçamos uma perpendicular ao segmento AB, passando por B. Depois, sobre essa reta perpendicular traçamos um segmento de tamanho 105.

Aluna B1: É mesmo! Nossa, que vacilo (risos). Faz isso então Aluna A1.

Aluna A1: Agora sim [indaga após deletar o ponto C, clicar sobre a ferramenta *Reta Perpendicular* depois sobre o segmento AB, o que faz aparecer a reta perpendicular ao segmento. Em seguida, translada essa reta até o ponto B].

Aluna A1: Vou fazer o segmento de tamanho 105 traçando uma circunferência de centro em B e de raio 105 [clica sobre a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio*, depois sobre o ponto B (centro) e determina o comprimento 105 para o raio].



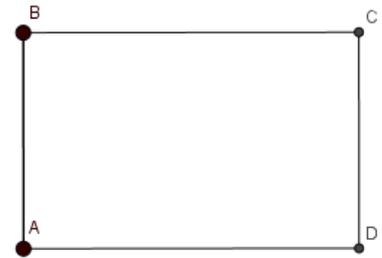
Pesquisador: Muito bom. E onde vai marcar o ponto C?

Aluna A1: Na interseção da circunferência com a reta [responde ao mesmo tempo que seleciona a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*. Em seguida clica sobre o encontro entre o círculo e a reta que passa por B].

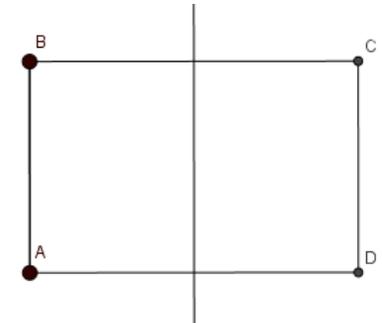
Pesquisador: Ótimo!

Aluna B1: Agora tá tranquilo. Vamos continuar. Traçamos uma reta paralela ao segmento BC passando por A e uma paralela a AB passando por C e marcamos D que é a interseção dessas retas (6) [com o dedo indicador da mão direita aponta para os pontos e os segmentos que menciona].

Aluna A1: Temos então um retângulo ABCD que é o campo [afirma após criar o ponto D]. Vou traçar segmentos ligando os pontos e ocultar o resto [clica na ferramenta *Segmento* e depois sobre os pontos, dois a dois. Em seguida, clica sobre a circunferência e sobre as retas com o botão direito do *mouse* e seleciona a opção *Exibir/Ocultar Objetos*].

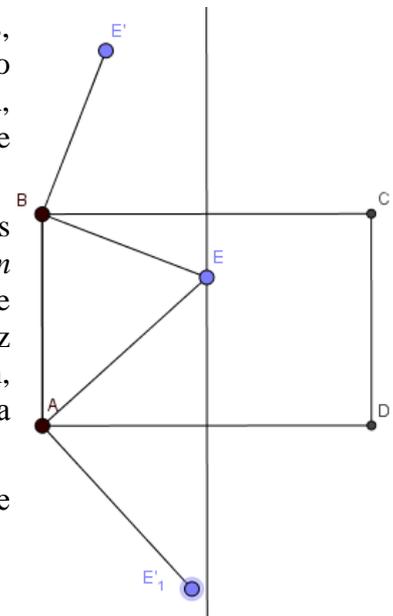


Aluna B1: Pra desenhar a linha de meio de campo, traçamos a mediatriz do segmento BC (7) [com o movimento do braço direito simula uma reta dividindo o retângulo projetado ao meio].



Aluna A1: Pronto [conclui após clicar sobre a ferramenta *Mediatriz* e em seguida sobre o segmento BC].

Aluna B1: Como não sabemos a posição da bola, só sabemos que ela está sobre a linha do meio do campo, colocamos um ponto em qualquer lugar dessa linha pra fazer testes. Depois, traçamos um segmento saindo de A até a bola (ponto E) e outro saindo de B até a bola. Rotacionamos a bola em torno de A, 90° , sentido horário, e fizemos o mesmo em torno de B, só que sentido anti-horário.



Aluna A1: [cria o ponto E sobre a reta mediatriz, traça os segmentos BE e AE, clica sobre a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto*. Em seguida clica em E, depois em B e determina a medida angular de 90° e o sentido anti-horário. Faz o mesmo movimento de rotação de E em relação a A, porém, no sentido horário]. Agora eu traço os AE'1 e BE' [seleciona a ferramenta *Segmento* e clica sobre esses pontos, dois a dois].

Pesquisador: Mas o que significam estes segmentos BE' e AE'1?

Aluna A1: É que o problema diz que as pessoas devem andar a mesma distância das bandeirinhas até a bola. BE é igual a BE' e AE é igual a AE'1.

Pesquisador: Como sabem que essas distâncias são iguais?

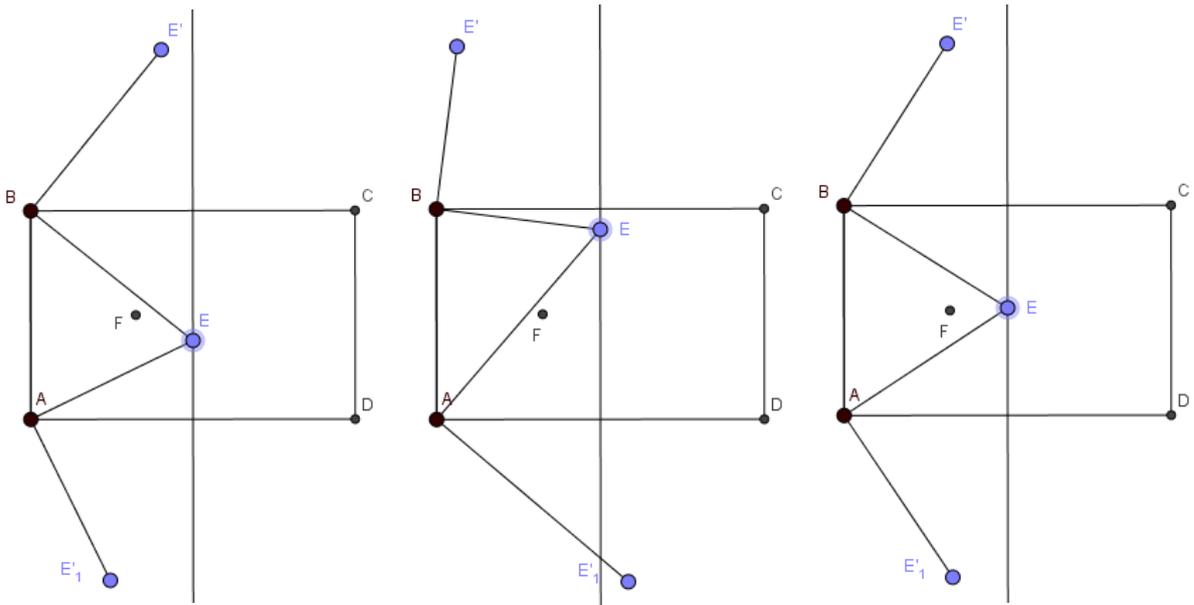
Aluna B1: (8) Dá pra perceber pelo desenho que são iguais. E também, (9) na rotação é como se fosse numa circunferência de centro tal, todo ponto rotacionado em torno desse centro mantém um mesmo tamanho, que é o raio. Por isso são iguais.

Pesquisador: Beleza. Podem continuar então.

Aluna B1: Depois, aqui, marcamos o ponto médio entre os pontos E' e $E'1$ (10) [**posiciona** o dedo indicador da mão direita na projeção, no local onde se marcaria o ponto médio]. Esse ponto médio é onde a cápsula foi enterrada.

Pesquisador: Vocês conseguem garantir que essa é a solução? Se sim, como?

Aluna A1: Podemos garantir pois a posição da bola na linha do meio do campo não importa. Olha só, (11) **eu** movo o ponto E e a posição da cápsula não muda (12) [**conclui** após marcar o ponto médio entre os pontos E' e $E'1$ com auxílio da ferramenta *Ponto Médio ou Centro e*, em seguida, movimentar o ponto E para cima e para baixo sobre a linha de meio de campo].



Aluna B1: (13) **É** a possibilidade de movimento que dá a garantia, o ponto F é fixo independentemente da posição do ponto E .

Pesquisador: E todo o resto que fizeram? Não é relevante?

Aluna B1: É sim. (14) **Se** tivéssemos feito uma construção errada, na hora de mover o ponto E poderia dar tudo errado, poderia desconfigurar tudo. Então, (15) **acho** que o ponto F não varia por causa das construções, das propriedades que utilizamos.

Pesquisador: E com quais propriedades vocês trabalharam? Mais alguma coisa não varia?

Aluna A1: Acho que principalmente as propriedades de perpendiculares e do ponto médio.

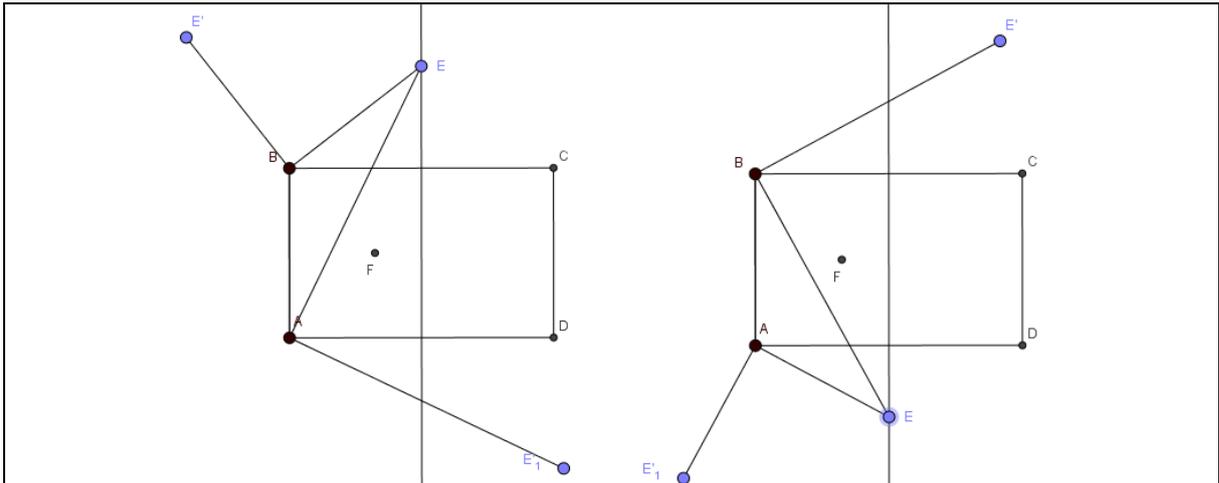
Aluno D1: (16) **Teve** também o giro, que é rotação, e a questão de segmentos iguais. Isso tudo foi fundamental para o ponto F não variar. Esses segmentos iguais ($BE = BE'$; $AE = AE'1$) se mantém iguais, os ângulos retos continuam retos por mais que mova o ponto E . F é sempre o ponto médio do segmento $E'E'1$. Essas são outras coisas que não variam no movimento.

Pesquisador: Muito bem, gostei! Alguma outra consideração sobre o problema?

Aluna E1: Eu tenho. Acho que (17) **se** mover o ponto (ponto E) para fora do campo, ali, na mediatriz, o ponto F ainda manterá a posição.

Pesquisador: Será? Aluna A1, vamos ver isso. Move aí o ponto E tirando ele do campo.

Aluna A1: (18) **Já** to movendo. Olha só! Não é que é mesmo! [Indaga após clicar sobre o ponto E , arrastá-lo e se surpreender com o percebido].

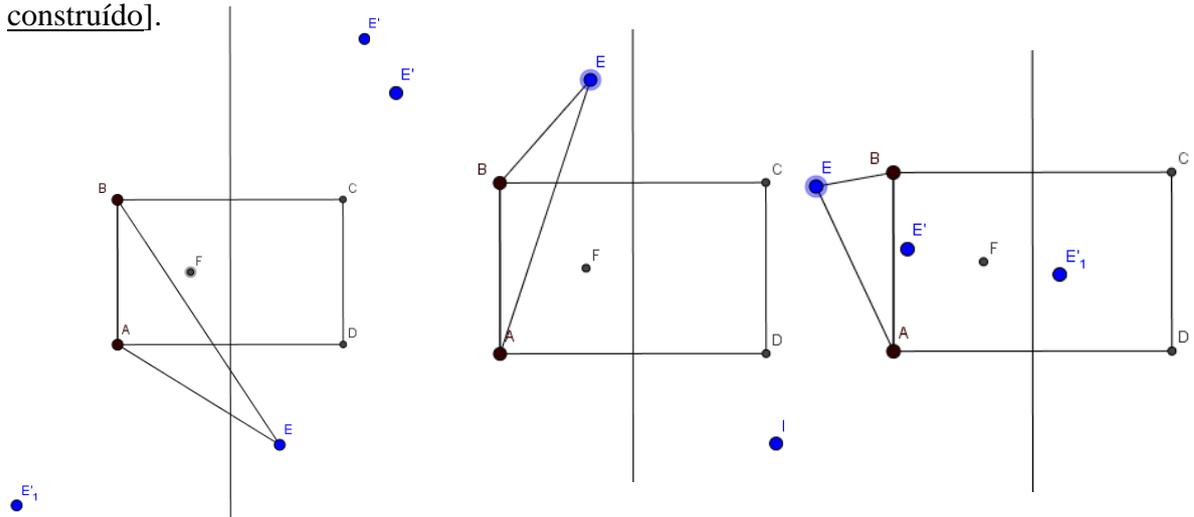


Aluno F1: Que legal! Parece então que mesmo se não tivesse essa linha de meio de campo, ainda assim daria certo.

Aluna B1: Nossa, é mesmo! Será? Posso fazer aqui rapidinho?

Pesquisador: Claro, também estou curioso.

Aluna B1: (19) Uauuu! A bola pode estar em qualquer lugar, mesmo fora do campo! [Indaga após excluir o ponto E, refazer os passos rapidamente e mover o ponto E que foi novamente construído].



Pesquisador: É isso aí! Pergunto novamente, o que garante isso?

Aluno F1: (20) São as coisas que não variam com o movimento, e elas não variam porque no percurso fomos construindo perpendiculares, igualdades. (21) O que faz validar é o movimento.

Aluno B1: (22) É isso mesmo. Se a gente não movesse o ponto E não veríamos que F não varia.

Pesquisador: Muito bom! É isso aí gente! Depois desta discussão tão bacana, acho que podemos avançar e discutir a outra atividade.

O sentido do dito – Unidades Significativas

US1A1: Realiza um movimento preciso com o *mouse* buscando fazer com que o ângulo entre dois segmentos construídos na interface do *software* seja de 90° .

US2A1: Movendo uma das mãos sinaliza o movimento de um ponto e, com a outra mão, aponta para a região angular que vai se modificando com o movimento desse ponto.

<p>US3A1: Com o movimento do <i>mouse</i> faz mover-se um ponto que está na interface do <i>software</i>.</p> <p>US4A1: Frente a um objetivo almejado junto à interface do <i>software</i>, a aluna controla e determina o início e o fim de um movimento por ela realizado.</p> <p>US5A1: Vale-se da visualidade do <i>software</i> para afirmar a igualdade ou proximidade de uma medida angular.</p> <p>US6A1: Realiza movimentos com as mãos para indicar e apontar na projeção o que está falando.</p> <p>US7A1: Com seu braço representa um objeto matemático.</p> <p>US8A1: Percebe no desenho que segmentos são iguais, e isso leva o aluno a afirmar essa igualdade.</p> <p>US9A1: Entende que no movimento de rotacionar um ponto pertencente à uma circunferência, esse ponto pode ocupar qualquer posição, mas estará sempre a uma mesma distância do centro desta circunferência.</p> <p>US10A1: Realiza o gesto com a mão de apontar, dirigido à projeção, indicando um posicionamento que deve ser construído na interface do <i>software</i>.</p> <p>US11A1: No movimento de um ponto, percebe que outro ponto (vinculado ao primeiro) se mantém estático.</p> <p>US12A1: Realiza movimentos com o <i>mouse</i> assumindo determinada direção e sentido de movimento.</p> <p>US13A1: Tem na possibilidade de movimento junto ao <i>software</i> e no que esse movimento mostra, a garantia para afirmar que um ponto se preserva invariante mesmo após a variação de um ponto vinculado a ele.</p> <p>US14A1: Credita à construção devidamente feita, a preservação de sua estrutura mesmo após movimentos realizados.</p> <p>US15A1: Acha que a construção correta do que foi posto no enunciado é responsável pela não variação de um ponto.</p> <p>US16A1: Visualiza propriedades que sustentam toda a construção. Propriedades essas que não variam quando realizado um movimento.</p> <p>US17A1: Nas configurações do movimento percebido, visualiza uma possibilidade de movimento que está além do enunciado da atividade. Materializada essa possibilidade compreende que ainda assim, o ponto F não muda de posição.</p> <p>US18A1: Controla o movimento do ponto E, levando-o para fora do campo. Com isso, verifica como verdadeira a possibilidade de o ponto F manter-se fixo.</p> <p>US19A1: Acelerando o movimento do <i>mouse</i>, e com isso também acelerando o ponto movido, valida a conjectura de que a bola poderia estar em qualquer lugar, dentro ou fora do campo, e mesmo assim o ponto onde se cavaria para retirar a cápsula, não muda.</p> <p>US20A1: Credita ao percurso da construção, atendendo ao enunciado, a não variação de algumas “coisas” quando incidido um movimento nessa construção.</p> <p>US21A1: Entende o movimento como o modo de validar a solução do problema.</p> <p>US22A1: Compreende que é com o movimento que se pode ver o que não se move.</p>

Quadro 2: Transcrição e Análise Ideográfica do desenvolvimento da Atividade 1

Fonte: O autor

Assim se deu a transcrição e início de análise do desenvolvimento das atividades trabalhadas em campo de pesquisa. Partimos agora para a transcrição das entrevistas com os sujeitos e realizamos o mesmo movimento de análise apresentado no quadro anterior.

4.2.2 Dialogando sobre a percepção do movimento ao realizar atividades em Geometria Dinâmica

Buscando constituir dados que nos levem a compreender *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o computador e alunos realizando atividades em*

um ambiente de Geometria Dinâmica, além de propor a vivência com as atividades cujos desenvolvimentos foram transcritos no tópico anterior, propomos no segundo encontro, após a realização de uma última atividade, uma conversa com os alunos, que nos permitiu focar o *movimento* e avançar no diálogo acerca do dito sobre o que se mostrou junto ao mesmo.

Da interrogação de pesquisa emergiram outras perguntas, que foram apresentadas a cada um dos grupos. São elas:

- 1) *Vocês já realizaram atividades como as aqui desenvolvidas, porém sem o computador? Se sim, falem um pouco sobre essa experiência e sobre as experiências aqui vivenciadas.*
- 2) *Na vivência com as atividades que realizaram aqui nos encontros, vocês perceberam o movimento? Se sim, como se deu essa percepção?*

Optamos por não caracterizar o *movimento* posto na segunda pergunta, pois buscamos pelo que se mostra quando focado o *movimento*. Com isso, vimos que as respostas dadas pelos sujeitos a essa pergunta giravam em torno da tecnologia informática com a qual trabalharam; destacou-se a percepção do movimento de objetos geométricos na interface do *software* e a possibilidade dinâmica que o mesmo dispõe. Essas respostas são relevantes para nosso estudo. No entanto, também se fez importante à pesquisa compreender como esses sujeitos se percebem nesse movimento que eles dizem perceber na interface do *software*. Para isso, apresentamos na entrevista com o Grupo 1, e depois levamos aos demais grupos, a terceira pergunta:

- 3) *Vocês se veem nesses movimentos que disseram ter percebido? Se sim, falem sobre isso.*

Esta pergunta foi incorporada à entrevista, que inicialmente era composta pelas duas primeiras perguntas e pela que logo abaixo destacamos:

- 4) *Realizando as atividades, houve aprendizado? Se sim, o que aprenderam e como aprenderam?*

Assim como o relato das atividades, as entrevistas também foram registradas por aparelho audiovisual. O que fazemos adiante é a transcrição desses registros. No corpo desta transcrição também realizamos a explicitação de Unidades de Sentido; sublinhamos e numeramos frases que se mostraram importantes à compreensão do que interrogamos em nossa questão de pesquisa.

Na sequência (no Quadro 3), é exposta a primeira pergunta e, abaixo dela, as respostas dos alunos. Como a mesma pergunta foi feita aos três grupos, expomos no mesmo quadro as respostas do Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3, respectivamente, separadas conforme poder-se-á ver.

Conforme já mencionado, as demais perguntas, as respostas dadas a elas e o movimento de análise que exemplificamos no Quadro 3, são apresentadas ao leitor nos apêndices desta tese, mais especificamente, no Apêndice 3.

PERGUNTA 1 - *Vocês já realizaram atividades como as aqui desenvolvidas, porém sem o computador? Se sim, falem um pouco sobre essa experiência e sobre as experiências aqui vivenciadas.*

Alunos dos Grupos 1, 2 e 3: Sim. (Boa parte dos sujeitos respondem já ter trabalhado com atividades como as que desenvolveram na pesquisa, mas sem o auxílio do computador)

Aluno C1: Vejo semelhança nas atividades. O que é diferente é que você colocou um contexto que deixou mais interessante, sendo mais desafiador, sabe? São muitos exercícios que os professores de Matemática passam e a gente fica vidrado só nas contas pra resolver, nem pensamos que só o desenho já pode dar uma solução. Com relação ao desenho, vejo também diferença, a gente aprende na escola a usar régua e compasso. Acho até que dava pra resolver os problemas aqui com régua e compasso, mas ia demorar muito tempo. Teria que fazer várias retas, circunferências, ia até ficar embolado tudo no papel. (1) No Geogebra, dá pra fazer mais rápido, as ferramentas já dão as coisas prontas, é só clicar. (2) Se for ficando muito cheio, dá pra ocultar, não tem que usar borracha. (3) No final das contas, quando a gente vai construir com régua e compasso e com o Geogebra, eu acho que dá pra fazer as mesmas coisas. É a agilidade e a coisa do visual do computador que deixa a gente colorir, apagar, ocultar. Essas coisas que deixam o trabalho diferente.

Aluna E1: Mas olha, (4) eu acho que o que tem de mais diferente é a questão de poder movimentar. Lembram da atividade da cápsula? (5) Nós vimos um tanto de coisa depois que movimentamos o ponto lá, que era a bola. (6) Vimos as propriedades que não variam, que a bola pode estar em qualquer lugar. (7) No papel, não daria pra movimentar a bola, então a gente ia achar uma posição e pronto, uma resposta única. Se não viesse uma luz, a gente ia achar que só era aquela resposta. Então, pra mim, (8) ir arrastando os pontos e ir vendo o que acontece é muito bacana, (9) podemos focar no que tá acontecendo no movimento que fazemos. Com régua e compasso, temos que fazer várias construções pra ver se acontece algo.

Aluna G1: Eu concordo com os dois, mas não vou dizer que um é melhor ou pior, tem suas diferenças, mas por exemplo, o que o Aluno C1 disse, que as ferramentas estão prontas, isso pode ser visto como algo bom ou algo ruim. Acho que depende do nível dos alunos. Com régua e compasso nós aprendemos a fazer uma reta perpendicular, por exemplo, é bacana, fazendo a perpendicular aprendemos a movimentar ali as ferramentas (se refere ao compasso

e as réguas). É mais trabalhoso? É. Mas a gente aprende fazendo. Agora, no Geogebra, basta clicar sobre a reta perpendicular e pronto. (10) Para o aluno iniciante, que ta começando a aprender Geometria, acho que já clicar e ter algo pronto não é tão bom, mas, para o aluno já desenvolvido, se ele já sabe o conceito, já sabe trabalhar com ele, já ter pronto é meio caminho andado, é bom. Entenderam?

Aluna A1: É, eu também concordo. (11) Concordo com todos, a resolução das atividades no software é mais rápida, e (12) por ter algumas construções prontas, a chance de erro é menor, no papel se a mão escorrega um pouquinho, se a ponta do lápis for grossa, não fica tão preciso. Mas, (13) mesmo tendo as construções prontas, não fica mais fácil as coisas, até porque elas são aquelas construções elementares, tem que saber trabalhar com essas construções. Olha as atividades que fizemos, foi muito difícil, tinha hora que eu não sabia pra onde ir, daí fomos conversando e foi saindo algumas possibilidades. Eu acho bacana régua e compasso, todos os alunos têm que saber trabalhar com isso, mas (14) achei ótimo trabalhar as atividades no Geogebra, principalmente porque nas atividades tivemos que investigar algumas possibilidades, aí, o negócio de criar retas, tirar retas, criar ponto e circunferências e depois tirar, é muito prático, é rapidinho. E tem também, que você (o pesquisador) pedia sempre pra gente tentar validar as respostas, aí (15) essa possibilidade de criar e apagar, e principalmente a de mover alguns objetos, mostra pra gente algumas formas de validar as soluções, que é muito bacana né?

----- ~~~ -----

Aluno L2: A diferença começa pelo material manipulável; na escola eu usava régua e compasso pra resolver alguns exercícios de Geometria, aqui na faculdade conhecemos o Geogebra, e (16) manipulamos o mouse e movemos as figuras na tela, e vemos elas se transformando ali. Acaba que o Geogebra por ser tecnologia, acaba por ser mais avançado, a régua e compasso é mais limitado, exige mais ééé...como que fala? Destreza pra usar, eu até suava frio pra ajustar a pontinha de ferro do compasso (risos), mas eu gostava muito. Outra diferença é na agilidade, (17) no Geogebra é tudo mais rápido; nós clicamos lá nas plaquinhas (se refere aos ícones) e pronto. Com régua e compasso, vai traço pra lá, traço pra cá, e fazemos a mesma construção. (18) A questão principal que vejo é essa possibilidade de arrastar, tipo assim; um triângulo no papel é parado né? Eu não consigo mover ele, tirar ele do lugar. Já no Geogebra é só clicar sobre ele e arrastar o mouse. Isso que faz o Geogebra ser melhor pra resolver problemas iguais aos que você passou. (19) Pra investigar é ótimo, a

gente move os objetos, tira eles do lugar, se não vemos nada, voltamos ele pro lugar, e vamos movendo até perceber algo que vai ajudar a resolver o problema.

Aluna M2: Nossa, se fosse pra resolver com régua e compasso a gente ia perder muito tempo, isso porque antes de chegar na resposta, nós erramos muito. No Geogebra é só deletar e fazer de novo. Com régua e compasso, no papel e com minha borracha “mancha folha” ia ficar tudo borrado, eu ia ter que jogar a folha fora e pegar outra, e outra, até fazer tudo sem errar. Eu achei muito bacana as atividades, tanto que não acho que fiz outras semelhantes não, fiz atividades com régua e compasso, mas só exercício, tipo fazer uma perpendicular, uma paralela, tipo assim. Seria interessante, lá quando aprendemos a trabalhar com régua e compasso, os professores passarem problemas assim, por mais que vai ser mais demorado, mas faz a gente pensar mais, aprender mais.

Aluna B2: Eu também aprendi a mexer com régua e compasso na escola, mas não foi fazendo atividades como essas. Eu achei essas atividades muito bacanas. Mesmo assim dá pra apontar algumas diferenças. Como já disseram, a mais forte é a possibilidade de movimento mesmo. (20) No exercício da folha (refere-se à Atividade 5), criar a reflexão e depois mover a reta e ir vendo o ponto de reflexão também movimentar, foi muito massa (legal), ajudou cem por cento pra ver a solução. Com régua e compasso não dá pra fazer isso, (21) é como que no Geogebra você pudesse experimentar na prática mesmo, sabe? E até achar uma solução ou ver algumas coisas que podem ajudar. Imagina se esse problema de dobrar a folha fosse pra resolver com régua e compasso, a gente ia ter que saber ou não saber, não tem como testar, arrastar né?, tinha que ficar matutando (pensando) ali até sair uma ideia.

Aluno A2: Realmente, um é mais na prática e o outro é mais no raciocínio, que também é bom né? (refere-se ao trabalho com o Geogebra e ao trabalho com régua e compasso, respectivamente). Mas esse exercício da folha, nós conseguimos fazer dobrando um papel mesmo, foi rápido e deu certo, mas, concordo que com régua e compasso, ia ser bem mais difícil, ou impossível. Tentei bastante em casa com régua e compasso e não consegui de jeito nenhum. Eu sabia que tinha que passar uma mediatriz, por causa da reflexão, mas não dá pra saber onde colocar a mediatriz sem saber onde estariam as reflexões, aí desisti. (22) Só com o Geogebra mesmo e com a possibilidade que ele dá de movimentar que consegui fazer.

Aluno N2: Não sei, acho que depende da situação, (23) os dois tem isso de pegar e fazer, giramos o compasso, arrastamos as réguas. No computador, arrastamos o mouse, clicamos no botão. Então os dois envolvem muita prática. Essa questão eu acho que tá bem ligada à questão do movimento mesmo, mas também à questão da visualização. (24) É claro que não

dá pra comparar a visualização na tela do computador com a visualização no papel. No computador é tudo mais rápido; a gente movimenta o mouse e vê na hora (na interface) o objeto que a gente clicou se mover também. No papel não tem isso. Nós conseguimos fazer uma projeção, outras figuras, que por ocupar outras posições representam o deslocamento da figura inicial, temos que fazer essa figura e colocar ali como se uma seta dizendo que foi pra outro lugar. Então, é isso, não sei se estou explicando direito, (25) **nós** vemos as coisas acontecendo muito mais rápido no Geogebra.

Aluno A2: É, isso mesmo, bacana! (26) **Eu** to pensando aqui na questão dos invariantes. Quando movemos algo, e tudo que foi construído no percurso do exercício se mantém, a gente visualiza que se mantém porque movimentamos ali, mas, em um desenho no papel, não tem como fazer isso.

Aluna E2: Não dá mesmo, mas aí vai da proposta de cada exercício; (27) **aqui** nos problemas, acho que o que não variava era sempre importante percebermos pra chegarmos em respostas. (28) **Nós** vemos o que não varia num simples movimento de um ponto. Mas, com régua e compasso, acho que dá pra fazer a mesma coisa, dá pra ver invariantes também, é só realizar algumas vezes a mesma construção, aí vamos ver que aquelas mesmas propriedades que não variam no Geogebra, também não variam com régua e compasso. É a mesma coisa, só que o computador potencializa. (29) **Mover** um objeto qualquer faz acontecer outros movimentos juntos, não é? Então isso é o mesmo que construir várias vezes. Acontece que o computador faz isso por meio de programação, aí fica bem mais rápido.

Aluno O2: (30) **No** computador é mais fácil de fazer, a gente visualiza melhor, tem cor, é muito mais visível. (31) **É** mais preciso também, igual, no caderno, não dá pra dizer ao certo que um segmento é igual a outro segmento, o computador permite fazer segmentos iguais. **É** mais preciso, aí, as respostas dos problemas são mais precisas também.

----- ~~~ -----

Aluno I3: Se fossemos resolver esses problemas no papel, iríamos desenhar retas, retas e retas e um monte de circunferência, e os desenhos iriam se embolando e acabaria que poderíamos nos perder nisso tudo. (32) **No** Geogebra, o aspecto visual é melhor, é mais limpo e, se for ficando embolado, podemos ir limpando, ocultando aqui, ocultando ali.

Aluno K3: (33) **Eu** acho que a cereja do bolo, no Geogebra, que dá a total diferença de uma resolução no papel, é poder arrastar. (34) **Movemos** um ponto e, por exemplo, nas atividades, o que estava ligado a este ponto se move também. (35) **No** exercício da mangueira mesmo (se refere à Atividade 3), pede para encontrarmos outras posições pro ponto G lá, mas, pra

isso, não precisamos sair construindo tudo de novo, foi só mover um ponto e o G se movia também. Então, acho que o mais importante no Geogebra, que faz tudo ficar mais fácil é a possibilidade de arrastar, de movimentar os objetos, o que não é possível no papel.

Aluna A3: (36) Também acho que essa questão do movimento e da visualização foram fundamentais pra conseguirmos resolver os problemas. (37) Se não tivessem as possibilidades de movimento nós não iríamos ver as propriedades sendo preservadas quando movimentamos um ponto. Na questão da mangueira (Atividade 1) e do campo (Atividade 3), teve muito isso; (38) por mais que fomos fazendo os passos, só fomos ver a importância deles e as propriedades que amarravam eles, depois de movimentar o ponto. Foi uma forma que você (dirigindo-se ao pesquisador) pensou pra gente compreender melhor as propriedades. Achei muito legal isso, pois (39) movendo rápido e depois movendo bem devagar, deu pra ir vendo e estudando as propriedades. As que a gente já conhecia, deu pra ver elas aplicadas num contexto, isso foi bacana também.

Aluno F3: (40) O computador é também mais atrativo. Eu gosto mais porque fica tudo mais dinâmico, até mesmo pra mostrar algumas ideias que estamos pensando. Resolvendo as atividades, eu tinha algumas ideias, mas não tinha que ficar explicando pro Aluno K3. (41) Eu pegava o mouse e mostrava na tela o que eu estava pensando. Até isso acho que é mais vantajoso do que no papel, dá pra mostrar melhor as coisas. (42) A gente vai movendo e falando pro colega o que a gente tá vendo, tá pensando, é mais prático, aí ele vê e entende, depois ele pode também fazer a mesma coisa. Acho que isso tá ligado ao que já foi falado já, ao movimento e também à visualização dinâmica que o software permite. (43) A visualização do movimento nos ajudou a comunicar, testar as possibilidades e também a chegar nas soluções. Eu achei muito boas as atividades, boas mesmo, deu pra trabalhar um tanto de conceitos e foram desafiadoras, pelo menos pra mim. Não foram impossíveis, mas geraram dificuldade, olha que foi no computador, imagina se fosse no papel, com régua e compasso, acho que eu não conseguiria, seria bem mais difícil e, haja papel pra tantos desenhos e erros.

Aluno L3: Olha, no meu ver, dava pra resolver essas atividades com régua e compasso sim, dá pra ver as propriedades também, ainda mais porque você faz elas ali bem caprichado, cuidadosamente com o compasso e com a régua. Você constrói uma propriedade tendo que saber como fazer e quais outras propriedades pode usar pra essa construção. Então, nesse ponto, acho que exige maior atenção que o Geogebra; (44) no Geogebra uma perpendicular, uma bissetriz, já tá pronto, tudo pronto. Então acho que antes de ir pro Geogebra e clicar nessas ferramentas, acho que os alunos devem que saber construir cada uma delas, passo a

passo, entendendo elas. Tem também a questão de que muitos professores nas escolas têm como material apenas papel, não tem computadores. Então, régua e compasso é mais fácil de conseguir.

Aluna D3: Concordo, concordo, acho isso também, as duas possibilidades são importantes em tempos diferentes. No nosso caso aqui, o mais importante foi saber trabalhar com alguns conceitos. As atividades, acho que são investigativas; (45) a gente tinha que investigar, testar, fazer um tanto de coisa, então, não dava aqui pra ficar construindo cada coisa. La pras crianças, que estão aprendendo as primeiras figuras geométricas, acho importante ser régua e compasso, trabalhar com atividades simples de construir algumas figuras. (46) Mas aqui, a questão de ter pronto no Geogebra ajuda muito, e isso não deixou as atividades mais fáceis, foi difícil. (47) Mas é isso, nós usamos as ferramentas pois sabíamos o que cada uma fazia, usamos a questão também de arrastar, mas a gente já conhecia essa opção, por isso é bom na escola e aqui também na faculdade, tentar intercalar as duas metodologias.

O sentido do dito – Unidades Significativas

US1P1: Compreende que o *software* possibilita com suas ferramentas, agilidade na construção.

US2P1: Diz da possibilidade do *software* de ocultar objetos na construção para melhor visualização.

US3P1: Entende que a agilidade, a visualidade e possibilidades como colorir e ocultar objetos presentes na interface do *software*, permitem um trabalho distinto do trabalho com régua e compasso.

US4P1: Destaca o movimento como sendo o elemento que torna mais distintos os trabalhos com régua/compasso e com *software*.

US5P1: Afirma que após o movimento de um ponto foi possível ver muitas coisas.

US6P1: Enfatiza ter visto invariantes quando realizados movimentos em um ponto, levando-o para qualquer lugar na interface do *software*.

US7P1: Compara a possibilidade de movimento no papel e no *software*, destacando que no papel não se pode arrastar um ponto, o que levaria ao entendimento de que a posição ocupada pela bola é única.

US8P1: Mostra gostar da possibilidade de arrastar e ver as implicações desse movimento materializando-se na interface do *software*

US9P1: Entende que ao realizar um movimento pode-se atentar ao que o mesmo provoca na interface do *software*.

US10P1: Entende que os ícones que fornecem construções diretas tornam mais ágil as solicitações de uma tarefa. No entanto, entende que é preciso conhecer e saber realizar no papel as construções que o *software* fornece num simples clicar.

US11P1: Enfatiza que a resolução de um problema com o *software* é mais rápida.

US12P1: Enfatiza que o *software* possibilita maior precisão na construção.

US13P1: Compreende que mesmo o *software* ofertando ícones que fornecem algumas construções prontas, o trabalho nesse ambiente não fica mais fácil se não se sabe trabalhar com as construções fornecidas.

US14P1: Entende que as possibilidades de construção do *software* tornam o trabalho investigativo mais prático e rápido.

US15P1: Entende que possibilidades do *software* como criar e apagar e principalmente a possibilidade de mover os objetos construídos, contribuem para a validação de soluções encontradas para um problema.

US16P1: Enfatiza que com a manipulação do *mouse* move figuras na interface do *software*.

US17P1: Entende que as possibilidades construtivas dos ícones do *software* deixam o trabalho mais rápido.

- US18P1:** Entende como “questão” principal do *software* o “arrastar”, que permite tirar um objeto do lugar com movimentos realizados com o *mouse*.
- US19P1:** Entende que realizando movimentos e repetindo movimentos pode-se ver algo que possa ajudar na resolução do problema.
- US20P1:** Entende que o movimento realizado e suas implicações perceptíveis na interface do *software* ajudou a ver a solução do problema.
- US21P1:** Entende que o *software* possibilita um trabalho prático, possibilita a experimentação para que se veja a solução do problema ou algo que venha a ajudar na resolução do mesmo.
- US22P1:** Afirma que foi só com o *software* e com a possibilidade que o mesmo lhe dá de mover objetos, que ele pôde resolver o problema.
- US23P1:** Entende que ambos os trabalhos, o com régua e compasso e o com *software*, envolvem muita prática. Evidencia possibilidades de movimento em ambos os trabalhos.
- US24P1:** Compreende que o movimento realizado com o *mouse* pode ser visto ao mesmo tempo se materializando na interface do *software*.
- US25P1:** Comparando construções geométricas no papel e no *software*, enfatiza que se pode ver as coisas acontecendo de forma muito mais rápida no *software*.
- US26P1:** Entende que a visualização de invariantes ocorre quando há realização de movimentos.
- US27P1:** Compreende que para a resolução dos problemas trabalhados, a percepção dos invariantes foi importante.
- US28P1:** Afirma que se pode ver o que não varia na figura quando realizado um “simples” movimento sobre um ponto.
- US29P1:** Entende que o movimento de um objeto na interface do *software* faz acontecer outros movimentos nessa mesma interface. Entende também que esse movimento, por ser possível através de uma programação computacional, torna o trabalho mais rápido.
- US30P1:** Entende que no computador, construir e visualizar é mais fácil do que no papel.
- US31P1:** Entende que o *software* permite maior precisão na construção de medidas iguais e, desta forma, permite uma solução mais precisa para um problema.
- US32P1:** Entende que o *software* propicia em sua interface um trabalho mais “limpo” visualmente, visto que quando ela estiver muito cheia, pode-se iniciar uma “limpeza”, ocultando objetos construídos.
- US33P1:** Entende como principal diferença entre construções no papel e construções no *software* a possibilidade de arrastar presente no *software*.
- US34P1:** Afirma que ao movimentar um ponto, o que está ligado a esse ponto também se movimenta.
- US35P1:** Ao exemplificar que o movimento de um ponto substitui uma diversidade de construções, enfatiza que a possibilidade de arrastar, de mover objetos, é o que há de mais importante em *softwares* de GD.
- US36P1:** Entende que as possibilidades de movimento e de visualização do movimento na interface do *software* foram “fundamentais” para resolução dos problemas.
- US37P1:** Entende que sem a realização de movimentos, não haveria a visualização da preservação de propriedades, de invariantes.
- US38P1:** Compreende que as construções e propriedades que as abarcam são vistas como relevantes para a solução do problema apenas quando elas são colocadas em movimento.
- US39P1:** Indica a possibilidade de estudar as propriedades de uma construção colocando-a em movimento e controlando a velocidade desse movimento.
- US40P1:** Comparando o trabalho no *software* com o trabalho no papel, enfatiza que o computador é mais atraente, fornecendo um dinamismo que permite mostrar algumas ideias pensadas.
- US41P1:** Afirma que realizando movimentos de objetos com o *mouse*, mostrou a seus colegas de grupo alguns pensamentos seus se materializando na interface do *software*.
- US42P1:** Enfatiza que enquanto move o *mouse* e vai expondo as implicações desse movimento na interface do *software* e do que se está pensando com esse movimento, os colegas de grupo podem ver e entender o que está sendo feito. Enfatiza com isso, que essa possibilidade está ligada ao movimento e à visualização do movimento permitidos pelo *software*.
- US43P1:** Entende que a visualização do movimento ajudou no processo de comunicação e resolução do problema.

US44P1: Compreende que construções realizadas diretamente ao clicar em ícones do *software* devem ser anteriormente realizadas passo a passo e compreendidas.

US45P1: Entende que com as solicitações investigativas da tarefa não haveria tempo para realizar construções passo a passo.

US46P1: Afirma que os ícones que fornecem construções prontas não foram suficientes para deixar a atividade mais fácil.

US47P1: Enfatiza que as ferramentas utilizadas, o que cada uma faz e a possibilidade dinâmica do *software* já eram de conhecimento dos alunos, por isso pôde-se saber o que fazer com elas no desenvolvimento das atividades.

Quadro 3: Transcrição e Análise Ideográfica das respostas dadas à Pergunta 1

Fonte: O autor

Ao voltarmos-nos atentamente às transcrições do desenvolvimento das atividades e das entrevistas, destacamos Unidades de Sentido com as quais pudemos articular 316 unidades significativas. Esse primeiro movimento de análise corresponde à *Análise Ideográfica*. Continuando no movimento de *redução fenomenológica*, isto é, de expressar os sentidos e significados do que se mostraram na análise das entrevistas buscando núcleos de significado que, mediante articulações avançam para Ideias Nucleares que possam nos permitir compreender o fenômeno que aqui estudamos, o movimento-percepção-conhecimento, encaminhamo-nos para a realização da Análise Nomotética.

4.3 A Análise Nomotética: buscando as convergências das Unidades Significativas e constituindo as Ideias Nucleares

Neste momento de pesquisa efetuamos a Análise Nomotética que traz reduções que reúnem sentidos e significados articulados em Ideias Nucleares, que os abrange.

Entendemos o movimento que constitui a Análise Ideográfica como um movimento de redução, em que foram evidenciadas Unidades de Sentidos, posteriormente articuladas como Unidades Significativas.

Na Análise Nomotética realizamos outras reduções, *reduções sucessivas*, e buscamos refletir sobre o que cada uma delas dizem, quando focadas da perspectiva da interrogação da pesquisa.

Iniciamos essa explicitação pela redução que chamamos de *Primeiro Movimento de Convergência*, que expomos a seguir.

PRIMEIRO MOVIMENTO DE CONVERGÊNCIA

As Unidades Significativas destacadas nas atividades e nas entrevistas são por nós consideradas e estudadas em um mesmo movimento de análise. Entendemos que tanto na explicitação do desenvolvimento das atividades quanto nas entrevistas, os sujeitos expressaram sobre o movimento e sobre a percepção do movimento, não cabendo, portanto, tratar separadamente as unidades destacadas nesses dois momentos. Com isso, listamos todas as unidades, da US1A1 até a US39P4, uma abaixo da outra. Iniciamos a leitura de cada uma dessas unidades e frente a elas fomos articulando *o que elas dizem*. Vimos que algumas delas expressavam sentidos que convergiam, outras não, o que permitiu ir constituindo grupos distintos de Unidades Significativas. No entanto, vimos que uma mesma unidade convergia para mais de um grupo, o que mostra que as convergências não constituem grupos isolados, mas uma rede complexa de articulações a serem estudadas e compreendidas.

Os grupos aos quais convergiram as 316 Unidades Significativas nomeamos como *C. Ao todo foram constituídos 89 grupos de convergência. Assim, tem-se a contagem de *C01 à *C89. Trazemos a totalidade desse movimento de convergência no Apêndice 4. No entanto, evidenciamos abaixo, no Quadro 4, as convergências com as quais articulamos *C01 e *C02, para exemplificar o modo como organizamos o quadro que abarca todas essas convergências.

Cada grupo constituído expressa o que diz o conjunto de unidades que a ele converge. Para deixar mais claro as convergências, destacamos (negrito + itálico) em cada Unidade Significativa o que para nós são evidências que fazem a convergência possível.

Assim, uma Unidade Significativa que converge a mais de um grupo, pode ter destaques distintos, correspondentes ao grupo que a abarca. Esse mesmo procedimento é adotado nos quadros das demais reduções.

Unidades Significativas	*C
US1A1: Realiza um <i>movimento preciso com o mouse buscando fazer</i> com que o ângulo entre dois segmentos construídos na interface do <i>software</i> seja de 90°.	*C01 – O controle do movimento do <i>mouse</i> para responder ao solicitado
US4A1: <i>Frente a um objetivo almejado</i> junto à interface do <i>software</i> , a aluna <i>controla e determina o início e o fim de um movimento</i> por ela realizado.	
US2A2: Movendo o <i>mouse</i> , <i>move uma reta até que ela passe por um ponto já conhecido</i> .	
US5A2: <i>Controla o objeto movido e o como ele deve ser movido para alcançar um objetivo</i> da tarefa.	
US7A2: <i>O movimento é controlado pelo aluno</i> . Ele estabelece a precisão de seu movimento <i>para alcançar um objetivo</i> .	
US5A4: <i>Realiza um movimento cauteloso, preciso, intencionando alcançar</i> um objetivo previamente pensado.	

<p>US8A8: <i>Realiza um movimento de rotação, controlando-o</i> de forma que o segmento rotacionado em torno de uma de suas extremidades, <i>ocupe uma posição desejada</i>.</p> <p>US39P1: Indica a possibilidade de <i>estudar as propriedades</i> de uma construção colocando-a em movimento e <i>controlando a velocidade desse movimento</i>.</p> <p>US29P2: Entende que foi <i>o movimento de um objeto que permitiu alcançar um objetivo predeterminado</i>.</p> <p>US46P2: Entende que o saber que antecipa o que pode ser movido e o como pode ser movido, permite a realização de <i>movimentos mais precisos, visando encontrar detalhes</i>.</p> <p>US5P4: Vê que <i>movimentos mais cautelosos forneciam mais elementos</i> para resolver a atividade.</p>	
<p>US15A3: Afirma que realiza movimentos junto ao <i>software</i> e que <i>percebe mudanças</i>. No entanto, entende que junto a essas mudanças há propriedades que se preservam.</p> <p>US21A3: Enfatiza que quando realizado um movimento <i>“tudo sai do lugar”</i>, mas, nessa desconfiguração se preservam as propriedades previamente estabelecidas na construção.</p> <p>US24A3: Entende que se pode garantir a perpendicularidade realizando movimentos e olhando para a <i>região angular que vai se configurando nesse movimento</i>.</p> <p>US8A4: Realiza o movimento de um ponto e atenta-se às amplitudes dos <i>ângulos que se desconfiguram nesse movimento</i>, visando deixá-los iguais ou com medidas aproximadas.</p> <p>US12A4: Afirma que o que ajudou a ver a posição na qual o armador poderia estar, foi a possibilidades de colocá-lo em movimento, simulando posições ocupadas por ele e atentando aos <i>ângulos que iam se configurando com seu movimento</i>.</p> <p>US15A5: Compreende que quando realiza movimentos em E e F, A' e M' <i>também se movem, mudando de lugar</i>. Mas, sempre que se ajusta para que A' e M' ocupam as posições que são solução do problema, eles retornam para uma mesma posição, que é única.</p> <p>US1A8: Afirma que ao realizar o movimento de um ponto, <i>visualiza mudanças em um valor numérico exposto na interface</i> do <i>software</i>.</p> <p>US29P1: Entende que <i>o movimento de um objeto na interface do software faz acontecer outros movimentos nessa mesma interface</i>. Entende também que esse movimento, por ser possível através de uma programação computacional, torna o trabalho mais rápido.</p> <p>US1P2: Afirma que quando clicou sobre um objeto e o arrastou, foi possível ver esse <i>movimento acontecendo</i> na interface do <i>software</i>, <i>bem como o movimento que esse ato de arrastar provocou</i> em toda construção ligada a esse objeto.</p> <p>US19P2: Enfatiza que clicando sobre um ponto vinculado a uma figura e movendo-o, <i>pode-se destorcer a figura, provocando nela configurações</i> como ampliar ou reduzir seu tamanho.</p> <p>US26P2: Afirma ter visto <i>o movimento se materializando como mudanças na interface</i>, nas figuras.</p> <p>US34P2: Afirma ter visto <i>o triângulo se modificando enquanto um ponto ligado a ele era movido</i>. Afirma que nesse mesmo movimento, pôde-se ver que as retas que passavam por esse triângulo se preservavam sempre sendo mediatrizes de seus lados.</p>	<p>*C02 - O movimento do <i>mouse</i> gera transformação na interface do <i>software</i>.</p>

Quadro 4: Recorte do quadro do Primeiro Movimento de Convergência

Fonte: O autor

Agora, no Quadro 5, explicitamos os 89 grupos que emergiram dessas convergências.

***C01** - O controle do movimento do *mouse* para responder ao solicitado

***C02** - O movimento do *mouse* gera transformação na interface do *software*

***C03** - Intuição de medidas com base na visualização de objetos geométricos

***C04** - O movimento do *mouse* para expressar/indicar intenções

-
- *C05 - Representação de objetos geométricos com o corpo-próprio.
-
- *C06 - Percepção de propriedades matemáticas junto aos movimentos realizados
-
- *C07 - O movimento do corpo-próprio como modo de indicar e direcionar olhares
-
- *C08 - Controle do *mouse* e do movimento com ele realizado
-
- *C09 - Percepção de possibilidades que se mostram junto ao movimento realizado
-
- *C10 - O movimento para atualizar uma possibilidade percebida
-
- *C11 - O movimento para evidenciar e validar conjecturas e respostas
-
- *C12 - O movimento para validar a evidência de invariantes percebidos
-
- *C13 - A justificativa a partir do que se vê das implicações do movimento na tela
-
- *C14 - Percepção do movimento realizado em um ponto implicando na variação de posição de outros pontos
-
- *C15 - Percepção de propriedades pré-estabelecidas na construção da figura que é posta em movimento
-
- *C16 - O desempenhar-se como personagem e/ou objeto projetado na tela
-
- *C17 - Percepção de mudanças na interface que produzem variações articulando invariantes
-
- *C18 - Percepção da possibilidade de movimento e de suas possíveis implicações
-
- *C19 - O ato de parar o movimento possibilitando visualizar o feito
-
- *C20 - A solução do problema creditada às possibilidades de realização e visualização de movimentos
-
- *C21 - A simulação de movimentos antes de efetivá-los no *software*
-
- *C22 - Realização de movimento visando um posicionamento específico para o objeto movido
-
- *C23 - *Insight* de um modo de resolver o problema que se mostra junto ao movimento
-
- *C24 - O ato de dizer de um movimento antes de realizá-lo no *software*
-
- *C25 - A inserção de “rastros” de movimento para fixar momentos do movimento que flui na tela
-
- *C26 - O planejamento de como realizar determinados movimentos
-
- *C27 - Os conhecimentos prévios de Matemática sustentando movimentos realizados
-
- *C28 - A realização de um movimento anteriormente pensado
-
- *C29 - O ato de mover ao mesmo tempo em que se fala do movimento que realiza, evidenciando que se dá conta do que faz
-
- *C30 - Realização de movimentos em um ponto visando a variação de posição de outro ponto a ele vinculado
-
- *C31 - Percepção de ampliação e redução de medidas junto ao movimento realizado
-
- *C32 - Compreensão da impossibilidade de se validar algo só com realização de movimentos
-
- *C33 - Realização de movimentos isométricos

-
- *C34 - O movimento e a expressão do mesmo na tela gerando intuições
-
- *C35 - Percepção do movimento realizado com *mouse* e de sua expressão na tela
-
- *C36 - O “nível de atenção” direcionado ao que se mostra na tela
-
- *C37 - Percepção de si como sujeito movente
-
- *C38 - Compreensão de que para perceber é preciso estar atento ao movimento que se evidencia na tela
-
- *C39 - Percepção do movimento consoante ao que pode ser movido
-
- *C40 - Percepção de que a transformação se dá no *mouse* e na tela
-
- *C41 - Percepção de que o movimento já está solicitado nas atividades propostas
-
- *C42 - Percepção de que o que está na tela é potencialmente dinâmico
-
- *C43 - A retomada reflexiva dos movimentos realizados e das mudanças por eles configuradas na tela
-
- *C44 - O dar-se conta de estar refletindo enquanto realiza movimentos
-
- *C45 - Compreensão da percepção ligada ao ver
-
- *C46 - Percepção do movimento que se evidencia na tela como correlato do movimento realizado com o *mouse*
-
- *C47 - Percepção de si como realizador do movimento que se expõe na tela
-
- *C48 - Percepção da ausência de movimento na tela, que se evidencia na também ausência do sujeito-movente
-
- *C49 - O sujeito se percebe em movimento em todo o desenvolvimento das atividades
-
- *C50 - O movimento como atualização de um querer mover
-
- *C51 - Percepção do movimento que se expõe na tela como sendo a materialização de um pensamento
-
- *C52 - Percepção do potencial dinâmico do *software*
-
- *C53 - Compreensão de que a visualidade do *software* contribui para construir e para estudar essas construções
-
- *C54 - Compreensão de que o *software*, em comparação com o papel, permite maior agilidade, precisão e um trabalho mais limpo
-
- *C55 - Compreensão de que no *software* e no papel abrem-se possibilidades distintas de trabalho
-
- *C56 - Compreensão de que o movimento se faz presente tanto no *software* quanto no papel
-
- *C57 - Compreensão da relevância de se conhecer os ícones do *software* e suas funcionalidades
-
- *C58 - Compreensão da relevância do “arrastar”
-
- *C59 - A repetição de um movimento focando o que pode se mostrar e a veracidade disso que se mostra
-
- *C60 - Percepção da possibilidade de exploração aberta pelo *software*

-
- *C61 - A importância da percepção de invariantes para a (re)soluções das atividades
-
- *C62 - A percepção do que não se move consoante ao movimento realizado
-
- *C63 - O estudo de uma figura e de suas propriedades pondo-a em movimento
-
- *C64 - Percepção mediante atenção ao colega de grupo que realiza movimentos dizendo dos mesmos
-
- *C65 - O movimento e sua expressão visual na tela como modos de comunicação entre membros do grupo
-
- *C66 - O conhecimento prévio dos ícones e de suas funções direcionando o que e como fazer
-
- *C67 - Percepção da simultaneidade entre movimento realizado com o *mouse* e a materialização desse movimento na tela
-
- *C68 - Compreensão de que o *software* abre possibilidades de movimento
-
- *C69 - Percepção de movimento junto ao ato de testar possibilidades
-
- *C70 - Percepção de algo que vai se mostrando aos poucos na duração do movimento realizado
-
- *C71 - Percepção de movimento junto ao ato de clicar em ícones para realizar construções
-
- *C72 - Compreensão de que os invariantes se mostram quando se está atento ao movimento e às suas configurações
-
- *C73 - Compreensão de que a atenção ao movimento abre novas possibilidades
-
- *C74 - Compreensão de que mover é possibilidade aberta pelo *software*
-
- *C75 - Percepção do movimento que se mostra no ato de mover objetos na tela
-
- *C76 - Compreensão de que o pensar no movimento já se configura como movimento
-
- *C77 - Compreensão de que toda figura em GD deve ser projetada para ser dinâmica
-
- *C78 - Percepção do potencial do ensino e da aprendizagem que se dá pela percepção e estudo de invariantes em GD
-
- *C79 - Aprendizagem de um modo de construir sem se valer de ferramentas que já dão a construção pronta
-
- *C80 - Aprendizagem que emerge da discussão sobre o que se mostra em movimento na tela
-
- *C81 - Aprendizagem de como elaborar atividades que se constituem por um contexto e por um fundo dinâmico
-
- *C82 - Aprendizagem de como trabalhar em GD conceitos matemáticos e suas conexões
-
- *C83 - Percepção da importância do movimento para a aprendizagem
-
- *C84 - Aprendizagem de como trabalhar em ambientes de GD
-
- *C85 - Percepção do vínculo entre movimento e aprendizagem
-
- *C86 - A criticidade constituindo-se junto a atos motores
-
- *C87 - Aprendizagem de conceitos matemáticos que se mostram junto ao movimento realizado e visto na tela

***C88** - Percepção da preservação ou desconfiguração de uma figura como consequência do modo pelo qual ela foi construída

***C89** – O dar-se conta de estar movendo-pensando

Quadro 5: Grupos de convergências articulados no Primeiro Movimento de Convergência

Fonte: O autor

Tendo articulado essas convergências, nos direcionamos para o *Segundo Movimento de Convergência*, que evidenciamos abaixo.

SEGUNDO MOVIMENTO DE CONVERGÊNCIAS

Agora, voltamo-nos reflexivamente aos 89 primeiros grupos de convergências articulados no *Primeiro Movimento de Convergência*. Ao ler a explicitação de cada um deles, novamente questionamos, *o que dizem?* Desse questionamento, novas convergências se mostraram possíveis, constituindo com isso grupos mais abrangentes. Foram articulados outros 32 grupos de convergência aos quais convergiram os 89 primeiros grupos constituídos. Os grupos agora articulados, para diferenciarmos dos grupos *C, nomeamos como #C. Assim, no *Segundo Movimento de Convergência*, temos #C01, #C02, ..., #C31 e #C32.

Assim como na explicitação do movimento anterior, trazemos como exemplo no corpo deste texto, no Quadro 6, a constituição dos dois primeiros grupos de convergência. Expomos no Apêndice 5 o quadro com todas as convergências articuladas nesse movimento de redução.

*C	#C
<p>*C02 - O movimento do <i>mouse gera transformação na interface</i> do <i>software</i>.</p> <p>*C14 - Percepção do movimento realizado em um ponto <i>implicando na variação</i> de posição de outros pontos</p> <p>*C17 - Percepção de <i>mudanças na interface</i> que produzem variação articulando invariantes</p> <p>*C31 - Percepção de <i>ampliação e redução de medidas</i> junto ao movimento realizado</p> <p>*C40 - Percepção de que <i>a transformação</i> se dá no <i>mouse</i> e na tela</p> <p>*C43 - A retomada reflexiva dos movimentos realizados e das <i>mudanças por eles configuradas na tela</i></p> <p>*C70 - Percepção de <i>algo que vai se mostrando aos poucos</i> na duração do movimento realizado</p> <p>*C75 - Percepção do <i>movimento que se mostra no ato de mover</i> objetos na tela</p>	<p>#C01 – Percepção na tela de transformações que emergem de movimentos realizados</p>
<p>*C04 - O <i>movimento do mouse para expressar/indicar</i> intenções</p> <p>*C05 - <i>Representação de objetos geométricos com o corpo-próprio</i>.</p> <p>*C07 - O <i>movimento do corpo-próprio como modo de indicar</i> e direcionar olhares</p>	<p>#C02 - O movimento como modo de expressão</p>

<p>*C29 – O ato de <i>mover ao mesmo tempo em que se fala do movimento</i> que realiza, evidenciando que se dá conta do que faz</p> <p>*C34 - O <i>movimento</i> e a expressão do mesmo na tela <i>gerando intuições</i></p> <p>*C64 - Percepção mediante atenção ao colega de grupo que <i>realiza movimentos dizendo dos mesmos</i></p> <p>*C65 - <i>O movimento e sua expressão</i> visual na tela <i>como modos de comunicação</i> entre membros do grupo</p>	
---	--

Quadro 6: Recorte do quadro do Segundo Movimento de Convergência
Fonte: O autor

Explicitamos agora, no Quadro 7, os 32 grupos de convergências constituídos no *Segundo Movimento de Convergência*.

#C01 – Percepção na tela de transformações que emergem de movimentos realizados

#C02 - O movimento como modo de expressão

#C03 - Percepção de invariantes que se mostram na variação

#C04 – O controle do movimento realizado e do que se almeja com ele

#C05 - O movimento como modo de atualizar possibilidades

#C06 - O movimento como modo de validar conjecturas e/ou respostas

#C07 - A percepção visual que sustenta estudos, justificativas e afirmações

#C08 - A correspondência entre objeto a ser movido e o corpo que o moverá

#C09 - Percepção de possibilidades de movimento antes de sua realização

#C10 - O ato de parar o movimento para refletir a respeito do que emerge dele

#C11 - O movimento que visa algo

#C12 - A visualização do movimento gerando intuições ao sujeito

#C13 - A relevância do movimento para (re)solução de problemas matemáticos

#C14 - O ato de pensar o movimento antes de realizá-lo

#C15 - O ato de fixar o que se vê no movimento

#C16 - Os conhecimentos prévios sustentando movimentos e percepções

#C17 - A sincronia entre mover e dizer do movimento realizado

#C18 – Compreensão da impossibilidade de validar só com o movimento

#C19 – A atenção à tela como modo de perceber e de compreender

#C20 - O dar-se contar de ser o realizador do movimento que se evidencia no *mouse* e na tela

#C21 - Percepção do potencial dinâmico do *software* e do que compõe sua interface

#C22 - Percepção do movimento imbricado no enunciado das atividades

#C23 - O perceber-se realizando movimentos

#C24 - A visualização como modo de perceber

#C25 – O movimento como modo de atualizar um querer fazer ou pensamento sobre o fazer

#C26 - Diferenças entre movimento realizado no *software* e movimento realizado no papel

#C27 - A percepção do movimento correlata ao ato de mover-se, movendo

#C28 - O *pensar* caracterizado como movimento

#C29 – A aprendizagem que se constitui junto ao movimento e às atividades que o solicita

#C30 – O estudo de uma figura pondo-a em movimento

#C31 - A preservação da figura ou sua desconfiguração após um movimento nela realizado, como sendo consequências do modo como foi projetada na tela

#C32 – O movimento mostrando possibilidades

Quadro 7: Grupos de convergências articulados no Segundo Movimento de Convergência

Fonte: O autor

Uma vez articuladas essas convergências, pensando em cada uma delas e pensando-as com cada uma das outras, vimos abrir-se mais possibilidades de convergências. Essas possibilidades nos levaram a um último movimento de convergência, que nos permitiu a articulação de Ideias Nucleares, ou seja, que nucleiam o fenômeno interrogado, *movimento-percepção-conhecimento*, podendo assim dar-nos um solo e uma estrutura para realizarmos articulações a respeito desse fenômeno e da pergunta com a qual o interrogamos. Esse último movimento chamamos de *Terceiro Movimento de Convergência* e o apresentamos a seguir.

TERCEIRO MOVIMENTO DE CONVERGÊNCIA

No *Terceiro Movimento de Convergência* articulamos 4 Ideias Nucleares, que chamamos de IN, que emergiram das convergências dos grupos #C. São elas: **IN1** – Modos pelos quais o movimento se evidencia, **IN2** – Percepções que se evidenciam, que constituem um solo para novas percepções e para argumentações, **IN3** – A Unidade que abarca o sujeito-movente e o que lhe é disponível ao movimento e **IN4** – A constituição do conhecimento ao se trabalhar com Geometria Dinâmica.

Entendemos que visualizar em um mesmo campo de visão as IN e o que a elas convergiu é relevante à compreensão das reduções realizadas. Portanto, nesta seção explicitamos o quadro por inteiro do *Terceiro Movimento de Convergência*.

Ao fazer uma leitura que se inicia nas Ideias Nucleares, realizando um movimento inverso ao das reduções, pode-se ver que essas quatro ideias dão conta das 316 Unidades Significativas articuladas junto às transcrições.

Entendemos que essas Ideias Nucleares, ao serem olhadas atentamente, podem expressar sobre *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o*

computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica, visto que, de modo geral, elas dizem do movimento, da percepção, da aprendizagem e do sujeito que se move, que percebe e que aprende. Dizem do fenômeno *movimento-percepção-conhecimento*.

Abaixo, no Quadro 8, trazemos o *Terceiro Movimento Convergência*, que fez mostrarem-se as 4 Ideias Nucleares articuladas mediante todo o processo de convergências.

#C	IN
#C01 - Percepção na tela de transformações que emergem de movimentos realizados	IN1 – Modos pelos quais o movimento se evidencia
#C02 - O movimento como modo de expressão	
#C03 - Percepção de invariantes que se mostram na variação	
#C04 - O controle do movimento realizado e do que se almeja com ele	
#C05 - O movimento como modo de atualizar possibilidades	
#C06 - O movimento como modo de validar conjecturas e/ou respostas	
#C09 - Percepção de possibilidades de movimento antes de sua realização	
#C10 - O ato de parar o movimento para refletir a respeito do que emerge dele	
#C11 - O movimento que visa algo	
#C13 - A relevância do movimento para (re) solução de problemas matemáticos	
#C14 - O ato de pensar o movimento antes de realizá-lo	
#C15 - O ato de fixar o que se vê no movimento	
#C21 - Percepção do potencial dinâmico do <i>software</i> e do que compõe sua interface	
#C25 - O movimento como modo de atualizar um querer fazer ou pensamento sobre o fazer	
#C26 - Diferenças entre movimento realizado no <i>software</i> e movimento realizado no papel	
#C28 - O <i>pensar</i> caracterizado como movimento	
#C32 - O movimento fazendo mostrarem-se possibilidades	
#C01 - Percepção na tela de transformações que emergem de movimentos realizados	IN2 – Percepções que se evidenciam, que constituem um solo para novas percepções e para argumentações
#C03 - Percepção de invariantes que se mostram na variação	
#C04 - O controle do movimento realizado e do que se almeja com ele	
#C07 - A percepção visual que sustenta estudos, justificativas e afirmações	
#C09 - Percepção de possibilidades de movimento antes de sua realização	
#C12 - A visualização do movimento gerando intuições ao sujeito	
#C19 - A atenção à tela como modo de perceber e de compreender	
#C21 - Percepção do potencial dinâmico do <i>software</i> e do que compõe sua interface	
#C22 - Percepção do movimento imbricado no enunciado das atividades	
#C23 - O perceber-se realizando movimentos	
#C24 - A visualização como modo de perceber	
#C27 - A percepção do movimento entrelaçada ao ato de mover-se, movendo	
#C32 - O movimento fazendo mostrarem-se possibilidades	
#C01 - Percepção na tela de transformações que emergem de movimentos realizados	IN3 – A Unidade que abarca o sujeito-movente e o que lhe é disponível ao movimento
#C04 - O controle do movimento realizado e do que se almeja com ele	
#C08 - A correspondência entre objeto a ser movido e o corpo que o moverá	
#C11 - O movimento que via algo	
#C12 - A visualização do movimento gerando intuições ao sujeito	
#C17 - A sincronia entre mover e dizer do movimento realizado	
#C20 - O dar-se contar de ser o realizador do movimento que se evidencia no <i>mouse</i> e na tela	
#C23 - O perceber-se realizando movimentos	
#C25 - O movimento como modo de atualizar um querer fazer ou pensamento sobre o fazer	IN4 – A constituição do conhecimento ao se trabalhar com Geometria Dinâmica
#C27 - A percepção do movimento entrelaçada ao ato de mover-se, movendo	
#C01 - Percepção na tela de transformações que emergem de movimentos realizados	
#C02 - O movimento como modo de expressão	
#C03 - Percepção de invariantes que se mostram na variação	
#C04 - O controle do movimento realizado e do que se almeja com ele	
#C05 - O movimento como modo de atualizar possibilidades	
#C06 - O movimento como modo de validar conjecturas e/ou respostas	
#C07 - A percepção visual que sustenta estudos, justificativas e afirmações	

#C09 - Percepção de possibilidades de movimento antes de sua realização	
#C10 - O ato de parar o movimento para refletir a respeito do que emerge dele	
#C11 - O movimento que visa algo	
#C12 - A visualização do movimento gerando intuições ao sujeito	
#C13 - A relevância do movimento para (re) solução de problemas matemáticos	
#C14 - O ato de pensar o movimento antes de realizá-lo	
#C15 - O ato de fixar o que se vê no movimento	
#C16 - Os conhecimentos prévios sustentando movimentos e percepções	
#C18 - Compreensão da impossibilidade de validar só com o movimento	
#C19 - A atenção à tela como modo de perceber e de compreender	
#C22 - Percepção do movimento imbricado no enunciado das atividades	
#C25 - O movimento como modo de atualizar um querer fazer ou pensamento sobre o fazer	
#C29 - A aprendizagem que se constitui junto ao movimento e às atividades que o solicita	
#C30 - O estudo de uma figura pondo-a em movimento	
#C31 - A preservação da figura ou sua desconfiguração após um movimento nela realizado, como sendo consequências do modo como foi projetada na tela	
#C32 - O movimento fazendo mostrarem-se possibilidades	

Quadro 8: Ideias Nucleares articuladas no Terceiro Movimento de Convergência

Fonte: O autor

Essas convergências que permitiram articular as quatro IN revelam as articulações que realizamos dos sentidos percebidos e dos significados produzidos. As Ideias Nucleares se entrelaçam, evidenciando que os sentidos e significados vão se tecendo em um todo que diz da interrogação posta e das compreensões que foram se pondo no movimento de constituição do conhecimento. Não são separadas e nem estanques. Como em um caleidoscópio, olhando-as de perspectivas diferentes, na temporalidade das vivências, elas se organizam e desorganizam. Em especial, nesse entrelaçamento destacam-se: *#C01 - Percepção na tela de transformações que emergem de movimentos realizados* e *#C04 - O controle do movimento realizado e do que se almeja com ele*, que perpassam as quatro Ideias Nucleares. Na IN1, com #C01 E #C04 pode-se tecer compreensões sobre o movimento realizado e sobre o como essa realização pode se dar. Na IN2, pode-se articular sobre a percepção que se realiza para compreender o objeto visado, aos poucos, controlando o movimento que provoca transformações, junto as quais as características desse objeto podem se mostrar. Desta forma, já se está articulando sobre IN3 e IN4, uma vez que o movimento que gera transformação se constitui na unidade que enlaça o sujeito-movente e o que ele move, e, as implicações de uma realização que se dá nessa unidade configuram percepções, que ao serem compartilhadas e articuladas, podem constituir conhecimentos.

Os movimentos de redução realizados nesta pesquisa expõem uma rede ampla e complexa de entrelaçamento de muitos fios. Se focarmos um desses fios, podemos dar-mos conta de que ele possui uma de suas extremidades conectada a uma Unidade Significativa, sendo que a outra extremidade vai em direção a uma Ideia Nuclear, conforme pode-se ver na

Figura 4, na linha com maior destaque, que une a US12A4 à IN4. No entanto, esse mesmo fio possui ramificações, assim como todos os outros fios.

Os fios que tecem essa rede foram cuidadosamente desenhados em um momento único na pesquisa, em que estivemos com uma lapiseira, com uma borracha e com cartolinas, que ligadas umas às outras renderam alguns metros de extensão. Nessas páginas de cartolina foi-se constituindo um emaranhado de setas que sinalizaram as convergências já evidenciadas nos quadros expressos nos apêndices 4 e 5 e no Quadro 8. As muitas setas se cruzam, um conjunto delas se direcionam a um mesmo grupo. Algumas delas são pequenas, outras são grandes por direcionar, por exemplo, uma Unidade Significativa a um *C que está distante dela no papel.

Este trabalho foi complexo e resultou em uma rede muito extensa, o que inviabiliza a explicitação de sua totalidade nesta tese. Nos quadros trazemos o que entendemos ser um resumo, explicitando as convergências já organizadas, o que deixa subentendidas as setas.

Para que se tenha uma ideia da totalidade desse trabalho e da rede constituída, optamos por escolher um grupo de convergência dos 89 grupos *C possíveis, e evidenciar as convergências realizadas com as Unidades Significativas que o constitui. Para efeito de exemplificar, buscamos um grupo com poucas destas unidades, porém, com muitas ramificações, para que se possa entender a extensão da rede constituída. Então, escolhemos o grupo *C18 - *Percepção da possibilidade de movimento e de suas possíveis implicações*, ao qual convergiram a US9A2, a US10A2, a US12A4 e a US3A5.

Na Figura 4, que segue, consideramos as Unidades Significativas desse grupo para trazemos uma ideia de como realizamos as convergências.

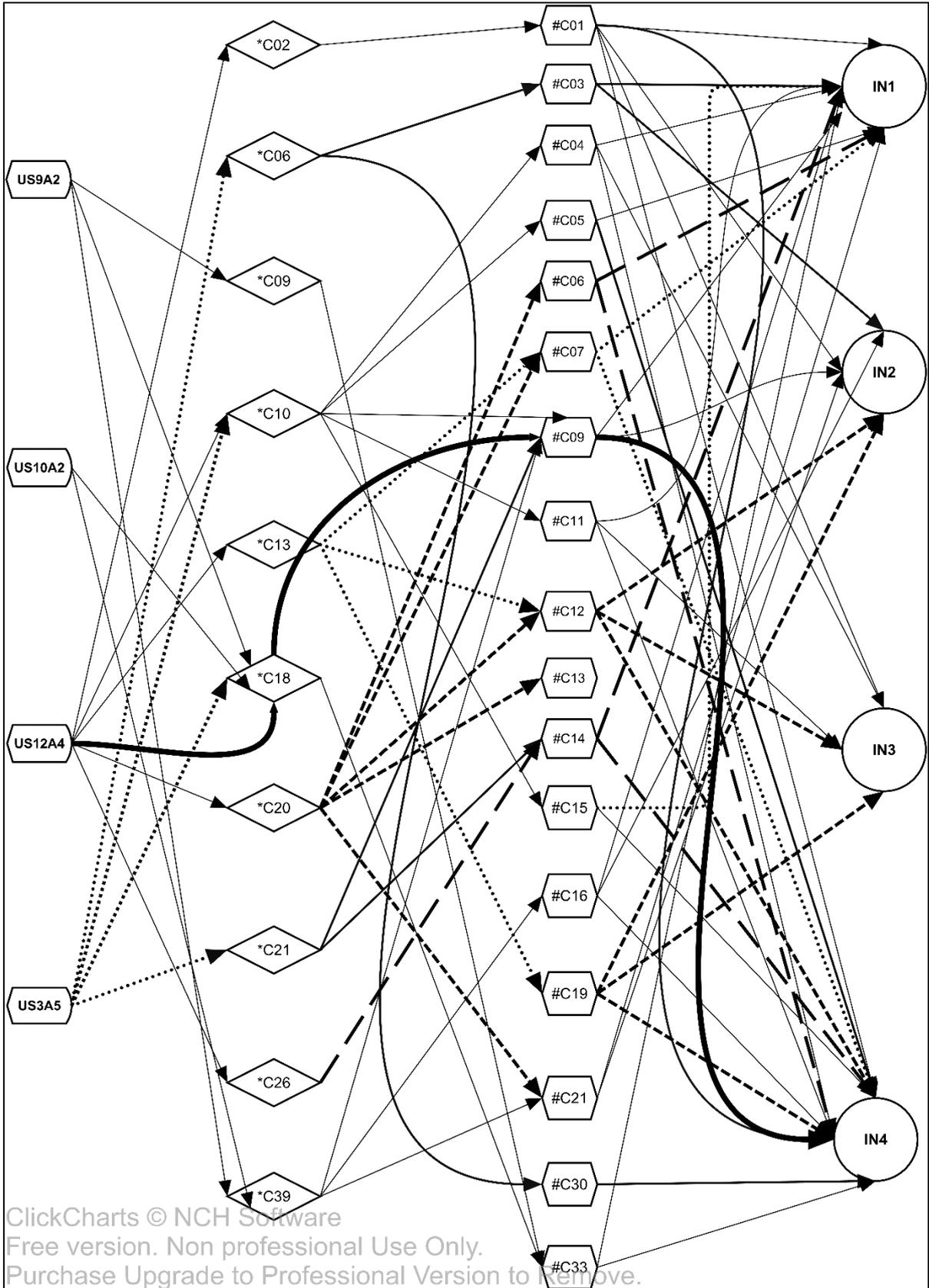


Figura 4: Convergências das Unidades Significativas do grupo *C18
Fonte: O autor

Há de se destacar que nesse exemplo, há apenas quatro Unidades Significativas das 316 escritas. Esse mesmo movimento de convergência foi realizado com cada uma delas.

Apesar da complexidade, esse trabalho se faz relevante ao estudo que visa o que pode mostrar-se, o que o campo de pesquisa tem a oferecer ao investigador que se põe a interrogá-lo. Esse trabalho permite uma vivência importante dos movimentos de reduções, permite ao pesquisador *ver* (sentir, perceber, dar-se conta do) o fluir desses movimentos.

Com isso, iniciamos a explicitação dos motivos pelos quais não nos valem de *softwares*. É importante fazer esse destaque, visto que o nosso empenho pode ser questionado por leitores que trabalham ou que conhecem *softwares* cuja programação lógica realiza convergências de frases, como por exemplo, os da webQDA. O questionamento é válido, já que aparentemente pode-se ter resultados similares com um grande diferencial de tempo e de trabalho; com lápis e papel alguns dias, e com o computador, alguns segundos.

Todo *software* é projetado sobre uma programação cuja base é lógica. A leitura com ele realizada, nas interfaces, expressa possibilidades de convergências mediante análise de palavras e frases. Essas possibilidades são preenchidas pelo olhar do investigador. Ou seja, há um programa que faz a intermediação da leitura. Dessa forma, tem-se um importante modo de se buscar por convergências dado *a priori* do pensar articulador.

Nas investigações fenomenológicas, buscamos as vivências nas descrições expressas com as palavras e nuances de modos de sentir do sujeito. Para isso, vivenciamos cada movimento de redução, atentos ao que pode se mostrar. Nessa investigação traçamos setas. Cada uma delas carregam sentidos, elas não só ilustram convergências, elas também expressam, indicam e iluminam. Quando ligadas uma a uma, um fio condutor pode ser visto, ampliando sentidos, que, quando articulados, podem nos dar significados mais generalizados, que abarcam cada seta e o fio que a união delas produz. Cada uma das setas, um grupo delas e todas elas, fluem e deixam fluir o pensamento de quem as percorre e, com isso, abre possibilidades de compreender o que se mostra na rede tecida pelo entrelaçamento de todas elas.

Assim, a leitura de cada frase e de cada frase junto às demais, mostra-se relevante. Nessa leitura ideias vão surgindo, sentidos se mostram, a opacidade vai se clareando. Isso tudo acontece nas arestas da leitura, que solicitam um olhar mais atento.

Entendemos que a vivência acima evidenciada não se dá do mesmo modo quando se trabalha com o *software*. Há momentos desta vivência que não são vivenciados pelo pesquisador que se vale do aparato tecnológico. Com isso, e com o dito anteriormente, justificamos nosso modo de trabalho, aquele que se constitui na metodologia fenomenológica.

O próximo passo deste estudo, que é evidenciado na seção que segue, é focar cada uma das Ideias Nucleares, visto que para nós elas expressam a essência do fenômeno aqui interrogado, ou seja, elas expressam o que o constitui, aquilo que se encontra em seu cerne.

QUINTA SEÇÃO

AS IDEIAS NUCLEARES: O QUE ELAS DIZEM?

Toda coisa que vemos, devemos vê-la sempre pela primeira vez, porque, realmente é a primeira vez que a vemos. E então cada flor amarela é uma nova flor amarela, ainda que seja o que se chama a mesma de ontem. A gente não é já o mesmo nem a flor a mesma. O próprio amarelo não pode ser já o mesmo.

Por Fernando Pessoa

Todo o movimento investigativo realizado nesta pesquisa fluiu à luz da pergunta diretriz: *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica?* Enfatizamos que esse *como* evidencia a busca por compreensões que não são prévias ao pesquisador. No entanto, entendemos que essa percepção é uma realização do sujeito-movente, ou seja, ela é um ato. A realização desse ato abarca o movimento realizado, a percepção desse movimento e o que se compreende à luz dessa percepção. Assim, constitui-se o fenômeno por nós investigado, o *movimento-percepção-conhecimento*, quando focado da perspectiva de sujeitos que desenvolvem atividades em ambientes de GD.

A interrogação, que esteve presente em todos os momentos de redução e as próprias reduções constituíram para este estudo ideias que nucleiam as manifestações que dizem respeito ao fenômeno de pesquisa. Com isso, entendemos que adentrar cada uma dessas ideias, articulando o que dizem do fenômeno interrogado, é um modo de expor aos leitores desta tese compreensões com as quais pode-se “dar conta” da pergunta da pesquisa, dos questionamentos que dela emergem e do fenômeno que ela interroga.

Por estarmos agora expondo compreensões sobre o fenômeno, articulamos um pensar realizador de teorizações, entrelaçando o dito pelos sujeitos, os grupos de convergência, as Ideias Nucleares e nossas compreensões constituídas também com os estudos que realizamos.

Nesta exposição, apresentamos as Ideias Nucleares na ordem em que foram sendo evidenciadas no último movimento de convergência: *modos pelos quais o movimento se evidencia; percepções que se evidenciam, que constituem um solo para novas percepções e para argumentações; a unidade que abarca o sujeito-movente e o que lhe é disponível ao movimento; e a constituição do conhecimento ao se trabalhar com Geometria Dinâmica.*

Os títulos de cada tópico desta seção correspondem, na sequência, às Ideias Nucleares acima mencionadas. Portanto, iniciamos as articulações, no tópico 5.1, sobre a IN1: *modos*

pelos quais o movimento se evidencia. Nas articulações, as frases que destacamos em itálico e entre aspas, são recortes das transcrições, que trazemos como preenchimento das compreensões que serão explicitadas. O que destacamos com negrito e itálico são os grupos de convergências que constituem cada IN. Eles não aparecem nos textos na mesma sequência expressa no Quadro 8, haja vista que visualizamos previamente uma estrutura dissertativa para cada IN, que solicitou uma reorganização dos grupos #C. Em alguns momentos, esses grupos aparecem reescritos, de modo que se tenha coerência textual nas frases por eles compostas.

5.1 Modos pelos quais o movimento se evidencia

Tecer compreensões sobre essa ideia nuclear solicita focar o *movimento que se evidencia*. Entendemos que ele se mostrou nesta pesquisa de muitos modos na tela computacional e, especialmente, no sujeito-movente. Pretende-se neste tópico articular sobre cada um desses modos de o movimento se mostrar visando o *como se dá o movimento*, que é um dos questionamentos da interrogação desta pesquisa.

Iniciamos focando o movimento que se expõe antes de qualquer efetivação motora dos sujeitos junto à materialidade que lhe dispõe o computador, como por exemplo, pegar e arrastar o *mouse*. Trata-se do ***movimento dado em potencial***, aquele que se mostra inicialmente como um móvel possível, quando com ele está um corpo-próprio que o compreende em sua plenitude, abarcando o que o faz ser possível e o que em seu potencial pode mostrar-se como implicações de um movimento realizado. Essa compreensão dá-se no fluir de um pensar em que o sujeito-movente empreende uma espacialidade que o põe junto aos objetos e aos outros sujeitos. Com isso, podemos nos voltar à questão do potencial dinâmico do *software*, que é expresso em muitas falas dos sujeitos, das quais destacamos uma que afirma que: “*tudo ali (na interface do software) a gente poderia arrastar e até pensar em arrastar. [...] por sabermos que podemos arrastar, que o Geogebra permite isso, às vezes não arrastamos, mas pensamos em alguns movimentos*” (US45P2).

Tem-se, assim, o movimento se evidenciando como uma possibilidade, que pode ser aberta junto à máquina quando se acessa o que é nela programado com auxílio da lógica computacional, visando o sujeito que se voltará a sua interface. Portanto, se pensarmos no que há na interface de um *software*, podemos notar que, além de ícones e de descrições de suas funcionalidades estão intenções, que são projetadas por um programador que com sua programação abre possibilidades de o movimento acontecer, dele vir a ser.

Mas, como essa possibilidade de movimento ganha vida, animando os objetos disponíveis nessa interface? Na fala que segue, expomos uma das possíveis respostas para essa pergunta: “*clicamos sobre os objetos e os arrastamos, víamos o movimento acontecer, e não só deles, mas também de toda a construção que dependia deles*” (US1P2). E com qual ferramenta se realiza esses atos, de clicar e de arrastar? Sobre essa indagação, em outra fala, tem-se que para resolver as atividades um sujeito e seus colegas de grupo só conseguiram “*sair do lugar quando [...] colocava a mão na massa, no mouse, pra melhor dizer*” (US8P2).

Tomamos como fundo as perguntas e respostas acima expostas para avançar na descrição de outro modo pelo qual o movimento se mostrou na pesquisa, como ***um modo de atualização de possibilidades***. Essa atualização, conforme já discutido na tese, promove um encontro de intencionalidades, a do programador que projeta a interface para que nela haja movimento, e a do sujeito-movente, que ao se voltar à interface e pôr-se a mover o que nela é disponível, está pondo em prática o almejado pelo programador com a programação. Constitui-se, assim, a possibilidade de movimento projetada e a atualização dessa possibilidade, realizada pelo sujeito-movente. Tem-se o que é dado como potencialmente dinâmico sendo atualizado para um dinamismo que, no agora de um ato motor, se realiza.

Essa atualização se deu com auxílio das interfaces físicas disponíveis em campo de pesquisa, especialmente, o *mouse* e a tela. Com o *mouse* os sujeitos selecionaram ferramentas de construção, clicaram e arrastaram objetos. Com a tela, puderam atentar-se aos modos pelos quais a materialização do movimento realizado com o *mouse* se dava à visualização.

O movimento realizado com essas interfaces físicas é direcionado à interface lógica, que sustenta o programa e o que nele é programado. Portanto, a atualização de uma possibilidade disponível na tela dá-se também pela mediação da interface lógica do *software*. Ela, no caso da GD, é especialmente visual, e, as transformações que nela se vê, vai doando ao sujeito o que ele pode ou deve fazer para que dê conta de uma tarefa, ao mesmo tempo em que o sujeito se doa realizando movimentos e atentando-se às implicações dos mesmos nessa interface. Assim, as atualizações realizadas em dispositivos computacionais mostram-se em camadas físicas e em camadas lógicas, sendo que as compreendemos como inseparáveis.

As possibilidades acima mencionadas, dizem respeito, especialmente, ao que está projetado na interface do *software*: os ícones com suas respectivas funcionalidades. Ao realizar uma atividade, outras possibilidades se mostram. Nesse caso, o movimento se evidencia como realização que vai dando forma ao que se percebe mediante solicitações de uma tarefa e implicações do realizado para dela dar conta. ***O movimento vai fazendo mostrarem-se possibilidades***. Sobre isso, ao desenvolver a Atividade 4, um dos sujeitos afirma que: “*o que*

[...] ajudou a achar a posição do armador, depois de estar quase desistindo, foi essa possibilidade [...] de movimentar ele” (US12A4).

Essa atividade solicitou a igualdade entre dois ângulos cujos vértices coincidiam em um mesmo ponto. Na tela, os ângulos estavam projetados com medidas distintas. Foi imediato aos sujeitos a intuição de que um dos modos pelos quais a igualdade poderia se dar seria movendo o vértice comum aos ângulos até que se alcançasse essa igualdade. Entende-se nesta situação, que mais uma vez, o movimento se mostra antes de uma efetivação junto ao *mouse*. Essa possibilidade de movimento configura-se mediante um pensar do sujeito sobre uma atividade, sobre o que ela solicita e sobre o como mover-se para dela dar conta.

Com isso, podemos articular agora sobre outro modo pelo qual o movimento se evidenciou na pesquisa: como *modo de atualizar um querer fazer ou pensamento sobre o fazer*, o que pode ser compreendido na fala: “*primeiro somos nós querendo e depois fazendo, aí, junto com isso, a gente vê na tela do computador aquilo que pensamos em fazer e que estamos ali fazendo*” (US27 e US28).

Assim, evidencia-se que o movimento realizado é uma complexidade que envolve um *querer mover* em direção à realização de algo. O próprio *querer fazer o movimento* já se caracteriza como uma força atualizadora, que o faz acontecer. Isso pois, ele não se dá em um vazio, ele é consoante ao que pode ser movido e às possibilidades dinâmicas que se apresentam. Portanto, o *querer* do sujeito, entendemos como primordial para que o movimento aconteça.

Junto ao *querer* vai se configurando um pensamento sobre o que se almeja. Pode-se abrir ao sujeito um vislumbre sobre a efetivação disso que pensou. Construiu-se, assim, uma passagem fluida entre o querer, o pensar e o realizar. O *querer mover* vai se configurando à medida que se direciona à interface do *software* tendo como fundo as solicitações de uma atividade. Consoante a isso, inicia-se um pensar articulador visando essas solicitações. Com as articulações realizadas nesse pensar, o sujeito põe-se a mover o *mouse* para que o pensado se exponha na tela.

É sobre esse percurso que avança do *querer* à realização de movimento, que versa a frase anteriormente destacada, que afirma que se vê na tela a materialização de algo que se pensou em fazer, e que agora se está fazendo. Assim, o movimento que agora se realiza com o *mouse* e que se vê materializar-se na interface do *software* é um movimento anteriormente realizado em imaginação. Na imaginação pode-se antecipar a efetivação de um movimento, o que corrobora a fala: “*isso também está dentro dessa percepção do movimento, saber que se move e poder pensar o movimento antes de fazer. Isso já é de alguma forma fazer algum movimento*” (US47P2). Essa fala nos permite afirmar que o movimento se destaca não apenas

no ato da atualização do pensamento, mas *o querer mover* e o pensar em mover já se evidenciam como movimento realizado. Há, portanto, o *movimento do querer mover* e o *movimento do pensar em mover*.

Na pesquisa, esse pensar, caracterizado acima como movimento, se mostrou em três momentos. Um deles já foi explicitado, *aquele que antecipa a efetivação de um movimento com o mouse*. Entendemos que esse pensar é analítico, de ajuizamento, de valoração, uma vez que com ele se considera o que é dado no enunciado e na interface do *software* para pensar em possibilidades, culminando, muitas vezes, em um planejamento que abarca não só um movimento a ser realizado, mas uma sucessão de movimentos cujas implicações também são consideradas nesse planejamento. Isso se evidenciou em muitos momentos da realização das atividades. Versando sobre esse pensar que expõe um plano de ações, podemos destacar a fala recortada da transcrição da Atividade 6, cuja situação envolve uma jogada na mesa de bilhar: *“o melhor seria começar do final, como se a bola preta já estivesse na caçapa, daí ela vai voltando. Então, fazendo isso, começando do final, escolhemos a caçapa”* (US1A6).

Após momentos como esse, de planejar as ações, os sujeitos realizavam movimentos junto ao *mouse*, atualizando o pensado. Dessa atualização, deram-se conta de que não emergia um conjunto de informações suficientes à (re)solução das atividades. Entenderam que *“Aprendemos mais quando estamos movendo, dá pra ir vendo as relações entre as construções feitas. Mas tem que mover e parar de mover pra refletir sobre o que vimos”* (US6P4 e US7P4). Com isso, evidenciamos o segundo momento em que o movimento do pensar se mostrou na realização das atividades: *o momento em que se pausa o movimento para pensar sobre o feito e as implicações do feito* e, novamente, pensar em caminhos possíveis mediante o que se mostrou nos primeiros movimentos realizados.

Parar o movimento mostrou-se um ato relevante ao desenvolvimento das atividades, visto que pôde-se focar e estudar o que o movimento realizado fez materializar-se na interface. Isso pode ser melhor compreendido na fala que segue, que versa sobre o desenvolvimento da Atividade 4: *“Quando eu parei aqui, eu meio que olhei pra tudo, pro Ala, pro Pivô e para os segmentos, aí eu vi que se eu passasse uma reta aqui, perpendicular, eu teria um ponto aqui em cima que estaria a uma mesma distância em que o Ala está da reta (refere-se à reta horizontal), e o que é isso? Esse ponto aqui em cima é a reflexão do ala em relação à reta”* (US9A4). Nesse recorte, parar o movimento permitiu aos sujeitos ver e sintetizar as possibilidades que iam se mostrando junto ao movimento realizado e materializado na tela.

Ao dizer das possibilidades que vão se mostrando junto ao movimento, iniciamos a articulação do terceiro momento pelo qual o movimento do pensar pode ser visualizado: *o*

momento que abarca o mover e o pensar, constituindo o fluxo da duração de um movimento realizado. O fluir dessa duração vai mostrando possibilidades sobre as quais o sujeito vai pensando, sem que precise parar o movimento que realiza. Afirma-se que: “*nós estamos ali na frente fazendo os movimentos e pensando sobre eles, nós somos influenciados pelo que vemos acontecer, aí ficamos sempre pensando também a cada possibilidade que aparece*” (US21P3 e US22P3). O movimento do pensar que se evidencia vai se articulando ao ato de mover-se/movendo e às suas implicações.

O ato de mover-se/movendo, em sua duração, é movimento do corpo-próprio, ou seja, não é apenas um fazer que se dá na materialidade do corpo fisiológico e da tecnologia informática disponível. Esse ato é expressão da intencionalidade, provoca mudança e abre possibilidades a esse corpo que sente, se move e pensa sobre essas mudanças, ao passo que ele mesmo vai se modificando por estar também em movimento de compreender, de preencher sentidos e de preencher-se com o que eles expressam.

A atualização de um pensamento direciona olhares a outro modo pelo qual o movimento se evidenciou na pesquisa, como *modo de fixar o que se vê na variação do movimento*. O movimento, assim como já dito, mostra-se como mudança e mostra mudanças. Elas são percebidas, mas quando sobre essas mudanças alguém se põe a pensar e a falar, elas escapam, deixando disponível a esse sujeito que reflexivamente busca compreendê-las, apenas momentos, que são “rastros” daquelas mudanças percebidas. Nessa situação, o movimento torna-se relevante à *fixação* do que se mostra na percepção.

No trabalho com GD, essa fixação se dá pelas configurações das figuras em movimento. Ou seja, o fixar abarca o mover e o ver. Move-se a figura para que com o desenho se fixe o que se viu na duração de um movimento e o que se pensou sobre o visto. Um dos sujeitos afirma que há um “*rastro de movimento que a gente vai vendo na medida em que vamos movendo as figuras*” (US20P2). O rastro ao qual se fala na frase anterior não é um desenho, uma mancha expressa na tela, trata-se do rastro que vai mostrando a quem olha a figura em movimento o percurso por onde ela passa, que é marcado por um *deslizar* que vai fundindo cada agora do movimento, que *já foi*, ao seu agora que acaba de ser visto se expondo na tela.

O movimento mostra-se, assim, como *movimento de fixação*, que é espacial e temporal. Ele é prospectivo, pois visa expressar na espacialidade da interface do *software* uma intencionalidade de movimento. Ele é também retrospectivo, pois o rastro desta fixação evidencia um passado motor de todo o fluir do movimento, desde seu início. Em cada movimento de fixação, dá-se no corpo-próprio o entrelaçamento de um presente, de um passado e de um futuro, ou seja, o ato de fixar o que se vê na variação evidencia uma duração que diz

da temporalidade e que traz ao agora do movimento o que foi anteriormente visto, ao mesmo tempo em que orienta o *por vir* do movimento de fixação.

Outra fala que traz o sentido dessa fixação é: “*Vou habilitar rastro pra ficar mais visível*” (fala anterior à US6A2), dita quando o sujeito busca mostrar com o movimento um percurso de um ponto que ele intuiu ser linear. Já esse rastro, se materializa, deixa um desenho expresso na tela, ele é uma opção do *software* Geogebra que é escolhida pelo sujeito. O rastro, desenhado na tela, ou não, também entendemos que se caracteriza como atualização de um pensamento.

Embora articulamos sobre o pensar: o que antecipa o movimento; o que se expõe no estudo do movimento realizado; e o que avança na duração de um movimento que se realiza, vimos que no desenvolvimento das atividades muitos dos primeiros movimentos realizados pelos sujeitos com o *mouse* eram apenas exploratórios, não sustentados por uma reflexão que determinasse o que e como fazer. Mostrou-se, então, o movimento como *modo de exploração* da espacialidade que se abre na interface do *software*.

Dada a atividade e figuras projetadas na interface do *software*, de imediato os sujeitos realizaram movimentos junto ao *mouse*, para que em seguida pudessem iniciar qualquer reflexão sobre as implicações desses movimentos para a (re)solução do proposto. Sobre isso, um dos sujeitos afirma que: “*mover a reta e ir vendo o ponto de reflexão também movimentar, [...] ajudou cem por cento pra ver a solução. [...] é como que no Geogebra você pudesse experimentar [...] até achar uma solução ou ver algumas coisas que podem ajudar*” (US20P1 e US21P1). Isso, ao nosso ver, permite um (re)conhecimento do espaço cibernético disponível, das possibilidades que ele abre e das configurações que podem se constituir em uma figura, quando movida.

O movimento também se evidenciou no desenvolvimento dos trabalhos como uma ***realização que se efetua visando algo***. Tudo que já foi dito sobre as atualizações do potencial do *software* e de possibilidades percebidas se encaixa nesse modo de mostrar-se o movimento, visto que a atualização é intencionada, visa algo. Assim, tem-se que o movimento é sempre movimento para.... Mesmo um movimento sem articulações que o anteceda, como por exemplo, o de exploração das interfaces físicas e lógicas, é direcionado, visa algo, nesse caso, de explorar a espacialidade disponível.

Isso permite afirmar que o movimento realizado não é qualquer movimento, e não se dá de qualquer modo. Há um direcionamento intencional que pode ser compreendido em falas como: “*vou arrastando a reta até o ponto médio*” (US1A2); “*vou mover o ponto C até que eu tenha esta distância 5. Eu movo aqui até eu ter o raio EA*” (US4A2). Esses movimentos

evidenciam a intencionalidade do sujeito, direcionada ao ato de mover o objeto visando a uma realização possível: um lugar na interface, um comprimento, uma linearidade.

Muitos dos intuitos dos sujeitos, identificados na pesquisa de campo, dizem respeito à validação de conjecturas e de ideias compartilhadas entre membros dos grupos. Buscou-se, também, validar respostas encontradas, cuja veracidade não parecia óbvia. Com isso, tem-se outro modo pelo qual o movimento se mostrou, sendo um ***modo de validar conjecturas e/ou respostas***. Por exemplo, dada a conjectura: “*se mover o ponto (ponto E) para fora do campo, ali, na mediatriz, o ponto F ainda manterá a posição*” (US17A1), um aluno move o ponto E conforme explicitado, faz a verificação e afirma: “*Olha só! Não é que é mesmo!*” (US18A1), validando o dito na conjectura. Com isso, muitas vezes se argumentou que “*É a possibilidade de movimento que dá a garantia*” (US13A1), que o movimento, não só abre a possibilidade de validação, ou contribui para isso, ele efetivamente tem o poder de validar. Entende-se que esse poder de validação com o movimento se potencializa em trabalhos com *softwares* de GD.

Desse modo, o desenvolvimento das atividades vai avançando com movimentos realizados, com percepção de possibilidades sobre as quais se faz conjecturas, e com a busca por validação das mesmas. Validação esta, em que se pode ver maior engajamento e cuidado do sujeito com o movimento que realiza, o que evidencia que o movimento se mostrou também no ***domínio que um sujeito tem de suas ações motoras***. Por possuir amplo domínio de suas ações motoras e delas com as coisas e com pessoas, sem constituir um espaço arbitrário, o sujeito controla o *mouse* com a precisão que uma tarefa lhe solicita. Esse domínio se mostra em muitas falas, das quais destacamos: “*movendo rápido e depois movendo bem devagar, deu para ir vendo e estudando as propriedades*” (US39P1). Nesse controle do movimento ocorre, por exemplo, que o aluno “*clica sobre o ponto C e vai movendo-o bem devagar de forma a fazer a circunferência passar pelo ponto A*” (US5A2). Ainda, pode ocorrer que “*A aluna interrompe o movimento quando entende que o ângulo ABC está reto, 90°*” (US4A1).

Vê-se que o controle do movimento ao qual nos referimos não diz respeito à precisão programada nos aparatos tecnológicos. Por exemplo, pode-se programar a velocidade do cursor, as casas decimais que comportam números e medidas projetadas no *software*. Esses são fatores relevantes, até porque, como já dito, no desenvolvimento das atividades muitos movimentos foram realizados visando algo. Visualizar as configurações das medidas de um segmento e determinar um ângulo com medida específica movendo um de seus lados foram algumas das possibilidades pelas quais se buscou. Mostrou-se um desafio, por exemplo, chegar à medida angular de 90°, movendo um dos lados do ângulo criado; ora o ângulo ficava com medida 89,9°, ora ficava com 90,5°. Há nesse caso uma imprecisão que é da tecnologia informática com a

qual se trabalhou as atividades. No entanto, o sujeito-movente é pleno em seu movimento corporal; ele move o *mouse* para a direita e para a esquerda, com movimentos leves, visando projetar o ângulo de 90°, e controla o início e o fim de seu movimento. Portanto, desta perspectiva, estamos afirmando que o sujeito mostra precisão motora ao controlar o movimento que realiza junto ao *mouse* e ao *software*.

Até então articulamos sobre o movimento que transforma, que provoca mudança, mas, compreendemos que ele se evidencia, também, como *fundo do qual pode-se perceber e destacar o que não se move* no/com o movimento. Isso pois, em GD, no que *não se move* está implícito o movimento, assim como nos invariantes está implícita a variação. Desta forma, não há invariantes se não houver a variação que faz se mostrar o que não varia. Os ***invariantes se mostram na variação***. Esse modo pelo qual o movimento se evidencia pode ser melhor compreendido na fala: “*a gente movia o ponto e o triângulo ia se modificando, foi aí que conseguimos ver que por mais que o triângulo mudava após nós movermos o ponto, as retas mantinham um padrão [...] Elas eram sempre mediatrizes dos lados*” (US34P2). Reafirmando isso, um aluno diz: “*Eu to pensando aqui na questão dos invariantes. Quando movemos algo, e tudo que foi construído no percurso do exercício se mantém, a gente visualiza que se mantém porque movimentamos ali*” (US26P1).

No recorte “*se mantém porque movimentamos ali*”, fica evidente que a preservação é correlata ao movimento realizado. O que se mantém, se mantém na medida em que o fundo que o abarca passa por modificações, que não só transformam esse fundo, mas que em cada nova configuração vai lançando luz ao que nele não se modifica, ao que parece ser inatingível pelo movimento que o transforma. Com esse recorte, pode-se explicitar que a unidade que enlaça o movimento e a preservação que se evidencia junto ao mesmo dá-se pela intencionalidade do sujeito-movente, que realiza o movimento estando atento a ele e ao que ele mostra na interface do *software*, podendo ser, isso que se mostra, aquilo que não varia no fluir do movimento realizado. Essa intencionalidade faz avançar uma busca que se dá pelo ato de fazer a variação acontecer para que o invariante se mostre. Isso evidencia que todo movimento se constitui com um fundo. Do mesmo modo que o movimento subentende um movente, ele subentende um fundo com o qual avança.

Essa busca se deu, também, mediante compreensão de que as atividades foram projetadas para que invariantes pudessem ser percebidos. Essa compreensão evidenciou aos sujeitos a relevância dos invariantes para a (re)solução das atividades. Com isso, se mostrou a relevância do movimento, uma vez que, como articulamos anteriormente, é do movimento que pode emergir o que não se move. Dessa forma, o movimento mostrou-se, também, como ***meio***

de buscar a (re)solução de problemas, o que o faz relevante ao desenvolvimento das atividades. Essa relevância é citada em muitas falas. Em uma delas é dito que: *“acho que essa questão do movimento e da visualização foram fundamentais pra conseguirmos resolver os problemas. Se não tivessem as possibilidades de movimento nós não iríamos ver as propriedades sendo preservadas quando movimentamos um ponto”* (US36P1 e US37P1).

Os relatos sobre o movimento, especialmente quando se buscava justificar sua relevância, traziam *comparações entre movimento realizado no software e movimento realizado no papel*, com régua e compasso. Diziam que: *“a resolução das atividades no software é mais rápida”* (US11P1); *“no caderno, não dá pra dizer ao certo que um segmento é igual a outro segmento. O computador permite fazer segmentos iguais. É mais preciso, aí, as respostas dos problemas são mais precisas também”* (US31P1). Sobre a visualidade do software, diziam que *“é mais limpo e, se for ficando embolado, podemos ir limpando, ocultando aqui, ocultando ali”* (US32P1). Afirmações como estas, que se mostraram com maior intensidade, apontam que o software, em comparação com o papel, permite maior agilidade, precisão e um trabalho mais limpo.

Essas falas foram evidenciando maior preferência dos sujeitos ao trabalho com o software, quando comparado com o trabalho que os mesmos já realizaram com régua, compasso e papel. Ainda, nas entrelinhas de falas e expressões, vê-se a menção de uma “superioridade” do software, que também foi contestada, especialmente por aqueles que entendem que comparações são possíveis, mas que, no entanto, não é preciso ajuizar o que é melhor ou pior, mas pode-se dizer de modos pelos quais, no software e no papel, abrem-se possibilidades distintas de trabalho. Tem-se essa compreensão em falas como: *“No final das contas, quando a gente vai construir com régua e compasso e com o Geogebra, eu acho que dá pra fazer as mesmas coisas. É a agilidade e a coisa do visual do computador que deixa a gente colorir, apagar, ocultar. Essas coisas que deixam o trabalho diferente”* (US3P1).

Ainda, outras falas expressaram a possibilidade de movimento que é presente no software e “ausente” no papel, como por exemplo: *“eu acho que o que tem de mais diferente é a questão de poder movimentar. Lembram da atividade da cápsula? Nós vimos um tanto de coisa depois que movimentamos o ponto lá, que era a bola. Vimos as propriedades que não variam, que a bola pode estar em qualquer lugar. No papel, não daria pra movimentar a bola, então a gente ia achar uma posição e pronto, uma resposta única. Se não viesse uma luz, a gente ia achar que só era aquela resposta. Então, pra mim, ir arrastando os pontos e ir vendo o que acontece é muito bacana, podemos focar no que tá acontecendo no movimento que fazemos. Com régua e compasso,*

temos que fazer várias construções pra ver se acontece algo” (US4P1, US5P1, US6P1, US7P1, US8P1 e US9P1).

Contrário ao pensamento de que o movimento é possibilidade que se abre no *software*, mas não no papel, tem-se a compreensão de que no trabalho com papel o movimento também se faz presente. Os sujeitos afirmam que nos dois trabalhos *“têm isso de pegar e fazer, giramos o compasso, arrastamos as réguas. No computador, arrastamos o mouse, clicamos no botão. Então os dois envolvem muita prática”* (US23P1). O mesmo sujeito que acima fala, expressa também que *“No computador é tudo mais rápido; a gente movimenta o mouse e vê na hora (na interface) o objeto que a gente clicou se mover também. No papel não tem isso. Nós conseguimos fazer uma projeção, outras figuras, que por ocupar outras posições, representam o deslocamento da figura inicial”* (US24P1).

Sobre as falas que comparam o trabalho com *software* e o trabalho com régua e compasso, não se pode dizer que uma é certa e outra é errada. Uma não exclui a outra. Neste texto, as comparações direcionaram à compreensão de que o movimento se faz presente tanto no *software* quanto no papel, porém, de modos distintos. Em ambos os trabalhos há a intencionalidade do sujeito, que se move e move o que lhe é dado. Na última fala do parágrafo anterior, tem-se que o movimento de figuras na interface do *software* dá-se também pela possibilidade de “arrastar”, e, há falas que versam que *“a cereja do bolo, no Geogebra, que dá a total diferença de uma resolução no papel, é poder arrastar”* (US33P1). Entendemos, assim como o sujeito explicita em sua fala, ao dizer que *“No papel não tem isso”*, que a possibilidade de *arrastar* uma figura não se abre ao trabalho com régua e compasso. No entanto, entendemos que o *deslocamento* de uma figura nesse contexto é possível, uma vez que se pode projetá-la em outros lugares do papel, seja por translação, por rotação, por reflexão ou por homotetia.

Na fala trazida três parágrafos acima, que diz sobre o desenvolvimento da *atividade da cápsula*, é explicitado que no papel não há possibilidade de mover a bola, em seguida, há a afirmação de que para que se veja algo (podendo ser a posição final da bola), deve-se realizar várias construções. Entendemos que nessas várias construções, são várias também as posições ocupadas pela bola, e, essa mudança de posição, entendemos que também é evidência do movimento. São os modos pelos quais esse movimento avança no *software* e no papel que são distintos, bem como as ferramentas de trabalho e o que elas oferecem ao sujeito-movente.

Avançando, e trazendo outro modo pelo qual o movimento se evidenciou, explicitamos agora sobre o movimento como *modo de expressão*. Essa expressão constitui-se pelo engajamento do corpo-próprio, ponto zero do qual se realiza gestos, visando o outro, alguém que se volta aos gestos realizados e preenche-os de sentidos.

Em nossa pesquisa de campo, o gesto mostrou-se, especialmente, como preenchimento da linguagem falada. Por exemplo, junto à fala: “*aquele ângulo entre os rios tem que ser de 90°*” (fala anterior à US4A7), o sujeito “*ergue o braço direito e com o dedo indicador aponta para o ângulo que aparentemente é reto*” (US4A7). Nessa exposição, que traz em uma mesma unidade de expressão a linguagem da fala e a linguagem dos gestos, evidencia-se um cuidado do sujeito ao buscar ser compreendido. Desse modo, quando a fala por si só não traz a totalidade do que o sujeito almeja expressar, ele realiza gestos, e, ainda, vale-se da interface do *software* para dar um fundo visual ao movimento.

Muitas vezes, uma representação na interface foi reapresentada por um gesto corporal. Dessa forma, foram feitas representações de objetos matemáticos, como, por exemplo, de uma reta, o que pode ser melhor entendido na situação em que um aluno afirma que “*pra desenhar a linha de meio de campo, traçamos a mediatriz do segmento BC*” (Fala anterior à US7A1), ao mesmo tempo em que ele, “*com o movimento do braço direito simula uma reta dividindo o retângulo projetado ao meio*”(US7A1).

O movimento também se mostra como *modo de expressão* na materialização de movimentos realizados com o *mouse*, que se expõem na interface do *software* como movimentos do cursor e de figuras. Isso pode-se ver na fala: “*Eu pegava o mouse e mostrava na tela o que eu estava pensando. [...] A gente vai movendo e falando pro colega o que a gente tá vendo, tá pensando, [...], aí ele vê e entende, depois ele pode também fazer a mesma coisa*” (US41P1 e US42P1).

Assim como com um dedo apontado para a projeção pode-se direcionar a atenção de um sujeito que assiste à apresentação, indicando o que ele deve olhar, com o cursor do *mouse*, guiado por esse mesmo dedo, pode-se também apontar e indicar. Ambos os casos se dão por um movimento corpóreo intencionalmente realizado para expor uma ideia e tê-la compreendida por quem direcionado está à pessoa que expõe.

Além de apenas indicar e apontar, os relatos acima explicitados expressam um preenchimento da linguagem falada com figuras em movimento. Ainda, ideias e pensamentos constituíram-se durante o desenvolvimento das atividades quando os sujeitos moveram e visualizaram as figuras em movimento na interface do *software*. Sobre isso, um deles enfatiza que: “*se não desse pra movimentar o Armador, eu acho que não ia conseguir pensar na reflexão*” (US13A4). Ou seja, a ideia de se realizar uma *reflexão* (referente à isometria) emerge da realização de movimento e da percepção das configurações dadas na interface do *software* da figura em movimento.

Desse movimento algumas possibilidades se mostravam. Porém, não se mostravam da mesma forma a todos os membros de um grupo. Na busca por explicitar sua percepção, um dos sujeitos retomava o movimento realizado e ia articulando seu pensamento ao que apresentava a figura em movimento. Aqui, o desenho em movimento é um gesto, uma vez que seu traço e o movimento efetivo realizado exprimem no exterior, na interface do *software*, uma intenção. Assim, cada sujeito de um grupo compartilhou aos demais membros desse grupo suas compreensões, tendo o gesto como uma atitude, exercendo o poder que possuem sobre o espaço que lhes foi disponível para com ele perceber, compreender e expressar.

Assim, pode-se afirmar com amparo nas falas dos sujeitos que “*O movimento está também na comunicação, na troca de ideias*” (US42P2), que “*A visualização do movimento [...] ajudou a comunicar*” (US43P1) e que a sinestesia que abarca os movimentos realizados inaugura a possibilidade de uma racionalidade que anima os gestos daquele que se põe em movimento e que permite a quem se volta ao movimento realizado, a atribuição de significados e interpretação dos sentidos que a ele se mostram.

Neste tópico, explicitamos separadamente cada modo pelo qual o movimento se fez presente em nosso campo de pesquisa. Enfatizamos que ele se mostrou no domínio que um sujeito tem de suas ações motoras. Também, expomos sobre sua presença tanto nos trabalhos realizados no *software*, quanto no papel, com régua e compasso e sobre o querer mover e o pensar em mover, que já se evidenciam como movimento realizado. Explicitamos o movimento: como dado em potencial; como um modo de atualização de possibilidades; como uma realização que vai dando forma ao que se percebe mediante solicitações de uma tarefa e implicações do realizado para dela dar conta; como modo de atualizar um querer fazer ou pensamento sobre o fazer; como modo de fixar o que se vê na variação do movimento; como modo de exploração, como uma ação que se efetua visando uma realização possível; como modo de validar conjecturas e/ou respostas; como fundo no qual pode-se perceber e destacar o que não se move; como meio de buscar a (re)solução de problemas; e como modo de expressão.

No entanto, todas essas evidências do movimento estiveram entrelaçadas nas ações dos sujeitos junto às atividades, aos colegas de grupo e ao *software* de GD. Entrelaçados de tal modo que é impossível estabelecer uma hierarquia de movimentos. O movimento se configura e se mostra, portanto, como uma unidade que se dá na realização que *atualiza-fixa-transforma-explora-testa-valida-mostra-expressa* no mundo-vida. Essa unidade, quando estiver direcionada ao próprio movimento realizado, também o *atualiza-fixa-transforma-explora-testa-valida-mostra-expressa*, constituindo-o, fazendo-o avançar com novas configurações.

5.2 As percepções que se evidenciam, que constituem um solo para novas percepções e para argumentações

Uma asserção sobre essa Ideia Nuclear deve focar a percepção, como ela se dá, o que dela emerge, bem como as possibilidades que ela abre. Nesta pesquisa o foco da percepção incide especialmente sobre o movimento intencional nos modos dele mostrar-se, já expostos na Ideia Nuclear anterior.

Explicitamos, agora, os modos pelos quais a percepção se mostrou em campo de pesquisa, trazendo os atos perceptivos, bem como suas implicações. Buscamos com isso tecer compreensões sobre o *como se dá a percepção*, em especial, sobre *como se dá a percepção do movimento* quando se está com o computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica.

Na realização das atividades, foram comuns ações como pegar o *mouse*, clicar sobre objetos disponíveis na interface do *software*, arrastar o *mouse*, arrastando também o objeto selecionado, e atentar-se à materialização na tela do movimento realizado. Essas são ações que expõem um fazer perceptivo e que se dão com o movimento do corpo-próprio, atualizando atos como o de tocar, o de ouvir e o de ver, que são também atos sinestésicos, por serem evidências de movimentos realizados e da intencionalidade de um corpo que se move e faz o movimento acontecer em si mesmo e em seu mundo circundante.

No ato de tocar, buscou-se especialmente o *mouse*, mas podemos citar ações táteis junto ao teclado, à tela do computador e à tela de projeção (*data show*). Nessas interfaces físicas, o toque objetivou muitas vezes a comunicação entre os sujeitos e a explicitação de objetos matemáticos. Vê-se isso em atos como o do sujeito que, após explicitar oralmente o que fez, *“se levanta, vai até a projeção e com o dedo indicador da mão direita, deslizando-o sobre a projeção, simula uma reta perpendicular à reta horizontal passando pelo Ala. Coloca o indicador da mão direita sobre a possível interseção da reta imaginária com o segmento que contém o Armador e o Pivô”* (US10A4 e US11A4).

O toque no teclado foi realizado por sujeitos com conhecimento mais apurado sobre atalhos, sobre a junção de teclas que quando pressionada fornecem de modo mais direto algumas possibilidades de construção no *software*. Por isso, poucos sujeitos, e em poucos momentos, utilizaram o teclado. O *mouse*, certamente, foi a interface física mais tocada. Com ele foram selecionadas as ferramentas disponíveis na interface lógica do *software* e se construiu figuras, sobre as quais se clicou para nelas realizar movimentos.

No toque, tem-se a percepção dessas interfaces. Pelo tato elas são sentidas. Há uma sensação de preenchimento da mão quando posta sobre o *mouse*, sente-se a pressão que se realiza em seus botões, sente-se o espaçamento entre eles. O mesmo vale para o teclado. Já as telas, são sentidas, especialmente, com as pontas dos dedos. Sente-se a superfície lisa do computador e a superfície áspera da tela na qual se faz a projeção. Essas superfícies dispõem de texturas distintas, cujas diferenças, antes de serem explicadas qualitativamente, dizendo dos materiais com os quais são produzidas, podem ser sentidas, na pele, no toque de um sujeito que as habita sensivelmente.

Essas interfaces provocam ruídos, aqueles que se expõem no clicar, seja no *mouse* ou no teclado. Há ruídos também no deslizar dos dedos nas telas, mesmo que esses ruídos sejam mais baixos. Então, o ouvir também se evidencia quando se realiza movimentos com essas interfaces, ou seja, elas são percebidas também pelos sons que emitem quando tocadas, cujos ruídos chamam a atenção do sujeito que com elas trabalha.

Junto aos sentidos do tato e da audição, tem-se a visão. Com essa afirmação não estamos, tal como no pensamento clássico, distinguindo-os em unidades separadas, porém olhando-os em sua amalgama, uma vez que, por exemplo, toco e escuto os ruídos das interfaces que estou agora vendo, ou que já vi em outras experiências vivenciadas. A percepção sinestésica está entrelaçada a esses sentidos, visto que os atos de tocar, ver e ouvir, dão-se em fundo dinâmico, os quais o sujeito sabe que realiza por uma percepção do movimento que se evidencia em si mesmo com o que o circunvizinha.

Como já articulado nesta tese, no agora de uma realização, esses atos perceptivos não são isolados, eles se entrelaçam, configurando um ao outro e constituindo uma unidade perceptiva. Assim, na fala: “*A gente clica num ponto, move ele, aí podemos distorcer a figura toda, podemos ampliar, diminuir. Isso tudo deixa [...] um rastro de movimento que a gente vai vendo na medida que vamos movendo as figuras*” (US19P2 e US20P2), tem-se o relato de uma experiência perceptível que é una, que é *tátil-visual-sonora-sinestésica*; o sujeito está tocando o *mouse*, clicando e escutando o som desse clicar, está movendo, dando-se conta do movimento que realiza e visualizando as implicações desse movimento.

A percepção visual, o ato de pôr-se a ver, ganhou um maior destaque nas falas dos sujeitos do que outros atos perceptivos, pois muitas das considerações relatadas diziam respeito ao que se mostrava e se via na interface do *software* de GD. Os sujeitos relatam sobre a percepção visual que se realiza no olhar lançado à tela, que por sua vez, ***apresenta transformações que emergem de movimentos realizados com o mouse***. Por exemplo, um aluno afirma: “*quando mexo no E, o A’ muda de lugar, mas quando mexo no F pra ajustar o M’*,

parece que o A' e o M' voltam pra onde estavam” (US15A5). Aqui, há mudanças de posição após realização de um movimento. No relato do aluno, se expõe a ênfase à percepção visual das variações evidenciadas na tela, destaca-se os pontos e o posicionamento que eles ocupam.

Porém, em todas as falas que enfatizam a percepção das transformações que se expõem na interface do *software*, está implícito o movimento do *mouse*. No entanto, quando o objetivo é falar sobre a percepção, o mar de mudanças que a tela apresenta, como as configurações e desconfigurações de uma figura, as cores, a matemática que se evidencia, o dinamismo promovido pela programação, dentre outras, levam para o fundo, faz “esconder-se”, o *mouse*, o movimento do *mouse*, e o próprio sujeito que se move, movendo o *mouse*. O sujeito, o *mouse*, e eles em movimento, constituem o fundo sinestésico no qual avança a percepção visual.

A fala de um dos sujeito corrobora a ideia acima: *“percebemos os movimentos, primeiro porque estamos vendo acontecer”* (US23P3), expressando compreender ***a visualização como modo de perceber***. Mas, esse sujeito entende que *“antes disso, ele (o movimento) acontece porque somos nós que realizamos o movimento com o mouse. Nós que movemos os pontos. Nas atividades, sempre que tínhamos que buscar alguma coisa, até pra conseguir avançar, nós íamos lá, clicava em algum objeto que inicialmente parecia ser interessante ser movido, aí, nós movemos”* (US24P3, US25P3 e US26P3).

Esse movimento realizado e a visualização do mesmo na interface do software geraram intuições aos sujeitos, algumas delas relacionadas às medidas, como pode-se ver em falas como: *“Dá pra ver. Se não é 90, é bem próximo”* (US5A1), *“Dá pra perceber pelo desenho que são iguais”* (US8A1). Outras intuições configuraram *insights* de modos pelos quais poder-se-ia resolver um problema, como por exemplo: *“No exercício do Caio (Atividade 8), só deu pra ver que dava pra resolver por reflexão depois de que com o movimento, encontramos mais ou menos ali, a posição do ponto de ônibus”* (US30P2).

Essas intuições fizeram avançar as articulações dos sujeitos e o desenvolvimento dado pelos mesmos às atividades. Sendo as intuições ponto de partida para novos movimentos, dentre os quais os movimentos de argumentação, e sendo correlatas à percepção visual entrelaçada ao movimento realizado, entendemos que ***a percepção visual se mostrou também como sustentação para estudos, justificativas e afirmações***. Com ela pôde-se afirmar, por exemplo: *“Nós vimos que temos duas retas paralelas aqui, olha, uma passando por A e A' e outra por M e M'. Dá pra ver isso nas várias posições desses pontos. [...] viu aí? São paralelas [afirma após mover o ponto E para cima e para baixo]”* (US7A5 e US8A5). Esse sujeito não só visualiza duas retas, mas com um estudo prévio do que vê junto ao movimento de alguns pontos,

e das próprias retas, compreende a correlação entre elas. Tendo esse estudo e o que dele se compreende, os sujeitos buscaram externar e justificar suas compreensões.

Nesse percurso que flui em direção à justificação, a percepção mostra-se como primado, como solo, o que vem a corroborar o que já articulamos nesta tese sobre *o primado da percepção*. Não nos referimos aqui a uma primazia estática, que só aparece uma vez, no *start*, que não avança na duração do processo de compreender e expressar. No estudo do percebido, ainda se está a perceber, outras coisas não “vistas” podem se doar à percepção. Na justificativa, a percepção mostra-se presente, pois é dela que se está a dizer e, são percepções articuladas que sustentam e constituem a argumentação, pois se fala de cada ponto percebido, de cada reta vista e delas unidas por um posicionamento que se evidencia na tela.

Nas falas dos sujeitos, entendemos que ***a percepção visual se dá também pela intenção de focar de modo intencional o que se põe a ver, que se configura como um modo de perceber e de compreender***, uma vez que, segundo eles, “*Nós percebemos é ficando atentos ao que está acontecendo na tela do computador, é vendo com cuidado o que o movimento que estamos fazendo tá gerando ali. Foi assim que fomos vendo os invariantes, algumas possibilidades. Foi ficando atentos que também vimos que quando a gente tentava validar uma possibilidade, ela poderia estar correta ou falsa, daí partíamos pra outras possibilidades*” (US15P2 e US16P2). Ou seja, ao ficar atento, pode-se perceber o que a atenção ilumina.

Nessa fala, entendemos que *atentar-se* é um fazer cuidadoso que se realiza também com o *software* e com o que se mostra em sua interface. Essa mesma interpretação compreendemos ser possível na fala: “*Até mesmo essa questão do que vemos na tela, [...], tem tudo a ver com a gente controlando a situação ali, nós poderíamos estar distraídos, mas ficamos focados no que acontecia ali nos movimentos*” (US12P3). Portanto, assim como podemos não estar atentos a uma situação, podemos “dimensionar” a atenção lançada, de modo que o campo sinestésico que se modifica aceleradamente diante de nosso olhar possa desacelerar, para com isso, podermos perceber e compreender o que antes não percebíamos, mas que estava ali, o tempo todo. Assim, no trabalho com *softwares* de GD, quando um movimento acelerado faz com que, na percepção dos sujeitos, “*tudo sai do lugar*” (US21A3), pode-se compreender com um olhar mais atento, que, por exemplo, esse movimento obedece “*algumas leis, as que fomos determinando a cada passo: de ser perpendicular, ser ponto médio, de estar sobre uma reta*” (US21A3).

Entende-se com isso, que *atentar-se* trata-se de desacelerar o mundo a nossa frente. Fazemos isso desacelerando o nosso olhar, nossos movimentos, vivenciando os detalhes, focando, destacando o que se mostra entrelaçado em um emaranhado de fios que se expandem e que se movem, ligando e costurando sempre novas possibilidades.

Quando se diz que há percepção quando se está atento “*ao que está acontecendo na tela*”, mostra-se que a atenção permanece junto ao movimento, junto ao que vai se configurando na interface do *software*. Ela habita o movimento. Em compreensões articuladas no início desta tese, já explicitamos que esse movimento que se configura na tela é correlato ao movimento realizado com o *mouse*. Portanto, entendemos que o estar atento, não tem sua evidência apenas no olhar, mas na intencionalidade de um corpo-próprio, que além de olhar, move-se, dando vida sinestésica ao *mouse*, ao computador, ao *software* e ao programado na interface. Na intenção do fazer atento, a mão que move o *mouse* é tão importante quanto os olhos que veem as implicações desse movimento materializando-se na tela, assim, mover-se/movendo e ver se entrelaçam, avançando juntos em um mesmo fazer, constituindo uma unidade.

Nesse fazer atento, ***o movimento realizado, bem como o movimento percebido vão mostrando possibilidades***, como já explicitamos ao articular sobre a IN1. Dentre essas possibilidades, pode-se destacar aquelas que conduzem à ***percepção de invariantes que se mostram na variação***. A percepção de invariantes foi fortemente pautada nos relatos dos sujeitos. Entendemos em suas falas, que invariantes possuem significados distintos, destacamos dois deles, a começar por: *invariantes como sendo o que não se move junto ao movimento*, referindo-se especialmente ao posicionamento de pontos, quando dizem, por exemplo, que: “*Nós movemos e percebemos que muita coisa muda, os tamanhos e tudo, mas algumas coisas não se movem nessa mudança, são invariantes*” (US15A3).

Aqui, fala-se de algo que não se move quando se realiza movimento em algum objeto ligado a ele. Por exemplo, em uma das atividades os sujeitos compreendem que “*as retas se cruzam em C, e por mais que movimentamos C, elas continuam se cruzando em C*” (US15A2). Em outra situação, entendem que: “*a posição da bola na linha do meio do campo não importa. Olha só, eu movo o ponto E e a posição da cápsula não muda*” (US11A1). Nesse segundo caso, a cápsula que mantém sua posição está ligada ao ponto E, pois o movimento de E faz movimentarem-se também E' e E'1, que são pontos equidistantes e colineares ao ponto que representa a posição da cápsula. Nessa mesma atividade, os pontos que são vértices do retângulo que representa o campo de futebol, não mudam de posição quando se estabelece movimentos no ponto E. Dois desses pontos, nos quais se localizam as bandeirinhas não utilizadas como referência, não estão ligadas por uma construção ao ponto E, por isso não se movem quando E é movido. Não são as posições desses dois vértices que estão sendo chamadas de invariantes, mas sim a posição da cápsula, por estar vinculada ao ponto E, que é ponto movido.

O segundo modo de explicitar invariantes, conforme exposto em campo de pesquisa, diz respeito às *propriedades de uma figura que se preservam quando ela é posta em movimento*.

Vê-se isso em falas como: “quando estamos movendo[...], as retas, os segmentos ficam mudando, mudam de posição, mas as propriedades continuam, as retas continuam perpendiculares, pontos continuam equidistantes” (US11A2 e US12A2); “segmentos [...] se mantêm iguais, os ângulos retos continuam retos por mais que mova o ponto E. F é sempre o ponto médio do segmento E'E'I” (US16A1). Com essas falas, entendemos que o objeto, ao preservar características invariáveis, ou propriedades, preserva-se ele mesmo invariável. Isso pois, todas as qualidades correspondentes a sua estrutura e a sua forma estão antecipadamente antevistos e incluídos no esquema da construção realizada, considerando o contexto disponível, aquele trazido pela atividade. Assim, os valores correspondentes a sua grandeza podem variar, mas suas qualidades estruturais sempre estarão abertas à percepção, possibilitando ao sujeito que percebe relatá-las.

Nos dois modos pelos quais os invariantes se mostraram nos relatos dos sujeitos há em comum que eles se mostram junto ao movimento. Há a intencionalidade voltada ao movimento, que com isso é tomado como objeto da percepção. Na percepção do movimento estando-se com a GD, como já foi explicitado neste tópico, o próprio movimento vai se mostrando, aos poucos se percebe suas características, de direção, de sentido, suas configurações que se evidenciam no *mouse* e na tela. No fluir da percepção do movimento e da variação que ele faz acontecer, os invariantes se mostram, são percebidos. Esses invariantes estão inicialmente “escondidos”, estão atrás de uma possibilidade de movimento e também da atualização do movimento que faz essa possibilidade efetivar-se no agora de um ato.

Portanto, o invariante não é outra coisa, fora do movimento, ele é *com* o movimento, o que fica evidente na fala: “A solução do problema é a diagonal de um retângulo. Com o movimento foi aparecendo a reta, depois, essa reta, com mais movimento foi ficando evidente que era sempre a diagonal de um retângulo. O invariante que aparece no movimento é essa coisa dela ser sempre a diagonal do retângulo” (US3A7). Nessa fala, entendemos que o invariante é uma das faces do movimento percebido. Face que se mostra quando esse movimento vai para o fundo fazendo-a se destacar. Ou seja, quando o invariante se evidencia como objeto da percepção, quando ele é focado, é o movimento (do *mouse*, do sujeito-movente, das figuras) que passa a se “esconder”, indo para as margens, mesmo estando ele constituindo o fundo que faz o invariante mostrar-se ao sujeito que percebe. O que dá valor móvel ao fundo, às variações, ou aos invariantes que se mostram nele, é o modo pelo qual direcionamos nosso olhar, estabelecendo sinestesticamente modos de perceber o movimento.

Com isso, aquilo que afirmamos por invariante é um modo de ser do movimento, que não muda, e é nesse modo de ser que se expõe todas as características disso que não muda,

explicitando a estrutura que o define, que nos permite afirmar sua identidade que independe de suas aparições face a face do movimento que o anima. Assim, pôde-se afirmar, conforme posto no parágrafo anterior, que: “*essa reta, com mais movimento foi ficando evidente que era sempre a diagonal de um retângulo*”, visto que, nas várias aparições do retângulo e da reta no fluir do movimento realizado, vê-se que há sempre o retângulo e a reta que é a sua diagonal, preservando as identidades de *ser retângulo* e de *ser diagonal de retângulo*.

Sobre estar sinestesticamente percebendo, podemos novamente destacar o **controle do movimento realizado pelo sujeito e do que almeja com esse movimento**. Em campo, esse controle mostrou-se também na realização da percepção. Por vários e variados movimentos se buscou “olhar” o objeto focado. Houve a repetição de movimentos para que o focado pudesse dar à percepção suas nuances. Nesse controle do movimento, o sujeito, por exemplo, “*arrasta sucessivas vezes os pontos E e F, de forma a tentar sobrepor A' e M' aos lados CD e BC, respectivamente*” (US5A5), ele afirma que “*move os objetos, tira eles do lugar, se não vemos nada, voltamos ele pro lugar, e vamos movendo até perceber algo que vai ajudar a resolver o problema*” (US19P1). Realizando esses movimentos, buscando iluminar o objeto ao qual se lança em atos perceptivos, o sujeito vê “*que movimentos mais assim, calmos, me davam mais respostas*” (US5P4). A escolha por uma movimentação “calma”, contrapondo um movimento acelerado, mais uma vez evidencia que o sujeito mostra ter o controle de seu movimento corpóreo junto ao movimento que realiza com o *mouse*.

O percebido vai se mostrando aos poucos junto aos atos perceptivos do sujeito, de mover e de ver o movimento que realiza. Vê-se isso na fala: “*Quando movimentamos ali, ia aparecendo algumas coisas que poderiam ser verdadeiras ou não, aí a gente continuava movendo pra ter certeza*” (US9P2). Cada movimento realizado junto ao *mouse* põe o sujeito em contato com o objeto visado na interface do *software*, e cada expressão desse movimento que se materializa nessa interface, dá a ele o próprio objeto em diferentes posições, configurações, características, diferentes faces com as quais pode-se dizer com mais detalhes desse objeto visado. Tem-se o objeto em diferentes perspectivas porque o sujeito é um corpo-próprio que está com o mundo que habita. No que diz respeito a esta pesquisa, ele está com o computador, com *software* e com a matemática trabalhada. Com o movimento, o corpo-próprio faz disso que ele *está com*, coisas dinâmicas.

Na duração de um movimento realizado, **as possibilidades do movimento também são percebidas**, dentre as quais as configurações de sua continuidade, assim como se pode compreender na fala: “*Desço o ponto E, e o ponto M' vai se aproximando de BC. Daí continuo movendo até ele ficar sobre BC. Pronto, M' sobre BC. Resolvido!*” (US11A5). Nessa fala,

entendemos que vai se configurando um *rastro* do movimento agora realizado, que lança à percepção o *por vir*, a continuidade desse rastro direcionada a um segmento, o BC. Com isso, podemos conjecturar que a continuidade de um movimento se evidencia ao sujeito perceptivo antes mesmo de sua materialização na tela. O rastro vai constantemente “evocando” o por vir, tornando o ausente sempre presente num horizonte de possibilidades. Há, portanto, uma projeção do acontecer, que segundo Merleau-Ponty (2012), sem ela, o movimento não seria percebido tal como se dá, especialmente em sua característica de ser contínuo.

Entendemos que a continuidade não se evidencia sinalizando pontos futuros, um M'' seguido de um M'''. Isso já estaria, por si só, desestabilizando a ideia do contínuo, uma vez que entre duas posições fixas há sempre uma lacuna que pode ser preenchida por uma infinidade de outras posições. Não temos junto ao movimento uma percepção do móvel aqui, depois ali, e em seguida uma percepção do fio que os liga. Todavia, entendemos que a experiência da continuidade é a experiência de um fluir, que não expõe vazios, ou os expõe, mas como o vazio de um futuro, que é sempre preenchido por um novo presente que vai deslizando a outro presente deixando-os interligados, e expressando o tempo como contínuo.

Quando um sujeito move na interface do *software* um ponto qualquer e em determinado momento para de movê-lo, ele se dá conta que havia uma posição inicial e que agora há uma posição final de sua mão, do *mouse* e do objeto movido. Na duração do movimento desse ponto, sua posição inicial desaparece na tela, a posição final ainda não se tem. Portanto, o sujeito não vê posições intermediárias, uma vez que não há um intervalo (delimitado por um ponto inicial e um ponto final) que as contenha. No entanto, nas configurações do movimento do ponto, que avança em um ambiente que é familiar ao sujeito, ele tem uma percepção viva do movimento que está realizando e das implicações desse movimento junto ao *mouse*, ao ponto movido e à interface. Assim, entendemos que é vivenciando a duração do movimento que “passa diante de nossos olhos”, sem interrogar quando começou ou quando terminará, que se dá a vivência e a percepção da continuidade.

Com isso, entendemos que o *por vir* explicitado anteriormente mostra-se não como um ponto, mas como um fluxo, um “passar” do movimento que se está a realizar. Ele é percebido e conhecido sem nenhuma consciência de posições objetivas, assim como se conhece um objeto e seu tamanho “real”, mesmo quando visto à distância. Com essa compreensão, não contrapomos o que é dito nesta tese, que a percepção não é reflexão analítica. O *por vir* anteriormente exposto não nasce de uma análise reflexiva. A reflexão poderia dar ao sujeito a continuidade do movimento após a observação e articulação de padrões que se expõem nele. No entanto, não há no ato do sujeito que acima fala, uma pausa para pensar sobre a continuidade

do movimento. O pensar que se evidencia está embrenhado na duração do movimento, assim como o *por vir* e a continuidade, que se mostram tão entrelaçadas no agora desse movimento realizado que, nesse mesmo agora, se evidencia como presente.

No ato perceptivo, o sujeito-movente não está preocupado em criar procedimentos e regras para o movimento do *mouse*, não busca descrever o movimento percebido. Ele pode perceber a continuidade, ou invariantes geométricos, mas não busca de imediato fazer uma asserção caracterizando-os, não busca antecipar o percurso ou o fim de um movimento, nem descrever convergências ou divergências que se mostram. Apenas, lança-se à vivência de vê-las convergindo ou divergindo com o movimento realizado.

Nesse mesmo movimento ***se percebe também o potencial dinâmico do software de GD e do que compõe sua interface***. Anterior ao trabalho com o *software* Geogebra, os sujeitos de pesquisa já o conheciam como sendo um *software* dinâmico. Há, portanto, um saber teórico que é prévio. Mas, como já articulamos na tese, um conhecimento instituído pode ser vivenciado, abrindo possibilidades ao que pode se mostrar à percepção.

Esse potencial é percebido quando o sujeito se põe a mover-se, movendo o que o *software* dispõe em sua interface. Nesse fazer, vê-se que o movimento é possível na materialização de uma intenção de movimento, que se inicia com o pegar e o mover o *mouse*, e avança à tela, configurando desenhos em movimento. Sobre isso, tem-se a percepção de um sujeito de que “*o Geogebra permite a possibilidade de movimento*” (US12A6), o que sustenta afirmações como: “*com o Geogebra [...] e com a possibilidade que ele dá de movimentar, que consegui fazer*” (US22P1), referindo-se à atividade. Dessa forma, o dinamismo prévio, que é programado, passa por uma atualização realizada pelo sujeito-movente.

Com isso, conjecturamos que o potencialmente móvel só é percebido como tal, se sobre ele se realiza movimentos, os quais darão ao sujeito a percepção da mobilidade do móvel ou da imobilidade do estático. Valendo-nos da fala de um dos sujeitos, entendemos que é como a “*relação nossa com o computador. É o mesmo que acontece com o celular, nossa vida está nele, mas se deixarmos ele num cantinho, ele vai chamar, vibrar, mas se não atendermos, se não formos lá mexer nele, nada acontece, o máximo é a bateria acabar. [...] No Geogebra, a situação que tá lá (se refere a uma situação projetada na interface do software) seria a mesma que essa aqui no papel (mostra um rascunho que havia feito no papel), se a gente não pegar o mouse e começar a mover os pontos, se não nos envolvermos, fica tudo parado, tudo como está*” (US30P3 e US31P3). Nessa mesma perspectiva, em outra fala tem-se que: “*Se não tivesse a possibilidade de movimentar ali na tela, ela seria o mesmo que uma folha, o desenho seria estático*” (US18P2). Nessas falas tem-se que *software* e figuras são dinâmicas somente no agora

de uma atualização do sujeito que se move, movendo, e faz o dinamismo acontecer, o que corrobora a compreensão anteriormente explicitada, de que o *software* de GD é potencialmente dinâmico, bem como as figuras em sua interface projetadas.

Sobre as comparações entre movimento com *software* e movimento com papel, já explicitamos na IN1. Nas falas expressas no parágrafo anterior, evidencia-se que no papel não há movimento, no entanto, fica subentendido que se está a dizer do movimento de arrastar. Como já discutido, há movimento de figuras no trabalho com régua, compasso e papel, no entanto, esse movimento é o que caracterizamos por isométrico, deslocamento, que entendemos ser distinto desse movimento de arrastar presente no *software*, que segundo os sujeitos, não se dá no papel.

Quando os sujeitos expressam sobre o potencial dinâmico do *software*, trazem junto, mesmo que nas entrelinhas, o atualizador do dinamismo, aquele que move o *mouse* acessando e ativando o que o programador intenciona com sua programação que está revestida pela interface. No entanto, há falas, como: “*Eu acho que o movimento está no software mesmo, é ele que permite executar os movimentos*” (US17P2), as quais expressam que o dinamismo é característica intrínseca do *software*, deixando às margens quem faz o dinamismo acontecer. Isso corrobora o que já foi expresso na tese, sobre os estudos que formalizam uma definição para GD, considerando como sujeito do dinamismo apenas o *software*, desconsiderando, ou deixando subentendidos outros sujeitos, como o programador e a pessoa que realiza atividades com esse *software*.

Avançando para outras percepções que se evidenciaram em campo, destacamos a ***percepção do movimento imbricado no enunciado das atividades***. Esse destaque dá-se mediante falas como: “*acho que a questão de ter movimento, ou não, tem muito a ver com as atividades, com a proposta do professor*” (US48P2). Por exemplo, “*o problema do Caio, na Atividade 8, é de locomoção, tínhamos que ver um melhor lugar pro ônibus. Na atividade da folha (Atividade 5), a gente tinha que pensar nela sendo dobrada. No da estação (Atividade 2) tem um cara velejando*” (US21P2). Essas são características de movimentos projetadas nas atividades, que, na leitura, os sujeitos conseguiram perceber.

Essas percepções indicaram aos sujeitos movimentos que deveriam ser realizados, mais que isso, direcionaram suas ações, assim como pode ser compreendido na fala: “*Eu percebi muito de movimento nas atividades 1 e 3, nelas a gente tinha que mover pontos pra conseguir perceber as soluções*” (US32P2). Com isso, os sujeitos perceberam que os problemas traziam situações cujo fundo era o movimento, e, por isso, a solução dos mesmos se daria realizando movimentos.

Com as articulações até então realizadas, entendemos, em síntese, que em campo de pesquisa *a percepção mostrou-se entrelaçada ao ato de mover-se/movendo*. Essa compreensão se sustenta em falas como: “*somos nós que controlamos o mouse. Todos esses movimentos que vemos na tela do Geogebra é fruto do movimento que fazemos no mouse*” (US4P3). Essa fala e outras que aqui já explicitamos, faz-nos retomar a compreensão de que o movimento expresso na tela é correlato e simultâneo ao movimento realizado com o *mouse*, com o corpo em movimentos intencionais. Assim, tem-se que o sujeito se move, movendo o *mouse*, a figura na interface e a programação. Trata-se de um mesmo movimento, que se evidencia em diferentes corpos (as interfaces físicas e lógicas, o corpo-próprio, as figuras) e em diferentes espaços (no cibernético, no ambiente em que se está com o computador, na imaginação).

Quando o sujeito afirma que “*somos nós*” que movemos, que vemos, que vamos movendo e vendo, que controlamos o *mouse* e as figuras, entendemos que há uma autopercepção, *o sujeito percebe a si mesmo na duração das atividades, ele percebe-se percebendo*. Ele consegue falar sobre como esteve realizando a atividade e um movimento, pois no momento dessas realizações ele dá-se conta de estar sendo o realizador. O sujeito tem no agora de uma realização, a percepção de que seu movimento move, e, com isso, dá-se conta de mover-se, movendo. Aqui, não avançaremos na questão do perceber-se, deixando espaço para uma discussão mais aprofundada no tópico que segue, onde articulamos sobre a IN3, por entendermos que ele abre mais possibilidades, trazendo em maior número grupos de convergências e falas com as quais podemos tecer articulações sobre o tema.

Articulando a IN2, explicitamos sobre as percepções realizadas em campo, sobre os modos pelos quais ela acontece e sobre as implicações das mesmas para direcionamento de outras ações dos sujeitos, dentre as quais as analíticas. Expomos que a experiência perceptiva do sujeito com a máquina é tátil-visual-sonora-sinestésica, destacando aquela que mais se mostrou nas falas dos sujeitos, a percepção visual que se realiza no olhar lançado à tela, que por sua vez, apresenta transformações que emergem de movimentos realizados com o *mouse*. Evidenciamos que essas transformações, bem com os movimentos que as fizeram acontecer geraram intuições aos sujeitos as quais sustentaram seus estudos, justificativas e afirmações.

Destacamos, também, o atentar-se, que aqui foi se configurando como um modo pelo qual o sujeito se põe a perceber. Quando intencionalmente se está atento ao movimento realizado, bem como ao movimento percebido, enfatizamos que vão se mostrando possibilidades, dentre as quais os invariantes que se mostram na variação. Articulamos que *estar atento a...*, é evidencia de que o sujeito mostra ter controle do movimento que realiza, bem como do que almeja nessa realização, pois trata-se de um lançar-se cauteloso, que

desacelera o movimento, fazendo mostrar-se suas nuances e as possibilidades que dele possam emergir.

Junto às percepções que fluem com o movimento, destacamos a percepção das possibilidades dinâmicas apresentadas previamente pelo *software*, o que culminou na afirmação de que ele é potencialmente dinâmico. Percepção e afirmação, realizadas mediante desenvolvimento de atividades que solicitavam movimentos diversos, que ao serem realizados pelos sujeitos, colocavam-nos como sendo atualizadores dessas possibilidades, fazendo o dinamismo acontecer.

Articulamos, também, sobre a percepção do movimento entrelaçada ao ato de mover-se/movendo, que, ao nosso entender, sintetiza todos os modos pelos quais a percepção se dá, enquanto movimento que move e transforma. Ao dar-se conta de estar se movendo, movendo, o sujeito se compreende na realização, e, assim, ele se percebe, percebendo, podendo em outro momento dizer sobre como percebeu. O mover-se/movendo e o perceber-se/percebendo, são possibilidades que abarcam a totalidade da atividade que une homem e máquina.

5.3 A Unidade que abarca o sujeito-movente e o que lhe é disponível ao movimento

Ao articular sobre essa Ideia Nuclear buscamos expor os entrelaçamentos entre os modos pelos quais o movimento e a percepção se evidenciaram no campo de pesquisa. Nela, abrimos compreensões sobre a próxima Ideia Nuclear a ser discutida, pois esses entrelaçamentos entendemos abarcar o movimento, a percepção e também o conhecer, amalgamando-os e constituindo uma unidade no *agora* dos atos intencionais do corpo-próprio, que podemos escrevê-la assim como escrevemos nosso fenômeno de pesquisa, *movimento-percepção-conhecimento*.

Nas seções desta tese já discutimos sobre movimento, percepção e conhecimento, destinando a cada um deles tópicos distintos. No entanto, como pode ser compreendido na leitura desses tópicos, não conseguimos, e nem era a intenção, dizer de um ou de outro sem trazer compreensões sobre os demais. Isso se dá, pois, movimento, percepção e conhecimento são coexistentes no *agora* das realizações humanas. Movendo, o sujeito percebe conhecendo. Percebendo, ele está em movimento de conhecer, que solicita a realização de atos perceptivos.

Assim, a unidade *movimento-percepção-conhecimento* se mostra sempre. Para melhor explicitá-la, nesta IN, trazemos um recorte de uma fala expressa no início do desenvolvimento da Atividade 5: “*Primeiro, nós pegamos a folha do exercício (a que lhes foi entregue impressa) e dobramos até o outro lado [pega o vértice superior esquerdo da folha e o posiciona sobre o*

*lado menor inferior da mesma. Firma o vértice sobre esse lado com uma das mãos e, com a outra mão, realiza a dobra da folha]. Fizemos outras dobras [pega o mesmo vértice e posiciona em diferentes lugares da folha], fomos percebendo que a dobra fica sempre na metade entre o vértice e o lugar onde colocamos ele” (US1A5 e US2A5). “[...]concluímos que deveríamos fazer a reflexão do vértice com relação à reta, e também do ponto médio do lado (se refere ao lado AB), pois quando puxamos o A ele vai vir junto” (US3A5). Neste recorte, compreendemos que com o movimento de dobrar a folha, percebeu-se uma particularidade entre o posicionamento de dois pontos e de uma reta, e conheceu-se essa particularidade como sendo uma equidistância que pode ser trabalhada fazendo reflexão (referente à isometria). Embora se destaquem momentos: o início do movimento, percepções realizadas e o que com elas se abre à compreensão, a vivência que abarca movimento, entendemos que a percepção, movimento e conhecimento dão-se em fluxo, ou seja, o sujeito se *move-movendo-percebendo-conhecendo*.*

Ao expor entrelaçamentos, entendemos estar explicitando sobre o “*quando se está com*”, presente na pergunta de pesquisa. *Estar com* é estar junto ao outro, ao programa, à atividade; é estar intencionalmente ligado ao que se realiza e ao que vai se pondo nessa realização junto à materialidade disponível. O movimentar, o perceber e o compreender se expõem sempre na subjetividade do sujeito que é corpo-vivente, sempre junto ao que com ele está (circunvizinhança do mundo-vida), que se estende e “*toca*” pela intencionalidade e pelos órgãos dos sentidos isso que o circunda e para o que olha detidamente. Suas ações não se dão em um vazio; são realizadas no corpo-próprio, que sempre responde ou atende a uma solicitação que indica o que há a ser feito.

Um outro entrelaçamento, que vemos ser constituinte dessa unidade diz do que se expõe na *percepção na tela de transformações que emergem de movimentos realizados*. Visualizamos esse entrelaçamento em falas como: “*manipulamos o mouse e movemos as figuras na tela, e vemos elas se transformando ali*” (US16P1). Na fisicalidade do espaço vivenciado pelo sujeito, pode-se dizer do movimento realizado no *mouse* fazendo transformar a interface e o que nela está. No entanto, compreendemos que o espaço em que está o sujeito *com* o computador, realizando uma tarefa, não é apenas um espaço físico, que como numa fotografia apresenta o sujeito, o *mouse* e a tela, dispostos um diante do outro. Em um espaço puramente físico, não há entrelaçamentos, mas objetos posicionados sem fios que os liguem.

Entendemos que o espaço constituído em campo de pesquisa é também *virtual*, que aqui não se confunde com o virtual do ciberespaço. A virtualidade a qual nos referimos é a que referencia Merleau-Ponty (2011), a que abarca o que não é dado em sua fisicalidade, o que não é visível ou palpável numa vivência, como a que está um sujeito segurando um objeto, o *mouse*,

por exemplo. No processo que se inicia do pegar o *mouse* até o ver a transformação, há, como já dito, uma sensação, um querer, um pensar, uma satisfação com o visto, ou uma insatisfação. Esses são alguns dos atos e qualidades que constituem a virtualidade do *ser no mundo*, ou, mais especificamente no caso desta pesquisa, do *ser-com-o-computador*, que, por sua vez, transcendem o movimento estudado com base nas posições dos corpos: sujeito, mouse e objeto movido, embora o estar posicionado também constitui esse *ser com*. Portanto, entendemos que o que se expõe nessa virtualidade é o que direciona o sujeito ao objeto e que faz do objeto algo para o sujeito, pondo-os assim, numa correspondência.

Quando um sujeito olha para um ponto, o olhar lançado já faz o entrelaçamento entre sujeito e ponto e, o pensar sobre como mover vai produzindo novos entrelaçamentos. Nesse mover, há modos de transformações que se evidenciam. O sujeito se movimenta, movendo o *mouse*, o ponto sobre o qual clica e arrasta e a figura ligada por uma construção a esse ponto. Ao final desse movimento, o ponto em si, parece não ter sofrido transformação; ele ainda tem a mesma cor, o mesmo tamanho, a mesma fisionomia, o que nos faz questionar se *o movimento gera transformação em tudo que com ele está, ou se a mudança não se dá no móvel, mas apenas na duração do percurso no qual ele é visto em trânsito*. Questiona-se se o movimento não é visto *no* ponto movido.

Nesse pensar, o movimento não é correlato ao móvel, mas constitui-se nas *relações* dele com o que o circunvizinha, em cada posição que ocupa. É pertinente a essa concepção, entendemos, negar o próprio movimento, visto que separar o móvel do movimento, para nós, é dizer que ele não se move, que ele é a materialização espacial, temporal e pontual de posições sempre visíveis, identificáveis ao olhar de um sujeito que o visa. Nessa visada, vê-se o movimento como uma “linha pontilhada”, em que cada ponto é visto como idêntico ao seu anterior e ao seu posterior.

Numa postura que visa analisar o movimento, buscando compreendê-lo, inicia-se sua análise pelo ponto em seu repouso, inicial ou final. Com isso, vê-se nessas duas posições, o mesmo ponto, sem alteração. Continua-se a análise considerando um momento do movimento, captando o ponto nesse momento específico, e, assim, tem-se ainda o mesmo ponto. Mas, notemos, nessa análise assume-se perspectivas discretas; o movimento é recortado de modo que não se tenha o *ponto-em-movimento*, mas apenas o ponto em diferentes posições.

Entendemos que o *ponto-em-movimento* não é aquele ponto que se mostrava como potencialmente móvel na interface do *software*. O entrelaçamento entre *ponto e movimento*, produz novas configurações para o ponto e para o movimento. A ideia da preservação absoluta do ponto contribui para um pensar que o configura como sendo sempre um ponto, e não como

algo que passa a nossa frente, como um vulto, um rastro, uma linha, ou simplesmente como um ponto flutuante que desliza na tela. O móvel, em movimento, “a cada instante é aniquilado e recriado, [...] ele não subsiste através de suas diferentes apresentações instantâneas” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 367). A concepção da preservação absoluta do móvel (do ponto) contribui, ainda, para a caracterização do movimento de um ponto como um conjunto de posições ocupadas por ele, contrapondo nossa concepção da continuidade do movimento, que tecemos na IN2.

No ato perceptivo, que se realiza no agora de uma vivência, entendemos que não se tem a certeza da preservação do ponto, mesmo que seja dada ao sujeito uma imagem com uma sequência de pontos idênticos. Nesse ato, ele pode apenas realizar uma experiência de uma transição contínua. “Por exemplo, a ‘passagem’ característica e específica é a carne e o sangue do movimento, que não pode ser formado por composição a partir de conteúdos visuais ordinárias” (MERLEAU-PONTY, 2011, p. 366). Tomando o móvel como sendo o próprio sujeito-movente, para ele, mover-se é começar e avançar prosseguindo ou terminando o movimento intencionado, ou seja, na vivência do movimento o sujeito não se preocupa com as posições que seu corpo ocupa dados os referenciais que o cercam. *Ser em movimento* não se trata de um engajamento pelo qual se ocupa alternadamente posições. O sujeito vivencia o movimento como um fluir, que no agora em que avança, não é tematizado ou analisado, haja vista que esses atos, por si só, interrompem o fluxo do movimento inaugurando outras possibilidades ao sujeito que os realiza.

Em outro caso, quando o ponto movido é ligado a uma figura, há mudanças nessa figura. Ela pode não se desconfigurar, mantendo suas propriedades geradoras, mas pode ter novas configurações dimensionais, o que pode ser entendido na fala de um sujeito sobre o movimento realizado em um triângulo, que, ao dizer das mudanças que acontecem, aponta que “*algumas coisas não se movem nessa mudança, são invariantes*” (US15A3), “*tem os ângulos, o de 40° e os de 90, eles não mudam no movimento*”(US18A3). No entanto, se lançado um olhar de discretização a esse caso, ainda estamos no âmbito da discussão anterior sobre o movimento do ponto, visto que, se ele é um vértice de um triângulo, por exemplo, ele estará se movendo devido ao posicionamento que ocupa em *relação* aos outros vértices e ao lado oposto a ele. Os lados ligados a esse vértice se movem com ele, então, na ação analítica, tem-se esses lados ocupando posições, assim como ocupa o ponto.

No caso do movimento da figura e do ponto, como entendido na concepção da física mecânica, por exemplo, que se dá mediante *relação* do móvel com o que o circunvizinha, constitui-se um fundo. Esse fundo é objetivo e vivido considerando um espaço de *referenciais*

em relação aos quais o movimento é estudado e compreendido. Analogamente, no *software Geogebra*, por exemplo, pode-se definir o movimento de um ponto que vai de um lado ao outro da tela ao estudar a posição dele relacionada a cada ícone expresso na barra horizontal, superior da tela. Pode-se, ainda, exibir o eixo cartesiano e estudar o movimento trazendo relações com coordenadas.

No entanto, entendemos que o fundo de um movimento, quando se vivencia o *ponto-em-movimento*, ou a *figura-em-movimento* não se constitui pelo ato de relacionar, uma vez que a figura ou o ponto antes de qualquer fazer que visa esse ato, já *está com* seu fundo, com o que o circunvizinha. O sujeito experiencia o fluir do *ponto-em-movimento*, sem que se tenha fixadas posições anteriores cujas relações descrevam o percurso. Desse modo, a figura se move com o fundo, e enquanto ela muda, produz mudança também nesse fundo, o que corrobora a fala: “*Quando movemos o ponto C vemos os outros moverem juntos, na interface*” (US11A2).

Trata-se, portanto, de um fluir que, quando vivenciado, abre ao sujeito a percepção do movimento nas transformações que abarcam a *figura-em-movimento* e o fundo que também se move quando nele a figura desliza. É importante destacar que o movimento do ponto, em realização, flui, dando-se no agora da vivência. Entretanto, quando se busca falar desse movimento, o fluir dessa vivência se quebra, e pelo ato de lembrar do acontecido, traz-se à fala uma descrição do movimento em que aparecem pontos discretos, inter-relacionados evidenciando uma discretização da continuidade do movimento.

Com isso, destacamos o entrelaçamento entre o *movimento* e *seu fundo*. Quando os sujeitos afirmam que: “*tivemos que movimentar, e o que foi bacana é que junto com esses movimentos pudemos ver melhor as construções e entender o que fizemos*” (US49P2), evidencia-se que o que se pode ver e compreender, dá-se junto ao movimento, não em paralelo ou às margens do mesmo. Ou seja, com o movimento está o fundo que não só o circunvizinha, mas que também está com ele, coexistindo. Esse é vivenciado pelo sujeito que realiza o movimento, e dele emergem percepções e compreensões.

Entendemos que *o controle do movimento realizado e do que se almeja com ele*, também expõe um entrelaçamento, que é o que enlaça o sujeito-movente e sua intencionalidade motriz, que é direcionada à realização das atividades, *sempre visando algo*. Esse controle, que evidencia um *mover para...*, pode ser compreendido na fala: “*ficamos movendo o segmento tentando sobrepor o A' em cima de CD e o M' ao lado BC*” (US4A5), quando o sujeito expõe que realiza movimentos visando sobrepor objetos geométricos. Mesmo que se tenha intenções anteriores à efetivação do movimento junto ao *mouse*, o movimento e o que se almeja com ele

já estão entrelaçados, e continuam assim no agora do movimento realizado e no *por vir* que vai sendo vislumbrado.

Como entrelaçamento, destaca-se, também, *a visualização do movimento que gera intuições ao sujeito*. Imediato à visualização tem-se um pensar que gera intuições. Falas como: “fazendo esses movimentos aí tivemos outra ideia. Pensamos em deixar um ponto já resolvido. Nosso problema era que tentar arrumar os dois pontos ao mesmo tempo estava difícil. Pensamos então em deixar um A’ fixo em cima do lado CD” (US6A5), expressam que um pensar, um intuir, é correlato à visualização do movimento, que expõe ao sujeito que vê, um campo gerador de sentidos que são *percebidos-interpretados-compreendidos-expressos*.

Portanto, as intuições emergem e vão se articulando ao que se vê na interface do *software*, assim como isso que se vê vai se articulando com as intuições, fazendo-as avançar. Desse modo, tem-se uma doação recíproca, da intuição ao visualizado e do visualizado à intuição. Nesse movimento articulador, tem-se outra evidência de entrelaçamento, que se constitui pela *percepção do movimento amalgamada ao ato de mover-se/movendo*. As intuições colaboram com a realização de projetos de atualização da ação. O referido entrelaçamento entendemos mostrar-se em falas como: “Nós vamos vendo o movimento que realizamos com o mouse ir simultaneamente acontecendo na tela, vamos percebendo o movimento” (US4P2). Isso nos permite novamente explicitar que o movimento realizado expressa e se expõe, podendo ser visto pelo sujeito que o realiza. Compreende-se, portanto, que o movimento move, e que o mover-se se dá sempre movendo.

Mover-se, movendo objetos geométricos em *softwares* de GD, traz também o entrelaçamento entre *sujeito-movente, máquina e tarefa a ser realizada*, pois “*tá tudo junto, a máquina não trabalha só, ela precisa da gente*” (US29P3), conforme expressa um dos sujeitos. Quando se está com o computador, abrem-se possibilidades de espacialização que vão articulando a motricidade com o *ser-com-a-máquina*, constituindo um espaço de vivências específico, com suas singularidades. Porém, essas possibilidades se abrem mediante uma tarefa, da mais simples à mais complexa, do clicar ao construir. Essas tarefas também solicitam um movimento específico, visando algo. Essa afirmação é corroborada pela fala de um sujeito: “*eu vi bem forte nas atividades, de a gente mover pra perceber algumas coisas importantes pra conseguir resolver os problemas*” (US5P2). A motricidade já explicitada neste trabalho, não se limita ao movimento de um corpo fisiológico. Ela é caracterizada pela intencionalidade. Quando se assume uma tarefa junto à máquina, esses atos se dão com as interfaces e o estudo da motricidade foca a amplitude variável do *ser-com-a-máquina-com-as-atividades*.

Assim, entendemos que na situação proposta na pesquisa que empreendemos, a motricidade do sujeito é mobilizada pelas possibilidades dos *softwares* e pelas solicitações das tarefas. Entendemos também, que *softwares* e tarefas são pensadas e criadas *para* o sujeito-movente, visando modos pelos quais esse sujeito pode atualizar o movimento dado como possível de ser realizado. Ou seja, *softwares* e atividades são estruturados visando as possibilidades motoras dos sujeitos. Por exemplo, tem-se *softwares* e atividades específicas para sujeitos com deficiências que lhes impõem dificuldades de movimento corpóreo.

A motricidade se expõe como modo de vivenciar a espacialidade do corpo-próprio intencionando ações com a máquina. Os sujeitos de nossa pesquisa fazem a Geometria trabalhada, a do *software*, vir a ser dinâmica, e fazem isso ao estar com ela articulando as possibilidades tecnológicas do *software* à motricidade de seu corpo-próprio, e percebendo a materialização de seus atos motores em interfaces físicas e lógicas.

Ao moverem-se, movendo e percebendo o movimento, os sujeitos desta pesquisa, muitas vezes foram dizendo do movimento realizado e do percebiam com ele. Isso evidencia que há uma sincronia que articula **o mover e o dizer do movimento**. Ao relatar sobre o desenvolvimento de uma tarefa, um sujeito diz: “*Pra fazer esse giro de 90°, nós rotacionamos o ponto A’ em torno de C 90° no [...] sentido horário*” (fala anterior à US9A3), juntamente à expressão oral, esse sujeito “*seleciona a ferramenta Rotação em Torno de um Ponto e realiza a rotação de A’ em relação a C com sentido horário e amplitude 90°*” (US9A3). Entendemos que há, nesse fazer, um preenchimento de sentido que se dá reciprocamente entre fala e movimento, constituindo dessa forma uma mesma unidade de sentido de expressão.

Ao falarem do movimento que realizam, entendemos que os sujeitos evidenciam que se dão conta do que estão fazendo e do espaço em que seu fazer avança. Com isso afirmam que: “*vemos o movimento, as propriedades, porque estamos ali ó, olhando o que acontece, tomamos conta do espaço ali*” (US13P3), o que possibilita a compreensão de que o sujeito se dá conta de ser o realizador do movimento que se evidencia no *mouse* e na tela, o que explicita o entrelaçamento entre **o sujeito-movente e o movimento expresso na tela do software**, que pode ser melhor compreendido em falas como: “*vemos os movimentos que nós fazemos com o mouse; quer dizer, na tela não tem o movimento do mouse, mas é a gente movimentando o mouse que faz o movimento na tela.[...]. É a gente que faz os movimentos, [...]somos nós que controlamos o mouse.*” (US1P3, US2P3 e US3P3); “*Se não fossemos nós movimentando, não teria movimento [...]a tela ficaria branca. Quando clicamos sobre um ponto, ele se move na tela porque estamos movendo o mouse. [...]É relação de dependência, o movimento no Geogebra depende de nós que vamos nele e movemos*” (US5P3, US6P3, US7P3 e US8P3).

Entendemos que esse dar-se conta se materializa por *um pensar que flui articulando-se aos movimentos realizados e às implicações do mesmo na tela*. Trata-se de um *olhar para si*, que permite ao sujeito compreender-se no agora de seu ato como o realizador das configurações que ele vê materializarem-se diante de seus olhos, na interface do *software*. Quando um sujeito afirma que: *“fui movendo e parei mais ou menos aqui, aqui os ângulos parecem ser iguais”* (US7A4) ao mesmo tempo que *“clica sobre o ponto Armador e o arrasta sobre a linha horizontal até observar uma aparente igualdade entre os ângulos”* (US8A4), há um pensar reflexivo distinto do pensar que outro sujeito expressa quando afirma: *“Todos esses movimentos que vemos na tela do Geogebra são frutos do movimento que fazemos no mouse”* (US4P3). O dar-se conta, entendemos que se expõe no primeiro caso, em que o pensar flui junto à realização perceptiva, não a explicando, mas a animando e dando ao sujeito a certeza de estar em/no movimento e gerando movimento. No segundo caso, o pensar que se evidencia é outro. Trata-se de uma reflexão analítica sobre o já realizado, expondo uma afirmação que se sustenta por compreensões trazidas da vivência com o *software*, seja no decorrer da pesquisa de campo, ou antes dela. Nesse momento, o sujeito retoma pela lembrança a vivência, e dela põe-se a falar. Essas compreensões podem ser expressas, tal como feito, pois em um momento anterior, o da realização de movimentos com o *software*, desenvolvendo uma atividade, o sujeito percebeu-se sendo ele presente nesse momento e atualizador das solicitações dessa atividade.

O pensar que se dá junto ao ato perceptivo vai inaugurando a cada momento para o sujeito uma consciência de si, que dura, permitindo-o refletir nessa duração sobre o que sente, sobre seu corpo em movimento, sobre o movimento que esse corpo produz à sua frente: no *mouse*, na interface. Pausar essa duração para dela emitir juízo, é instaurar outro momento, que é sustentado por uma reflexão analítica. Vivenciar essa duração, por sua vez, é dar-se conta de estar refletindo-percebendo, dando-se conta do que faz nesse movimento de perceber, que entendemos também como um modo de perceber-se, percebendo.

Se mudarmos o foco do nosso olhar para focar o percebido de si em ato pelo próprio sujeito que percebe, focamos *o perceber-se em movimento, realizando movimentos*, que compreendemos mostrar-se em falas como: *“movimentamos o tempo todo”* (US11P2); *“a gente também estava em movimento quando estivemos desenvolvendo os problemas. Ficamos movendo aqui com o mouse [com mão direita simula a realização de movimentos com o mouse sobre a mesa] e só ficamos olhando o que acontece na tela”* (US10P3 e US11P3); *“Quem faz o movimento somos nós, nós que clicamos nos pontos e arrastamos eles”* (US14P3).

Nesse perceber-se percebendo, o sujeito vivencia a experiência de uma modificação de todo seu corpo e dele com o computador. Os sentidos que se mostram quando está com o

computador se entrelaçam e produzem um movimento que vibra no seu corpo-próprio, e, os objetos, como por exemplo, o *mouse* e a tela, “desaparecem”, fazendo com que no corpo-próprio seja efetivado um só movimento evidenciando o mover-se/movendo. Ou seja, o perceber-se não é produzido por um descolamento, que coloca o sujeito observando a si mesmo com os objetos. Perceber-se é dar-se conta de si no agora de uma realização.

Ter consciência de que *sou* é ter um conhecimento original de que sou corpo, sou atitude corpórea, sou intencional, sou movimento, é também perceber que sou tudo isso. Esse conhecimento original põe o sujeito-movente em situação com as coisas, percebendo-as e se percebendo no ato de *estar com, dando-se conta de que está com*. No ato de perceber-se, o sujeito percebe e sabe que percebe.

Outra evidência do perceber-se é ***a correspondência que o sujeito estabelece entre ele mesmo e o objeto que moverá***, se colocando no lugar dele, sendo simultaneamente móvel e movente. Essa correspondência mostra-se em falas como: “*Em tudo tem isso de sair do lugar, isso fez com que nos colocássemos como sendo os personagens ali, como se a gente tivesse lá, movimentando*” (US22P3); “*A gente seria os pontos que moviam*” (US23P2), nas quais o sujeito se põe como o objeto que ele move na interface do *software*. Isso nos permite pensar que o sujeito percebe o movimento que realiza em seu corpo-vivente ao ver o movimento do objeto movido. Ele se vê movendo na tela. Essa percepção é uma complexidade, uma vez que o ponto ou a figura movida não são propriamente o sujeito, mas expõem o movimento que pensou em realizar e que agora realiza, valendo-se do *mouse*, expõem seu *ser pensante* e sua intencionalidade.

A correspondência realizada é evidência que o sujeito se percebe em movimento ao atentar-se ao objeto que move, compreendendo o entrelaçamento entre o móvel e o movente, entre o ponto movido e o corpo-próprio realizador do movimento. O movimento de um ponto torna-se o movimento dele mesmo, caminhando, saindo do lugar, assim como pode ser entendido nas falas: “*marcamos um ângulo de 40° a partir da corda até o lado que vamos continuar andando. Agora, traço aqui o segmento DE*” (US4A3), “*é a gente saindo de D e indo pra E*” (US11A3). Com isso, quando conjecturamos que o sujeito se vê em movimento ao visualizar o movimento de um ponto, entendemos que ele está se percebendo em movimento. Assim, a visualização de um ponto em movimento constitui um modo pelo qual o sujeito se percebe, percebendo.

Articulamos nesta IN modos de entrelaçamentos que conseguimos destacar da vivência dos sujeitos em campo de pesquisa. Iniciamos evidenciando o entrelaçamento entre movimento, percepção e conhecimento, que constitui a unidade movimento-percepção-conhecimento.

Explicitamos o entrelaçamento entre: as transformações que se expõem na tela e os movimentos realizados; o ponto movido e o movimento que o anima; o movimento e o fundo com o qual avança; o movimento e a intencionalidade; a visualização e as intuições que delas e com elas emergem; a percepção e o ato de mover-se, movendo; a percepção e o percebido; o sujeito-movente, a máquina e as atividades.

Explicitamos, ainda, que a percepção que expõe o sujeito e o movimento como coexistentes em uma mesma realização, é evidência do perceber-se em movimento, realizando movimento, que se dá por um pensar que flui entrelaçado aos movimentos realizados e suas implicações. Um modo pelo qual justificamos essa conjectura é a correspondência que o sujeito estabelece entre ele mesmo e o objeto que moverá. Quando ele se compreende como sendo o objeto que ele agora vê em movimento, ele está se percebendo em movimento, uma vez que o objeto não é mais um ente externo ao si, mas, é um seu *modo de ser* que se expõe na tela computacional. Ou seja, nesse caso, ver o objeto em movimento é ver a si mesmo em movimento, é perceber-se movendo, assim como é perceber-se percebendo.

A unidade que explicitamos neste texto se constitui por todos os entrelaçamentos que expomos. Nessa constituição, cada entrelaçamento vai se articulando um ao outro, ampliando e constituindo um fundo dinâmico e evidenciando a unidade que abarca o sujeito-movente e o que lhe é disponível ao movimento, incluindo a si mesmo. Nessa unidade o sujeito *está com*: com o computador, com o *software* de GD e com outros sujeitos, com os quais trabalha para desenvolver atividades, essas que também coexistem com os sujeitos e com o computador no mesmo espaço. Nessa coexistência buscamos destacar a inseparabilidade dos atos e do que eles expõem e possibilitam. Para tanto, entendemos que o sujeito, *estando com, move-percebe-compreende-aprende-expressa-transforma-transoforma-se*, dando-se conta de estar assim sendo pela consciência que tem de si mesmo como sujeito de suas realizações.

5.4 A constituição do conhecimento ao se trabalhar com Geometria Dinâmica

Esta Ideia Nuclear permite-nos expressar sobre a *constituição do conhecimento*, que está entrelaçada aos temas discutidos nas outras Ideias Nucleares; o *movimento* vai gerando espaços nos quais a *percepção* é realizada pelo sujeito que *está com* o que se mostra nesse espaço, *conhecendo-o e conhecendo* o que nele vai se configurando. Portanto, tudo que tecemos até então já se refere ao movimento de constituição do conhecimento, cabendo neste tópico trazer uma continuidade do dito sobre o mesmo. De modo geral, destacamos nas falas dos sujeitos *as aprendizagens que se constituem junto ao movimento e às atividades que o solicita*.

Esse movimento gerador de espaços não necessariamente é uma materialização motora, ele dá-se também ao conhecimento como *possibilidade percebida antes mesmo de sua realização*. Essa possibilidade, uma vez percebida, é atualizada mediante intencionalidade do sujeito-movente, que com amplo conhecimento de suas ações motoras *controla o movimento que realiza, bem como o que com esse movimento se almeja*, assumindo uma postura, tal qual assumida por nossos sujeitos de pesquisa, de “*não ser muito afoito, de fazer movimentos, mas ficar sempre atento a tudo que está acontecendo na tela*” (US1A4). Nesse estar atento, *outras possibilidades vão se doando ao sujeito que as percebe*, assim como pode-se entender na fala: “*A questão da reflexão[...], a gente sabia onde clicar pra fazer ela, e sabia que poderíamos fazer distâncias iguais com ela. Mas depois de fazer a reflexão e ficar movendo um ponto, deu pra compreender melhor suas características*” (US1P4). Nesse fazer, o *movimento mostra-se como atualizador*, que *anima a tela produzindo nela transformações* que apresentam características de uma propriedade matemática, permitindo ao sujeito compreendê-la melhor.

No parágrafo anterior expomos uma produção que se inicia no âmbito da percepção. Nesse primeiro momento, tem-se especialmente *o movimento como ato perceptivo que é realizado e visualizado à medida que gera intuições ao sujeito que visualiza, dando-lhe subsídios para justificativas e afirmações*. Quando o sujeito se volta às intuições, buscando aclará-las, há um deslizar dos atos perceptivos aos atos reflexivos. Configura-se a *realização de movimento visando algo*, como por exemplo: *atualizar um querer fazer ou pensamento sobre o fazer, fixar o que se vê no movimento e validar conjecturas e/ou respostas*. Esse deslizar pode ser interpretado na fala: “*A visualização do movimento nos ajudou a comunicar, testar as possibilidades e também a chegar às soluções*” (US43P1), que coloca a percepção (visualização) e os atos de comunicar e testar como pertencendo a um mesmo movimento direcionado à (re)solução de uma tarefa.

Quando os sujeitos afirmam “chegar às soluções”, muitas vezes expõem uma argumentação com base no movimento e na visualização do movimento, compreendendo-os como suficientes à validação das mesmas, o que pode ser entendido nas falas: “*como garantir que a mangueira estará perpendicular? Vai ser movendo e olhando mesmo*”; “*dá pra ver né? É visível que são iguais*” (US24A3). Contrária a esse entendimento, tem-se a *compreensão da impossibilidade de validar só com o movimento*, que se expõe na fala: “*não é só mover e achar que está certo e pronto, pode estar errado. Então, discutimos como validar isso. Lendo novamente o problema encontramos a palavra-chave, menor distância. Se é menor distância entre dois lugares, tem que ser uma reta, né? Isso a gente tem lá da Matemática*” (US5A8).

Compreendemos o ato de validar como um fazer que é relevante à constituição do conhecimento matemático. Nesta pesquisa, a validação é expressa, conforme pode-se entender no parágrafo anterior, como sendo possível mediante realização de movimentos e visualização de movimentos e também como possível mediante retomada e organização de propriedades matemáticas. Analisando os relatos dos sujeitos, entendemos que nos sucessivos movimentos e visualizações de suas implicações tem-se a constituição de uma certeza, uma convicção, que podemos destacar na fala: *“Quando vimos as propriedades que não variam, por mais que já conhecemos elas, nós, ali, quando movimentamos, temos a certeza, fica a confirmação de que aquela é uma propriedade tal, e que tem suas características que podemos estudar quando movimentamos”* (US8P4).

A afirmação que se dá a partir de movimentos e visualizações, e a que se dá mediante retomada e organização de conceitos matemáticos, são para nós coerentes e se completam numa prática de validação, o que pode vir a contribuir com a prática demonstrativa. Quando o sujeito afirma que *“dá pra ver né? É visível que são iguais”* (US3A2), ele não está fazendo afirmações vazias, ele tem uma fundamentação empírica que lhe permite afirmar valendo-se de uma gama de movimentos realizados que lhe mostra isso que ele vê e que tem a certeza de estar vendo. Essa compreensão emerge de falas como: *“o Geogebra ajuda muito nisso, os testes, as validações nós fazemos com simples movimentos de um ponto”* (US38P4).

A sucessão de movimentos realizados e visualizados apresentam ao sujeito uma verdade que é percebida e que pode ser um *invariante que se mostra na variação*. Esse invariante é visual e, com o movimento, tem-se um modo de evidenciá-lo como sendo o que ele é. Continuando a fala anterior, que diz de uma igualdade vista, um outro sujeito afirma: *“São iguais mesmo, porque a reta CD divide o segmento AE ao meio. Então, ela é mediatriz do segmento AE. Então, qualquer ponto nesta reta, será equidistante de A e E”* (fala seguinte à US3A2). Com isso, tem-se um outro olhar ao dito, que é explicativo e explicita propriedades matemáticas que sustentam e preenchem com outros significados a afirmação do primeiro sujeito, projetando assim maior força de convencimento sobre a validade da afirmação.

Para a validação, tem-se evidência de *conhecimentos prévios sustentando movimentos e percepções*. Na fala anterior, o sujeito traz conhecimentos matemáticos aprendidos em momentos que antecedem a investigação em campo de pesquisa. Outro sujeito afirma que em sala de aula, na licenciatura, aprendeu *“sobre a translação, sobre a reflexão”* (US14A2), que foram movimentos por ele realizados no desenvolvimento das atividades em campo. Mas, entendemos haver outros conhecimentos prévios trazidos pelos sujeitos na duração do desenvolvimento das atividades e que direcionaram os modos pelos quais estiveram com a GD.

Por exemplo, um sujeito entende que *“movimentos mais assim, calmos, me davam mais respostas. Na primeira atividade fui aprendendo isso, pegando as manhas. Nas outras, já foi mais tranquilo, porque na primeira tive essa aprendizagem, por isso falo que não é apenas de conceitos de Matemática”* (US5P4), se referindo ao que aprendeu desenvolvendo as atividades. Nessa fala tem-se um conhecimento prévio sobre o modo de realizar movimentos que se desdobra em outras atividades. Outro exemplo é o conhecimento prévio do potencial dinâmico do *software* de GD, que se expõe em falas como: *“O desafio é desenhar o Armador, então entendi que aqui no Geogebra ele poderia ser movido, e foi isso, fui movendo, movendo...”* (US6A4); *“O Geogebra permite mover a bola preta. Aí movemos ela pra colocar no ponto médio do triângulo”* (US12A6). Ainda, tem-se conhecimentos sobre as possibilidades de movimento de um objeto em determinada situação projetada, expressos em falas como: *“depois de ver que o ponto G se movimentava, a gente poderia querer ver com mais detalhes esse movimento e, antes de mover, a gente sabia que ele poderia ir pra esquerda ou pra direita, aí movemos pra esquerda e pra direita pra ver realmente o que acontece”* (US46P2). E não menos importante, tem-se o conhecimento prévio da funcionalidade das ferramentas do *software*, que se expõe na fala: *“nós usamos as ferramentas pois sabíamos o que cada uma fazia”* (US47P1).

Esses conhecimentos prévios possibilitaram aos sujeitos ***pensar o movimento antes de realizá-lo***, bem como ***parar o movimento para refletir a respeito do que emerge dele e fixar o que se vê no movimento***, que são atos investigativos realizados no desenvolvimento de atividades que solicitam investigação. Ao investigar, o sujeito, como já foi dito, põe-se atento à ***tela, como modo de perceber e de compreender***. Estar atento é uma das características do processo investigativo. No ato de investigar um sujeito afirma que: *“Quando fomos movendo e prestando atenção no que acontecia na tela, conseguimos observar alguns padrões, fomos passo a passo descobrindo as coisas, organizando as informações que conseguimos, e fomos conversando também, discutindo. Isso tudo é aprendido, já que não estava acostumado a trabalhar atividades assim no Geogebra”* (US3P4).

Isso é dito pelo sujeito quando perguntamos a todos sobre o que aprenderam, e, assim como o sujeito da fala anterior, outros responderam que: *“ficamos em meio a uma investigação mesmo, isso que mais gostei nas atividades. Então, nesse aspecto, acho que aprendemos a investigar; fomos fazendo os passos e pensando, refletindo, vendo possibilidades, daí testamos pra ver se dava certo”* (US37P4 e US38P4). Assim, a investigação não se configurou apenas como uma resposta às solicitações, mas também como algo a ser aprendido na realização das atividades, valendo-se, o sujeito, das possibilidades da tecnologia informática disponível para fazer conjecturas e criar procedimentos de análise.

Vale frisar que quase todos os processos de investigação iniciados pelos sujeitos tiveram como fundo e/ou ponto de partida, o movimento de objetos geométricos na interface do *software*. Isso evidencia características do contexto que os sujeitos estavam vivenciando, no qual foram apresentadas atividades que solicitaram movimentos e um *software* que abre possibilidades de movimento, expondo com isso ao sujeito a ***relevância do movimento para (re) solução de problemas matemáticos*** projetados nesse contexto.

A percepção do contexto dinâmico do qual avançou as investigações direcionou os atos dos sujeitos, dentre os quais o de ***estudar uma figura pondo-a em movimento***. Os sujeitos entendem que quando *“trabalhamos com construção e com o movimento junto, tivemos que movimentar [...] com esses movimentos pudemos ver melhor as construções, entender o que fizemos. Então, diferente de só construir é estudar a construção. Essa possibilidade que tivemos de ver melhor as construções em movimento, foi muito interessante”* (US49P2 e US50P2). Assim, tem-se *o movimento como modo de estudar a figura e suas características*. Nesse caso a figura é dada não como um ente estático, como suas propriedades já definidas e descritas. Embora sobre ela o sujeito tenha intuições, ela ainda é um mistério, pois se o sujeito não a construiu, ele não sabe de suas configurações antes que a mova. Quando nas configurações possíveis, mediante movimento, a figura se mostra como sendo uma figura conhecida, entendemos junto aos nossos sujeitos que é possível compreendê-la “melhor”, pois suas propriedades se destacam como invariantes na *figura-em-movimento*. Nesse caso, pode-se, conforme evidenciado por um sujeito de pesquisa, *“colocar os invariantes como propriedades de uma figura, por exemplo, ver o que não varia num quadrado, daí dá pra ir pegando o que não varia e até definir o quadrado”* (US12P4). Nessa fala, o sujeito propõe uma atividade que visa a definição de uma figura mediante percepção e organização de propriedades que se mostram quando ela é movida.

Ao realizar investigações pondo as figuras em movimento, os sujeitos perceberam e compreenderam que a ***preservação da figura ou sua desconfiguração após um movimento nela realizado são consequências do modo como foi projetada na tela***, conforme pode ser entendido na fala: *“construímos todos os passos que a questão pedia, e foi no final que demos conta de que esses passos ficaram ligados por propriedades que fomos fixando, como perpendicular, a paralela, a reflexão e outras coisas. Mas, como pudemos ver essas relações? Foi através do movimento. É aí que entra o movimento, quando pudemos arrastar os pontos e ver que tudo se encaixava”* (US36P2 e US37P2). Com isso, abre-se uma discussão já trazida nesta tese, sobre o construir e o desenhar/ilustrar. Tudo “se encaixa” e mostra a figura mantendo

características intuídas antes do movimento realizado, porque houve um cuidado com a solicitação do enunciado; a figura foi construída por projeção de propriedades que a constituem.

Contrário a isso tem-se a deformação da figura, sem preservação de suas características, que se dá quando a figura não é devidamente construída, quando o sujeito que constrói não se vale das propriedades da mesma, ou quando, mesmo atento às propriedades, não as coloca entrelaçadas uma na outra, conforme discutimos no tópico 2.4.1. Esse modo de projetar a figura no *software* se assemelha ao desenhar/ilustrar no papel ou na lousa. Isso aconteceu durante o desenvolvimento das atividades, o que levou um dos sujeitos a afirmar que: *“Tanto na atividade do campo quanto na da mangueira, quando fui fazer os movimentos finais dos pontos, dava tudo errado, distorcia tudo ali, o ponto G ficava meio que na diagonal, a posição lá da cápsula não ficava fixa. Mas por que isso? É porque não apliquei certo as propriedades. A construção tinha que ser com as propriedades. Por exemplo, ao invés de fazer uma reta perpendicular, com a ferramenta, eu fiz no olho ali, mais ou menos 90°, aí quando fui mover, mudou tudo, aí deu errado”* (US36P4).

Temos com isso duas falas que versam sobre modos de projetar na interface do *software* uma figura. Em um dos casos, a figura, após movimentos nela realizados, mantém suas características dadas à visualização antes do movimento. No outro caso, essas características não se preservam, causando deformação da figura, gerando figuras distintas das que o sujeito intuiu ver antes do movimento. Na fala dos sujeitos, entendemos que isso é evidencia de que *“no Geogebra não basta fazer as construções, tem que movimentar elas, porque uma construção pode se manter ou não, dependendo de como as propriedades foram seguidas à risca, ou não”* (US35P4). Ou seja, uma figura projetada na interface do *software* de GD possibilita ao sujeito intuições, no entanto, não permite uma afirmação que subentenda essa figura. Ela está em um horizonte indeterminado, cuja visada dá-se por movimentos perceptivos, dentre os quais o de mover o *mouse*, movendo a figura para validar o intuído.

Pensando na figura construída, um triângulo retângulo, por exemplo, quando colocado em movimento, entendemos que há modificação nessa figura, pois mesmo preservando sua característica fundamental de ter um ângulo interno reto, o triângulo pode ter variação nas dimensões de seus lados.

A interrogação que se coloca é: o que o movimento apresenta ao sujeito que está atento à interface do *software*, vendo as configurações desse triângulo? Entendemos que em cada parada do movimento, tem-se uma figura semelhante à primeira (anterior ao movimento). No entanto, esse é um olhar que discretiza o movimento, que conforme explicitamos, apresenta fragmentos e representação de fragmentos. Assim, entendemos que ao nos referirmos ao

movimento como continuidade, não podemos conceber que ele nos dá uma sucessão de figuras semelhantes. Assim como o *ponto-em-movimento* discutido na IN anterior, não podemos dizer que o movimento, em sua duração, apresenta o mesmo triângulo retângulo. Entendemos, conjecturando, que o movimento apresenta à percepção o *triângulo-retângulo-em-movimento*, já compreendendo que ele vai se transformando, pois como já dito, a transformação dá-se também no móvel.

O estudo da figura, pondo-a em movimento, é um modo de constituição de conhecimento geométrico com o qual trabalhamos nesta pesquisa mediante atividades entregues aos sujeitos. Elas foram desenvolvidas para que o movimento, como modo de resolução, pudesse sobressair. Entendemos que os sujeitos ***perceberam movimentos já imbricados nos enunciados das atividades***, especialmente quando afirmam que: *“elas foram feitas de uma maneira que vimos que tinha que mover pra perceber ali (na interface) algumas propriedades, alguns invariantes e depois ver as possibilidades de solução”* (US18P3). As atividades e suas solicitações foram ponto de partida para as ações dos sujeitos junto ao *software*. Embora entendemos que os conceitos trabalhados poderiam ser aqueles que se mostrassem no momento das realizações dos sujeitos, as atividades tinham suas demandas conceituais prévias, como as isometrias.

Sobre os conceitos, os sujeitos afirmaram que: *“trabalhamos com muitos conceitos, foi interessante ver que em uma única atividade podem ser trabalhados vários conceitos. Fomos vendo esses conceitos quando fomos construindo e depois ficaram mais visíveis quando movemos os pontos que fez mudar a construção inteira. Com exceção da reflexão, que teve muito nas atividades, acho que conheço os outros conceitos, então não acho que aprendi eles, mas aprendi como trabalhar com eles, como posso pensar em conectar eles numa atividade. Isso a gente faz colocando possibilidade de movimentos”* (US17P4 e US18P4). Essa fala evidencia que as atividades projetadas para desenvolvimento com *softwares* de GD são ferramentas importantes na aprendizagem de conceitos geométricos, uma vez que ao apresentá-los como se destacando de um fundo dinâmico, pode-se melhor compreendê-los, conforme apontam os sujeitos de pesquisa. Ela ainda explicita o que é dito pela maioria dos sujeitos, que os conceitos que emergiram já eram por eles conhecidos, cabendo-lhes, portanto, valer-se dos mesmos como componentes relevantes à (re)solução das atividades.

No entanto, há a compreensão dos sujeitos de que se pode melhor entender esses conceitos mesmo tendo-os conhecido teoricamente, e, ainda, trabalhando com outro público, por exemplo, *“se as atividades fossem aplicadas pra alunos do ensino básico, daria pra eles aprenderem muitos conceitos”* (fala anterior à US21P4), abrindo possibilidades de estudá-los e

de compreendê-los como algo novo. Sobre isso, um sujeito afirma: *“na questão dos invariantes mesmo, vimos melhor as propriedades quando movemos os pontos, pois elas se preservavam. Nós não precisamos ficar estudando as propriedades, só destacamos elas, isso porque já conhecemos elas. Mas, e se fossem pra alunos da escola (ensino básico)? Podia pedir pra eles estudarem o que não varia no movimento, aí eles iam conhecer mais a fundo aquelas propriedades”* (US21P4 e US22P4).

Com isso, entendemos que para os sujeitos, o que se mostra mais importante na constituição do conhecimento que avançou no contexto desta pesquisa é o conhecimento pedagógico e metodológico, aquele que lhes possibilitou vislumbrar modos de *ser professor*. Esse conhecimento se expõe quando os sujeitos afirmam que: *“O que aprendemos aqui, acho que tá mais ligado ao desenvolvimento, às explorações, às investigações que fomos fazendo. [...] Então, o desafio foi aplicar esses conceitos. Então acho que o que aprendemos foi isso, a aplicar esses conceitos em situações que precisa mover objetos pra eles aparecerem”* (US33P4), expondo que aprenderam sobre como trabalhar com conceitos em uma atividade, *“sobre como pensar uma atividade [...] colocando nela fatores que levam o aluno a botar a mão na massa e construir e mover os objetos”* (US27P4), aprenderam que *“dá pra ter outros tipos de exploração [...] Dá pra ter atividades diferentes até mesmo abordando temas iguais”* (fala posterior à US12P4), evidenciando um direcionamento de um aprendizado que possa contribuir à formação profissional de nossos sujeitos, que são futuros professores.

Assim, em campo, constituíram-se dados para além da pesquisa, apresentando aos sujeitos modos de trabalhar a Geometria escolar. No contexto aberto nesse campo, o aprendizado acontece a dois *eus*, o *eu aluno* que desenvolve as atividades e o *eu (futuro) professor* que nesse desenvolvimento pensa em possibilidades para a sala de aula. Portanto, há olhares e ações distintas realizadas junto às atividades, que podem ser entendidas na fala: *“enquanto fui desenvolvendo as atividades, fui tentando também pensar em como foi montado ali (no software), pois estava tudo certinho, ficou aberto muitas formas de fazer, mas no final todos chegaram nas mesmas respostas. Já fiquei pensando em minhas aulas, porque gosto muito de tecnologias”* (fala anterior à US15P4). Nessa fala, tem-se um *eu aluno* preocupado com a tarefa, procurando dar conta do desafio que ela lança. Tem-se também o *eu (futuro) professor*, que enquanto dá conta da tarefa, vai pensando em como levá-las a seus futuros alunos, ou em como desenvolver atividades que por eles venham a ser trabalhadas. Portanto, esses dois *eus* estão presentes em um mesmo fazer de um *eu* que aprende visando ensinar.

Vislumbrando a atuação profissional e metodológica, entendemos que os sujeitos realizaram uma *virada no olhar*, passando de um olhar perceptivo, que avançou na atualização

das solicitações das atividades, ao olhar analítico, que visou compreender a estruturação das mesmas e o contexto no qual elas poderiam ser desenvolvidas. Inicialmente, os alunos visualizaram que “*as atividades partem de situações geométricas que são colocadas em um contexto em que se pode mover elas. Então, fui aprendendo que dá pra pegar uma atividade simples ou bem fechada e transformar [...]. Vou tentar depois pegar exercícios de Geometria e tentar transformar em problemas como esses, que exigem construção e movimentos, fica muito mais instigante, mais desafiador*” (US15P4 e US16P4). Sobre a contextualização de uma atividade, tem-se a compreensão dos sujeitos de que ela “*faz a gente aprender sobre esse contexto*” (fala anterior à US39P4) e de que quando ela é direcionada ao trabalho com *softwares* de GD, “*temos que fazer atividades que façam os alunos moverem os pontos e verem o que acontece quando eles movem esses pontos*” (US20P4).

Isso evidencia que nossa proposta de transformar exercícios de resolução direta em problemas elaborados e contextualizados foi bem aceita pelos sujeitos, a ponto de almejarem trabalhar com as diretrizes dessa proposta. Ela constitui-se como uma interface ao exercício, dando-lhe um revestimento textual impresso e entregue aos alunos, que fixa um contexto, podendo ser aquele que é dito “do cotidiano” dos alunos. Portanto, resolver a atividade contextualizada que “interfacea” o exercício, ainda é resolver o exercício, em termos de resposta encontrada, no entanto, para essa (re)solução há uma ampliação das solicitações às quais o aluno deve atentar. Entendemos que um exercício matemático sem o contexto que mencionamos, pode ser tão desafiador quanto uma atividade contextualizada, gerando dificuldades e solicitando raciocínio. Porém, compreendemos que a atividade contextualizada abre outras possibilidades, privilegia a leitura atenta e a interpretação, o que dá abertura ao diálogo no trabalho em grupo. Ainda, essa atividade coloca o sujeito em contato com um contexto a ser investigado e conhecido, podendo propiciar conhecimentos além dos matemáticos, como por exemplo, conhecimentos sobre uma cultura específica, quando abordada pela atividade.

O aprendizado junto ao desenvolvimento dessas atividades (conhecimentos conceituais, metodológicos e pedagógicos) foi expresso pelos sujeitos durante esse desenvolvimento, quando foram apresentar o mesmo aos cossujeitos (com o *data show*) e durante as entrevistas. Essa expressão que acontece em diferentes momentos marca a continuidade do movimento de constituição do conhecimento que se dá quando se está com a GD e com cossujeitos de aprendizagem. São momentos nos quais se expõe a passagem da subjetividade à intersubjetividade, quando um sujeito percebe e reconhece o outro como cossujeito de seu aprendizado, entendendo que todo ato de aprendizado se dá *com* o outro. Essa passagem se

evidencia em falas como: *“Tem também o envolvimento dos grupos. Conseguimos desenvolver as atividades, às vezes em um só computador, e todo mundo trocando ideias sobre o que a gente via ali no movimento. Todo mundo pôde pegar o mouse e fazer alguma coisa pra mostrar suas ideias. Com isso, a gente aprende a respeitar as ideias dos outros, todo mundo teve vez, pôde falar; uns falavam, move aqui, outros, move ali, pegavam o mouse e moviam, aí, no final tudo dava certo, todo mundo desenvolveu junto, aprendeu junto também”* (US29P4 e US30P4). Nessa fala, tem-se que contribui para a intersubjetividade **o movimento como modo de expressão**, que se deu pelo *corpo-próprio-mouse-figuras-em-movimento* que materializou as intenções dos sujeitos de dar um fundo dinâmico e visual ao que diziam.

No movimento de constituição do conhecimento, as percepções dadas na subjetividade de cada sujeito foram expressas e compartilhada na intersubjetividade dos cossujeitos que realizaram juntos as atividades e que se atentaram ao dito por cada sujeito que se expressou. Assim, inauguraram-se diálogos sobre o dito, havendo contribuições, concordância, discordância, articulações, organização e aperfeiçoamento do dito. Isso ocorreu durante o desenvolvimento das atividades. No momento da apresentação junto ao *data show* e posteriormente na entrevista, houve a retomada do dito, porém, trazendo-o já em suas articulações finais, com a organização dialogada e no âmbito dos grupos, o que para nós, evidencia um movimento da constituição do conhecimento.

Explicitamos nesta tese, e novamente reafirmamos ao olhar para nossos dados de pesquisa, que o sujeito que conhece não é um sujeito inerte, que está recolhido intelectivamente enquanto o conhecimento se apresenta a ele, cabendo-lhe apenas estar “de olhos abertos” acompanhando o ritmo da apresentação desse conhecimento.

Entendemos que toda movimentação de nossos sujeitos com a informática disponível, voltando-se aos outros cossujeitos, é abridora de espaços. Não entendemos *o gerar espaço* como algo que surge do nada, que é totalmente novo, mas estamos enfatizando uma criação que se expõe mediante um olhar que não presume uma ideia como dada, mas que avança tendo-a como misteriosa, problematizando-a. Assim, o conhecimento vai se constituindo, e o sujeito-movente mostra-se como centro dessa constituição, um centro criador que também se recria a cada novo aprendizado.

Nutridos pela abertura possibilitada pelas atividades, de atuarem percebendo e criando possibilidades, os sujeitos afirmaram que: *“aprendemos também a ser mais críticos. Às vezes chegamos em soluções que pareciam ser certas, porque quando a gente movia, dava a impressão de estarmos chegando na solução certinha, mas, aí, na hora de testar, de fazer uma construção final, tinha uma diferencinha”* (US28P4). Essa criticidade coloca o sujeito sempre

em estado de dúvida, não se rendendo ou conformando com resultados antes que haja um processo de validação.

A criticidade possibilita compreensões como: “*aqui nós trabalhamos com as propriedades, já conhecemos elas. Mas isso não deixa de ser uma aprendizagem. Saber trabalhar com as propriedades, ainda mais no software, que é outro mundo, fora do caderno, a gente vê as propriedades em movimento. Então, elas (as propriedades) mesmo sendo as mesmas dos livros que aprendemos, são também diferentes porque no Geogebra elas não são a mesma coisa, entendeu? Elas no Geogebra têm uma abordagem diferente, elas podem ser movidas*” (US23P4 e US24P4). Essa fala expõe que um conhecimento geométrico, mesmo que conhecido, não se fecha em si mesmo e não se mostra a um só modo de conhecer. Com isso, entendemos que o conhecimento pode se renovar em cada espaço no qual ele venha a ser trabalhado e discutido, podendo ampliar-se ao se constituir com as possibilidades abertas nesse espaço. Mais especificamente, entendemos, conjecturando, que a Geometria e seus entes, tomados tacitamente por um pensamento geométrico que não evidencia deslocamentos, pode se renovar quando abarcada por um pensamento geométrico de espacialização em ambientes de GD, que *dá vida* a cada ente, a cada propriedade, a cada figura geométrica, pondo-as e compreendendo-as em movimento. Nesse pensar, um trapézio, por exemplo, não é mais apenas uma definição e sua representação gráfica. Ele é também *trapézio-em-movimento*, e tudo que o constitui também se move e dá-se ao conhecimento mostrando-se em movimento. Nessa perspectiva, o olhar e o compreender sua própria definição se renovam, uma vez que está escrita junto ao movimento, e, com isso, ao sujeito-movente.

A constituição do conhecimento que se dá com movimento em ambientes de GD, entendemos como um caso particular da constituição do conhecimento de modo geral. No mundo-vida, no qual está presente o mundo tecnológico, também aprendemos em movimento, pois o conhecer é um fluir constante que constitui o ser conhecedor ao mesmo tempo em que constitui o cossujeito junto a si e ao mundo-vida. Isso implica dizer que o sujeito, ou seja, a pessoa é sempre *ser* em movimento.

Neste tópico explicitamos como se deu a constituição do conhecimento em um contexto no qual estavam os sujeitos de pesquisa desenvolvendo atividades com o computador, em um ambiente de GD. Expusemos atos perceptivos que constituem solo sobre o qual o sujeito-movente tece compreensões. Esses atos se destacam na realização e visualização do movimento, expondo modos pelos quais o sujeito direciona ações à atualização de possibilidades. Consoante aos atos perceptivos, a tela vai apresentando possibilidades, que se mostram como *figura-em-movimento* expondo transformação. Há juntamente com essa visada perceptiva um deslizar que

leva o sujeito a refletir sobre o visto e sobre as intuições geradas. A intencionalidade desses atos se volta para a busca de validar o pensado mediante atos de verificação que se materializam, especialmente, como movimento realizado junto ao *mouse* e expresso na tela.

Expusemos, assim, que a constituição do conhecimento, em campo de pesquisa, tem como ponto de partida e também como fundo, os movimentos realizados em um ambiente habitado por grupos de sujeitos. Com movimentos fez-se a expressão do percebido, o diálogo, a articulação de ideias, a organização e explicitação do conhecimento produzido na subjetividade de cada sujeito e na intersubjetividade dos cossujeitos, constituindo saberes que emergiram da realização de todos esses atos.

Expomos que essa constituição é fluida; ela se dá no fluir que abarca conhecimentos prévios que são solo para a aprendizagem de novos conhecimentos. Dos conhecimentos constituídos, destacamos neste texto aqueles que contribuem ao *ser professor*, que abriram possibilidades aos sujeitos de vislumbrarem uma prática pedagógica e metodológica junto aos seus futuros alunos. Aprendendo a investigar com o ferramental disponível pelo *software*, os sujeitos compreenderam a relevância da investigação, do ser crítico e do movimento para o ensino e para a aprendizagem de Matemática, bem como a relevância das atividades e de suas solicitações, que devem abrir possibilidades de perceber e de aprender conceitos, propondo contextos que priorizem a realização de movimentos visando o que eles podem mostrar.

SEXTA SEÇÃO

DANDO CONTA DA INTERROGAÇÃO E TECENDO CONSIDERAÇÕES

Se a pergunta/questão de pesquisa resistir ao ato de ser ela mesma interrogada, mais autêntica se torna e mais iluminadora pode se constituir para o pesquisador e a região de inquérito em que se instaura.

Por Bicudo e Klüber (2013, p. 38)

Nesta seção, questionamos novamente a interrogação de pesquisa visando dar conta e ao mesmo tempo explicitar ao leitor como ela nos colocou em caminhos pelos quais pudéssemos compreender o fenômeno *movimento-percepção-conhecimento*.

Para isso, olhamos retrospectivamente à trajetória da pesquisa, efetuando o que entendemos ser um movimento de metacompreensão, que visa expor uma reflexão acerca das compreensões que foram se constituindo em todo desenvolvimento desta tese, especialmente as trazidas na teorização tecida na seção anterior. Com o que se expõe nesse movimento de metacompreensão, buscamos anunciar os modos pelos quais esta pesquisa se expande à Educação Matemática, solo de nosso estudo, explicitando a compreensão do modo pelo qual a pesquisa se faz relevante a essa região de inquérito.

Trata-se da realização de uma síntese reflexiva. Assim como em qualquer síntese, muito do todo ao qual se direciona o exercício de sintetizar se perde em termos de particularidades, porém há que ser expressa a articulação que constitui o âmago ou o núcleo do compreendido com a investigação realizada. Na seção que agora escrevemos, trazemos a anterior com uma nova configuração, de modo sucinto, deixando de explicitar especificidades relevantes, abrindo espaço para compreensões generalizadas que possam ser direcionadas e discutidas no âmbito da Educação Matemática.

Entendemos que a discussão trazida acerca de cada IN nos permitiu compreender *como se dá o movimento e a percepção do movimento quando se está com o computador e alunos realizando atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica*. Esta interrogação indaga o fenômeno de pesquisa - *movimento-percepção-conhecimento*. Estudá-lo, mostrou-se um processo de compreensão de individualidades diversas, partes de um todo, que não se doaram de uma só vez; percebemos, analisamos e compreendemos suas características, as reunimos em Grupos de Convergência e constituímos ideias que o nucleia e alicerçam sua estrutura, abrindo horizontes com os quais pudemos dele falar.

Mostraram-se, no decurso de nossa investigação, *o movimento, a percepção do movimento, a unidade do estar com e a constituição do conhecimento*.

Compreendemos no decorrer desta pesquisa que o movimento é uma realização intencional de um sujeito que mostra ter domínio de suas ações motoras ao atualizar as possibilidades e solicitações que atividades e *software* apresentam. Esse controle, embora se materialize nas interfaces físicas e lógicas, é correlato ao movimento do corpo-próprio, que se move, movendo. Assim, o *objeto-em-movimento* na interface do *software* é também o *mouse-em-movimento*, e também a *mão-em-movimento*, é o *corpo-próprio-em-movimento*, movimentando-se de modo intencional. A tela apresenta, portanto, a expressão da motricidade de um sujeito-movente que está direcionada às interfaces e às solicitações de uma tarefa a ser realizada, o que permite concluir que movimento na tela e movimento no *mouse*, não são dois movimentos realizados, ele é uno, porém são expressos em lugares distintos: o *aqui* no qual se está com uma escrivaninha sobre a qual está um computador e o *aqui* que se abre à exploração na interface do *software* de GD.

O movimento presente no *software* é primeiramente projetado como possibilidade de movimento, que uma vez atualizada, constitui-se como movimento realizado. Quem projeta é o programador do *software* e quem atualiza o projetado é o sujeito que se volta às interfaces e realiza nelas mudanças. Nessa atualização há sempre modificações que ao mesmo tempo podem ir mostrando configurações e desconfigurações: de um objeto, uma propriedade, uma ideia. Assim, o movimento se mostrou em campo de pesquisa como transformador, com poder de variar e de *dar forma*. Evidência disso é a percepção de invariantes em meio às modificações do fundo que os configura. Não se trata do entorno de um invariante se modificando, mas de um fundo se movendo enquanto produz invariantes. Ou seja, se não houver a variação que modifica o espaço geométrico disponível, não haverá a invariação e a percepção do invariante.

Quando o sujeito se move para atualizar uma possibilidade, tem-se que o movimento não é qualquer movimento, que ele não se dá sem um fundo que se expande com a intencionalidade desse sujeito. Há um *estar voltado* e há um *querer fazer* que impulsiona a realização do movimento. Esse querer é direcionado, há uma intenção de *fazer para...*, quer-se mover *para*: atualizar uma possibilidade; explorar o ambiente disponível; atualizar um pensamento sobre o fazer; verificar uma conjectura e/ou resposta. Ainda, quer-se mover *para* compreender e ser compreendido, o que expõe o movimento também como linguagem, como expressão. Como já explicitamos nesta sessão, o objeto-em-movimento é também o corpo-próprio-em-movimento, e como o corpo-próprio-em-movimento é um gesto que avança e expõe sentidos que podem ser interpretados, entendemos que o objeto-em-movimento também é um gesto, pois ele não é separado do corpo que o move. Com isso, *a figura-em-movimento*, ou *o cursor-do-mouse-em-movimento*, não expõem apenas que há um corpo que os move, mas expõe

também o que esse corpo quer dizer com seu movimento, focando e direcionando sua intencionalidade à tela.

Esse corpo que é móvel e movente é também corpo perceptivo, sensível, que está intencionalmente com as coisas. Ao estar com o computador ele realiza experiências *tátil-visual-sonora-sinestésicas*, que escrevemos assim por entendermos, estudando Husserl, que os órgãos sensoriais recolhem informações sentidas de acordo com suas especificidades – o tato produz sensações táteis, a audição produz sensações sonoras, e assim por diante – porém as sensações se entrelaçam na totalidade do corpo-vivente, constituindo um todo complexo e com sentido. No entanto, ao falar de uma experiência vivenciada, acabamos por dar maior ênfase às experiências táteis e visuais. A experiência perceptiva sinestésica é a que entendemos ser a menos mencionada, visto que ela se dá no próprio fluir de todas as outras e constitui-se como um fundo no qual elas avançam. E, assim como ao falar de algo impomos ao seu fundo um lugar de fundo, deixando-o subentendido, falamos do que vemos, ouvimos e tocamos sem dizer do fundo dinâmico no qual tudo isso acontece, deixamos de falar da percepção sinestésica.

Essa experiência perceptiva, que é una, gera intuições e coloca o sujeito no caminho da reflexão e da análise; *toca-se* no mouse, movendo-o e, na interface do *software*, *vê-se* os objetos que *sinestesicamente* - em movimento - são como o gesto, eles expressam, abrindo possibilidades ao *pensar* sobre isso que se mostra e à busca por *verificar* o pensado, dando-lhe um caráter objetivo, sustentado por justificativas e validações.

Se há dois atos, o de perceber e o de refletir (analiticamente), cuja passagem de um para o outro dá-se na *virada do olhar* (BICUDO, 2012), entendemos que eles são interligados, e que o *estar atento a si e ao que está realizando* seja um modo pelo qual essa interligação se evidencia, pois ela possibilita ao sujeito focar o objeto da percepção, fazendo com que a reflexão se dê também de modo focado sobre isso que se mostrou à percepção. Assim, o *estar atento a si e ao que está realizando* vai constituindo conhecimento junto ao *movimento-percepção-conhecimento*.

Estar atento coloca o sujeito em um estado constituinte junto àquilo que se mostra como horizonte indeterminado. O indeterminado vai ganhando “forma” e constituindo-se com o olhar atento e interrogador que ilumina e faz compreender. Em GD, quando realizamos movimentos diversos em figuras construídas e lançamos um olhar atento a elas em movimento, propriedades *a priori* escondidas “atrás” de uma representação geométrica podem se mostrar, aos poucos, ou de uma só vez.

Dos modos pelos quais nossos sujeitos de pesquisa se direcionaram a isso que se mostra, especialmente aos invariantes, destacamos a linguagem com a qual se puseram a dizer dos

mesmos, buscando validá-los. A percepção desses invariantes, o levantamento de conjecturas que emergem da percepção e testes para validar o conjecturado, muitas vezes levaram os sujeitos desta pesquisa a afirmarem: “são iguais”, “são mediatrizes”, por exemplo. Isso leva a pensar, conjecturando, que é creditado um caráter demonstrativo ao potencial dinâmico dos *softwares* de GD, ao movimento e percepção do movimento que se materializa em suas interfaces.

Com isso, evidencia-se uma possibilidade de validação que se distancia das práticas formais demonstrativas, as que são trazidas pela tradição científica matemática.

Ao nosso ver, algo relevante sobre o movimento em *softwares* de GD e a demonstração diz respeito à possibilidade de pensar e trabalhar a unidade *mover-perceber-compreender-expressar*, que enlaça em um mesmo fazer, o papel no qual se faz uma demonstração e a interface computacional do *software*. Nesse ato não há hierarquia; o expressar matematicamente, demonstrando, não é um fazer final, descolado do movimento, da percepção e da compreensão das implicações desse movimento. A demonstração no papel pode ir se configurando a cada movimento realizado e visto junto ao *software*. Ela mesma pode direcionar um movimento a ser realizado. Enfim, movimento no *software* e demonstração matemática podem ir preenchendo de sentido o programado no *software* e o trazido na demonstração matemática. Ainda, com o desenho em movimento pode-se fixar e buscar correlatos gráficos ao que se está refletindo na duração da demonstração.

Entendemos que os movimentos em GD e o que deles emerge, podem dar ao sujeito uma convicção, já fornecendo uma certeza que se dá com a percepção, verificação exploratória e combinação lógicas de intuições. Isso contraria a compreensão de que a convicção se dá apenas com o que está no papel, demonstrado matematicamente. Concordando com Villiers (2001, p. 32), entendemos que “a demonstração não é requisito necessário para a convicção – pelo contrário, a convicção é mais frequentemente um pré-requisito para a procura de uma demonstração”.

Não pretendemos com isso ignorar a relevância da demonstração como um meio importante de verificação, especialmente quando ela é direcionada a “resultados duvidosos ou surpreendentes, por não serem intuitivos” (VILLIERS, 2001, p. 33).

Assim, empírico e formal, movimento e demonstração se entrelaçam no âmbito da unidade *movimento-percepção-conhecimento*, fenômeno de nossa pesquisa. Essa unidade se constitui em um *estar com*: *com* o objeto percebido e conhecido, *com* cossujeitos de aprendizagem, *com* o mundo circundante. O *estar com* expõe entrelaçamentos entre o sujeito movente e aquilo e/ou alguém ao qual se volta. Os entrelaçamentos visualizados em nosso

campo de pesquisa possibilitaram compreender melhor o *ser-com-o-computador*, evidenciando o computador e suas possibilidades como potência a qual não se atualiza sem a presença e intencionalidade de um corpo-próprio. Portanto, o ponto se move na tela, pois alguém o anima; o movimento na interface do *software* expressa a alguém que se expressa em movimento de mover-se/movendo; um movimento específico que se vê na tela é materialização de solicitações de uma atividade a qual um sujeito se dedica. No entanto, não estamos com isso fazendo da máquina um utensílio que se apresenta a um usuário. O sujeito move e percebe o movimento na tela porque a máquina abre possibilidades, ela é fonte de expressões e é, também, criadora de sentidos, pois em sua interface doa ao sujeito um mundo a ser explorado. Portanto, homem e máquina, quando inteirados por uma atividade, são para nós um só ser que voltado está ao mesmo intento, de dar conta da atividade.

Assim, o gesto *figura-em-movimento* que deixa um rastro na interface do *software*, deixa um rastro também no corpo-próprio que se move e que percebe o movimento. Vale frisar, novamente, que o movimento realizado e vivenciado não é anterior ou posterior à percepção. Percepção e movimento realizam-se em um mesmo agora e constituem um sistema uno que se modifica como um todo na duração da experiência vivenciada de mover percebendo.

Quando na vivência do movimento em GD um sujeito foca sua mão, ele percebe que o rastro do movimento expresso na tela, caminha na mesma direção e sentido do movimento que realiza em sua mão, com o *mouse*. Se um outro sujeito olhar apenas para a tela, poderá saber do movimento da mão com o *mouse* sobre a escrivanhinha. Se olhar a mão com o *mouse* em movimento, poderá saber do movimento do objeto arrastado na tela. Tem-se com isso a ideia de unidade que faz do ponto em movimento na tela o próprio *mouse* e a própria mão que se move; ponto, *mouse* e mão, expõem-se como um só ser no agora do movimento realizado. Então, afirmamos que o sujeito move e se move *imediatamente* na tela. Esse é um olhar para o *mouse* e para a tela como extensão da intencionalidade de um corpo-movente, e não como objetos fora desse corpo, distanciados em um espaço pontual e objetivo.

Quando o sujeito foca o ponto, movendo-o, ele não tem mais diante de si o *mouse* e a tela como objetos. Isso se dá pela atenção direcionada ao ponto. Não é que *mouse* e tela desaparecem, mas sim que eles se constituem naquele momento como o próprio corpo que está com o ponto. Nesse momento, *mouse* e tela estão entrelaçados à totalidade corpo-próprio.

Assim, sujeito e máquina coexistem e tornam-se um só ser na imediaticidade do ato de *estar com* e em movimento. Essa coexistência é vivenciada e percebida. Quando o sujeito enfatiza que enquanto move o *mouse*, move também o ponto que visualiza na tela, ele não explicita que move a sua mão, mas, nesse dizer, compreendemos que ele se dá conta de estar

em movimento, movendo e percebendo o movimento na interface do *software*. Nesse *dar-se conta de...*, ele sabe que move e porque está movendo, ele sabe como está se movendo, então, ele, além de perceber o movimento, se percebe em movimento, percebe-se percebendo.

Embora tenhamos focado e interrogado nesta tese o movimento e a percepção do movimento, entendemos que ela nos abriu horizontes para compreender o processo de constituição do conhecimento quando sujeitos estão com o computador realizando atividades em ambientes de GD. Esse entendimento pode se mostrar nos atos reflexivos que expomos e, ao fazê-lo, abrimos mais compreensões. Atos que embora se entrelaçam aos atos perceptivos, pois o sujeito põe-se a pensar com e sobre eles, dão-se em outro momento da vivência desse sujeito, em que se está analisando e expressando o compreendido aos cossujeitos, que, por sua vez, buscam compreender o dito e contribuem com o que em suas individualidades entenderam disso que se está discutindo. Com isso, expõem-se a subjetividade e a intersubjetividade, animando processos nos quais as percepções são compartilhadas, justificadas e organizadas, buscando uma articulação que seja coerente e aceita pelo grupo que discute.

Entendemos que essa abertura é evidência da coerência e do rigor da pesquisa fenomenológica, uma vez que não precipitamos compreensões, mas as acolhemos, como manifestações genuínas de nosso vivenciar reflexivo do fenômeno que focamos e interrogamos, ampliando assim as possibilidades da pesquisa.

Portanto, focando o movimento e a percepção, compreendemos que o mover é uma realização que *atualiza-fixa-transforma-explora-testa-valida-mostra-expressa*, apontando caminhos ao conhecer e também ao conhecer-se, uma vez que o movimento, quando visado como fenômeno, pode ser *realizado-percebido-compreendido*. Já a percepção, conforme expomos, é o primado do conhecimento; dela emerge o percebido que ao ser interpretado e exposto pelo sujeito-perceptivo, o coloca no caminho da objetivação do conhecimento.

Como o mover, o perceber e o conhecer são atos realizados pelo sujeito-movente, entendemos que não é possível falar do movimento no *software* sem dele falar, assim como não é possível falar dos invariantes sem falar do sujeito que empreende sua presença espaço-temporal junto à ocorrência do que permanece e do que varia, percebendo a permanência e a variação.

Falamos acima da GD, mas, a mesma compreensão pode ser estendida à Geometria em geral, visto que ela se constitui, conforme compreendemos nesta tese, como modo de espacializar, de criar e habitar espaços. Espacializar é movimento realizado pelo sujeito. Assim, entendemos que a Geometria se dá com o movimento desse sujeito. Essa compreensão pode mostrar-se com a articulação do dito em campo de pesquisa, quando os sujeitos expressam que

o movimento não é específico do *software*, que ele é a realização de uma pessoa, e por isso, no trabalho com régua e compasso, por exemplo, o movimento também está presente, pois é a mesma pessoa que com essas ferramentas trabalha, movendo e movendo-se.

Isso evidencia que o conhecimento constituído em campo de pesquisa fez com que se transcendesse compreensões já enraizadas, questionando-as. Ainda, fez com que os sujeitos compreendessem a relevância do movimento em situações de ensino e de aprendizagem, o que fez aflorar o desejo de trabalhar uma metodologia que abarque o que por eles foi vivenciado em campo de pesquisa.

O que apresentamos em campo, e que os sujeitos se propuseram a levar para suas salas de aula, quando estiverem lecionando, foi uma proposta pedagógica que privilegia o movimento em atividades desenvolvidas com *softwares*, tendo-o como um modo pelo qual pode-se aprender e ensinar. Como fundo, propusemos um conhecimento geométrico que se constitui por atos motores, por um fazer, em que o sujeito realiza e se realiza em movimento, aprendendo em/com movimento. Essa iniciativa visa um modo de trabalhar a Geometria, colocando o sujeito como ativo na constituição de seu aprendizado. Ativo não só no resolver exercícios, ou na leitura dos manuais, mas também no mover e no representar objetos geométricos valendo-se de toda amplitude de sua motricidade. Isso potencializa uma epistemologia geométrica que compreende o sujeito da aprendizagem como um ser-movente, que aprende *movendo-percebendo-conhecendo* ao trabalhar com *softwares*, com régua e compasso, com palitos e barbante, ou qualquer material concreto com o qual se possa representar objetos geométricos, seja realizando com eles movimentos perceptivos ou reflexivos, movendo-os com as mãos ou com a imaginação.

Dos *softwares* aos palitos tem-se uma gama de objetos dados no mundo circundante de um sujeito. Habitando esse mundo, ele de imediato o conhece como *mundo em movimento*, assim como se conhece como sujeito-movente, sem que haja concepções prévias, produzidas pelo senso comum ou pelas ciências sobre o móvel ou o estático. Esse conhecer imediato dá-se também quando o sujeito habita um ambiente cibernético, como no caso desta pesquisa, o ambiente de GD. As interfaces físicas e lógicas são de imediato percebidas pelo sujeito como móveis, e com a percepção de si como sujeito-movente, ele se lança em movimentos junto a essas interfaces, atualizando-as, produzindo nelas mudanças enquanto também está em constante modificação realizando atos perceptivos e reflexivos.

Nossas compreensões já explicitadas permitem-nos visualizar a importância desta pesquisa e do que dela emerge para a Educação Matemática. Com os estudos realizados, e também em nossa prática profissional, entendemos que há pouca ênfase, ou que não se enfatiza

o conhecimento matemático constituindo-se no âmbito do movimento realizado pelo sujeito-movente, deixando às margens o que se compreende nesta tese, ou seja, que o ato *mover-se/movendo* faz mostrarem-se configurações e desconfigurações ao sujeito deste ato, que pondo-se atento ao movimento e às implicações do mesmo pode compreender o que ele lhe mostra: uma figura, uma propriedade, uma característica, um modo de validar, ou até mesmo o próprio movimento em seu modo de ser contínuo.

Esse ato, de mover-se/movendo, quando realizado em ambientes nos quais pode-se fazer geometria dinâmica, expõe a relevância das experiências táteis, do tocar, expondo também a importância das mãos, que no fluir da intencionalidade de movimento chegam à tela, ao mouse, aos palitos, às coisas. A importância das mãos (do tato) para o homem é explicitada de muitos modos. Já tecemos um viés filosófico, no âmbito da percepção. Destacamos agora essa explicitação por meio de um conto, de Guimarães Rosa "Conversa de Bois", em que o boi "fala" - "Eu acho que nós, bois, - ... - assim como os cachorros, as pedras, as árvores, somos pessoas soltas, com beiradas, começo e fim. O homem, não: o homem pode se ajuntar com as coisas, se encostar nelas, crescer, mudar de forma e de jeito... O homem tem partes mágicas...são as mãos...eu sei..."(GUIMARÃES ROSA, 1980, p. 350). Percebe-se nessa "fala" que a magia não está apenas nos grandes atos, como os realizados por atletas que se valem especialmente das mãos, como por exemplo, os jogadores de vôlei nesta tese já citados, os jogadores de tênis e os de videogame. A magia está também no simples tocar, no encostar.

As tecnologias informáticas, especialmente as que propõem um trabalho com Geometria, são fontes de possibilidades de movimento que são estudadas no âmbito tecnológico, instrumental, e que, muitas vezes, deixam às margens as implicações desse movimento, das experiências táteis-visuais-sonoras-sinestésicas na produção do conhecimento geométrico e o sujeito realizador do movimento.

Entendemos que seja relevante às pesquisas em Educação Matemática estudar o *corpo-próprio-com-computador* e, mais especificamente, dele com GD. Porém, ampliando e trazendo novas possibilidades.

Nessa perspectiva, explicitamos que a compreensão de si como corpo móvel e movente pode levar um sujeito a entender melhor a unidade de seu movimento junto ao *mouse* e à expressão desse movimento na interface do *software*. Quando esse entendimento é expresso por um sujeito, conforme foi feito nesta pesquisa, ele dá-se também à compreensão de professores, podendo contribuir para o ensino e para a aprendizagem de Geometria, uma vez que ao entenderem essa unidade podem preparar suas aulas com GD, não delimitando, mas dando abertura à produção de um conhecer que se dá dinamicamente, possibilitando a seus alunos

entendimento de que o conhecimento geométrico possa emergir de movimentos que são por eles realizados, aos quais devem atentar. Com isso, o conhecimento geométrico passa a ser aquele que emerge e que venha a ser discutido entre alunos e professor, dinamizando o ensino e a aprendizagem de Geometria ao desconstruir hierarquias forçadas por serem assumidas apenas a partir de posições e papéis pré-estabelecidos, e roteiros. Essa é uma possibilidade dentre outras de se ensinar e aprender Geometria.

Entendemos nesta pesquisa, que, em si, as tecnologias informáticas não trazem o movimento, podem oferecer esquemas de atividades passíveis de serem realizadas quando o sujeito busca com ele responder as solicitações que lhes chegam em uma determinada situação. Nas ações realizadas pelo sujeito junto ao *software* acontecem mudanças, gerando *preenchimentos*: no *software* geram preenchimentos junto às interfaces, criando, arrastando e/ou completando figuras. Nos sujeitos dão-se preenchimentos de sentidos ao vivenciarem a experiência que estão realizando, de modo intencional, pois se colocam em movimento de dar conta da demanda e ao mesmo tempo, atentar para as potencialidades do *software*.

Um dos desafios que esta pesquisa traz é pensar o ensino como um corpo que é móvel e movente, de modo que o aprender seja uma experiência que flua, que o aprendido seja sempre correlato a outros aprendizados e que abra sempre a possibilidade do novo, trazendo-o entrelaçado a isso que no momento está-se a aprender. Assim, a aprendizagem constitui-se fluida junto ao fluir do movimento de um corpo-próprio que se move aprendendo.

Com isso, entendemos que para que o professor realize uma pedagogia que compreenda o *movimento* de um aluno e a expressão desse movimento na profundidade do mundo-vida e/ou no mundo-vida vivenciado no ambiente computacional que expõe um modo de a realidade ser, em que se produz os *softwares*, é preciso que ele, antes do desenvolvimento de qualquer metodologia, coloque-se atento aos alunos, deixando mostrar-se dados preexistentes, realizando uma articulação nova e permitindo-se perceber o que circunda o mundo de vivências desses alunos, aclarando modos pelos quais pode ensinar trazendo a realidade vivenciada por eles ao centro de sua proposta didático-pedagógica.

Esta pesquisa expõe também ao professor e à Educação Matemática a relevância da percepção para o movimento de constituição do conhecimento, sugerindo que metodologias sejam criadas de modo que atos perceptivos sejam priorizados para que deles possam emergir dados sobre os quais se possa refletir. Isso pois, perceber é uma experiência que consiste em tornar algo presente a si, trazendo-o de seu lugar num horizonte de mundo e decifrando-o de forma a colocar seus detalhes nos horizontes perceptivos do sujeito que percebe. O movimento de perceber nos põe em presença do momento em que se constituem para nós “as coisas, as

verdades, os bens. [...] a percepção nos dá um *logos* em estado nascente, ela nos ensina, fora de todo dogmatismo, as verdadeiras condições da própria objetividade, ela nos recorda as tarefas do conhecimento e da ação” (MERLEAU-PONTY, 1990, p. 63, grifo do autor). Assim, pode-se constituir uma epistemologia que abarca também a vivência, o fazer, e não apenas o conhecimento já institucionalizado que deve ser lido e aceito em sua teorização.

Com isso, dentre as várias significações possíveis na leitura desta tese, pode-se entendê-la como um convite, que é destinado ao professor, para que desenvolva metodologias que abram espaço ao movimento e à percepção, trazendo ao mundo científico das disciplinas que lecionam o sentir e o sentir-se. Em sala de aula, mostra-se tão relevante quanto questionar o aluno sobre *como pensou*, questionar também sobre *como fez e como se percebeu fazendo*, pois é no fazer que a percepção se expõe com maior potência, é no fazer que pode-se perceber faces de um conceito que estão “escondidas” atrás de sua formalização e é no perceber-se fazendo que a pessoa pode ficar atenta a si mesma, aprendendo a se conhecer. Desse modo, esta pesquisa propõe um ensino que não se inicie apenas no conceito, mas que possa também ser um movimento de constituição de conhecimento (aprendizagem) que se dê na e pela vivência dos estruturantes desse conceito.

Entendemos que ao focar diretamente o conceito, o aluno tem uma experiência de aceitação de uma informação completa e dada arbitrariamente, a qual ele conhece e replica. Nesse caso, entendemos que a “réplica” tem seus defeitos, visto que na aceitação, pode-se não compreender o replicado. Se o ensino e a aprendizagem de um conceito se derem sem uma apresentação imediata, seja na lousa ou no livro didático, de modo que o trabalho se realize com coisas aparentemente não conectadas: características, propriedades, imagens, símbolos, etc., pode-se, após uma articulação destas coisas, constituir um todo com sentido e coerente.

Nessa perspectiva, o conceito é constituído por entrelaçamentos na/pela vivência do aluno, que vai dando a esse conceito uma forma sem mesmo tê-lo como um objetivo final. Assim, pode-se ter uma boa “réplica” do conceito não dado a *priori*, uma vez que ele é conhecido e compreendido em seus estruturantes, que uma vez articulados por uma linguagem formal, podem ser expressos tal como vemos nos livros e manuais.

Com isso, tem-se que o *desconhecimento* de um todo já articulado e expresso pode assumir um importante papel no movimento de aprendizagem dos alunos, visto que permite e anima o espetáculo do movimento de conhecer, e expõe aberturas à perplexidade da “descoberta” desse todo, percebendo e tendo possibilidade de compreender inicialmente suas partes e como elas se entrelaçam moldando uma totalidade lógica e coerente.

De outra perspectiva, assim como um conceito pode ser dado ao conhecimento como base alicerçada com a qual se avança o conteúdo matemático pretendido, pode-se dar este conceito não como um fim sem começo, mas como algo que se pode investigar e buscar pelas “origens”, pelo solo perceptivo no qual se constitui. Assim, pode-se ter a compreensão do movimento de constituição do conceito dado, atentando-se para a transição da percepção à formalização científica.

De modo mais geral, esta pesquisa pode ser lida como um convite a nós humanos, para que possamos desacelerar nosso modo de viver e de habitar o mundo, atentando-nos às suas singularidades que se presentificam em nossos atos mais corriqueiros e olhando para os modos pelos quais essas presentificações se manifestam em nossa pele, nos afetando e provocando.

Na pesquisa, ao focarmos o movimento que se evidencia em ambientes de GD, fomos visualizando ramificações que foram constituindo um olhar mais abrangente sobre o movimento, direcionando-o não só à Geometria, mas também à Matemática e qualquer disciplina, bem como ao modo de habitar o mundo-vida. Isso se deu, pois o movimento ao qual nos referimos não é apenas o físico/biológico, mas é o movimento do corpo-próprio, que é por si só móvel e movente, e que aprende sempre em movimento. Na variação, visualizamos invariantes, expressamos sobre o percebido, compreendemos o que expomos e buscamos compreender o que o outro diz sobre isso que expomos, intuímos e buscamos validar nossas intuições, resolvemos e propomos problemas, ou seja, *movemos-percebemos-conhecemos*.

BIBLIOGRAFIA

- ALES BELLO, A.; MANGARANO, P. (Orgs.). **...e La coscienza? Fenomenologia psicopatologia neuroscienze**. Collana del Centro Italiano di Ricerche Fenomenologiche. Edizioni Giuseppe Laterza: Bari, 2012.
- ALQAHTANI, M. M.; POWELLI, A. B. Instrumental appropriation of a collaborative, dynamic-geometry environment and geometrical understanding. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology**, London, v. 4, n. 2, p. 72-83, year. 2016.
- ALVES, G. S.; SOARES, A. B. GD: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do *software Tabulae*. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, 9, CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, 23, 2003, Campinas. **Anais...** Campinas: CSBC, 2003. p. 275-286.
- ARZARELLO, F. et al. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. **ZDM**, v. 34, n. 3, p. 66-72, jun. 2002.
- BACHELARD, G. **O novo espírito científico**. 3 ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1968.
- BAIRRAL, M. A.; ASSIS, A. R.; SILVA, B. C. C. **Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática**. 1 ed. Rio de Janeiro: Edur, 2015.
- BAIRRAL, M. A.; ASSIS, A. R.; SILVA, B. C. C. C. Toques para ampliar interações e manipulações touchscreen na aprendizagem em geometria. In: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2015, Pirenópolis. **Anais...** Brasília: SBEM, 2015. p. 1-12.
- BAIRRAL, M. A.; ASSIS, A. R.; SILVA, B. C. C. Do clique ao touchscreen: Novas formas de interação e de aprendizagem matemático. In: REUNIÃO NACIONAL DA ANPED, 36, 2013, Goiânia. **Anais...** Goiânia: UFG, 2013. p. 1-18.
- BARBARIZ, T. A. M. **A constituição do conhecimento matemático em um curso de matemática à distância**. 2017. 452p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017.
- BARCO, A. Fenomenologia da Geometria. In: CONGRESSO DE FENOMENOLOGIA DA REGIÃO CENTRO-OESTE, 5, 2013, Goiás. **Anais...** Goiás: UFG, 2013. p. 1-10.
- BICUDO, M. A. V. A pesquisa qualitativa olhada para além de seus procedimentos. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica**. 1 ed. São Paulo: Cortez, 2011. p. 7-28.
- BICUDO, M. A. V. Filosofia da educação matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Fenomenologia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. 1 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2010. p. 23-47.
- BICUDO, M. A. V. **Tempo, tempo vivido e história**. 1 ed. Bauru: EDUSC, 2003.
- BICUDO, M. A. V. Uma leitura de O Primado da Percepção e suas consequências filosóficas. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (Orgs.). **Joel Martins... um seminário avançado em fenomenologia**. 1 ed. São Paulo: Educ, 1997. p. 113-196.
- BICUDO, M. A. V. A constituição do objeto pelo sujeito. In: TOURINHO, C. D. C. (Org.). **Temas em Fenomenologia: a tradição fenomenológica-existencial na filosofia contemporânea**. 1 ed. Rio de Janeiro: Booklink, 2012. p. 77-95.

BICUDO, M. A. V. A perplexidade: ser-com-o-computador e outras mídias. In: BICUDO, M. A.V. (Org.). **Ciberespaço**: possibilidades que se abrem ao mundo da educação. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. p. 37-66.

BICUDO, M. A. V. Realidade Virtual: uma abordagem filosófica. **Ciências Humanas e Sociais em Revista**, Seropédica, v.32, n. 1, p. 121-134, jan./jun. 2010.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

BICUDO, M. A. V.; KLÜBER, T. E. A questão da pesquisa sob a atitude fenomenológica de investigação. **Conjectura: Filosofia e Educação**, Caxias do Sul, v. 18, n. 3, p. 23-40, set./dez. 2013.

BICUDO, M. A. V.; KLUTH, V. S. Geometria e Fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática**: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. 1.ed. São Paulo: Editora UNESP, 2010. p. 131-147.

BICUDO, M. A. V.; ROSA, M. **Realidade e cibernundo**: horizontes filosóficos e educacionais antevistos. 1 ed. Canoas: Editora da Ulbra, 2010.

BICUDO, M. A. V.; ROSA, M. A Presença da Tecnologia na Educação Matemática: efetuando uma tessitura com situações/cenas do filme Avatar e vivências em um curso a distância de formação de professores. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Santa Catarina, v.6, n.1, p. 61-103, abr. 2013.

BONGIOVANNI, V.; JAHN, A. P. De Euclides às geometrias não-euclidianas. **Revista Iberoamericana de Educação Matemática**, n. 22, p. 22-51, jun. 2010.

BORBA, M.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

CHAUÍ, M. S. Vida e Obra. In: HUSSERL, E. **Investigações Lógicas Sexta Investigação**: Elementos de uma Elucidação Fenomenológica do conhecimento. Trad. Zelko Loparic' e Andréa M. A. C. Loparic'. Coleção Os Pensadores. São Paulo: Nova cultura.1996.

COELHO, F. S. **Um estudo sobre licenciatura de matemática oferecida na modalidade à distância**. 2015. 382p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2015.

DARTIGUES, A. **O que é a Fenomenologia?** Trad. Maria José J. G. de Almeida. 10. ed. São Paulo: Centauro, 2008.

DETONI, A. R. Contribuições de uma investigação sobre o Espaço para a Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 16, n. 19, p. 19-36. 2003.

DETONI, A. R. A geometria se constituindo pré-reflexivamente: propostas. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 2, p. 187-202. 2012.

DETONI, A. R.; PINHEIRO, J. M. L. Compreensões filosóficas para uma alternativa do pensamento geométrico. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 11, ed. Filosofia da Educ. Matemática, p. 232-243. 2016.

DETONI, A. R.; PINHEIRO, J. M. L. Considerações filosóficas sobre o corpo movente e o conhecimento geométrico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016. p. 1 - 11.

DETONI, A. R. **Apostila de Desenho Geométrica**. Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), 2015. Apostila utilizada em aulas de Geometria nesta universidade. Não publicada. Disponível apenas com autor.

ESPOSITO, V. H. C. Os processos perceptivos. O corpo e o mundo percebido: uma leitura de Merleau-Ponty. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (Org.). **Joel Martins... um seminário avançado em fenomenologia**. 1 ed. São Paulo: Educ, 1997. p. 125-145.

FIGUEIREDO O. A. A questão do sentido em computação. In: BICUDO, M. A.V. (Org.). **Ciberespaço: possibilidades que se abrem ao mundo da educação**. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. p. 313-342.

FURLAN, R.; BOCCHI, J. C. O corpo como expressão e linguagem em Merleau-Ponty. **Estudos de Psicologia**, Ribeirão Preto, v. 8, n. 3, p. 445-450. 2003.

GUIMARÃES ROSA, J. **Sagarana**. 23ed. Rio de Janeiro: Liv. J. Olympio Editora, 1980.

HUSSERL, E. **A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental: uma introdução à filosofia fenomenológica**. Trad. Diogo Falcão Ferrer. 1 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

HUSSERL, E. **Investigações Lógicas Sexta Investigação: Elementos de uma Elucidação Fenomenológica do conhecimento**. Trad. Zelko Loparic' e Andréa M. A. C. Loparic'. 1 ed. Coleção Os Pensadores. São Paulo: Nova cultura. 1996.

HUSSERL, E. **Ideias para uma Fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica: introdução geral à fenomenologia pura/Edmund Husserl**. Trad. Marcio Suzuki. 5 ed. Aparecida Ideias & Letras, 2006.

HUSSERL, E. **Ideas relativas a una Fenomenologia pura y una filosofia fenomenológica: investigaciones fenomenológicas sobre la constitución**. Trad. Zirión Q. 2. Ed. México: Instituto de Investigaciones Filosóficas, 2005.

HUSSERL, E. **Meditações cartesianas: introdução à fenomenologia**. Trad. Frank de Oliveira. São Paulo: Madras, 2001.

HUSSERL, E. **Lições para uma fenomenologia da consciência interna do tempo**. Trad. Pedro M. S. Alves. 1 ed. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda, 1994.

HUSSERL, E. **A origem da geometria**. Trad. Maria Aparecida Viggiani Bicudo. E&PQ – Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos. São Paulo: Editora Unesp, 2006. p. 1-34.

KLEIN, F. **O programa de Erlangen de Félix Klein: considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas**. São Paulo: IFUSP, 1984.

LADEL, S.; KORTENKAMP, U. Early maths with multi-touch: an activity-theoretic approach. In: PROCEEDINGS OF POEM, 1, 2012, Frankfurt. **Anais ...** Frankfurt: CERMAT, 2012, p. 1-22.

LIMA, E. L. **Isometrias**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

MABUCHI, S. T. **Transformações Geométricas: A trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. 2000. 259p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica (PUC), São Paulo, 2000.

MADEIROS, F. M.; GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica no ensino de Transformações no Plano. **Professor de Matemática Online**, Rio de Janeiro, v. 3, n. 1, p. 1-20. 2007.

MERLEAU-PONTY, M. **Fenomenologia da Percepção**. Trad. Carlos Alberto Ribeiro de Moura. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2011.

MERLEAU-PONTY, M. **O primado da percepção e suas consequências filosóficas**. Trad. Constança Marcondes Cesar. Campinas: Papirus, 1990.

NOBREGA, P. T. Corpo, percepção e conhecimento em Merleau-Ponty. **Estudos de Psicologia**, Natal, v.13, n. 2, p. 141-148, 2008.

OLIVEIRA, J. H. A percepção originária como primado e fundante do conhecimento em Merleau-Ponty. **Kínesis**, Marília, v. 3, n. 6, p. 231-241, dez. 2011.

PAULO, R. M.; BICUDO, M. A.V. Um estudo fenomenológico sobre a compreensão da geometria. In: BAUMANN, A. P. P. et al. (Org.). **Maria em forma/ação**. 1ed. Rio Claro: IGCE/Unesp, 2010. p. 243-254.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências**. Trad. Maria F. M. R. Jesuíno. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

PINHEIRO, J. M. L. **A Aprendizagem Significativa em ambientes colaborativo-investigativos de aprendizagem**: um estudo de conceitos de Geometria Analítica Plana. 2013. 202p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

PINHEIRO, J. M. L et al. Escola e Aulas de Matemática: ambiente de ser o que se é ou do ser o que está? **Acta Scientiae**, Curitiba, v. 19, n. 2, p. 193-210, mar. /abr. 2017.

PUGLIESI, M. Prefácio. In: HUSSERL, E. **Meditações cartesianas**: introdução à fenomenologia. Trad. Frank de Oliveira. São Paulo: Madras, 2001. p. 9-18.

POWELL, A. B.; ALQAHTANI M. M. Tasks and meta-tasks to promote productive mathematical discourse in collaborative digital environments. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON EDUCATION IN MATHEMATICS, SCIENCE & TECHNOLOGY, 2, 2015, Antalya. **Anais...** Antalya: ICEMST, 2015. p. 84 – 94.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando o software de GD**: repensando a formação inicial docente em matemática. 2005. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G. O trabalho com GD em uma perspectiva investigativa. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1, 2009, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UTFPR, 2009. p. 1066-1079.

SANTOS, M. R.; MOCROSKY, L. F.; MONDINI, F. Compreensões de Geometria expressas por crianças: prelúdio fenomenológico. In: BICUDO, M. A.V. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática**: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. 1 ed. São Paulo: UNESP, 2010. p. 149-167.

SOUZA, C. E.; GRAVINA, M. A. Geometria com animações interativas. **Novas Tecnologias da Educação**, Rio Grande do Sul, v. 7 n. 1, p. 1-9, jul. 2009.

TOURINHO, C. D. C. A consciência e o mundo na fenomenologia de Husserl: influxos e impactos sobre as ciências humanas. **Revispsi**, Rio de Janeiro, v.12, n. 3, p. 852-866. 2012.

VENTURIN, J. A. **A educação matemática no Brasil da perspectiva do discurso de pesquisadores**. 2015. 541p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2015.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

APÊNDICE 1

As Transformações Geométricas da teoria à prática em ambiente de GD: o fundo dinâmico sobre o qual constituímos as atividades trabalhadas nesta pesquisa

Desenvolvemos atividades cujo fundo de realizações pudesse constituir-se por movimentos, dentre os quais os isométricos. Neste apêndice, mais importante do que definir aqui as isometrias, é mostrar como elas podem ser trabalhadas em ambientes de GD, para com isso abrir compreensões sobre movimentos possíveis de serem realizados por nossos sujeitos, bem como ícones da interface do *software* de GD que são acessados para efetivação desses possíveis movimentos.

Ao dizer das Transformações Geométricas, Madeiros e Gravina (2007, p. 6) definem que: “Se Π e Π' são dois planos, uma transformação $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ é uma *isometria* quando a distância entre os pontos $T(A)$ e $T(B)$ é igual à distância entre os pontos A e B , para quaisquer pontos A e B ; ou seja, quando $d(T(A), T(B)) = d(A, B)$ para quaisquer pontos A e B ”.

Do livro do professor Elon Lages Lima (2007, p. 13), destacamos enunciados de algumas propriedades nele demonstradas: a) *1) Toda isometria $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ transforma retas em retas*; b) *Toda isometria $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares*; c) *Toda isometria $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ é uma bijeção, cuja inversa $T^{-1}: \Pi' \rightarrow \Pi$ é ainda uma isometria*; d) *Toda isometria $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ transforma um ângulo em outro ângulo de mesma medida*.

Essas propriedades, por se tratar de segmentos, de ângulos e da conservação de suas medidas na transformação, estendemos às transformações de figuras planas. Por conseguinte, a transformação de uma figura G gera uma figura G' congruente a G . Uma figura espacial, um poliedro, por exemplo, trataríamos como um conjunto de figuras planas, para esse fim.

As isometrias que aqui destacamos são: a translação, a rotação e a reflexão, as quais trazemos mais adiante, fazendo articulações com possibilidades que se abrem no *software* de GD Geogebra.

A Reflexão é denotada também de Simetria. Ela abrange: simetria axial (em relação a uma reta), quando se diz que a figura transformada é ‘revertida’ em relação à original, como são as imagens dos espelhos, situação à qual o senso comum diz ‘reflexo’; simetria central (em relação a um ponto), quando se diz que a figura transformada é ‘invertida’ em relação à original. Embora entendamos que Reflexão não seja sinônimo de Simetria, continuaremos com esse termo, visto que o autor que destacamos a seguir, para definir as isometrias, se vale do mesmo e, ainda, os sujeitos desta pesquisa terão contato com essa nomenclatura ao trabalharem com o *software* de GD Geogebra.

Ao destacar cada isometria, mencionamos itens do menu destinado às Transformações Geométricas no Geogebra. Para que se entenda de quais itens estamos dizendo, antecipamos, na Figura 5, o referido menu.



Figura 5: Opções do menu das isometrias.

Fonte: O autor.

✓ *A Translação*

Se dois pontos, como extremos de um segmento, são deslocados numa mesma direção (e sentido) e num mesmo comprimento, a teoria geométrica dos paralelogramos nos diz que o segmento relativo aos dois pontos deslocados é igual e paralelo ao segmento original, e dizemos que um é a translação do outro segundo esses dois parâmetros geométricos.

A translação pode ser mais consistentemente definida como “uma transformação determinada por um vetor v que leva cada ponto A de um plano Π ao ponto $A' = A + v$ desse mesmo plano. Com isso, ela desloca o ponto por determinada distância d , preservando a direção e sentido indicados pelo vetor v ” (WAGNER, 2007, p. 71). Como exemplo de translação, trazemos a Figura 6 e a Figura 7:

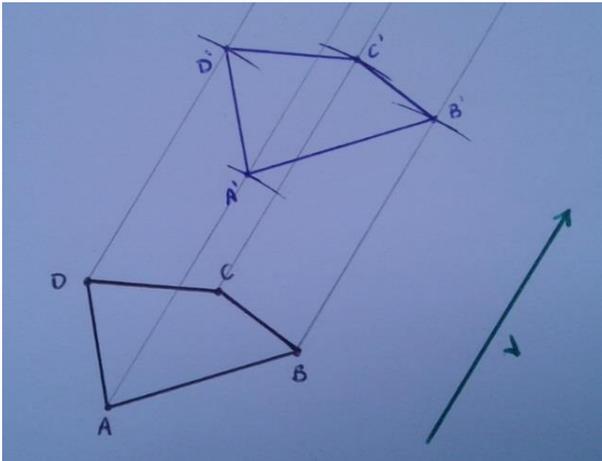


Figura 6: Translação de um quadrilátero.
Fonte: O autor.

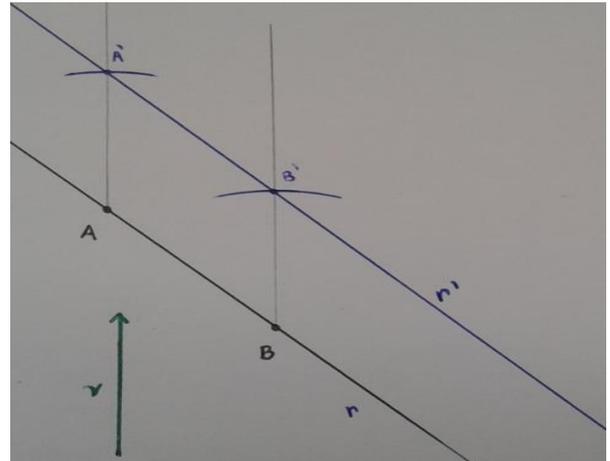


Figura 7: Translação de uma reta.
Fonte: O autor.

No menu destacado na Figura 4, há a opção “Translação por um Vetor”. Dada uma figura geométrica, após selecionar essa ferramenta, basta clicar sobre a figura e em seguida clicar duas vezes fora dela, demarcando com isso a origem e o afixo do vetor. De imediato aparecerá a figura transladada. O vetor construído no Geogebra é móvel, o que permite uma gama de translações possíveis com o simples ato de mover o afixo ou a origem desse vetor.

Observa-se, na Figura 8, que o movimento do vetor v , da figura e/ou de seus vértices resulta na alteração do quadrilátero ABCD e do A'B'C'D'; no entanto, o segundo sempre é o transladado do primeiro, ou seja, sempre é congruente ao primeiro, e a distância entre cada vértice correspondente dos quadriláteros se preserva, sendo sempre igual ao módulo de v .

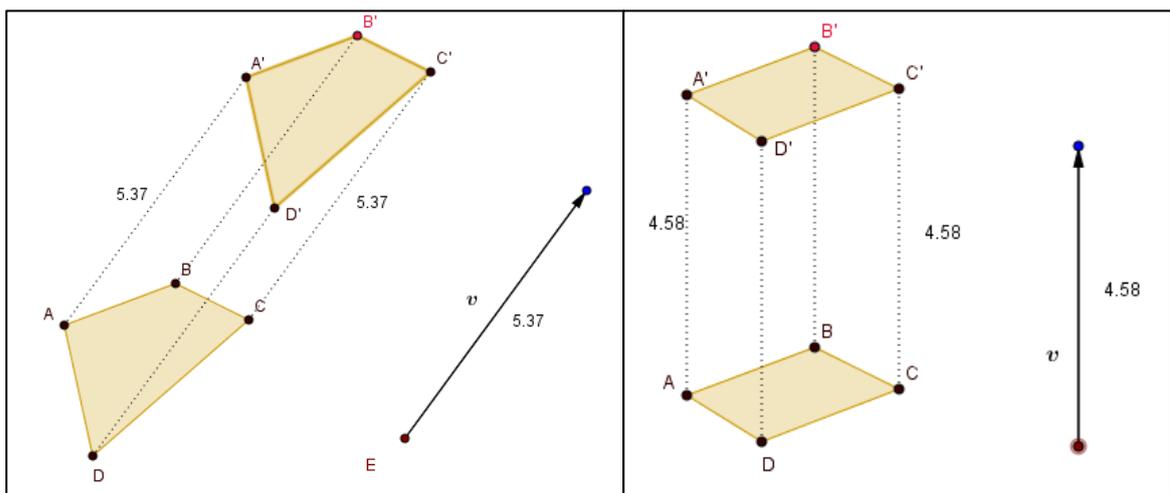


Figura 8: Translações a partir de um vetor móvel.
Fonte: O autor.

Para transladar um segmento ou uma reta na interface do Geogebra, basta clicar sobre a mesma e movê-la; o *software* dispõe de uma programação que permite a preservação da direção

e sentido desta reta, ou seja, para transladá-la na interface do *software*, conforme evidenciado na Figura 9, não é preciso conhecer os vetores e/ou as operações com os mesmos.

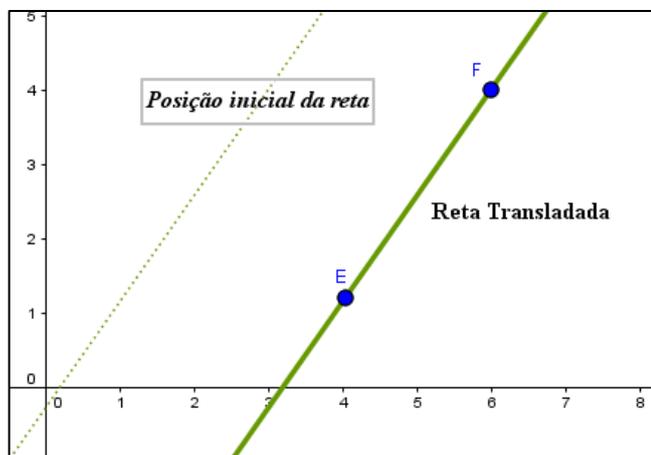


Figura 9: Translações de uma reta no Geogebra.

Fonte: O autor.

Temos que considerar, também, que além de ser um movimento característico, a translação, como toda transformação, enseja um pensamento geométrico que vai se articulando metodologicamente. Se um paralelogramo, como vimos logo acima, é a figura que descreve um segmento que se movimenta até seu transladado, toda situação geométrica que pode ser reduzida a um paralelogramo traz a possibilidade de se pensar a translação.

✓ A Rotação

A rotação é uma isometria que preserva a forma do objeto, incluindo suas características previamente construídas. Rotacionar uma figura, um ponto, uma reta, consiste em fixar um ponto – denominado centro de rotação – e uma amplitude angular de rotação desta figura. A rotação pode ocorrer no sentido horário (negativo) ou anti-horário (positivo). Wagner (2007, p. 75) explicita que, dado “um ângulo α , a rotação de centro O e amplitude α é a transformação que cada ponto A do plano Π associa o ponto $A' = R_{\alpha}(A)$ de forma que se tenha $OA' = OA$, o ângulo $\widehat{AOA'} = \alpha$ ”. Como exemplo, segue abaixo a Figura 10, construída com régua e compasso.

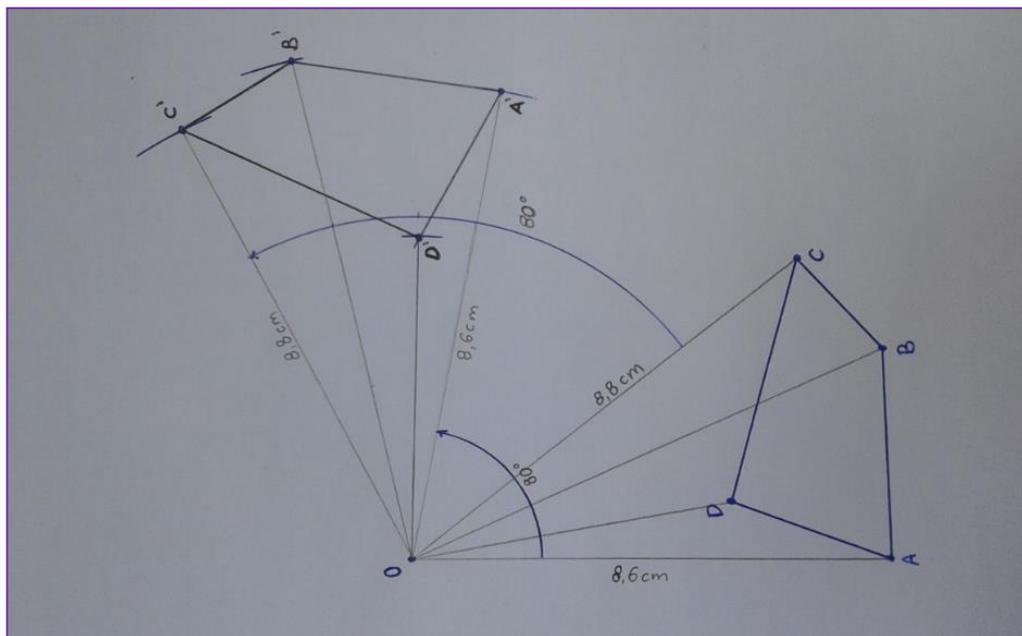


Figura 10: Rotação de um quadrilátero com régua e compasso.

Fonte: O autor.

Sobre a situação disposta no diagrama acima, aplicando-se conceitos geométricos e trigonométricos com foco em ângulos no círculo, pode-se mostrar a invariância métrica – angular e linear – entre os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$.

O Geogebra disponibiliza a ferramenta “Rotação em Torno de um Ponto”, com a qual, em havendo uma figura geométrica e um centro de rotação, basta, após selecionar essa ferramenta, clicar sobre a figura e em seguida sobre o centro de rotação. De imediato o *software* expõe uma janela, conforme visto na Figura 11, que solicita a indicação da amplitude angular da rotação e o sentido da mesma (horário ou anti-horário). Após responder a essas solicitações, a figura que se dá na rotação é expressa na interface do *software*.

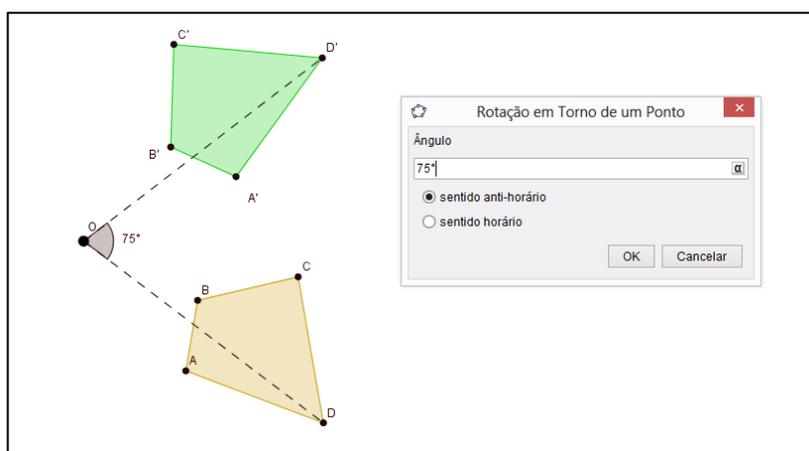


Figura 11: Rotação de um quadrilátero no sentido anti-horário e amplitude angular 75° .

Fonte: O autor.

Novamente o dinamismo do *software* abre uma gama de possibilidades. Sendo o centro de rotação móvel, pode-se rotacionar a figura de uma diversidade de perspectivas. Pode-se, também, fixar o centro de rotação e mover a figura ou objetos pertencentes à mesma, mesmo após realizada a rotação. Expomos, na Figura 12, algumas das possibilidades acima mencionadas.

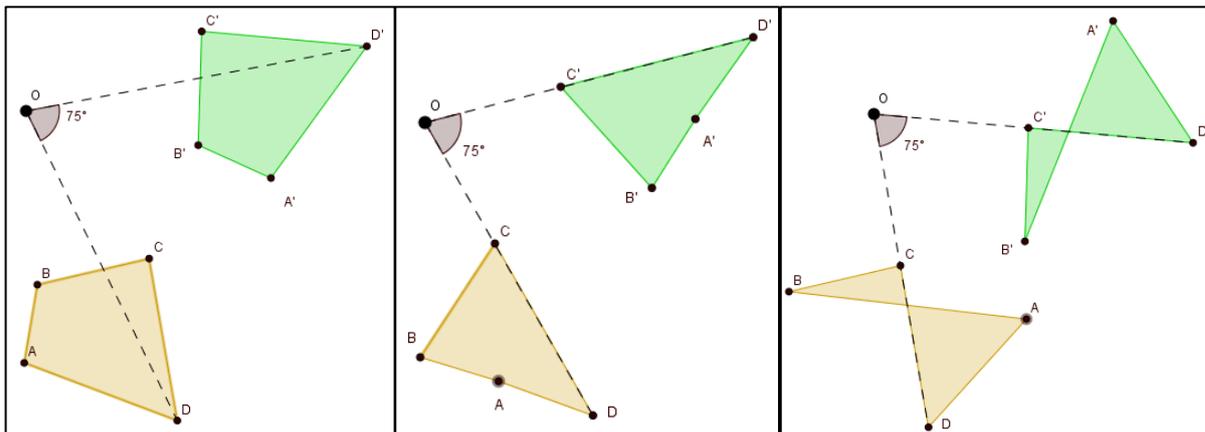


Figura 12: Possibilidades para rotação que se abrem no *software* Geogebra.
Fonte: O autor.

A rotação de um ponto em torno do centro de rotação e/ou a de um segmento com origem no centro de rotação é outra possibilidade de transformação. Trata-se de uma construção mais simples, mas que se vale do mesmo procedimento. A Figura 13 exemplifica.

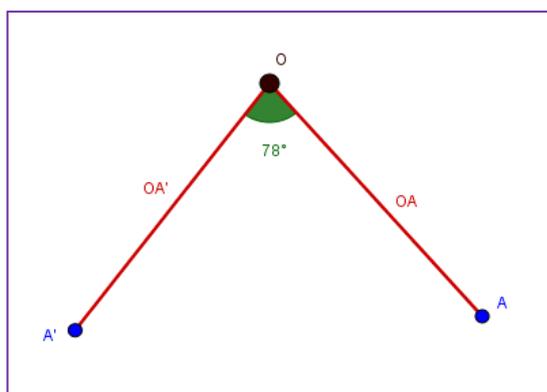


Figura 13: Rotação do ponto A e do segmento AO.
Fonte: O autor.

Como vimos, tal como reiterado na figura acima, a reflexão em torno de um ponto implica sempre um ângulo e laterais iguais, o que sugere potencializar um pensamento de rotação sempre que uma situação geométrica evoca triângulos isósceles de conhecidos ângulos opostos à base ou situações a isso recorrentes, como um quadrado, atentando para um de seus vértices e os lados adjacentes a ele.

✓ *A Reflexão*

A reflexão de um ponto A em relação a uma reta r é o ponto A' , que é simétrico ao ponto A em relação a r quando essa reta é mediatriz do segmento que une A e A' . “A reflexão em torno da reta r [...] é a transformação S_r que faz corresponder a cada ponto A do plano o ponto $A' = S_r(A)$, simétrico de A em relação a r .” (WAGNER, 2007, p. 73).

Na reflexão de uma figura, os pontos correspondentes entre a mesma e sua reflexão são equidistantes à reta r , também chamada de eixo de simetria. Fazendo uma analogia, esse eixo pode ser visto como espelho, o que facilita compreender o conceito de reflexão e, com isso, realizar reflexões de figuras quaisquer. Ilustramos essa situação geométrica na Figura 14.

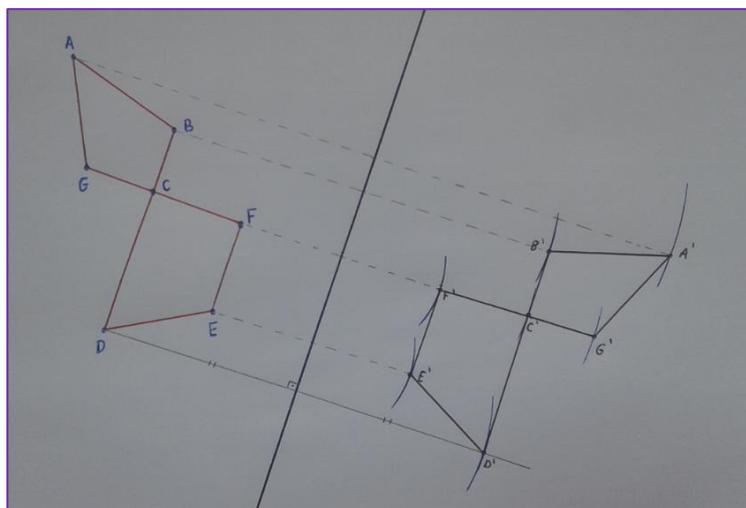


Figura 14: Reflexão de uma figura plana.

Fonte: O autor.

A reflexão de uma figura no Geogebra pode ser realizada através da ferramenta “Reflexão em Relação a uma Reta”; havendo uma figura geométrica e um eixo de simetria, basta clicar sobre a figura, e em seguida sobre o eixo. De imediato, a reflexão da figura aparece no lado oposto da reta. De outro modo, a figura pode ser refletida ponto a ponto, segmento por segmento, realizando essa mesma sequência. De uma figura e sua reflexa em relação a uma reta dizemos ser reversas.

As invariâncias lineares e angulares entre figuras reversas são simplesmente provadas geometricamente por congruência de trapézios formados por um lado poligonal, e seu reverso, e as perpendiculares baixadas por seus vértices, e as por seus reversos, ao eixo de simetria.

Um pensamento para a ação com a reflexão se potencializa geometricamente em situações nas quais a simetria se põe, como na presença de mediatrizes, bissetrizes, pontos médios e outros referenciais. Nesse mostrar-se, diversas explorações se abrem. Assim como expresso na Figura 15, pode-se: mover o eixo de simetria, mover a figura, seus vértices, etc.

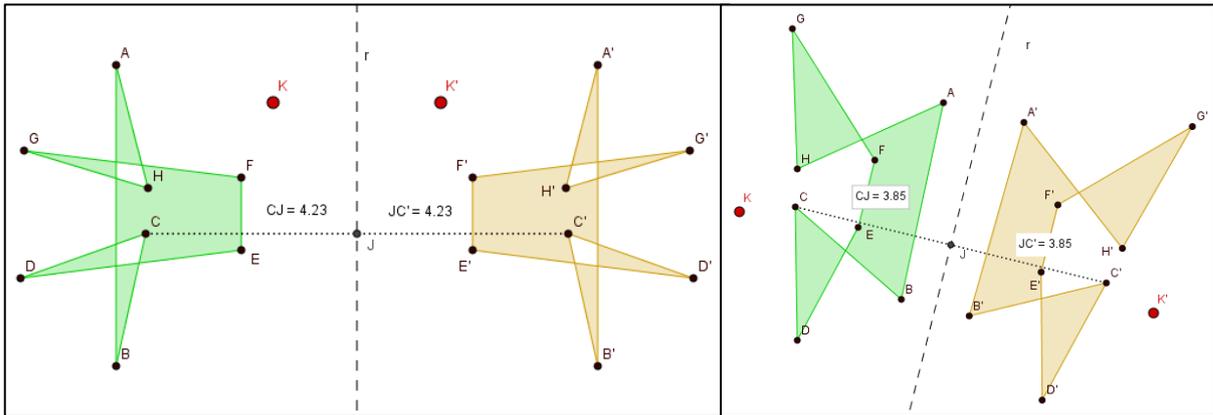


Figura 15: Reflexão de uma figura plana no Geogebra.

Fonte: O autor.

Vale lembrar que, mesmo o *software* ofertando ferramentas que permitam construções mais diretas, é possível também realizá-las com régua e compasso – para isso, traçando perpendiculares, paralelas, círculos, etc. Embora percebamos possibilidades de movimento em ambas as perspectivas de trabalho, destinamos à possibilidade de “arrastar”, dada no *software*, a função que determina um distanciamento entre os potenciais dinâmicos desses modos de construir. Sobre isso, porém dando o exemplo a construção de lugares geométricos, Alves e Soares (2003, p. 5) ressaltam que, caso um aluno precise trabalhar com os recursos tradicionais de construção gráfica, ele deveria repetir procedimentos tantas vezes quantas fossem necessárias “para obter uma amostra de pontos do lugar geométrico que reproduzisse um comportamento satisfatório. Enquanto isso, esses programas geram automaticamente uma amostra com um número n de pontos que representam posições possíveis da trajetória do *locus* considerado”.

APÊNDICE 2

Transcrição e Análise Ideográfica do desenvolvimento das Atividades (de 2 a 8)

✓ Atividade 2

A Atividade 2 foi realizada pelo Grupo 2 em seu primeiro encontro. Quando convidados a relatar a vivência ao realizarem a atividade, um aluno de imediato se dispôs a fazê-lo. Ele, ao passo que ia realizando as solicitações da atividade junto ao *software* Geogebra, ia dizendo e apontando na projeção do *data show* o que estava fazendo e o que o levou a fazer.

Abaixo destacamos o enunciado da Atividade 2 e, em seguida, o Quadro 9 com a descrição do desenvolvimento desta atividade, que foi a primeira a ser realizada pelo Grupo 2:

ATIVIDADE 2 - ESTAÇÃO SUBAQUÁTICA

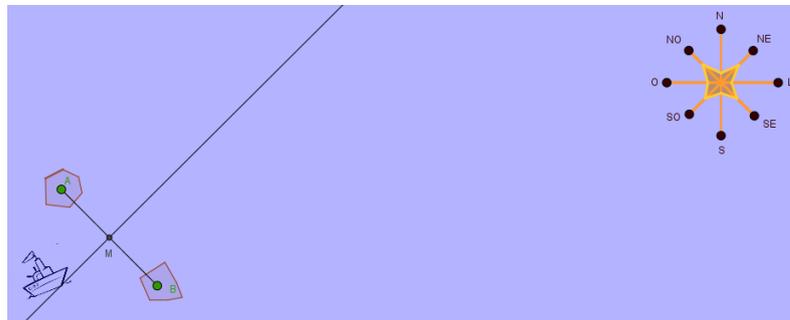
João encontrava-se perdido por um longo período em mar aberto. Em um dia ensolarado, ele avistou duas ilhas rochosas (Ilha A e Ilha B) as quais já conhecia. João sabia que uma estação subaquática da marinha foi instalada próxima a essas ilhas e sabia que nessa estação poderia encontrar ajuda. Por estar desgastado, João não conseguia se recordar ao certo de como chegar à estação. Lembrava-se apenas de parte do caminho.

Sabia que deveria realizar um percurso no sentido Nordeste (NE) passando entre as ilhas, estando sempre equidistante às mesmas. Esse primeiro percurso se encerra em um ponto demarcado por uma boia (Boia C), que é equidistante da ilha A e da estação. Ao chegar na Boia C, ele deveria seguir sentido Noroeste (NO) percorrendo o equivalente à metade da distância entre as ilhas rochosas chegando a uma segunda boia (Boia D), situada na metade do caminho linear entre a Ilha A e a estação. João não se lembra a que distância a Boia D está da estação, mas sabe que essa distância varia entre 5km a 10km (pode ser 6km; 7,85km; 9,5km; etc.). Sabe também, que há uma Boia E que demarca a entrada da estação. Fazendo esse trajeto, João chegou à estação. Determine no esboço projetado no Geogebra, que é abaixo representado, a região em que a estação está localizada.



Transcrição – Atividade 2

Aluno A2: Primeiro, sabemos que ele navega sentido nordeste estando sempre equidistante de A e B. Então, traço aqui o segmento AB e marco o ponto médio dele. O João vai passar nesse ponto médio, pois é equidistante. Depois traço uma reta paralela ao segmento que tem o Nordeste, pois tem que ser sentido nordeste. (1) Vou arrastando a reta até o ponto médio. Pronto, isso! [indaga após o fim do movimento]. Dá pra ver que essa reta é mediatriz do segmento AB [após selecionar a ferramenta *Segmento*, clicou sobre A e B, nessa sequência. Selecionou a ferramenta *Ponto Médio ou Centro* e clicou sobre o segmento AB, o que fez mostrar-se o ponto médio desse segmento. Clicando com o botão direito do *mouse* sobre o ponto médio, selecionou a opção *Renomear* e o chamou de M. Depois, selecionando a ferramenta *Reta Paralela*, clicou sobre o segmento SDNE (Sudoeste-Nordeste) de forma a gerar uma reta paralela ao mesmo. (2) O aluno, pressionando o botão esquerdo do *mouse*, segura a reta e a arrasta até que ela passe pelo ponto M].

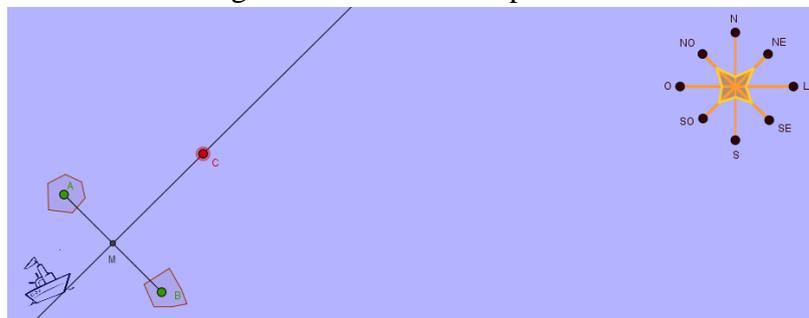


Pesquisador: Por que acha que a reta é mediatriz?

Aluno A2: Porque ela é perpendicular ao segmento AB e o divide ao meio. Acho que não foi coincidência. O senhor montou pra que isso acontecesse, se não fosse mediatriz, não daria certo, pois não iria manter a equidistância (se refere ao barco com relação às ilhas).

Pesquisador: Ok, muito bem observado.

Aluno A2: Daí, fala que inicialmente ele para na Boia C. Mas não fala a posição dela, só que é equidistante da ilha A e da estação. Fiquei matutando (pensando) pois também não sei onde fica a estação. Então, pensei em colocar a boia em qualquer lugar sobre a mediatriz. A posição da estação vai aparecer no final, mantendo a equidistância [após clicar sobre a ferramenta *Ponto*, clicou sobre a reta. Em seguida renomeou esse ponto chamando-o de C].

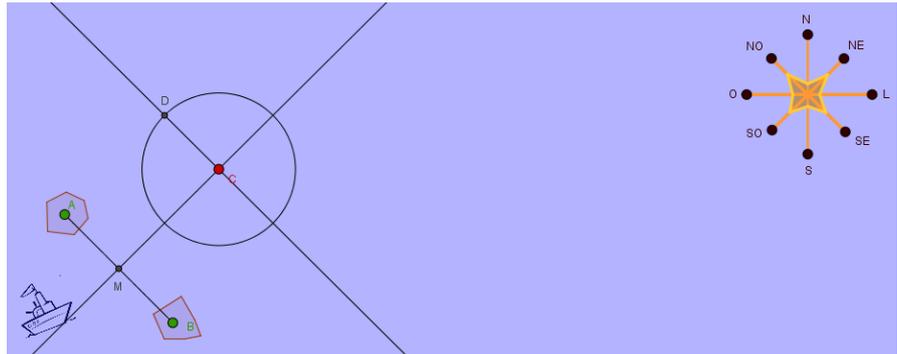


Pesquisador: Como chegou à conclusão de que deve colocar C em qualquer lugar da reta?

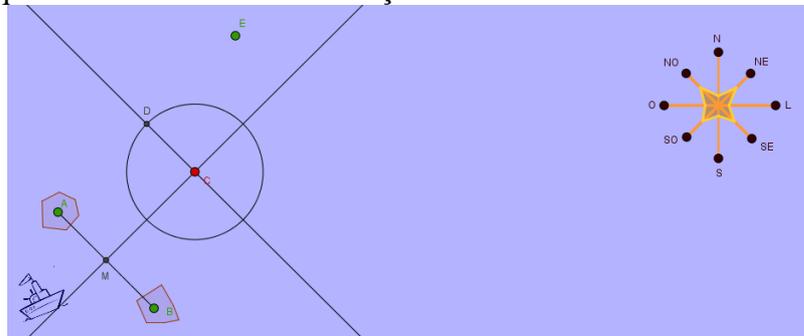
Aluno A2: Enquanto fiquei pensando em seguir a sequência dos passos, lendo aos poucos, não estava entendendo o que fazer. Mas, quando resolvi ler toda a atividade, vi que tem outros passos que dependem de C. Então, mesmo não sabendo onde colocar ele, eu tinha que colocar em algum lugar pra conseguir continuar o exercício. Como o barco só anda sobre a reta, por estar sempre equidistante aos pontos A e B, coloquei sobre ela.

Pesquisador: Muito bem! Continue.

Aluno A2: Beleza. De C ele vai sentido Noroeste, percorrendo metade da distância de AB. Então, tracei uma paralela ao segmento do Noroeste passando pelo ponto C. Aqui, coincidência ou não, essa reta é perpendicular à mediatriz. Como ele tem que andar metade de AB, construí com a ferramenta, aqui ó... (completa a fala clicando sobre a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio*), clico no centro C e digito o raio AM, que é metade de AB. Daí marco o ponto de interseção entre o círculo e a reta perpendicular (perpendicular à mediatriz) e vou chamar de D, pois ele vai de C até a Boia D [para marcar a interseção, ele seleciona a ferramenta *Interseção de dois Objetos* e clica no encontro da circunferência com a reta recém-criada].



Aluno A2: O texto diz que a boia D fica na metade do caminho entre a ilha A e a estação. Então, basta fazer a reflexão do ponto A em relação ao ponto D e renomear este ponto de E [enquanto falava, foi realizando no Geogebra o que dizia; clicou sobre a ferramenta *Reflexão em Relação a um Ponto* e clicou sobre o ponto A seguido de D, gerando A', que o aluno renomeou como E]. Agora, dá até pra ver que as distâncias AC e CE são iguais né. No início dizia que C é equidistante da ilha A e da estação.



Pesquisador: Sim, isso. Sabe dizer como podemos definir que AC é igual a CE?

Aluno A2: (3) Ah professor, dá pra ver né? É visível que são iguais.

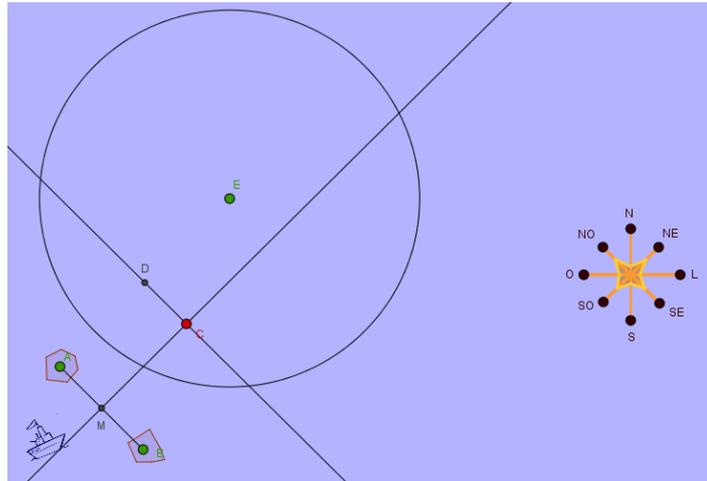
Aluna B2: São iguais mesmo, porque a reta CD divide o segmento AE ao meio. Então, ela é mediatriz do segmento AE. Então, qualquer ponto nesta reta, será equidistante de A e E.

Aluno A2: Isso mesmo, da mesma forma que a mediatriz de AB.

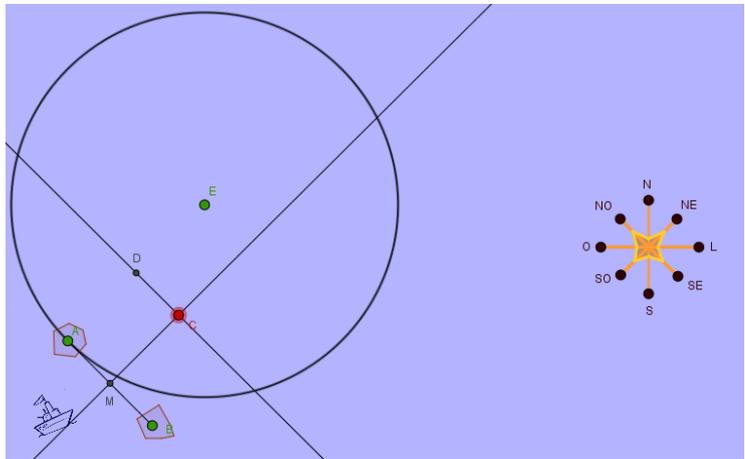
Pesquisador: Muito bem! Por isso é bom perguntar. Podem aparecer boas respostas como esta. Pode continuar Aluno A2.

Aluno A2: Agora vem o fechamento, determinar a região onde pode estar a estação. Aqui (se refere ao enunciado) diz que a distância entre a Boia D e a Boia E pode ser maior que 5km e menor que 10km. Deixa eu só ocultar essa circunferência [clica com o botão direito do mouse sobre a circunferência de centro C e seleciona a opção *Exibir/Ocultar Objeto*, o que faz com que a circunferência de centro em C desapareça de imediato]. Agora sim, vou construir uma circunferência de centro em E e raio 10. Isso, pronto! [Seleciona a ferramenta

Circunferência dados Centro e Raio, clica sobre o ponto E e determina o tamanho 10 para o raio]

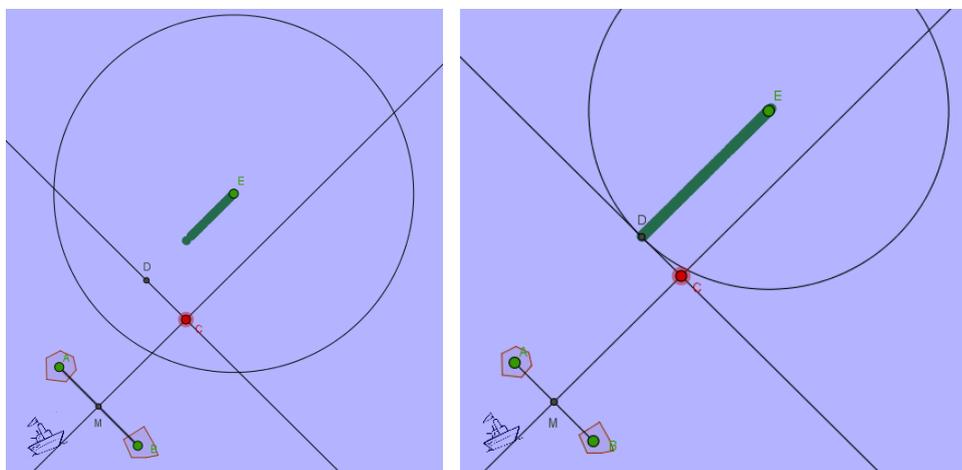


Aluno A2: A distância entre D e E é maior que 5. (4) Vou mover o ponto C até que eu tenha essa distância 5. Eu movo aqui até eu ter o raio EA (5) [clica sobre o ponto C e vai movendo-o bem devagar de forma a fazer a circunferência passar pelo ponto A]. Como EA é igual a 10, DE é igual a 5, certo? Então, se aqui a distância DE é 5km, as distâncias depois de E são maiores que 5km. Então, é depois de E que temos a região, beleza?



Pesquisador: Nossa! Muito bem pensado.

Aluno A2: Valeu! Agora, vou habilitar rastro em E pra demarcar a região [clica com o botão direito do *mouse* sobre o ponto E e seleciona a opção *Habilitar Rastro*]. (6) Agora vou mover o ponto C até que a distância entre D e E fique igual a 10, com isso, o raio da circunferência fica ED (7) [move bem devagar o ponto C até que a circunferência toque o ponto D]. Aí. Pronto. essa é a região (8) [agita o *mouse* para com o cursor mostrar a região demarcada].



Pesquisador: Muito bom isso! Mas me responda aqui, porque você moveu o ponto C e não o E, por exemplo?

Aluno A2: (9) Eu tentei mover o ponto E, mas não deu. O único que dá pra mover é o C, daí, o E move junto.

Aluno C2: (10) Mas é isso mesmo. Só é possível mover o C. Os outros pontos são dependentes dele, ele foi o ponto de partida, e quando você colocou ele, ele ficou solto sobre a mediatriz de AB, os outros pontos não, eles são interseções e o E é uma reflexão. Eles estão presos nessas propriedades, por isso não dá pra mover eles.

Pesquisado: Exatamente Aluno C2.

Aluno C2: (11) Quando movemos o ponto C vemos os outros moverem juntos, na interface. Quer dizer, tirando o A e o B. (12) Mas quando estamos movendo as propriedades, a de ser perpendicular, de ser equidistante, de ser reflexão, ééé... (pausa), é isso, as retas, os segmentos ficam mudando, mudam de posição, mas as propriedades continuam, as retas continuam perpendiculares, pontos continuam equidistantes. (13) Nós vemos isso quando movemos o ponto C.

Pesquisador: Isso mesmo, você respondeu o que seria uma pergunta minha; o que percebem no movimento? Você falou sobre as invariâncias, muito bom. Alguém percebe mais alguma coisa?

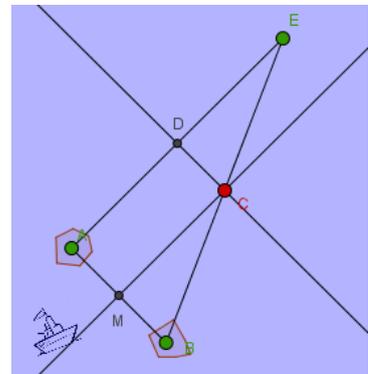
Aluno D2: Ah, tem as questões de grandeza, de círculo e raio, as paralelas que foram transladadas até um ponto. A professora (a professora de Geometria Euclidiana Plana) falou intuitivamente sobre isso, (14) sobre a translação, sobre a reflexão, que fizemos aqui também.

Pesquisador: Ótimo!

Aluna E2: Na minha aqui (fala sobre sua resolução) liguei os pontos AE e BE, ficou um triângulo ABE.

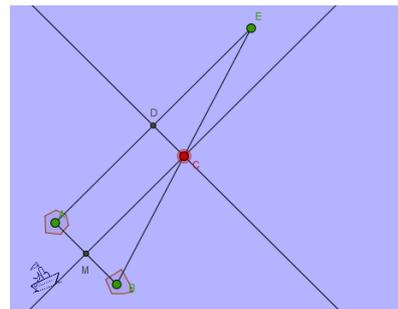
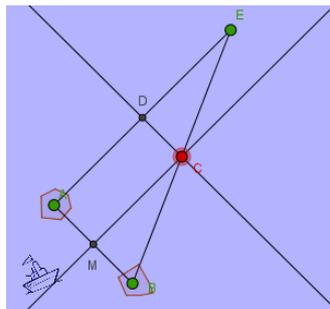
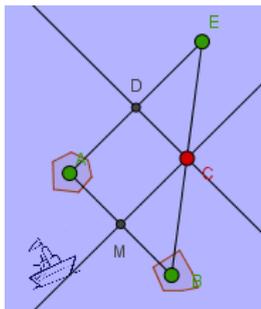
Pesquisador: Que legal, faz isso aí Aluno A2, para vermos outras possibilidades. Oculte a circunferência para destacar esse triângulo (solicita ao Aluno A2).

Aluna E2: Beleza [clica sobre a ferramenta *Segmento* e traça os segmentos sugeridos AE, AB e BE. Em seguida oculta a circunferência clicando sobre a mesma com o botão direito do *mouse* e selecionando a opção *Exibir/Ocultar Objeto*]



Pesquisador: Agora mova o ponto C novamente (pede ao Aluno A2). Digam o que percebem (se voltando a todos os alunos).

Aluno A2: [Clica em C e começa a movê-lo]

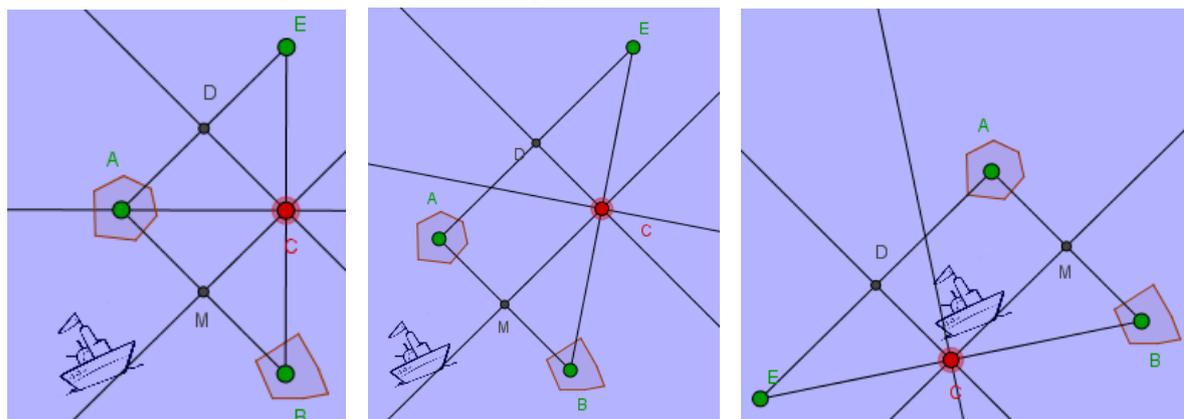


Aluno D2: (15) Já vi, as retas se cruzam em C, e por mais que movimentamos C, elas continuam se cruzando em C.

Pesquisador: Então, isso seria outro invariante?

Aluna F2: É sim! Essas retas são mediatrizes, olha, Aluno A2, faz aí a mediatriz do lado BE. Tá faltando só ela. Tem duas já.

Aluno A2: Ok, pronto (16) [diz após selecionar a ferramenta *Mediatriz* e clicar sobre o segmento BE. Em seguida movimentamos o ponto C].



Aluna F2: (17) Então, C é o encontro das mediatrizes. Viram?

Pesquisador: Beleza! Visualizou muito bem. E como se chama esse ponto de encontro?

Aluno A2: (18) É o circuncentro. Então o circuncentro é também um invariante.

Pesquisador: É isso mesmo. Muito bom!

O sentido do dito – Unidades Significativas

US1A2: Realiza um movimento ao mesmo tempo em que fala do mesmo.

US2A2: Movendo o *mouse*, move uma reta até que ela passe por um ponto já conhecido.

US3A2: Encontra no aspecto visual de uma construção no *software* justificativa para determinar uma igualdade.

US4A2: Antecipa o movimento e diz o que ele almeja com esse movimento.

US5A2: Controla o objeto movido e o como ele deve ser movido para alcançar um objetivo da tarefa.

US6A2: Antes de realizar o movimento, o aluno diz de sua intenção com esse movimento a ser realizado.

US7A2: O movimento é controlado pelo aluno. Ele estabelece a precisão de seu movimento para alcançar um objetivo.

US8A2: Faz do aparato tecnológico um meio pelo qual evidencia/mostra o que quer dizer.

US9A2: Após tentar mover pontos, compreende que nem todo ponto é movível diretamente, mas pode ser movido através do movimento de outro ponto vinculado de alguma maneira a ele.

US10A2: Entende que um ponto “solto” sobre uma reta pode ser movido, e que outros pontos que estão vinculados a ele não podem ser movidos diretamente. Entende que esses pontos se movem quando realizado movimento em um ponto móvel ao qual estão vinculados.

US11A2: Compreende que no movimento de um objeto há movimentação de outros objetos, mas há também, objetos que não se movem.

US12A2: Entende que, no movimento, objetos matemáticos podem variar, mas as propriedades que os abarca e os vinculam se preservam invariantes nesse movimento.

US13A2: Diz do que se mostra visível na interface do *software* quando um movimento é realizado.

US14A2: Evidencia ter realizado movimentos específicos aprendidos em aulas de Matemática, como translação e reflexão.

US15A2: Visualiza que três retas sempre se encontram em um mesmo ponto, por mais diversas que sejam as posições ocupadas por elas após realizados movimentos.

US16A2: Para verificar a possibilidade de interseção de retas, realiza movimentos em um ponto atentando-se ao que esse movimento provoca nas retas construídas.

US17A2: Visualiza nas configurações do movimento, um ponto onde sempre se encontram as mediatrizes do triângulo.

US18A2: Compreende que um ponto, por mais que se mostre em movimento, mantém como invariante sua característica de ser circuncentro.

Quadro 9: Transcrição e Análise Ideográfica do desenvolvimento da Atividade 2

Fonte: O autor

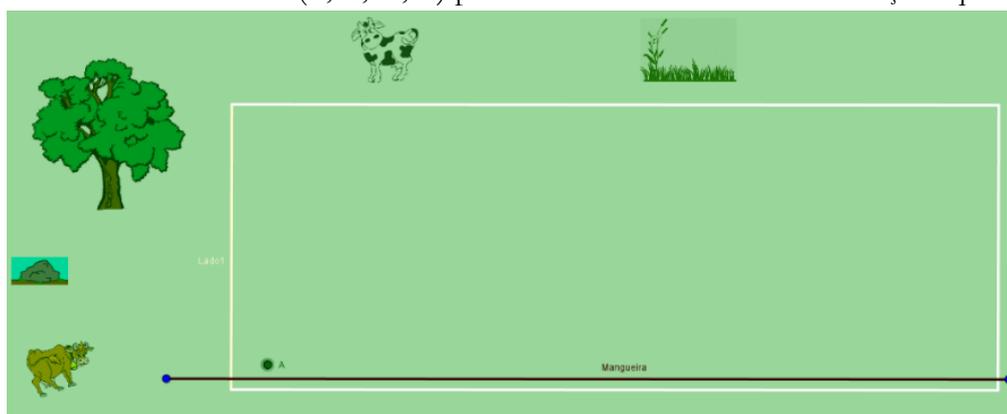
✓ Atividade 3

A Atividade 3 foi desenvolvida pelo Grupo 3, em seu primeiro encontro. Novamente uma dupla se dispôs a compartilhar para os demais alunos o modo como resolveram a atividade. Da mesma forma que na Atividade 1, um dos alunos ficou responsável pelo desenvolvimento no *software* e o outro por apresentar junto à projeção o que e como foi feito. A Aluna A3 ficou responsável pela exposição junto ao projetor e o Aluno B3 pelo desenvolvimento no Geogebra.

Apresentamos abaixo o enunciado da Atividade 3, que foi a primeira entregue ao Grupo 3. Em seguida, apresentamos o Quadro 10 com a descrição do desenvolvimento realizado.

ATIVIDADE 3 - DEMARCAÇÃO PARA MANGUEIRA IRRIGATÓRIA

Em uma Olimpíada de Matemática a ser realizada na região rural de Piracetuí será lançado um desafio aos alunos, que consiste em simular a instalação de uma mangueira irrigatória em um terreno retangular seguindo algumas orientações com fundo matemático. No terreno previamente demarcado, foram deixadas uma mangueira esticada e uma estaca fincada no chão (Estaca A). Será entregue aos alunos uma corda grande, um transferidor de ângulos, estacas e uma marreta. Eles deverão amarrar a corda na estaca fincada e realizar alguns percursos esticando essa corda e amarrando-a em outras estacas (B, C, D, ...) por eles fincadas conforme orientações que seguem:



- 1º - Amarre a corda na Estaca A e caminhe 18 metros paralelamente ao lado do terreno em que está a árvore. Quando parar, finque a Estaca B e amarre nela a corda.
- 2º - Mude de direção e caminhe de B até o local onde fincará a estaca C. A nova direção pode ser encontrada demarcando no chão, 40° anti-horários a partir da corda AB. Na nova direção, caminhe a partir de B uma distância menor que 18 metros no sentido do ponto que destaca o fim do traçado do ângulo de 40° . Ao parar, finque a Estaca C e amarre nela a corda.
- 3º - Gire 90° , caminhe linearmente até a corda entre as Estacas A e B e finque a estaca D.
- 4º - Da Estaca D, caminhe até o local no qual vai fincar a Estaca E. A Estaca E deve estar sobre uma mesma linha que as estacas B e C e distanciado de C a mesma distância posta entre B e C. (E não pode ser coincidente com B)
- 5º - Após amarrar a corda em E, caminhe linearmente em direção da Estaca A. Finque a Estaca F na metade do caminho entre as estacas A e E e amarre nela a corda.
- 6º - Gire 90° , caminhe até a corda entre as estacas C e D e finque a Estaca G.
- 7º - Mude a estaca C de posição de forma que as regras seguidas até então não se desconfigurem.

A mangueira será instalada no caminho demarcado pelas posições diversas ocupadas pela Estaca G ao realizar as mudanças propostas na sétima orientação.

Ao final, duas perguntas serão levantadas aos alunos. São elas:

- ✓ Onde a mangueira deverá ser posicionada?
- ✓ Quais conceitos matemáticos estão envolvidos nessa tarefa?

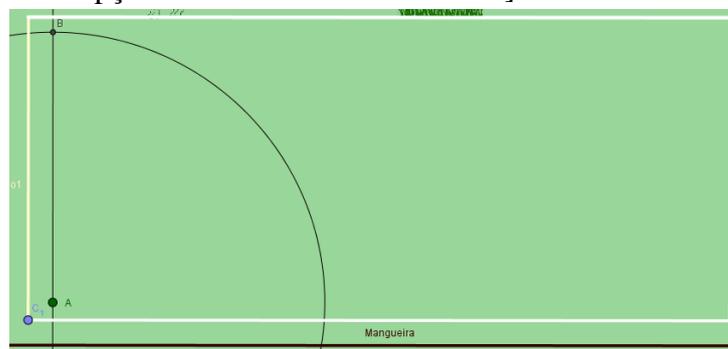
Por se tratar de uma olimpíada, as respostas dadas a essas questões serão analisadas e pontuadas.

Transcrição – Atividade 3

Aluna A3: Construimos uma reta paralela a esse lado (1) [com o braço erguido, simula na projeção uma reta paralela ao lado em que está a árvore], (2) pois devemos andar paralelamente a ele uma distância de 18m. Pra marcar 18, fizemos uma circunferência de centro em A e raio 18.

Aluno B3: [Clica na ferramenta *Reta Paralela*, em seguida sobre o lado indicado e (3) translada a reta até o ponto A. Depois, seleciona a ferramenta *Círculo dado Centro e Raio*, clica sobre o ponto A (centro) e determina o tamanho 18 para o raio].

Aluno B3: Marco aqui o ponto de interseção da reta com a circunferência e chamarei de B [enquanto fala, seleciona a ferramenta *Interseção entre dois Objetos* e clica sobre o encontro do círculo com a reta. Em seguida, com o botão direito do *mouse* clica sobre o ponto de interseção, seleciona a opção *Renomear* e chama-o de B].

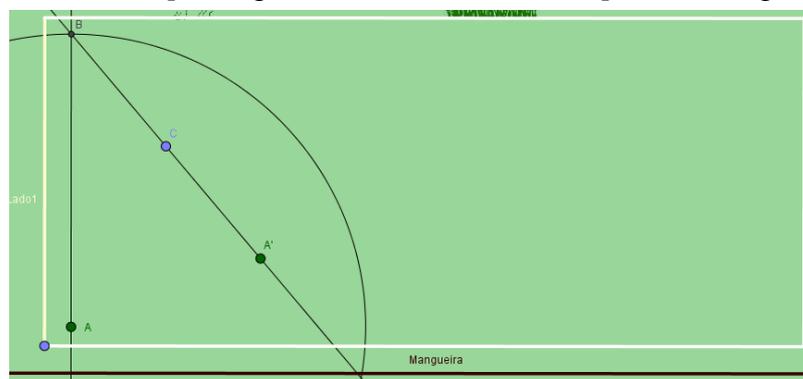


Aluna A3: No segundo passo, (4) marcamos um ângulo de 40° a partir da corda até o lado que vamos continuar andando.

Aluno B3: Vou em *Rotação em Torno de um Ponto* e (5) rotaciono A em torno de B, isso..., 40°, sentido anti-horário [após selecionar a ferramenta de rotação clica sobre A, depois sobre B, determina a medida angular de 40° e seleciona a opção *anti-horário*].

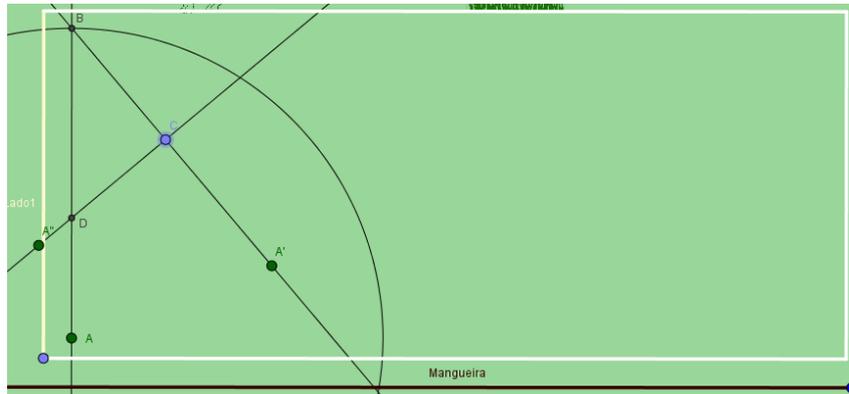
Aluna A3: Isso, agora passa uma reta por B e A' (solicita ao Aluno B3).

Aluno B3: Ok. Pronto, feito [indaga após traçar a reta BA']. Como ele tem que andar uma distância menor que 18, não sabemos ao certo, por isso colocamos um ponto aqui, entre B e A' (6) [desliza o cursor sobre a reta para mostrar a região na qual colocará o ponto], e pronto [marca o ponto entre B e A'], esse ponto vamos chamar de C [renomeia o ponto].



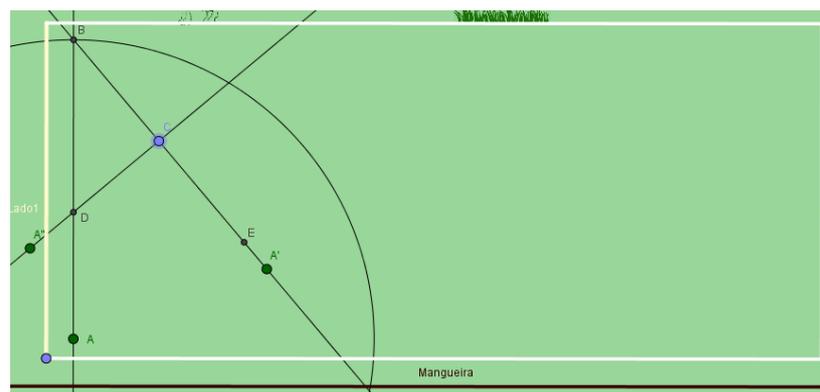
Aluna A3: Aqui, já amarramos a corda em C e (7) vamos agora girar 90° e ir até a corda AB e fincar a estada D. (8) [desliza o dedo indicador sobre a projeção gesticulando um percurso linear de C até a corda AB].

Aluno B3: Pra fazer esse giro de 90° , nós rotacionamos o ponto A' em torno de C 90° no sentido anti-horário, quer dizer, sentido horário (9) [**enquanto** fala, seleciona a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto* e realiza a rotação de A' em relação a C com sentido horário e amplitude 90°]. Traço uma reta por C e A'' e marco o ponto D na interseção da reta com a corda AB [após selecionar a ferramenta *Reta*, clica sobre os pontos C e A'' gerando a reta CA'']. Em seguida, seleciona a ferramenta *Interseção entre Dois Objetos*, marca o ponto de interseção entre a reta e a corda AB e renomeia este ponto chamando-o de D].



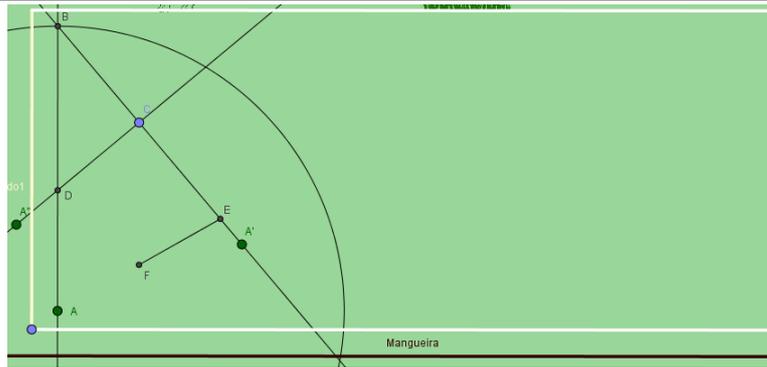
Aluna A3: Estamos no quarto passo agora né? É isso mesmo. Então, esse passo é mais complicado. Saímos de D até E, só que não sabemos ao certo a posição de E, mas sabemos que ele deve estar sobre essa reta [aponta para a reta A'B]. Deixa eu ler aqui... O ponto E deve estar distanciado de C a mesma distância posta entre B e C. Ah sim, então, olha, essa distância BC (10) [**com** o dedo indicador da mão direita em movimento, assinala na projeção o segmento BC] deve ser igual a CE. Então fizemos a reflexão do ponto B em relação ao ponto C e achamos um ponto que chamamos de E, aí as distâncias (BC e CE), por ser reflexão, são iguais.

Aluno B3: Isso, e fica assim. [Afirma após criar a reflexão de B em relação a C com a ferramenta *Reflexão em Relação a um Ponto* e renomear B' chamando-o de E]. Agora, traço aqui o segmento DE, (11) **que** é a gente saindo de D e indo pra E [seleciona a ferramenta *Segmento* e clica sobre os pontos D e E, nessa ordem].



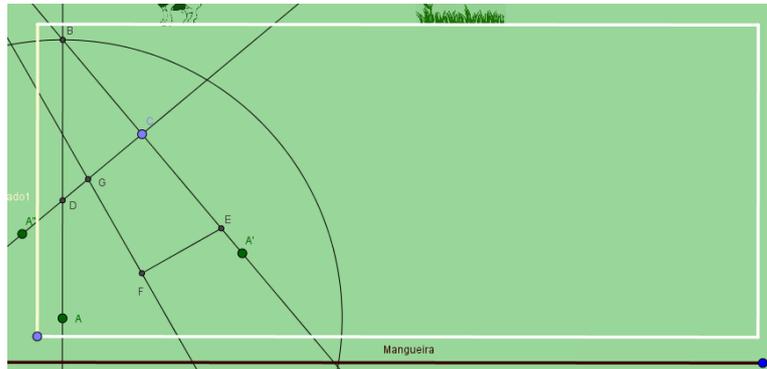
Aluna A3: Quinto passo. (12) **Temos** que ir no sentido de A e colocar a estaca F na metade do caminho entre A e E. Então, antes, marcamos o ponto médio entre A e E. Isso, faz aí Aluno B3, agora renomeie de F (o ponto médio). Isso, traça agora o segmento EF.

Aluno B3: [Realiza os passos sugeridos pela Aluna A3].



Aluna A3: Agora, de F giramos 90° . Então, traçamos uma reta perpendicular ao segmento EF passando por F e marcamos a interseção desta reta com a corda CD (13) [com o dedo indicador da mão direita aponta para a interseção mencionada].

Aluno B3: [Seleciona a ferramenta *Reta Perpendicular* e clica sobre o segmento EF e em seguida sobre F, gerando desta forma a reta perpendicular ao segmento EF. Seleciona a ferramenta *Interseção entre dois Objetos* e assinalo o ponto de interseção da reta com o segmento CD e o renomeia como G]



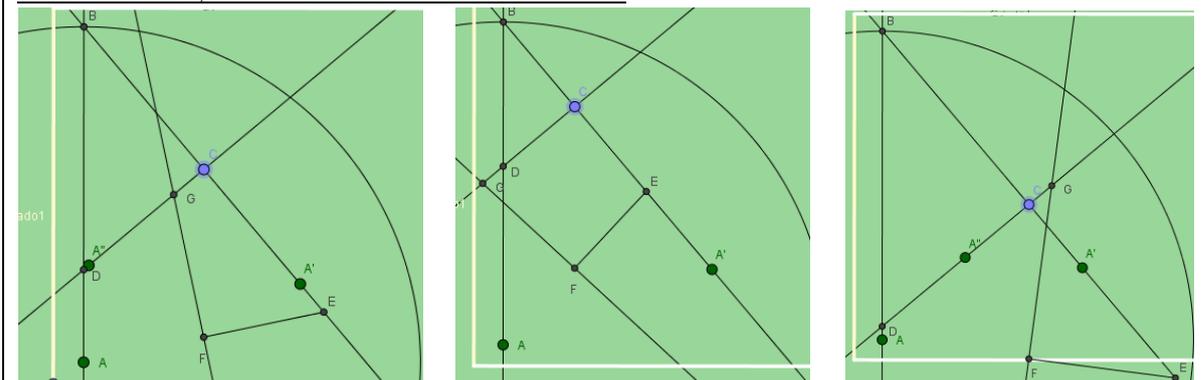
Aluno B3: Agora, trocar o C de posição. (14) Aí que o Geogebra ajuda, não temos que construir tudo novamente, basta arrastar o ponto C.

Pesquisador: Mas, se você mover o ponto C não vai desconfigurar tudo que fizeram?

Aluna A3: (15) Nós movemos e percebemos que muita coisa muda, os tamanhos e tudo, mas algumas coisas não se movem nessa mudança, são invariantes.

Aluno B3: (16) Olha, movo o ponto C e ele mesmo está sempre no meio entre B e E, o F também é sempre ponto médio (17) [conclui ao mesmo tempo em que está movendo C e atentando-se ao que acontece na interface do software].

Aluno C3: Tem as retas que são sempre perpendiculares. Também (18) tem os ângulos, o de 40° e os de 90° , eles não mudam no movimento.

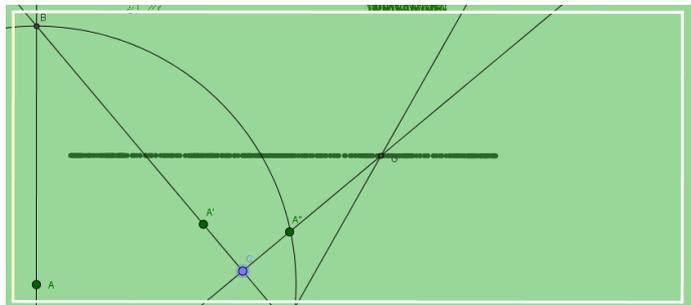
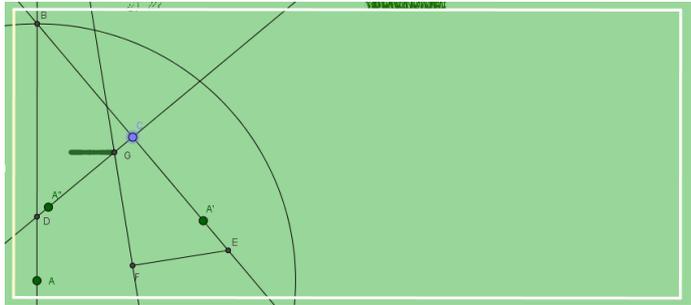


Aluna A3: (19) Ainda sobre o que não varia que você perguntou, tem o movimento do ponto C que é sempre linear, e também o do ponto G, que também é linear, entendeu? Eles variam. (20) Posso mover eles, mas este movimento é limitado, é sempre em linha reta. Acho que isso também é o que não varia.

Aluna D3: É, (21) tudo sai do lugar, mas obedecendo algumas leis, as que fomos determinando a cada passo: de ser perpendicular, ser ponto médio, estar sobre uma reta. Acho que é isso.

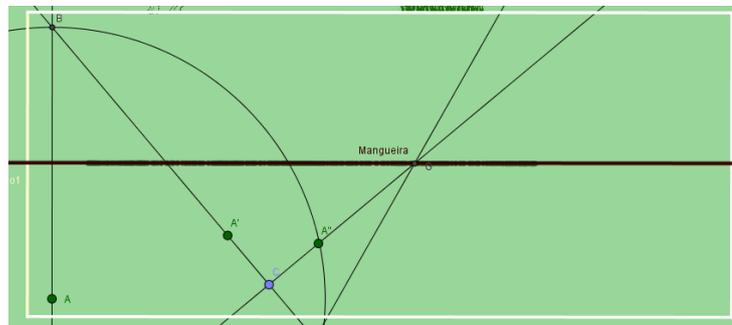
Pesquisador: Isso mesmo!

Aluno B3: Então, daí a posição da mangueira é sobre a linha que o G traça. Já foi adiantado pela Aluna A3, que o movimento dele faz uma linha, olha só (22) [move o ponto C e solicita atenção ao movimento do ponto G]. (23) Vou habilitar rastro pra ficar mais visível [clica com o botão direito do mouse sobre o ponto G e seleciona a opção *Habilitar Rastro*]. Isso, olhem agora [solicita atenção ao ponto G ao mover o ponto C]



Pesquisador: Muito bom!

Aluno B3: Agora é só colocar a mangueira sobre essa linha e pronto, problema resolvido!



Aluna A3: Eu vi que a mangueira fica perpendicular à corda AB.

Pesquisador: Será? Vocês conseguem verificar isso de alguma forma?

Aluna A3: Não sei viu, só parece que é 90° .

Aluna E3: Constrói uma reta perpendicular à corda passando por G (solicita ao Aluno B3).

Aluna D3: Mas aí dá na mesma, depois você vai colocar a mangueira sobre essa reta, e aí, (24) como garantir que a mangueira estará perpendicular? Vai ser movendo e olhando mesmo.

Pesquisador: Concordo Aluna D3. Mas olhem, vocês fizeram um passo que não foi permitido no problema, não atrapalhou na resolução, mas pode ter atrapalhado na percepção desta reta que estamos discutindo. De B até C, a distância tem que ser menor do que 18 e você moveu fazendo essa distância ficar maior. Então, mova C entre B e A', que tem 18 m. Pode ocultar a circunferência.

- US4A3:** Inicia a construção de um segmento sobre o qual irá “andar”, conforme solicita o enunciado da atividade.
- US5A3:** Realiza o movimento de rotação de um ponto sobre outro ponto considerando uma amplitude angular e um sentido de rotação.
- US6A3:** Com o movimento do cursor do *mouse* evidencia uma região na interface do *software*, na qual iria criar um ponto.
- US7A3:** Diz de um movimento de rotação e de um percurso a serem realizados.
- US8A3:** Com o indicador da mão direita sinaliza na projeção um percurso linear.
- US9A3:** Falas e movimentos junto ao *software* são realizações simultâneas do sujeito que controla o *mouse* e a tela computacional.
- US10A3:** Gesticula com o dedo indicador da mão direita um movimento linear sobre um segmento projetado no *data show*.
- US11A3:** Se coloca no lugar do personagem do enunciado, realizando um movimento tal como esse personagem deveria realizar.
- US12A3:** Evidencia o sentido de um percurso a ser realizado.
- US13A3:** Aponta na projeção um ponto de encontro entre dois objetos construídos.
- US14A3:** Compreende que reconstruir não é necessário, pois o movimento de um ponto já dá as novas configurações que essa nova construção daria.
- US15A3:** Afirma que realiza movimentos junto ao *software* e que percebe mudanças. No entanto, entende que junto a essas mudanças há propriedades que se preservam.
- US16A3:** Realiza movimentos em um ponto solicitando aos cossujeitos que atentem aos invariantes que ele quer mostrar com estes movimentos.
- US17A3:** conclui ao mesmo tempo em que está movendo C e atentando-se ao que acontece na interface do *software*
- US18A3:** Afirma que ângulos construídos não variam quando realizados movimentos na construção que os abarca.
- US19A3:** Afirma que que pontos em movimento evidenciam um percurso linear, dizendo que essa linearidade é uma invariância.
- US20A3:** Compreende que há possibilidade de movimento de pontos. No entanto, esse movimento limita-se a ser linear.
- US21A3:** Enfatiza que quando realizado um movimento “tudo sai do lugar”, mas, nessa desconfiguração se preservam as propriedades previamente estabelecidas na construção.
- US22A3:** Enquanto realiza movimento em um ponto, solicita aos cossujeitos que se voltem ao movimento de um outro ponto que está vinculado ao ponto que está sendo movido.
- US23A3:** Visando mostrar as características do movimento de um ponto, o aluno “habilita” rastro no mesmo e realiza movimentos solicitando aos cossujeitos que fiquem atentos ao rastro deixado no movimento.
- US24A3:** Entende que se pode garantir a perpendicularidade realizando movimentos e olhando para a região angular que vai se configurando nesse movimento.
- US25A3:** Percebe na interface do *software* um triângulo e o posicionamento da mangueira com relação ao mesmo, quando realizados movimentos limitados, menores, que não desconfiguram esse triângulo.
- US26A3:** Compreende que sempre, ou seja, em qualquer que seja a configuração do triângulo em movimento, as retas construídas se preservam como sendo as mediatrizes de seus lados.
- US27A3:** Diz de construir uma reta para em seguida realizar movimentos objetivando verificar se um ponto flutuará sobre a mesma.
- US28A3:** O movimento e a percepção do movimento de um ponto na interface do *software* são tomados como elementos comprobatórios de uma conjectura.
- US29A3:** Realiza movimento de um ponto para verificar a conjectura de que um outro ponto ligado a este que está sendo movido, pertence a uma reta previamente construída.
- US30A3:** Afirma que mover a mangueira colocando-a sobre uma reta percebida é a solução do problema.

Quadro 10: Transcrição e Análise Ideográfica do desenvolvimento da Atividade 3

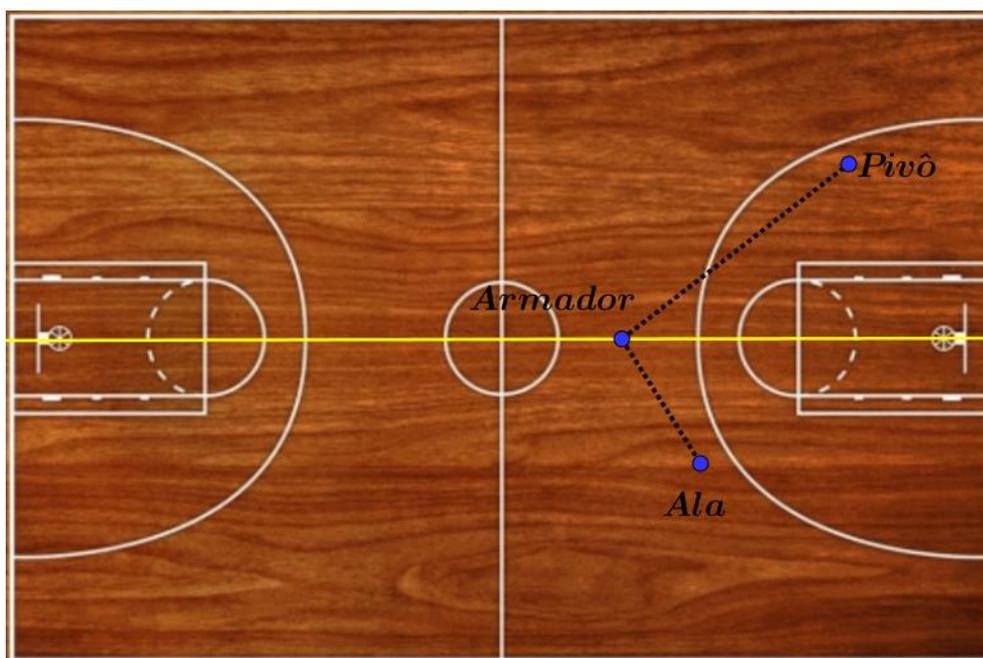
Fonte: O autor

✓ Atividade 4

A Atividade 4 foi a segunda atividade desenvolvida pelos alunos do Grupo 1, ainda em seu primeiro encontro. A Aluna G1, após nosso convite direcionado a todo o grupo, se dispôs a dizer para a turma como ela resolveu o problema. Destacamos abaixo o enunciado desta atividade e, em seguida, o Quadro 11 com a descrição do desenvolvimento realizado.

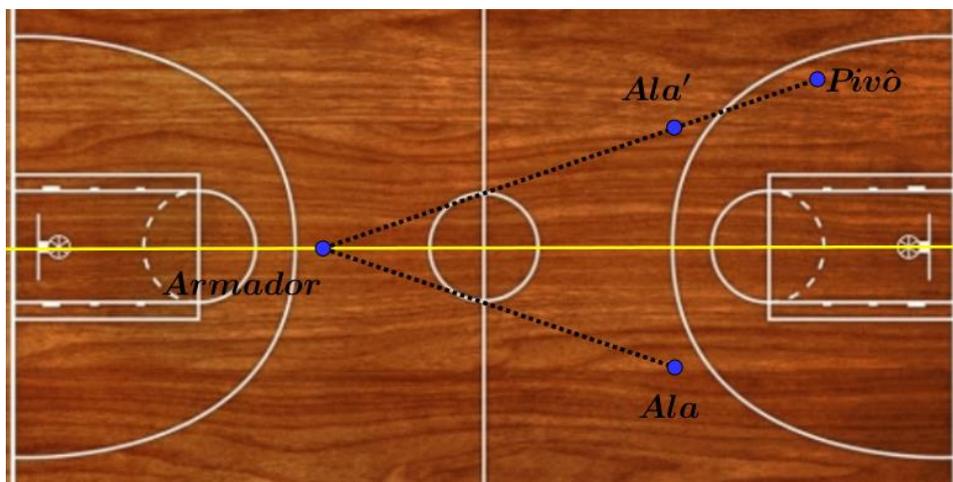
ATIVIDADE 4 - ARMAÇÃO DE JOGADA

Um técnico de basquete, desenhando em sua prancheta, quer combinar uma jogada com seu armador, que deverá estar sobre uma linha desenhada que divide a quadra horizontalmente ao meio. Em relação a essa linha, o armador deve ver o Ala e o Pivô sobre mesmo ângulo. Tendo previamente desenhado a o Pivô e o Ala, onde o técnico deve desenhar o armador?



Transcrição – Atividade 4

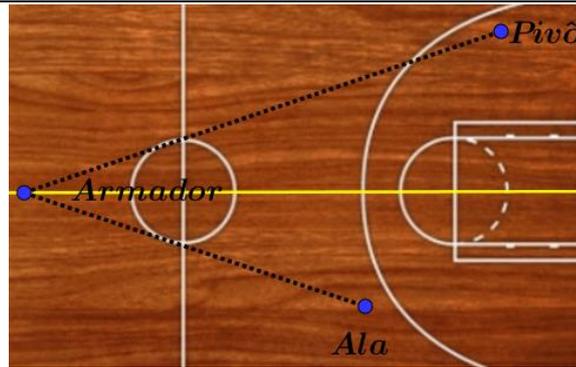
Aluna G1: Foi dito aqui que o armador tem que ver o ala e o pivô num mesmo ângulo. Então, esse ângulo tem que ser igual a esse (1) [agita o cursor na região angular entre o segmento que contém o Armador e o Ala e a reta horizontal. Em seguida, faz o mesmo na região entre o segmento que contém o Armador e o Pivô e a reta horizontal]. Então o que eu fiz? (2) Fiz o simétrico do Ala em relação a essa reta [passa o cursor sobre a reta horizontal], (3) encontrei aqui o Ala' [agita o cursor sobre o ponto Ala']. Depois eu (4) movi o Armador até que ele, o Ala' e o Pivô estivessem alinhados. Pronto, é só isso! (Afirma após realizar o dito). [Seleciona a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, clica sobre o ponto *Ala* e em seguida sobre a reta horizontal, gerando o ponto *Ala'*. Depois, (5) clica sobre o ponto Armador com o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo, arrasta-o cautelosamente até que o segmento ARMADORPIVÔ passe pelo ponto Ala']



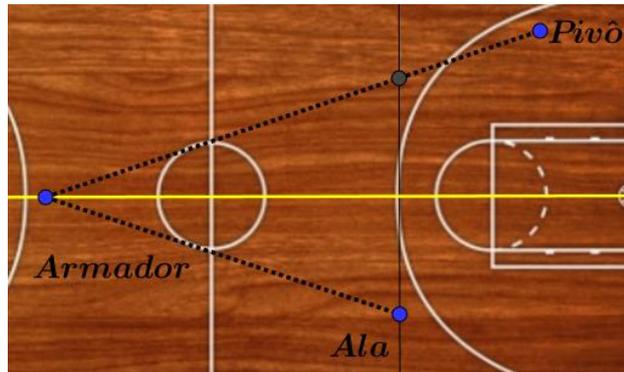
Pesquisador: Nossa, rápido em. Muito bem, é isso mesmo! Mas como chegou à conclusão de que tinha que fazer a reflexão do Ala?

Aluna G1: É, a resposta é rápida mesmo, mas até sair foi difícil (risos). (6) O desafio é desenhar o Armador, então entendi que aqui no Geogebra ele poderia ser movido, e foi isso, fui movendo, movendo. Antes, deixa eu só excluir esse ponto (o Ala'), beleza [seleciona o ponto e no teclado clica em *delete*]. (7) Aí fui movendo e parei mais ou menos aqui, aqui os ângulos parecem ser iguais (8) [clica sobre o ponto Armador e o arrasta sobre a linha horizontal até observar uma aparente igualdade entre os ângulos]





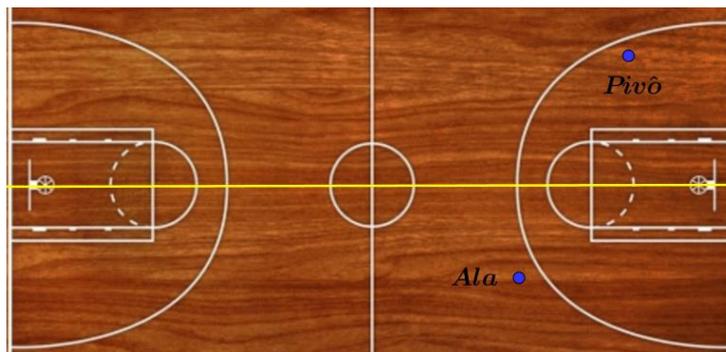
Aluna G1: (9) Quando eu parei aqui (posição atual do Armador), eu meio que olhei pra tudo, pro Ala, pro Pivô e pros segmento, aí eu vi que se eu passasse uma reta aqui, perpendicular eu teria um ponto aqui em cima que estaria a uma mesma distância em que o Ala está da reta (refere-se à reta horizontal), e o que é isso? Esse ponto aqui em cima é a reflexão do ala em relação a reta (10) [se levanta, vai até a projeção e com o dedo indicador da mão direita, deslizando-o sobre a projeção, simula uma reta perpendicular à reta horizontal passando pelo Ala. (11) Coloca o indicador da mão direita sobre a possível interseção da reta imaginária com o segmento que contém o Armador e o Pivô]. Vou fazer agora passando a perpendicular [volta ao computador, seleciona a ferramenta *Reta Perpendicular*, clica sobre a reta horizontal e em seguida sobre o ponto Ala]. Agora, esse ponto de interseção, pera aí [seleciona a ferramenta *Interseção entre Dois Objetos* e clica no encontro da reta perpendicular traçada com o segmento que contém o Armador e o Pivô], é a mesma coisa que a reflexão do Ala.



Aluna G1: (12) Então o que me ajudou a achar a posição do armador, depois de estar quase desistindo, foi essa possibilidade que você deixou de movimentar ele, foi esse movimento entendeu? Deus pra ir vendo os ângulos enquanto ia movendo ele.

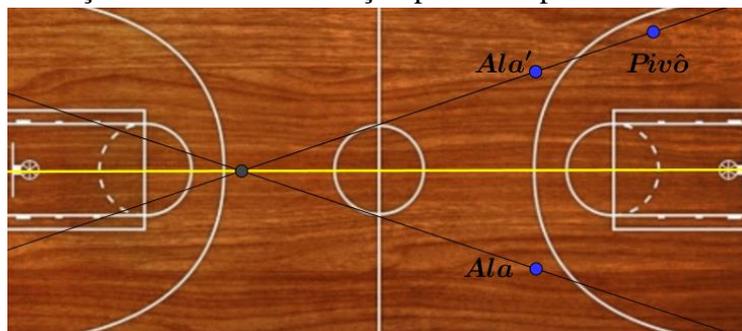
Pesquisador: Que bom! Olha, eu acho que essa sua fala deixa em aberto aqui uma pergunta: como resolver este problema se eu não tivesse colocado o Armador e os segmentos que saem dele? Deleta ele aí para vermos (solicita à Aluna G1)

Aluna G1: Belê! [Realiza o solicitado pelo pesquisador e deleta a reta perpendicular traçada anteriormente]



Aluno H1: Dava pra resolver da mesma forma, fazendo a reflexão do Ala. O problema seria chegar nisso né? Eu fui fazendo igual a Aluna G1. Mas (13) se não desse pra movimentar o Armador, eu acho que não ia conseguir pensar na reflexão.

Aluna G1: Pois é, eu também. Vou fazer então. Faço a reflexão aqui (reflexão do ala em relação à reta horizontal) [realiza a reflexão gerando Ala'], traço uma reta pelo Pivô e pelo Ala', e agora? A tá, vou marcar a interseção aqui (interseção ente a reta horizontal e a reta traçada). Belê, agora traço a reta dessa interseção passando pelo o Ala. Aêêê, certinho!



Aluna E1: Aí o ponto de interseção entre as retas é onde deve posicionar o armador.

Pesquisador: Exatamente!

Aluna B1: A reta horizontal ela é bissetriz do ângulo (ângulo formado pelas outras duas retas)

Aluna E1: É mesmo! Olha só!

Pesquisador: Isso aí! Muito bem! Não poderíamos concluir este problema sem que vocês percebessem que o tempo todo estavam trabalhando com uma bissetriz. O exercício basicamente era determinar um ângulo dado sua bissetriz e um ponto de cada lado dela.

Aluna B1: Bacana, gostei.

O sentido do dito – Unidades Significativas

US1A4: Movendo o cursor do *mouse* mostra uma região angular e convida os sujeitos a atentarem-se a isso que com o cursor se mostra.

US2A4: Para mostrar na interface do *software* o objeto matemático que está explicando, ele desliza o cursor percorrendo as dimensões desse objeto.

US3A4: Para indicar uma posição encontrada, ele agita o *mouse* sobre o ponto que demarca essa posição.

US4A4: Estabelece o movimento de um ponto visando deixar esse ponto e outros dois colineares.

US5A4: Realiza um movimento cauteloso, preciso, intencionando alcançar um objetivo previamente pensado.

US6A4: Entende que no Geogebra pode-se mover um ponto expresso em sua interface. Esse entendimento o levou a efetivar movimentos nesse ponto.

US7A4: Controla o movimento e o fim do movimento de um ponto ao passo que percebe que com esse movimento se aproxima de uma igualdade a qual se almejava alcançar.

US8A4: Realiza o movimento de um ponto e atenta-se às amplitudes dos ângulos que se desconfiguram nesse movimento, visando deixá-los iguais ou com medidas aproximadas.

US9A4: Afirma que ao parar o movimento em determinada posição foi possível olhar para a totalidade dos objetos na interface *software* e perceber que uma construção específica junto ao que a parada do movimento mostrava, lhe daria um objeto que seria uma reflexão de um ponto em relação à reta dada, que viria a ser relevante à resolução do problema.

US10A4: Movendo sua mão sobre a projeção, simula uma reta perpendicular a uma outra reta passando por um ponto dado.

US11A4: Com o dedo indicador da mão direita aponta na projeção a posição de um ponto que ela ainda vira a construir no *software*.

US12A4: Afirma que o que ajudou a ver a posição na qual o armador poderia estar, foi a possibilidades de colocá-lo em movimento, simulando posições ocupadas por ele e atentando aos ângulos que iam se configurando com seu movimento.

US13A4: Credita a ideia de reflexão que emergiu à possibilidade de movimentar um ponto.

Quadro 11: Transcrição e Análise Ideográfica do desenvolvimento da Atividade 4

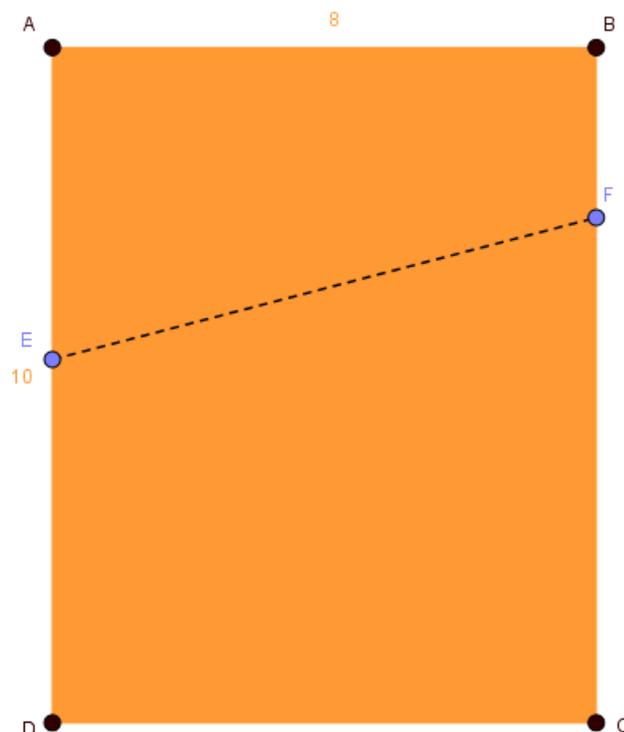
Fonte: O autor

✓ Atividade 5

Esta foi a segunda atividade desenvolvida pelo Grupo 2 ainda no primeiro encontro. Os alunos que se dispuseram a relatar o feito foram: o Aluno G2, que conduziu a apresentação e o Aluno H2, que realizou as construções e os movimentos no Geogebra. Logo abaixo expomos o enunciado da Atividade 5 e, em seguida, o Quadro 12 com o desenvolvimento realizado.

ATIVIDADE 5 - DOBRAR UMA FOLHA DE PAPEL

Uma folha de papel, no formato retangular de dimensão 8x10 e vértices A, B, C e D, conforme figura, deve ser dobrada para que o vértice A seja posto sobre o lado CD e o ponto médio de AB, fique sobre o lado BC. Determine o posicionamento da reta que representaria a dobra que deve ser feita (a reta EF abaixo é apenas ilustrativa dessa dobra).



Transcrição – Atividade 5

Aluno G2: Primeiro, nós pegamos a folha do exercício (a que lhes foi entregue impressa) e dobramos até o outro lado (1) [**pega o vértice superior esquerdo da folha e o posiciona sobre o lado menor inferior da mesma.** Firma o vértice sobre esse lado com uma das mãos e, com a outra mão, realiza a dobra da folha]. Fizemos outras dobras(2) [**pega o mesmo vértice e posiciona em diferentes lugares da folha**], fomos percebendo que a dobra fica sempre na metade entre o vértice e o lugar onde colocamos ele.

Aluna H2: (3) É, daí concluímos que deveríamos fazer a reflexão do vértice com relação a reta, e também do ponto médio do lado (se refere ao lado AB), pois quando puxamos o A ele vai vir junto. Vou antes, criar o ponto médio [clica sobre a ferramenta *Ponto Médio* e, em seguida, sobre o lado AB], vou renomear aqui de M [com o botão direito do *mouse* clica sobre o ponto médio, seleciona a opção *Renomear* e o determina como M]

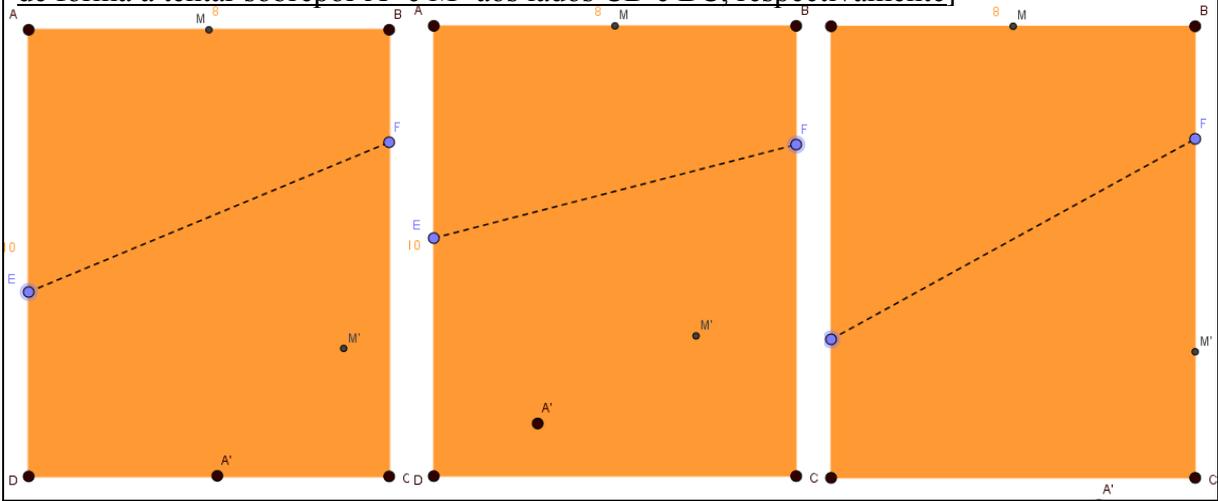
Aluno G2: Isso.

Aluna H2: Então, fiz os simétricos aqui com relação à dobra (dobra = segmento pontilhado) [seleciona a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, clica sobre o ponto A, em seguida, sobre o segmento EF. Depois, clica sobre o ponto M e sobre o segmento EF, respectivamente. Com isso, gera-se A' e M']

Aluno G2: A' e M' são as reflexões.

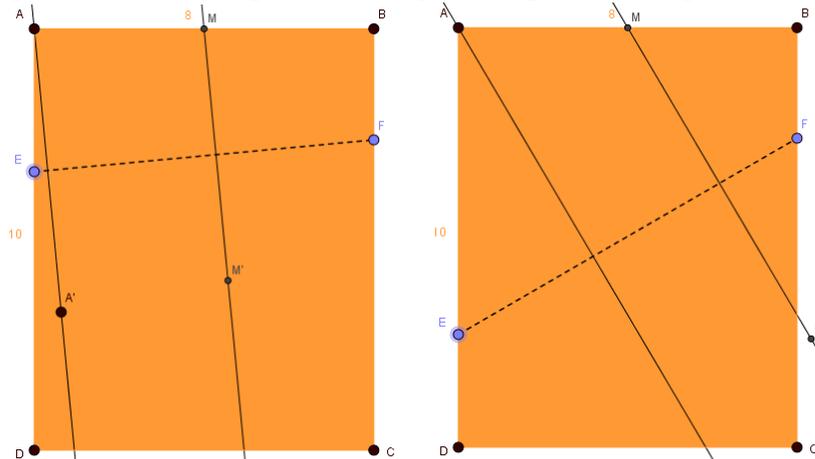
Aluno G2: (4) No início ficamos movendo o segmento tentando sobrepôr o A' em cima de CD e o M' ao lado BC, nada dava certo. Na hora que a gente conseguia colocar um, o outro ficava fora. Olha aí, o A' fica no lado, mas o M' não. Agora, nenhum dos dois. O M' fica, mas o A' não, e aí vai. (Refere-se ao posicionamento de A' e M' sobre os lados CD e BC, respectivamente)

Aluna H2: [Enquanto o Aluno G2 vai falando, (5) **arrasta** sucessivas vezes os pontos E e F, de forma a tentar sobrepôr A' e M' aos lados CD e BC, respectivamente]



Aluno G2: Desse jeito a gente podia até conseguir, mas ia ser bem difícil. (6) Mas, fazendo esses movimentos aí tivemos outra ideia. Pensamos em deixar um ponto já resolvido. Nosso problema era que tentar arrumar os dois pontos ao mesmo tempo tava difícil. Pensamos então em deixar um A' fixo em cima do lado CD .

Aluna H2: (7) Nós vimos que temos duas retas paralelas aqui, olha, uma passando por A e A' e outra por M e M' . Dá pra ver isso nas várias posições desses pontos. Vou fazer [Seleciona a ferramenta *Reta* clica sobre os pontos A e A' , depois sobre os pontos M e M'], (8) viu aí? São paralelas [afirma após mover o ponto E para cima e para baixo]



Aluno G2: (9) As retas ajudaram quando a gente colocou o A' sobre o lado CD , a gente viu na hora que o segmento EF tem que ser mediatriz desse segmento AA' .

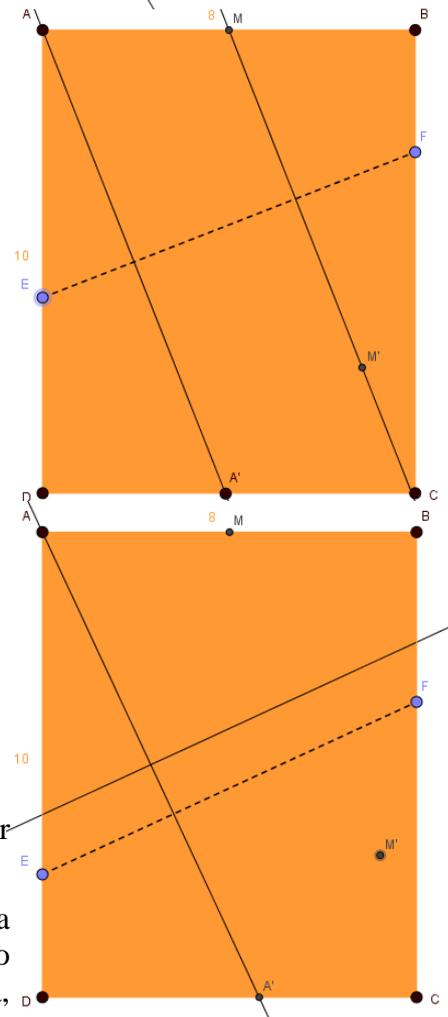
Aluna H2: (10) [Move o ponto E de forma a sobrepor o ponto A' ao lado CD]

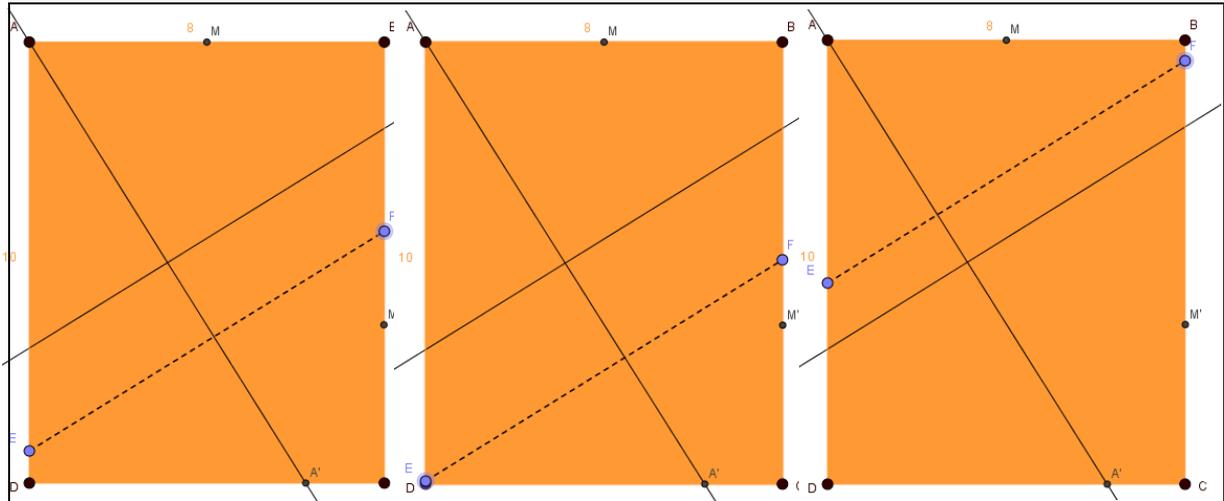
Aluno G2: Aí que veio a ideia de passar uma reta por A , perpendicular ao segmento EF , marcar o ponto de interseção desta reta com o lado CD e traçar uma mediatriz. Faz aí pra ver (solicita à Aluna H2)

Aluna H2: Já to fazendo, mas antes vou deletar essas retas aqui [clica sobre as retas e, em seguida sobre a tecla *delete*] Agora sim, primeiro a perpendicular [seleciona a ferramenta *Reta Perpendicular* e clica sobre o segmento EF], marco a interseção [seleciona a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e clica sobre o encontro da reta com o segmento], e agora chamo ela de A' [renomeia o ponto gerado]. Mediatriz, mediatriz, onde? [Procura a ferramenta *Mediatriz*. Ao encontrá-la seleciona a mesma e clica sobre os pontos A e A' , respectivamente, gerando com isso a mediatriz do segmento AA'], pronto!

Aluno G2: Viu? Agora fica mais fácil, só temos que cuidar do ponto médio, de M .

Aluna H2: A é, vou fazer ele de novo [seleciona a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, clica sobre o ponto M e, em seguida, sobre a reta mediatriz traçada, gerando M']



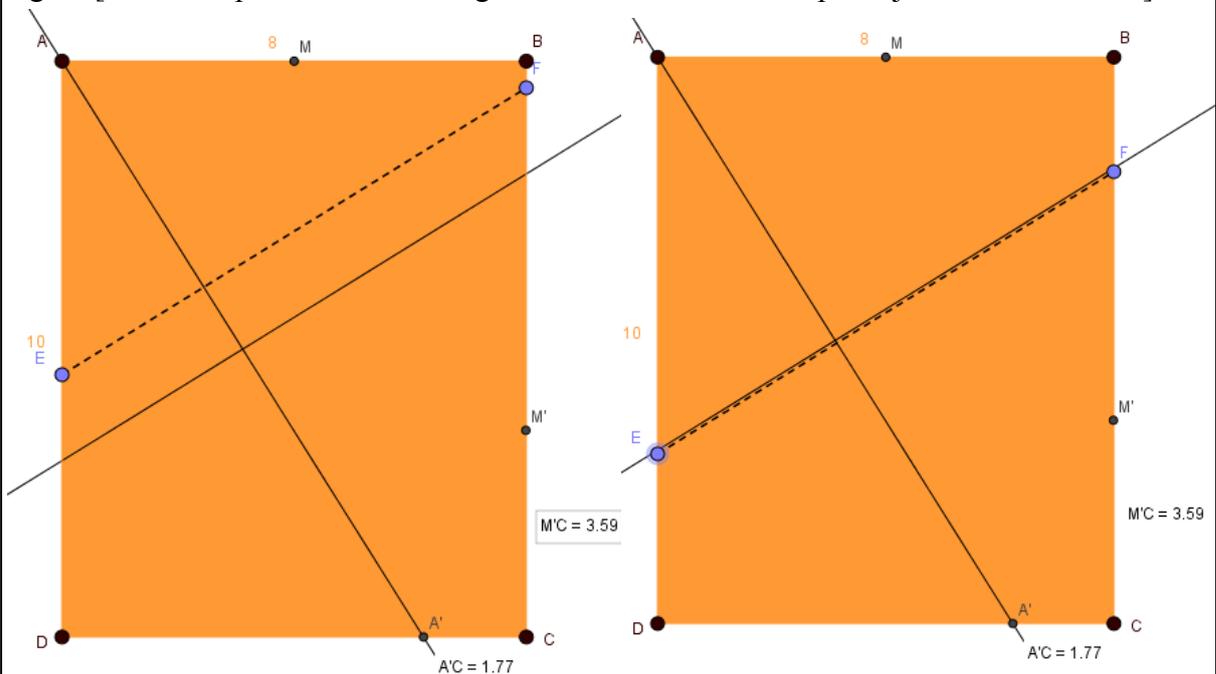


Aluno J2: Realmente, parece ter apenas uma dobra possível.

Pesquisador: Já se convenceu? Eu ainda não em. Vocês estão deduzindo no olho. Conseguem validar isso de alguma forma?

Aluna K2: Uma forma é tirar as medidas, por exemplo, pode medir a distância de A' até D e de C até M'. Depois mover os pontos pra ver se preserva a distância, entendeu?

Aluna H2: Tem razão. Pronto! [Selecionar a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clicar sobre os pontos A' e C, depois sobre M' e C, gerando assim as medidas das distâncias A'C e CM']. (17) Está aí, 1,77 e 3,59, as distâncias. Vou ver outra posição agora [desloca F para baixo e em seguida faz o mesmo com E para ajustar M' sobre BC]



Aluna H2: Nooossa! (18) Agora tá mais que comprovado, são sempre iguais as medidas, então só tem uma dobra possível.

Pesquisador: Quem sou eu para contestar. Vocês chegaram nisso e conseguiram mostrar. Parabéns.

O sentido do dito – Unidades Significativas

US1A5: Realiza dobradura de uma folha de papel antecipando um movimento a ser realizado no ambiente de GD.

US2A5: Ao realizar dobras na folha atentando-se às suas marcações, percebe que o vértice da folha a partir do qual ela é dobrada e o ponto demarcado pela posição ocupada por esse vértice ficam em lados opostos e são equidistantes em relação às linhas que demarcam as dobras realizadas.

US3A5: Após realizar dobras na folha conclui que a resolução do problema passa por criar pontos de reflexão. Conclui que se deve criar a reflexão de dois pontos dados, pois ao realizar movimentos na construção, as duas reflexões também se movem.

US4A5: Realiza movimentos tentando posicionar dois pontos simultaneamente em lugares específicos. Conclui após tentativas, que ao conseguir posicionar um destes pontos no local intencionado, o outro ponto não ocupa a posição que deveria ser ocupada por ele.

US5A5: Realiza diversos movimentos tentando posicionar simultaneamente dois pontos em lugares específicos. Pontos estes cujo movimento de um faz com que o outro também se movimente.

US6A5: A atenção às implicações dos movimentos realizados faz emergir uma ideia, que consiste em fixar um dos pontos no local desejado e tentar conduzir o outro ponto à posição que ele deveria ocupar conforme solicita o enunciado.

US7A5: Ao mover e ver várias posições ocupadas por alguns pontos, diz ter visto a possibilidade de traçar retas perpendiculares a uma outra reta, passando por esses pontos que se mostram em movimento.

US8A5: Realiza movimentos para mostrar e garantir que duas retas são paralelas.

US9A5: Afirma que o movimento de um ponto e a criação de uma reta que passe por ele ajudou a ver que a dobra, solução do problema, deveria ser a mediatriz do seguimento AA' .

US10A5: Move um ponto objetivando que o mesmo fique sobre um segmento dado.

US11A5: Move o ponto E intencionando projetar o ponto M' -que está vinculado sinestésicamente a E- sobre um segmento dado. Desta forma ele afirma ter alcançado a solução do problema.

US12A5: Com o cursor do *mouse* em movimento, aponta e convida os sujeitos a atentarem-se à uma reta construída.

US13A5: Antecipa oralmente o movimento de translação a ser realizado junto ao *software*.

US14A5: Arrastar um segmento até que o mesmo fique sobre uma reta.

US15A5: Compreende que quando realiza movimentos em E e F, A' e M' também se movem, mudando de lugar. Mas, sempre que se ajusta para que A' e M' ocupam as posições que são solução do problema, eles retornam para uma mesma posição, que é única.

US16A5: Buscando validar a percepção de uma invariância, realiza movimentos e atenta-se às implicações desses movimentos.

US17A5: Buscando validar uma conjectura, mede o comprimento de segmentos e realiza movimentos para verificar a percepção de que as medidas encontradas são invariantes e demarcam as posições que são soluções do problema.

US18A5: Após realizar movimentos buscando validar uma conjectura, chega à conclusão de que ela é verdadeira e, com isso, de que o problema tem solução única.

Quadro 12: Transcrição e Análise Ideográfica do desenvolvimento da Atividade 5

Fonte: O autor

✓ Atividade 6

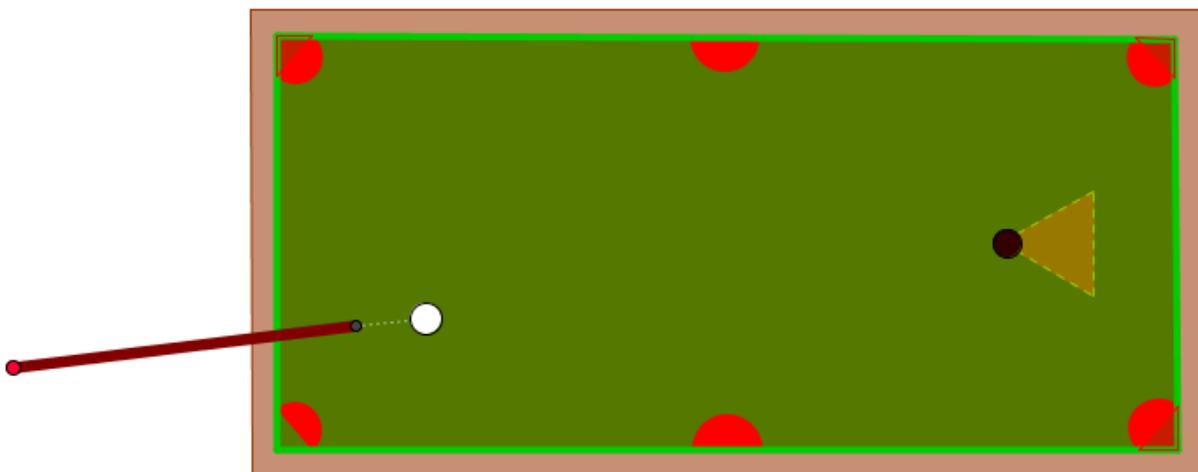
A Atividade 6 foi desenvolvida pelo Grupo 3, ainda no primeiro encontro. Foi a segunda atividade por eles desenvolvidas. Os Alunos D3 e H3 se ofereceram para mostrar como a resolveram. A Aluna D3 foi ao projetor expressar sobre o que o Alunos H3 realizava no *software* Geogebra.

Abaixo apresentamos o enunciado da Atividade 6 e, em seguida, trazemos o Quadro 13 que abarca a transcrição do relato dos sujeitos sobre o desenvolvimento desta atividade.

ATIVIDADE 6 – DESAFIO NA SINUCA

Em um desafio na sinuca, Germano deve dar uma tacada na bola branca, que por sua vez deve tocar a bola preta e a encaçapar. A bola preta está fixa. A bola branca deve ser movida, posicionada em um local da mesa que permita a Germano, quando acertá-la com o taco, encaçapar a bola preta (podendo ser em qualquer dos buracos), sendo que a bola branca deva tocar em 3 tabelas (bordas) da mesa antes de tocar a bola preta. Determine uma posição para a bola branca e a direção do taco para que a situação acima se concretize.

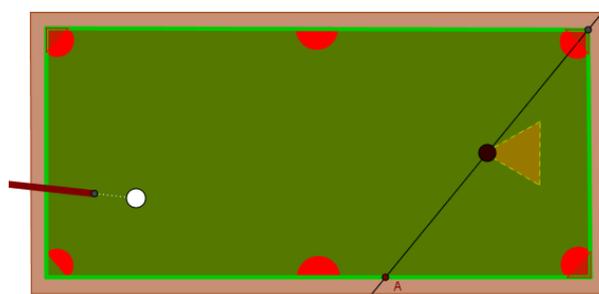
Tendo Germano conseguido realizar o desafio, considere agora que a bola preta foi movida para o ponto médio de um dos lados do triângulo (podendo ser qualquer lado). Para que Germano consiga encaçapar a bola preta no mesmo buraco em que a encaçapou anteriormente (estando ela em uma nova posição), determine a posição da bola branca e do taco nessa nova situação para que germano encaçape a bola preta de forma que a bola branca, antes de tocá-la, toque em duas das bordas da mesa.



Transcrição: Atividade 6

Aluna D3: Ficamos um bom tempo tentando fazer o caminho da bola branca até a bola preta. (1) Até que percebemos que o melhor seria começar do final, como se a bola preta já estivesse na caçapa, daí ela vai voltando. Então, fazendo isso, começando do final, escolhemos a caçapa, foi essa aqui (2) [aponta para a caçapa do canto superior direito]. Traçamos uma reta que passa pela caçapa e pela bola preta.

Aluno H3: Feito. [Indaga após selecionar a ferramenta *Reta* e clicar sobre a bola preta e o vértice da caçapa escolhida]. Marco agora a interseção da reta com este lado, (se refere ao lado inferior da mesa), vou renomear para A [seleciona a ferramenta *Interseção entre Dois Objetos* e clica no encontro entre o lado inferior da mesa e a reta traçada. Com o botão direito do *mouse*, clica sobre o ponto criado, seleciona a opção *Renomear* e chama-o de A]

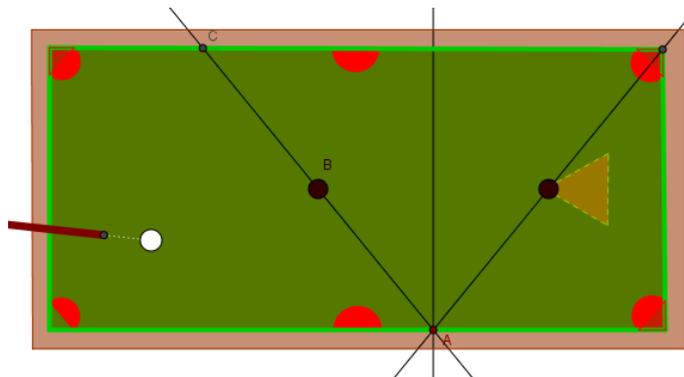


Aluna D3: Esse foi nosso raciocínio, a bola branca vai bater a terceira vez neste ponto aqui (refere-se ao ponto A). Resta agora determinar onde ela vai bater as outras duas vezes. (3) Nós pensamos aqui na reflexão, lááá da física, a bola bate no lado como um ângulo de incidência, é isso né? Igual ao ângulo de reflexão.

Aluno H3: Pra isso fizemos uma reta perpendicular a este lado (refere-se ao lado maior inferior) passando por A [seleciona a ferramenta *Reta Perpendicular*, clica sobre o segmento que contém o ponto A e depois sobre este mesmo ponto]. Depois (4) fizemos a reflexão da bola preta em relação a essa reta (refere-se a reta perpendicular), achamos o ponto que vou chamar de B, e traçamos uma reta por A e B [Seleciona a ferramenta *Reflexão em Relação a Uma Reta*, clica sobre a bola preta e em seguida sobre a reta perpendicular, O ponto gerado, ele renomeia como B. Em seguida, ele traça a reta AB]

Aluna D3: Isso. Mas nem deixa eu falar em (risos). Agora sabemos que a bola branca bate a segunda vez nesse ponto aqui (5) [sobre a projeção, aponta para a interseção da reta AB com o lado superior da sinuca], marque aí Aluno H3, o ponto de interseção.

Aluno H3: Ok, vou chamar de C tá. [Marca a interseção da nova reta com o lado superior da mesa e o renomeia como C]

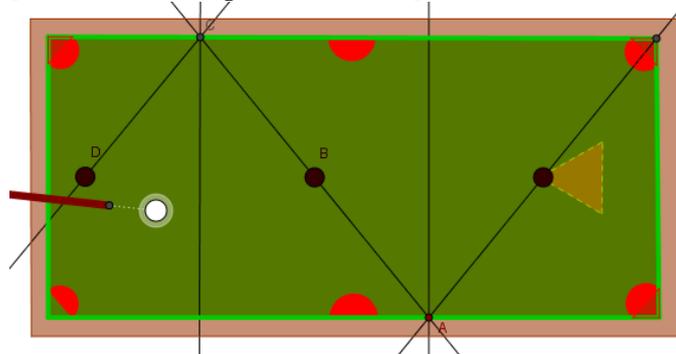


Aluna D3: Depois, a gente fez a mesma coisa, traçamos uma perpendicular por C e fizemos a reflexão de B.

Aluno H3: [seleciona a ferramenta *Reta Perpendicular*, clica sobre o lado superior da mesa de bilhar e, em seguida, sobre o ponto C. Depois, após selecionar a ferramenta *Reflexão em Relação a Uma Reta*, clica sobre o ponto B e sobre a reta perpendicular que passa por C]. Vou chamar ele de D [clica sobre o ponto gerado e o renomeia como D].

Aluna D3: Já traça a reta (solicita ao Aluno H3 que trace a reta CD)

Aluno H3: Beleza [faz o solicitado pela Aluna D3]

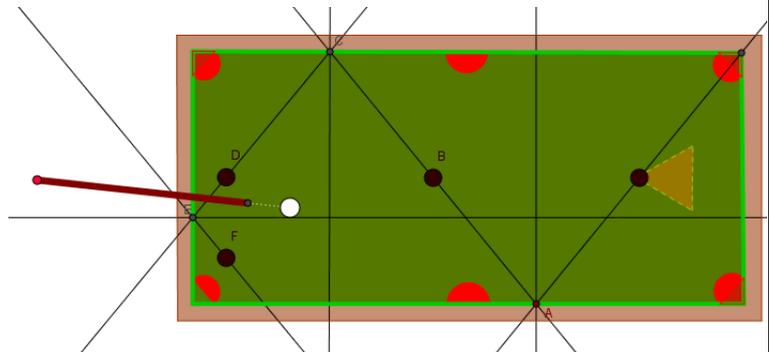


Aluna D3: Agora pronto, achamos o primeiro lugar onde a bola branca vai bater, aqui (6) [coloca o indicador da mão direita sobre o encontro da reta CD com o lado esquerdo da mesa].

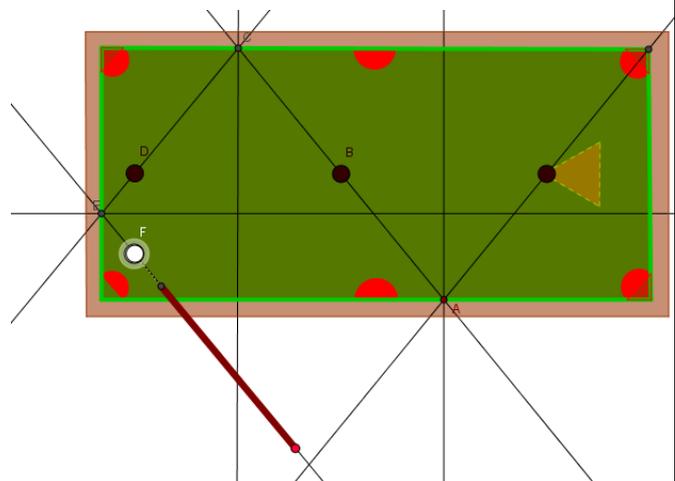
Aluno H3: Vou chamar de E [cria o ponto de interseção e o renomeia como E].

Aluna D3: Depois, encontramos a reta em que vamos posicionar a bola e o taco. Fizemos o mesmo processo; passamos uma perpendicular a este lado (lado esquerdo da mesa) passando pelo ponto E e depois fizemos a reflexão de D (reflexão com relação à perpendicular traçada).

Aluno H3: Aqui ó. Beleza [seleciona a ferramenta *Reta Perpendicular* e clica no lado esquerdo da mesa e, em seguida, sobre o ponto E. Depois, ao selecionar a ferramenta *Reflexão em Relação a Uma Reta*, clica sobre D e, depois, sobre a reta que passa por E]

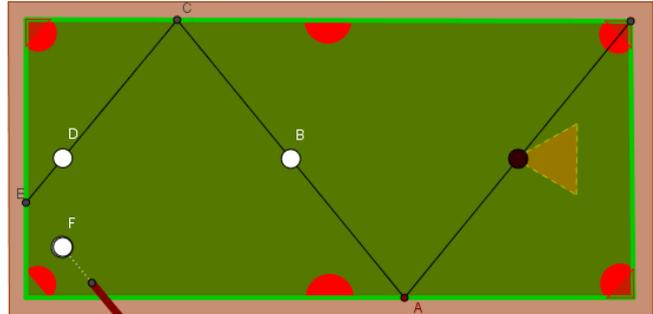


Aluno H3: Chamando esse ponto de F (a reflexão de D) [clica sobre o ponto com o botão direito do *mouse*, seleciona a opção renomear e o chama de F], (7) podemos colocar a bola branca sobre F e posicionar o taco sobre a reta. Primeiro movemos a bola até sobrepor F e rotacionamos o taco pra ele ficar em cima da reta (8) [clica sobre a bola branca com o botão esquerdo do *mouse* e, sem soltar o botão, move o *mouse*, arrastando com isso a bola. Depois, faz o mesmo com o ponto que está na extremidade superior do taco]



Aluna D3: Isso aí olha só, (9) se der uma tacada nessa posição e nessa direção, a bola branca vai bater em E, depois em C, depois em A até chegar na bola preta (10) [**com o dedo indicador da mão direita aponta para cada ponto**], aí, a bola preta vai rolar, rolar e rolar até cair na caçapa. Só não pode a branca cair junto (risos).

Aluno H3: Fica melhor para ver assim ó, [indaga após criar segmentos ligando as interseções construídas, ocultar as retas e pintar as bolas B e D de branco. Para mudar a cor das bolas, ele clicou sobre elas com o botão direito do mouse, selecionou a opção *Propriedades* e escolheu a cor branca]



Pesquisador: Isso aí, muito bom! Pergunta, a bola branca só pode estar sobre o ponto F?

Aluna D3: Não, não, ela pode estar sobre qualquer lugar nesta reta (11) [**desliza o dedo indicador sobre a reta EF**] claro que só dentro da mesa (risos)

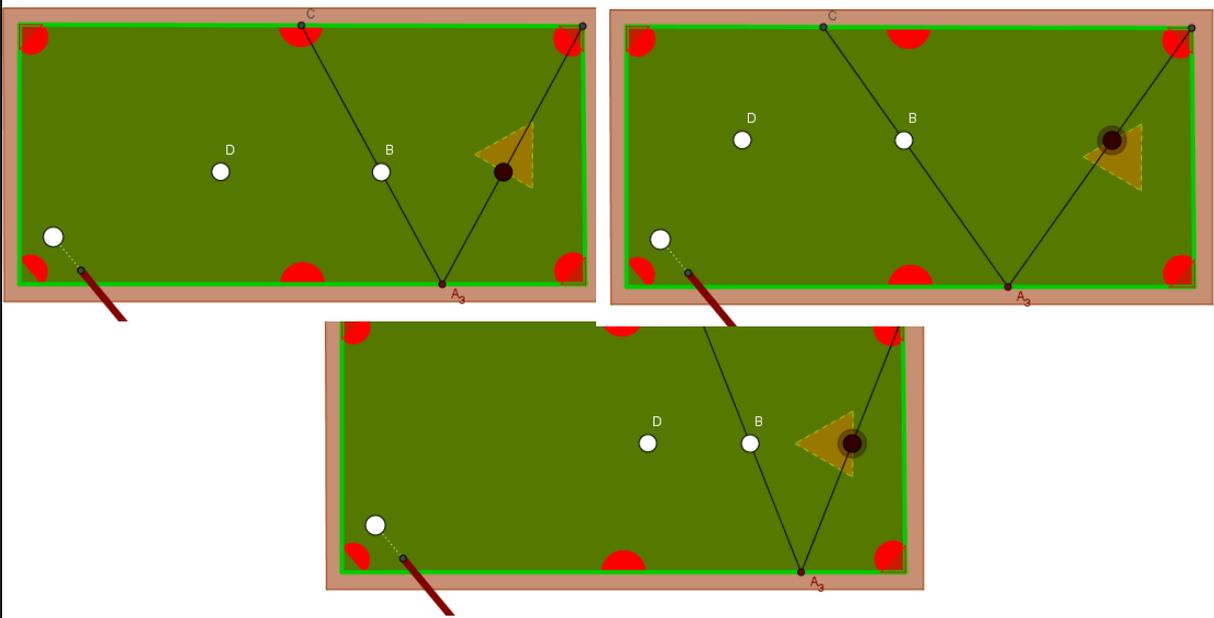
Pesquisador: Ótimo! Beleza. E a segunda parte do problema.

Aluna D3: Ah sim, não acabamos ainda. A outra parte é mais fácil. (12) **O Geogebra permite mover a bola preta.** Aí movemos ela pra colocar no ponto médio do triângulo.

Pesquisador: Não pensaram em mudá-la de posição e recomeçar as construções?

Aluno H3: A gente ia fazer isso, estávamos até com uma preguicinha (risos), mas (13) **quando movemos a bola preta, vimos que tudo que fizemos se manteve.**

Aluno H3: (14) [**Clica sobre a bola preta e a movimenta, posicionando-a no ponto médio de cada lado do triângulo**]



Aluna D3: Olha aí, (15) não precisamos traçar as perpendiculares e fazer as reflexões. Por mais que movíamos a bola, isso (as perpendiculares e reflexões) ficava lá ainda.

Pesquisador: Observou muito bem!

Aluno C3: Mas, o ponto E e a reta que passava por ele sumiu. Por que?

Pesquisador: Nossa, leu meus pensamentos. E então gente, eu faço a mesma pergunta.

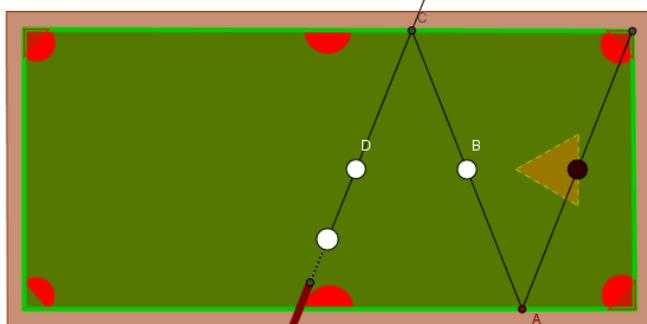
Aluna D3: Não sei. (16) Com esse movimento aqui deu pra ter a resposta, (17) é só colocar o taco em cima da reta que passa por C e D. Aí nem ligamos pro ponto E.

Aluna D3: Também não sei por qual motivo ele sumiu.

Aluna D3: Ele tem que sumir mesmo! É por causa de como ele foi colocado. Ele foi colocado como um ponto de interseção, aí, como a reta CD não passa mais nesse lado [aponta para o lado esquerdo da mesa] então não tem interseção com esse lado, entenderam? Por não ter a interseção o ponto de interseção também não vai aparecer.

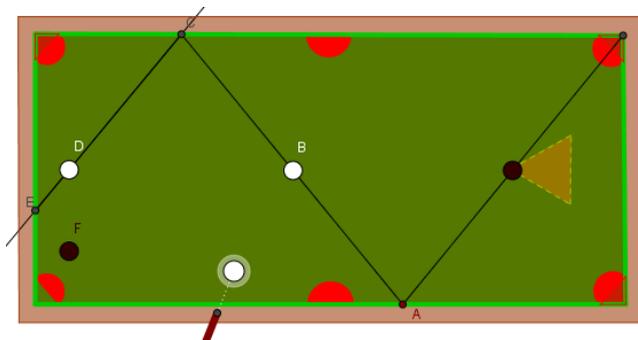
Pesquisador: É isso aí, muito bem, não consigo nem melhorar o que você diz. Ótimo! Bom, sanada essa dúvida, podem continuar (se dirigindo aos alunos D3 e H3)

Aluno H3: Aqui acabamos, vou só passar a reta CD, isso, pronto [seleciona a ferramenta *Reta* e clica sobre os pontos C e D respectivamente], (18) agora coloco a bola branca e o taco sobra a reta, pronto, é isso! (19) [Conclui após arrastar a bola branca até a reta e depois rotacionar o cabo do taco de forma a posicioná-lo sobre a reta CD]. (20) A bola vai bater em C e A, uma, duas [agita o cursor sobre o ponto C e depois sobre o ponto A]



Aluna A3: Gostei do jeito que vocês fizeram as reflexões, mas eu fiz diferente. Lembrei de um exercício de reflexão que fizemos em sala, lembra? Volta aí a bola preta para a ponto do triângulo (solicita ao Aluno H3).

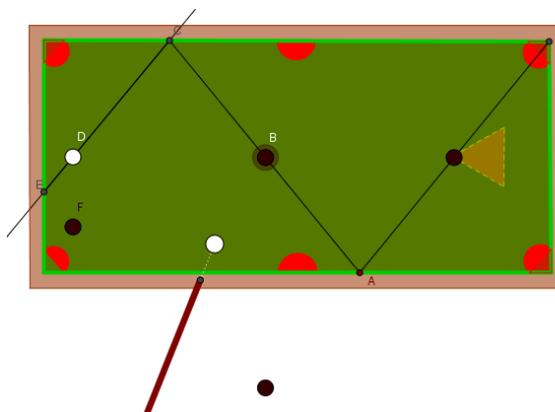
Aluno H3: Beleza, feito!



Aluna A3: Eu fiz a reflexão da bola preta em relação a A, e depois a reflexão deste ponto refletido em relação a esse lado da mesa (21) [aponta para o lado inferior da mesa, o que contém A]. Faz aí pra ver (solicita ao Aluno H3).

Aluno H3: Beleza [seleciona a ferramenta *Reflexão em Relação a um Ponto*, clica sobre a bola preta e, em seguida, sobre A, gerando um ponto preto diametralmente oposto a A.

Depois, após selecionar a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, clicou sobre este ponto e em seguida sobre o lado inferior da mesa]. Olha só! Ficou certinho sobre B.



Pesquisador: Muito bem Aluna A3! Na verdade, vou confessar (risos), eu imaginava que vocês, por estarem estudando as Transformações Geométricas, fariam as reflexões assim. Mas foi ótimo como vocês pensaram também (se direcionando aos alunos D3 e H3). Por isso é bom deixar vocês livres, no final, sempre saem coisas interessantes, que as vezes a gente não imagina. Mas, é isso, ótimo, ótimo, ótimo, gostei muito.

O sentido do dito – Unidades Significativas

US1A6: Compreende que a melhor maneira de pensar o percurso do movimento de um ponto, seria considerar sua posição final e ir voltando até a primeira posição por ele ocupada.

US2A6: Na projeção, aponta uma região para a qual chama a atenção dos sujeitos.

US3A6: Vale-se de conhecimento escolar para realizar o movimento de reflexão de um ponto.

US4A6: Realiza reflexão de um ponto com relação a uma reta.

US5A6: Indica na projeção o local onde seria criado o ponto de interseção de dois objetos.

US6A6: Posiciona o dedo na projeção, no local onde seria criado um ponto.

US7A6: Realiza os movimentos de arrastar e de rotacionar visando sobrepor um ponto a outro ponto e posicionar um segmento sobre uma reta.

US8A6: Realiza movimentos no *mouse* para mover pontos dispostos na interface.

US9A6: Após realizar construções fixando a propriedade de reflexão de pontos, destaca o percurso a ser realizado por um ponto quando ele for posto em movimento no *software*.

US10A6: Aponta para a projeção indicando cada ponto sobre os quais está falando.

US11A6: Evidencia um segmento deslizando o dedo sobre ele, de uma extremidade a outra.

US12A6: Sabendo que no Geogebra um ponto pode ser movido, ele realiza movimentos nesse ponto direcionando-o às posições especificadas no enunciado da atividade.

US13A6: Compreende que mesmo após o movimento de um ponto, tudo que foi feito, e que a ele está ligado, se preserva, não varia com esse movimento.

US14A6: Move um ponto até que o mesmo ocupe um lugar previamente determinado.

US15A6: Afirma não ser preciso refazer a construção, visto que quando ela é movida, as propriedades fixadas se preservam.

US16A6: Afirma que de um movimento realizado emerge a solução do problema.

US17A6: Antecipa um movimento a ser realizado visando arrastar um segmento até que ele fique sobre uma reta construída.

US18A6: Realiza um movimento anteriormente pensado e expresso oralmente.

US19A6: Conclui como resolvido o problema após posicionar um segmento (taco) sobre a reta que demarca a direção da tacada.

US20A6: Diz do percurso da bola ao mesmo tempo em que, com o cursor do *mouse*, mostra na tela computacional como se materializaria este percurso após a tacada.

US21A6: Diz de um segmento construído e aponta para o mesmo na projeção.

Quadro 13: Transcrição e Análise Ideográfica do desenvolvimento da Atividade 6

Fonte: O autor

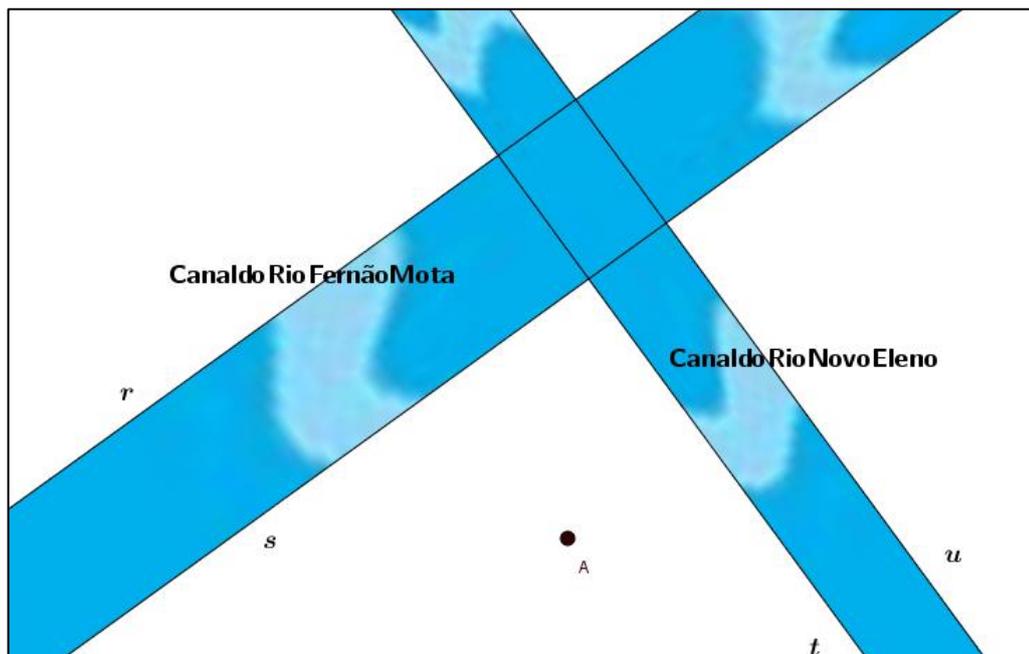
✓ **Atividade 7**

A Atividade 7 foi proposta ao Grupo 1, no segundo encontro com o mesmo. O Aluno II se dispôs a compartilhar com o grupo sua resolução. Segue abaixo o enunciado da atividade, seguido do Quadro 14, no qual transcrevemos a apresentação desse aluno.

ATIVIDADE 7 – CONSTRUÇÃO DE CICLOVIA

A prefeitura projeta a construção de uma ciclovia que permita, em dois dos trechos, o tráfego de ciclistas sobre os canais dos rios Fernão Mota e Novo Heleno. A ponte sobre o canal do Rio Fernão Mota será posta sobre os pilares B e C, respectivamente posicionados sobre os lados r e s do canal. A ponte sobre o canal do Rio Novo Heleno será posta sobre os pilares D e E, respectivamente posicionados sobre os lados t e u do referido canal. Os pilares B, C, D e E devem estar numa mesma reta, que também passará em A, por já existir nesse local uma fonte de água potável. Por uma questão estética, projeta-se que a distância BA seja a mesma que AE.

Determine as posições dos pilares B, C, D e E e o segmento BE que representa o deslocamento total a ser realizado por um ciclista que deseja atravessar os dois rios pela ciclovia.

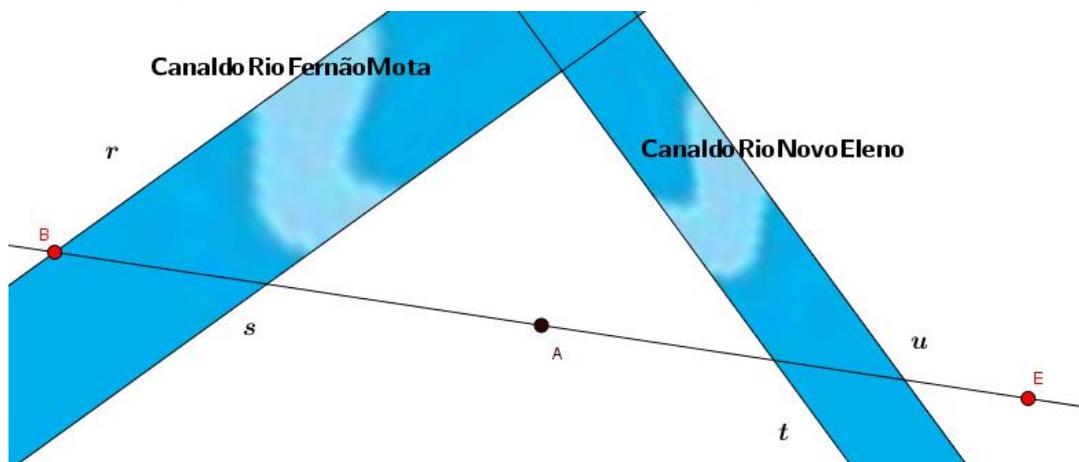


Transcrição: Atividade 7

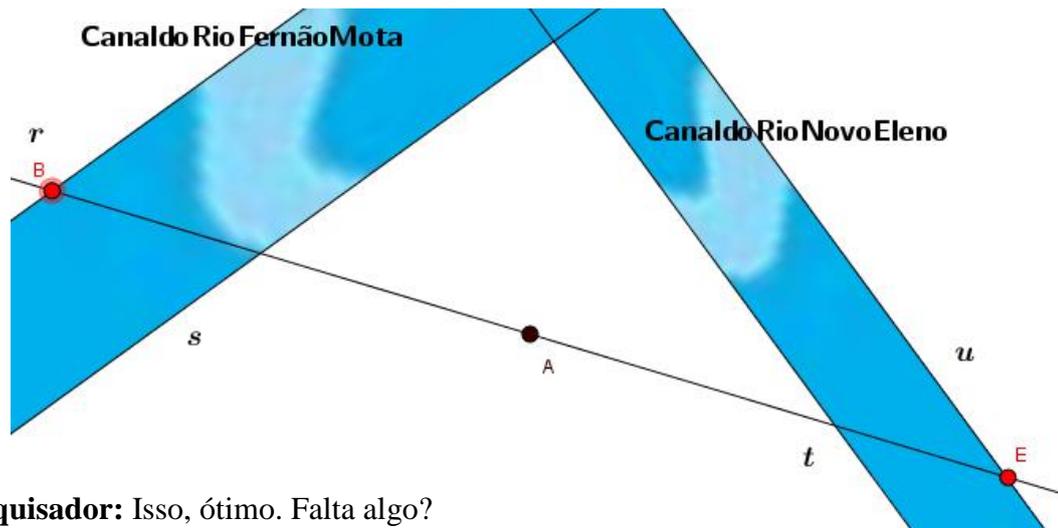
Aluno I1: Essa foi mais fácil que as outras. Foi rapidinha (risos).

Pesquisador: Beleza. Então vamos lá!

Aluno I1: Marquei primeiro a posição da primeira pilastra, a pilastra B [seleciona a ferramenta *Ponto* e clica sobre a reta r]. Vou renomear [clica com o botão direito do *mouse* sobre o ponto criado, seleciona a opção *Renomear* e o determina como B]. Como fala que as pilastras são alinhadas, imediatamente eu pensei em passar uma reta por A e B [seleciona a ferramenta *Reta* e clica sobre os pontos B e A, respectivamente]. Agora, a gente tem que ser igual a AE. Pra isso, A tem que ser ponto médio (do segmento AE). Então, posso fazer a reflexão de B em relação a A, acho aqui o B' [seleciona a ferramenta *Reflexão em Relação a um Ponto*, clica sobre B seguido de A, gerando com isso o ponto B', diametralmente oposto a B]. B' vou chamar de E [renomeia o ponto B' chamando-o de E]

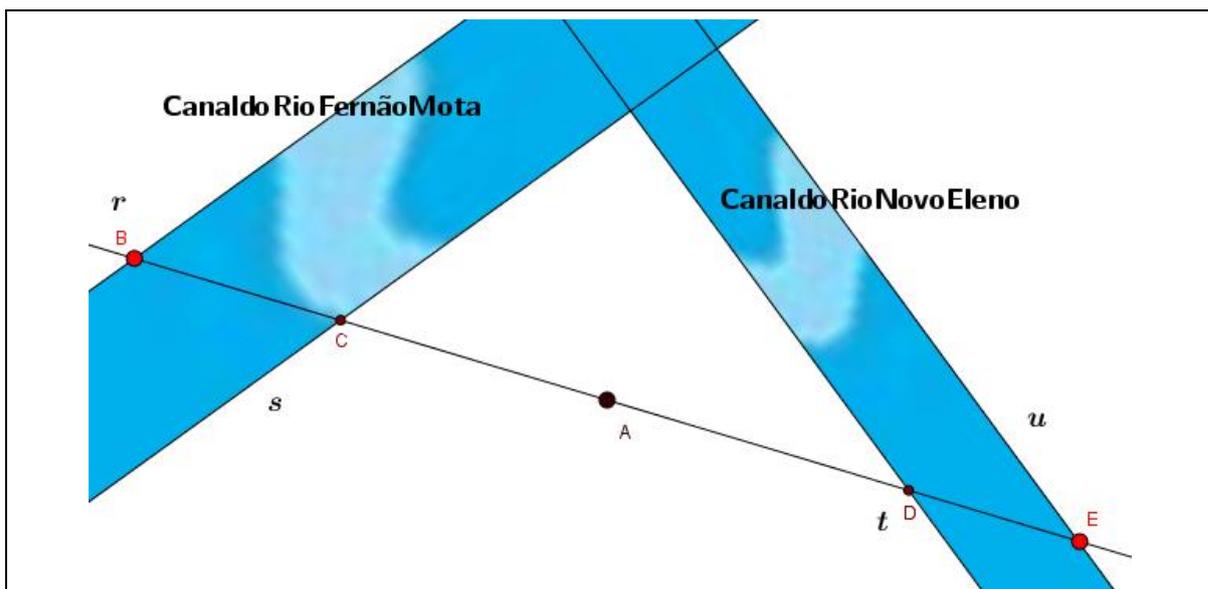


Aluno I1: (1) Como a pilastra E deve estar sobre a reta u , eu só movi B até E ficar sobre u , e pronto! (2) [clica com o botão esquerdo do *mouse* sobre o ponto B e, sem soltar o botão, arrastar o *mouse*, movendo com isso o ponto B até que E estivesse sobre a reta u]



Pesquisador: Isso, ótimo. Falta algo?

Aluno I1: Falta sim, estava esquecendo. É só colocar as outras pilastras, que são na verdade a interseção da reta (por onde passa a ciclovia) com as retas s e t . Aí, é só renomear de C e D [seleciona a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e clica sobre o encontro entre a reta que contém A e a reta s , depois, sobre o encontro desta reta que contém A com a reta t . Em seguida, renomeia os pontos gerados como C e D]



Pesquisador: Muito bem, é isso mesmo. Vocês conseguem identificar alguns conceitos trabalhados nesta atividade?

Aluno I1: Eu vi que tem o conceito de ponto médio que dá pra trabalhar junto com a reflexão.

Aluna A1: Se vemos bem, tem o conceito de retângulo. (3) A solução do problema é a diagonal de um retângulo. Com o movimento foi aparecendo a reta, depois, essa reta, com mais movimento foi ficando evidente era sempre diagonal de um retângulo. O invariante que aparece no movimento é essa coisa dela ser sempre diagonal do retângulo.

Aluna J1: Parece mesmo. Mas pra ser, aquele ângulo entre os rios tem que ser de 90° (4) [ergue o braço direito e com o dedo indicador aponta para o ângulo que aparentemente é reto]

Pesquisador: Que retângulo seria esse?

Aluna A1: Os vértices opostos são B e E. É só traçar uma paralela a reta u passando por B e uma paralela a reta r passando por E.

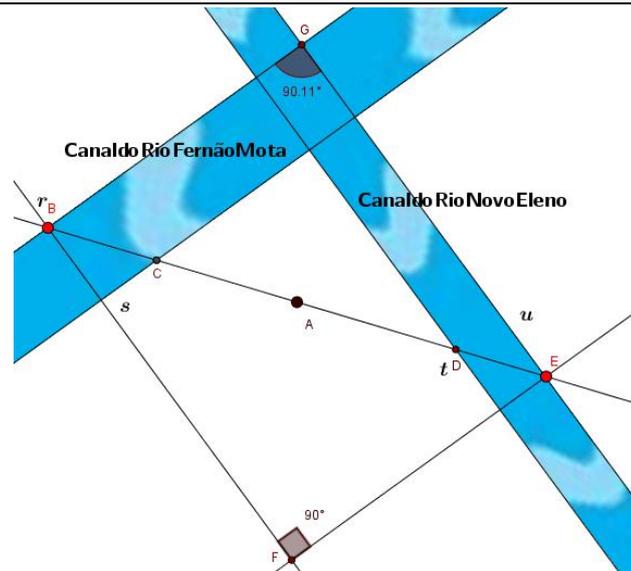
Aluno I1: Pronto, já fiz [indaga após selecionar a ferramenta *Reta Paralela*, clicar sobre a reta u e, em seguida, sobre o ponto B, gerando com isso uma reta paralela a reta u . Depois, clica sobre a reta r e sobre o ponto E, gerando uma reta paralela a r]. Os outros vértices são as interseções, aqui e aqui, beleza? [Seleciona a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e clica no encontro entre as retas recém traçadas e, em seguida, no encontro entre as retas r e u]. Vou chamar de F e G [renomeias os dois pontos de interseção gerados]

Aluna A1: O retângulo é BGEF.

Pesquisador: Ok. Mas, vocês têm certeza que é retângulo? O aluno J1 havia colocado uma condição.

Aluna J1: É, o ângulo entre os rios deve ser perpendicular.

Aluno I1: Sem problema, então é só medir o ângulo BGE. Nossa, deu $90,11^\circ$, não são perpendiculares [afirma após selecionar a ferramenta *Ângulo* e clicar sobre os pontos B, G e E, respectivamente]. Mas tinha que ser, olha, o ângulo EFB é reto [conclui após medir também o ângulo oposto ao ângulo BGE].



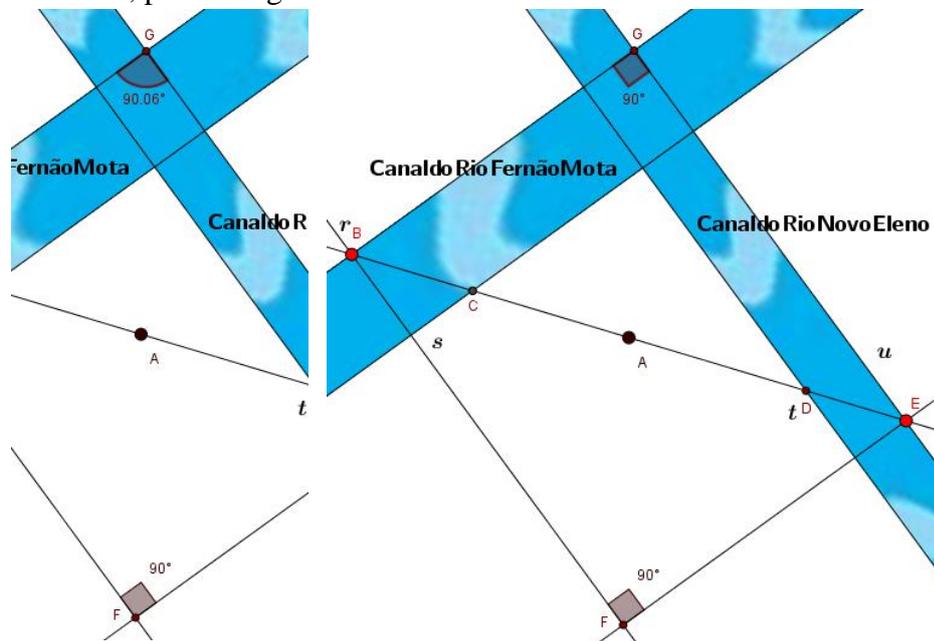
Pesquisador: É, se o ângulo EFB é reto, o BGE também tinha que ser. Alguém sabe dizer porque está havendo essa diferença?

Aluna J1: Não sei, acho que tem coisa errada aqui, ou o *software* está calculando errado.

Aluno C1: Acho que é porque o ponto E não está exatamente em cima da reta u . Como o cálculo do ângulo BGE envolve o ponto E, se ele estiver fora de u , não vai dar 90 mesmo.

Aluno I1: Do jeito que está aqui, está errado (pausa). (5) Aí, pronto, agora sim está certo! [Conclui após mover o ponto B, ajustando E sobre a reta u , de forma que o ângulo entre r e u ficasse com amplitude 90°]

Pesquisador: Beleza, perfeito agora!



O sentido do dito – Unidades Significativas

US1A7: Sabendo da posição que um ponto deve ocupar, ele realiza movimentos intencionando levar esse ponto à posição previamente conhecida.

US2A7: Move o ponto B e com isso faz com que se mova o ponto E. Intenciona com esse movimento posicionar o ponto E sobre uma reta dada.

US3A7: Compreende que a solução do problema é uma reta que é diagonal de um retângulo. Ao fazer com que essa reta se mova, conclui que ela sempre será a diagonal de um retângulo.

US4A7: Diz de uma região angular e aponta para ela na projeção, intencionando que os sujeitos se voltem a ela.

US5A7: Realiza um movimento buscando ajustar uma construção e validar uma conjectura.

Quadro 14: Transcrição e Análise Ideográfica do desenvolvimento da Atividade 7

Fonte: O autor

✓ Atividade 8

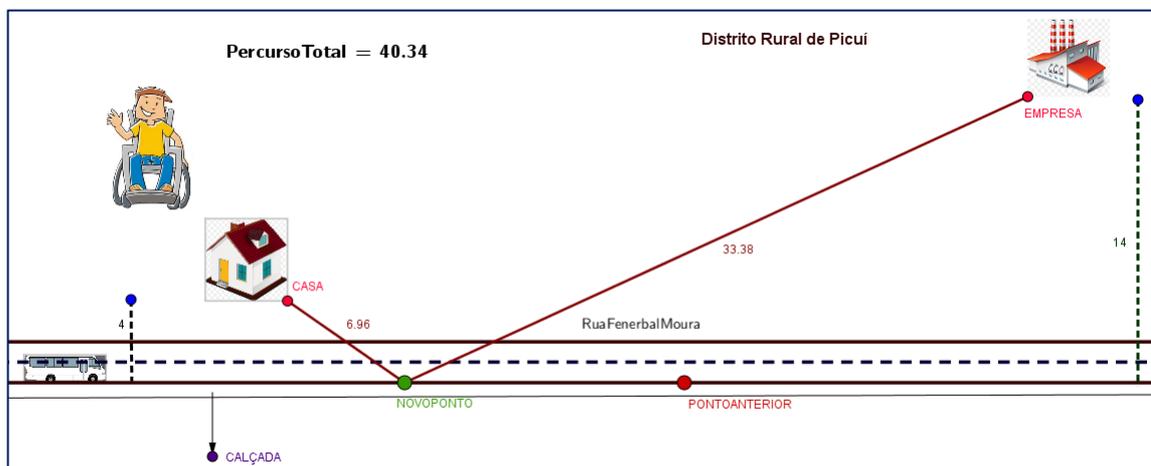
A Atividade 8 foi desenvolvida pelo GRUPO 2 em seu último encontro. Novamente dois sujeitos, os alunos F2 e L2, pediram para apresentar o modo pelo qual eles deram conta e resolveram o problema. O Aluno F2 ficou responsável por expor junto à projeção o que o Aluno L2 delinearía junto ao *software* Geogebra.

Abaixo destacamos o enunciado do problema e, logo após, trazemos o Quadro 15, que expõe a transcrição da apresentação desses alunos e do dito pelos outros alunos que assistiam.

ATIVIDADE 8 – O PROBLEMA DE LOCOMOÇÃO DE CAIO

Após sofrer um acidente, Caio teve uma lesão muscular que lhe deixará provisoriamente em uma cadeira de rodas. A situação motora de Caio tornou-se grande problema para suas ações diárias, dentre as quais a ida ao trabalho. A empresa que Caio trabalha oferta o transporte a seus funcionários, no entanto, o ônibus não passa perto de sua casa. Na região central da cidade em que mora Caio, o ônibus passa em um ponto pré-determinados, de fácil acesso à maioria dos funcionários que residem nas proximidades, dentre os quais há outro cadeirante. Fernando, um dos gerentes da empresa, sabendo da situação de Caio, resolveu ajudar. Ele pensou em mudar o ponto em que o ônibus passava, de forma a tornar menor o percurso de Caio, mas sem prejudicar tanto os demais, especialmente o outro cadeirante que reside próximo ao ponto atual. Após essa iniciativa, Fernando observou que o percurso entre a casa de Caio e a empresa, passando pelo novo ponto de ônibus, é o menor percurso possível para esse trajeto. Sabendo disso, determine o local onde o ponto de ônibus foi instalado e a distância total percorrida por Caio até ele.

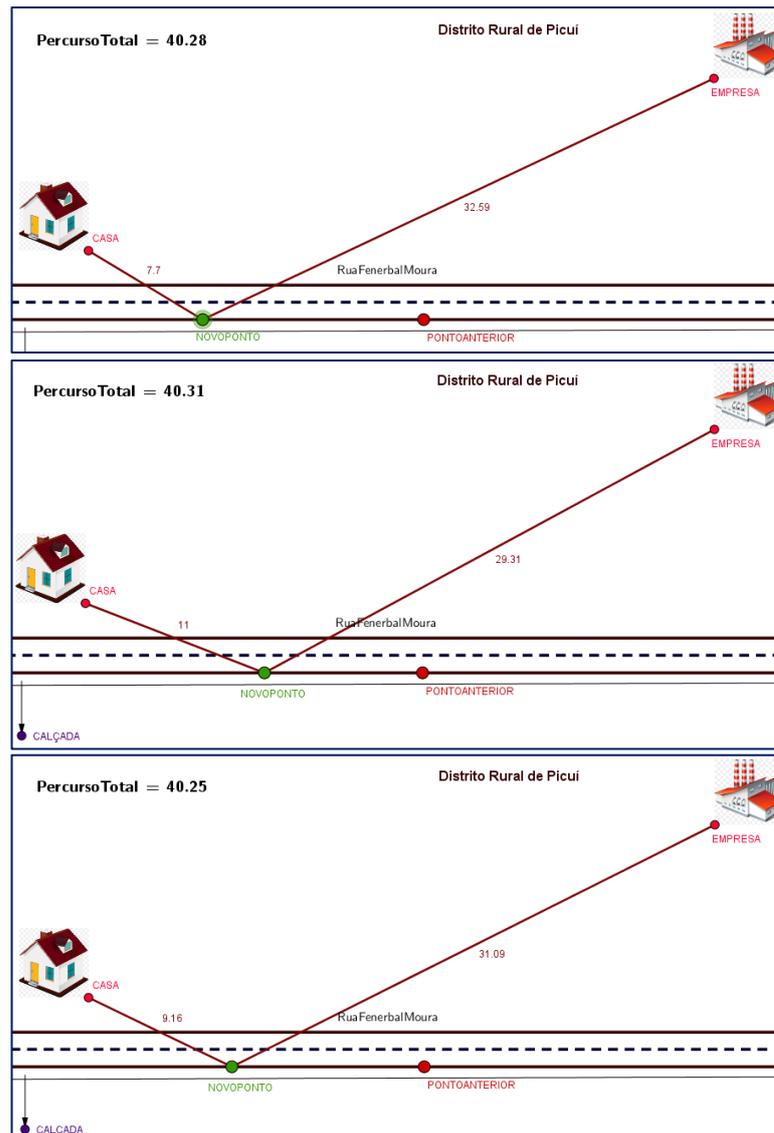
Obs.: Foi posto um ponto de ônibus móvel para que se possa fazer simulações. Tem-se também, o trajeto do ônibus ao passar por esse ponto. As medidas apresentadas estão em hectômetros (hm).



Transcrição – Atividade 8

Aluna F2: (1) Primeiro, movemos o novo ponto aqui, e vemos que o percurso total ia se modificando. (2) Fizemos vários testes até chegarmos em 40,25, que é aparentemente a menor distância. (3) O movimento pra direita ou pra esquerda de 40,25 faz aumentar a medida.

Aluno L2: (4) [Com o botão esquerdo do *mouse* clica sobre o ponto *NOVO PONTO* e o arrasta para a direita e para a esquerda até constatar que o menor dos valores que aparecem no *Percurso Total* é 40,25]

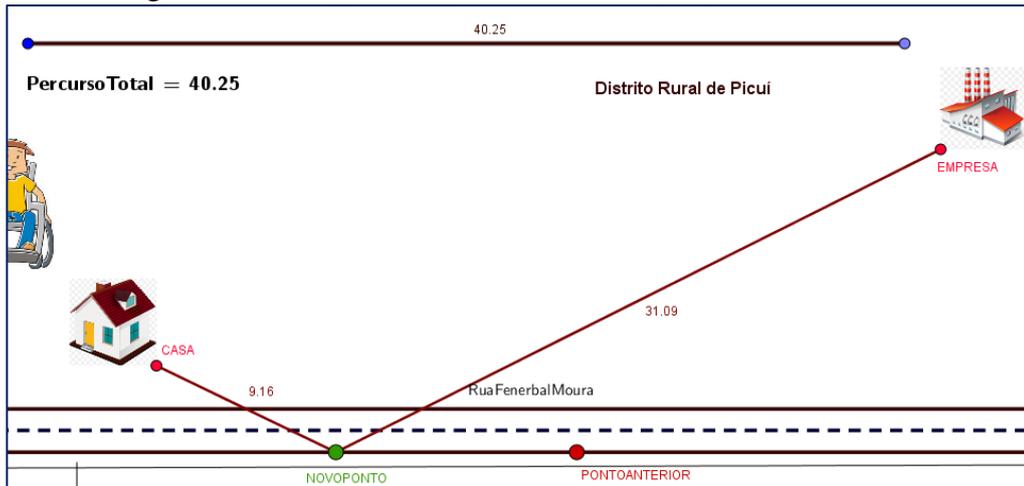


Aluna F2: Mas, percebemos nos outros exercícios que (5) não é só mover e achar que está certo e pronto, pode estar errado. Então, discutimos como validar isso. Lendo novamente o problema encontramos a palavra-chave, menor distância. Se é menor distância entre dois lugares, tem que ser uma reta né? Isso a gente tem lá da Matemática

Aluno L2: Só que no caso aqui, não é uma reta, pois não tem uma reta aqui, da casa para a empresa (6) [mostra com o cursor o que seria um caminho linear da casa até a empresa, sem passar pelo novo ponto de ônibus], ele tem que passar no ponto de ônibus, então são dois segmentos (CASANOVO PONTO, NOVO PONTOEMPRESA).

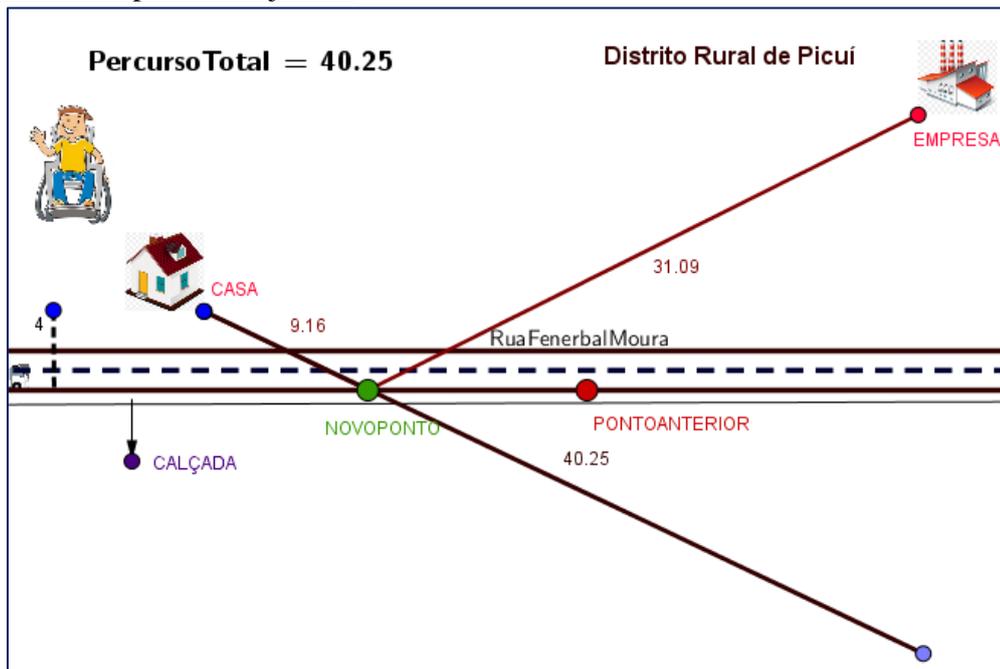
Aluna F2: Exatamente. Aí chegamos à conclusão de que a soma desses dois segmentos tem que dar o tamanho de uma reta que é a solução. Como o Aluno L2 conhece mais de Geogebra, ele criou uma reta (se refere a um segmento) com a medida igual à soma dos dois segmentos.

Aluno L2: É isso. O que que eu fiz? Primeiro, vi que esses dois segmentos (CASANOVO PONTO, NOVO PONTOEMPRESA) são j e k [acessa essa informação na janela algébrica do *software*]. Depois, vou aqui em *Segmento com comprimento fixo* e, na medida (se refere à janela que aparece solicitando a medida), coloco $j+k$, e pronto, aparece o segmento com a medida total. Vou calcular [clica sobre a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clica sobre o segmento criado], olha aí, mesma medida, 40,25.



Aluna F2: Agora, pensamos como se a reta tivesse saindo da casa e passando pelo ponto. Faz aí (solicita ao Aluno L2).

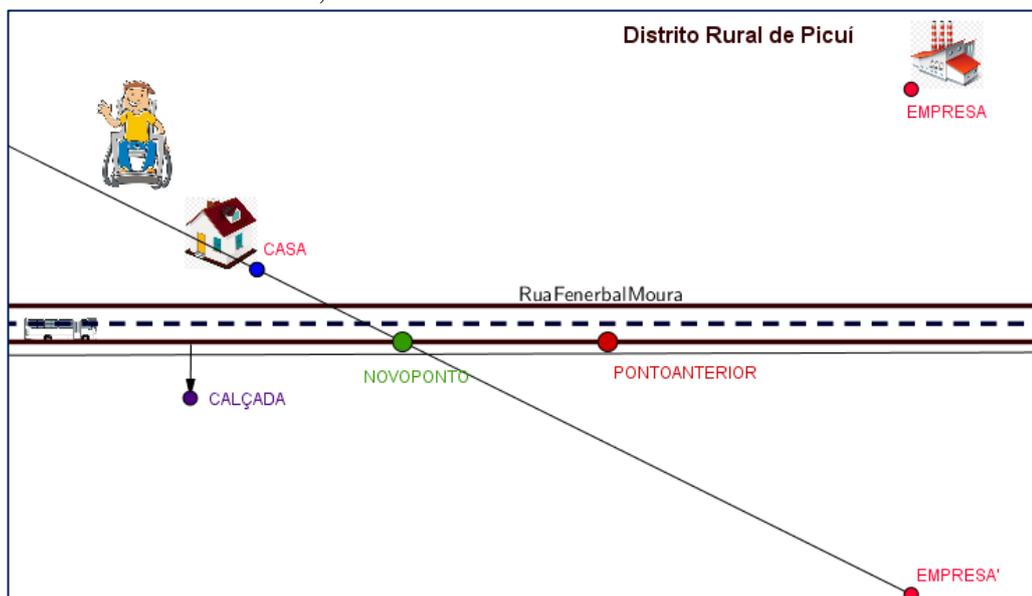
Aluno L2: (7) Nós colocamos esse ponto sobre o pontinho aqui da casa [move a extremidade esquerda do segmento até sobrepô-lo ao ponto CASA] (8) o outro ponto, a gente rotaciona até o segmento passar pelo ponto de ônibus [clica sobre a outra extremidade do segmento e a arrasta até completar o objetivo]



Aluna F2: Tá vendo? (9) Se a gente dobra esse lado, esse ponto dá certinho encima da empresa (10) [sobre a tela de projeção, posiciona o dedo indicador da mão esquerda sobre o

é onde deve colocar o ponto de ônibus (ao deletar os segmentos, o ponto EMPRESA' continuou presente na interface).

Aluna F2: Isso mesmo. Pronto, é isso.



Aluno L2: Respondendo a pergunta do problema, o Caio vai percorrer 9,16 hectômetros até o ponto de ônibus.

Pesquisador: Muito bom, isso aí. Então, o movimento ajudou nas percepções de vocês?

Aluno L2: Sim, (16) movimentar fez a gente ver mais ou menos as coisas, tipo, deu pra ter uma ideia intuitiva sabe. Aí, disso pudemos tentar validar essa ideia.

Aluna F2: Verdade, nunca em minha vida eu ia pensar de cara (de imediato) na reflexão, mas (17) o processo né? O movimento do ponto de ônibus, o movimento do segmento acabou que deixou muito evidente que a solução poderia ser com reflexão.

Pesquisador: Olhem, o modo como vocês chegaram a essa resposta foi surpreendente, gostei muito.

O sentido do dito – Unidades Significativas

US1A8: Afirma que ao realizar o movimento de um ponto, visualiza mudanças em um valor numérico exposto na interface do *software*.

US2A8: Se vale do movimento junto ao *mouse* para testar posições de um ponto visando encontrar uma menor medida para a soma de dois segmentos.

US3A8: Entende que movimentos que fazem deslocar-se um ponto para a direita ou para esquerda de uma determinada posição, faz o valor da soma de dois segmentos aumentar ou diminuir com relação ao resultado específico dado quando o ponto está na posição anterior aos movimentos.

US4A8: Move o *mouse*, e com isso move um ponto e segmentos ligados a ele, até encontrar uma medida que entende ser a menor possível para a soma de dois segmentos.

US5A8: Compreende que um resultado não se determina apenas com o movimento, ele deve ser validado de outra forma.

US6A8: Movendo o *mouse*, e com isso o cursor expresso na tela computacional, evidencia um percurso linear.

US7A8: Arrasta um ponto intencionando sobrepô-lo a outro ponto expresso na interface do *software*.

US8A8: Realiza um movimento de rotação, controlando-o de forma que o segmento rotacionado em torno de uma de suas extremidades, ocupe uma posição desejada.

US9A8: Diz de uma possibilidade de movimento, de uma dobra a ser realizada, que faria coincidir dois pontos.

US10A8: Posiciona seus dedos indicadores simultaneamente sobre dois pontos aos quais chama à atenção dos sujeitos.

US11A8: Para simular um movimento de rotação de um segmento, a partir da extremidade a ser rotacionada, ele desliza o dedo indicador da mão direita até o ponto que seria o fim da rotação, o ponto sobre o qual estava posicionado o dedo indicador da mão esquerda.

US12A8: Com os dedos indicadores, demarca o início e o fim de segmentos sobrepostos, evidenciando a igualdade de seus comprimentos.

US13A8: Ao dizer da igualdade de dois segmentos, desliza o dedo indicador da mão direita sobre cada um deles para evidenciar sobre quais segmentos está falando.

US14A8: Ao construir a reflexão de um ponto em relação a uma reta, mostra e diz ter confirmado que a reflexão do ponto sobrepõe outro ponto anteriormente projetado.

US15A8: Compreende que os movimentos realizados foram importantes para que percebesse a solução do problema, que seria dada por reflexão de um ponto com relação a uma reta.

US16A8: Afirma que o movimento fez emergir algumas intuições que puderam ser posteriormente testadas e validadas.

US17A8: Compreende que todo o processo de desenvolvimento da atividade, em especial a possibilidade de mover pontos e segmentos fez ficar evidente que a solução do problema poderia se dar por reflexão de um ponto com relação a uma reta.

Quadro 15: Transcrição e Análise Ideográfica do desenvolvimento da Atividade 8

Fonte: O autor

APÊNDICE 3

Transcrição e Análise Ideográfica das respostas dadas às perguntas 2, 3 e 4

Neste apêndice apresentamos os quadros 16, 17 e 18, nos quais constam as perguntas 2, 3 e 4, respectivamente, e as respostas dadas a elas.

PERGUNTA 2 - *Na vivência com as atividades que realizaram aqui nos encontros, vocês perceberam o movimento? Se sim, como se deu essa percepção?*

Aluna B1: Praticamente em tudo que fizemos. (1) Quando clicamos sobre os objetos os arrastamos, víamos o movimento acontecer, e não só deles, mas também de toda a construção que dependia deles. (2) Nas três atividades, o movimento ajudou a chegar nas soluções; foi movimentando a bola na Atividade 1 que vimos que aquele ponto não mudava de lugar. Na do basquete (refere-se à Atividade 4), a Aluna G1 falou bem, foi movendo o armador que conseguimos ver que dava pra fazer simetria pra resolver.

Aluno K1: No da passarela (Refere-se à Atividade 6) também; (3) movemos um ponto até o outro ficar em cima da reta do rio. (4) Nós vamos vendo o movimento que realizamos com o mouse ir simultaneamente acontecendo na tela, vamos percebendo o movimento. (5) Isso eu vi bem forte nas atividades, de a gente mover pra perceber algumas coisas importantes pra conseguir resolver os problemas.

Aluno F1: (6) É, o Geogebra permite a possibilidade de movimento. (7) Eu vi mais o movimento, na hora de testar as possibilidades. (8) Começávamos meio que às cegas, tentando pensar algo pra resolver, mas conseguimos sair do lugar quando a gente colocava a mão na massa, no mouse, pra melhor dizer. (9) Quando movimentamos ali, ia aparecendo algumas coisas que poderiam ser verdadeiras ou não, aí a gente continuava movendo pra ter certeza. (10) Com o movimento foi possível ver que algumas atividades poderiam ser feitas de forma direta, mas, se não tivéssemos movimentado, não íamos ver isso. (11) Então, movimentamos o tempo todo.

Aluna E1: Não sei se vocês enxergam como movimento também, mas, (12) as próprias construções que fizemos, antes mesmo de mover, pra mim também é um movimento, mas é mais um movimento de construir, de clicar sobre as ferramentas. (13) Quando traçamos paralelas, por exemplo, a gente clicava sobre uma reta lá, aparecia a reta paralela a ela e a gente, segurando o mouse, movia essa reta até o ponto que a gente queria que ela passasse. (14) O processo de construção também teve movimento.

Aluno L1: Você perguntou como percebemos o movimento. Acho que os momentos são esses mesmos que o pessoal falou, em todo o desenvolvimento das atividades. (15) Nós percebemos é ficando atentos ao que está acontecendo na tela do computador, é vendo com cuidado o que o movimento que estamos fazendo tá gerando ali. Foi assim que fomos vendo os invariantes, algumas possibilidades. (16) Foi ficando atentos que também vimos que quando a gente tentava validar uma possibilidade, ela poderia estar correta ou falsa, daí partíamos pra outras possibilidades.

----- ~~~ -----

Aluno C2: (17) Eu acho que o movimento está no software mesmo, é ele que permite executar os movimentos. (18) Se não tivesse a possibilidade de movimentar ali na tela, ela seria o mesmo que numa folha, o desenho seria estático. (19) A gente clica num ponto, move ele, aí podemos distorcer a figura toda, podemos ampliar, diminuir. (20) Isso tudo deixa um, um, ééé, um rastro de movimento que a gente vai vendo na medida que vamos movendo as figuras.

Aluna E2: Pensando aqui, (21) acho que eu percebi essa questão do movimento o tempo todo, até mesmo nos enunciados das atividades; o problema do Caio, na Atividade 8, é de locomoção, tínhamos que ver um melhor lugar pro ônibus. Na atividade da folha (Atividade 5), a gente tinha que pensar nela sendo dobrada. No da estação (Atividade 2) tem um cara velejando. (22) **Em** tudo tem isso de sair do lugar, isso fez com que nos colocássemos como sendo os personagens ali, como se a gente tivesse lá, movimentando.

Aluno O2: (23) A gente seria os pontos que moviam.

Aluna E2: Isso mesmo. No resto, (24) na hora de desenvolver as atividades, nós criávamos alguns objetos e movia eles pra ver se estavam no lugar certo, pra ver se ia dar pra gente alguma informação importante quando movimentamos. Tá vendo? Aí também tem movimento. (25) **É** a possibilidade de arrastar que carrega mais movimento, (26) a tela, a figura vai mudando e a gente vai vendo isso, a gente vai vendo o movimento ali.

Aluno L2: (27) **Eu** vi o movimento principalmente na hora de arrastar os objetos pra ver o que saía disso. (28) Na atividade do marinheiro (Atividade 2), foi movendo a boia que vimos o traçado lá, que é a região onde a estação poderia estar. (29) **No** exercício de dobrar o papel (Atividade 5), foi o movimento da reta que fez a gente conseguir sobrepor os pontos sobre os lados. (30) **No** exercício do Caio (Atividade 8), só deu pra ver que dava pra resolver por reflexão depois de que com o movimento, encontrarmos mais ou menos ali, a posição do ponto de ônibus. (31) **Então**, o movimento esteve presente pra ajudar a ver essas coisas, pra descobrir algumas possibilidades e depois testar também.

----- ~~~ -----

Aluno G3: (32) **Eu** percebi muito de movimento nas atividades 1 e 3, nelas a gente tinha que mover pontos pra conseguir perceber as soluções. (32) **O** movimento foi visível ali (na interface) quando movemos o ponto. No problema da mangueira, deu pra ver o triângulo ali (na interface), (34) a gente movia o ponto e o triangulo ia se modificando, foi aí que conseguimos ver que por mais que o triângulo mudava após nós movermos o ponto, as retas mantinham um padrão né? Elas eram sempre mediatrizes dos lados. (35) **A** terceira mediatriz, que não foi construída, era a reta solução do problema. Foi movendo e vendo o movimento, que vimos isso e conseguimos dar a resposta.

Aluno I3: Também vi assim, nessas duas atividades, (36) **construímos** todos os passos que a questão pedia, e foi no final que demos conta de que esses passos ficaram ligados por propriedades que fomos fixando, como perpendicular, a paralela, a reflexão e outras coisas. Mas, como pudemos ver essas relações? Foi através do movimento. (37) **É** aí que entra o movimento, quando pudemos arrastar os pontos e ver que tudo se encaixava. (38) **Daí** veio as ideias de solução dos problemas. A atividade da sinuca, na primeira parte foi só construção, mas na segunda, (39) **com** alguns movimentos conseguimos chegar à resposta, a de bater em duas tabelas. Nesse caso, a gente tinha a situação das três tabelas prontas, a gente usou propriedades pra fazer elas. (40) **Pra** chegar na situação das duas tabelas, bastou mover um ponto e as propriedades se preservaram, e a solução saiu desse movimento.

Aluno F3: Tem aquilo que eu disse também, sobre a comunicação, (41) **pra** tentar explicar pros parceiros o que estava pensando, foi mais fácil fazer os movimentos no Geogebra. (42) **O** movimento está também na comunicação, na troca de ideias. (43) **Eu** fiz movimentos tentando explicar minha ideia, aí o parceiro vê esse movimento e pode entender e contribuir com as ideias.

Aluna M3: (44) **Todas** as construções que fizemos nas atividades estavam sujeitas ao movimento. (45) **Tudo** ali a gente poderia arrastar e até pensar em arrastar, que que eu quero dizer, que por sabermos que podemos

arrastar, que o Geogebra permite isso, as vezes não arrastamos, mas pensamos em alguns movimentos, aí depois, fazemos eles com mais propriedades, sabe? De uma forma mais precisa, (46) **a atividade da mangueira** (Atividade 3) por exemplo, depois de ver que o ponto G se movimentava, a gente poderia querer ver com mais detalhes esse movimento e, antes de mover, a gente sabia que ele poderia ir pra esquerda ou pra direita, aí movemos pra esquerda e pra direita pra ver realmente o que acontece. (47) **Sabemos** as vezes do movimento com antecedência, isso também está dentro dessa percepção do movimento, saber que se move e poder pensar o movimento antes de fazer. Isso já é de alguma forma fazer algum movimento.

Aluna D3: Mas, quando conhecemos o Geogebra, a gente trabalhou muita atividade de construção, eu não via movimento nisso, era só construir, a mesma coisa que fazer com régua e compasso. Então, (48) **acho que a questão de ter movimento, ou não, tem muito a ver com as atividades, com a proposta do professor.** Essas que fizemos foram muito bacanas, (49) **nós trabalhamos com construção e com o movimento junto, tivemos que movimentar, e o que foi bacana é que junto com esses movimentos pudemos ver melhor as construções, entender o que fizemos.** Então, (50) **diferente** de só construir é estudar a construção. Essa possibilidade que tivemos de ver melhor as construções em movimento, foi muito interessante. Quando eu for dar aula de Geogebra vou fazer assim.

Aluno G3: Foi realmente muito bacana fazer essas atividades. Bom também pra gente que pensa em desenvolver atividades, já que estudamos pra ser professores. Também acho que (51) **se é pra ser no Geogebra, tem que explorar o dinamismo.** As três atividades que fizemos explorou muito, desde os enunciados que pedia alguns movimentos até os jeitos que tivemos que arranjar pra resolver os problemas. (52) **Movimentamos, e através dos movimentos que realizamos, percebemos lá (se refere à interface do software), os invariantes.** (53) **Foi** ao ver os invariantes ali, nos movimentos, que fizemos, que conseguimos as soluções. Gostei muito!

O sentido do dito – Unidades Significativas

US1P2: Afirma que quando clicou sobre um objeto e o arrastou, foi possível ver esse movimento acontecendo na interface do *software*, bem como o movimento que esse ato de arrastar provocou em toda construção ligada a esse objeto.

US2P2: Entende que o movimento realizado e visto na interface do *software* ajudou na resolução das atividades, uma vez que com o movimento foi possível ver possibilidades que poderiam contribuir para essas resoluções.

US3P2: Estabelece um movimento de um ponto objetivando colocá-lo em determinado lugar.

US4P2: Enfatiza que simultaneamente ao movimento que vai sendo realizado, pode-se ir vendo-o, percebendo-o se materializando na interface do *software*.

US5P2: Entende que nas atividades mostrou-se muitas vezes a possibilidade de mover um objeto visando perceber algo relevante à resolução do problema.

US6P2: Entende que o *software* abre a possibilidade de movimentar.

US7P2: Afirma ter visto a presença do movimento quando se pôs a testar possibilidades.

US8P2: Enfatiza que houve uma iniciativa reflexiva buscando resolver o problema, mas, foi o ato de pegar o *mouse* e realizar movimentos que fez com que o desenvolvimento dessa resolução se efetivasse.

US9P2: Afirma que quando realizava movimentos algo se mostrava. No entanto, a incerteza de estar vendo algo verdadeiro levou à realização de mais movimentos visando verificar a veracidade, ou não, disso que se mostrava.

US10P2: Entende que foi o movimento realizado que permitiu visualizar soluções mais diretas aos problemas. Afirma que sem o movimento essas soluções não poderiam ser vistas.

US11P2: Afirma ter realizado movimentos em todo o tempo em que esteve desenvolvendo as atividades.

US12P2: Entende como sendo movimentos aqueles realizados na construção de figuras, dentre os quais o de clicar sobre ferramentas.

US13P2: Evidencia os passos de criação de uma reta paralela a uma outra reta. Diz visualizar a reta paralela gerada e arrastá-la com o movimento do *mouse* até que ela passasse por um ponto previamente conhecido.

US14P2: Enfatiza que no processo de construção também houve movimento.

US15P2: Afirma que é com atenção ao movimento realizado e ao que esse movimento provoca na interface do *software*, que se percebe invariantes e possibilidades.

US16P2: Enfatiza que foi ficando atento ao movimento, visando validar uma possibilidade, que pôde ver se ela é correta ou falsa. Entende que essa realização abre caminho para novas possibilidades.

US17P2: Credita a possibilidade do movimento ao *software*, enfatizando que é ele que permite a realização de movimentos.

US18P2: Entende que se a interface não ofertasse a possibilidade de movimentar um objeto ela seria o mesmo que uma folha, na qual um desenho feito é estático.

US19P2: Enfatiza que clicando sobre um ponto vinculado a uma figura e movendo-o, pode-se destorcer a figura, provocando nela configurações como ampliar ou reduzir seu tamanho.

US20P2: Entende que o movimento realizado em uma figura deixa um rastro que é visto na interface em toda a duração desse movimento.

US21P2: Entende que o movimento foi presente em todo o desenvolvimento das atividades, incluindo o próprio enunciado, que convida à realização de movimentos.

US22P2: Entende que os enunciados propõem o movimento de “sair do lugar” realizado pelos personagens que neles estão. Entende que isso fez com que se colocasse no lugar desses personagens, se inserindo no contexto das atividades e realizando os movimentos que esses personagens deveriam realizar.

US23P2: Entende que quem resolve o problema pode assumir-se sendo ele um ponto a ser movido na interface do *software*.

US24P2: Entende que há movimento na criação de objetos e no arrastar desses objetos, visando ver o que pode emergir de informações importantes junto a esse arrastar.

US25P2: Afirma que é a possibilidade de arrastar do *software* que permite movimentos.

US26P2: Afirma ter visto o movimento se materializando como mudanças na interface, nas figuras.

US27P2: Afirma ter visto o movimento quando se pôs a arrastar objetos na interface do *software* esperando ver o que disso poderia emergir.

US28P2: Afirma que foi o movimento realizado que permitiu ver o traçado que demarcava a solução do problema.

US29P2: Entende que foi o movimento de um objeto que permitiu alcançar um objetivo predeterminado.

US30P2: Afirma que uma possibilidade matemática que resolveria o problema foi vista apenas quando realizados movimentos com os quais pôde-se ver aproximadamente a posição de um ponto.

US31P2: Entende que o movimento ajudou a ver algumas possibilidades e testar a coerência das mesmas.

US32P2: Afirma ter visto o movimento em atividades que solicitavam mover pontos para que se percebesse suas soluções.

US33P2: Afirma que o movimento foi visível quando se puseram a arrastar um ponto.

US34P2: Afirma ter visto o triângulo se modificando enquanto um ponto ligado a ele era movido. Afirma que nesse mesmo movimento, pôde-se ver que as retas que passavam por esse triângulo se preservavam sempre sendo mediatrizes de seus lados.

US35P2: Afirma que foi realizando movimentos em objetos, e vendo esses objetos em movimento, que pôde ver que uma terceira reta não construída *a priori* era a solução do problema.

US36P2: Entende que foram realizadas construções estruturadas por propriedades matemáticas fixadas e relacionadas umas às outras nessa construção. No entanto, foi ao mover essa construção que pôde-se ver as ligações presentes nessas propriedades.

US37P2: Entende que o movimento se presentifica quando se arrasta objetos e quando se vê que nesse arrastar “tudo se encaixa”.

US38P2: Entende que do movimento e visualização do movimento realizado vieram ideias para resolução dos problemas.

US39P2: Entende que com a realização de movimentos pôde-se chegar às repostas das atividades.

US40P2: Entende que a solução de um problema surgiu do movimento de um ponto que evidenciou a preservação de propriedades da construção.

US41P2: Indica ter realizado movimentos no *software* visando explicar a seus companheiros de grupo seus pensamentos.

US42P2: Afirma que o movimento é presente também na comunicação, na troca de informações.

US43P2: Afirma ter realizado movimentos no *software* para explicar suas ideias. Entende que o movimento explicativo pôde ser visto na interface pelos seus colegas de grupo que, com isso, puderam entender e contribuir para/com essas ideias.

US44P2: Entende que todas as construções apresentadas na interface do *software* poderiam ser movidas.

US45P2: Entende que por saber previamente que o *software* permite o movimento de arrastar, pode pensar em um movimento a ser realizado antes mesmo de efetivá-lo.

US46P2: Entende que o saber que antecipa o que pode ser movido e o como pode ser movido, permite a realização de movimentos mais precisos, visando encontrar detalhes.

US47P2: Entende que o pensar que antecede um movimento a ser realizado, como saber o que se move e como se move, já se caracteriza como movimento.

US48P2: Entende que a presença do movimento está ligada às solicitações das atividades.

US49P2: Afirma que ao mover as construções, pôde-se vê-las melhor, pôde-se estudá-las.

US50P2: Entende como interessante a ideia de estudar uma construção pondo-a em movimento.

US51P2: Entende que se uma construção é posta no *software*, ela deve ser explorada no dinamismo que esse *software* dispõe.

US52P2: Afirma que realizou movimentos e percebeu na interface invariantes junto a esses movimentos.

US53P2: Afirma que foi ao ver invariantes na variação provocada pelo movimento, que pôde encontrar soluções para os problemas.

Quadro 16: Transcrição e Análise Ideográfica das respostas dadas à Pergunta 2

Fonte: O autor

PERGUNTA 3 - Vocês se veem nesses movimentos que disseram ter percebido? Se sim, falem sobre isso.

Aluno D1: Hunn..., é quando estamos vendo o que estamos fazendo? Melhor, (1) **vemos os movimentos que nós fazemos com o mouse**, quer dizer, (2) **na tela não tem o movimento do mouse, mas é a gente movimentando o mouse que faz o movimento na tela**, acho que é isso. (3) **É a gente que faz os movimentos**, a relação está aí, (4) **somos nós que controlamos o mouse**. Todos esses movimentos que vemos na tela do Geogebra é fruto do movimento que fazemos no *mouse*.

Aluna A1: É isso mesmo. (5) **Se não fosse nós movimentando, não teria movimento**. E construindo também, clicando nas ferramentas e fazendo as coisas. (6) **Se não fosse nós, a tela ficaria branca**. (7) **Quando clicamos sobre um ponto, ele se move na tela porque estamos movendo o mouse**. Concordo com você Aluno D1, a relação é isso mesmo. (8) **É relação de dependência, o movimento no Geogebra depende de nós que vamos nele e movemos**.

Aluna J1: Que legal! Eu nem parei pra pensar nisso. Quando você (pesquisador) perguntou do movimento, só foi falado dos objetos que vemos na tela se movendo. Mas, agora, pensando melhor, (9) **é a gente se movimentando que faz os objetos moverem também**, (10) **a gente também estava em movimento quando estivemos desenvolvendo os problemas**. (11) **Ficamos movendo aqui com o mouse [com mão direita simula a realização de movimentos com o mouse sobre a mesa] e só ficamos olhando o que acontece na tela**, muito legal isso.

Aluna E1: (12) **Até mesmo essa questão do que vemos na tela, também acho que é uma relação, tem tudo a ver com a gente controlando a situação ali, nós poderíamos estar distraídos, mas ficamos focados no que acontecia ali nos movimentos**. Quero dizer que (13) **vemos o movimento, as propriedades, porque estamos ali ó, olhando o que acontece, tomamos conta do espaço ali**.

----- ~~~ -----

Aluna K2: (14) **Quem faz o movimento somos nós, nós que clicamos nos pontos e arrastamos eles**.

Aluna H2: Também acho. Primeiro, tem por trás as atividades que fomos tentando resolver. (15) **Aí tivemos que fazer alguns movimentos, não foram movimentos assim, soltos**. Na tentativa de resolver os problemas nós vimos os pontos que davam pra ser movidos e fomos lá, (16) **pegamos o mouse, clicamos nesses objetos, arrastamos o mouse, aí, arrastando o mouse, o movimento vai acontecendo também na tela do computador**. (17) **Se a gente não quisesse mover os pontos, nada aconteceria**. Mas (18) **aí vem a importância da elaboração da atividade, elas foram feitas de uma maneira que vimos que tinha que mover pra perceber ali (na interface) algumas propriedades, alguns invariantes e depois ver as possibilidades de solução**.

Aluna K2: É importante também dizer que pra resolver essas atividades, não bastava realizar movimentos. (19) **Muitas vezes, eu tinha que parar de mover pra ver o que estava acontecendo na tela, pra ver se o que aparecia**

ajudava na resolução. (20) Daí, deu pra pensar sobre se o que aparecia e avançar, pensando em outros movimentos e possibilidades a partir do que deu pra ver quando parei o movimento.

Aluna F2: Na verdade, (21) a questão, como falo? Ééé, física, isso física, do mouse, do computador e da gente movendo, mas também de nós estamos ali na frente fazendo os movimentos e pensando sobre eles, (22) nós somos influenciados pelo que vemos acontecer, aí ficamos sempre pensando também a cada possibilidade que aparece.

----- ~~~ -----

Aluno I3: Não sei. Talvez é que nós que fazemos acontecer o movimento que aparece na tela do computador? É isso?

Aluno B3: Pra mim faz sentido ser isso. Porque (23) percebemos os movimentos, primeiro porque estamos vendo acontecer, mas, antes disso, (24) ele acontece porque somos nós que realizamos o movimento com o mouse. (25) Nós que movemos os pontos. Nas atividades, (26) sempre que tínhamos que buscar alguma coisa, até pra conseguir avançar, nós íamos lá, clicava em algum objeto que inicialmente parecia ser interessante ser movido, aí, nós movemos, simples assim. (27) Primeiro somos nós querendo e depois fazendo, aí, junto com isso, (28) a gente vê na tela do computador aquilo que pensamos em fazer e que estamos ali fazendo. Eita, ficou confuso. Mas, (29) é isso, tá tudo junto, a máquina não trabalha só, ela precisa da gente.

Alunos E3: Também acho, (30) tem a relação nossa com o computador. É o mesmo que acontece com o celular, nossa vida está nele, mas se deixarmos ele num cantinho, ele vai chamar, vibrar, mas se não atendermos, se não formos lá mexer nele, nada acontece, o máximo é a bateria acabar, a questão é só ninguém me pedir pra fazer isso (risos). (31) No Geogebra, a situação que tá lá (se refere a uma situação projetada na interface do software) seria a mesma que essa aqui no papel (mostra um rascunho que havia feito no papel), se a gente não pegar o mouse e começar a mover os pontos, se não nos envolvermos, fica tudo parado, como está.

Alunos A3: É isso, até mesmo que, (32) se fosse pra resolver no papel, sem fazer movimento, você (pesquisador) não projetaria tudo no Geogebra. Então, também (33) acho que o nosso envolvimento com os movimentos que falamos, é esse mesmo, de que somos nós os realizadores e, sem nós, não teria esse movimento.

Pesquisador: É isso mesmo pessoal. Foram vários os momentos que vocês falaram desse envolvimento, por exemplo, quando falavam “cliquei e arrastei”, nesse caso vocês já se colocam como realizadores do movimento. Essa pergunta foi só para que vocês pudessem refletir sobre quem ou o que faz a GD acontecer.

O sentido do dito – Unidades Significativas

US1P3: Entende que vê na interface do *software* o movimento que realiza com o *mouse*.

US2P3: Afirma que são eles, movendo o *mouse*, que fazem acontecer movimentos na interface do *software*.

US3P3: Afirma que são eles que realizam o movimento.

US4P3: Afirma que são eles que controlam o *mouse* e que os movimentos expressos na interface do *software* são correlatos do movimento que eles realizam com o *mouse*.

US5P3: Entende que se não fosse eles realizando movimentos, não haveria movimento na interface do *software*.

US6P3: Entende que se não fosse eles, a interface do *software* não passaria de uma tela em branco.

US7P3: Afirma que quando clica em um ponto na interface do *software*, esse ponto se move se um movimento for realizado com o *mouse*.

US8P3: Entende que o movimento na interface do *software* tem uma relação de “dependência” com quem realiza o movimento.

US9P3: Afirma que são eles se movendo que fazem com que os objetos se movam.

US10P3: Entende que na resolução das atividades, eles estavam em movimento.

US11P3: Diz que realizaram movimentos no *mouse* e voltaram-se à interface para ver o que acontecia nela.

US12P3: Entende que controla a situação que envolve o movimento e a visualização do movimento. Por controla-la, pôde escolher o nível de atenção, de foco dado a ela.

US13P3: Entende que visualizam o movimento e as propriedades que emergem dele, pois põem-se atentos e tomam conta do espaço em que o movimento acontece.

US14P3: Compreende que são eles que fazem o movimento, eles que clicam nos pontos e os arrastam.

US15P3: Enfatiza que os movimentos realizados não foram “soltos” - qualquer movimento, movimento de qualquer objeto. Foi visto o que poderia ser movido e a partir disso foram realizados os movimentos.

US16P3: Afirma ter pego o *mouse*, clicado sobre objetos e ter arrastado o *mouse*. Entende que esse movimento do *mouse* acontece também na interface do *software*.

US17P3: Entende que se não houver um *querer mover* por parte de quem se volta ao *software*, nada acontece no mesmo.

US18P3: Entende que as atividades foram elaboradas de forma que o movimento fosse um meio para perceber propriedades e invariantes, e de estar possíveis soluções.

US19P3: Afirma ter parado em alguns momentos da realização da atividade para pensar sobre o que foi feito, sobre o que alguns movimentos realizados poderiam mostrar na interface.

US20P3: Afirma ter pensado sobre o que a interface mostrou após um movimento, e, a partir do que emerge desse pensamento, pôs-se a pensar em outros movimentos e possibilidades.

US21P3: Compreende que a situação de mover que envolve o computador, o *mouse* e a pessoa que move, não é puramente física, ela é também reflexiva, já que a pessoa além de realizar movimentos, põe-se a pensar sobre o movimento realizado.

US22P3: Compreende que seja influenciado pelo que acontece na interface do *software*, por isso põe-se sempre a pensar sobre cada possibilidade que se mostra nessa interface.

US23P3: Entende que percebe o movimento porque está vendo-o acontecer.

US24P3: Compreende que o movimento acontece porque é ele que se põe a mover o *mouse*.

US25P3: Afirma que são eles que movem os pontos.

US26P3: Enfatiza que na busca por uma solução, um objeto cujo movimento seria “interessante”, era simplesmente movido.

US27P3: Afirma que há um *querer mover* que é anterior ao ato de realizar o movimento.

US28P3: Afirma que vê se materializar na tela do computador o que havia pensado em fazer e que no momento está fazendo.

US29P3: Compreende que o computador não trabalha sem alguém que o coloque a trabalhar.

US30P3: Compara a relação das pessoas com o computador e delas com o celular, afirmando se tratar da mesma relação, no sentido de que, se as pessoas não realizarem algo neles, nada com eles acontecerá.

US31P3: Compreende que uma situação construída no *software* se torna igual a uma situação construída no papel se não houver alguém que se volte à construção no *software* e realize nela movimentos.

US32P3: Entende que se as atividades não exigissem movimento, elas poderiam ser desenvolvidas no papel.

US33P3: Vê-se como realizador dos movimentos que avançam à interface do *software* e, enfatiza que, sem ele, não haveria esse movimento.

Quadro 17: Transcrição e Análise Ideográfica das respostas dadas à Pergunta 3

Fonte: O autor

PERGUNTA 4 - *Realizando as atividades, houve aprendizado? Se sim, o que aprenderam e como aprenderam?*

Aluno H1: Houve sim. A questão da reflexão principalmente, a gente sabia onde clicar pra fazer ela, e sabia que poderíamos fazer distâncias iguais com ela. Mas (1) depois de fazer a reflexão e ficar movendo um ponto, deu pra compreender melhor suas características, por exemplo, (2) se passarmos uma reta pelos pontos (um ponto A e sua reflexão A') teremos retas perpendiculares (a reflexão de um ponto A por uma reta r gera um ponto A' do outro lado desta reta. Se traçada uma reta s por A e A', tem-se que s é perpendicular a r). Deu pra ver isso quando estávamos movendo o ponto (ponto A) e as retas continuavam perpendiculares. As rotações também, sentido horário, anti-horário. Ainda não tinha trabalhado com isso, tive até dificuldade nos sentidos, pois agora os relógios são todos analógicos, a gente só vê as horas no celular, mas, fazendo a Atividade 1 deu pra fixar bem isso.

Aluno K1: No meu ver, não teve tanta aprendizagem de conceitos novos, acho que a ideia das atividades não era essa. As aprendizagens foram outras, mais relacionadas à investigação mesmo. (3) Quando fomos movendo e prestando atenção no que acontecia na tela, conseguimos observar alguns padrões, fomos passo a passo

descobrimo as coisas, organizando as informações que conseguimos, e fomos conversando também, discutindo.

Isso tudo é aprendido, já que não estava acostumado a trabalhar atividades assim no Geogebra. (4) Aí entra a questão de não ser muito afoito, de fazer movimentos, mas ficar sempre atento a tudo que está acontecendo na tela. (5) Vi que movimentos mais assim, calmos, me davam mais respostas. Na primeira atividade fui aprendendo isso, pegando as manhas. Nas outras, já foi mais tranquilo, porque na primeira tive essa aprendizagem, por isso falo que não é apenas de conceitos de Matemática.

Aluna G1: (6) Aprendemos mais quando estamos movendo; dá pra ir vendo as relações entre as construções feitas. (7) Mas tem que mover e parar de mover pra refletir sobre o que vimos. (8) Quando vimos as propriedades que não variam, por mais que já conhecemos elas, nós, ali, quando movimentamos, temos a certeza, fica a confirmação de que aquela é uma propriedade tal, e que tem suas características que podemos estudar quando movimentamos. Acho que se pegássemos uma propriedade qualquer, a do ponto médio, por exemplo, que aplicamos na atividade do campo, (9) se a gente sentasse pra escrever tudo que vemos ali (na interface) sobre o ponto médio, junto como o movimento lá do outro ponto, poderia aparecer muita coisa, dá por exemplo pra associar com a reflexão, ele (o ponto médio) é equidistante de seus opostos. Pra alunos que estão começando a estudar isso, eles vão anotar muito mais coisas.

Aluna A1: (10) Acho que dá pra aprender muito com a questão dos invariantes no movimento. (11) Nas atividades aqui, vi que os invariantes eram meio que informações importantes pra conseguirmos resolver os problemas, mas, (12) em outro tipo de atividade, poderia colocar os invariantes como propriedades de uma figura, por exemplo, ver o que não varia num quadrado, daí dá pra ir pegando o que não varia e até definir o quadrado. Acho bacana isso, fui pensando nisso enquanto fazia, e acho que dá pra fazer sim. Olha só, se a questão é sobre o que aprendi, aprendi isso, que dá pra ter outros tipos de exploração né? Dá pra ter atividades diferentes até mesmo abordando temas iguais.

Aluno L1: Eu acho que o interessante foram as discussões em grupo. Sou meio lento com as coisas, (13) os outros tão vendo lá os invariantes depois de movimentar, e eu nada, aí eles me falavam, mostravam. Então, deu pra aprender assim, conversando, trocando ideias né? (14) O Aluno D1 viu que a reflexão podia ser feita também traçando uma circunferência, tem o ponto, o centro, e do outro lado do centro seria a reflexão do ponto. Aí ele fez, me mostrou, eu aprendi isso. Então, a gente aprende muito de Matemática nesses problemas.

Aluna B1: O que fica claro pra mim é que tem possibilidade de aprendermos muitas coisas, só que uns aprendem umas coisas e outros, outras coisas, vai do que cada um já sabe. Eu mesmo, enquanto fui desenvolvendo as atividades, fui tentando também pensar em como foi montado ali (no *software*), pois estava tudo certinho, ficou aberto muitas formas de fazer, mas no final todos chegaram em mesmas respostas. Já fiquei pensando em minhas aulas, porque gosto muito de tecnologias. (15) Vimos que as atividades partem de situações geométricas que são colocadas em um contexto em que se pode mover elas. Então, fui aprendendo que dá pra pegar uma atividade simples ou bem fechada e transformar como você (pesquisador) fez. Achei muito massa. (16) Vou tentar depois pegar exercícios de Geometria e tentar transformar em problema como estes, que exige construção e movimentos, fica muito mais instigante, mais desafiador.

----- ~~~ -----

Aluna I2: (17) Houve sim, nós trabalhamos com muitos conceitos, foi interessante ver que em uma única atividade podem ser trabalhados vários conceitos. Fomos vendo esses conceitos quando fomos construindo, e depois ficou mais visíveis quando movemos os pontos que fez mudar a construção inteira. Com exceção da

reflexão, que teve muito nas atividades, (18) acho que conheço os outros conceitos, então não acho que aprendi eles, mas aprendi como trabalhar com eles, como posso pensar em conectar eles numa atividade, isso a gente faz colocando possibilidade de movimentos. (19) A gente vai aprendendo também sobre o Geogebra, a questão do movimento também, deu pra ver que é muito importante poder movimentar, então (20) deu pra ver que no Geogebra temos que fazer atividades que façam os alunos moverem os pontos e verem o que acontece quando eles movem esses pontos.

Aluna F2: A questão é que nós já estamos aqui na faculdade, mas se as atividades fossem aplicadas pra alunos do ensino básico, daria pra eles aprenderem muitos conceitos. (21) A gente aqui, na questão dos invariantes mesmo, vimos melhor as propriedades quando movemos os pontos, pois elas se preservavam. Nós não precisamos ficar estudando as propriedades, só destacamos elas, isso porque já conhecemos elas. (22) Mas, e se fossem pra alunos da escola (ensino básico)? Podia pedir pra eles estudarem o que não varia no movimento, aí eles iam conhecer mais a fundo aquelas propriedades.

Aluna P2: É mesmo, aqui nós trabalhamos com as propriedades, já conhecemos elas. Mas isso não deixa de ser uma aprendizagem, (23) saber trabalhar com as propriedades, ainda mais no software, que é outro mundo, fora do caderno, a gente vê as propriedades em movimento. (24) Então, elas (as propriedades) mesmo sendo as mesmas dos livros que aprendemos, são também diferentes porque no Geogebra elas não são a mesma coisa, entendeu? Elas no Geogebra têm uma abordagem diferente, elas podem ser movidas.

Aluno J2: Acho que deu pra entender como os exercícios foram montados ali no Geogebra, isso é importante dizer, porque nós precisamos aprender a montar atividades também. (25) No exercício da estação mesmo (Atividade 2), depois que nós movemos a boia, deu pra ver as propriedades que não variavam, aí ficou claro a importância de planejar tudo muito bem, (26) deu pra ver enquanto a gente movimentava, que se tratava de um triângulo e depois da mediatriz dos lados dele. Então, acho que aprendi um pouco sobre como pensar uma atividade. Igual a Aluna P2 falou, (27) colocando nela fatores que levam o aluno a botar a mão na massa, e construir e mover os objetos.

Aluno C2: (28) Acho que aprendemos também a ser mais críticos. As vezes chegamos em soluções que pareciam ser certas, porque quando a gente movia, dava a impressão de estarmos chegando na solução certinha, mas, aí, na hora de testar, de fazer uma construção final, tinha uma diferencinha.

Aluna B2: Tem também o envolvimento dos grupos. (29) Conseguimos desenvolver as atividades, às vezes em um só computador, e todo mundo trocando ideia sobre o que a gente via ali no movimento. Todo mundo pôde pegar o mouse e fazer alguma coisa pra mostrar suas ideias. (30) Com isso, a gente aprende a respeitar as ideias dos outros, todo mundo teve vez, pôde falar; uns falavam, move aqui, outros, move ali, pegavam o mouse e moviam, aí, no final tudo dava certo, todo mundo desenvolveu junto, aprendeu junto também.

Alunos L2: Isso eu achei bacana mesmo, (31) a gente ia revezando no Geogebra, discutindo. Nos momentos decisivos, de fechar as questões, (32) um pegava o mouse e movia enquanto o outro ficava mais atento pra ver se via alguma coisa, aí via e falava, mostrava, aí a gente vê e pega o mouse e move também só pra ver se é isso mesmo.

----- ~~~ -----

Aluno C3: O que aprendemos aqui acho que tá mais ligado ao desenvolvimento, às explorações, às investigações que fomos fazendo, porque, os conceitos mesmo a gente já sabia. Então, o desafio foi aplicar esses conceitos. (33) Então acho que aprendemos foi isso, a aplicar esses conceitos em situações que precisa

mover objetos pra eles aparecerem. Agora, quando fomos fazer outras atividades como essas no Geogebra, já vamos estar mais preparados, (34) **já aprendemos que dentro de um movimento pode aparecer informações que ajudam nas respostas.**

Aluna M3: (35) **Vimos que no Geogebra não basta fazer as construções, tem que movimentar elas, porque uma construção pode se manter ou não, dependendo de como as propriedades foram seguidas à risca, ou não.** (36)

Tanto na atividade do campo quanto na da mangueira, quando fui fazer os movimentos finais dos pontos, dava tudo errado, distorcia tudo ali, o ponto G ficava meio que na diagonal, a posição lá da cápsula não ficava fixa. Mas por que isso? é porque não apliquei certo as propriedades. A construção tinha que ser com as propriedades, por exemplo, ao invés de fazer uma reta perpendicular, com a ferramenta, eu fiz no olho ali, mais ou menos 90°, aí quando fui mover, mudou tudo, aí deu errado.

Aluna A3: Nós ficamos em meio a uma investigação mesmo, isso que mais gostei nas atividades. Então, nesse aspecto, acho que aprendemos a investigar; (37) **fomos fazendo os passos e pensando, refletindo, vendo possibilidades,** (38) **daí testamos pra ver se dava certo, e o Geogebra ajuda muito nisso, os testes, as validações nós fazemos com simples movimentos de um ponto, não precisa construir tudo novamente.** Como não estamos acostumados com atividades investigativas, foi boa a experiência e, também, acho que podemos desenvolver melhor outras atividades agora, e também preparar atividades pra nossos futuros alunos.

Aluno J3: Olha só, aprendi a jogar sinuca (risos), agora já sei o que fazer (risos). To brincando, mas dá pra pensar nisso também enquanto aprendizagem; a atividade por ser contextualizada, faz a gente aprender sobre esse contexto. (39) **Nas atividades do campo e da mangueira o que mais ficou foi a questão dos invariantes, entendi que é um bom caminho pra ensinar alguns conceitos, foi bom ver isso.**

O sentido do dito – Unidades Significativas

US1P4: Afirma ter melhor compreendido as características de uma propriedade matemática, quando realizou movimentos em um ponto abarcado por essa propriedade.

US2P4: Compreender que a reta que separa em lados opostos o ponto A e sua reflexão A', é perpendicular à reta que passa por esses pontos. Afirma que isso foi visto quando realizaram movimentos no ponto A e viram que mesmo com esses movimentos, as retas persistiam perpendiculares entre si.

US3P4: Entende que realizando movimentos e atentando-se às implicações desses movimentos na interface do *software*, conseguiram observar padrões, descobrir, organizar informações e discutir sobre elas. Entende que esse modo de agir foi aprendido durante a realização das atividades.

US4P4: Entende que na investigação com *software* não se pode ser muito “afoito”; deve-se realizar movimentos, mas, sempre ficar atento ao que esse movimento produz na interface do *software*.

US5P4: Vê que movimentos mais cautelosos forneciam mais elementos para resolver a atividade.

US6P4: Entende ter aprendido mais efetivamente quando realizou movimentos e atentou-se às relações entre as construções feitas. Relações que se mostravam nesses movimentos.

US7P4: Compreende que deve mover os objetos, mas, deve-se parar o movimento para refletir sobre o que foi visto durante/no mesmo.

US8P4: Compreende que a validação de uma propriedade e de suas características, bem como o estudo das mesmas, ocorre mediante realizações que às põe em movimento.

US9P4: Entende que daria para se destacar muitas coisas sobre determinada propriedade se em um momento parassem para anotar o que veem quando ela é posta em movimento.

US10P4: Entende que é possível aprender muito com o estudo de invariantes que se mostram em um movimento realizado.

US11P4: Compreende que os invariantes que emergiam dos movimentos eram relevantes para a resolução das atividades.

US12P4: Apresenta uma ideia de atividade na qual se estuda uma figura geométrica movimentando-a no *software* e atentando-se aos invariantes que persistem nesse movimento. Invariantes com os quais se poderia definir essa figura.

US13P4: Afirma ter aprendido conversando com os membros do grupo sobre invariantes anteriormente não vistos por ele.

- US14P4:** Afirma ter aprendido com um colega outro modo de construir a reflexão de um ponto. Modo esse em que não é preciso valer-se de uma ferramenta que daria a construção mais direta.
- US15P4:** Afirma ter aprendido que se pode apropriar de uma situação geométrica simples e trabalhá-la no *software*, colocando-a em um contexto que solicite seu movimento.
- US16P4:** Se propõe a buscar exercícios de Geometria e transformá-los em problemas que exigem construções e movimentos, visto que, entende que desta forma eles seriam mais interessantes e desafiadores.
- US17P4:** Afirma ter visto conceitos nas construções realizadas, mas, entende que esses conceitos se tornaram mais visíveis quando foram realizados movimentos em pontos e, com isso, na construção inteira.
- US18P4:** Enfatiza ter aprendido como trabalhar conceitos geométricos e conexões de conceitos em situações que envolvem movimentos.
- US19P4:** Afirma ter aprendido sobre o *software* e sobre a importância de poder movimentar.
- US20P4:** Entende que as atividades programadas para serem trabalhadas no *software* devem solicitar o movimento e a atenção ao movimento.
- US21P4:** Entende ter visto mais claramente as propriedades quando as viu se preservar em meio a movimentos realizados em pontos associados a elas.
- US22P4:** Entende que o estudo de invariantes poderia ser trabalhado com alunos do ensino básico para que eles pudessem conhecer a fundo propriedades.
- US23P4:** Entende que o *software* é distinto do papel e permite ver propriedades em movimento.
- US24P4:** Compreende que propriedades apresentadas em livros didáticos ganham novas configurações quando trabalhadas em *software*, podendo elas serem movidas.
- US25P4:** Ao ver propriedades e invariantes em um movimento realizado, compreende a importância da elaboração das atividades de forma que invariantes possam se mostrar e ajudar na resolução das mesmas.
- US26P4:** Durante a realização de um movimento, visualiza um triângulo e entende que as retas que por seus lados passavam, eram mediatrizes desses lados.
- US27P4:** Entende que se deve colocar nas atividades a serem trabalhadas em *softwares*, elementos que solicitem construções e movimento de objetos.
- US28P4:** Entende ter desenvolvido sua criticidade, visto que em alguns momentos a desconfiança do que parecia certo levou à realização de movimentos com os quais foi possível ver divergências.
- US29P4:** Afirma que o grupo conseguiu resolver atividades trocando informações sobre o que emergia de movimentos realizados e compartilhando o controle do *mouse* para que cada um pudesse mostrar suas ideias com o movimento do mesmo.
- US30P4:** Afirma que durante as atividades, um membro do grupo solicitava ao outro que realizasse determinado movimento e, podendo também, tomar o controle do *mouse* para realizar movimentos. Entende que com isso as atividades foram desenvolvidas por todos e que todos aprenderam juntos.
- US31P4:** Enfatiza que os membros do grupo revezavam o controle do *software* e discutiam juntos.
- US32P4:** Diz que no momento em que um membro do grupo realizava movimento com o *mouse*, o outro atentava-se às implicações desse movimento na interface do *software* e dizia o que entendia do que estava vendo, às vezes tomando controle do *mouse* e mostrando com movimento o que queria dizer.
- US33P4:** Afirma ter aprendido a trabalhar conceitos em situações em que eles aparecem quando realizados movimentos em objetos.
- US34P4:** Entende ter aprendido que em um movimento realizado podem aparecer informações relevantes à solução das atividades.
- US35P4:** Compreende que toda construção geométrica feita no *software* deve ser movida, pois a estrutura desta construção se mostrará coerente apenas quando ela for movida e nesse movimento suas propriedades se preservarem.
- US36P4:** Compreende que ter realizado os passos solicitados pela atividade sem trabalhar devidamente as propriedades que eles envolviam, fez com que a construção se desconfigurasse quando posta em movimento.
- US37P4:** Descreve que na duração do desenvolvimento da tarefa ele foi movendo, pensando, refletindo e vendo possibilidades.
- US38P4:** Afirma ter feito testes em um processo de validação que não exige várias construções, mas o simples movimento de um ponto.
- US39P4:** Entende que o trabalho com invariantes em ambientes de GD é um bom caminho para ensinar conceitos.

Quadro 18: Transcrição e Análise Ideográfica das respostas dadas à Pergunta 4

Fonte: O autor

APÊNDICE 4

Primeiro Movimento de Convergência

Unidades Significativas	*C
<p>US1A1: Realiza um <i>movimento preciso com o mouse buscando fazer</i> com que o ângulo entre dois segmentos construídos na interface do <i>software</i> seja de 90°.</p> <p>US4A1: <i>Frente a um objetivo almejado</i> junto à interface do <i>software</i>, a aluna <i>controla e determina o início e o fim de um movimento</i> por ela realizado.</p> <p>US2A2: Movendo o <i>mouse</i>, <i>move uma reta até que ela passe por um ponto já conhecido</i>.</p> <p>US5A2: <i>Controla o objeto movido e o como ele deve ser movido para alcançar um objetivo</i> da tarefa.</p> <p>US7A2: <i>O movimento é controlado pelo aluno</i>. Ele estabelece a precisão de seu movimento <i>para alcançar um objetivo</i>.</p> <p>US5A4: <i>Realiza um movimento cauteloso, preciso, intencionando alcançar</i> um objetivo previamente pensado.</p> <p>US8A8: <i>Realiza um movimento de rotação, controlando-o</i> de forma que o segmento rotacionado em torno de uma de suas extremidades, <i>ocupe uma posição desejada</i>.</p> <p>US39P1: Indica a possibilidade de <i>estudar as propriedades</i> de uma construção colocando-a em movimento e <i>controlando a velocidade desse movimento</i>.</p> <p>US29P2: Entende que foi <i>o movimento de um objeto que permitiu alcançar um objetivo predeterminado</i>.</p> <p>US46P2: Entende que o saber que antecipa o que pode ser movido e o como pode ser movido, permite a realização de <i>movimentos mais precisos, visando encontrar detalhes</i>.</p> <p>US5P4: Vê que <i>movimentos mais cautelosos forneciam mais elementos</i> para resolver a atividade.</p>	<p>*C01 – O controle do movimento do <i>mouse</i> para responder ao solicitado</p>
<p>US15A3: Afirma que realiza movimentos junto ao <i>software</i> e que <i>percebe mudanças</i>. No entanto, entende que junto a essas mudanças há propriedades que se preservam.</p> <p>US21A3: Enfatiza que quando realizado um movimento <i>“tudo sai do lugar”</i>, mas, nessa desconfiguração se preservam as propriedades previamente estabelecidas na construção.</p> <p>US24A3: Entende que se pode garantir a perpendicularidade realizando movimentos e olhando para a <i>região angular que vai se configurando nesse movimento</i>.</p> <p>US8A4: Realiza o movimento de um ponto e atenta-se às amplitudes dos <i>ângulos que se desconfiguram nesse movimento</i>, visando deixá-los iguais ou com medidas aproximadas.</p> <p>US12A4: Afirma que o que ajudou a ver a posição na qual o armador poderia estar, foi a possibilidades de colocá-lo em movimento, simulando posições ocupadas por ele e atentando aos <i>ângulos que iam se configurando com seu movimento</i>.</p> <p>US15A5: Compreende que quando realiza movimentos em E e F, A' e M' <i>também se movem, mudando de lugar</i>. Mas, sempre que se ajusta para que A' e M' ocupam as posições que são solução do problema, eles retornam para uma mesma posição, que é única.</p> <p>US1A8: Afirma que ao realizar o movimento de um ponto, <i>visualiza mudanças em um valor numérico exposto na interface</i> do <i>software</i>.</p> <p>US29P1: Entende que <i>o movimento de um objeto na interface do software faz acontecer outros movimentos nessa mesma interface</i>. Entende também que esse movimento, por ser possível através de uma programação computacional, torna o trabalho mais rápido.</p> <p>US1P2: Afirma que quando clicou sobre um objeto e o arrastou, foi possível ver esse <i>movimento acontecendo</i> na interface do <i>software</i>, <i>bem como o movimento que esse ato de arrastar provocou</i> em toda construção ligada a esse objeto.</p>	<p>*C02 - O movimento do <i>mouse</i> gera transformação na interface do <i>software</i>.</p>

<p>US19P2: Enfatiza que clicando sobre um ponto vinculado a uma figura e movendo-o, <i>pode-se destorcer a figura, provocando nela configurações</i> como ampliar ou reduzir seu tamanho.</p> <p>US26P2: Afirma ter visto <i>o movimento se materializando como mudanças na interface</i>, nas figuras.</p> <p>US34P2: Afirma ter visto <i>o triângulo se modificando enquanto um ponto ligado a ele era movido</i>. Afirma que nesse mesmo movimento, pôde-se ver que as retas que passavam por esse triângulo se preservavam sempre sendo mediatrizes de seus lados.</p>	
<p>US5A1: Vale-se da <i>visualidade</i> do <i>software para afirmar a igualdade ou proximidade</i> de uma medida angular.</p> <p>US8A1: <i>Percebe no desenho que segmentos são iguais</i>, e isso leva o aluno a afirmar essa igualdade.</p> <p>US3A2: <i>Encontra no aspecto visual</i> de uma construção no <i>software justificativa para determinar uma igualdade</i>.</p> <p>US7A4: Controla o movimento e o fim do movimento de um ponto ao passo que percebe que com esse movimento <i>se aproxima de uma igualdade</i> a qual se almejava alcançar.</p> <p>US8A4: Realiza o movimento de um ponto e <i>atenta-se às amplitudes dos ângulos</i> que se desconfiguram nesse movimento, <i>visando deixá-los iguais ou com medidas aproximadas</i>.</p> <p>US12A8: Com os dedos indicadores, demarca o início e o fim de segmentos sobrepostos, <i>evidenciando a igualdade de seus comprimentos</i>.</p>	<p>*C03 - Intuição de medidas com base na visualização de objetos geométricos</p>
<p>US8A2: Faz do <i>mouse</i> um meio pelo qual <i>evidencia/mostra</i> o que quer dizer.</p> <p>US6A3: Com <i>o movimento do cursor do mouse evidencia uma região</i> na interface do <i>software</i>, na qual iria criar um ponto.</p> <p>US16A3: <i>Realiza movimentos</i> em um ponto <i>solicitando aos cossujeitos que atentem</i> aos invariantes que ele quer mostrar com estes movimentos.</p> <p>US22A3: Enquanto <i>realiza movimento</i> em um ponto, <i>solicita aos cossujeitos que se voltem ao movimento</i> de um outro ponto que está vinculado ao ponto que está sendo movido.</p> <p>US23A3: <i>Visando mostrar</i> as características do movimento de um ponto, o aluno “habilita” rastro no mesmo e <i>realiza movimentos solicitando aos cossujeitos que fiquem atentos</i> ao rastro deixado no movimento.</p> <p>US1A4: <i>Movendo o cursor</i> do <i>mouse mostra</i> uma região angular e convida os cossujeitos a atentarem-se a isso que com o cursor se mostra.</p> <p>US2A4: <i>Para mostrar</i> na interface do <i>software</i> o objeto matemático que está explicando, ele <i>desliza o cursor</i> percorrendo as dimensões desse objeto.</p> <p>US3A4: <i>Para indicar</i> uma posição encontrada, ele <i>agita o mouse</i> sobre o ponto que demarca essa posição.</p> <p>US12A5: <i>Com o cursor do mouse</i> em movimento, <i>aponta</i> e convida os cossujeitos a atentarem-se à uma reta construída.</p> <p>US20A6: Diz do percurso da bola ao mesmo tempo em que, <i>com o cursor do mouse, mostra</i> na tela computacional como se materializaria esse percurso após a tacada.</p> <p>US6A8: <i>Movendo o mouse</i>, e com isso o cursor expresso na tela computacional, <i>evidencia</i> um percurso linear.</p> <p>US41P1: Afirma que <i>realizando movimentos</i> de objetos <i>com o mouse, mostrou</i> a seus colegas de grupo alguns pensamentos seus se materializando na interface do <i>software</i>.</p> <p>US42P1: Enfatiza que enquanto <i>move o mouse e vai expondo</i> as implicações desse movimento na interface do <i>software</i> e do que se está pensando com esse movimento, os colegas de grupo podem ver e entender o que está sendo feito. Enfatiza com isso, que essa possibilidade está ligada ao movimento e à visualização do movimento permitidos pelo <i>software</i>.</p>	<p>*C04 - O movimento do <i>mouse</i> para expressar/indicar intenções</p>

<p>US41P2: Indica ter realizado <i>movimentos no software visando explicar</i> a seus companheiros de grupo seus pensamentos.</p> <p>US29P4: Afirma que o grupo conseguiu resolver atividades trocando informações sobre o que emergia de movimentos realizados e compartilhando o <i>controle do mouse para que cada um pudesse mostrar</i> suas ideias com o movimento do mesmo.</p> <p>US32P4: Diz que <i>no momento em que um membro do grupo realizava movimento com o mouse, o outro atentava-se</i> às implicações desse movimento na interface do <i>software</i> e dizia o que entendia do que estava vendo, às vezes tomando controle do <i>mouse</i> e mostrando com movimento o que queria dizer.</p>	
<p>US7A1: Com seu braço <i>representa de um objeto matemático</i>.</p> <p>US8A3: <i>Com o indicador</i> da mão direita <i> sinaliza na projeção um percurso linear</i>.</p> <p>US10A4: <i>Movendo sua mão</i> sobre a projeção, <i>simula uma reta perpendicular</i> a uma outra reta passando por um ponto dado.</p> <p>US12A8: <i>Com os dedos indicadores, demarca o início e o fim de segmentos</i> sobrepostos, evidenciando a igualdade de seus comprimentos.</p> <p>US13A8: <i>Ao dizer da igualdade de dois segmentos, desliza o dedo indicador da mão direita sobre cada um deles</i> para evidenciar sobre quais segmentos está falando.</p>	<p>*C05 - Representação de objetos geométricos com o corpo-próprio.</p>
<p>US8A1: <i>Percebe no desenho que segmentos são iguais</i>, e isso leva o aluno a afirmar essa igualdade.</p> <p>US9A1: Entende que no movimento de rotacionar um ponto pertencente à uma circunferência, esse <i>ponto pode ocupar qualquer posição, mas estará sempre a uma mesma distância do centro desta circunferência</i>.</p> <p>US16A1: <i>Visualiza propriedades que sustentam toda a construção</i>. Propriedades essas que não variam quando realizado um movimento.</p> <p>US15A2: Visualiza que <i>três retas sempre se encontram em um mesmo ponto</i>, por mais diversas que sejam as posições ocupadas por elas após realizados movimentos.</p> <p>US18A2: <i>Visualiza</i> nas configurações do movimento, <i>um ponto onde sempre se encontram as mediatrizes do triângulo</i>.</p> <p>US18A2: Compreende que <i>um ponto</i>, por mais que se mostre em movimento, <i>mantém como invariante sua característica de ser circuncentro</i>.</p> <p>US25A3: <i>Percebe</i> na interface do <i>software um triângulo e o posicionamento da mangueira com relação ao mesmo</i>, quando realizados movimentos limitados, menores, que não desconfiguram esse triângulo.</p> <p>US9A4: Afirma que ao parar o movimento em determinada posição foi possível olhar para a totalidade dos objetos na interface <i>software</i> e perceber que uma construção específica junto ao que a parada do movimento mostrava, lhe daria um objeto que seria <i>uma reflexão de um ponto em relação à reta dada</i>, que viria a ser relevante à resolução do problema.</p> <p>US13A4: Credita <i>a ideia de reflexão que emergiu</i> à possibilidade de movimentar um ponto.</p> <p>US2A5: Ao realizar dobras na folha atentando-se às suas marcações, percebe que o vértice da folha a partir do qual ela é dobrada e o ponto demarcado pela posição ocupada por esse vértice <i>ficam em lados opostos e são equidistantes em relação às linhas que demarcam as dobras</i> realizadas.</p> <p>US3A5: Após realizar dobras na folha conclui que a resolução do problema passa por criar pontos de reflexão. <i>Conclui que se deve criar a reflexão de dois pontos dados, pois ao realizar movimentos na construção, as duas reflexões também se movem</i>.</p> <p>US7A5: Ao mover e ver várias posições ocupadas por alguns pontos, <i>diz ter visto a possibilidade de traçar retas perpendiculares a uma outra reta</i>, passando por esses pontos que se mostram em movimento.</p> <p>US9A5: Afirma que o movimento de um ponto e a criação de uma reta que passe por ele <i>ajudou a ver que a dobra</i>, solução do problema, <i>deveria ser a mediatriz do seguimento AA'</i>.</p>	<p>*C06 - Percepção de propriedades matemáticas junto aos movimentos realizados</p>

<p>US3A7: Compreende que <i>a solução</i> do problema <i>é uma reta que é diagonal de um retângulo</i>. Ao fazer com que essa reta se mova, conclui que <i>ela sempre será a diagonal de um retângulo</i>.</p> <p>US34P2: Afirma ter visto o triângulo se modificando enquanto um ponto ligado a ele era movido. Afirma que nesse mesmo movimento, <i>pôde-se ver que as retas que passavam por esse triângulo se preservavam sempre sendo mediatrizes de seus lados</i>.</p> <p>US40P2: Entende que a solução de um problema surgiu do movimento de um ponto que evidenciou <i>a preservação de propriedades da construção</i>.</p> <p>US2P4: Compreende que <i>a reta que separa em lados opostos o ponto A e sua reflexão A', é perpendicular à reta que passa por esses pontos</i>. Afirma que isso foi visto quando realizaram movimentos no ponto A e viram que mesmo com esses movimentos, as retas persistiam perpendiculares entre si.</p> <p>US17P4: <i>Afirma ter visto conceitos nas construções realizadas</i>, mas, entende que esses conceitos se tornaram mais visíveis quando foram realizados movimentos em pontos e, com isso, na construção inteira.</p> <p>US25P4: <i>Ao ver propriedades e invariantes em um movimento realizado</i>, compreende a importância da elaboração das atividades de forma que invariantes possam se mostrar e ajudar na resolução das mesmas.</p> <p>US26P4: Durante a realização de um movimento, <i>visualiza um triângulo e entende que as retas que por seus lados passavam, eram mediatrizes desses lados</i>.</p>	
<p>US2A1: <i>Movendo uma das mãos sinaliza</i> o movimento de um ponto e, <i>com a outra mão, aponta</i> para a região angular que vai se modificando com o movimento desse ponto.</p> <p>US6A1: <i>Realiza movimentos com as mãos para indicar e apontar</i> na projeção o que está falando.</p> <p>US10A1: <i>Realiza o gesto com a mão de apontar, dirigido à projeção</i>, indicando um posicionamento que deve ser construído na interface do <i>software</i>.</p> <p>US8A3: <i>Com o indicador da mão direita sinaliza</i> na projeção um percurso linear.</p> <p>US10A3: <i>Gesticula com o dedo indicador da mão direita um movimento linear</i> sobre um segmento projetado no <i>data show</i>.</p> <p>US13A3: <i>Aponta na projeção um ponto de encontro</i> entre dois objetos construídos.</p> <p>US10A4: <i>Movendo sua mão sobre a projeção</i>, simula uma reta perpendicular a uma outra reta passando por um ponto dado.</p> <p>US11A4: <i>Com o dedo indicador da mão direita aponta na projeção</i> a posição de um ponto que ela ainda vira a construir no <i>software</i>.</p> <p>US2A6: <i>Na projeção, aponta uma região</i> para a qual chama a atenção dos sujeitos.</p> <p>US5A6: <i>Indica na projeção</i> o local onde seria criado o ponto de interseção de dois objetos.</p> <p>US6A6: <i>Posiciona o dedo na projeção</i>, no local onde seria criado um ponto.</p> <p>US10A6: <i>Aponta para a projeção</i> indicando cada ponto sobre os quais está falando.</p> <p>US21A6: Diz de um segmento construído e <i>aponta para o mesmo</i> na projeção.</p> <p>US4A7: Diz de uma região angular e <i>aponta para ela na projeção</i>, intencionando que os sujeitos se voltem a ela.</p> <p>US10A8: <i>Posiciona seus dedos indicadores simultaneamente sobre dois pontos aos quais chama à atenção</i> dos sujeitos.</p> <p>US12A8: <i>Com os dedos indicadores, demarca o início e o fim de</i> segmentos sobrepostos, evidenciando a igualdade de seus comprimentos.</p> <p>US13A8: Ao dizer da igualdade de dois segmentos, <i>desliza o dedo indicador da mão direita sobre cada um deles</i> para evidenciar sobre quais segmentos está falando.</p>	<p>*C07 - O movimento do corpo-próprio como modo de indicar e direcionar olhares</p>
<p>US1A1: <i>Realiza um movimento preciso com o mouse</i> buscando fazer com que o ângulo entre dois segmentos construídos na interface do <i>software</i> seja de 90°.</p>	<p>*C08 - Controle do mouse e do</p>

<p>US4A1: Frente a um objetivo almejado junto à interface do <i>software</i>, a aluna <i>controla e determina o início e o fim de um movimento</i> por ela realizado.</p> <p>US12A1: Realiza <i>movimentos com o mouse assumindo determinada direção e sentido de movimento</i>.</p> <p>US18A1: <i>Controla o movimento do ponto E</i>, levando-o para fora do campo. Com isso, verifica como verdadeira a possibilidade de o ponto F manter-se fixo.</p> <p>US19A1: <i>Acelerando o movimento do mouse</i>, e com isso também acelerando o ponto movido, valida a conjectura de que a bola poderia estar em qualquer lugar, dentro ou fora do campo, e mesmo assim o ponto onde se cavaría para retirar a cápsula, não muda.</p> <p>US5A2: <i>Controla o objeto movido e o como ele deve ser movido</i> para alcançar um objetivo da tarefa.</p> <p>US7A2: <i>O movimento é controlado pelo aluno</i>. Ele estabelece a precisão de seu movimento para alcançar um objetivo.</p> <p>US25A3: Percebe na interface do <i>software</i> um triângulo e o posicionamento da mangueira com relação ao mesmo, quando <i>realizados movimentos limitados, menores</i>, que não desconfiguram esse triângulo.</p> <p>US5A4: <i>Realiza um movimento cauteloso, preciso</i>, intencionando alcançar um objetivo previamente pensado.</p> <p>US7A4: <i>Controla o movimento e o fim do movimento de um ponto</i> ao passo que percebe que com esse movimento se aproxima de uma igualdade a qual se almejava alcançar.</p> <p>US8A8: <i>Realiza um movimento de rotação, controlando-o</i> de forma que o segmento rotacionado em torno de uma de suas extremidades, ocupe uma posição desejada.</p> <p>US4P3: Afirma que <i>são eles que controlam o mouse</i> e que os movimentos expressos na interface do <i>software</i> são correlatos do movimento que eles realizam com o <i>mouse</i>.</p> <p>US12P3: <i>Entende que controla a situação que envolve o movimento</i> e a visualização do movimento. Por controla-la, pôde escolher o nível de atenção, de foco dado a ela.</p> <p>US15P3: Enfatiza que <i>os movimentos realizados não foram “soltos”</i> - qualquer movimento, movimento de qualquer objeto. Foi visto o que poderia ser movido e a partir disso foram realizados os movimentos.</p> <p>US4P4: Entende que na investigação com <i>software</i> não se pode ser muito “afoito”; <i>deve-se realizar movimentos, mas, sempre ficar atento ao que esse movimento produz</i> na interface do <i>software</i>.</p> <p>US5P4: <i>Vê que movimentos mais cautelosos forneciam mais elementos</i> para resolver a atividade.</p>	<p>movimento com ele realizado</p>
<p>US17A1: Nas configurações do movimento percebido, <i>visualiza uma possibilidade de movimento que está além do enunciado da atividade</i>. Materializada essa possibilidade compreende que ainda assim, o ponto F não muda de posição.</p> <p>US9A2: Após tentar mover pontos, <i>compreende que nem todo ponto é movível diretamente, mas pode ser movido através do movimento de outro ponto</i> vinculado de alguma maneira a ele.</p> <p>US14A3: Compreende que reconstruir não é necessário, pois <i>o movimento de um ponto já dá as novas configurações que essa nova construção daria</i>.</p> <p>US20A3: Compreende que <i>há possibilidade de movimento</i> de pontos. <i>No entanto, esse movimento limita-se a ser linear</i>.</p> <p>US9A4: Afirma que ao parar o movimento em determinada posição foi possível olhar para a totalidade dos objetos na interface <i>software</i> e <i>perceber que uma construção específica junto ao que a parada do movimento mostrava, lhe daria um objeto que seria uma reflexão de um ponto em relação à reta dada</i>, que viria a ser relevante à resolução do problema.</p> <p>US6A5: <i>A atenção às implicações dos movimentos realizados faz emergir uma ideia</i>, que consiste em fixar um dos pontos no local desejado e tentar conduzir o outro ponto à posição que ele deveria ocupar conforme solicita o enunciado.</p>	<p>*C09 – Percepção de possibilidades que se mostram junto ao movimento realizado</p>

<p>US5P1: Afirma que <i>após o movimento de um ponto foi possível ver muitas coisas</i>.</p> <p>US2P2: Entende que o movimento realizado e visto na interface do <i>software</i> ajudou na resolução das atividades, uma vez que <i>com o movimento foi possível ver possibilidades que poderiam contribuir para essas resoluções</i>.</p> <p>US28P2: Afirma que <i>foi o movimento realizado que permitiu ver o traçado</i> que demarcava a solução do problema.</p> <p>US30P2: Afirma que <i>uma possibilidade matemática que resolveria o problema foi vista apenas quando realizados movimentos</i> com os quais pôde-se ver aproximadamente a posição de um ponto.</p> <p>US31P2: Entende que <i>o movimento ajudou a ver algumas possibilidades</i> e testar a coerência das mesmas.</p> <p>US38P2: Entende que <i>do movimento e visualização do movimento realizado vieram ideias</i> para resolução dos problemas.</p> <p>US3P4: Entende que <i>realizando movimentos</i> e atentando-se às implicações desses movimentos na interface do <i>software</i>, <i>conseguiram observar padrões, descobrir, organizar informações</i> e discutir sobre elas. Entende que esse modo de agir foi aprendido durante a realização das atividades.</p> <p>US5P4: <i>Vê que movimentos mais cautelosos forneciam mais elementos</i> para resolver a atividade.</p> <p>US6P4: Entende ter aprendido mais efetivamente quando realizou movimentos e atentou-se às relações entre as construções feitas. <i>Relações que se mostravam nesses movimentos</i>.</p>	
<p>US17A1: Nas configurações do movimento percebido, visualiza uma possibilidade de movimento que está além do enunciado da atividade. <i>Materializada essa possibilidade compreender</i> que ainda assim, o ponto F não muda de posição.</p> <p>US18A1: <i>Controla o movimento</i> do ponto E, levando-o para fora do campo. <i>Com isso, verifica como verdadeira a possibilidade</i> de o ponto F manter-se fixo.</p> <p>US19A1: <i>Acelerando o movimento do mouse</i>, e com isso também acelerando o ponto movido, <i>valida a conjectura de que a bola poderia estar em qualquer lugar</i>, dentro ou fora do campo, e mesmo assim o ponto onde se cavaría para retirar a cápsula, não muda.</p> <p>US16A2: <i>Para verificar a possibilidade</i> de interseção de retas, <i>realiza movimentos</i> em um ponto atentando-se ao que esse movimento provoca nas retas construídas.</p> <p>US29A3: <i>Realiza movimento de um ponto para verificar a conjectura de que um outro ponto</i> ligado a esse que está sendo movido, <i>pertence a uma reta previamente construída</i>.</p> <p>US12A4: <i>Afirma que o que ajudou a ver</i> a posição na qual o armador poderia estar, <i>foi a possibilidades de colocá-lo em movimento, simulando posições ocupadas por ele</i> e atentando aos ângulos que iam se configurando com seu movimento.</p> <p>US3A5: <i>Após realizar dobras na folha conclui</i> que a resolução do problema passa por criar pontos de reflexão. Conclui que se deve criar a reflexão de dois pontos dados, pois ao realizar movimentos na construção, as duas reflexões também se movem.</p> <p>US8A5: <i>Realiza movimentos para mostrar e garantir que duas retas são paralelas</i>.</p> <p>US16A5: <i>Buscando validar a percepção de uma invariância, realiza movimentos</i> e atenta-se às implicações desses movimentos.</p> <p>US17A5: Buscando validar uma conjectura, mede o comprimento de segmentos e <i>realiza movimentos para verificar a percepção de que as medidas encontradas são invariantes</i> e demarcam as posições que são soluções do problema.</p> <p>US18A5: <i>Após realizar movimentos buscando validar uma conjectura, chega à conclusão de que ela é verdadeira</i> e, com isso, de que o problema tem solução única.</p> <p>US16A8: Afirma que o movimento fez emergir algumas <i>intuições que puderam ser posteriormente testadas e validadas</i>.</p>	<p>*C10 - O movimento para atualizar uma possibilidade percebida</p>

<p>US9P2: Afirma que quando realizava movimentos algo se mostrava. No entanto, <i>a incerteza de estar vendo algo verdadeiro levou à realização de mais movimentos visando verificar a veracidade, ou não, disso que se mostrava.</i></p> <p>US16P2: Enfatiza que <i>foi ficando atento ao movimento, visando validar uma possibilidade, que pôde ver</i> se ela é correta ou falsa. Entende que essa realização abre caminho para novas possibilidades.</p> <p>US29P2: Entende que <i>foi o movimento de um objeto que permitiu alcançar um objetivo predeterminado.</i></p> <p>US31P2: Entende que <i>o movimento ajudou a ver algumas possibilidades e testar a coerência das mesmas.</i></p>	
<p>US13A1: <i>Tem na possibilidade de movimento</i> junto ao <i>software</i> e no que esse movimento mostra, <i>a garantia para afirmar</i> que um ponto se preserva invariante mesmo após a variação de um ponto vinculado a ele.</p> <p>US18A1: <i>Controla o movimento</i> do ponto E, levando-o para fora do campo. Com isso, <i>verifica como verdadeira a possibilidade</i> de o ponto F manter-se fixo.</p> <p>US19A1: <i>Acelerando o movimento do mouse,</i> e com isso também acelerando o ponto movido, <i>valida a conjectura</i> de que a bola poderia estar em qualquer lugar, dentro ou fora do campo, e mesmo assim o ponto onde se cavaría para retirar a cápsula, não muda.</p> <p>US21A1: Entende <i>o movimento como o modo de validar a solução</i> do problema.</p> <p>US16A2: <i>Para verificar</i> a possibilidade de interseção de retas, <i>realiza movimentos</i> em um ponto atentando-se ao que esse movimento provoca nas retas construídas.</p> <p>US28A3: <i>O movimento e a percepção</i> do movimento de um ponto na interface do <i>software</i> são <i>tomados como elementos comprobatórios de uma conjectura.</i></p> <p>US29A3: <i>Realiza movimento de um ponto para verificar a conjectura</i> de que um outro ponto ligado a esse que está sendo movido, pertence a uma reta previamente construída.</p> <p>US30A3: <i>Afirma que mover a mangueira colocando-a sobre uma reta percebida é a solução do problema.</i></p> <p>US16A5: <i>Buscando validar</i> a percepção de uma invariância, <i>realiza movimentos</i> e atenta-se às implicações desses movimentos.</p> <p>US17A5: <i>Buscando validar uma conjectura,</i> mede o comprimento de segmentos e <i>realiza movimentos para verificar</i> a percepção de que as medidas encontradas são invariantes e demarcam as posições que são soluções do problema.</p> <p>US19A6: <i>Conclui como resolvido o problema após posicionar um segmento (taco) sobre a reta</i> que demarca a direção da tacada.</p> <p>US5A7: <i>Realiza um movimento buscando</i> ajustar uma construção e <i>validar uma conjectura.</i></p> <p>US15P1: Entende que possibilidades do <i>software</i> como criar e apagar e principalmente a possibilidade de <i>mover os objetos construídos, contribuem para a validação de soluções</i> encontradas para um problema.</p> <p>US31P2: Entende que <i>o movimento ajudou a ver algumas possibilidades e testar a coerência das mesmas.</i></p> <p>US8P4: Compreende que <i>a validação de uma propriedade</i> e de suas características, bem como o estudo das mesmas, <i>ocorre mediante realizações que às põe em movimento.</i></p> <p>US38P4: <i>Afirma ter feito testes em um processo de validação que não exige</i> várias construções, mas <i>o simples movimento de um ponto.</i></p>	<p>*C11 - O movimento para evidenciar e validar conjecturas e respostas</p>
<p>US13A1: <i>Tem na possibilidade de movimento</i> junto ao <i>software</i> e no que esse movimento mostra, <i>a garantia para afirmar que um ponto se preserva invariante</i> mesmo após a variação de um ponto vinculado a ele.</p>	<p>*C12 - O movimento para validar a evidência de</p>

<p>US17A1: <i>Nas configurações do movimento percebido, visualiza</i> uma possibilidade de movimento que está além do enunciado da atividade. Materializada essa possibilidade compreende <i>que ainda assim, o ponto F não muda de posição</i>.</p> <p>US19A1: <i>Acelerando o movimento do mouse</i>, e com isso também acelerando o ponto movido, <i>valida a conjectura</i> de que a bola poderia estar em qualquer lugar, dentro ou fora do campo, e mesmo assim <i>o ponto onde se cavaria para retirar a cápsula, não muda</i>.</p> <p>US8A5: Realiza <i>movimentos para mostrar e garantir que duas retas são paralelas</i>.</p> <p>US16A5: <i>Buscando validar a percepção de uma invariância, realiza movimentos</i> e atenta-se às implicações desses movimentos.</p> <p>US17A5: Buscando validar uma conjectura, mede o comprimento de segmentos e <i>realiza movimentos para verificar a percepção de que as medidas encontradas são invariantes</i> e demarcam as posições que são soluções do problema.</p> <p>US3A7: Compreende que a solução do problema é uma reta que é diagonal de um retângulo. <i>Ao fazer com que essa reta se mova, conclui que ela sempre será a diagonal de um retângulo</i>.</p> <p>US28P1: <i>Afirma que se pode ver o que não varia na figura quando realizado um “simples” movimento</i> sobre um ponto.</p> <p>US37P1: Entende que <i>sem a realização de movimentos, não haveria a visualização da preservação de propriedades, de invariantes</i>.</p> <p>US2P4: Compreende que a reta que separa em lados opostos o ponto A e sua reflexão A', é perpendicular à reta que passa por esses pontos. Afirma que isso foi visto quando realizaram movimentos no ponto A e <i>viram que mesmo com esses movimentos, as retas persistiam perpendiculares entre si</i>.</p>	invariantes percebidos
<p>US5A1: <i>Vale-se da visualidade do software para afirmar</i> a igualdade ou proximidade de uma medida angular.</p> <p>US13A1: <i>Tem na possibilidade de movimento junto ao software e no que esse movimento mostra, a garantia para afirmar</i> que um ponto se preserva invariante mesmo após a variação de um ponto vinculado a ele.</p> <p>US3A2: <i>Encontra no aspecto visual de uma construção no software justificativa para determinar uma igualdade</i>.</p> <p>US24A3: <i>Entende que se pode garantir</i> a perpendicularidade <i>realizando movimentos e olhando</i> para a região angular que vai se configurando nesse movimento.</p> <p>US28A3: <i>O movimento e a percepção do movimento</i> de um ponto na interface do <i>software são tomados como elementos comprobatórios</i> de uma conjectura.</p> <p>US9A4: Afirma que ao parar o movimento em determinada posição <i>foi possível olhar para a totalidade dos objetos na interface software e perceber</i> que uma construção específica junto ao que a parada do movimento mostrava, lhe daria um objeto que seria uma reflexão de um ponto em relação à reta dada, <i>que viria a ser relevante à resolução do problema</i>.</p> <p>US12A4: <i>Afirma que o que ajudou a ver a posição na qual o armador poderia estar, foi a possibilidades de colocá-lo em movimento</i>, simulando posições ocupadas por ele e atentando aos ângulos que iam se configurando com seu movimento.</p> <p>US7A5: <i>Ao mover e ver várias posições ocupadas por alguns pontos, diz ter visto a possibilidade</i> de traçar retas perpendiculares a uma outra reta, passando por esses pontos que se mostram em movimento.</p> <p>US53P2: Afirma que <i>foi ao ver invariantes</i> na variação provocada pelo movimento, <i>que pôde encontrar soluções para os problemas</i>.</p>	*C13 - A justificativa a partir do que se vê das implicações do movimento na tela
<p>US11A2: Compreende que <i>no movimento de um objeto há movimentação de outros objetos</i>, mas há também, objetos que não se movem.</p> <p>US15A5: Compreende que <i>quando realiza movimentos em E e F, A' e M' também se movem</i>, mudando de lugar. Mas, sempre que se ajusta para que A' e M' ocupam as posições que são solução do problema, eles retornam para uma mesma posição, que é única.</p>	*C14 - Percepção do movimento realizado em um ponto

<p>US2A7: <i>Move o ponto B e com isso faz com que se mova o ponto E.</i> Intenciona com esse movimento posicionar o ponto E sobre uma reta dada.</p> <p>US34P1: Afirma que <i>ao movimentar um ponto, o que está ligado a esse ponto também se movimenta.</i></p> <p>US19P2: Enfatiza que <i>clitando sobre um ponto vinculado a uma figura e movendo-o, pode-se destorcer a figura</i>, provocando nela configurações como ampliar ou reduzir seu tamanho.</p> <p>US34P2: <i>Afirma ter visto o triângulo se modificando enquanto um ponto ligado a ele era movido.</i> Afirma que nesse mesmo movimento, pôde-se ver que as retas que passavam por esse triângulo se preservavam sempre sendo mediatrizes de seus lados.</p>	<p>implicando na variação de posição de outros pontos</p>
<p>US14A1: Credita à construção devidamente feita, <i>a preservação de sua estrutura mesmo após movimentos realizados.</i></p> <p>US16A1: <i>Visualiza propriedades que sustentam toda a construção.</i> Propriedades essas <i>que não variam quando realizado um movimento.</i></p> <p>US20A1: <i>Credita ao percurso da construção</i>, atendendo ao enunciado, <i>a não variação de algumas “coisas” quando incidido um movimento nessa construção.</i></p> <p>US13A2: Entende que, <i>no movimento, objetos matemáticos podem variar, mas as propriedades que os abarca e os vinculam se preservam invariantes</i> nesse movimento.</p> <p>US15A2: <i>Visualiza que três retas sempre se encontram em um mesmo ponto</i>, por mais diversas que sejam as posições ocupadas por elas após realizados movimentos.</p> <p>US17A2: <i>Visualiza nas configurações do movimento, um ponto onde sempre se encontram as mediatrizes do triângulo.</i></p> <p>US18A2: Compreende que <i>um ponto, por mais que se mostre em movimento, mantém como invariante sua característica de ser circuncentro.</i></p> <p>US15A3: Afirma que realiza movimentos junto ao <i>software</i> e que percebe mudanças. No entanto, entende que <i>junto a essas mudanças há propriedades que se preservam.</i></p> <p>US21A3: Enfatiza que quando realizado um movimento “tudo sai do lugar”, mas, <i>nessa desconfiguração se preservam as propriedades previamente estabelecidas na construção.</i></p> <p>US26A3: Compreende que sempre, ou seja, <i>em qualquer que seja a configuração do triângulo em movimento, as retas construídas se preservam como sendo as mediatrizes de seus lados.</i></p> <p>US15A6: Afirma não ser preciso refazer <i>a construção</i>, visto que <i>quando ela é movida, as propriedades fixadas se preservam.</i></p> <p>US37P1: Entende que <i>sem a realização de movimentos, não haveria a visualização da preservação de propriedades, de invariantes.</i></p> <p>US36P2: Entende que foram realizadas construções estruturadas por propriedades matemáticas fixadas e relacionadas umas às outras nessa construção. No entanto, <i>foi ao mover essa construção que pôde-se ver as ligações presentes nessas propriedades.</i></p> <p>US40P2: Entende que a solução de um problema surgiu do <i>movimento de um ponto que evidenciou a preservação de propriedades da construção.</i></p> <p>US12P4: Apresenta uma ideia de atividade na qual se estuda uma figura geométrica movimentando-a no <i>software</i> e atentando-se aos invariantes que persistem nesse movimento. <i>Invariantes com os quais se poderia definir essa figura.</i></p> <p>US21P4: <i>Entende ter visto mais claramente as propriedades quando as viu se preservar em meio a movimentos</i> realizados em pontos associados a elas.</p> <p>US26P4: Durante a realização de um movimento, <i>visualiza um triângulo e entende que as retas que por seus lados passavam, eram mediatrizes desses lados.</i></p>	<p>*C15 - Percepção de propriedades pré-estabelecidas na construção da figura que é posta em movimento</p>
<p>US4A3: Inicia a construção de um segmento <i>sobre o qual irá “andar”, conforme solicita o enunciado da atividade.</i></p> <p>US11A3: <i>Se coloca no lugar do personagem do enunciado</i>, realizando um movimento tal como esse personagem deveria realizar.</p>	<p>*C16 - O desempenhar-se como personagem</p>

<p>US22P2: Entende que os enunciados propõem o movimento de “sair do lugar” realizado pelos personagens que neles estão. Entende que <i>isso fez com que se colocasse no lugar desses personagens</i>, se inserindo no contexto das atividades e realizando os movimentos que esses personagens deveriam realizar.</p> <p>US23P2: Entende que <i>quem resolve o problema pode assumir-se sendo ele um ponto a ser movido</i> na interface do <i>software</i>.</p>	<p>e/ou objeto projetado na tela</p>
<p>US11A1: <i>No movimento de um ponto, percebe que outro ponto (vinculado ao primeiro) se mantém estático.</i></p> <p>US13A1: Tem na possibilidade de movimento junto ao <i>software</i> e no que esse movimento mostra, a garantia para afirmar que <i>um ponto se preserva invariante mesmo após a variação de um ponto vinculado a ele.</i></p> <p>US16A1: Visualiza propriedades que sustentam toda a construção. <i>Propriedades essas que não variam quando realizado um movimento.</i></p> <p>US17A1: <i>Nas configurações do movimento</i> percebido, visualiza uma possibilidade de movimento que está além do enunciado da atividade. Materializada essa possibilidade compreende que ainda assim, <i>o ponto F não muda de posição.</i></p> <p>US19A1: Acelerando o movimento do <i>mouse</i>, e com isso também <i>acelerando o ponto movido</i>, valida a conjectura de que a bola poderia estar em qualquer lugar, dentro ou fora do campo, e mesmo assim <i>o ponto onde se cavaria para retirar a cápsula, não muda.</i></p> <p>US11A2: Compreende que <i>no movimento de um objeto há movimentação de outros objetos, mas há também, objetos que não se movem.</i></p> <p>US12A2: Entende que, <i>no movimento, objetos matemáticos podem variar, mas as propriedades que os abarca e os vinculam se preservam invariantes nesse movimento.</i></p> <p>US15A2: Visualiza que <i>três retas sempre se encontram em um mesmo ponto, por mais diversas que sejam as posições ocupadas por elas após realizados movimentos.</i></p> <p>US17A2: <i>Visualiza nas configurações do movimento, um ponto onde sempre se encontram as mediatrizes do triângulo.</i></p> <p>US18A2: Compreende que <i>um ponto, por mais que se mostre em movimento, mantém como invariante sua característica de ser circuncentro.</i></p> <p>US15A3: Afirma que realiza movimentos junto ao <i>software</i> e que percebe mudanças. No entanto, entende que <i>junto a essas mudanças há propriedades que se preservam.</i></p> <p>US19A3: Afirma que <i>que pontos em movimento evidenciam um percurso linear, dizendo que essa linearidade é uma invariância.</i></p> <p>US20A3: Compreende que há possibilidade de movimento de pontos. No entanto, <i>esse movimento limita-se a ser linear.</i></p> <p>US21A3: Enfatiza que quando realizado um movimento “tudo sai do lugar”, mas, <i>nessa desconfiguração se preservam as propriedades previamente estabelecidas na construção.</i></p> <p>US26A3: Compreende que sempre, ou seja, <i>em qualquer que seja a configuração do triângulo em movimento, as retas construídas se preservam como sendo as mediatrizes de seus lados.</i></p> <p>US15A5: Compreende que quando realiza movimentos em E e F, A' e M' também se movem, mudando de lugar. Mas, <i>sempre que se ajusta para que A' e M' ocupam as posições que são solução do problema, eles retornam para uma mesma posição, que é única.</i></p> <p>US13A6: Compreende que mesmo após o movimento de um ponto, tudo que foi feito, e que a ele está ligado, se preserva, <i>não varia com esse movimento.</i></p> <p>US3A7: Compreende que a solução do problema é uma reta que é diagonal de um retângulo. Ao fazer com que essa reta se mova, conclui que <i>ela sempre será a diagonal de um retângulo.</i></p> <p>US6P1: <i>Enfatiza ter visto invariantes quando realizados movimentos</i> em um ponto, levando-o para qualquer lugar na interface do <i>software</i>.</p>	<p>*C17 - Percepção de mudanças na interface que produzem variações articulando invariantes</p>

<p>US26P1: Entende que <i>a visualização de invariantes ocorre quando há realização de movimentos.</i></p> <p>US28P1: Afirma que <i>se pode ver o que não varia na figura quando realizado um “simples” movimento</i> sobre um ponto.</p> <p>US34P2: Afirma ter visto o triângulo se modificando enquanto um ponto ligado a ele era movido. Afirma que <i>nesse mesmo movimento</i>, pôde-se ver que <i>as retas que passavam por esse triângulo se preservavam sempre sendo mediatrizes de seus lados.</i></p> <p>US40P2: Entende que a solução de um problema surgiu do <i>movimento de um ponto que evidenciou a preservação de propriedades da construção.</i></p> <p>US52P2: Afirma que realizou movimentos e <i>percebeu na interface invariantes junto a esses movimentos.</i></p> <p>US53P2: Afirma que <i>foi ao ver invariantes na variação provocada pelo movimento</i>, que pôde encontrar soluções para os problemas.</p> <p>US2P4: Compreende que a reta que separa em lados opostos o ponto A e sua reflexão A', é perpendicular à reta que passa por esses pontos. Afirma que isso foi visto quando realizaram movimentos no ponto A e viram que <i>mesmo com esses movimentos, as retas persistiam perpendiculares entre si.</i></p> <p>US21P4: Entende ter visto mais claramente as propriedades <i>quando as viu se preservar em meio a movimentos</i> realizados em pontos associados a elas.</p>	
<p>US9A2: Após tentar mover pontos, compreende que <i>nem todo ponto é movível diretamente, mas pode ser movido através do movimento de outro ponto</i> vinculado de alguma maneira a ele.</p> <p>US10A2: Entende que <i>um ponto “solto” sobre uma reta pode ser movido, e que outros pontos que estão vinculados a ele não podem ser movidos diretamente.</i> Entende que esses pontos se movem quando realizado movimento em um ponto móvel ao qual estão vinculados.</p> <p>US12A4: Afirma que <i>o que ajudou a ver a posição</i> na qual o armador poderia estar, <i>foi a possibilidades de colocá-lo em movimento</i>, simulando posições ocupadas por ele e atentando aos ângulos que iam se configurando com seu movimento.</p> <p>US3A5: <i>Após realizar dobras</i> na folha conclui que a resolução do problema passa por criar pontos de reflexão. <i>Conclui que se deve criar a reflexão</i> de dois pontos dados, pois ao realizar movimentos na construção, as duas reflexões também se movem.</p>	<p>*C18 - Percepção da possibilidade de movimento e de suas possíveis implicações</p>
<p>US9A4: Afirma que <i>ao parar o movimento</i> em determinada posição <i>foi possível olhar</i> para a totalidade dos objetos na interface <i>software</i> e perceber que uma construção específica junto ao que a parada do movimento mostrava, lhe daria um objeto que seria uma reflexão de um ponto em relação à reta dada, que viria a ser relevante à resolução do problema.</p> <p>US20P3: <i>Afirma ter pensado sobre o que a interface mostrou após um movimento</i>, e, a partir do que emerge desse pensamento, pôs-se a pensar em outros movimentos e possibilidades.</p> <p>US19P3: <i>Afirma ter parado</i> em alguns momentos da realização da atividade <i>para pensar</i> sobre o que foi feito, <i>sobre o que alguns movimentos realizados poderiam mostrar na interface.</i></p> <p>US7P4: Compreende que deve mover os objetos, mas, <i>deve-se parar o movimento para refletir sobre o que foi visto</i> durante/no mesmo.</p> <p>US9P4: Entende que daria para se destacar muitas coisas sobre determinada propriedade se em um momento <i>parassem para anotar o que veem</i> quando ela é posta em movimento.</p>	<p>*C19 - O ato de parar o movimento possibilitando visualizar o feito</p>
<p>US30A3: Afirma que <i>mover a mangueira colocando-a sobre uma reta percebida é a solução do problema.</i></p> <p>US12A4: Afirma que <i>o que ajudou a ver a posição na qual o armador poderia estar, foi a possibilidades de colocá-lo em movimento</i>, simulando posições ocupadas por ele e atentando aos ângulos que iam se configurando com seu movimento.</p>	<p>*C20 - A solução do problema creditada às possibilidades de realização e visualização</p>

<p>US9A5: Afirma que <i>o movimento de um ponto</i> e a criação de uma reta que passe por ele <i>ajudou a ver que a dobra, solução do problema</i>, deveria ser a mediatriz do seguimento AA'.</p> <p>US11A5: <i>Move o ponto E intencionando projetar o ponto M'</i> -que está vinculado sinestesticamente a E- sobre um segmento dado. <i>Desta forma ele afirma ter alcançado a solução do problema.</i></p> <p>US16A6: Afirma que <i>de um movimento realizado emerge a solução do problema.</i></p> <p>US15A8: Compreende que <i>os movimentos realizados foram importantes para que percebesse a solução do problema</i>, que seria dada por reflexão de um ponto com relação a uma reta.</p> <p>US17A8: Compreende que todo o processo de desenvolvimento da atividade, em especial a possibilidade de <i>mover pontos e segmentos fez ficar evidente que a solução do problema poderia se dar por reflexão</i> de um ponto com relação a uma reta.</p> <p>US22P1: Afirma que foi <i>só com o software e com a possibilidade que o mesmo lhe dá de mover objetos, que ele pôde resolver o problema.</i></p> <p>US36P1: Entende que as possibilidades de <i>movimento e de visualização do movimento</i> na interface do <i>software foram "fundamentais" para resolução dos problemas.</i></p> <p>US10P2: Entende que <i>foi o movimento realizado que permitiu visualizar soluções</i> mais diretas aos problemas. Afirma que sem o movimento essas soluções não poderiam ser vistas.</p> <p>US28P2: Afirma que foi o <i>movimento realizado</i> que <i>permitiu ver o traçado que demarcava a solução do problema.</i></p> <p>US38P2: Entende que <i>do movimento e visualização do movimento</i> realizado <i>vieram ideias para resolução dos problemas.</i></p> <p>US39P2: Entende que <i>com a realização de movimentos pôde-se chegar às repostas das atividades.</i></p> <p>US40P2: Entende que <i>a solução de um problema surgiu do movimento</i> de um ponto que evidenciou a preservação de propriedades da construção.</p> <p>US34P4: Entende ter aprendido que <i>em um movimento</i> realizado <i>podem aparecer informações relevantes à solução das atividades.</i></p>	<p>de movimentos</p>
<p>US2A1: <i>Movendo uma das mãos sinaliza o movimento de um ponto</i> e, com a outra mão, aponta para a região angular que vai se modificando com o movimento desse ponto.</p> <p>US10A1: <i>Realiza o gesto com a mão</i> de apontar, dirigido à projeção, <i>indicando um posicionamento que deve ser construído</i> na interface do <i>software.</i></p> <p>US11A4: <i>Com o dedo indicador da mão direita aponta na projeção a posição de um ponto que ela ainda vira a construir</i> no <i>software.</i></p> <p>US1A5: Realiza <i>dobradura de uma folha de papel antecipando um movimento</i> a ser realizado no ambiente de GD.</p> <p>US3A5: <i>Após realizar dobras</i> na folha conclui que a resolução do problema passa por criar pontos de reflexão. <i>Conclui que se deve criar a reflexão de dois pontos dados</i>, pois ao realizar movimentos na construção, as duas reflexões também se movem.</p> <p>US11A8: <i>Para simular</i> um movimento de rotação de um segmento, a partir da extremidade a ser rotacionada, <i>ele desliza o dedo indicador da mão direita</i> até o ponto que seria o fim da rotação, o ponto sobre o qual estava posicionado o dedo indicador da mão esquerda.</p>	<p>*C21 - A simulação de movimentos antes de efetivá-los no software</p>
<p>US2A2: Movendo o <i>mouse, move uma reta até que ela passe por um ponto já conhecido.</i></p> <p>US3A3: Realiza o movimento de <i>transladar uma reta até que ela passe por um ponto já determinado.</i></p> <p>US30A3: Afirma que <i>mover a mangueira colocando-a sobre uma reta percebida</i> é a solução do problema.</p> <p>US4A4: Estabelece o <i>movimento de um ponto visando deixar esse ponto e outros dois colineares.</i></p>	<p>*C22 - Realização de movimento visando um posicionament o específico para o objeto movido</p>

<p>US7A4: Controla o movimento e o fim do movimento de um ponto ao passo que percebe que <i>com esse movimento se aproxima de uma igualdade a qual se almejava alcançar.</i></p> <p>US4A5: <i>Realiza movimentos tentando posicionar dois pontos simultaneamente em lugares específicos.</i> Conclui após tentativas, que ao conseguir posicionar um destes pontos no local intencionado, o outro ponto não ocupa a posição que deveria ser ocupada por ele.</p> <p>US5A5: <i>Realiza diversos movimentos tentando posicionar simultaneamente dois pontos em lugares específicos.</i> Pontos estes cujo movimento de um faz com que o outro também se movimente.</p> <p>US10A5: <i>Move um ponto objetivando que o mesmo fique sobre um segmento dado.</i></p> <p>US11A5: <i>Move o ponto E intencionando projetar o ponto M' -que está vinculado sinesteticamente a E- sobre um segmento dado. Desta forma ele afirma ter alcançado a solução do problema.</i></p> <p>US14A5: <i>Arrastar um segmento até que o mesmo fique sobre uma reta.</i></p> <p>US7A6: Realiza os <i>movimentos</i> de arrastar e de rotacionar <i>visando sobrepor um ponto a outro ponto e posicionar um segmento sobre uma reta.</i></p> <p>US14A6: <i>Move um ponto até que o mesmo ocupe um lugar previamente determinado.</i></p> <p>US1A7: Sabendo da posição que um ponto deve ocupar, ele <i>realiza movimentos intencionando levar esse ponto à posição previamente conhecida.</i></p> <p>US2A7: Move o ponto B e com isso faz com que se mova o ponto E. <i>Intenciona com esse movimento posicionar o ponto E sobre uma reta dada.</i></p> <p>US7A8: <i>Arrasta um ponto intencionando sobrepô-lo a outro ponto</i> expresso na interface do <i>software.</i></p> <p>US3P2: <i>Estabelece um movimento de um ponto objetivando colocá-lo em determinado lugar.</i></p> <p>US13P2: Evidencia os passos de criação de uma reta paralela a uma outra reta. Diz visualizar a reta paralela gerada e arrastá-la com <i>o movimento do mouse até que ela passasse por um ponto previamente conhecido.</i></p>	
<p>US6A5: <i>A atenção às implicações dos movimentos realizados faz emergir uma ideia</i>, que consiste em fixar um dos pontos no local desejado e tentar conduzir o outro ponto à posição que ele deveria ocupar conforme solicita o enunciado.</p> <p>US30P2: Afirma que <i>uma possibilidade matemática que resolveria o problema foi vista apenas quando realizados movimentos</i> com os quais pôde-se ver aproximadamente a posição de um ponto.</p> <p>US5P4: Vê que <i>movimentos mais cautelosos forneciam mais elementos para resolver a atividade.</i></p>	<p>*C23 – Insight de um modo de resolver o problema que se mostra junto ao movimento.</p>
<p>US4A2: <i>Antecipa o movimento e diz o que ele almeja com esse movimento.</i></p> <p>US6A2: <i>Antes de realizar o movimento, o aluno diz de sua intenção</i> com esse movimento a ser realizado.</p> <p>US7A3: <i>Diz de um movimento</i> de rotação e de um percurso <i>a serem realizados.</i></p> <p>US12A3: <i>Evidencia o sentido de um percurso a ser realizado.</i></p> <p>US27A3: <i>Diz</i> de construir uma reta <i>para em seguida</i> realizar movimentos objetivando verificar se um ponto flutuará sobre a mesma.</p> <p>US13A5: <i>Antecipa oralmente o movimento</i> de translação a ser realizado junto ao <i>software.</i></p> <p>US9A6: Após realizar construções fixando a propriedade de reflexão de pontos, <i>destaca o percurso a ser realizado por um ponto quando ele for posto em movimento</i> no <i>software.</i></p> <p>US17A6: <i>Antecipa um movimento a ser realizado</i> visando arrastar um segmento até que ele fique sobre uma reta construída.</p>	<p>*C24 - O ato de dizer de um movimento antes de realizá-lo no <i>software</i></p>

<p>US20A6: <i>Diz do percurso da bola ao mesmo tempo em que</i>, com o cursor do <i>mouse</i>, <i>mostra</i> na tela computacional <i>como se materializaria esse percurso</i> após a tacada.</p> <p>US9A8: <i>Diz de uma possibilidade de movimento</i>, de uma dobra a ser realizada, que faria coincidir dois pontos.</p> <p>US11A8: <i>Para simular</i> um movimento de rotação de um segmento, a partir da extremidade a ser rotacionada, ele desliza o dedo indicador da mão direita até o ponto que seria o fim da rotação, o ponto sobre o qual estava posicionado o dedo indicador da mão esquerda.</p>	
<p>US23A3: <i>Visando mostrar as características do movimento</i> de um ponto, <i>o aluno “habilita” rastro no mesmo</i> e realiza movimentos solicitando aos sujeitos que fiquem atentos ao rastro deixado no movimento.</p>	<p>*C25 - A inserção de “rastro” de movimento para fixar momentos do movimento que flui na tela</p>
<p>US5A2: <i>Controla</i> o objeto movido e <i>o como ele deve ser movido para alcançar um objetivo</i> da tarefa</p> <p>US27A3: <i>Diz de construir uma reta para em seguida realizar</i> movimentos objetivando verificar se um ponto flutuará sobre a mesma.</p> <p>US12A4: Afirma que o que ajudou a ver a posição na qual o armador poderia estar, foi a possibilidades de colocá-lo em movimento, <i>simulando posições ocupadas</i> por ele e atentando aos ângulos que iam se configurando com seu movimento.</p> <p>US6A5: A atenção às implicações dos movimentos realizados faz emergir <i>uma ideia, que consiste em fixar um dos pontos no local desejado e tentar conduzir o outro ponto à posição que ele deveria ocupar conforme solicita o enunciado</i>.</p> <p>US1A6: Compreende que a melhor maneira de pensar o percurso do movimento de um ponto, seria <i>considerar sua posição final e ir voltando até a primeira posição por ele ocupada</i>.</p> <p>US45P2: Entende que por saber previamente que o <i>software</i> permite o movimento de arrastar, <i>pode pensar em um movimento a ser realizado antes mesmo de efetivá-lo</i>.</p> <p>US46P2: Entende que <i>o saber que antecipa o que pode ser movido e o como pode ser movido, permite a realização de movimentos mais precisos</i>, visando encontrar detalhes.</p>	<p>*C26 - O planejamento de como realizar determinados movimentos</p>
<p>US14A2: <i>Evidencia ter realizado movimentos específicos aprendidos em aulas de Matemática, como translação e reflexão</i>.</p>	<p>*C27 - Os conhecimentos prévios de Matemática sustentando movimentos realizados</p>
<p>US18A6: <i>Realiza um movimento anteriormente pensado</i> e expresso oralmente.</p> <p>US16A8: Afirma que <i>o movimento fez emergir algumas intuições que puderam ser posteriormente testadas e validadas</i>.</p> <p>US41P1: Afirma que <i>realizando movimentos</i> de objetos com o <i>mouse</i>, <i>mostrou a seus colegas de grupo alguns pensamentos seus</i> se materializando na interface do <i>software</i>.</p> <p>US8P2: Enfatiza que <i>houve uma iniciativa reflexiva</i> buscando resolver o problema, <i>mas, foi o ato de pegar o mouse e realizar movimentos que fez com que o desenvolvimento dessa resolução se efetivasse</i>.</p>	<p>*C28 - A realização de um movimento anteriormente pensado</p>
<p>US1A2: <i>Realiza um movimento ao mesmo tempo em que fala do mesmo</i>.</p> <p>US9A3: <i>Falas e movimentos junto ao software são realizações simultâneas do</i> sujeito que controla o <i>mouse</i> e a tela computacional.</p>	<p>*C29 - O ato de mover ao mesmo tempo em que se fala do movimento que realiza,</p>

<p>US17A3: <i>Conclui ao mesmo tempo em que está movendo C e atentando-se ao que acontece na interface do software</i></p> <p>US22A3: <i>Enquanto realiza movimento em um ponto, solicita aos sujeitos que se voltem ao movimento</i> de um outro ponto que está vinculado ao ponto que está sendo movido.</p> <p>US1A4: <i>Movendo o cursor do mouse</i> mostra uma região angular <i>e convida os sujeitos a atentarem-se a isso que com o cursor se mostra.</i></p> <p>US2A4: <i>Para mostrar</i> na interface do <i>software</i> o objeto matemático <i>que está explicando</i>, ele <i>desliza o cursor percorrendo as dimensões desse objeto.</i></p> <p>US12A5: <i>Com o cursor do mouse em movimento</i>, aponta e <i>convida os sujeitos a atentarem-se</i> à uma reta construída.</p> <p>US20A6: <i>Diz do percurso da bola ao mesmo tempo em que, com o cursor do mouse, mostra</i> na tela computacional como se materializaria esse percurso após a tacada.</p> <p>US42P1: Enfatiza que <i>enquanto move o mouse e vai expondo as implicações desse movimento</i> na interface do <i>software</i> e do que se está pensando com esse movimento, os colegas de grupo podem ver e entender o que está sendo feito. Enfatiza com isso, que essa possibilidade está ligada ao movimento e à visualização do movimento permitidos pelo <i>software</i>.</p>	<p>evidenciando que se dá conta do que faz</p>
<p>US22A3: Enquanto <i>realiza movimento em um ponto, solicita aos sujeitos que se voltem ao movimento de um outro</i> ponto que está vinculado ao ponto que está sendo movido.</p> <p>US29A3: <i>Realiza movimento de um ponto para verificar a conjectura de que um outro ponto ligado a esse que está sendo movido</i>, pertence a uma reta previamente construída.</p> <p>US4A4: <i>Estabelece o movimento de um ponto visando deixar esse ponto e outros dois colineares.</i></p> <p>US4A5: Realiza movimentos tentando posicionar dois pontos simultaneamente em lugares específicos. Conclui após tentativas, que <i>ao conseguir posicionar um destes pontos no local intencionado, o outro ponto não ocupa a posição que deveria ser ocupada</i> por ele.</p> <p>US5A5: Realiza diversos movimentos tentando posicionar simultaneamente dois pontos em lugares específicos. <i>Pontos estes cujo movimento de um faz com que o outro também se movimente.</i></p>	<p>*C30 - Realização de movimentos em um ponto visando a variação de posição de outro ponto a ele vinculado.</p>
<p>US19P2: Enfatiza que clicando sobre um ponto vinculado a uma figura e movendo-o, pode-se destorcer a figura, <i>provocando nela configurações como ampliar ou reduzir seu tamanho.</i></p> <p>US7A4: Controla o movimento e o fim do movimento de um ponto ao passo que <i>percebe que com esse movimento se aproxima de uma igualdade</i> a qual se almejava alcançar.</p> <p>US8A4: Realiza o movimento de um ponto e <i>atenta-se às amplitudes dos ângulos que se desconfiguram nesse movimento</i>, visando deixá-los iguais ou com medidas aproximadas.</p> <p>US3A8: Entende que movimentos que fazem deslocar-se um ponto para a direita ou para esquerda de uma determinada posição, <i>faz o valor da soma de dois segmentos aumentar ou diminuir</i> com relação ao resultado específico dado quando o ponto está na posição anterior aos movimentos.</p>	<p>*C31 - Percepção de ampliação e redução de medidas junto ao movimento realizado</p>
<p>US5A8: Compreende que <i>um resultado não se determina apenas com o movimento</i>, ele deve ser validado de outra forma.</p>	<p>*C32 - Compreensão da impossibilidade e de se validar algo só com realização de movimentos</p>
<p>US14A2: Evidencia ter realizado movimentos específicos aprendidos em aulas de Matemática, como <i>translação e reflexão.</i></p>	<p>*C33 - Realização de movimentos isométricos</p>

<p>US3A3: Realiza o <i>movimento de transladar</i> uma reta até que ela passe por um ponto já determinado.</p> <p>US5A3: Realiza o <i>movimento de rotação</i> de um ponto sobre outro ponto considerando uma amplitude angular e um sentido de rotação.</p> <p>US13A5: Antecipa oralmente o <i>movimento de translação</i> a ser realizado junto ao <i>software</i>.</p> <p>US3A6: Vale-se de conhecimento escolar para realizar o <i>movimento de reflexão</i> de um ponto.</p> <p>US7A6: Realiza os <i>movimentos de arrastar e de rotacionar</i> visando sobrepor um ponto a outro ponto e posicionar um segmento sobre uma reta.</p> <p>US9A6: Após realizar construções <i>fixando a propriedade de reflexão de pontos</i>, destaca o percurso a ser realizado por um ponto quando ele for posto em movimento no <i>software</i>.</p> <p>US8A8: Realiza um <i>movimento de rotação</i>, controlando-o de forma que o segmento rotacionado em torno de uma de suas extremidades, ocupe uma posição desejada.</p> <p>US14A8: Ao <i>construir a reflexão de um ponto em relação a uma reta</i>, mostra e diz ter confirmado que a reflexão do ponto sobrepõe outro ponto anteriormente projetado.</p>	
<p>US13A4: <i>Credita a ideia de reflexão que emergiu à possibilidade de movimentar</i> um ponto.</p> <p>US6A5: A atenção às implicações dos <i>movimentos realizados faz emergir uma ideia</i>, que consiste em fixar um dos pontos no local desejado e tentar conduzir o outro ponto à posição que ele deveria ocupar conforme solicita o enunciado.</p> <p>US16A8: Afirma que <i>o movimento fez emergir algumas intuições</i> que puderam ser posteriormente testadas e validadas.</p>	<p>*C34 - O movimento e a expressão do mesmo na tela gerando intuições</p>
<p>US3A1: <i>Com o movimento do mouse faz mover-se um ponto que está na interface do software.</i></p> <p>US9P1: Entende que <i>ao realizar um movimento pode-se atentar ao que o mesmo provoca na interface do software.</i></p> <p>US16P1: Enfatiza que <i>com a manipulação do mouse pode-se construir e arrastar objetos na interface do software.</i></p> <p>US18P1: Entende como “questão” principal do <i>software o “arrastar”, que permite tirar um objeto do lugar com movimentos realizados com o mouse.</i></p> <p>US41P1: Afirma que <i>realizando movimentos de objetos com o mouse, mostrou a seus colegas de grupo alguns pensamentos seus se materializando na interface do software.</i></p> <p>US42P1: Enfatiza que <i>enquanto move o mouse e vai expondo as implicações desse movimento na interface do software</i> e do que se está pensando com esse movimento, os colegas de grupo podem ver e entender o que está sendo feito. Enfatiza com isso, que essa possibilidade está ligada ao movimento e à visualização do movimento permitidos pelo <i>software</i>.</p> <p>US1P2: Afirma que <i>quando clicou sobre um objeto e o arrastou, foi possível ver esse movimento acontecendo na interface do software</i>, bem como o movimento que esse ato de arrastar provocou em toda construção ligada a esse objeto.</p> <p>US4P2: Enfatiza que <i>simultaneamente ao movimento que vai sendo realizado, pode-se ir vendo-o, percebendo-o se materializando na interface do software.</i></p> <p>US13P2: Evidencia os passos de criação de uma reta paralela a uma outra reta. <i>Diz visualizar a reta paralela gerada e arrastá-la com o movimento do mouse</i> até que ela passasse por um ponto previamente conhecido.</p> <p>US20P2: Entende que <i>o movimento realizado em uma figura deixa um rastro que é visto na interface</i> em toda a duração desse movimento.</p> <p>US26P2: <i>Afirma ter visto o movimento se materializando como mudanças na interface</i>, nas figuras.</p> <p>US1P3: Entende que <i>vê na interface do software o movimento que realiza com o mouse.</i></p>	<p>*C35 - Percepção do movimento realizado com <i>mouse</i> e de sua expressão na tela</p>

<p>US11P3: Diz que <i>realizaram movimentos com o mouse e voltaram-se à interface para ver o que acontecia nela.</i></p> <p>US16P3: Afirma ter pego o <i>mouse</i>, clicado sobre objetos e ter arrastado o <i>mouse</i>. Entende que <i>esse movimento do mouse acontece também na interface do software.</i></p> <p>US3P4: Entende que <i>realizando movimentos e atentando-se às implicações desses movimentos na interface do software</i>, conseguiram observar padrões, descobrir, organizar informações e discutir sobre elas. Entende que esse modo de agir foi aprendido durante a realização das atividades.</p>	
<p>US12P3: Entende que controla a situação que envolve o movimento e a visualização do movimento. Por controla-la, <i>pôde escolher o “nível de atenção”, de foco dado a ela.</i></p>	<p>*C36 - O “nível de atenção” direcionado ao que se mostra na tela</p>
<p>US11P2: <i>Afirma ter realizado movimentos em todo o tempo</i> em que esteve desenvolvendo as atividades.</p> <p>US2P3: <i>Afirma que são eles</i>, movendo o <i>mouse</i>, <i>que fazem acontecer movimentos</i> na interface do <i>software</i>.</p> <p>US3P3: <i>Afirma que são eles que realizam o movimento.</i></p> <p>US4P3: <i>Afirma que são eles que controlam o mouse</i> e que os movimentos expressos na interface do <i>software</i> são correlatos do movimento que eles realizam com o <i>mouse</i>.</p> <p>US9P3: <i>Afirma que são eles se movendo que fazem com que os objetos se movam.</i></p> <p>US14P3: <i>Compreende que são eles que fazem o movimento</i>, eles que clicam nos pontos e os arrastam.</p> <p>US24P3: <i>Compreende que o movimento acontece porque é ele que se põe a mover o mouse.</i></p> <p>US25P3: <i>Afirma que são eles que movem os pontos.</i></p>	<p>*C37 - Percepção de si como sujeito movente</p>
<p>US15P2: Afirma que <i>é com atenção ao movimento</i> realizado e ao que esse movimento provoca na interface do <i>software</i>, <i>que se percebe</i> invariantes e possibilidades.</p> <p>US13P3: Entende que <i>visualizam o movimento</i> e as propriedades que emergem dele, <i>pois põem-se atentos</i> e tomam conta do espaço em que o movimento acontece.</p>	<p>*C38 - Compreensão de que para perceber é preciso estar atento ao movimento que se evidencia na tela</p>
<p>US9A2: <i>Após tentar mover</i> pontos, <i>compreende que nem todo ponto é móvel</i> diretamente, mas pode ser movido através do movimento de outro ponto vinculado de alguma maneira a ele.</p> <p>US10A2: Entende que <i>um ponto “solto” sobre uma reta pode ser movido</i>, e que outros pontos que estão vinculados a ele não podem ser movidos diretamente. Entende que esses pontos se movem quando realizado movimento em um ponto móvel ao qual estão vinculados.</p> <p>US20A3: <i>Compreende que há possibilidade de movimento de pontos.</i> No entanto, esse movimento limita-se a ser linear.</p> <p>US6A4: Entende que <i>no Geogebra pode-se mover um ponto expresso em sua interface. Esse entendimento o levou a efetivar movimentos</i> nesse ponto.</p> <p>US12A6: <i>Sabendo que no Geogebra um ponto pode ser movido, ele realiza movimentos</i> nesse ponto direcionando-o à posições especificadas no enunciado da atividade.</p> <p>US44P2: Entende que <i>todas as construções apresentadas na interface do software poderiam ser movidas.</i></p>	<p>*C39 - Percepção do movimento consoante ao que pode ser movido</p>

<p>US45P2: Entende que <i>por saber previamente que o software permite o movimento de arrastar, pode pensar em um movimento</i> a ser realizado antes mesmo de efetivá-lo.</p> <p>US46P2: Entende que <i>o saber que antecipa o que pode ser movido e o como pode ser movido, permite a realização de movimentos</i> mais precisos, visando encontrar detalhes.</p> <p>US15P3: Enfatiza que os movimentos realizados não foram “soltos” - qualquer movimento, movimento de qualquer objeto. <i>Foi visto o que poderia ser movido e a partir disso foram realizados os movimentos.</i></p> <p>US26P3: Enfatiza que na busca por uma solução, <i>um objeto cujo movimento seria “interessante”, era simplesmente movido.</i></p>	
<p>US16P1: Enfatiza que <i>com a manipulação do mouse pode-se construir e arrastar objetos na interface</i> do software.</p> <p>US18P1: Entende como “questão” principal do software o <i>“arrastar”, que permite tirar um objeto do lugar com movimentos realizados com o mouse.</i></p> <p>US24P1: Compreende que <i>o movimento realizado com o mouse pode ser visto ao mesmo tempo se materializando na interface</i> do software.</p> <p>US1P2: Afirma que <i>quando clicou sobre um objeto e o arrastou, foi possível ver esse movimento acontecendo na interface</i> do software, bem como o movimento que esse ato de arrastar provocou em toda construção ligada a esse objeto.</p> <p>US1P3: Entende que <i>vê na interface do software o movimento que realiza com o mouse.</i></p> <p>US2P3: Afirma que são eles, <i>movendo o mouse, que fazem acontecer movimentos na interface</i> do software.</p> <p>US4P3: Afirma que são eles que controlam o <i>mouse</i> e que <i>os movimentos expressos na interface do software são correlatos do movimento que eles realizam com o mouse.</i></p> <p>US7P3: Afirma que quando clica em um ponto na interface do software, <i>esse ponto se move se um movimento for realizado com o mouse.</i></p> <p>US16P3: Afirma ter pego o <i>mouse</i>, clicado sobre objetos e ter arrastado o <i>mouse</i>. Entende que esse <i>movimento do mouse acontece também na interface do software.</i></p>	<p>*C40 - Percepção de que a transformação se dá no mouse e na tela</p>
<p>US4A3: Inicia a construção de um segmento sobre o qual <i>irá “andar”, conforme solicita o enunciado da atividade.</i></p> <p>US6A5: A atenção às implicações dos movimentos realizados faz emergir uma ideia, que consiste em fixar um dos pontos no local desejado e <i>tentar conduzir o outro ponto à posição que ele deveria ocupar conforme solicita o enunciado.</i></p> <p>US5P2: Entende que <i>nas atividades mostrou-se muitas vezes a possibilidade de mover</i> um objeto visando perceber algo relevante à resolução do problema.</p> <p>US21P2: Entende que <i>o movimento foi presente em todo o desenvolvimento das atividades</i>, incluindo o próprio enunciado, que convida à realização de movimentos.</p> <p>US22P2: Entende que <i>os enunciados propõem o movimento de “sair do lugar”</i> realizado pelos personagens que neles estão. Entende que isso fez com que se colocasse no lugar desses personagens, se inserindo no contexto das atividades e realizando os movimentos que esses personagens deveriam realizar.</p> <p>US32P2: <i>Afirma ter visto o movimento em atividades que solicitavam mover</i> pontos para que se percebesse suas soluções.</p> <p>US48P2: Entende que <i>a presença do movimento está ligada às solicitações das atividades.</i></p> <p>US18P3: Entende que <i>as atividades foram elaboradas de forma que o movimento fosse um meio para perceber</i> propriedades e invariantes, e de testar possíveis soluções.</p> <p>US32P3: <i>Entende que se as atividades não exigissem movimento, elas poderiam ser desenvolvidas no papel.</i></p> <p>US18P4: Enfatiza ter aprendido como trabalhar conceitos geométricos e conexões de conceitos em <i>situações que envolvem movimentos.</i></p>	<p>*C41 - Percepção de que o movimento já está solicitado nas atividades propostas</p>

<p>US20P4: Entende que <i>as atividades</i> programadas para serem trabalhadas no <i>software devem solicitar o movimento e a atenção ao movimento</i>.</p> <p>US25P4: Ao ver propriedades e invariantes em um movimento realizado, <i>compreende a importância da elaboração das atividades de forma que invariantes possam se mostrar e ajudar na resolução das mesmas</i>.</p> <p>US27P4: Entende que se <i>deve colocar nas atividades a serem trabalhadas em softwares, elementos que solicitem construções e movimento</i> de objetos.</p>	
<p>US20A3: <i>Compreende que há possibilidade de movimento</i> de pontos. No entanto, esse movimento limita-se a ser linear.</p> <p>US6A4: Entende que <i>no Geogebra pode-se mover um ponto expresso em sua interface</i>. Esse entendimento o levou a efetivar movimentos nesse ponto.</p> <p>US12A6: Sabendo que <i>no Geogebra um ponto pode ser movido</i>, ele realiza movimentos nesse ponto direcionando-o à posições especificadas no enunciado da atividade.</p> <p>US44P2: Entende que <i>todas as construções apresentadas na interface do software poderiam ser movidas</i>.</p>	<p>*C42 - Percepção de que o que está na tela é potencialmente dinâmico</p>
<p>US20P3: <i>Afirma ter pensado sobre o que a interface mostrou após um movimento</i>, e, a partir do que emerge desse pensamento, pôs-se a pensar em outros movimentos e possibilidades.</p> <p>US19P3: <i>Afirma ter parado</i> em alguns momentos da realização da atividade <i>para pensar sobre o que foi feito</i>, sobre o que alguns movimentos realizados poderiam mostrar na interface.</p> <p>US21P3: Compreende que <i>a situação de mover</i> que envolve o computador, o <i>mouse</i> e a pessoa que move, não é puramente física, ela <i>é também reflexiva, já que a pessoa além de realizar movimentos, põe-se a pensar sobre o movimento realizado</i>.</p> <p>US7P4: Compreende que deve mover os objetos, mas, <i>deve-se parar o movimento para refletir sobre o que foi visto durante/no mesmo</i>.</p> <p>US9P4: Entende que daria para se destacar muitas coisas sobre determinada propriedade <i>se em um momento parassem para anotar o que veem</i> quando ela é posta em movimento.</p>	<p>*C43 - A retomada reflexiva dos movimentos realizados e das mudanças por eles configuradas na tela</p>
<p>US42P1: Enfatiza que <i>enquanto move o mouse e vai expondo as implicações desse movimento na interface do software e do que se está pensando com esse movimento</i>, os colegas de grupo podem ver e entender o que está sendo feito. Enfatiza com isso, que essa possibilidade está ligada ao movimento e à visualização do movimento permitidos pelo <i>software</i>.</p> <p>US20P3: <i>Afirma ter pensado sobre o que a interface mostrou após um movimento, e, a partir do que emerge desse pensamento, pôs-se a pensar em outros movimentos e possibilidades</i>.</p> <p>US37P4: Descreve que <i>na duração do desenvolvimento da tarefa ele foi movendo, pensando, refletindo e vendo possibilidades</i>.</p>	<p>*C44 - O dar-se conta de estar refletindo enquanto realiza movimentos</p>
<p>US23P3: Entende que <i>percebe o movimento porque está vendo-o acontecer</i>.</p>	<p>*C45 - Compreensão da percepção ligada ao ver</p>
<p>US24P1: Compreende que <i>o movimento realizado com o mouse pode ser visto ao mesmo tempo se materializando na interface</i> do <i>software</i>.</p> <p>US1P3: Entende que <i>vê na interface do software o movimento que realiza com o mouse</i>.</p> <p>US4P3: Afirma que são eles que controlam o <i>mouse</i> e que <i>os movimentos expressos na interface do software são correlatos do movimento que eles realizam com o mouse</i>.</p> <p>US7P3: Afirma que quando clica em um ponto na interface do <i>software</i>, <i>esse ponto se move se um movimento for realizado com o mouse</i>.</p> <p>US16P3: Afirma ter pego o <i>mouse</i>, clicado sobre objetos e ter arrastado o <i>mouse</i>. Entende que <i>esse movimento do mouse acontece também na interface do software</i>.</p>	<p>*C46 - Percepção do movimento que se evidencia na tela como correlato do movimento realizado com o <i>mouse</i></p>

<p>US1P3: Entende que <i>vê na interface do software o movimento que realiza com o mouse.</i></p> <p>US2P3: Afirma que <i>são eles, movendo o mouse, que fazem acontecer movimentos na interface do software.</i></p> <p>US4P3: Afirma que são eles que controlam o <i>mouse</i> e que <i>os movimentos expressos na interface do software são correlatos do movimento que eles realizam com o mouse.</i></p> <p>US5P3: Entende que <i>se não fosse eles realizando movimentos, não haveria movimento na interface do software.</i></p> <p>US6P3: Entende que <i>se não fosse eles, a interface do software não passaria de uma tela em branco.</i></p> <p>US7P3: Afirma que quando clica em um ponto na interface do <i>software, esse ponto se move se um movimento for realizado com o mouse.</i></p> <p>US8P3: Entende que <i>o movimento na interface do software tem uma relação de “dependência” com quem realiza o movimento.</i></p> <p>US9P3: Afirma que <i>são eles se movendo que fazem com que os objetos se movam.</i></p> <p>US24P3: Compreende <i>que o movimento acontece porque é ele que se põe a mover o mouse.</i></p> <p>US25P3: Afirma que <i>são eles que movem os pontos.</i></p> <p>US33P3: <i>Vê-se como realizador dos movimentos que avançam à interface do software e, enfatiza que, sem ele, não haveria esse movimento.</i></p>	<p>*C47 - Percepção de si como realizador do movimento que se expõe na tela.</p>
<p>US5P3: Entende que <i>se não fosse eles realizando movimentos, não haveria movimento na interface do software.</i></p> <p>US6P3: Entende que <i>se não fosse eles, a interface do software não passaria de uma tela em branco.</i></p> <p>US8P3: Entende que <i>o movimento na interface do software tem uma relação de “dependência” com quem realiza o movimento.</i></p> <p>US17P3: Entende que <i>se não houver um querer mover por parte de quem se volta ao software, nada acontece no mesmo.</i></p> <p>US29P3: Compreende que <i>o computador não trabalha sem alguém que o coloque a trabalhar.</i></p> <p>US30P3: Compara a relação das pessoas com o computador e delas com o celular, afirmando se tratar da mesma relação, no sentido de que, <i>se as pessoas não realizarem algo neles, nada com eles acontecerá.</i></p> <p>US31P3: Compreende que <i>uma situação construída no software se torna igual a uma situação construída no papel se não houver alguém que se volte à construção no software e realize nela movimentos.</i></p>	<p>*C48 - Percepção da ausência de movimento na tela, que se evidencia na também ausência do sujeito-movente</p>
<p>US11P2: <i>Afirma ter realizado movimentos em todo o tempo</i> em que esteve desenvolvendo as atividades.</p> <p>US21P2: Entende que <i>o movimento foi presente em todo o desenvolvimento das atividades</i>, incluindo o próprio enunciado, que convida à realização de movimentos.</p> <p>US10P3: Entende que <i>na resolução das atividades, eles estavam em movimento.</i></p> <p>US37P4: Descreve que <i>na duração do desenvolvimento da tarefa ele foi movendo</i>, pensando, refletindo e vendo possibilidades.</p>	<p>*C49 – O sujeito se percebe em movimento em todo o desenvolvimento das atividades</p>
<p>US17P3: Entende que <i>se não houver um querer mover</i> por parte de quem se volta ao <i>software, nada acontece</i> no mesmo.</p> <p>US27P3: Afirma <i>que há um querer mover que é anterior ao ato de realizar o movimento.</i></p>	<p>*C50 – O movimento como atualização de um querer mover</p>

<p>US18A6: <i>Realiza um movimento anteriormente pensado</i> e expresso oralmente.</p> <p>US41P1: Afirma que <i>realizando movimentos</i> de objetos com o <i>mouse</i>, <i>mostrou a seus colegas de grupo alguns pensamentos</i> seus se materializando na interface do <i>software</i>.</p> <p>US8P2: Enfatiza que <i>houve uma iniciativa reflexiva</i> buscando resolver o problema, <i>mas, foi</i> o ato de pegar o <i>mouse</i> e <i>realizar movimentos que fez com que o desenvolvimento dessa resolução se efetivasse</i>.</p> <p>US40P1: <i>Comparando o trabalho no software com o trabalho no papel, enfatiza que o computador é mais atraente, fornecendo um dinamismo que permite mostrar algumas ideias pensadas</i>.</p>	<p>*C51 - Percepção do movimento que se expõe na tela como sendo a materialização de um pensamento</p>
<p>US8P1: <i>Mostra gostar da possibilidade de arrastar</i> e ver as implicações desse movimento materializando-se na interface do <i>software</i></p> <p>US10P1: Entende que <i>os ícones que fornecem construções diretas tornam mais ágil as solicitações de uma tarefa</i>. No entanto, entende que é preciso conhecer e saber realizar no papel as construções que o <i>software</i> fornece num simples clicar.</p> <p>US11P1: Enfatiza que <i>a resolução de um problema com o software é mais rápida</i>.</p> <p>US13P1: Compreende que mesmo <i>o software ofertando ícones que fornecem algumas construções prontas</i>, o trabalho nesse ambiente não fica mais fácil se não se sabe trabalhar com as construções fornecidas.</p> <p>US14P1: Entende que <i>as possibilidades de construção do software tornam o trabalho investigativo mais prático</i> e rápido.</p> <p>US17P1: Entende que <i>as possibilidades construtivas dos ícones do software deixam o trabalho mais rápido</i>.</p> <p>US21P1: Entende que <i>o software possibilita um trabalho prático, possibilita a experimentação</i> para que se veja a solução do problema ou algo que venha a ajudar na resolução do mesmo.</p> <p>US22P1: Afirma que <i>foi só com o software e com a possibilidade que o mesmo lhe dá de mover objetos, que ele pôde resolver o problema</i>.</p> <p>US29P1: Entende que o movimento de um objeto na interface do <i>software</i> faz acontecer outros movimentos nessa mesma interface. Entende também que <i>esse movimento, por ser possível através de uma programação computacional, torna o trabalho mais rápido</i>.</p> <p>US35P1: Ao exemplificar que o movimento de um ponto substitui uma diversidade de construções, <i>enfatiza que a possibilidade de arrastar, de mover objetos, é o que há de mais importante em softwares de GD</i>.</p> <p>US40P1: Comparando o trabalho no <i>software</i> com o trabalho no papel, enfatiza que <i>o computador é mais atraente, fornecendo um dinamismo que permite mostrar algumas ideias pensadas</i>.</p> <p>US6P2: Entende que <i>o software abre a possibilidade de movimentar</i>.</p> <p>US17P2: <i>Credita a possibilidade do movimento ao software</i>, enfatizando que é ele que permite a realização de movimentos.</p> <p>US25P2: Afirma que <i>é a possibilidade de arrastar do software que permite movimentos</i>.</p> <p>US23P4: Entende que <i>o software</i> é distinto do papel e <i>permite ver propriedades em movimento</i>.</p>	<p>*C52 - Percepção do potencial dinâmico do <i>software</i></p>
<p>US2P1: Diz da <i>possibilidade do software de ocultar objetos na construção para melhor visualização</i>.</p> <p>US39P1: <i>Indica a possibilidade de estudar as propriedades de uma construção colocando-a em movimento</i> e controlando a velocidade desse movimento.</p> <p>US49P2: Afirma que <i>ao mover as construções, pôde-se vê-las melhor, pôde-se estudá-las</i>.</p>	<p>*C53 - Compreensão de que a visualidade do <i>software</i> contribui para construir e para estudar</p>

	essas construções
<p>US4P1: Destaca <i>o movimento como sendo o elemento que torna mais distintos os trabalhos com régua/compasso e com software.</i></p> <p>US7P1: <i>Compara a possibilidade de movimento no papel e no software</i>, destacando que <i>no papel não se pode arrastar um ponto</i>, o que levaria ao entendimento de que a posição ocupada pela bola é única.</p> <p>US11P1: Enfatiza que <i>a resolução de um problema com o software é mais rápida.</i></p> <p>US12P1: Enfatiza que <i>o software possibilita maior precisão na construção.</i></p> <p>US14P1: Entende que <i>as possibilidades de construção do software tornam o trabalho investigativo mais prático e rápido.</i></p> <p>US17P1: Entende que <i>as possibilidades construtivas dos ícones do software deixam o trabalho mais rápido.</i></p> <p>US25P1: Comparando construções geométricas <i>no papel e no software</i>, enfatiza que <i>se pode ver as coisas acontecendo de forma muito mais rápida no software.</i></p> <p>US30P1: Entende que <i>no computador, construir e visualizar é mais fácil do que no papel.</i></p> <p>US31P1: Entende que <i>o software permite maior precisão na construção de medidas iguais e, desta forma, permite uma solução mais precisa para um problema.</i></p> <p>US32P1: Entende que <i>o software propicia em sua interface um trabalho mais “limpo” visualmente</i>, visto que quando ela estiver muito cheia, pode-se iniciar uma “limpeza”, ocultando objetos construídos.</p> <p>US33P1: Entende como <i>principal diferença entre construções no papel e construções no software a possibilidade de arrastar</i> presente no <i>software.</i></p> <p>US40P1: Comparando o trabalho no <i>software</i> com o trabalho no papel, <i>enfatiza que o computador é mais atraente, fornecendo um dinamismo</i> que permite mostrar algumas ideias pensadas.</p> <p>US18P2: Entende que <i>se a interface não ofertasse a possibilidade de movimentar um objeto ela seria o mesmo que uma folha, na qual um desenho feito é estático.</i></p> <p>US31P3: Compreende que <i>uma situação construída no software se torna igual a uma situação construída no papel se não houver alguém que se volte à construção no software e realize nela movimentos.</i></p> <p>US32P3: Entende que <i>se as atividades não exigissem movimento, elas poderiam ser desenvolvidas no papel.</i></p>	<p>*C54 - Compreensão de que o <i>software</i>, em comparação com o papel, permite maior agilidade, precisão e um trabalho mais limpo</p>
<p>US3P1: Entende que a agilidade, a visualidade e possibilidades como colorir e ocultar objetos presentes na interface do <i>software</i>, <i>permitem um trabalho distinto do trabalho com régua e compasso.</i></p> <p>US4P1: Destaca o movimento como sendo o elemento que torna mais distintos os <i>trabalhos com régua/compasso e com software.</i></p> <p>US7P1: Compara a possibilidade de <i>movimento no papel e no software</i>, destacando que no papel não se pode arrastar um ponto, o que levaria ao entendimento de que a posição ocupada pela bola é única.</p> <p>US23P1: Entende que ambos os trabalhos, <i>o com régua e compasso e o com software</i>, envolvem muita prática. Evidencia possibilidades de movimento em ambos os trabalhos.</p> <p>US23P4: Entende que <i>o software é distinto do papel</i> e permite ver propriedades em movimento.</p> <p>US24P4: Compreende que <i>propriedades apresentadas em livros didáticos ganham novas configurações quando trabalhadas em software</i>, podendo elas serem movidas.</p>	<p>*C55 - Compreensão de que no <i>software</i> e no papel abrem-se possibilidades distintas de trabalho</p>

<p>US23P1: Entende que ambos os trabalhos, o com régua e compasso e o com <i>software</i>, envolvem muita prática. Evidencia possibilidades de movimento em ambos os trabalhos.</p>	<p>*C56 - Compreensão de que o movimento se faz presente tanto no <i>software</i> quanto no papel</p>
<p>US10P1: Entende que os ícones que fornecem construções diretas tornam mais ágil as solicitações de uma tarefa. No entanto, entende que é preciso conhecer e saber realizar no papel as construções que o software fornece num simples clicar.</p> <p>US44P1: Compreende que construções realizadas diretamente ao clicar em ícones do software devem ser anteriormente realizadas passo a passo e compreendidas.</p> <p>US46P1: Afirma que os ícones que fornecem construções prontas não foram suficientes para deixar a atividade mais fácil.</p>	<p>*C57 - Compreensão da relevância de se conhecer os ícones do <i>software</i> e suas funcionalidades</p>
<p>US18P1: Entende como “questão” principal do software o “arrastar”, que permite tirar um objeto do lugar com movimentos realizados com o <i>mouse</i>.</p> <p>US35P1: Ao exemplificar que o movimento de um ponto substitui uma diversidade de construções, enfatiza que a possibilidade de arrastar, de mover objetos, é o que há de mais importante em softwares de GD.</p> <p>US25P2: Afirma que é a possibilidade de arrastar do software que permite movimentos.</p>	<p>*C58 - Compreensão da relevância do “arrastar”</p>
<p>US5A5: Realiza diversos movimentos tentando posicionar simultaneamente dois pontos em lugares específicos. Pontos estes cujo movimento de um faz com que o outro também se movimente.</p> <p>US19P1: Entende que realizando movimentos e repetindo movimentos pode-se ver algo que possa ajudar na resolução do problema.</p> <p>US9P2: Afirma que quando realizava movimentos algo se mostrava. No entanto, a incerteza de estar vendo algo verdadeiro levou à realização de mais movimentos visando verificar a veracidade, ou não, disso que se mostrava.</p>	<p>*C59 - A repetição de um movimento focando o que pode se mostrar e a veracidade disso que se mostra</p>
<p>US21P1: Entende que o software possibilita um trabalho prático, possibilita a experimentação para que se veja a solução do problema ou algo que venha a ajudar na resolução do mesmo.</p>	<p>*C60 - Percepção da possibilidade de exploração aberta pelo <i>software</i></p>
<p>US27P1: Compreende que para a resolução dos problemas trabalhados, a percepção dos invariantes foi importante.</p> <p>US38P1: Compreende que as construções e propriedades que as abarcam são vistas como relevantes para a solução do problema apenas quando elas são colocadas em movimento.</p> <p>US53P2: Afirma que foi ao ver invariantes na variação provocada pelo movimento, que pôde encontrar soluções para os problemas.</p> <p>US11P4: Compreende que os invariantes que emergiam dos movimentos eram relevantes para a resolução das atividades.</p>	<p>*C61 - A importância da percepção de invariantes para a (re)soluções das atividades</p>
<p>US11A1: No movimento de um ponto, percebe que outro ponto (vinculado ao primeiro) se mantém estático.</p> <p>US13A1: Tem na possibilidade de movimento junto ao <i>software</i> e no que esse movimento mostra, a garantia para afirmar que um ponto se preserva invariante mesmo após a variação de um ponto vinculado a ele.</p>	<p>*C62 - A percepção do que não se move consoante ao</p>

<p>US15A2: Visualiza que três retas sempre se encontram em <i>um mesmo ponto, por mais diversas que sejam as posições ocupadas por elas</i> após realizados movimentos.</p> <p>US26P1: Entende que <i>a visualização de invariantes ocorre quando há realização de movimentos.</i></p> <p>US28P1: Afirma que <i>se pode ver o que não varia</i> na figura <i>quando realizado um “simples” movimento</i> sobre um ponto.</p> <p>US37P1: Entende que <i>sem a realização de movimentos, não haveria a visualização da preservação</i> de propriedades, de invariantes.</p>	<p>movimento realizado</p>
<p>US39P1: Indica a possibilidade de <i>estudar as propriedades de uma construção colocando-a em movimento</i> e controlando a velocidade desse movimento.</p> <p>US49P2: Afirma que <i>ao mover as construções, pôde-se vê-las melhor, pôde-se estudá-las.</i></p> <p>US50P2: Entende como <i>interessante a ideia de estudar uma construção pondo-a em movimento.</i></p> <p>US8P4: Compreende que a validação de uma propriedade e de suas características, bem como <i>o estudo das mesmas, ocorre mediante realizações que às põe em movimento.</i></p> <p>US12P4: Apresenta uma ideia de atividade na qual se <i>estuda uma figura geométrica movimentando-a</i> no <i>software</i> e atentando-se aos invariantes que persistem nesse movimento. Invariantes com os quais se poderia definir essa figura.</p> <p>US22P4: Entende que <i>o estudo de invariantes poderia ser trabalhado</i> com alunos do ensino básico para que eles pudessem conhecer a fundo propriedades.</p>	<p>*C63 - O estudo de uma figura e de suas propriedades pondo-a em movimento</p>
<p>US41P1: Afirma que <i>realizando movimentos</i> de objetos com o <i>mouse, mostrou a seus colegas de grupo alguns pensamentos</i> seus se materializando na interface do <i>software</i>.</p> <p>US42P1: Enfatiza que <i>enquanto move o mouse e vai expondo</i> as implicações desse movimento na interface do <i>software</i> e do que se está pensando com esse movimento, <i>os colegas de grupo podem ver e entender</i> o que está sendo feito. Enfatiza com isso, que essa possibilidade está ligada ao movimento e à visualização do movimento permitidos pelo <i>software</i>.</p> <p>US43P2: Afirma ter <i>realizado movimentos no software para explicar suas ideias</i>. Entende que <i>o movimento explicativo pôde ser visto na interface pelos seus colegas</i> de grupo que, com isso, puderam entender e contribuir para/com essas ideias.</p> <p>US30P4: Afirma que durante as atividades, um <i>membro do grupo solicitava ao outro que realizasse determinado movimento</i> e, podendo também, tomar o controle do <i>mouse</i> para realizar movimentos. Entende que com isso as atividades foram desenvolvidas por todos e que <i>todos aprenderam juntos</i>.</p>	<p>*C64 - Percepção mediante atenção ao colega de grupo que realiza movimentos dizendo dos mesmos</p>
<p>US1A4: <i>Movendo o cursor do mouse mostra uma região angular e convida os cossujeitos</i> a atentarem-se a isso que com o cursor se mostra.</p> <p>US2A4: <i>Para mostrar</i> na interface do <i>software</i> o objeto matemático que está explicando, <i>ele desliza o cursor</i> percorrendo as dimensões desse objeto.</p> <p>US12A5: <i>Com o cursor</i> do <i>mouse</i> em movimento, <i>aponta e convida os cossujeitos</i> a atentarem-se à uma reta construída.</p> <p>US4A7: Diz de uma região angular e <i>aponta</i> para ela na projeção, <i>intencionando que os cossujeitos se voltem a ela</i>.</p> <p>US41P1: Afirma que <i>realizando movimentos</i> de objetos com o <i>mouse, mostrou a seus colegas de grupo alguns pensamentos</i> seus se materializando na interface do <i>software</i>.</p> <p>US42P1: Enfatiza que <i>enquanto move o mouse e vai expondo</i> as implicações desse movimento na interface do <i>software</i> e do que se está pensando com esse movimento, <i>os colegas de grupo podem ver e entender</i> o que está sendo feito. Enfatiza com isso, que essa possibilidade está ligada ao movimento e à visualização do movimento permitidos pelo <i>software</i>.</p>	<p>*C65 - O movimento e sua expressão visual na tela como modos de comunicação entre membros do grupo</p>

<p>US43P1: Entende que <i>a visualização do movimento ajudou no processo de comunicação e resolução do problema.</i></p> <p>US41P2: Indica ter realizado <i>movimentos no software visando explicar a seus companheiros</i> de grupo seus pensamentos.</p> <p>US42P2: Afirma que <i>o movimento é presente também na comunicação</i>, na troca de informações.</p> <p>US43P2: Afirma ter realizado movimentos no <i>software</i> para explicar suas ideias. Entende que <i>o movimento explicativo pôde ser visto na interface pelos seus colegas</i> de grupo que, com isso, puderam entender e contribuir para/com essas ideias.</p> <p>US29P4: Afirma que <i>o grupo</i> conseguiu resolver atividades <i>trocando informações sobre o que emerge de movimentos</i> realizados e compartilhando o controle do <i>mouse</i> para que cada um pudesse mostrar suas ideias com o movimento do mesmo.</p> <p>US30P4: Afirma que durante as atividades, <i>um membro do grupo solicitava ao outro que realizasse determinado movimento</i> e, podendo também, tomar o controle do <i>mouse</i> para realizar movimentos. Entende que com isso as atividades foram desenvolvidas por todos e que todos aprenderam juntos.</p> <p>US31P4: Enfatiza que <i>os membros do grupo revezavam o controle do software e discutiam juntos.</i></p> <p>US32P4: Diz que <i>no momento em que um membro do grupo realizava movimento com o mouse, o outro atentava-se às implicações desse movimento</i> na interface do <i>software</i> e dizia o que entendia do que estava vendo, às vezes tomando controle do <i>mouse</i> e mostrando com movimento o que queria dizer.</p>	
<p>US47P1: Enfatiza que <i>as ferramentas utilizadas, o que cada uma faz e a possibilidade dinâmica do software já eram de conhecimento dos alunos</i>, por isso pôde-se saber o que fazer com elas no desenvolvimento das atividades.</p> <p>US45P2: Entende que <i>por saber previamente que o software permite o movimento de arrastar, pode pensar em um movimento</i> a ser realizado antes mesmo de efetivá-lo.</p>	<p>*C66 - O conhecimento prévio dos ícones e de suas funções direcionando o que e como fazer</p>
<p>US8P1: Mostra gostar da possibilidade de <i>arrastar e ver as implicações desse movimento</i> materializando-se na interface do <i>software</i></p> <p>US9P1: Entende que <i>ao realizar um movimento pode-se atentar ao que o mesmo provoca</i> na interface do <i>software</i>.</p> <p>US10P1: Entende que os ícones que fornecem construções diretas tornam mais ágil as solicitações de uma tarefa. No entanto, entende que é preciso conhecer e saber realizar no papel as <i>construções que o software fornece num simples clicar</i>.</p> <p>US24P1: Compreende que <i>o movimento realizado com o mouse pode ser visto ao mesmo tempo se materializando na interface</i> do <i>software</i>.</p> <p>US42P1: Enfatiza que <i>enquanto move o mouse e vai expondo as implicações desse movimento na interface</i> do <i>software</i> e do que se está pensando com esse movimento, os colegas de grupo podem ver e entender o que está sendo feito. Enfatiza com isso, que essa possibilidade está ligada ao movimento e à visualização do movimento permitidos pelo <i>software</i>.</p> <p>US1P2: Afirma que <i>quando clicou sobre um objeto e o arrastou, foi possível ver esse movimento acontecendo na interface</i> do <i>software</i>, bem como o movimento que esse ato de arrastar provocou em toda construção ligada a esse objeto.</p> <p>US4P2: Enfatiza que <i>simultaneamente ao movimento que vai sendo realizado, pode-se ir vendo-o, percebendo-o</i> se materializando na interface do <i>software</i>.</p> <p>US20P2: Entende que <i>o movimento realizado em uma figura deixa um rastro que é visto na interface em toda a duração desse movimento</i>.</p>	<p>*C67 - Percepção da simultaneidade e entre movimento realizado com o <i>mouse</i> e a materialização desse movimento na tela</p>

<p>US26P2: Afirma ter visto <i>o movimento se materializando como mudanças na interface</i>, nas figuras.</p> <p>US1P3: Entende que <i>vê na interface do software o movimento que realiza com o mouse</i>.</p> <p>US16P3: Afirma ter pego o <i>mouse</i>, clicado sobre objetos e ter arrastado o <i>mouse</i>. Entende que <i>esse movimento do mouse acontece também na interface do software</i>.</p>	
<p>US6A4: Entende que <i>no Geogebra pode-se mover</i> um ponto expresso em sua interface. Esse entendimento o levou a efetivar movimentos nesse ponto.</p> <p>US21P1: Entende que <i>o software possibilita um trabalho prático</i>, possibilita a experimentação para que se veja a solução do problema ou algo que venha a ajudar na resolução do mesmo.</p> <p>US22P1: Afirma que foi só com o <i>software</i> e com <i>a possibilidade que o mesmo lhe dá de mover</i> objetos, que ele pôde resolver o problema.</p> <p>US42P1: Enfatiza que enquanto move o <i>mouse</i> e vai expondo as implicações desse movimento na interface do <i>software</i> e do que se está pensando com esse movimento, os colegas de grupo podem ver e entender o que está sendo feito. Enfatiza com isso, que essa possibilidade está ligada <i>ao movimento e à visualização do movimento permitidos pelo software</i>.</p> <p>US6P2: Entende que <i>o software abre a possibilidade de movimentar</i>.</p>	<p>*C68 - Compreensão de que o <i>software</i> abre possibilidades de movimento</p>
<p>US2A8: Se <i>vale do movimento junto ao mouse para testar posições</i> de um ponto visando encontrar uma menor medida para a soma de dois segmentos.</p> <p>US7P2: <i>Afirma ter visto a presença do movimento quando se pôs a testar possibilidades</i>.</p>	<p>*C69 - Percepção de movimento junto ao ato de testar possibilidades</p>
<p>US19P1: Entende que <i>realizando movimentos e repetindo movimentos pode-se ver algo</i> que possa ajudar na resolução do problema.</p> <p>US4P2: Enfatiza que simultaneamente ao <i>movimento que vai sendo realizado, pode-se ir vendo-o, percebendo-o</i> se materializando na interface do <i>software</i>.</p> <p>US9P2: Afirma que <i>quando realizava movimentos algo se mostrava</i>. No entanto, a incerteza de estar vendo algo verdadeiro levou à <i>realização de mais movimentos visando</i> verificar a veracidade, ou não, disso que se mostrava.</p>	<p>*C70 - Percepção de algo que vai se mostrando aos poucos na duração do movimento realizado</p>
<p>US12P2: <i>Entende como sendo movimentos aqueles realizados na construção de figuras, dentre os quais o de clicar sobre ferramentas</i>.</p> <p>US14P2: Enfatiza que <i>no processo de construção também houve movimento</i>.</p> <p>US24P2: Entende que <i>há movimento na criação de objetos e no arrastar desses objetos</i>, visando ver o que pode emergir de informações importantes junto a esse arrastar.</p> <p>US14P3: Compreende que são <i>eles que fazem o movimento, eles que clicam nos pontos</i> e os arrastam</p>	<p>*C71 - Percepção de movimento junto ao ato de clicar em ícones para realizar construções</p>
<p>US15P2: Afirma que <i>é com atenção ao movimento</i> realizado e ao que esse movimento provoca na interface do <i>software, que se percebe invariantes</i> e possibilidades.</p> <p>US3P4: Entende que <i>realizando movimentos e atentando-se</i> às implicações desses movimentos na interface do <i>software, conseguiram observar padrões</i>, descobrir, organizar informações e discutir sobre elas. Entende que esse modo de agir foi aprendido durante a realização das atividades.</p> <p>US6P4: Entende ter aprendido mais efetivamente quando <i>realizou movimentos e atentou-se às relações</i> entre as construções feitas. Relações que se mostravam nesses movimentos.</p>	<p>*C72 - Compreensão de que os invariantes se mostram quando se está atento ao movimento e às suas configurações</p>

<p>US16P2: Enfatiza que foi <i>ficando atento ao movimento</i>, visando validar uma possibilidade, que pôde ver se ela é correta ou falsa. <i>Entende que essa realização abre caminho para novas possibilidades.</i></p>	<p>*C73 - Compreensão de que a atenção ao movimento abre novas possibilidades</p>
<p>US17P2: <i>Credita a possibilidade do movimento ao software</i>, enfatizando que é ele que permite a realização de movimentos.</p> <p>US25P2: Afirma que <i>é a possibilidade de arrastar do software que permite movimentos.</i></p>	<p>*C74 - Compreensão de que mover é possibilidade aberta pelo <i>software</i></p>
<p>US29P1: Entende que <i>o movimento de um objeto na interface do software faz acontecer outros movimentos</i> nessa mesma interface. Entende também que esse movimento, por ser possível através de uma programação computacional, torna o trabalho mais rápido.</p> <p>US34P1: Afirma que <i>ao movimentar um ponto, o que está ligado a esse ponto também se movimenta.</i></p> <p>US1P2: Afirma que <i>quando clicou sobre um objeto e o arrastou, foi possível ver esse movimento acontecendo</i> na interface do <i>software</i>, <i>bem como o movimento que esse ato de arrastar provocou</i> em toda construção ligada a esse objeto.</p> <p>US24P2: Entende que <i>há movimento na criação de objetos e no arrastar desses objetos</i>, visando ver o que pode emergir de informações importantes junto a esse arrastar.</p> <p>US27P2: <i>Afirma ter visto o movimento quando se pôs a arrastar objetos</i> na interface do <i>software</i> esperando ver o que disso poderia emergir.</p> <p>US33P2: Afirma que <i>o movimento foi visível quando se puseram a arrastar</i> um ponto.</p> <p>US34P2: Afirma ter visto <i>o triângulo se modificando enquanto um ponto ligado a ele era movido</i>. Afirma que nesse mesmo movimento, pôde-se ver que as retas que passavam por esse triângulo se preservavam sempre sendo mediatrizes de seus lados.</p> <p>US35P2: Afirma que foi <i>realizando movimentos em objetos, e vendo esses objetos em movimento</i>, que pôde ver que uma terceira reta não construída <i>a priori</i> era a solução do problema.</p> <p>US37P2: Entende que <i>o movimento se presentifica quando se arrasta objetos</i> e quando se vê que nesse arrastar “tudo se encaixa”.</p>	<p>*C75 - Percepção do movimento que se mostra no ato de mover objetos na tela</p>
<p>US47P2: Entende que o que antecede a um movimento a ser realizado, como <i>saber o que se move e como se move, já se caracteriza como movimento.</i></p>	<p>*C76 - Compreensão de que o pensar no movimento já se configura como movimento</p>
<p>US18P2: Entende que <i>se a interface não ofertasse a possibilidade de movimentar um objeto ela seria o mesmo que uma folha</i>, na qual um desenho feito é estático.</p> <p>US44P2: Entende que <i>todas as construções apresentadas na interface do software poderiam ser movidas.</i></p> <p>US51P2: Entende que <i>se uma construção é posta no software, ela deve ser explorada no dinamismo</i> que esse <i>software</i> dispõe.</p> <p>US20P4: Entende que as <i>atividades programadas</i> para serem trabalhadas no <i>software</i> <i>devem solicitar o movimento</i> e a atenção ao movimento.</p>	<p>*C77 - Compreensão de que toda figura em GD deve ser projetada para ser dinâmica</p>

<p>US35P4: Compreende que <i>toda construção geométrica feita no software deve ser movida</i>, pois a estrutura desta construção se mostrará coerente apenas quando ela for movida e nesse movimento suas propriedades se preservarem.</p>	
<p>US22P4: Entende que o <i>estudo de invariantes poderia ser trabalhado com alunos do ensino básico para que eles pudessem conhecer a fundo propriedades</i>.</p> <p>US25P4: Ao ver propriedades e invariantes em um movimento realizado, <i>compreende a importância da elaboração das atividades de forma que invariantes possam se mostrar e ajudar na resolução das mesmas</i>.</p> <p>US39P4: Entende que <i>o trabalho com invariantes em ambientes de GD é um bom caminho para ensinar conceitos</i>.</p>	<p>*C78 - Percepção do potencial do ensino e da aprendizagem que se dá pela percepção e estudo de invariantes em GD</p>
<p>US14P4: <i>Afirma ter aprendido com um colega outro modo de construir</i> a reflexão de um ponto. Modo esse em que não é preciso valer-se de uma ferramenta que daria a construção mais direta.</p>	<p>*C79 - Aprendizagem de um modo de construir sem se valer de ferramentas que já dão a construção pronta</p>
<p>US42P1: Enfatiza que <i>enquanto move o mouse</i> e vai expondo as implicações desse movimento na interface do <i>software</i> e do que se está pensando com esse movimento, <i>os colegas de grupo podem ver e entender o que está sendo feito</i>. Enfatiza com isso, que essa possibilidade está ligada ao movimento e à visualização do movimento permitidos pelo <i>software</i>.</p> <p>US43P2: Afirma ter realizado movimentos no <i>software</i> para explicar suas ideias. Entende que <i>o movimento explicativo pôde ser visto na interface pelos seus colegas de grupo que, com isso, puderam entender e contribuir para/com essas ideias</i>.</p> <p>US13P4: <i>Afirma ter aprendido conversando com os membros do grupo sobre invariantes anteriormente não vistos</i> por ele.</p> <p>US30P4: Afirma que durante as atividades, <i>um membro do grupo solicitava ao outro que realizasse determinado movimento</i> e, podendo também, tomar o controle do <i>mouse</i> para realizar movimentos. Entende que com isso as atividades foram desenvolvidas por <i>todos e que todos aprenderam juntos</i>.</p> <p>US32P4: Diz que <i>no momento em que um membro do grupo realizava movimento com o mouse, o outro atentava-se às implicações desse movimento na interface do software e dizia o que entendia do que estava vendo</i>, às vezes tomando controle do <i>mouse</i> e mostrando com movimento o que queria dizer.</p>	<p>*C80 - Aprendizagem que emerge da discussão sobre o que se mostra em movimento na tela</p>
<p>US15P4: <i>Afirma ter aprendido que se pode apropriar de uma situação geométrica simples e trabalhá-la no software</i>, colocando-a em um contexto que solicite seu movimento.</p> <p>US16P4: <i>Se propõe a buscar exercícios de Geometria e transformá-los em problemas que exigem construções e movimentos</i>, visto que, entende que desta forma eles seriam mais interessantes e desafiadores.</p> <p>US20P4: Entende que <i>as atividades programadas para serem trabalhadas no software devem solicitar o movimento e a atenção ao movimento</i>.</p> <p>US27P4: Entende que se <i>deve colocar nas atividades a serem trabalhadas em softwares, elementos que solicitem construções e movimento de objetos</i>.</p>	<p>*C81 - Aprendizagem de como elaborar atividades que se constituem por um contexto e por um fundo dinâmico</p>
<p>US3P4: Entende que realizando movimentos e atentando-se às implicações desses movimentos na interface do <i>software</i>, conseguiram <i>observar padrões, descobrir, organizar informações</i> e discutir sobre elas. <i>Entende que esse modo de agir foi aprendido durante a realização das atividades</i>.</p>	<p>*C82 - Aprendizagem de como trabalhar em</p>

<p>US18P4: <i>Enfatiza ter aprendido como trabalhar conceitos geométricos e conexões de conceitos em situações que envolvem movimentos.</i></p> <p>US33P4: Afirma ter <i>aprendido a trabalhar conceitos em situações em que eles aparecem quando realizados movimentos</i> em objetos.</p>	<p>GD conceitos matemáticos e suas conexões</p>
<p>US19P4: Afirma ter aprendido sobre o <i>software</i> e sobre <i>a importância de poder movimentar</i>.</p>	<p>*C83 - Percepção da importância do movimento para a aprendizagem</p>
<p>US3P4: Entende que realizando movimentos e atentando-se às implicações desses movimentos na interface do <i>software</i>, conseguiram observar padrões, descobrir, organizar informações e discutir sobre elas. Entende que <i>esse modo de agir foi aprendido durante a realização das atividades</i>.</p>	<p>*C84 - Aprendizagem de como trabalhar em ambientes de GD</p>
<p>US10P4: Entende que <i>é possível aprender muito com o estudo de invariantes que se mostram em um movimento</i> realizado.</p>	<p>*C85 - Percepção do vínculo entre movimento e aprendizagem</p>
<p>US9P2: Afirma que quando realizava movimentos algo se mostrava. No entanto, <i>a incerteza de estar vendo algo verdadeiro levou à realização de mais movimentos visando verificar a veracidade, ou não, disso que se mostrava</i>.</p> <p>US28P4: <i>Entende ter desenvolvido sua criticidade, visto que em alguns momentos a desconfiança do que parecia certo levou à realização de movimentos</i> com os quais foi possível ver divergências.</p>	<p>*C86 - A criticidade constituindo-se junto a atos motores</p>
<p>US16A1: <i>Visualiza propriedades que sustentam toda a construção</i>. Propriedades essas que não variam quando realizado um movimento.</p> <p>US17A2: <i>Visualiza nas configurações do movimento, um ponto onde sempre se encontram as mediatrizes do triângulo</i>.</p> <p>US18A2: Compreende que <i>um ponto, por mais que se mostre em movimento, mantém como invariante sua característica de ser circuncentro</i>.</p> <p>US1P4: <i>Afirma ter melhor compreendido as características de uma propriedade matemática, quando realizou movimentos</i> em um ponto abarcado por essa propriedade.</p> <p>US21P4: <i>Entende ter visto mais claramente as propriedades quando as viu se preservar em meio a movimentos</i> realizados em pontos associados a elas.</p>	<p>*C87 - Aprendizagem de conceitos matemáticos que se mostram junto ao movimento realizado e visto na tela</p>
<p>US14A1: <i>Credita à construção devidamente feita, a preservação de sua estrutura</i> mesmo após movimentos realizados.</p> <p>US15A1: Acha que <i>a construção correta</i> do que foi posto no enunciado <i>é responsável pela não variação</i> de um ponto.</p> <p>US18A3: Afirma que <i>ângulos construídos não variam quando realizados movimentos</i> na construção que os abarca.</p> <p>US35P4: Compreende que toda construção geométrica feita no <i>software</i> deve ser movida, pois <i>a estrutura desta construção se mostrará coerente apenas quando ela for movida</i> e nesse movimento suas propriedades se preservarem.</p> <p>US36P4: Compreende que ter realizado os passos solicitados pela atividade <i>sem trabalhar devidamente as propriedades</i> que eles envolviam, <i>fez com que a construção se desconfigurasse</i> quando posta em movimento.</p>	<p>*C88 - Percepção da preservação ou desconfiguração de uma figura como consequência do modo pelo qual ela foi construída</p>

<p>US42P1: Enfatiza que <i>enquanto move o mouse e vai expondo as implicações desse movimento</i> na interface do <i>software</i> e do que se está pensando com esse movimento, os colegas de grupo podem ver e entender o que está sendo feito. Enfatiza com isso, que essa possibilidade está ligada ao movimento e à visualização do movimento permitidos pelo <i>software</i>.</p> <p>US21P3: Compreende que a situação de mover que envolve o computador, o <i>mouse</i> e a pessoa que move, não é puramente física, ela é também reflexiva, já que <i>a pessoa além de realizar movimentos, põe-se a pensar sobre o movimento realizado</i>.</p> <p>US22P3: Compreende que seja influenciado pelo que acontece na interface do <i>software</i>, por isso <i>põe-se sempre a pensar sobre cada possibilidade que se mostra nessa interface</i>.</p> <p>US28P3: Afirmar que <i>vê se materializar na tela do computador o que havia pensado em fazer e que no momento está fazendo</i>.</p> <p>US37P4: Descreve que na <i>duração do desenvolvimento da tarefa ele foi movendo, pensando, refletindo e vendo</i> possibilidades.</p>	<p>*C89 – O dar-se conta de estar movendo-pensando</p>
--	---

Quadro 19: Primeiro Movimento de Convergência

Fonte: O autor

APÊNDICE 5

Segundo Movimento de Convergência

*C	#C
<p>*C02 – O movimento do <i>mouse gera transformação na interface</i> do <i>software</i>.</p> <p>*C14 – Percepção do movimento realizado em um ponto <i>implicando na variação</i> de posição de outros pontos</p> <p>*C17 – Percepção de <i>mudanças na interface</i> que produzem variações articulando invariantes</p> <p>*C31 – Percepção de <i>ampliação e redução de medidas</i> junto ao movimento realizado</p> <p>*C40 – Percepção de que <i>a transformação</i> se dá no <i>mouse</i> e na tela</p> <p>*C43 – A retomada reflexiva dos movimentos realizados e das <i>mudanças por eles configuradas na tela</i></p> <p>*C70 – Percepção de <i>algo que vai se mostrando aos poucos</i> na duração do movimento realizado</p> <p>*C75 – Percepção do <i>movimento que se mostra no ato de mover</i> objetos na tela</p>	<p>#C01 – Percepção na tela de transformações que emergem de movimentos realizados</p>
<p>*C04 – O <i>movimento do mouse para expressar/indicar</i> intenções</p> <p>*C05 – <i>Representação de objetos geométricos com o corpo-próprio</i>.</p> <p>*C07 – O <i>movimento do corpo-próprio como modo de</i> indicar e direcionar olhares</p> <p>*C29 – O ato de <i>mover ao mesmo tempo em que se fala do movimento</i> que realiza, evidenciando que se dá conta do que faz</p> <p>*C34 – O <i>movimento</i> e a expressão do mesmo na tela <i>gerando intuições</i></p> <p>*C64 – Percepção mediante atenção ao colega de grupo que <i>realiza movimentos dizendo dos mesmos</i></p> <p>*C65 – <i>O movimento e sua expressão</i> visual na tela <i>como modos de comunicação</i> entre membros do grupo</p>	<p>#C02 – O movimento como modo de expressão</p>
<p>*C06 – <i>Percepção de propriedades matemáticas junto aos movimentos</i> realizados e às implicações dos mesmos</p> <p>*C12 – O movimento para validar a evidência de <i>invariantes percebidos</i></p> <p>*C15 – <i>Percepção de propriedades</i> pré-estabelecidas na construção <i>da figura que é posta em movimento</i></p> <p>*C17 – Percepção de mudanças na interface que produzem <i>variações articulando invariantes</i></p> <p>*C61 – A importância da <i>percepção de invariantes</i> para a (re)soluções das atividades</p> <p>*C62 – A <i>percepção do que não se move consoante ao movimento</i> realizado</p> <p>*C70 – Percepção de <i>algo que vai se mostrando aos poucos na duração do movimento realizado</i></p> <p>*C72 – Compreensão de que <i>os invariantes se mostram quando se está atento ao movimento</i> e às suas configurações</p>	<p>#C03 – Percepção de invariantes que se mostram na variação</p>
<p>*C01 – O <i>controle do movimento</i> do <i>mouse</i> para responder ao solicitado</p> <p>*C08 – <i>Controle do mouse e do movimento</i> com ele realizado</p> <p>*C10 – <i>O movimento para atualizar uma possibilidade</i> percebida</p> <p>*C11 – <i>O movimento para evidenciar e validar conjecturas</i> e respostas</p> <p>*C12 – <i>O movimento para validar a evidência</i> de invariantes percebidos</p> <p>*C30 – <i>Realização de movimentos em um ponto visando a variação</i> de posição de outro ponto a ele vinculado</p>	<p>#C04 – O controle do movimento realizado e do que se almeja com ele</p>

<p>*C33 – <i>Realização de movimentos isométricos</i></p> <p>*C59 – <i>A repetição de um movimento focando</i> o que pode se mostrar e a veracidade disso que se mostra</p>	
<p>*C10 – <i>O movimento para atualizar</i> uma possibilidade percebida</p> <p>*C12 – <i>O movimento para validar</i> a evidência de invariantes percebidos</p> <p>*C28 – <i>A realização de um movimento anteriormente pensado</i></p> <p>*C69 – Percepção de <i>movimento</i> junto ao ato de <i>testar possibilidades</i></p>	<p>#C05 – O movimento como modo de atualizar possibilidades</p>
<p>*C11 – <i>O movimento para evidenciar e validar conjecturas</i> e respostas</p> <p>*C12 – <i>O movimento para validar a evidência</i> de invariantes percebidos</p> <p>*C20 – <i>A solução</i> do problema <i>creditada às possibilidades de realização e visualização de movimentos</i></p>	<p>#C06 – O movimento como modo de validar conjecturas e/ou respostas</p>
<p>*C13 – <i>A justificativa a partir do que se vê</i> das implicações do movimento na tela</p> <p>*C20 – <i>A solução</i> do problema <i>creditada às possibilidades de realização e visualização de movimentos</i></p>	<p>#C07 – A percepção visual que sustenta estudos, justificativas e afirmações</p>
<p>*C16 – <i>O desempenhar-se como personagem e/ou objeto projetado na tela</i></p>	<p>#C08 – A correspondência entre objeto a ser movido e o corpo que o moverá</p>
<p>*C10 – <i>O movimento para atualizar uma possibilidade percebida</i></p> <p>*C18 – <i>Percepção da possibilidade</i> de movimento <i>e de suas possíveis implicações</i></p> <p>*C21 – <i>A simulação de movimentos antes de efetivá-los no software</i></p> <p>*C39 – Percepção do <i>movimento consoante ao que pode ser movido</i></p> <p>*C51 – Percepção do <i>movimento</i> que se expõe na tela <i>como sendo a materialização de um pensamento</i></p>	<p>#C09 – Percepção de possibilidades de movimento antes de sua realização</p>
<p>*C19 – <i>O ato de parar o movimento possibilitando visualizar</i> o feito</p> <p>*C43 – <i>A retomada reflexiva dos movimentos</i> realizados e das mudanças por eles configuradas na tela</p>	<p>#C10 – O ato de parar o movimento para refletir a respeito do que emerge dele</p>
<p>*C04 – <i>O movimento do mouse para expressar/indicar</i> intenções</p> <p>*C10 – <i>O movimento para atualizar</i> uma possibilidade percebida</p> <p>*C11 – <i>O movimento para evidenciar e validar</i> conjecturas e respostas</p> <p>*C12 – <i>O movimento para validar</i> a evidência de invariantes percebidos</p> <p>*C22 – <i>Realização de movimento visando</i> um posicionamento específico para o objeto movido</p> <p>*C30 – <i>Realização de movimentos em um ponto visando</i> a variação de posição de outro ponto a ele vinculado</p> <p>*C50 – <i>O movimento como atualização de um querer</i> mover</p>	<p>#C11 – O movimento que visa algo</p>

<p>*C03 – <i>Intuição de medidas com base na visualização</i> de objetos geométricos</p> <p>*C13 - <i>A justificativa a partir do que se vê</i> das implicações do movimento na tela</p> <p>*C20 - <i>A solução</i> do problema <i>creditada às possibilidades de realização e visualização</i> de movimentos</p> <p>*C23 – <i>Insight de um modo de resolver o problema que se mostra</i> junto ao movimento *C34 - <i>O movimento e a expressão do mesmo</i> na tela <i>gerando intuições</i></p>	<p>#C12 - A visualização do movimento gerando intuições ao sujeito</p>
<p>*C20 - <i>A solução do problema creditada</i> às possibilidades de <i>realização e visualização de movimentos</i></p> <p>*C61 - <i>A importância da percepção de invariantes para a (re)soluções</i> das atividades</p>	<p>#C13 - A relevância do movimento para (re) solução de problemas matemáticos</p>
<p>*C21 - <i>A simulação de movimentos</i> antes de efetivá-los no <i>software</i></p> <p>*C24 - O ato de <i>dizer de um movimento antes de realizá-lo</i> no <i>software</i></p> <p>*C26 - <i>O planejamento de como realizar</i> determinados movimentos</p> <p>*C28 - <i>A realização de um movimento anteriormente pensado</i></p> <p>*C50 – <i>O movimento como atualização de um querer</i> mover</p> <p>*C51 - Percepção do <i>movimento</i> que se expõe na tela <i>como sendo a materialização de um pensamento</i></p>	<p>#C14 - O ato de pensar o movimento antes de realizá-lo</p>
<p>*C10 - <i>O movimento para atualizar uma possibilidade</i> percebida</p> <p>*C11 - <i>O movimento para evidenciar e validar conjecturas</i> e respostas</p> <p>*C12 - <i>O movimento para validar a evidência de invariantes</i> percebidos</p> <p>*C25 - <i>A inserção de “rastro” de movimento para fixar</i> momentos do movimento que flui na tela</p> <p>*C51 - Percepção do <i>movimento que se expõe</i> na tela <i>como sendo a materialização de um pensamento</i></p>	<p>#C15 - O ato de fixar o que se vê no movimento</p>
<p>*C27 - <i>Os conhecimentos prévios</i> de Matemática <i>sustentando movimentos</i> realizados</p> <p>*C39 - Percepção do <i>movimento consoante ao que pode ser movido</i></p> <p>*C57 - Compreensão da <i>relevância de se conhecer os ícones do software e suas funcionalidades</i></p> <p>*C66 - <i>O conhecimento prévio dos ícones e de suas funções direcionando o que e como fazer</i></p>	<p>#C16 - Os conhecimentos prévios sustentando movimentos e percepções</p>
<p>*C29 – O ato de <i>mover ao mesmo tempo em que se fala do movimento</i> que realiza, evidenciando que se dá conta do que faz</p> <p>*C64 - Percepção mediante atenção ao colega de grupo que <i>realiza movimentos dizendo dos mesmos</i></p>	<p>#C17 - A sincronia entre mover e dizer do movimento realizado</p>
<p>*C32 - Compreensão da <i>impossibilidade de se validar algo só com realização de movimentos</i></p>	<p>#C18 – Compreensão da impossibilidade e de validar só com o movimento</p>
<p>*C13 - <i>A justificativa a partir do que se vê</i> das implicações do movimento na tela</p> <p>*C19 - O ato de <i>parar o movimento possibilitando visualizar</i> o feito</p>	<p>#C19 – A atenção à tela como modo de</p>

<p>*C36 – O “<i>nível de atenção</i>” <i>direcionado ao que se mostra</i> na tela</p> <p>*C38 - Compreensão de que <i>para perceber é preciso estar atento ao movimento</i> que se evidencia na tela</p> <p>*C72 - Compreensão de que <i>os invariantes se mostram quando se está atento ao movimento</i> e às suas configurações</p> <p>*C73 - Compreensão de que <i>a atenção ao movimento abre novas possibilidades</i></p>	<p>perceber e de compreender</p>
<p>*C16 - O <i>desempenhar-se como personagem e/ou objeto projetado na tela</i></p> <p>*C37 - <i>Percepção de si como sujeito movente</i></p> <p>*C40 - <i>Percepção de que a transformação se dá no mouse e na tela</i></p> <p>*C44 - O <i>dar-se conta de estar refletindo enquanto realiza movimentos</i></p> <p>*C46 - Percepção do <i>movimento que se evidencia na tela como correlato do movimento realizado com o mouse</i></p> <p>*C47 - <i>Percepção de si como realizador do movimento que se expõe na tela</i></p> <p>*C48 - Percepção da <i>ausência de movimento na tela, que se evidencia na também ausência do sujeito-movente</i></p> <p>*C49 – O sujeito se <i>percebe em movimento em todo o desenvolvimento</i> das atividades</p> <p>*C67 - Percepção da <i>simultaneidade entre movimento realizado com o mouse e a materialização desse movimento na tela</i></p>	<p>#C20 - O dar-se conta de ser o realizador do movimento que se evidencia no mouse e na tela</p>
<p>*C20 - A solução do problema creditada às <i>possibilidades de realização e visualização de movimentos</i></p> <p>*C39 - Percepção do <i>movimento consoante ao que pode ser movido</i></p> <p>*C42 - Percepção de que <i>o que está na tela é potencialmente dinâmico</i></p> <p>*C48 - Percepção da <i>ausência de movimento na tela, que se evidencia na também ausência do sujeito-movente</i></p> <p>*C52 - Percepção do <i>potencial dinâmico</i> do software</p> <p>*C55 - Compreensão de que <i>no software</i> e no papel <i>abrem-se possibilidades distintas de trabalho</i></p> <p>*C58 - Compreensão da <i>relevância do “arrastar”</i></p> <p>*C60 - Percepção da <i>possibilidade de exploração</i> aberta pelo software</p> <p>*C68 - Compreensão de que <i>o software abre possibilidades</i> de movimento</p> <p>*C71 - Percepção de <i>movimento junto ao ato de clicar em ícones</i> para realizar construções</p> <p>*C74 - Compreensão de que <i>mover é possibilidade aberta pelo software</i></p> <p>*C77 - Compreensão de que <i>toda figura em GD deve ser</i> projetada para ser <i>dinâmica</i></p>	<p>#C21 - Percepção do potencial dinâmico do software e do que compõe sua interface</p>
<p>*C41 - Percepção de que <i>o movimento já está solicitado nas atividades propostas</i></p> <p>*C61 - A <i>importância da percepção de invariantes para a (re)soluções</i> das atividades</p> <p>*C68 - Percepção da <i>relevância dos invariantes para (re)solução</i> das atividades</p>	<p>#C22 - Percepção do movimento imbricado no enunciado das atividades</p>
<p>*C35 - <i>Percepção do movimento realizado com o mouse e de sua expressão na tela</i></p> <p>*C37 - Percepção <i>de si como sujeito movente</i></p> <p>*C40 - Percepção de que <i>a transformação se dá no mouse e na tela</i></p> <p>*C44 - O dar-se conta de <i>estar refletindo enquanto realiza movimentos</i></p> <p>*C46 - Percepção do <i>movimento que se evidencia na tela como correlato do movimento realizado com o mouse</i></p>	<p>#C23 - O perceber-se realizando movimentos</p>

<p>*C47 - Percepção de si como <i>realizador do movimento que se expõe na tela</i></p> <p>*C49 – O sujeito se <i>percebe em movimento</i> em todo o desenvolvimento das atividades</p> <p>*C67 - <i>Percepção da simultaneidade entre movimento realizado com o mouse e a materialização desse movimento na tela</i></p> <p>*C89 – <i>O dar-se conta de estar movendo-pensando</i></p>	
<p>*C45 - Compreensão da <i>percepção ligada ao ver</i></p>	<p>#C24 - A visualização como modo de perceber</p>
<p>*C04 - O <i>movimento do mouse para expressar/indicar intenções</i></p> <p>*C50 – O movimento como <i>atualização de um querer mover</i></p> <p>*C51 - Percepção do <i>movimento que se expõe na tela</i> como sendo a <i>materialização de um pensamento</i></p>	<p>#C25 - O movimento como modo de atualizar um querer fazer ou pensamento sobre o fazer</p>
<p>*C54 - Compreensão de que <i>o software, em comparação com o papel, permite maior agilidade, precisão e um trabalho mais limpo</i></p> <p>*C55 - Compreensão de que <i>no software e no papel abrem-se possibilidades distintas de trabalho</i></p> <p>*C56 - Compreensão de que <i>o movimento se faz presente tanto no software quanto no papel</i></p>	<p>#C26 – Diferenças entre movimento realizado no software e movimento realizado no papel</p>
<p>*C35 - Percepção do <i>movimento realizado com o mouse e de sua expressão na tela</i></p> <p>*C40 - Percepção de que <i>a transformação se dá no mouse e na tela</i></p> <p>*C46 - Percepção do <i>movimento que se evidencia na tela como correlato do movimento realizado com o mouse</i></p> <p>*C47 - <i>Percepção de si como realizador do movimento que se expõe na tela</i></p> <p>*C48 - Percepção da <i>ausência de movimento na tela</i>, que se evidencia <i>na também ausência do sujeito-movente</i></p> <p>*C67 - Percepção da <i>simultaneidade entre movimento realizado com o mouse e a materialização desse movimento na tela</i></p> <p>*C70 - Percepção de <i>algo que vai se mostrando aos poucos na duração do movimento realizado</i></p> <p>*C89 – <i>O dar-se conta de estar movendo-pensando</i></p>	<p>#C27 - A percepção do movimento entrelaçada ao ato de mover-se, movendo</p>
<p>*C76 - Compreensão de que o <i>pensar no movimento já se configura como movimento</i></p>	<p>#C28 - O pensar caracterizado como movimento</p>
<p>*C06 - <i>Percepção de propriedades matemáticas junto aos movimentos realizados e às implicações dos mesmos</i></p> <p>*C15 - <i>Percepção de propriedades</i> pré-estabelecidas na construção da figura que é posta em movimento</p> <p>*C70 - Percepção de <i>algo que vai se mostrando</i> aos poucos <i>na duração do movimento realizado</i></p> <p>*C78 - Percepção do <i>potencial do ensino e da aprendizagem que se dá pela percepção e estudo de invariantes em GD</i></p>	<p>#C29 – A aprendizagem que se constitui junto ao movimento e às atividades que o solicita</p>

<p>*C79 - <i>Aprendizagem de um modo de construir</i> sem se valer de ferramentas que já dão a construção pronta</p> <p>*C80 - <i>Aprendizagem que emerge da discussão</i> sobre o que se mostra em movimento na tela</p> <p>*C81 - <i>Aprendizagem de como elaborar atividades</i> que se constituem por um contexto e por um fundo dinâmico</p> <p>*C82 - <i>Aprendizagem de como trabalhar</i> em GD conceitos matemáticos e suas conexões</p> <p>*C83 - Percepção da <i>importância do movimento para a aprendizagem</i></p> <p>*C84 - <i>Aprendizagem de como trabalhar em ambientes de GD</i></p> <p>*C85 - Percepção do <i>vínculo entre movimento e aprendizagem</i></p> <p>*C86 - <i>A criticidade constituindo-se junto a atos motores</i></p> <p>*C87 - <i>Aprendizagem de conceitos matemáticos</i> que se mostram junto ao movimento realizado e visto na tela</p>	
<p>*C15 - Percepção de <i>propriedades pré-estabelecidas na construção</i> da figura que é <i>posta em movimento</i></p> <p>*C53 - Compreensão de que <i>a visualidade do software contribui para construir e para estudar essas construções</i></p> <p>*C63 - <i>O estudo de uma figura e de suas propriedades pondo-a em movimento</i></p> <p>*C77 - Compreensão de que <i>toda figura em GD deve ser projetada para ser dinâmica</i></p> <p>*C78 - Percepção do <i>potencial do ensino e da aprendizagem que se dá pela percepção e estudo de invariantes em GD</i></p>	<p>#C30 – O estudo de uma figura pondo-a em movimento</p>
<p>*C88 - Percepção da <i>preservação ou desconfiguração de uma figura como consequência do modo pelo qual ela foi construída</i></p>	<p>#C31 - A preservação da figura ou sua desconfiguração após um movimento nela realizado, como sendo consequências do modo como foi projetada na tela</p>
<p>*C09 – Percepção de <i>possibilidades que se mostram junto ao movimento</i> realizado</p> <p>*C18 - <i>Percepção da possibilidade de movimento</i> e de suas possíveis implicações</p> <p>*C23 – <i>Insight de um modo de resolver</i> o problema <i>que se mostra junto ao movimento</i></p> <p>*C34 - <i>O movimento</i> e a expressão do mesmo na tela <i>gerando intuições</i></p>	<p>#C32 – O movimento mostrando possibilidades</p>

Quadro 20: Segundo Movimento de Convergência

Fonte: O autor