



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Resultados de existência de solução para problemas elípticos no espaço das funções de variação limitada

Letícia dos Santos Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Fevereiro de 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Resultados de existência de solução para
problemas elípticos no espaço das funções de
variação limitada**

Letícia dos Santos Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Fevereiro de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação - Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação - UNESP, Campus de Presidente Prudente

Silva, Letícia dos Santos.
S581r Resultados de existência de solução para problemas elípticos no espaço das funções de variação limitada / Letícia dos Santos Silva. - 2018
52 p.

Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2018
Inclui bibliografia

1. Laplaciano. 2. Solução de variação limitada. 3. Teorema do Passo da Montanha. I. Pimenta, Marcos Tadeu de Oliveira. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

Alessandra Kuba Oshiro Assunção
CRB-8/9013

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Resultados de existência de solução para problemas elípticos no espaço das funções de variação limitada

AUTORA: LETÍCIA DOS SANTOS SILVA

ORIENTADOR: MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Profa. Dra. MICHÉLE DE OLIVEIRA ALVES
Departamento de Matemática / UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

Presidente Prudente, 15 de fevereiro de 2018

a Hermes, Selma e Guilherme

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar aos meus pais, Selma e Hermes, que sempre me apoiaram em meus estudos desde pequena, até a minha graduação e mestrado. Desde a época em que era necessário viajar sozinha para os encontros da OBMEP, a escolha da minha futura profissão, a decisão de passar dois anos fora em um intercâmbio e a decisão de continuar meus estudos na pós-graduação na área de Matemática. Agradeço ao meu irmão Guilherme, pelo exemplo de pessoa que é para mim.

Também, agradeço aos professores que fizeram parte da minha vida, entre eles meu orientador Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta, por toda ajuda e paciência durante as várias dúvidas na graduação e mestrado; e ainda a outros antigos orientadores, como Cristiane Nespoli e Suetônio Meira.

Agradeço aos vários amigos que fiz ao longo desses anos estudando na UNESP, onde, dentre eles, os principais companheiros de estudo do mestrado Jéssica, Laison e Rodrigo.

Enfim, são muitas as pessoas que me fizeram parte e que me ajudaram ao longo da minha formação, tanto na graduação como no mestrado, mas agradeço a todos estes a tudo o que fizeram por mim.

Por fim, agradeço a Capes o apoio financeiro.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê”.

Arthur Schopenhauer

Resumo

Neste trabalho mostra-se a existência de solução de variação limitada para um problema envolvendo o operador 1– Laplaciano em um domínio exterior com condição de fronteira de Dirichlet. Para isso, será usada uma versão do Teorema do Passo da Montanha adequada a funcionais localmente lipschitzianos. As dificuldades na implementação de métodos variacionais no espaço das funções de variação limitada são múltiplas, entre elas, a falta de reflexividade, dificuldade de se usar condições de compacidade como a de Palais-Smale e ainda a falta de regularidade do funcional energia.

Palavras-Chave: *domínio exterior, 1-Laplaciano, equações elípticas quasilineares, solução de variação limitada, Teorema do Passo da Montanha.*

Abstract

In this work we prove existence of bounded variation solution for a problem involving the 1-Laplacian operator in an exterior domain with Dirichlet boundary condition. For this, a version of the Mountain Pass Theorem to locally Lipschitz functionals is used. There are many difficulties in implementing variational methods in the space of limited variation functions, among them, lack of reflexivity, difficulty in using compactness conditions such as Palais-Smale and the lack of regularity of the functional energy.

Keywords: *exterior domain, 1-Laplacian, quasilinear elliptic equation, bounded variation solution, Mountain Pass Theorem.*

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Capítulos	
1 Introdução	11
2 Espaço das funções de variação limitada	15
2.1 Teoria da medida	15
2.2 Teoria das distribuições	17
2.3 Espaço $BV(\Omega)$	19
2.4 Solução de variação limitada	29
3 Aplicação	33
3.1 O funcional de Euler-Lagrange	34
3.2 Forma precisa	35
3.3 Argumentos variacionais	37
4 Conclusão	45
Referências	45

Introdução

A modelagem de alguns problemas, por exemplo dentro da Física ou de processamento de imagens, utiliza funções que permitem descontinuidades, sendo então necessário na busca de soluções para as equações diferenciais dessas modelagens um novo espaço de funções com diferentes propriedades. Nesses modelos, o operador 1–Laplaciano, cuja definição formal é dada por $\Delta_1 u := \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$, tem papel fundamental. Ocorre que, diferentemente dos problemas envolvendo os operadores p –Laplaciano para $p \in (2, N)$, onde se trabalha no espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, nos problemas envolvendo o 1–Laplaciano é necessário que o estudo se dê em um espaço estritamente maior que $W^{1,1}(\Omega)$, a saber, no chamado espaço das funções de variação limitada $BV(\Omega)$.

Em [6], em um novo modelo de restauração de imagens, onde uma função u representa a imagem original e I imagem com ruído, ou seja, $I = u + \text{perturbação}$, é estudado de várias maneiras um problema de minimização motivado pela equação:

$$\min \int_{\Omega} |Du|^p + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2,$$

com $1 \leq p \leq 2$, $\lambda \geq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado com fronteira Lipschitz. Neste modelo, as funções permitem descontinuidades, e portanto são tomadas no espaço $BV(\Omega)$.

Em seguida, são apresentados outros resultados envolvendo o operador 1–Laplaciano.

Em [5] sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado localmente Lipschitz, estuda-se o espectro do operador 1–Laplaciano. Com o problema admitindo condição de fronteira de Dirichlet, mostra-se que o operador 1–Laplaciano possui infinitos autovalores $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ e, associado a cada autovalor, um par de autovetores $\{\pm u_k\}$. Também, $c_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, faz-se ligações entre os resultados espectrais do operador p –Laplaciano com o 1–Laplaciano.

Em [15] lida-se com o operador 1–Laplaciano com termo subcrítico, ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $|f(x, s)| \leq C(1 + |s|^q)$, $q \in (0, 1^*)$ e sob as hipóteses tomadas encontra-se ao menos duas soluções não-triviais $v, w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, onde $v \leq 0 \leq w$ q.t.p. em Ω . Também,

demonstra-se uma identidade do tipo de Pohozaev para o operador 1–Laplaciano.

Em [1] estuda-se a seguinte classe de problemas com $\epsilon > 0$ e $n \geq 2$:

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta_1 u + V(x) \frac{u}{|u|} = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in BV(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

procurando existência e concentração de soluções sob diferentes hipóteses sobre a função V , conforme $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Em [10] é obtida a existência de solução de variação limitada não-negativa e não-trivial por meio do Teorema do Passo da Montanha para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u + V(x) \frac{u}{|u|} = K(x)f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in BV(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde o funcional de Euler-Lagrange é definido no espaço $E = \left\{ u \in L^{1^*}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |Du| < \infty \right\}$.

Em [12] estuda-se diferentes problemas envolvendo o operador 1–Laplaciano, por exemplo o problema de autovalor

$$-\Delta_1 u = \lambda \frac{u}{|u|},$$

e o problema de torção generalizado

$$\Delta_1 u = f(x) \geq 0.$$

Também, estuda-se o operador p –Laplaciano conforme $p \rightarrow 1$.

Em [8] lida-se com o 1–Laplaciano em um problema com crescimento crítico:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = \lambda \frac{u}{|u|} + |u|^{1^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e mostra-se que o problema admite solução de variação limitada não trivial para $\lambda \geq \lambda_1$ usando um Teorema de Linking.

Nesse trabalho, o interesse é encontrar soluções para a seguinte equação elíptica quasilinear:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = a(x)g(u) & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $N \geq 2$ e Ω é domínio exterior, ou seja, existe um aberto limitado não vazio $O \subset \mathbb{R}^N$ contendo a origem e com fronteira suave, tal que $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \overline{O}$.

O operador 1–Laplaciano é definido de maneira formal como sendo $\Delta_1 u := \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$. Note que tal operador não está bem definido nos pontos x em Ω onde $\nabla u(x) = 0$. Definindo de outra forma, tem-se então que uma solução $u \in BV(\Omega)$ satisfaz a seguinte versão

do problema (1.1)

$$\begin{cases} \exists z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } |z|_\infty \leq 1, \operatorname{div} z \in L^N(\Omega), \\ - \int_\Omega u \operatorname{div} z dx = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial\mathcal{H}^{N-1}, \\ -\operatorname{div} z(x) = a(x)g(u) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

Em [17], com condições semelhantes as que serão tomadas nesse trabalho, o problema é resolvido para o operador p -Laplaciano $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, para $p > 2$. Neste caso, em que lida-se com o 1-Laplaciano, o funcional de Euler-Lagrange associado a (1.1) não é diferenciável, não sendo então possível utilizar métodos variacionais usuais para encontrar uma solução fraca. Porém, tal funcional é a diferença entre um funcional convexo localmente Lipschitz e um funcional suave, tornando assim possível a procura por uma solução de variação limitada.

Segue então as hipóteses associadas ao problema (1.1)

(a₁) $a(x) \in C(\Omega, \mathbb{R})$ muda de sinal em Ω ;

(a₂) $a(x) \leq 0$, se $|x| \geq R_0$ para algum $R_0 > 0$;

(a₃) $\sup_{x \in \Omega} |a(x)||x| < \infty$;

(g₁) $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(g₂) $g(s) = o(1)$ quando $s \rightarrow 0$;

(g₃) $|g(s)| \leq C(1 + |s|^{p-1})$ para algum $C > 0$, $1 < p < 1^* := \frac{N}{N-1}$;

(g₄) $0 < \theta G(s) \leq sg(s)$ com $s \in \mathbb{R}$, $\theta > 1$, onde $G(s) = \int_0^s g(t) dt$;

(Ω_1) existe $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\xi \equiv 1$ em Ω^+ , $\xi \equiv 0$ em Ω^- , $0 \leq \xi \leq 1$ e $\|\nabla \xi\|_\infty \leq \frac{\theta-1}{C_0}$, onde C_0 é a melhor constante da imersão de $BV(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$.

Assim, com tais hipóteses, o objetivo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 1 *Se são satisfeitas (a₁) – (a₃), (g₁) – (g₄) e (Ω_1), então o problema (1.1) tem solução de variação limitada não-trivial a qual satisfaz a seguinte forma precisa do problema:*

$$\begin{cases} \exists z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } |z|_\infty \leq 1, \operatorname{div} z \in L^N(\Omega), \\ - \int_\Omega u \operatorname{div} z dx = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial\mathcal{H}^{N-1}, \\ -\operatorname{div} z(x) = a(x)g(u) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

O operador 1-Laplaciano ainda não foi trabalho com tais hipóteses, sendo então este trabalho original.

Pelas condições do problema, o funcional de Euler Lagrange associado a (1.1) satisfaz as geometrias de uma versão do Teorema do Passo da Montanha, e dessa forma poderá

ser obtida uma sequência de quase soluções em $BV(\Omega)$. A partir disso, tal sequência será o objeto de estudo, ou seja, a menos de subsequência, convergirá em algum sentido e o limite obtido será um candidato a solução de variação limitada de (1.1).

O trabalho está organizado da seguinte forma: primeiro, será apresentada definições e teoremas envolvendo teoria da medida, distribuições e funções de variação limitada. Em seguida, utilizando as propriedades apresentadas, será demonstrado a existência de solução de variação limitada utilizando o Teorema do Passo da Montanha.

Espaço das funções de variação limitada

Para o problema que será tratado no próximo capítulo, será necessário conhecer o espaço $BV(\Omega)$ e suas propriedades. Então, neste capítulo serão apresentadas definições e teoremas que envolvem teoria da medida, teoria das distribuições, espaço das funções de variação limitada e por fim, a definição de solução de variação limitada e a versão do Teorema do Passo da Montanha que será utilizada. Assim, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ conjunto aberto não vazio.

2.1 Teoria da medida

Nesta seção serão apresentados alguns resultados de Teoria da Medida envolvendo medidas de Radon, sequências e funções em $L^q(\Omega)$ que podem ser encontrados em [2, 11].

Definição 1 *Seja μ medida de Borel em Ω . Então μ é regular externa em $E \subset \Omega$, onde E é boreliano, se*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E, U \text{ aberto}\}.$$

Dizemos que μ é regular interna em $E \subset \Omega$, onde E é boreliano, se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Definição 2 *Dizemos que uma medida μ é uma medida de Radon em Ω se é uma medida de Borel que é finita em compactos, regular externa em todos os borelianos e regular interna em conjuntos abertos.*

O espaço das medidas de Radon em Ω será denotado por $\mathcal{M}(\Omega)$.

Definição 3 *Uma medida ν é dita absolutamente contínua com respeito a μ , denotando-se $\nu \ll \mu$, se $\nu(E) = 0$, para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$.*

Duas medidas μ e ν em (Ω, \mathcal{M}) são singulares, denotando-se $\nu \perp \mu$, se existem $E, F \in \mathcal{M}$ tais que $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = \Omega$ e $\mu(E) = \nu(F) = 0$.

Teorema 2 (Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym) *Sejam ν medida σ -finita com sinal e μ medida positiva σ -finita em (Ω, \mathcal{M}) . Então, existem únicas medidas σ -finitas com sinal λ, ρ em (Ω, \mathcal{M}) tais que*

$$\begin{aligned} \lambda &\perp \mu \\ \rho &\ll \mu \\ \nu &= \lambda + \rho \end{aligned}$$

Ainda mais, existe uma função μ -integrável $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$d\rho = f d\mu$$

onde se $d\rho = f d\mu$ e $d\rho = g d\mu$, então $f = g$ μ -q.t.p.

Ao longo desse texto, quando $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $A \subset \Omega$ for um boreliano, denotamos por $\mu|_A$ a restrição da medida μ ao conjunto A .

O suporte de uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto $\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$. Uma função tem o suporte compacto se $\text{supp } f$ é compacto. Ainda podemos definir os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} C_c(\Omega) &:= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua e tem suporte compacto}\}; \\ C_0(\Omega) &:= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua e se anula no infinito}\}. \end{aligned}$$

Um funcional linear I em $C_c(\Omega)$ é dito positivo se $I(f) \geq 0$, para todo $f \in C_c(\Omega)$ tem-se $f \geq 0$.

Teorema 3 (Teorema da Representação de Riesz) *Se I é funcional linear positivo em $C_c(\Omega)$, então existe uma única medida de Radon μ em Ω tal que $I(f) = \int_{\Omega} f d\mu$, para todo $f \in C_c(\Omega)$. Ainda μ satisfaz:*

$$\mu(U) = \sup \{I(f) : f \in C_c(\Omega), f \prec U\},$$

para todo $U \subset \Omega$ aberto, onde $f \prec U$ se $0 \leq f \leq 1$ e $\text{supp } f \subset U$. E também,

$$\mu(K) = \inf \{I(f) : f \in C_c(\Omega), f \geq \chi_K\},$$

para todo $K \subset \Omega$ compacto.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, o espaço $C_c(\Omega)$ é denso em $C_0(\Omega)$ com respeito a norma uniforme, conseqüentemente se μ é medida de Radon, então o funcional $I(f) = \int_{\Omega} f d\mu$ definido em $C_c(\Omega)$ se estende continuamente em $C_0(\Omega)$ se, e somente se, I é limitado com respeito a norma uniforme. Assim, obtém-se o seguinte resultado:

Teorema 4 *Se $I \in C_0(\Omega)^*$, então existem funcionais positivos $I^{\pm} \in C_0(\Omega)^*$ tais que $I = I^+ + I^-$.*

Assim, pelos dois teoremas anteriores, dado um $I \in C_0(\Omega)^*$ existe uma medida de Radon (com sinal) μ tal que $I(f) = \int_{\Omega} f d\mu$, para todo $f \in C_0(\Omega)$.

Teorema 5 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, $f \in C_0(\Omega)$ e $I_{\mu}(f) := \int_{\Omega} f d\mu$. Então a aplicação $\mu \mapsto I_{\mu}$ é um isomorfismo isométrico de $\mathcal{M}(\Omega)$ em $C_0(\Omega)^*$. Ou seja, $C_0(\Omega)^*$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{M}(\Omega)$.*

Podemos definir convergência fraca em medida.

Definição 4 Uma sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ converge fracamente para $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, denotando-se $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, se para todo $\varphi \in C_c(\Omega)$ tem-se

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu_n \longrightarrow \int_{\Omega} \varphi d\mu,$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Além disso, serão necessários no próximo capítulo os seguintes teoremas cujas demonstrações encontram-se em [11]:

Teorema 6 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado)

Se $f_n, g_n, f, g \in L^1(\Omega)$ e quando $n \longrightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} f_n(x) &\longrightarrow f(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \\ g_n(x) &\longrightarrow g(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \\ |f_n(x)| &\leq |g(x)| \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \end{aligned}$$

e

$$\int_{\Omega} g_n dx \longrightarrow \int_{\Omega} g dx.$$

Então,

$$\int_{\Omega} f_n dx \longrightarrow \int_{\Omega} f dx.$$

Teorema 7 (Desigualdade de Hölder) Suponha $1 < p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ conjugado de p , ou seja, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se f e g são funções mensuráveis, então

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

2.2 Teoria das distribuições

Nesta seção, serão apresentados definições e teoremas envolvendo distribuições e derivada distribucional.

Seja $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$, ou seja, espaço das funções de classe C^∞ com suporte compacto em Ω .

A topologia utilizada será a topologia induzida pela convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$ conforme definida em [13]. Dada uma sequência $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, temos que $\phi_n \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$, em $\mathcal{D}(\Omega)$ se existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp } \phi_n \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todas suas derivadas convergem uniformemente para 0.

Definição 5 Uma distribuição T em Ω é um funcional linear contínuo definido em $\mathcal{D}(\Omega)$, onde $\mathcal{D}(\Omega)$ é espaço das funções de classe C^∞ com suporte compacto em Ω . O espaço das distribuições em Ω será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 6 Seja T em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ é definida como uma distribuição caracterizada por

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(v) = -T\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right), \quad (2.1)$$

para $v \in \mathcal{D}$.

Generalizando, dado um multi-índice $p = (p_1, \dots, p_N)$ com $p_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, N$, e sendo

$|p| = p_1 + \dots + p_N$ e $D^p(v) = \frac{\partial^{|p|}v}{\partial^{p_1}x_1\partial^{p_2}x_2\dots\partial^{p_N}x_N}$ definimos

$$D^pT(v) = (-1)^{|p|}T(D^pv),$$

para $v \in \mathcal{D}$.

Ainda, existe uma injeção $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Dada $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, define-se $T_f : v \in \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$. Tem-se que T_f é um funcional linear e, pelo próximo teorema, será possível mostrar que T_f é uma distribuição.

Teorema 8 Seja T funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega)$. Então, T é uma distribuição se e somente se para todo compacto $K \subset \Omega$ existem $n \in \mathbb{N}$ e uma constante $C(K)$ tais que $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$ com $\text{supp } v \subset K$

$$|T(v)| \leq C(K) \sum_{|p| \leq n} \|D^pv\|_{\infty}.$$

Para mostrar que T_f é uma distribuição, seja $K \subset \Omega$ conjunto compacto tal que $\text{supp } v \subset K$, então

$$T_f(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx = \int_K f(x)v(x)dx \leq \|v\|_{\infty} \int_K f(x)dx = C(K)\|v\|_{\infty}.$$

Logo, pelo Teorema 8, T_f é uma distribuição em Ω . O seguinte teorema garante a injetividade:

Teorema 9 Sejam $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que para todo $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ tem-se

$$\int_{\Omega} f(x)v(x)dx = \int_{\Omega} g(x)v(x)dx.$$

Então, $f = g$ q.t.p. em Ω .

Pelo Teorema 9, se $T_f(v) = T_g(v)$, para todo $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, então $f = g$ q.t.p. em Ω .

Pelo exposto acima, dada $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, podemos diferenciá-la, calculando as derivadas distribucionais de T_f . Assim sendo, dada $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(v) = \frac{\partial T_f}{\partial x_i}(v) = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx.$$

2.3 Espaço $BV(\Omega)$

Nesta seção serão apresentados resultados básicos do espaço das funções de variação limitada com base em [2].

Definição 7 A função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma função de variação limitada se, e somente se, $u \in L^1(\Omega)$ e $Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, onde $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$ e $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ são as derivadas distribucionais de u . Assim,

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) : Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}.$$

Seja uma medida $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, então a sua variação total $|\mu|$ definida em um boreliano $B \subset \Omega$ é dada por:

$$|\mu|(B) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |\mu(B_i)| : \cup_{i=0}^{\infty} B_i = B, \{B_i\} \text{ partições de } B \text{ em } \mathcal{B}(\Omega) \right\},$$

onde $\mathcal{B}(\Omega)$ é a σ -Álgebra de Borel de Ω .

A aplicação $\mu \rightarrow |\mu|(\Omega)$ é uma norma que torna $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ um espaço de Banach.

Para determinar se uma função u pertence a $BV(\Omega)$ tem-se o seguinte teorema:

Teorema 10 As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $u \in BV(\Omega)$,
- ii) $u \in L^1(\Omega)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{M}(\Omega)$, para $i = 1, \dots, N$,
- iii) $u \in L^1(\Omega)$ e $\|Du\| := \sup\{\langle Du, \psi \rangle : \psi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\psi\|_{\infty} \leq 1\} < \infty$
- iv) $u \in L^1(\Omega)$ e $\|Du\| = \sup\{\int_{\Omega} u \operatorname{div} \psi dx : \psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\psi\|_{\infty} \leq 1\} < \infty$

onde $\langle Du, \psi \rangle = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \psi_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e também $\|Du\| = \int_{\Omega} |Du|$.

O espaço $BV(\Omega)$, neste capítulo, será equipado com a seguinte norma

$$|u|_{BV(\Omega)} = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} |u| dx$$

que é equivalente a norma que será utilizada na aplicação no próximo capítulo.

A norma $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ é extensão da norma $|\cdot|_{W^{1,1}(\Omega)}$, ou seja, dado $u \in W^{1,1}(\Omega)$, tem-se que

$$|u|_{BV(\Omega)} = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} |u| dx = \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \int_{\Omega} |u| dx = |u|_{W^{1,1}(\Omega)}.$$

Portanto se $u \in W^{1,1}(\Omega)$, então $u \in BV(\Omega)$. Porém, o espaço $W^{1,1}(\Omega)$ é supespaço próprio de $BV(\Omega)$ e, para visualizar isto, o próximo exemplo trará uma função u que pertence a $BV(\Omega)$ e que, entretanto, não pertence a $W^{1,1}(\Omega)$.

Exemplo 1 Seja $E \subset \Omega$ aberto com fronteira suave tal que $|E| < \infty$ e $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < \infty$, onde $|E|$ denota a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^N do conjunto E e \mathcal{H}^{N-1} denota a medida de Hausdorff de dimensão $N - 1$. Note que a função característica $\chi_E \in BV(\Omega)$. Para todo $\psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ com $|\psi|_\infty \leq 1$, pelo Teorema da Divergência tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div} \psi dx &= \int_E \operatorname{div} \psi dx = \int_{\partial E} \psi \cdot \nu \mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\partial E} |\psi|_\infty |\nu|_\infty \mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq \int_{\partial E} \mathcal{H}^{N-1} = \mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < \infty, \end{aligned}$$

onde ν é o campo normal exterior a $\partial\Omega$.

Portanto,

$$\int_{\Omega} |D\chi_E| = \sup \left\{ \int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div} \psi dx : \psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\psi|_\infty \leq 1 \right\} \leq \mathcal{H}^{N-1}(E) < \infty.$$

Também, $\int_{\Omega} |\chi_E| dx = |E| < \infty$, e assim $\chi_E \in BV(\Omega)$.

Por outro lado, $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$, pois para todo $\psi \in C_c^1(\Omega)$ tem-se

$$D\chi_E(\psi) = - \int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div} \psi dx = - \int_E \operatorname{div} \psi dx = - \int_{\partial E} \psi \nu \mathcal{H}^{N-1} = -\nu \mathcal{H}^{N-1} \lfloor_{\partial E}(\psi).$$

par Assim, $D\chi_E$ é singular com respeito a medida de Lebesgue, ou seja, existe conjunto F tal que $\mathcal{L}^N(F) = 0$ e $D\chi_E(F) \neq 0$, e conseqüentemente $D\chi_E$ não é gerada por uma função de $L^1(\Omega)$. Portanto $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$.

Com este exemplo, tem-se que $W^{1,1}(\Omega) \subsetneq BV(\Omega)$.

Definimos a seguir a noção de convergência fraca e convergência intermediária.

Definição 8 Dizemos que uma seqüência $(u_n) \subset BV(\Omega)$ converge fracamente para uma função $u \in BV(\Omega)$, denotando-se por $u_n \rightharpoonup u$, se

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \text{ forte em } L^1(\Omega); \\ Du_n &\rightharpoonup Du \text{ fracamente em } \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Teorema 11 Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ seqüência limitada em $BV(\Omega)$ que converge forte para u em $L^1(\Omega)$. Então,

- i) $u \in BV(\Omega)$ e $\int_{\Omega} |Du| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_n|$,
- ii) $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $BV(\Omega)$.

Demonstração. i) Seja $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $|\varphi|_\infty \leq 1$. Então, existe K compacto tal que $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Como $\operatorname{div} \varphi$ é contínuo e $\operatorname{supp} \operatorname{div} \varphi \subset K$, seja $M = \sup_{x \in K} |\operatorname{div} \varphi(x)|$.

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \operatorname{div} \varphi(x) &= u(x) \operatorname{div} \varphi(x) \quad \text{q.t.p. em } K, \\ |u_n(x) \operatorname{div} \varphi(x)| &\leq M |u_n(x)| \quad \text{q.t.p. em } K, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |u_n| dx &= \int_K |u| dx.\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado,

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx = \int_K u \operatorname{div} \varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K u_n \operatorname{div} \varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi dx.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \varphi dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_n|.$$

Como esta desigualdade ocorre para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, com $|\varphi|_{\infty} \leq 1$, tem-se que

$$\int_{\Omega} |Du| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_n|.$$

ii) Para todo $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tem-se

$$\langle Du_n, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} = - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \varphi dx.$$

Como $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, assim como em $i)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado tem-se

$$- \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \varphi dx \rightarrow - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx = \langle Du, \varphi \rangle,$$

Logo, $\langle Du_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle Du, \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Usando a densidade de $C_c^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ em $C_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$, e sendo (Du_n) limitada, conclui-se que Du_n converge fracamente para Du . ■

Teorema 12 *O espaço $BV(\Omega)$ equipado com a norma $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (u_n) sequência de Cauchy em $BV(\Omega)$. Como $(u_n) \subset L^1(\Omega)$ e também $|u_n|_{L^1(\Omega)} \leq |u_n|_{L^1(\Omega)} + \|Du_n\| = |u_n|_{BV(\Omega)}$, tem-se que

$$|u_n - u_m|_{L^1(\Omega)} \leq |u_n - u_m|_{BV(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty,$$

e então (u_n) é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$. Como, $L^1(\Omega)$ é um espaço de Banach, existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que quando $n \rightarrow \infty$, $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$.

Seja $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $p, q > N_0$, então $|u_p - u_q|_{BV(\Omega)} < \epsilon$. Fixando $q > N_0$ e fazendo $p \rightarrow \infty$, tem-se $u_p - u_q \rightarrow u - u_q$ em $L^1(\Omega)$. Também, sendo (u_n) sequência de Cauchy em $BV(\Omega)$, tem-se $\sup_{p \in \mathbb{N}} \|Du_p - Du_q\| \leq \sup_{p \in \mathbb{N}} |u_p - u_q|_{BV(\Omega)} < \infty$. Assim, $(u_p - u_q)_{p \in \mathbb{N}}$ é limitada em $BV(\Omega)$ e pelo Teorema 11,

$$\|Du - Du_q\| \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \|Du_p - Du_q\| \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} |u_p - u_q|_{BV(\Omega)} < \epsilon.$$

Logo, $\|Du\| \leq \|Du - Du_q\| + \|Du_q\| < \infty$, e sendo $u \in L^1(\Omega)$, pelo Teorema 10, tem-se que $u \in BV(\Omega)$.

Por fim,

$$|u - u_q|_{BV(\Omega)} = |u - u_q|_{L^1(\Omega)} + \|Du - Du_q\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } q \rightarrow \infty.$$

Portanto, $BV(\Omega)$ é um espaço de Banach. ■

Dentro dos resultados em Espaços de Sobolev tem-se que o espaço $C^\infty(\Omega)$ é denso no espaço $W^{1,1}(\Omega)$ com respeito a norma $|\cdot|_{W^{1,1}(\Omega)}$. Lembrando que $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ estende $|\cdot|_{W^{1,1}(\Omega)}$ e que $\overline{C^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_{W^{1,1}(\Omega)}} = W^{1,1}(\Omega) \subsetneq BV(\Omega)$ tem-se que

$$\overline{C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)}^{|\cdot|_{BV(\Omega)}} \subset W^{1,1}(\Omega) \subsetneq BV(\Omega).$$

Portanto, $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ não é denso em $BV(\Omega)$ com a topologia da norma. Dessa forma, o objetivo é encontrar uma nova noção de convergência que torne o espaço $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ denso em $BV(\Omega)$ com respeito a topologia induzida por esta convergência. Assim, será definida a noção de convergência intermediária.

Definição 9 *Seja sequência $(u_n) \subset BV(\Omega)$ e $u \in BV(\Omega)$. Diz-se que u_n converge para u no sentido da convergência intermediária se, quando $n \rightarrow \infty$,*

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \quad \text{forte em } L^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} |Du_n| &\longrightarrow \int_{\Omega} |Du|. \end{aligned}$$

Teorema 13 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $u_n \longrightarrow u$ no sentido da convergência intermediária;

$$ii) \begin{cases} u_n \rightharpoonup u \quad \text{fraco em } BV(\Omega) \\ \int_{\Omega} |Du_n| \longrightarrow \int_{\Omega} |Du| \end{cases}$$

Exemplo 2 *A convergência intermediária é mais fina que a convergência fraca em $BV(\Omega)$, ou seja, a topologia gerada pela convergência fraca é subconjunto próprio da topologia gerada pela convergência intermediária. Seja uma sequência $(u_n) \subset BV(0,1)$ dada por:*

$$u_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{se } x \in (\frac{1}{n}, 1) \end{cases}$$

Será mostrado que u_n converge fraco para 1 em $BV(0, 1)$ porém não converge no sentido intermediário.

Note que $u_n \rightarrow 1$ em $L^1(0, 1)$, quando $n \rightarrow \infty$. De fato,

$$\int_0^1 |u_n(x) - 1| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} |nx - 1| dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 |1 - 1| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx) dx = \frac{1}{2n}.$$

Logo, $|u_n - 1|_{L^1(0,1)} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Seja $\phi \in C_0^1(0, 1)$ e Φ primitiva de ϕ . Então,

$$Du_n(\phi) = - \int_0^1 u_n \phi'(x) dx = - \int_0^{\frac{1}{n}} nx \phi'(x) dx - \int_{\frac{1}{n}}^1 \phi'(x) dx = n [\Phi(1/n) - \Phi(0)] - \phi(1).$$

Tomando $m = \frac{1}{n}$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [\Phi(1/n) - \Phi(0)] = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\Phi(m) - \Phi(0)}{m} = \Phi'(0) = \phi(0).$$

Logo, $Du_n(\phi) \rightarrow \phi(0) - \phi(1) = - \int_0^1 1 \phi'(x) dx = D(1)(\phi)$, quando $n \rightarrow \infty$, para toda $\phi \in C_0^1(0, 1)$. Portanto, $u_n \rightarrow 1$ fracamente em $BV(0, 1)$.

Para que u_n não convirja no sentido intermediário para 1, falta mostrar que $\|Du_n\|$ não converge para $\|D(1)\|$. Assim, seja $\phi \in C_c^1(0, 1)$, $|\phi|_\infty \leq 1$, então tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n \phi'(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{n}} nx \phi'(x) dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \phi'(x) dx \\ &= n \left[\frac{1}{n} \phi(1/n) - \int_0^{\frac{1}{n}} \phi dx \right] + \phi(1) - \phi(1/n) \\ &= -n \int_0^{\frac{1}{n}} \phi dx \leq n |\phi|_\infty \int_0^{\frac{1}{n}} dx \leq 1. \end{aligned}$$

Com o objetivo de mostrar que

$$\|Du_n\| = \sup \left\{ \int_0^1 u_n \phi'(x) dx : \phi \in C_c^1(0, 1), |\phi|_\infty \leq 1 \right\} = 1,$$

será contruída uma sequência em $(\phi_m) \subset C_c^1(0, 1)$ tal que $\int_0^1 u_n \phi_m'(x) dx \rightarrow 1$, quando $m \rightarrow \infty$.

Seja n fixo. Para $m > n$, seja $\phi_m \in C_c^1(0, 1)$, com $\phi_m = -1$ em $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$, $\phi_m = 0$ em $(0, \frac{1}{2m})$ e $|\phi|_\infty \leq 1$ em $[\frac{1}{2m}, \frac{1}{m}]$. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 u_n \frac{\partial \phi_m}{\partial x} dx - 1 \right| &= \left| -n \int_0^{\frac{1}{n}} \phi_m dx \right| = \left| -n \int_{\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{m}} \phi dx - n \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} -1 dx - 1 \right| = \\ &= \left| -n \int_{\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{m}} \phi dx - \frac{n}{m} \right| \leq n |\phi|_\infty \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m} \right) + \frac{n}{m} \leq \\ &\leq \frac{n}{2m} + \frac{n}{m} \rightarrow 0 \quad \text{quando } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto $\|Du_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e então $\|Du_n\| \rightarrow 1 \neq 0 = \|D(1)\|$, quando $n \rightarrow \infty$.

Em seguida, serão apresentadas definições e teoremas que serão necessários na demonstração de um resultado importante de densidade em $BV(\Omega)$.

Definição 10 Uma função regularizante $\rho_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é definida como

$$\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-N} \rho(x/\epsilon),$$

onde ρ é uma função não negativa que satisfaz $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx = 1$, com $\text{supp}(\rho_\epsilon) \subset \overline{B_1(0)}$.

Também, para todo $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ define-se

$$\rho_\epsilon * \mu(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\epsilon(x-y) \mu(y).$$

Teorema 14 Sendo $\rho_\epsilon, \rho_\epsilon * \mu$ como na Definição 10 e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1, \infty)$. Então $\rho_\epsilon * \mu \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$, e além disso valem as seguintes propriedades:

- i) $\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_\epsilon * \mu| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\mu|$;
- ii) $\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_\epsilon * \mu| \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\mu|$ quando $\epsilon \rightarrow 0$;
- iii) $f * \rho_\epsilon \in L^p(\mathbb{R}^N)$;
- iv) $|f * \rho_\epsilon|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq |f|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$;
- v) $f * \rho_\epsilon \rightarrow f$ em $L^p(\Omega)$, quando $\epsilon \rightarrow 0$;
- vi) $D^\alpha(\rho_\epsilon * \mu) = D^\alpha \rho_\epsilon * \mu$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Teorema 15 O espaço $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ é denso em $BV(\Omega)$ equipado com a convergência intermediária. Consequentemente, $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $BV(\Omega)$ com a convergência intermediária.

Demonstração. Primeiro, note que $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$. Por um lado, $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \supset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$, e por outro, dado $u \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, tem-se que $|u|_{L^1(\Omega)} < \infty$ e também $|\frac{\partial u}{\partial x_i}|_{L^1(\Omega)} \leq \int_\Omega |\nabla u| dx \leq |u|_{BV(\Omega)} < \infty$. Logo, $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$.

O objetivo é de construir uma função $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega |u - u_\epsilon| dx < 2\epsilon$ e $\left| \int_\Omega |Du_\epsilon| - \int_\Omega |Du| \right| < 4\epsilon$. Em outras palavras, quando $\epsilon \rightarrow 0$, tem-se:

$$\begin{cases} u_\epsilon \longrightarrow u & \text{em } L^1(\Omega) \\ \int_\Omega |Du_\epsilon| \longrightarrow \int_\Omega |Du| \end{cases}$$

Como $\int_\Omega |Du| < \infty$, existe Ω_0 aberto tal que $\int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Du| < \epsilon$. A partir disso, constrói-se uma família de conjuntos abertos $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{aligned} \Omega_i &\subset\subset \Omega_{i+1}, \\ \Omega &= \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega_i. \end{aligned}$$

Assim, constrói-se outra família $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ que também é cobertura aberta de Ω , onde define-se $C_1 = \Omega_2$ e $C_i = \Omega_{i+1} \setminus \overline{\Omega_{i-1}}$. Dessa forma, define-se uma partição da unidade $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ subordinada a cobertura $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$, onde as funções $\phi_i \in C_c^\infty(C_i)$, $0 \leq \phi_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i = 1$.

Note que $C_{i+1} \cap C_i = \Omega_{i+1} \setminus \Omega_i \neq \emptyset$. Logo, $\Omega_1 \cap C_i = \emptyset$, $i > 2$. Então $\phi_1 = 1$ em Ω_1 . Ainda para todo $i \in \mathbb{N}$ escolhe-se ϵ_i tal que

$$\text{supp}(\rho_{\epsilon_i} * \phi_i u) \subset C_i, \quad (2.2)$$

$$\left| \int_\Omega |\rho_{\epsilon_1} * (\phi_1 Du)| - \int_\Omega |\phi_1 Du| \right| < \epsilon, \quad (2.3)$$

$$\int_\Omega |\rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i) - u\phi_i| dx < \frac{\epsilon}{2^i}, \quad (2.4)$$

$$\int_\Omega |\rho_{\epsilon_i} * (uD\phi_i) - uD\phi_i| dx < \frac{\epsilon}{2^i}, \quad (2.5)$$

sendo ρ_{ϵ_i} funções regularizantes anteriormente definidas. Ainda, (2.3) é obtida a partir do Teorema 14.ii, e sendo $u\phi_i, uD\phi_i \in L^1(\Omega)$, então obtém-se (2.4) e (2.5) a partir do Teorema 14.v.

Define-se então $u_\epsilon := \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i)$. Como para todo $x \in \Omega$, x pertence a no máximo dois conjuntos C_i e portanto u_ϵ está bem definido. Como em uma vizinhança de x no máximo duas funções ϕ_i não se anulariam, então $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$.

Pela inequação (2.4) tem-se

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u - u_\epsilon| dx &= \int_\Omega \left| u - \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i) \right| dx = \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^{\infty} u\phi_i - \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i) \right| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega |u\phi_i - \rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i)| dx < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $u_\epsilon \longrightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Falta mostrar que $\int_\Omega |Du_\epsilon| \longrightarrow \int_\Omega |Du|$.

Como $\phi_i \in C_c^\infty(C_i)$ tem-se $D(u\phi_i) = \phi_i Du + uD\phi_i \mathcal{L}^N \llcorner_\Omega$. Então, sabendo que

$$\sum_{i=1}^{\infty} D\phi_i = D(1) = 0$$

$$\begin{aligned} Du_\epsilon &= D\left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} D(\rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * D(u\phi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (\phi_i Du + uD\phi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (\phi_i Du) + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (uD\phi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (\phi_i Du) + \sum_{i=1}^{\infty} (\rho_{\epsilon_i} * (uD\phi_i) - uD\phi_i). \end{aligned}$$

Pela igualdade acima, pela inequação (2.5) e pelo Teorema 14.i tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |\rho_{\epsilon_1} * (uD\phi_1)| dx - \int_{\Omega} |Du_\epsilon| \right| &\leq \sum_{i=2}^{\infty} \int_{\Omega} |\rho_{\epsilon_i} * (\phi_i Du)| dx + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} |\rho_{\epsilon_i} * (uD\phi_i) - uD\phi_i| dx \\ &\leq \sum_{i=2}^{\infty} \int_{\Omega} |\phi_i| |Du| dx + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Du| dx + \epsilon < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Pela inequação (2.3) e sabendo que $\phi = 1$ em Ω_1

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |\rho_{\epsilon_1} * (uD\phi_1)| dx - \int_{\Omega} |Du| \right| &\leq \left| \int_{\Omega} |\rho_{\epsilon_1} * (uD\phi_1)| dx - \int_{\Omega} |\phi_1 Du| \right| + \left| \int_{\Omega} |\phi_1 Du| - \int_{\Omega} |Du| \right| \\ &< \epsilon + \int_{\Omega} (1 - \phi_1) |Du| dx \leq \epsilon + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Du| dx < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Assim, pelas duas desigualdades desenvolvidas acima tem-se

$$\left| \int_{\Omega} |Du_\epsilon| - \int_{\Omega} |Du| \right| < 2\epsilon + 2\epsilon = 4\epsilon.$$

Portanto, $\int_{\Omega} |Du_\epsilon| \rightarrow \int_{\Omega} |Du|$, quando $\epsilon \rightarrow 0$. ■

Utilizando os teoremas anteriores, pode-se então obter resultados sobre as imersões contínuas de $BV(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $q \in [1, 1^*]$ e, caso $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja limitado, compactas de $BV(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $q \in [1, 1^*)$, onde $1^* = \frac{N}{N-1}$.

Teorema 16 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto com fronteira lipschitziana. Então, para $q \in [1, 1^*]$ a imersão $BV(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua, ou seja, existe uma constante $C = C(\Omega, q, N)$ tal que para todo $v \in BV(\Omega)$ tem-se*

$$|v|_{L^q(\Omega)} \leq C|v|_{BV(\Omega)}.$$

Demonstração. Dado $u \in BV(\Omega)$, como $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ é denso em $BV(\Omega)$ com respeito a convergência intermediária, existe $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ em } L^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} |Du_n| &\rightarrow \int_{\Omega} |Du|, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Logo, $|u_n|_{L^1(\Omega)} \leq M_1$ e $\|Du_n\| \leq M_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é uma imersão contínua, existe $C = C(\Omega, p, N) > 0$ tal que

$$|u_n|_{L^q(\Omega)} \leq C \left(|u_n|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |\nabla u_n| dx \right) = C \left(|u_n|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |Du_n| \right) \leq C(M_1 + M_2) < \infty.$$

Logo, (u_n) é limitada em $L^q(\Omega)$ e portanto, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $L^q(\Omega)$. Pela semicontinuidade inferior da norma de $L^q(\Omega)$ com respeito a convergência fraca, e pela convergência intermediária tem-se

$$\begin{aligned} |u|_{L^q(\Omega)} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{L^q(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[C \left(|u_n|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |Du_n| \right) \right] \\ &= C \left(|u|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |Du| \right) = C|u|_{BV(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como para todo $u \in BV(\Omega)$ tem-se que $|u|_{L^q(\Omega)} \leq C|u|_{BV(\Omega)}$, então a imersão $BV(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $q \in [1, 1^*]$ é contínua. ■

Observação 1 Sabendo que a imersão $BV(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \in [1, 1^*]$, é contínua, seria possível tomar na demonstração do Teorema 15 funções regularizantes na norma $L^q(\Omega)$ e assim, obter como resultado que para todo $u \in BV(\Omega)$ existe uma sequência $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ que satisfaz

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u & \text{em } L^q(\Omega), \\ \int_{\Omega} |Du_n| \rightarrow \int_{\Omega} |Du|. \end{cases}$$

Teorema 17 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado com fronteira lipschitziana. Então, para $p \in [1, 1^*)$ a imersão $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta, ou seja, dada uma sequência (u_n) limitada em $BV(\Omega)$, existe um subsequência que converge forte em $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Seja (u_n) sequência limitada em $BV(\Omega)$, onde, sem perda de generalidade, pode-se tomar $|u_n|_{BV(\Omega)} \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O objetivo é encontrar uma subsequência convergente em $L^p(\Omega)$, com $p \in [1, 1^*)$.

Sabendo da propriedade dita na Observação 1, encontra-se então uma sequência (v_n) contida em $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |v_n - u_n|_{L^p(\Omega)} &\leq \frac{1}{n}, \\ |(\|Dv_n\| - \|Du_n\|)| &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |v_n|_{W^{1,1}(\Omega)} &= |v_n|_{L^1(\Omega)} + \|Dv_n\| \leq |v_n - u_n|_{L^1(\Omega)} + |u_n|_{L^1(\Omega)} + (||Dv_n|| - ||Du_n||) + ||Du_n|| \\ &= |v_n - u_n|_{L^1(\Omega)} + |u_n|_{BV(\Omega)} + (||Dv_n|| - ||Du_n||) \\ &\leq \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{n} < 4. \end{aligned}$$

Como (v_n) é limitada em $W^{1,1}(\Omega)$ e a imersão $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para $p \in [1, 1^*)$, é compacta, existe uma subsequência (v_{n_k}) e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $v_{n_k} \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$.

Logo, $|u_{n_k} - u|_{L^p(\Omega)} \leq |u_{n_k} - v_{n_k}|_{L^p(\Omega)} + |v_{n_k} - u|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, e portanto, $u_{n_k} \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$.

Falta mostrar que $u \in BV(\Omega)$. Como $||Du_{n_k}|| \leq |u_{n_k}|_{BV(\Omega)} \leq 1$, dessa forma tem-se que $\sup_{k \in \mathbb{N}} ||Du_{n_k}|| < \infty$. Como $u_{n_k} \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, pelo Teorema 11 tem-se que

$$||Du|| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} ||Du_{n_k}|| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} |u_{n_k}|_{BV(\Omega)} \leq 1.$$

Logo, $u \in L^1(\Omega)$ e $||Du|| < \infty$, e pelo Teorema 10 tem-se que $u \in BV(\Omega)$.

Portanto a imersão $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para $p \in [1, 1^*)$, é compacta. ■

A partir de agora, serão apresentados resultados de teoria do traço para o espaço $BV(\Omega)$ exigindo certa regularidade por parte da sua fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Consideremos Ω com fronteira Γ lipschitziana.

Teorema 18 *Existe uma aplicação linear contínua γ_0 de $BV(\Omega)$ em $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\Gamma)$ que satisfaz*

- i) $u \in C(\bar{\Omega}) \cap BV(\Omega) \Rightarrow \gamma_0(u) = u|_{\Gamma}$;
- ii) vale a fórmula de Green generalizada:

$$\int_{\Omega} \varphi Du = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx + \int_{\Gamma} \gamma_0(u) \varphi \nu \partial \mathcal{H}^{N-1}$$

onde $\nu(x)$ é vetor unitário normal exterior definido \mathcal{H}^{N-1} - q.t.p. em Γ .

Exemplo 3 *Sejam $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ com A e Ω abertos com fronteira suave e seja $u \in BV(A)$. Define-se então $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$*

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & , \text{ se } x \in A, \\ 0 & , \text{ se } x \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Então, $v \in BV(\Omega)$, e também, dado $\phi \in C^1_0(\Omega)$ e $\nu(x)$ vetor unitário normal exterior a A em $x \in \partial A$, tem-se

$$\begin{aligned} Dv(\phi) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \phi dx = - \int_A \operatorname{div} \phi dx = \int_A \phi Du - \int_{\partial A} \gamma(u) \phi \nu \partial \mathcal{H}^{N-1} \\ &= Du|_A(\phi) - \gamma(u) \nu \mathcal{H}^{N-1}|_{\partial A}(\phi). \end{aligned}$$

Logo, $Dv = Du|_A - \gamma(u) \nu \mathcal{H}^{N-1}|_{\partial A}$.

Exemplo 4 Seja $u \in BV(\Omega)$ e $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$, então $D(u\xi) = \xi Du + u\nabla\xi$. Para todo $\psi \in C_0^1(\Omega)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u\xi)}{\partial x_i}(\psi) &= - \int_{\Omega} u\xi \frac{\partial\psi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial(\xi\psi)}{\partial x_i} - \psi \frac{\partial\xi}{\partial x_i} \right) dx \\ &= - \int_{\Omega} u \frac{\partial(\xi\psi)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u\psi \frac{\partial\xi}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{\Omega} \xi\psi \frac{\partial u}{\partial x_i} - \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)(\xi\psi)\nu \partial\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\Omega} u\psi \frac{\partial\xi}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{\Omega} \xi\psi \frac{\partial u}{\partial x_i} + \int_{\Omega} u\psi \frac{\partial\xi}{\partial x_i} dx \\ &= \xi \frac{\partial u}{\partial x_i}(\psi) + u \frac{\partial\xi}{\partial x_i} \mathcal{L}^N \llcorner_{\Omega}(\psi). \end{aligned}$$

Logo, $\frac{\partial(u\xi)}{\partial x_i} = \xi \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial\xi}{\partial x_i} \mathcal{L}^N \llcorner_{\Omega}$ no sentido distribucional. Assim,

$$D(u\xi) = \xi Du + u\nabla\xi \mathcal{L}^N \llcorner_{\Omega}. \quad (2.6)$$

Teorema 19 Seja Ω domínio Lipschitz. O operador traço γ_0 é contínuo de $BV(\Omega)$, munido da convergência intermediária, em $L^1(\Omega)$ munido da convergência forte.

Outro resultado importante é a Desigualdade de Poincaré.

Teorema 20 (Desigualdade de Poincaré em $BV(\Omega)$) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira Lipschitz. Então existe uma constante $C = C(\Omega, N) > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |u| dx \leq C \left(\int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial\mathcal{H}^{N-1} \right).$$

A demonstração encontra-se em [14].

2.4 Solução de variação limitada

Para o problema que será tratado no próximo capítulo, suas hipóteses fazem com que o funcional associado à equação elíptica satisfaça as condições do Teorema do Passo da Montanha, onde como consequência, será obtida uma sequência que ajudará a encontrar uma solução de variação limitada. Em seguida, serão apresentados definições envolvendo teoria de subdiferenciais, baseado em [3, 4, 7, 16], e uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais que se escrevem como a diferença de um localmente Lipschitz e um suave, sem a condição de Palais-Smale.

Sejam E espaço de Banach e $\mathcal{J} : E \rightarrow (-\infty, +\infty]$ função convexa localmente Lipschitz. O conjunto $D_{\mathcal{J}} := \{u \in E : \mathcal{J}(u) < \infty\}$ é chamado domínio efetivo de \mathcal{J} . Dessa forma, dado $u \in D_{\mathcal{J}}$, o conjunto:

$$\partial\mathcal{J}(u) = \{u^* \in E^* : \mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle, \forall v \in E\}$$

é chamado subdiferencial de \mathcal{J} em u , onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par dualidade E^* em E .

Seja então $\Phi = \mathcal{J} - \mathcal{G}$ definido em E , onde \mathcal{J} é convexo semicontínuo inferiormente e $\mathcal{G} \in C^1(E, \mathbb{R})$. Um ponto $u \in D_{\mathcal{J}}$ é chamado ponto crítico de Φ se $\mathcal{G}'(u) \in \partial\mathcal{J}(u)$, ou seja, se u satisfaz:

$$\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) \geq \langle \mathcal{G}'(u), v - u \rangle, \forall v \in E.$$

Exemplo 5 *Seja φ uma função convexa e Gateaux diferenciável em x . Então, $\partial\varphi(x)$ consiste de um único elemento, que é a derivada de Gateaux de φ no ponto x , $\varphi'(x)$. Lembrando que $\varphi'(x)y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x)}{\lambda}$, para $y \in E$.*

Pela convexidade de φ tem-se para todo $y \in E$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$:

$$\varphi((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y).$$

Consequentemente, se $\lambda \in (0, 1)$

$$\frac{\varphi(x + \lambda(y - x)) - \varphi(x)}{\lambda} \leq \varphi(y) - \varphi(x).$$

Fazendo $\lambda \rightarrow 0^+$ tem-se

$$\varphi'(x)(y - x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x + \lambda(y - x)) - \varphi(x)}{\lambda} \leq \varphi(y) - \varphi(x),$$

ou seja, pela desigualdade anterior, $\varphi(x) < \infty$, e assim $x \in D_{\varphi}$ e $\varphi'(x) \in \partial\varphi(x)$. Por fim, é necessário mostrar a unicidade.

Seja w^ elemento qualquer de $\partial\varphi(x)$. Pela definição de subdiferencial, para todo $w \in E$*

$$\varphi(w) - \varphi(x) \geq \langle w^*, w - x \rangle.$$

Fazendo a mudança de variável $w = x + \lambda y$, tem-se, para todo $y \in E$, que

$$\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x) \geq \langle w^*, \lambda y \rangle.$$

Primeiro, para $\lambda > 0$, tem-se $\frac{\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x)}{\lambda} \geq \langle w^, y \rangle$. Fazendo $\lambda \rightarrow 0^+$, obtém-se para todo $y \in E$*

$$\varphi'(x)y \geq \langle w^*, y \rangle.$$

Analogamente para $\lambda < 0$ e $\lambda \rightarrow 0^+$ tem-se para todo $y \in E$

$$\varphi'(x)y \geq \langle w^*, y \rangle.$$

Consequentemente, para todo $y \in E$

$$\langle \varphi'(x), y \rangle = \varphi'(x)y = \langle w^*, y \rangle \Rightarrow \langle w^* - \varphi'(x), y \rangle = 0 \Rightarrow w^* = \varphi'(x).$$

Ou seja, $\partial\varphi(x) = \{\varphi'(x)\}$.

Para demonstrar o Teorema do Passo da Montanha, é necessário apresentar o Lema da Deformação.

Teorema 21 (Lema da Deformação) *Seja E espaço de Banach e $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ funcional localmente Lipschitz. Denota-se, dado $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $T_a := \{x \in E : T(x) \leq a\}$. Se existe $d \in \mathbb{R}$, $S \subset E$ e $\alpha, \delta, \epsilon_0 > 0$ tais que*

$$\beta(x) := \min\{\|z\|_{E^*} : z \in \partial T(x)\} \geq \alpha \quad \text{para todo } x \in T^{-1}([d - \epsilon_0, d + \epsilon_0]) \cap S_{2\delta}$$

onde $S_{2\delta}$ é 2δ -vizinhança de S , então para $0 < \epsilon < \min\{\frac{\delta\alpha}{2}, \epsilon_0\}$ existe um homeomorfismo $\eta : E \rightarrow E$ que satisfaz:

- i) $\eta(x) = x$ para todo $x \notin T^{-1}([d - \epsilon_0, d + \epsilon_0]) \cap S_{2\delta}$
- ii) $\eta(T_{d+\epsilon}) \subset T_{d-\epsilon}$
- iii) $T(\eta(x)) \leq T(x)$ para todo $x \in E$

Teorema 22 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja E um espaço de Banach e um funcional $\Phi = I_0 - I$, onde $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e I_0 é um funcional convexo localmente Lipschitz, ambos definidos em E . Suponha que Φ satisfaz:*

- i) Existem $\rho > 0$ e $\alpha > \Phi(0)$ tais que $\Phi|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;
- ii) $\Phi(e) < \Phi(0)$ para algum $e \in E \setminus \overline{B_\rho(0)}$

Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in E$ tal que

$$c - \epsilon < \Phi(x_\epsilon) < c + \epsilon$$

e para todo $y \in E$ vale

$$I_0(y) - I(x_\epsilon) \geq I'(x_\epsilon)(y - x_\epsilon) - \epsilon\|y - x_\epsilon\|$$

onde, sendo $\Gamma = \{\gamma \in C^0([0, 1]; E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$, tem-se que $c \geq \alpha$ é caracterizado como

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0, 1]} \Phi(\gamma(t)).$$

Este teorema encontra-se em [9].

Demonstração.

Note que $\Phi(e) < \Phi(0) < \alpha \leq \Phi|_{\partial B_\rho}$, logo $c \geq \alpha$.

Suponha, por contradição, que exista $\epsilon > 0$ tal que $\Phi(0) < c - \epsilon$ e que dado assim $x \in \Phi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$, então para todo $z_\epsilon \in E^*$, $\|z_\epsilon\|_* \leq \epsilon$, existe $y_\epsilon \in E$ tal que

$$I_0(y_\epsilon) - I_0(x_\epsilon) < I'(x_\epsilon)(y_\epsilon - x_\epsilon) + \langle z_\epsilon, y_\epsilon - x_\epsilon \rangle.$$

Disso segue que $\beta(x) \geq \epsilon$ para todo $x \in \Phi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$. Assim, pelo Lema da Deformação aplicado a $T = \Phi$, $d = c$, $\alpha = \epsilon$ e $\epsilon_0 = \epsilon$ segue que existe um homeomorfismo $\eta : E \rightarrow E$ e $\bar{\epsilon} \in (0, \epsilon)$ que satisfazem:

- i) $\eta(x) = x$, para todo $x \notin \Phi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$
- ii) $\eta(\Phi_{c+\bar{\epsilon}}) \subset \Phi_{c-\bar{\epsilon}}$

Pela definição de c , dado $\bar{\epsilon} > 0$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) < c + \bar{\epsilon}. \quad (2.7)$$

Seja $\bar{\gamma}(t) := \eta(\gamma(t))$, note que desde que $\Phi(e) < \Phi(0) < c - \epsilon$, então $0, e \notin \Phi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ e então tem-se por i)

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(0) &= \eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0, \\ \bar{\gamma}(1) &= \eta(\gamma(1)) = \eta(e) = e. \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\gamma} \in \Gamma$. Por (2.7), $\gamma(t) \in \Phi_{c+\bar{\epsilon}}$, para todo $t \in [0, 1]$. Então por ii) tem-se $\bar{\gamma}(t) = \eta(\gamma(t)) \in \Phi_{c-\bar{\epsilon}}$. Assim,

$$c \leq \max \Phi(\bar{\gamma}(t)) \leq c - \bar{\epsilon},$$

o que é um absurdo. ■

Aplicação

Neste capítulo, será estudada a existência de uma solução de variação limitada para o seguinte problema quasilinear

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = a(x)g(u) & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde o operador diferencial 1-Laplaciano é definido como $\Delta_1 u = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$. As não-linearidades g e a e o conjunto Ω satisfazem o seguinte conjunto de hipóteses:

(a_1) $a(x) \in C(\Omega, \mathbb{R})$ muda de sinal em Ω ;

(a_2) $a(x) \leq 0$, $|x| \geq R_0$ para algum $R_0 > 0$;

(a_3) $\sup_{x \in \Omega} |a(x)||x| < \infty$;

(g_1) $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(g_2) $g(s) = o(1)$ quando $s \rightarrow 0$;

(g_3) $|g(s)| \leq C(1 + |s|^{p-1})$ para algum $C > 0$, $1 < p < 1^* = \frac{N}{N-1}$;

(g_4) $0 < \theta G(s) \leq sg(s)$ com $s \in \mathbb{R}$, $\theta > 1$, onde $G(s) = \int_0^s g(t)dt$;

(Ω_1) existe $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\xi = 1$ em Ω^+ , $\xi = 0$ em Ω^- , $0 \leq \xi \leq 1$ e $|\nabla \xi|_\infty \leq \frac{\theta-1}{C_0}$, onde C_0 é a melhor constante da imersão de $BV(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$, considerando $BV(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial \mathcal{H}^{N-1}.$$

Adotamos como notação

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : a(x) > 0\},$$

$$\Omega^- = \{x \in \Omega : a(x) < 0\},$$

$$\Omega_R = \{x \in \Omega : |x| < R\} = \Omega \cap B_R(0).$$

Dessa forma, o objetivo é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 23 *Se são satisfeitas $(a_1) - (a_3)$, $(g_1) - (g_4)$ e (Ω_1) , então o problema (1.1) tem solução de variação limitada não-trivial a qual satisfaz a seguinte forma precisa do problema:*

$$\begin{cases} \exists z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } |z|_\infty \leq 1, \operatorname{div} z \in L^N(\Omega) \text{ e } - \int_{\Omega} u \operatorname{div} z dx = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial\mathcal{H}^{N-1}, \\ -\operatorname{div} z(x) = a(x)g(u) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

Para isso ser possível, na próxima seção será apresentado o conceito de solução de variação limitada e a metodologia que será usada para obtê-la.

3.1 O funcional de Euler-Lagrange

Neste capítulo, o espaço $BV(\Omega)$ estará munido da norma $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ que é definida da seguinte forma:

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial\mathcal{H}^{N-1}.$$

onde \mathcal{H}^{N-1} denota a medida de Hausdorff de dimensão $N - 1$.

Lema 1 *A norma $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ é equivalente à norma $|\cdot|_{BV(\Omega)}$.*

Demonstração. Por um lado, pelo Teorema 18 existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $\int_{\partial\Omega} |u| \partial\mathcal{H}^{N-1} \leq C_1 |u|_{BV(\Omega)}$, assim

$$\begin{aligned} \|u\|_{BV(\Omega)} &= \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\Omega} |Du| + C_1 |u|_{BV(\Omega)} \\ &= (1 + C_1) \int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} |u| dx \leq (1 + C_1) |u|_{BV(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, com a desigualdade de Poincaré tem-se:

$$\begin{aligned} |u|_{BV(\Omega)} &= \int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} |u| dx \leq \int_{\Omega} |Du| + C \left(\int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial\mathcal{H}^{N-1} \right) \\ &\leq (1 + C) \|u\|_{BV(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ou seja, $\frac{1}{1+C_1} \|u\|_{BV(\Omega)} \leq |u|_{BV(\Omega)} \leq (1 + C) \|u\|_{BV(\Omega)}$, para todo $u \in BV(\Omega)$. Portanto, as normas $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ são equivalentes. ■

Dessa forma, os resultados obtidos no capítulo anterior para o espaço $(BV(\Omega), |\cdot|_{BV(\Omega)})$ também serão válidos para o espaço $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)})$.

Em um estudo variacional, seria interessante encontrar uma solução do problema procurando-se pontos críticos do funcional Φ , ou seja, uma função u tal que $\Phi'(u) \equiv 0$.

Porém, o funcional Φ não é diferenciável, não podendo então ser aplicados os métodos usuais para a busca de solução.

Entretanto, o funcional Φ é a diferença entre um funcional localmente Lipschitz \mathcal{J} e um funcional suave \mathcal{G} e assim, pode-se procurar outro tipo de solução. Então, nesse capítulo, será estudada a existência de solução de variação limitada, ou seja, $u \in BV(\Omega)$ tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, o que, baseado na teoria envolvendo subdiferenciais em [3, 4, 7, 16], é equivalente a

$$\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) \geq \mathcal{G}'(u)(v - u), \quad \text{para todo } v \in BV(\Omega).$$

A ideia é mostrar que o funcional Φ satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha enunciado no capítulo anterior, para assim obter uma sequência com propriedades especiais a partir da qual será obtida subsequências cujo limite é candidato a solução.

Dado um funcional de Euler-Lagrange $\Phi = \mathcal{J} - \mathcal{G}$ definido em $BV(\Omega)$, onde \mathcal{J} é um funcional convexo localmente Lipschitz e \mathcal{G} funcional suave definidos em $BV(\Omega)$, pode-se então ser definida uma solução de variação limitada associada a este funcional.

Para o caso deste trabalho, o funcional associado a (1.1) seria $\Phi = \mathcal{J}_0 - \mathcal{G}$, definido em $BV(\Omega)$ com

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(v) &:= \int_{\Omega} |Dv|; \\ \mathcal{G}(v) &:= \int_{\Omega} a(x)G(v)dx. \end{aligned}$$

Porém, para penalizar a fronteira, visto que o problema possui condição de fronteira de Dirichlet, tomaremos o funcional $\Phi = \mathcal{J} - \mathcal{G}$ definido em $BV(\Omega)$, onde

$$\mathcal{J}(v) := \int_{\Omega} |Dv| + \int_{\partial\Omega} |v| \partial\mathcal{H}^{N-1} = \|v\|_{BV(\Omega)}$$

Então, $u \in BV(\Omega)$ é solução de variação limitada para este problema se satisfazer:

$$\|v\|_{BV(\Omega)} - \|u\|_{BV(\Omega)} \geq \int_{\Omega} a(x)g(u)(v - u)dx \quad \text{para todo } v \in BV(\Omega).$$

3.2 Forma precisa

Como já mencionado na Introdução, o operador 1-Laplaciano está mal definido em pontos $x \in \Omega$ tal que $\nabla u(x) = 0$. O objetivo dessa seção é mostrar que a forma precisa do problema (3.1) está definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} \exists z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } |z|_\infty \leq 1, \operatorname{div} z \in L^N(\Omega), \\ - \int_{\Omega} u \operatorname{div} z dx = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial\mathcal{H}^{N-1}, \\ - \operatorname{div} z(x) = a(x)g(u) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

Primeiro, os funcionais Φ , \mathcal{J} e \mathcal{G} que estão definidos em $BV(\Omega)$ serão estendidos para o espaço $L^{1^*}(\Omega)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{J}}(u) &:= \begin{cases} \mathcal{J}(u), & \text{se } u \in BV(\Omega) \\ +\infty, & \text{se } u \in L^{1^*}(\Omega) \setminus BV(\Omega) \end{cases}, \\ \overline{\mathcal{G}}(u) &:= \int_{\Omega} a(x)G(u)dx, \\ \overline{\Phi}(u) &:= \overline{\mathcal{J}}(u) - \overline{\mathcal{G}}(u).\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $\overline{\mathcal{G}} \in C^1(L^{1^*}, \mathbb{R})$ e $\overline{\mathcal{J}}$ é convexa e semicontínua inferiormente com respeito à topologia de $L^{1^*}(\Omega)$. Assim, o subdiferencial $\partial\overline{\Phi}$ está bem definido.

Lema 2 *Seja $u \in BV(\Omega)$. Se $0 \in \partial\Phi(u)$, então $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.*

Demonstração. Seja $u \in BV(\Omega)$ tal que $0 \in \partial\Phi(u)$. Então,

$$\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) \geq \mathcal{G}'(u)(v - u), \quad \text{para todo } v \in BV(\Omega).$$

Queremos mostrar que $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$, ou seja,

$$\overline{\mathcal{J}}(v) - \overline{\mathcal{J}}(u) \geq \overline{\mathcal{G}}'(u)(v - u), \quad \text{para todo } v \in L^{1^*}(\Omega).$$

- Se $v \in BV(\Omega) \cap L^{1^*}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{J}}(v) - \overline{\mathcal{J}}(u) &= \mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) \geq \mathcal{G}'(u)(v - u) \\ &= \int_{\Omega} a(x)G(u)(v - u)dx = \overline{\mathcal{G}}'(u)(v - u).\end{aligned}$$

- Se $v \in L^{1^*}(\Omega) \setminus BV(\Omega)$, então $\overline{\mathcal{J}}(v) = +\infty$ e $\overline{\mathcal{J}}(u) < \infty$. Logo,

$$\overline{\mathcal{J}}(v) - \overline{\mathcal{J}}(u) = +\infty \geq \overline{\mathcal{G}}'(u)(v - u)$$

Portanto, $\overline{\mathcal{J}}(v) - \overline{\mathcal{J}}(u) \geq \overline{\mathcal{G}}'(u)(v - u)$, para todo $v \in L^{1^*}(\Omega)$, ou seja, $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$. ■

Suponha que $u \in BV(\Omega)$ seja solução de variação limitada de (3.1), ou seja, u satisfaz para todo $v \in BV(\Omega)$:

$$\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) \geq \mathcal{G}'(u)(v - u).$$

Assim, $0 \in \partial\Phi(u)$, e pelo Lema 2, $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$. Sendo $\overline{\mathcal{J}}$ convexo e $\overline{\mathcal{G}}$ suave, $\overline{\mathcal{G}}'(u) \in \partial\overline{\mathcal{J}}(u)$. Pela definição de subdiferencial, existe $z^* \in (L^{1^*}(\Omega))^* = L^N(\Omega)$ tal que $z^* \in \partial\overline{\mathcal{J}}(u)$ e

$$\overline{\mathcal{G}}'(u) = z^*. \tag{3.2}$$

Pela Proposição 4.23 encontrada em [12], existe $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, com $|z|_\infty \leq 1$, e que satisfaz:

$$z^* = -\operatorname{div} z, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{J}(u) = \langle z^*, u \rangle = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} z dx. \quad (3.4)$$

De (3.2) e (3.3) temos para todo $v \in BV(\Omega)$

$$- \int_{\Omega} v \operatorname{div} z dx = \langle z^*, v \rangle = \langle \overline{\mathcal{G}}'(u), v \rangle = \int_{\Omega} a(x)g(u)v dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} (a(x)g(u) + \operatorname{div} z) v dx = 0 \quad \text{para todo } v \in BV(\Omega).$$

Portanto,

$$-\operatorname{div} z = a(x)g(u) \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \quad (3.5)$$

De (3.4) e (3.5) temos:

$$\begin{cases} \exists z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } |z|_\infty \leq 1, \operatorname{div} z \in L^N(\Omega), \\ - \int_{\Omega} u \operatorname{div} z dx = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial \mathcal{H}^{N-1}, \\ -\operatorname{div} z(x) = a(x)g(u) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

3.3 Argumentos variacionais

Utilizando os teoremas apresentados no capítulo anterior, será demonstrado nesta seção que o problema (3.1) admite uma solução de variação limitada. Primeiramente, será mostrado que o funcional Φ satisfaz as geometrias do Passo da Montanha. A partir de então, trabalharemos com a sequência obtida por meio deste teorema para encontrar a solução de variação limitada não-trivial.

Lema 3 *O funcional Φ satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha.*

Demonstração. Primeiro, mostremos que o funcional Φ satisfaz a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Por (g_1) - (g_3) , dado um $\epsilon > 0$, $p \in (1, 1^*)$ existe $C = C(\epsilon, p) > 0$ tal que $\forall t \in \mathbb{R}^N$

$$|G(t)| \leq \epsilon |t| + C_\epsilon |t|^p.$$

De fato, por (g_2) , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|g(s)| < \epsilon$ se $|s| < \delta$. Logo,

$$|G(s)| \leq \epsilon |s|, \quad \text{se } |s| < \delta.$$

Por outro lado, se $|s| \geq \delta$, então por (g_3) temos

$$|G(s)| \leq C \left(|s| + \frac{|s|^p}{p} \right) = C |s|^p \left(\frac{1}{|s|^{p-1}} + \frac{1}{p} \right) \leq C |s|^p \left(\frac{1}{|\delta|^{p-1}} + \frac{1}{p} \right) = C(\delta) |s|^p. \quad (3.6)$$

Dessa forma, temos para todo $s \in \mathbb{R}$:

$$|G(s)| \leq \epsilon |t| + C_\epsilon |t|^p.$$

Então, segue que

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \|u\|_{BV(\Omega)} - \int_{\Omega} a(x)G(u)dx \\ &\geq \|u\|_{BV(\Omega)} - \epsilon|a|_{\infty} \int_{\Omega} |u|dx - C|a|_{\infty} \int_{\Omega} |u|^p dx \\ &\geq (1 - \epsilon C|a|_{\infty})\|u\|_{BV(\Omega)} - C\|u\|_{BV(\Omega)}^p.\end{aligned}$$

Seja $\epsilon < \frac{1}{C|a|_{\infty}}$, desde que $p > 1$ existe $\rho > 0$ suficientemente pequeno tal que $(1 - \epsilon C|a|_{\infty})\rho - C\rho^p > \alpha > 0$. Assim, sendo $u \in BV(\Omega)$ tal que $\|u\|_{BV(\Omega)} = \rho$, tem-se $\Phi(u) > \alpha > 0 = \Phi(0)$, e portanto, Φ satisfaz a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha.

O funcional Φ também satisfaz a segunda geometria. Por (a_1) e (a_2) , tem-se que Ω^+ é um aberto limitado não vazio. Então, seja $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega^+)$, $\psi \geq 0$. Por (g_4) , tem-se que $G(s) \geq As^{\theta} - B$, para algum $A, B > 0$, então

$$\begin{aligned}\Phi(t\psi) &= \|t\psi\|_{BV(\Omega)} - \int_{\Omega} a(x)G(t\psi)dx \\ &\leq t\|\psi\|_{BV(\Omega)} - At^{\theta} \int_{\Omega^+} a(x)|\psi|^{\theta}dx + B \int_{\Omega^+} a(x)dx.\end{aligned}$$

Desde que $\theta > 1$ e $\int_{\Omega^+} a(x)|\psi|^{\theta}dx > 0$, segue que $\Phi(t\psi) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, existe $e \in BV(\Omega)$ tal que $\Phi(e) < \Phi(0) = 0$, e assim o funcional Φ satisfaz a segunda geometria. ■

Então, o funcional Φ satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha, e consequentemente obtém-se uma sequência $(u_n) \subset BV(\Omega)$ tal que $|\Phi(u_n) - c| < \epsilon_n$, com $\epsilon_n \rightarrow 0$, $c > \Phi(0) = 0$, onde sendo $\Gamma = \{\gamma \in C^0([0, 1]; E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$ tem-se que $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0, 1]} \Phi(\gamma(t))$, e ainda

$$\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u_n) \geq \mathcal{G}'(u_n)(v - u_n) - \epsilon_n\|v - u_n\|_{BV(\Omega)}, \quad \text{para todo } v \in BV(\Omega). \quad (3.7)$$

O interesse é de, a partir dessa sequência, encontrar $u \in BV(\Omega)$ que seja solução de variação limitada. Portanto, o próximo passo é provar que (u_n) é uma sequência limitada em $BV(\Omega)$.

Lema 4 *A sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtida acima é limitada em $BV(\Omega)$.*

Demonstração. Primeiramente, a partir de (3.7), tomando $v = u_n\xi + u_n$, onde ξ está definida em (Ω_1) , tem-se:

$$\begin{aligned}\|u_n\xi\|_{BV(\Omega)} &\geq \|u_n\xi + u_n\|_{BV(\Omega)} - \|u_n\|_{BV(\Omega)} \\ &\geq \int_{\Omega} a(x)g(u_n)(u_n\xi + u_n - u_n)dx - \epsilon_n\|u_n\xi + u_n - u_n\|_{BV(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} a(x)g(u_n)u_n\xi dx - \epsilon_n\|u_n\xi\|_{BV(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega^+} a(x)g(u_n)u_n dx - \epsilon_n\|u_n\xi\|_{BV(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$(1 + \epsilon_n) \|u_n \xi\|_{BV(\Omega)} \geq \int_{\Omega^+} a(x) g(u_n) u_n dx. \quad (3.8)$$

Também, como $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ tem-se

$$\begin{aligned} \|u_n \xi\|_{BV(\Omega)} &= \int_{\Omega} |D(u_n \xi)| + \int_{\Omega} |u_n \xi| \partial \mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq \int_{\Omega} |\xi| |Du_n| + \int_{\Omega} |u_n| |\nabla \xi| dx + \int_{\Omega} |u_n \xi| \partial \mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq \int_{\Omega} |Du_n| + \int_{\Omega} |u_n| |\nabla \xi| dx + \int_{\Omega} |u_n| \partial \mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq (1 + C_0 |\nabla \xi|_\infty) \|u_n\|_{BV(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_n \xi\|_{BV(\Omega)} \leq (1 + C_0 |\nabla \xi|_\infty) \|u_n\|_{BV(\Omega)}. \quad (3.9)$$

Assim, por (3.8), (3.9) e (g_4) tem-se

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &= \|u_n\|_{BV(\Omega)} - \int_{\Omega} a(x) G(u_n) dx \\ &= \|u_n\|_{BV(\Omega)} - \int_{\Omega^+} a(x) G(u_n) dx - \int_{\Omega^-} a(x) G(u_n) dx \\ &\geq \|u_n\|_{BV(\Omega)} - \int_{\Omega^+} a(x) G(u_n) dx \\ &= \|u_n\|_{BV(\Omega)} + \int_{\Omega^+} a(x) \left(\frac{g(u_n) u_n}{\theta} - G(u_n) \right) dx - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega^+} a(x) g(u_n) u_n dx \\ &\geq \|u_n\|_{BV(\Omega)} - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega^+} a(x) g(u_n) u_n dx \\ &\geq \|u_n\|_{BV(\Omega)} - \frac{1}{\theta} (1 + \epsilon_n) \|u_n \xi\|_{BV(\Omega)} \\ &\geq \|u_n\|_{BV(\Omega)} - \frac{1}{\theta} (1 + \epsilon_n) (1 + C_0 |\nabla \xi|_\infty) \|u_n\|_{BV(\Omega)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\theta} (1 + \epsilon_n) (1 + C_0 |\nabla \xi|_\infty) \right) \|u_n\|_{BV(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por fim, pela hipótese (Ω_1) , tem-se que $K = 1 - \frac{1}{\theta} (1 + \epsilon_n) (1 + C_0 |\nabla \xi|_\infty) > \beta > 0$ para n suficientemente grande. Logo,

$$\frac{c + o_n(1)}{K} \geq \|u_n\|_{BV(\Omega)}.$$

Consequentemente, (u_n) é limitada em $BV(\Omega)$. ■

Desde que $BV(K)$ é imerso compactamente em $L^q(K)$, com $q \in [1, 1^*)$ e $K \subset \Omega$ compacto, então existe $u \in L^q(K)$ tal que a menos de subsequência

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \quad \text{em } L^q(K), \quad q \in [1, 1^*), \\ u_n(x) &\rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \end{aligned}$$

Lema 5 A função u obtida acima pertence a $BV(\Omega)$ e satisfaz:

$$\|u\|_{BV(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{BV(\Omega)}.$$

Demonstração. Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset O$, onde $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \overline{O}$ e seja $B := \mathbb{R}^N \setminus B_\delta(0)$. Assim, definimos as extensões:

$$\overline{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \in B \setminus \Omega, \end{cases}$$

e

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \in B \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_B |D\overline{u}_n| &= \int_\Omega |Du_n| + \int_{\partial\Omega} |u_n| \partial\mathcal{H}^{N-1}, \\ \int_B |D\overline{u}| &= \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned}$$

Note que $\int_B |D\overline{u}| = \|u\|_{BV(\Omega)}$ e $\int_B |D\overline{u}_n| = \|u_n\|_{BV(\Omega)} \leq C$. Também temos

$$\begin{aligned} \overline{u}_n &\rightarrow \overline{u} \quad \text{em } L^q_{\text{loc}}(B), \quad q \in [1, 1^*), \\ \overline{u}_n(x) &\rightarrow \overline{u}(x) \quad \text{q.t.p. em } B. \end{aligned}$$

Mostremos que $u \in BV(\Omega)$. De fato, para todo $R > 0$, sendo $B_R := B \cap B_R(0)$, temos

$$\int_{B_R} |D\overline{u}| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} |D\overline{u}_n| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_B |D\overline{u}_n| \leq C. \quad (3.10)$$

Assim, seja $\psi \in C_c^1(B, \mathbb{R}^N)$, com $|\psi|_\infty \leq 1$ e $\text{supp}\psi \subset B_R$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_B \overline{u} \text{div}\psi dx &= \int_{B_R} \overline{u} \text{div}\psi dx \leq \int_{B_R} |D\overline{u}| \leq C \\ \Rightarrow \int_B |D\overline{u}| &= \sup \left\{ \int_B \overline{u} \text{div}\psi dx : \psi \in C_c^1(B, \mathbb{R}^N), |\psi|_\infty \leq 1 \right\} \leq C. \end{aligned}$$

Como $\overline{u}_n \rightarrow \overline{u}$ q.t.p. em B , pelo Lema de Fatou tem-se que

$$\int_B |\overline{u}| dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_B |\overline{u}_n| dx \leq C \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\overline{u}_n\|_{BV(B)} \leq C,$$

portanto $\overline{u} \in L^1(B)$. Consequentemente, como $\int_B |D\overline{u}| < \infty$ e $\overline{u} \in L^1(B)$, pelo Teorema 10 tem-se que $\overline{u} \in BV(B)$.

Ainda, sendo $|D\overline{u}|$ medida de Radon, logo regular interna, tem-se

$$\int_B |D\overline{u}| = \sup_{R>0} \int_{B_R} |D\overline{u}|. \quad (3.11)$$

De (3.10) e (3.11), obtem-se:

$$\int_B |D\overline{u}| = \sup_{R>0} \int_{B_R} |D\overline{u}| \leq \sup_{R>0} \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_B |D\overline{u}_n| \right] = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_B |D\overline{u}_n|. \quad (3.12)$$

Novamente, por (3.12), tem-se

$$\begin{aligned} \|u\|_{BV(\Omega)} &= \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \partial\mathcal{H}^{N-1} = \int_B |D\bar{u}| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_B |D\bar{u}_n| \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} |Du_n| + \int_{\partial\Omega} |u_n| \partial\mathcal{H}^{N-1} \right] = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{BV(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|u\|_{BV(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{BV(\Omega)}. \quad (3.13)$$

■

Lema 6 Para todo $v \in BV(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} a(x)g(u_n)(v - u_n)dx \rightarrow \int_{\Omega} a(x)g(u)(v - u)dx, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Primeiro será mostrado que $\int_{\Omega} a(x)g(u_n)u_n dx \rightarrow \int_{\Omega} a(x)g(u)u dx$. Por $(g_1) - (g_3)$, para todo $\epsilon > 0$ e $t \in [p, 1^*)$ existe $C = C(\epsilon, t) > 0$ tal que $|g(s)| \leq \epsilon + C|s|^{t-1}$, $s \in \mathbb{R}$.

Seja $U \subset \Omega$ e $r = \frac{N}{N-p(N-1)}$, então utilizando a Desigualdade de Hölder e as imersões contínuas de $BV(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $q \in [1, 1^*)$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_U |a(x)g(u_n)u_n| dx &\leq \epsilon \int_U |a(x)||u_n| dx + C \int_U |a(x)||u_n|^p dx \\ &\leq \epsilon |a|_{\infty} \int_U |u_n| dx + C \left(\int_U |a(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_U |u_n|^{1^*} dx \right)^p \\ &\leq C\epsilon \|u_n\|_{BV(\Omega)} + C|a|_{L^r(U)} \|u_n\|_{BV(\Omega)}^p \\ &\leq C\epsilon + C|a|_{L^r(U)}. \end{aligned}$$

Por (a_3) e supondo $\alpha > N$, temos

$$\int_{\Omega} |a(x)|^{\alpha} dx \leq \left(\sup_{x \in \Omega} |a(x)||x| \right)^{\alpha} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\alpha}} dx < \infty.$$

Assim, da maneira que foi definido r , tem-se $r > N$, então dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $\left(\int_{\Omega \setminus \Omega_R} |a(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} < \epsilon$. Colocando então $U = \Omega \setminus \Omega_R$, tem-se pelas últimas equações

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_R} |a(x)g(u_n)u_n| dx < \epsilon C. \quad (3.14)$$

Consequentemente $\int_{\Omega \setminus \Omega_R} |a(x)g(u_n)u_n| dx \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$ uniformemente em n .

Sendo $u \in BV(\Omega)$, $u \in L^q(\Omega)$, $q \in [1, 1^*)$ e pelas condições em a e g , tem-se que dado $\eta > 0$, existe $R_1 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega \setminus B_{R_1}(0)} a(x)g(u)u dx < \frac{\eta}{4}. \quad (3.15)$$

Analogamente para u_n , existe $R_2 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega \setminus B_{R_2}(0)} a(x)g(u_n)u_n dx < \frac{\eta}{4}. \quad (3.16)$$

Seja $R = \max\{R_1, R_2\}$. Também, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado, quando $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\Omega_R} a(x)g(u_n)u_n dx \rightarrow \int_{\Omega_R} a(x)g(u)u dx. \quad (3.17)$$

A partir de (3.15), (3.16) e (3.17) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} a(x)g(u_n)u_n dx - \int_{\Omega} a(x)g(u)u dx \right| &\leq \left| \int_{\Omega_R} a(x)g(u_n)u_n dx - \int_{\Omega_R} a(x)g(u)u dx \right| + \\ &+ \left| \int_{\Omega \setminus B_R(0)} a(x)g(u_n)u_n dx - \int_{\Omega \setminus B_R(0)} a(x)g(u)u dx \right| \\ &< \eta. \end{aligned}$$

Portanto, foi provado que quando $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\Omega} a(x)g(u_n)u_n dx \rightarrow \int_{\Omega} a(x)g(u)u dx. \quad (3.18)$$

Ainda é necessário mostrar que $\int_{\Omega} a(x)g(u_n)v dx \rightarrow \int_{\Omega} a(x)g(u)v dx$, $\forall v \in BV(\Omega)$. Novamente, usando as imersões contínuas, Desigualdade de Hölder e o valor r já definido tem-se

$$\begin{aligned} \int_U |a(x)g(u_n)v| dx &\leq \epsilon \int_U |a(x)||v| dx + C \int_U |a(x)||u_n|^{p-1}|v| dx \\ &\leq \epsilon |a|_{\infty} \int_U |v| dx + C \left(\int_U |a(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_U |v|^{\frac{1^*}{p}} |u_n|^{\frac{(p-1)1^*}{p}} dx \right)^{\frac{p}{1^*}} \\ &\leq C\epsilon |a|_{\infty} |v|_{L^1(U)} + C|a|_{L^r(U)} \left(\int_U |v|^{1^*} dx \right)^{\frac{1}{rp}} \left(\int_U |u_n|^{1^*} dx \right)^{\frac{p-1}{1^*}} \\ &\leq C\epsilon |a|_{\infty} |v|_{L^1(U)} + C|a|_{L^r(U)} \|u_n\|_{BV(\Omega)}^{\frac{1^*}{rp}} \|u_n\|_{BV(\Omega)}^{p-1} \\ &\leq C\epsilon + C|a|_{L^r(U)}. \end{aligned}$$

Colocando novamente $U = \Omega \setminus \Omega_R$, tem-se pela última inequação

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_R} |a(x)g(u_n)u_n| dx < \epsilon C. \quad (3.19)$$

Conseqüentemente $\int_{\Omega \setminus \Omega_R} |a(x)g(u_n)v| dx \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$ uniformemente em n .

Sendo $u, v, u_n \in BV(\Omega)$, $u, v, u_n \in L^q(\Omega)$, $q \in [1, 1^*)$ e pelas condições em a e g , tem-se que dado $\eta > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_R(0)} a(x)g(u)v dx &< \frac{\eta}{4}. \\ \int_{\Omega \setminus B_R(0)} a(x)g(u_n)v dx &< \frac{\eta}{4}. \end{aligned}$$

Novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado,

$$\int_{\Omega_R} a(x)g(u_n)v dx \rightarrow \int_{\Omega_R} a(x)g(u)v dx.$$

Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} a(x)g(u_n)v dx - \int_{\Omega} a(x)g(u)v dx \right| &\leq \left| \int_{\Omega_R} a(x)g(u_n)v dx - \int_{\Omega_R} a(x)g(u)v dx \right| + \\ &+ \left| \int_{\Omega \setminus B_R(0)} a(x)g(u_n)v dx - \int_{\Omega \setminus B_R(0)} a(x)g(u)v dx \right| \\ &< \eta. \end{aligned}$$

Portanto, foi provado que

$$\int_{\Omega} a(x)g(u_n)v dx \rightarrow \int_{\Omega} a(x)g(u)v dx, \quad \text{para todo } v \in BV(\Omega). \quad (3.20)$$

Com os resultados obtidos até então neste capítulo, podemos então demonstrar o teorema principal. ■

Demonstração do Teorema 23

A partir de (3.13), (3.18) e (3.20), para todo $v \in BV(\Omega)$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) &= \|v\|_{BV(\Omega)} - \|u\|_{BV(\Omega)} \\ &\geq \|v\|_{BV(\Omega)} - \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{BV(\Omega)} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|v\|_{BV(\Omega)} - \|u_n\|_{BV(\Omega)}) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} a(x)g(u_n)(v - u_n) dx - \epsilon_n \|v - u_n\|_{BV(\Omega)} \right) \\ &= \int_{\Omega} a(x)g(u)(v - u) dx. \end{aligned}$$

Portanto, tal $u \in BV(\Omega)$ é solução de variação limitada, ou seja, para todo $v \in BV(\Omega)$, ela satisfaz:

$$\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) \geq \mathcal{G}'(u)(v - u). \quad (3.21)$$

Como última etapa, é necessário garantir que tal solução é não-trivial. Em (3.21), tomando $v = u + tv$, $t > 0$

$$\frac{\mathcal{J}(u + tu) - \mathcal{J}(u)}{t} \geq \int_{\Omega} a(x)g(u)u dx \Rightarrow \mathcal{J}'(u)u \geq \int_{\Omega} a(x)g(u)u dx.$$

Analogamente, tomando $v = u + tv$, $t < 0$, tem-se $\mathcal{J}'(u)u \leq \int_{\Omega} a(x)g(u)u dx$. Logo,

$$\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}'(u)u = \int_{\Omega} a(x)g(u)u dx = \mathcal{G}'(u)u.$$

Sendo \mathcal{G} suave, $\mathcal{G}'(u)u = \mathcal{G}'(u_n)u_n + o_n(1)$

Por outro lado, em (3.7), fazendo primeiro $v = u_n + tu_n$, com $t > 0$ e depois $t \rightarrow 0^+$, obtem-se

$$\mathcal{J}'(u_n)u_n \geq \mathcal{G}'(u_n)u_n - \epsilon_n \|u_n\|_{BV(\Omega)}.$$

Analogamente com $t < 0$ e $t \rightarrow 0^-$ obtém-se

$$\mathcal{J}'(u_n)u_n \leq \mathcal{G}'(u_n)u_n + \epsilon_n \|u_n\|_{BV(\Omega)}.$$

Pelas duas últimas inequações

$$|\mathcal{J}'(u_n)u_n - \mathcal{G}'(u_n)u_n| \leq \epsilon_n \|u_n\|_{BV(\Omega)} = o_n(1). \quad (3.22)$$

Portanto,

$$\mathcal{J}(u) = \mathcal{G}'(u_n)u_n + o_n(1) = \mathcal{J}'(u_n)u_n + o_n(1) = \mathcal{J}(u_n) + o_n(1).$$

Dessa forma,

$$\Phi(u) = \mathcal{J}(u) - \mathcal{G}(u) = \mathcal{J}(u_n) - \mathcal{G}(u_n) + o_n(1) = \Phi(u_n) + o_n(1) = c + o_n(1).$$

Logo $\Phi(u) = c > 0 = \Phi(0)$, portanto u é não-trivial. ■

Conclusão

Neste trabalho uma das dificuldades foi que o espaço $BV(\Omega)$, espaço no qual foi procurada a solução do problema, não é reflexivo, e portanto, dada uma sequência limitada, não podia-se garantir a existência de uma subsequência que converge fraco em $BV(\Omega)$. Também, o domínio Ω é não limitado, e por isso não tem-se imersão compacta de $BV(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, com $q \in [1, 1^*)$, ou seja, dada uma sequência em $BV(\Omega)$ não pode-se garantir a existência de uma subsequência que converge forte em $L^q(\Omega)$, com $q \in [1, 1^*)$.

Então, como alternativa a essas dificuldades, foram utilizadas as propriedades resultantes da imersão compacta $BV(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$, com $q \in [1, 1^*)$.

Outra dificuldade encontrada foi com respeito limitação da sequência obtida a partir do Teorema do Passo da Montanha. Devido aos problemas encontrados, foi necessário o acréscimo de uma hipótese sobre o domínio, no caso, a hipótese (Ω_1) .

Por fim então, foi obtida uma solução de variação limitada para (1.1) não-trivial. Tal teorema, que foi obtido no Capítulo 3, deu origem a um resultado original que ainda será submetido.

Referências

- [1] C.O. Alves; M.T.O. Pimenta. On existence and concentration of solutions to a class of quasilinear problems involving the 1–Laplace operator. *Calculus of Variations*, 56(143), 2017.
- [2] H. Attouch; G. Buttazzo; G. Michaille. *Variational Analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization*. Mathematical Programming Society and Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [3] V. Barbu. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*. Editura Academiei, 1976.
- [4] K.C. Chang. Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 80:102–129, 1981.
- [5] K.C. Chang. The spectrum of the 1–Laplace operator. *World Scientific Publishing Company*, pages 865–894, 2009.
- [6] Y. Chen; S. Levine; M. Rao. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 66(4):1383–1406, 2006.
- [7] F.H. Clarke. Generalized gradients and their applications. *Transactions of the American Society*, 205, 1975.
- [8] M. Degiovanni; P. Magrone. Linking solutions for quasilinear equations at critical growth involving the 1–Laplace operator. *Calculus of Variations*, 36:591–609, 2009.
- [9] G.M. Figueiredo; M.T.O. Pimenta. Strauss’ and Lions’ type results in $BV(\mathbb{R}^N)$ with an application to 1–Laplacian problem. 2016. arXiv:1610.07369.
- [10] G.M. Figueiredo; M.T.O. Pimenta. Existence of bounded variation solutions for a 1–Laplacian problem with vanishing potentials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 459:861–878, 2018.
- [11] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley and Sons, 2 edition, 1999.
- [12] B. Kawohl. Dirichlet problems for the 1–Laplace operator, including the eigenvalue problem. *World Scientific Publishing Company*, 9(4):515–543, 2007.
- [13] S. Kesavan. *Topics in functional analysis and applications*. New Age International, 1989.
- [14] M. Miranda. Dirichlet problem with L^1 data for the non-homogeneous minimal surface equation. *Indiana Univ. Math. J.*, 24:227–241, 1974/75.

-
- [15] A. Molino; S.S. Leon. Elliptic equations involving the 1–Laplacian and a subcritical source term. 2017. arXiv:1707.01934v1.
- [16] A. Szulkin. Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems. *Annales de l’I.H.P.*, 3(2):77–109, 1986.
- [17] H. Tehrani. Solutions for indefinite semilinear elliptic equations in exterior domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 255:308–318, 2001.