UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira - SP

IVAN FRANCISCO YUPANQUI TELLO

PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO PARA SISTEMAS CHAVEADOS VIA LMIs

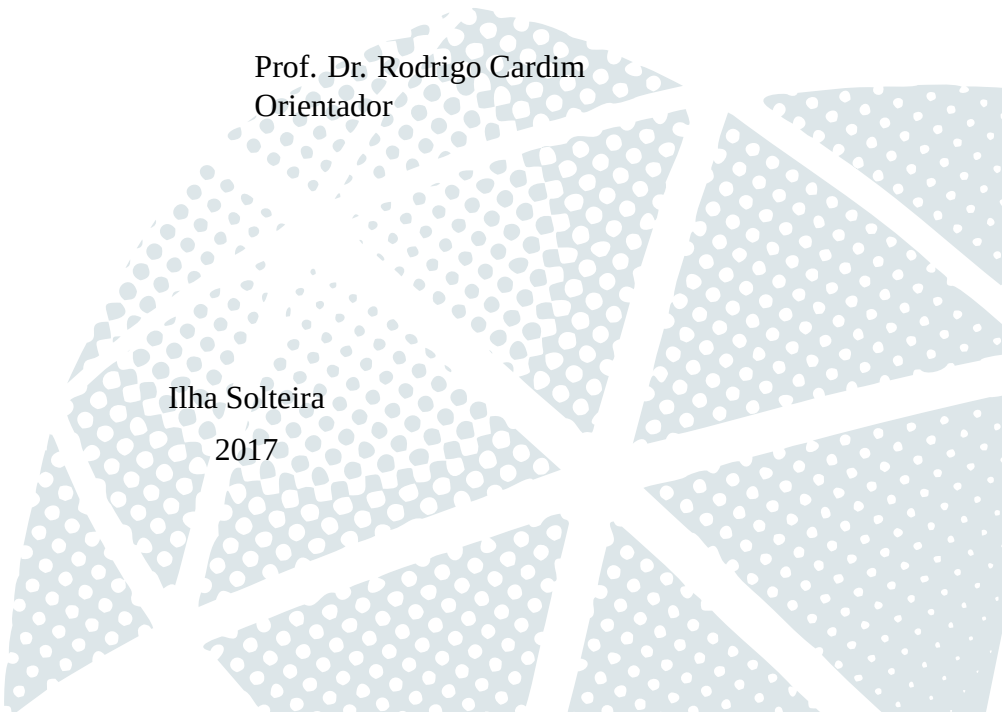
Ilha Solteira
2017

IVAN FRANCISCO YUPANQUI TELLO

PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO PARA SISTEMAS CHAVEADOS VIA LMIs

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP - Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Rodrigo Cardim
Orientador



Ilha Solteira

2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Y957p

Yupanqui Tello, Ivan Francisco.
Projeto de controle robusto de sistemas chaveados via LMIs / Ivan Francisco Yupanqui Tello . -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
104 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2017

Orientador: Rodrigo Cardim
Inclui bibliografia

1. Controle chaveado robusto. 2. Sistema chaveado incerto. 3. Sistemas estritamente reais positivos. 4. Desigualdades Lyapunov-Metzler. 5. Controle robusto H∞. 6. LMIs.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Projeto de Controle Robusto para Sistemas Chaveados via LMIs

AUTOR: IVAN FRANCISCO YUPANQUI TELLO
ORIENTADOR: RODRIGO CARDIM

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDSON ITALO MAINARDI JUNIOR
Departamento de Controle e Processos Industriais / Instituto Federal de Mato Grosso do Sul, Câmpus de Três lagoas

Ilha Solteira, 20 de junho de 2017

DEDICATÓRIA

À minha família, pelo incentivo e apoio em todas as minhas escolhas e decisões.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por me guiar, iluminar e me dar tranquilidade para seguir em frente com os meus objetivos e não desanimar com as dificuldades. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- Aos meus pais e irmãos, pelo apoio em todos os momentos da minha vida;
- À Leidy Carlla, minha esposa, pelo constante apoio em todas as decisões, pelo amor incondicional e por tantos outros inúmeros motivos;
- Ao meu orientador, Professor Rodrigo Cardim, pela amizade, pela dedicação, pela orientação segura em todos os momentos de minha jornada, por sua determinação e humildade;
- Aos Professores Marcelo e Edvaldo, pela parceria que propiciou grandes ensinamentos e frutos que ajudaram no desenvolvimento do trabalho;
- Aos meus amigos e colegas do laboratório que de forma direta ou indireta me ajudaram, em especial ao Diogo Ramalho de Oliveira, pela ajuda nas implementações em bancada;
- Por fim, agradeço à CNPQ e FAPESP pelo financiamiento.

EPÍGRAFE

"A verdadeira viagem de descobrimento não consiste em procurar novas paisagens, mas em ter novos olhos."

Marcel Proust

RESUMO

Neste trabalho são apresentados uma série de resultados relacionados com as técnicas de controle para sistemas lineares chaveados incertos que asseguram índices de desempenho e custos garantidos no projeto. Inicialmente a técnica abordada para este estudo consiste na utilização das desigualdades de Lyapunov-Metzler e as propriedades dos sistemas Estritamente Reais Positivos (ERP). São abordados os sistemas Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP), que permitem o desenvolvimento de um método de projeto de estabilização para sistemas que apresentam comutação e incertezas no modelo, usando para isto a realimentação do vetor de estado. A análise de estabilidade é descrita por meio de Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês: Linear Matrix Inequalities), LMIs, que, quando factíveis, são facilmente resolvidas por meio de ferramentas disponíveis de programação convexa. Neste trabalho trata-se também da síntese via realimentação de estado com chaveamento no ganho que assegura o critério de desempenho $\mathscr{H}_\infty$. Para a validação das estratégias de controle mencionadas foram realizadas simulações e experimentos práticos em um sistema de suspensão ativa de bancada e em um sistema *ball balancer*, equipamentos fabricados pela Quanser®. Os resultados comprovam a eficácia dos método propostos tanto nas simulações quanto nos testes realizados em bancada.

Palavras-chave: Controle chaveado robusto. LMIs. Sistema chaveado incerto. Sistemas estritamente reais positivos. Desigualdades de Lyapunov-Metzler. Controle robusto $\mathscr{H}_\infty$.

ABSTRACT

This work presents a series of results related to the control techniques for uncertain switched linear systems that ensure performance indicators and guaranteed cost in the design. Initially the technique discussed in this study is the use of Lyapunov-Metzler Inequalities and properties of Strictly Positive Real Systems (SPR), so the Lyapunov-Metzler-SPR systems (LMSRP) are revised, which allow the development of a method of stabilization for systems that have switching and uncertainties in the model, using for this the state feedback. The stability analysis is described by Linear Matrix Inequalities, LMIs, that when are feasible, these are easily solved through tools available in convex programming literature. We also deal with the synthesis via state feedback with switching in the gain that ensures the performance criterion $\mathscr{H}_\infty$. In order to validate the proposed strategy simulations and experiments were performed on a bench active suspension system and a ball balancer system, equipments manufactured by Quanser®. The results prove the effectiveness of the proposed method both in simulations and in bench tests.

Keywords: Robust switched control. LMIs. Uncertain switched system. Strictly positive real systems. Lyapunov-Metzler Inequalities. Robust control $\mathscr{H}_\infty$.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Representação de algumas trajetórias do sistema (14) 26

Figura 2 Função de Lyapunov $v(x(t)) = x(t)^T Px(t)$ calculada sobre as trajetórias do sistema (14) representadas na Figura 1. 27

Figura 3 Chaveamento do sinal $\sigma(t)$ sobre as trajetórias do sistema (14) representadas na Figura 1. 27

Figura 4 Plano de fase (Exemplo 2.2). 33

Figura 5 Trajetória dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ (Exemplo 2.2). 33

Figura 6 Custos para o sistema do Exemplo 2.2. 34

Figura 7 Esquema de controle chaveado 37

Figura 8 Sistema carro-mola com dois graus de liberdade 38

Figura 9 Trajetória das variáveis de estado $x_1(t), x_2(t)$ do sistema controlado. 40

Figura 10 Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho K_σ. 40

Figura 11 Realimentação da saída de um sistema linear chaveado incerto para a síntese LMERP descrito no Problema 3.1 46

Figura 12 Realimentação do estado de um sistema linear chaveado incerto para a síntese LMERP descrito no Problema 3.2 46

Figura 13 Modelo Esquemático do Sistema de Suspensão Ativa. 52

Figura 14 Região de Factibilidade com $\eta\eta_x^2 = 25 \times 10^8$. 54

Figura 15 Trajetória das variáveis de estado $\delta y_1(t), \delta y_2(t)$ do sistema controlado. Considerando $M = 350kg$ ($0 \leq t < 1$ s) e $M = 450kg$ ($t \geq 1$ s). 55

Figura 16 Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$. 55

Figura 17 Esquema de controle com dois estágios 62

Figura 18 Minimização de ρ. 66

Figura 19 Trajetória das variáveis de estado $x_1(t),\ x_2(t)$ do sistema controlado. Considerando $M = 350kg$ ($0 \leq t < 1$ s) e $M = 450kg$ ($t \geq 1$ s). 67

Figura 20 Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$. 67
Figura 21 Sistema de Suspensão Ativa da Quanser®. 70
Figura 22 Modelo Esquemático. 70
Figura 23 Região factível, com $\eta\eta_x^2 = 16 \times 10^7$. 72
Figura 24 Trajetória das variáveis de estado $z_s(t),\ z_{us}(t)$ do sistema controlado. 73
Figura 25 Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$. 74
Figura 26 Trajetória das variáveis de estado $z_s(t),\ z_{us}(t)$ do sistema em malha aberta e controlado. 74
Figura 27 Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$. 75
Figura 28 Minimização de ρ. 75
Figura 29 Trajetória das variáveis de estado $z_s(t),\ z_{us}(t)$ do sistema controlado. 77
Figura 30 Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$. 77
Figura 31 Trajetória das variáveis de estado $z_s(t),\ z_{us}(t)$ do sistema em malha aberta e controlado. 78
Figura 32 Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$. 78
Figura 33 Sistema ball balancer Quanser® pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle da Unesp de Ilha Solteira (LPC-FEIS- UNESP). 79
Figura 34 Esquema do movimento em um eixo do *ball balancer*. 80
Figura 35 Minimização de J_2. 82
Figura 36 Trajetória da posição x e do ângulo θ do 2*D ball balacer*. 83
Figura 37 Sinal de controle e chaveamento do ganho K_σ. 83
Figura 38 Trajetória da posição x e do ângulo θ do 2*D ball balacer*. 84
Figura 39 Sinal de controle e chaveamento do ganho K_σ. 84
Figura 40 Posição no plano xy 85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Parâmetros do sistema de suspensão ativa de bancada Quanser ® . . . 71

Tabela 2 Parâmetros do sistema 2*D ball balancer*. 80

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

LMIs	Linear Matrix Inequalities.
SLIT	Sistema Linear Invariante no Tempo.
SI	Single Input.
MI	Multiple Input.
CQLF	Common Quadratic Lyapunov Function.
LM	Lyapunov–Metzler.
ERP	Estritamente Real Positivo.
LMERP	Lyapunov-Metzler-ERP.
CEV	Controle com Estrutura Variável.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$\mathbb{R}^{m\times n}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$.
$\mathbb{K}_N$	Conjunto $\{1,2,...,N\}$.
$A > 0$	Matriz A definida positiva.
$A < 0$	Matriz A definida negativa.
U^T	Transposto da matriz real U.
I	Matriz identidade.
$diag\{A,B\}$	Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes A e B.
$He\{\cdot\}$	Operador hermitiano $He\{A\} = A + A^T$, $A \in \mathbb{R}^n$.
$*$	Bloco simétrico de uma matriz simétrica.
$D^+(v(x))$	Derivada direcional à direita de uma trajetória qualquer do sistema.
γ	Taxa de decaimento.
Λ	Conjunto simplex unitário $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$.
A_λ	Combinação convexa de um conjunto de matrizes $\{A_1, A_2, ..., A_N\}$. $A_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i$, sendo $\lambda \in \Lambda$.
$\|x\|$	Norma euclidiana do vetor x.
$\|\xi\|_2^2$	Quadrado da norma de uma trajetória $\xi(t)$. Igual a $\int_{t=0}^{\infty} \xi(t)^T \xi(t) dt$.
$\mathscr{C}^1$	Classe de funções $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ tais que se todas as derivadas parciais de v existirem e forem contínuas.
$\mathscr{L}_2$	Conjunto de todas as trajetórias $\xi(t)$ tais que $\|\xi\|_2^2 < \infty$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS 18

2.1 SISTEMAS CHAVEADOS 18

2.2 ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS 19

2.2.1 Funções de Lyapunov 20

2.2.2 Estabilidade dos Sistemas Chaveados Lineares 22

2.2.3 Função de Lyapunov Quadrática Comum 22

2.2.4 Condições Necessárias e Suficientes para a Existência da CQLF 23

2.3 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS CHAVEADOS 24

2.3.1 Desigualdades Lyapunov-Metzler 28

2.4 CONTROLE CHAVEADO ROBUSTO 34

2.4.1 Sistemas Lineares Chaveados Incertos 34

2.4.2 Projeto de Controle Chaveado Robusto $\mathscr{H}_2$ 36

2.5 COMENTÁRIOS 40

3 SISTEMAS LYAPUNOV-METZLER-ERP 42

3.1 INTRODUÇÃO 42

3.2 SISTEMAS ERP 43

3.3 SISTEMAS LYAPUNOV-METZLER-ERP (LMERP) 44

3.4 PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO LMERP 46

3.4.1 Aplicação usando dois estágios de chaveamento 50

3.5 COMENTÁRIOS 56

4 PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO $\mathscr{H}_\infty$ CHAVEADO 57

4.1 CUSTO FUNCIONAL $\mathscr{H}_\infty$ 57

4.1.1 Desigualdades de Riccati-Metzler **58**

4.2 PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO $\mathscr{H}_\infty$ CHAVEADO 60

4.2.1 Aplicação usando dois estágios de chaveamento **62**

4.3 COMENTÁRIOS 68

5 IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA DOS PROJETOS DE CONTROLE : SUSPENSÃO ATIVA E *BALL BALANCER* **69**

5.1 SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA 69

5.1.1 Síntese LMERP **72**

5.1.2 Controle Robusto $\mathscr{H}_\infty$ Chaveado **75**

5.2 SISTEMA *BALL BALLANCER* 79

5.2.1 Controle Robusto $\mathscr{H}_2$ Chaveado **81**

5.3 COMENTÁRIOS 85

6 CONCLUSÕES **86**

REFERÊNCIAS **88**

APÊNDICE A - Artigos Apresentados em Congresso **92**

1 INTRODUÇÃO

Ao longo das últimas duas décadas o grande progresso na computação resultou na síntese e implementação de sistemas dinâmicos cada vez mais complexos. Neste contexto, os sistemas de controle, muitas vezes devem satisfazer vários objetivos ou interagir em uma rede de sistemas de controle descentralizados. Tais sistemas normalmente apresentam dinâmicas discretas e contínuas simultaneamente e são conhecidos como sistemas dinâmicos híbridos. Os problemas de controle que podem ser descritos de tal forma podem ser encontrados em aplicações em vários campos industriais, como controle de aeronaves (BOSKOVIC; MEHRA, 2000), controle automotivo (SHORTEN, 1996) e sistemas de energia elétrica (PALMER; LEDWICH, 1999). É importante dizer que a teoria de sistemas híbridos é agora uma linha de pesquisa bem estabelecida com contribuições de várias áreas de pesquisa tais como engenharia, matemática e ciências da computação.

Este trabalho aborda uma classe de sistemas híbridos que é conhecida como sistemas chaveados. Assim, pode-se simplesmente considerar que o sistema é descrito por várias dinâmicas contínuas ou subsistemas e que uma lógica temporal ou associada ao estado realiza o chaveamento entre estes subsistemas (SUN; GE, 2005). Cada um dos subsistemas que compõem um sistema chaveado apresenta propriedades e estrutura diferentes.

Uma motivação para o estudo dos sistemas chaveados é que estes sistemas são comummente encontrados na prática, percebendo-se que a comutação pode melhorar o desempenho global dos mesmos. Por exemplo, em (MORSE, 1997) é mostrado que a comutação entre diferentes controladores melhora a resposta transitória do sistema e, em (HESPANHA; MORSE, 1999), é mostrado que o controle com comutação permite estabilizar sistemas que não podem ser assintoticamente estabilizáveis utilizando-se apenas um controle com realimentação fixo. Outro caso é a existência de uma numerosa classe de sistemas não lineares nos quais a estabilização não pode ser obtida empregando leis de controle com realimentação contínua, no entanto, podem ser estabilizadas por estratégias de controle nas quais ocorre o chaveamento entre diferentes controladores (BROCKETT, 1983). A metodologia de controle na qual ocorre a comutação entre diferentes controladores é denominada controle chaveado.

Um problema importante é a estabilidade relativa aos sistemas com comutação onde nos últimos anos tem-se observado um crescente interesse no estudo da estabilidade de sistemas chaveados, no que se refere à análise de estabilidade e projeto de controle, isto é, projetar um sinal de comutação a fim de conseguir a estabilização de um sistema dado (GEROMEL; COLANERI, 2006; WICKS; PELETIES; DECARLO, 1994; ZHAI; LIN; ANTSAKLIS, 2003). O

controle de sistemas chaveados é uma linha de pesquisa recente onde muito resta a ser feito, principalmente no que se refere ao desenvolvimento de técnicas de projeto de leis de chaveamento que possam ser determinadas de forma sistemática e numericamente eficiente. Uma das ferramentas utilizadas no projeto de controle de sistemas chaveados são as desigualdades matriciais lineares (LMIs) (BOYD et al., 1994). Algumas pesquisas já demostraram o seu potencial de utilização para esta classe de aplicações (TROFINO et al., 2011; ZHAI; LIN; ANTSAKLIS, 2003).

Dentro deste contexto, o objetivo principal do trabalho concentra-se na análise e no desenvolvimento de estratégias de controle para sistemas chaveados lineares com incertezas politópicas no modelo. Inicialmente, serão estabelecidas as condições de projeto de lei de chaveamento para estabilização usando as desigualdades de Lyapunov-Metzler (LM) (GEROMEL; COLANERI, 2006). Com base nestas condições e as propriedades de estabilidade dos sistemas estritamente reais positivos (ERP) será abordada uma metodologia de projeto de controle chamada de síntese LMERP, proposta em (CARDIM et al., 2008). Na sequência, serão incluídos critérios de desempenho $\mathscr{H}_\infty$ no projeto de controladores. Por fim, a metodologia de cada projeto será estendida para uma classe de sistemas chaveados lineares incertos, tendo como estudos de caso aplicações numéricas. Tais abordagens foram formuladas em termos de LMIs usando a linguagem de modelagem *YALMIP* (LÖFBERG, 2004) e o solver *LMIlab* para as implementações computacionais. Exemplos práticos comprovarão a validade e eficácia dos métodos propostos através da implementação em laboratório do projeto de controle de um sistema de suspensão ativa e *ball ballancer* fabricados pela Quanser ® (QUANSER, 2009).

Este trabalho foi organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2, são apresentadas as definições, conceitos matemáticos essenciais e alguns resultados voltados ao estudo da estabilidade e estabilização dos sistemas lineares chaveados.

- No Capítulo 3, descreve-se uma metodologia baseada na síntese LMERP (CARDIM et al., 2016) para o projeto conjunto de uma lei de chaveamento e controlador para sistemas lineares chaveados incertos. As condições apresentadas garantem que o sistema chaveado sob efeito do controle apresente estabilidade global e assintótica. A avaliação do método é realizada através de um exemplo numérico e uma implementação prática.

- No Capítulo 4, são apresentadas condições para o projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ via realimentação de estado de sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas assegurando a estabilidade e impondo um limitante superior para o custo funcional $\mathscr{H}_\infty$. É demonstrado

que esta modelagem oferece, em geral, um desempenho adequado quando o desempenho robusto do sistema em malha fechada é considerado. Também é feita a validação por intermédio de um exemplo numérico e uma implementação prática.

- No Capítulo 5, são apresentados os sistemas de suspensão ativa de bancada e *ball balancer*, ambos fabricados pela Quanser ®. Estes equipamentos são utilizados para comprovação prática da eficiência das estratégias de controle tratadas nos Capítulos 3 e 4.

- No Capítulo 6 está a conclusão geral deste estudo. São realizados alguns comentários a respeito de todos os métodos tratados neste trabalho e também é feita uma análise individual de cada um.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo serão apresentados vários conceitos básicos relacionados a sistemas chaveados. O objetivo é contextualizar o leitor em relação às propriedades, características e ferramentas utilizadas na análise de estabilidade de sistemas chaveados através de uma revisão sucinta sobre os principais trabalhos já publicados sobre o tema.

Inicialmente serão vistas as características e propriedades que distinguem a classe de sistemas chaveados. Com relação à estabilidade de sistemas chaveados, será apresentada uma revisão com as principais ferramentas utilizadas para análise. Por fim, será tratado o problema de projetar estratégias de chaveamento com o objetivo de estabilizar o sistema.

2.1 SISTEMAS CHAVEADOS

Um sistema chaveado pode ser definido como um sistema dinâmico composto de uma família de subsistemas com dinâmica de tempo contínuo e uma lei que organiza o chaveamento entre eles (LIBERZON; MORSE, 1999). Cada subsistema corresponde a um modo de operação do sistema chaveado. Assim, um sistema chaveado pode ser matematicamente representado pela equação diferencial na forma

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \tag{1}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $\{f_k : k \in \mathbb{K}_N\}$ é uma família de aplicações do $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}_N$ é um conjunto de índices e $\sigma : [0,\infty] \to \mathbb{K}_N$ é uma função constante por partes denominada sinal de chaveamento. Neste contexto, uma função constante por partes é um sinal que possui as seguintes características: apresenta uma quantidade finita de descontinuidades em qualquer intervalo finito de tempo e é constante entre as descontinuidades consecutivas (HESPANHA, 2004).

O sinal de chaveamento σ determina qual das dinâmicas é seguida pelo sistema a cada intervalo de tempo. O sinal σ pode ser visto de várias formas, cada uma delas sendo mais adaptada a um tipo de problema e a um tipo de análise. Pode-se, por exemplo, considerar que σ é um sinal que depende unicamente de t, caso em que se diz que o chaveamento é dependente do tempo, ou controlado pelo tempo. Em alguns casos, pode-se considerar igualmente que σ depende também do estado x, caso em que se diz que o sinal de chaveamento é dependente do estado. Sob um ponto de vista de controle, pode-se também considerar os casos em que σ é

controlado, isto é, pode ser escolhido ou modificado por projeto, ou autônomo, em que σ vem de uma condição natural de funcionamento do sistema e não pode ser alterado. O chaveamento definido por σ também pode ser considerado determinístico ou aleatório.

Quando um sistema chaveado apresenta todos os subsistemas lineares, o mesmo é denominado sistema chaveado linear

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \tag{2}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz característica do sistema com um conjunto de índices finito: $\sigma(t) \in \mathbb{K}_N = \{1,2,...,N\}$, sendo N o número de subsistemas (ou modos de operação) do sistema chaveado.

2.2 ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS

Estabilidade é um requisito fundamental para todos os sistemas de controle. A análise da estabilidade de sistemas chaveados, em particular dos sistemas chaveados lineares, é um assunto cujo interesse tem aumentado nos últimos anos. Antes de começarmos nossa discussão sobre estabilidade e estabilização, vamos agora apresentar as definições formais dos tipos de estabilidade que são considerados nesta dissertação. Considerando o sistema chaveado definido por

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)),\\ &\sigma(t) = \varphi(t,\sigma(t^-),x(t)),\\ &t \in \mathbb{R}^+,\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ \sigma(t) \in \mathbb{K}_N, \end{aligned} \tag{3}$$

sendo que $\sigma(t^-)$ define o modo ou dinâmica atual do sistema. O objetivo agora é estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio deste sistema e, para isto, começamos dando uma descrição matemática que tem por base as definições apresentadas em (LIN; ANTSAKLIS, 2009; MANCILLA-AGUILAR et al., 2005).

Definição 1. *Dizemos que $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema (3) se $f_k(p) = 0$ para todo $k \in \mathbb{K}_N$.*

Para o estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio p de (3), pode-se supor, sem perda de generalidade, que o ponto de equilíbrio em questão é a origem. Os conceitos de estabilidade que são utilizados aqui são os de estabilidade uniforme, estabilidade uniforme assintótica e estabilidade uniforme exponencial. Antes de definí-los, lembramos a definição de uma função de classe $\mathscr{KL}$.

Definição 2. *Dizemos que uma função contínua $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é de classe $\mathscr{K}$ se for estritamente crescente e tal que $\phi(0) = 0$. Dizemos que uma função contínua $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é de classe $\mathscr{L}$ se for decrescente e $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Finalmente, dizemos que $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é de classe $\mathscr{K}\mathscr{L}$ se para cada t fixo, o mapeamento $\beta(r,t)$, for de classe $\mathscr{K}$ com respeito a r, e, se para cada r fixo, o mapeamento $\beta(r,t)$ for de classe $\mathscr{L}$ com respeito a t.*

Podemos assim definir os conceitos de estabilidade que serão utilizados na sequência.

Definição 3. *Consideremos o sistema chaveado (3)*

- *A origem de (3) é uniformemente estável (US) se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$ implica $\|x(t)\| < \varepsilon$ para $t \geq 0$ e para toda solução $x(t)$ de (3).*
- *A origem de (3) é uniformemente assintoticamente estável (UAS) se existir $\varepsilon > 0$ e uma função β de classe $\mathscr{K}\mathscr{L}$ tais que, para todo x(0) com $\|x(0)\| < \delta$, para toda solução $x(t)$ de (3) e para todo $t \geq 0$, tenhamos*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t). \tag{4}$$

- *Se a origem de (3) for uniformemente assintoticamente estável e tal que a função β possa ser escolhida na forma $\beta(r,t) = Mre^{-\lambda t}$ para certas constantes $M > 0, \lambda > 0$, dizemos que a origem é uniformemente exponencialmente estável (UES).*
- *Se, em (4), a função β for independente de δ e a desigualdade (4) for válida para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$, dizemos que a origem e globalmente uniformemente assintoticamente estável (GUAS), se estivermos no caso anterior, dizemos que a origem é globalmente uniformemente exponencialmente estável (GUES).*

A uniformidade à qual fazemos referência nestas definições é com relação ao sinal de chaveamento particular σ : as condições exigidas nas definições de estabilidade devem ser válidas para todo sinal de chaveamento. No que segue, por simplicidade, omitiremos o termo 'uniformemente' do tipo de estabilidade considerado, deixando-o implícito. Também por simplicidade, faremos o abuso de linguagem de falar da estabilidade do sistema chaveado (3) ao invés da estabilidade da origem do sistema chaveado. No caso de sistemas chaveados lineares, os conceitos de GUAS e GUES coincidem.

2.2.1 Funções de Lyapunov

A análise de estabilidade através das funções de Lyapunov constitui um dos principais métodos de estudo de estabilidade de sistemas chaveados. A ideia principal deste método é procurar

por uma função $v(x(t))$ do estado x que seja positiva definida e decrescente ao longo das trajetórias de todos os subsistemas $\dot{x}(t) = f_k(x(t))$ do sistema chaveado (3). Neste caso, a função v é chamada de função de Lyapunov, e a sua existência permite obter, quando possível, resultados de estabilidade.

Definição 4. *Seja $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ uma função de classe $\mathscr{C}^1$ positiva definida . Dizemos que v é uma função de Lyapunov para o sistema chaveado (3) se existir uma função contínua definida positiva $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $k \in \mathbb{K}_N$,*

$$\nabla v \cdot f_k(x) \leq -w(x). \tag{5}$$

O resultado principal neste caso é apresentado no seguinte teorema que consiste em uma generalização do teorema de Lyapunov para sistemas dinâmicos ao caso de sistemas chaveados.

Teorema 1. *(LIBERZON, 2003) Se existir uma função de Lyapunov radialmente ilimitada para o sistema chaveado (3), então este sistema é GUAS.*

Outras generalizações do conceito de função de Lyapunov são possíveis, nas quais se permite o uso de funções de Lyapunov chaveadas, funções de Lyapunov múltiplas, funções de Lyapunov por partes, dentre outras. Um caso particular importante de função de Lyapunov é quando esta é quadrática, isto é, quando $v(x(t)) = x(t)^T P x(t)$.

Definição 5. *(LIBERZON, 2003) Dizemos que a função de Lyapunov v da Definição 4 é quadrática se $v(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ para uma certa matriz simétrica definida positiva. Neste caso, dizemos também que V é uma função de Lyapunov quadrática comum (CQLF) do sistema chaveado (3).*

Neste caso, o resultado análogo ao Teorema 1, apresentado no seguinte teorema, possui uma conclusão mais forte.

Teorema 2. *(LIBERZON, 2003) Se existir uma CQLF para o sistema chaveado (3) e se a função w da Definição 4 for quadrática, então (3) é GUES.*

Assim, boa parte do estudo da estabilidade de sistemas chaveados tem por objetivo procurar condições sobre os subsistemas $x = f_k(x)$ para garantir a existência de uma função de Lyapunov para o sistema chaveado, o que permite garantir a sua estabilidade. Muitas vezes, o objetivo é procurar uma CQLF, uma vez que a forma particular da CQLF $v(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ e os resultados de funções de Lyapunov quadráticas para sistemas lineares simplificam o procedimento de procura da CQLF, e, assim, muitos resultados foram obtidos neste sentido. Porém, não se pode esperar obter uma teoria geral baseada apenas em CQLFs, pois existem sistemas chaveados GUES que não possuem uma CQLF.

2.2.2 Estabilidade dos Sistemas Chaveados Lineares

O problema da estabilidade de sistemas chaveados é complexo e interessante. O caso de sistemas assintoticamente estáveis que, por chaveamento, levam a uma trajetória instável, é bem conhecido. O caso de sistemas instáveis que podem ser levados a um comportamento estável por comutação também é notável. Para um sistema chaveado linear autônomo definimos :

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t),\ \forall \sigma \in \mathbb{K}_N. \tag{6}$$

Uma classificação dos problemas de estabilidade foi proposta por Liberzon and Morse (LIBERZON; MORSE, 1999)

- **Problema A** Encontrar condições de estabilidade tal que o sistema chaveado seja assintoticamente estável para qualquer lei de chaveamento (chaveamento arbitrário).
- **Problema B** Dada uma lei de chaveamento, determinar se o sistema chaveado é assintoticamente estável.
- **Problema C** Projetar uma lei de chaveamento que torne o sistema assintoticamente estável.

2.2.3 Função de Lyapunov Quadrática Comum

Uma das formas de se analisar a estabilidade dos sistemas chaveados lineares sob chaveamento arbitrário é através da procura de uma função de Lyapunov quadrática comum (CQLF). Como foi dito, nem todo sistema chaveado GUES possui uma CQLF, mas a procura por uma CQLF, além de ser matematicamente mais simples, leva a vários critérios de estabilidade importantes.

Uma CQLF para o sistemas chaveado (6) é uma função de Lyapunov do tipo $v(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ com P uma matriz simétrica definida positiva. No caso contínuo, a condição : $\nabla v(x) \cdot A_k x < 0$ que pode ser escrito como:

$$PA_k + A_k^T P < 0, \tag{7}$$

portanto o problema de encontrar uma CQLF para o sistema chaveado linear (6) é equivalente a encontrar uma solução P da LMI (7).

2.2.4 Condições Necessárias e Suficientes para a Existência da CQLF

Em alguns casos particulares, podem-se obter resultados de existência de CQLF que fornecem condições necessárias e suficientes. Alguns resultados deste tipo são mencionado em (LIN; ANTSAKLIS, 2009). Lembramos que $\gamma(A,B)$ denota o envelope convexo de $\{A,B\}$, $\gamma(A,B) = \{\alpha A + (1-\alpha)B : \alpha \in [0,1]\}$.

Teorema 3. *(SHORTEN; NARENDRA; MASON, 2003) Sejam $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ duas matrizes Hurwitz. As condições a seguir são equivalentes :*

- *Existe uma CQLF para o sistema chaveado linear correspondente as matrizes A_1 e A_2.*
- *As matrizes $\gamma(A_1, A_2)$ e $\gamma(A_1, A_2^{-1})$ são Hurwitz.*
- *As matrizes A_1A_2 e $A_1A_2^{-1}$ não possuem autovalores reais negativos.*

Demonstração. Para maiores detalhes, veja (SHORTEN; NARENDRA; MASON, 2003). □

Estas condições algébricas sobre A_1 e A_2 são facilmente verificáveis e fornecem um resultado simples e elegante sobre a existência de uma CQLF para um par de matrizes com dimensão 2. No caso de dimensão superior, é possível, para o caso de dois subsistemas, obter uma condição necessária de existência de CQLF.

Teorema 4. *(SHORTEN et al., 2004; SHORTEN; NARENDRA; MASON, 2003) Sejam A_1 e A_2 duas matrizes Hurwitz de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Se existir uma CQLF para o sistema chaveado correspondente a estas matrizes, então as matrizes $A_1[\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2]$ e $A_1[\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2]^{-1}$ não possuem nenhum autovalor real negativo para todo $\alpha \in [0,1]$.*

Demonstração. Para maiores detalhes, veja (SHORTEN et al., 2004; SHORTEN; NARENDRA; MASON, 2003). □

Um outro resultado interessante para um par de matrizes Hurwitz A_1, A_2 com dimensão qualquer pode ser obtido quando o posto da diferença destas matrizes é 1.A seguinte condição necessária e suficiente para a existência da CQLF foi obtida em (SHORTEN et al., 2004).

Teorema 5. *(SHORTEN et al., 2004) Sejam A_1 e A_2 duas matrizes Hurwitz em $\mathbb{R}^{n\times n}$ com posto$(A_2 - A_1) = 1$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- *Existe uma CQLF para o sistema chaveado linear correspondente as matrizes A_1 e A_2.*
- *Todas as matrizes $A_1 + \alpha A_2, \alpha \geq 0$, são não singulares.*
- *A matriz A_1A_2 não possui autovalores reais negativos.*

Demonstração. Para maiores detalhes, veja (SHORTEN et al., 2004). □

O teorema anterior pode ser aplicado quando o sistema de controle pode chavear entre $\dot{x} = Ax$ e o sistema controlado $\dot{x} = (A - BK^T)x$, pois as matrizes A e $A - BK^T$ diferem de BK^T, que é de posto 1.

2.3 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS CHAVEADOS

Os casos anteriores interessaram-se pelo problema de analisar um sistema chaveado dado, com uma certa lei de chaveamento sobre a qual se tem algumas informações, buscando obter informações de estabilidade sobre o sistema chaveado. Porém, em vários casos práticos a lógica de chaveamento faz parte do projeto do sistema. Assim, o problema da estabilização pelo chaveamento é : dada uma família de subsistemas em tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t),\ \forall \sigma \in \mathbb{K}_N, \tag{8}$$

projetar uma lei de chaveamento $\sigma(t)$ tal que o sistema chaveado (8) com a lógica $\sigma(t)$ seja exponencialmente estável. Note que alguns dos subsistemas de (8), ou mesmo todos, podem ser instáveis, e mesmo assim o problema da estabilização pelo chaveamento pode possuir uma solução.

Uma técnica de estabilização da família de subsistemas (8) é buscar garantir a existência de uma função de Lyapunov quadrática comum para a família, isto é, escolher uma lógica de chaveamento para a qual $v(x(t)) = x(t)^T Px(t)$ seja uma CQLF para os subsistemas de (8) para uma certa matriz P simétrica definida positiva. Neste caso, dizemos que a estabilização realizada é quadrática, e, quando uma tal estabilização é possível, dizemos que a família (8) é quadraticamente estabilizável.

Para duas matrizes A_1 e A_2, um critério necessário e suficiente de existência de uma estabilização quadrática é apresentado no seguinte teorema.

Teorema 6. *(FERON, 1996; WICKS; PELETIES; DECARLO, 1998). Considere o sistema linear chaveado (8) com dois subsistemas definidos pelas matrizes A_1 e A_2. Este sistema é quadraticamente estabilizável se e somente se existir $\lambda \in \Lambda$, tal que, $A_\lambda = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2$ seja Hurwitz.*

Demonstração. Para maiores detalhes, veja (FERON, 1996; WICKS; PELETIES; DECARLO, 1998). □

O resultado do Teorema 6 pode ser generalizado a uma família finita de matrizes qualquer, mas a condição de estabilização quadrática passa a ser apenas suficiente e não mais necessária.

Teorema 7. *(PETTERSSON; LENNARTSON, 2001) Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ está disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiva definida, tais que:*

$$A_\lambda^T P + PA_\lambda < 0, \tag{9}$$

então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x(t)) = arg\min_{i\in K_N} \{x(t)^T PA_i x(t)\}, \tag{10}$$

torna o ponto de equilíbrio $(x = 0)$ do sistema (8) globalmente assintoticamente estável (GUAS).

Demonstração. De fato, considerando a função de Lyapunov $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ e levando em consideração que $x(t)^T PAx(t) = x(t)^T(\frac{A^T P + PA}{2})x(t)$ temos:

$$\begin{array}{rcl} \dot{v}(x(t)) & = & x(t)^T(A_{\sigma(t)}^T P + PA_{\sigma(t)})x(t), \\ & = & \min_{i\in\mathbb{K}_N} x(t)^T(A_i^T P + PA_i)x(t), \\ & \leq & x(t)^T(A_\lambda^T P + PA_\lambda)x(t), \\ & < & 0,\ \forall x(t) \neq 0, \end{array} \tag{11}$$

sendo que a última desigualdade segue da existência de $\lambda \in \Lambda$ satisfazendo (9). □

Um exemplo de aplicação do Teorema 7 é dado a seguir.

Exemplo 2.1. Considere o sistema (8) com $N = 3$ e matrizes $\{A_1, A_2, A_3\}$, todas instáveis, dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

tomando $\lambda = [\lambda_1 \ \ \lambda_2 \ \ \lambda_3]^T = [0,2 \ \ 0,3 \ \ 0,5]^T$, verifica-se que a combinação convexa $A_\lambda = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$ é Hurwitz. De fato,

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} -0,2 & -1,5 & -1,3 \\ -0,3 & -1,2 & 0 \\ -0,1 & -1,7 & -1,3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

tem como polinômio caraterístico

$$p_{A_\lambda}(s) = s^3 + 2,7s^2 + 1,48s + 0,234;$$

sendo que todas as raízes tem parte real negativa, além disso verifica-se que a matriz simétrica

definida positiva

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -9 \\ 0 & -3 & -1 \\ -9 & -1 & 10 \end{bmatrix} \tag{13}$$

é tal que:

$$A_\lambda^T P + P A_\lambda = \begin{bmatrix} -2,2 & -0,5 & -0,2 \\ -0,5 & -3,8 & -1 \\ -0,2 & -1 & -2,6 \end{bmatrix} < 0$$

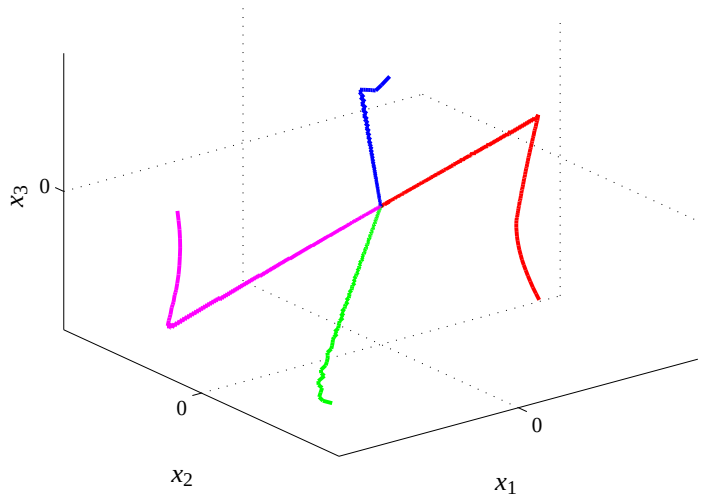
e, assim, as condições do Teorema 7 estão satisfeitas. Logo, o sistema:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t), \\ &\sigma(x(t)) = arg\min_{i \in K_N} \{x(t)^T P A_i x(t)\}, \end{aligned} \tag{14}$$

é exponencialmente estável.

Algumas trajetórias do sistema (14) são representadas na seguinte figura:

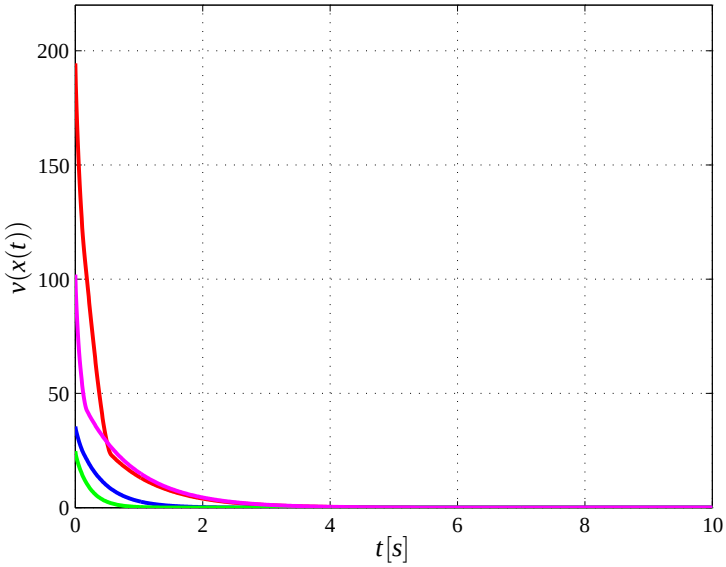
Figura 1 - Representação de algumas trajetórias do sistema (14)



Fonte: O próprio autor.

A Figura 2 apresenta o valor da função de Lyapunov $v(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ sobre as trajetórias representadas na Figura 1. Note que, como esperado, $v(x(t))$ decresce estritamente ao longo das trajetórias, sendo assim uma CQLF para o sistema (8).

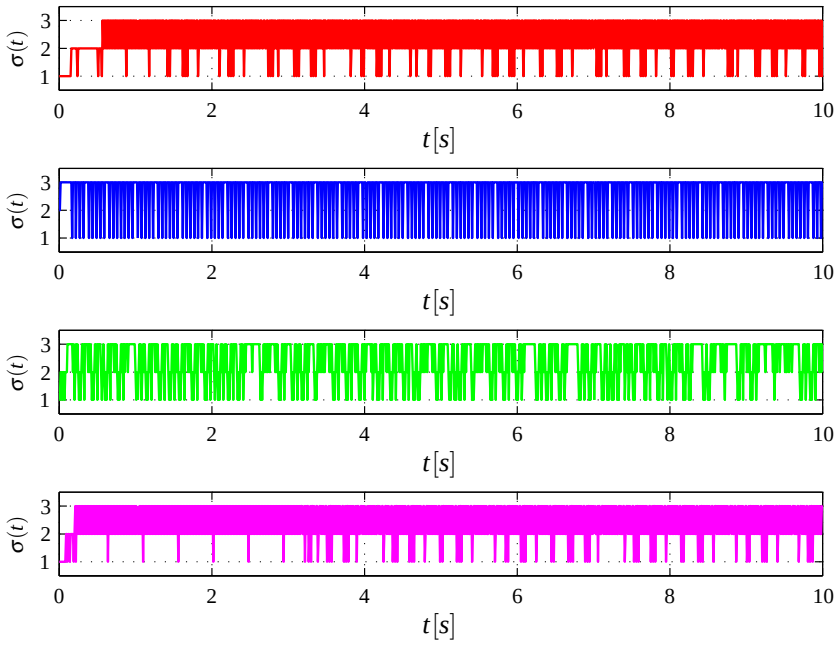
Figura 2 - Função de Lyapunov $v(x(t)) = x(t)^T Px(t)$ calculada sobre as trajetórias do sistema (14) representadas na Figura 1.



Fonte: O próprio autor.

A Figura 3 apresenta o chaveamento do sinal de controle $\sigma(t)$ entre os modos do sistema em questão.

Figura 3 - Chaveamento do sinal $\sigma(t)$ sobre as trajetórias do sistema (14) representadas na Figura 1.



Fonte: O próprio autor.

Deve-se notar que a condição do Teorema 7 é suficiente para a estabilizabilidade quadrática de (8), mas não necessária . Há exemplos de sistemas para os quais toda combinação convexa

das matrizes A_i é instável, mas ainda assim o sistema é quadraticamente estabilizável. É possível, porém, fornecer outro critério de estabilização quadrática que seja necessário e suficiente, apresentado no seguinte teorema.

Teorema 8. *(SKAFIDAS et al., 1999) O sistema (8) definido pelas matrizes $A_i, i \in \mathbb{K}_N$ é quadraticamente estabilizável se e somente se existir uma matriz P simétrica definida positiva tal que, para todo $x \in R^n$, $x \neq 0$, exista $k \in \mathbb{K}_N$ tal que*

$$x^T(A_k^T P + PA_k)x < 0, \tag{15}$$

neste caso, o sinal de chaveamento σ definido por

$$\sigma(x(t)) = arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} x(t)^T (A_i^T P + PA_i)x(t) \tag{16}$$

estabiliza exponencialmente o sistema e $v(x) = x(t)^T Px(t)$ é uma CQLF do sistema chaveado correspondente.

Demonstração. O resultado do Teorema 8 não é surpreendente; de fato, basta notar que a derivada da função $v(x(t)) = x(t)^T Px(t)$ ao longo das trajetórias do sistema chaveado (8) é

$$\frac{d}{dt}v(x(t)) = x(t)^T (A_\sigma^T P + PA_\sigma)x(t)$$

em todo intervalo em que $\sigma(t)$ é constante, e, assim, exigir que $v(x(t))$ seja estritamente decrescente fora da origem corresponde a exigir que, para todo $x \neq 0$, se possa encontrar um índice k tal que $x^T(A_k^T P + PA_k)x < 0$, e este índice k é então o selecionado quando se passa por x. □

2.3.1 Desigualdades Lyapunov-Metzler

Considere o problema que consiste em determinar uma regra de comutação estabilizante para o sistemas chaveado descrito pelas seguintes equações no espaço de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t), \;\; x(0) = x_0, \\ z(t) &= E_{\sigma(t)}x(t), \end{aligned} \tag{17}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $z(t) \in \mathbb{R}^m$ a saída controlada do sistema, $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz característica do sistema e $E_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matriz de saída do sistema.

Agora, vamos associar com o simplex unitário Λ um conjunto finito de matrizes definidas positivas $\{P_1, P_2, ..., P_N\}$. Este fato nos permite definir a seguinte função de Lyapunov quadrática por partes

$$v(x(t)) = \min_{i \in K_N} x(t)^T P_i x(t) = \min_{\lambda \in \Lambda} (\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x(t)^T P_i x(t)). \tag{18}$$

Um aspecto relevante a ser considerado na definição da função (18) é o fato de que ela não é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Definindo o seguinte conjunto $I(x(t)) = \{i : v(x(t)) = x(t)^T P_i x(t)\}$, podemos observar que o mesmo contêm mais de um elemento nos pontos onde a função (18) não é diferenciável, já que nestes pontos a minimização indicada em (18) não é única. Assim, ao londo deste estudo, utilizamos a derivada de Dini (LORD, 2000) à direita para o cálculo da derivada temporal. Por definição, a derivada de Dini à direita da função (18) é dada por

$$D^+ v(x(t)) = \lim_{h \to 0} sup \frac{v(x(t+h)) - v(x(t))}{h}. \tag{19}$$

Por outro lado, em $t \geq 0$ arbitrário, com $\sigma(t) = i \in I(x(t))$, o Teorema de Danskin fornece

$$\begin{array}{rcl} D^+ v(x(t)) & = & \lim_{h \to 0} \frac{v(x(t)+hA_i x(t)) - v(x(t))}{h}, \\ & = & \min_{l \in I(x(t))} x(t)^T (A_i^T P_l + P_l A_i) x(t), \\ & \leq & x(t)^T (A_i^T P_i + P_i A_i) x(t). \end{array} \tag{20}$$

A regra de comutação foi escolhida a partir da função de Lyapunov (18) e é dada por

$$\sigma(x(t)) = \min_{i \in \mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t). \tag{21}$$

O seguinte Teorema utiliza a regra de comutação (21), a função (18) e uma classe de matrizes de Metzler denotada por $\mathscr{M}$, consistindo de todas as matrizes $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ com elementos π_{ji}, tais que

$$\pi_{ji} \geq 0 \ \text{ para } i \neq j \ \text{ e } \ \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji} = 0, \ \ i, j \in \mathbb{K}_N, \tag{22}$$

de forma a encontrar condições suficientes para a estabilidade assintótica de (17) que assegurem um custo garantido de desempenho. Observe que para qualquer matriz de Metzler $\mathscr{M}$, todos os elementos da diagonal principal são não positivos, além disso, para $i \in I(x)$ e $\Pi \in \mathscr{M}$ um fato importante para o projeto de estabilização é dado em (23).

$$\begin{array}{rcl} x(t)^T (\sum_{j=1}^{N} \pi_{ji} P_j) x(t) & = & \pi_{ii} x(t)^T P_i x(t) + \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}_N} \pi_{ji} x(t)^T P_j x(t), \\ & \geq & \pi_{ii} x(t)^T P_i x(t) + \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}_N} \pi_{ji} x(t)^T P_i x(t), \\ & \geq & (\sum_{j \in \mathbb{K}_N} \pi_{ji}) x(t)^T P_i x(t), \\ & \geq & 0. \end{array} \tag{23}$$

Teorema 9. *(GEROMEL; COLANERI, 2006) Para o sistema (17), a regra de comutação* $\sigma(x(t)) = \min_{i\in\mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t)$ *é globalmente estabilizante e a desigualdade* $\|z\|_2^2 < \min_{i\in\mathbb{K}_N} x_0{}^T P_i x_0$ *é válida se existirem matrizes* $P_i > 0$ *para todo* $i \in \mathbb{K}_N$ *e uma matriz Metzler* $\Pi \in \mathscr{M}$ *satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j & * \\ E_i & -I \end{bmatrix} < 0, \;\; i \in \mathbb{K}_N. \tag{24}$$

Demonstração. Aplicando o complemento de Schur e rearranjando os termos, temos

$$A_i^T P_i + P_i A_i < -\sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j - E_i^T E_i, \tag{25}$$

por outro lado, com a função de Lyapunov $v(x(t)) = \min_{i\in\mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t)$ e levando em consideração que $\sigma(t) = i \in I(x(t))$, obtemos

$$\begin{aligned} D^+v(x) &= \min_{l\in I(x)} x(t)^T (A_i^T P_l + P_l A_i) x(t), \\ &\leq x(t)^T (A_i^T P_i + P_i A_i) x(t), \\ &< -x(t)^T (\textstyle\sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j) x(t) - x(t)^T E_i^T E_i x(t), \\ &< -x(t)^T (\textstyle\sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j) x(t) - z(t)^T z(t), \\ &< -z(t)^T z(t), \\ &< 0, \end{aligned} \tag{26}$$

o que garante a estabilidade global da origem, ademais, integrando ambos lados obtemos

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^\infty z(t)^T z(t) dt < v(x_0), \\ &\|z\|_2^2 < \min_{i\in\mathbb{K}_N} x_0^T P_i x_0. \end{aligned} \tag{27}$$

□

A validade da desigualdade (24) nos permite encontrar um outro limitante superior para o custo quadrático definido no Teorema 9, que embora seja mais conservador, pode ser mais vantajoso computacionalmente. Assim, se

$$P_i - \rho I_n < 0, \; i \in \mathbb{K}_N, \; \rho > 0 \tag{28}$$

então

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &< \min_{i\in\mathbb{K}_N} x_0{}^T P_i x_0, \\ &< \rho x_0^T x_0. \end{aligned} \tag{29}$$

Portanto, acrescentando as desigualdades (28) nas condições do Teorema 9, podemos utilizar o limitante (29) ao invés do definido no Teorema (9). A utilização do limitante (29), embora

pior, pode ser mais vantajosa computacionalmente, já que as LMIs apresentadas no Teorema 9 junto com (28) são calculadas apenas uma vez para cada condição inicial. Utilizando o limitante definido no Teorema (9), o cálculo das desigualdades (24) deve ser realizado N vezes para cada condição inicial.

Outro ponto relevante é que as condições apresentadas no Teorema (9) não exigem nenhuma propriedade de estabilidade das matrizes $\{A_1,...,A_N\}$ tomadas individualmente. De fato, com $\Pi \in \mathscr{M}$, uma condição necessária para a factibilidade das desigualdades Lyapunov-Metzler com respeito ao conjunto $\{P_1,P_2,...,P_N\}$ é que as matrices $A_i + (\frac{\pi_{ii}}{2})I_n$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$ sejam Hurwitz.

De acordo com o Teorema 9, as condições para a estabilidade assintótica do sistema (8) dependem da solução das desigualdades de Lyapunov-Metzler. Estas desigualdades possuem natureza não-convexa devido ao produto das variáveis $\{(\Pi,P_1,...,P_N)\}$ e não é possível resolve-las através de softwares disponíveis na literatura para a solução de LMIs. No entanto, em (GEROMEL; COLANERI, 2006) foi proposta uma versão alternativa que pode ser resolvida utilizando LMIs e uma busca unidimensional. Esta condição, embora seja mais conservadora, é mais fácil de ser resolvida pois permite a utilização de softwares disponíveis na literatura. A condição baseia-se em uma subclasse de matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal.

Para sistemas com apenas dois modos de comutação $(N = 2)$, as condições do Teorema 9 podem ser resolvidas sem um grande esforço computacional realizando-se uma busca bidimensional envolvendo duas variáveis independentes. Se, entretanto, o sistema tiver mais de dois modos de comutação, sua solução através das condições do Teorema 9 torna-se bastante complicada, sendo oportuno utilizar as condições apresentadas no teorema a seguir.

Corolário 1. *(GEROMEL; COLANERI, 2006) As condições do Teorema 9 continuam válidas se existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e um escalar $\mu > 0$ satisfazendo as desigualdades modificadas de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \mu(P_j - P_i) & * \\ E_i & -I \end{bmatrix} < 0, \;\; i \neq j \;\; \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N. \tag{30}$$

Demonstração. Inicialmente, consideramos $\mu = -\pi_{ii} > 0$ e como $\Pi \in \mathscr{M}$, então $\mu^{-1}\sum_{j\neq i=1}^{N} \pi_{ji} = 1$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$. Multiplicando (30) por π_{ji}, somando para todo $j \neq i \in \mathbb{K}_N$ e, finalmente, multiplicando o resultado por μ^{-1}, obtemos (24), pois

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji} P_j & = & \sum_{j\neq i=1}^{N} \pi_{ji} P_j - \mu P_i, \\ & = & \mu^{-1} \sum_{j\neq i=1}^{N} \pi_{ji} \mu (P_j - P_i), \end{array} \tag{31}$$

provando o corolário. □

O exemplo a seguir ilustra a teoria discutida nesta subseção.

Exemplo 2.2. Considere o sistema (8) com $N = 2$ e matrizes $\{A_1, A_2\}$, ambas instáveis, dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Para condições iniciais em torno da circunferência de raio 3, $x_0 = [3cos(\theta)\ \ 3sen(\theta)]^T$, com $\theta \in [0, 2\pi]$, e $E_1^T E_1 = E_2^T E_2 = I_2$, utilizamos as condições do Teorema 9 para fazer com que a origem do sistema seja globalmente assintoticamente estável de forma que as desigualdades (24) tornam-se:

$$\begin{aligned} A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \pi_{21}(P_2 - P_1) + E_1^T E_1 < 0, \\ A_2^T P_2 + P_2 A_2 + \pi_{12}(P_1 - P_2) + E_2^T E_2 < 0. \end{aligned} \tag{32}$$

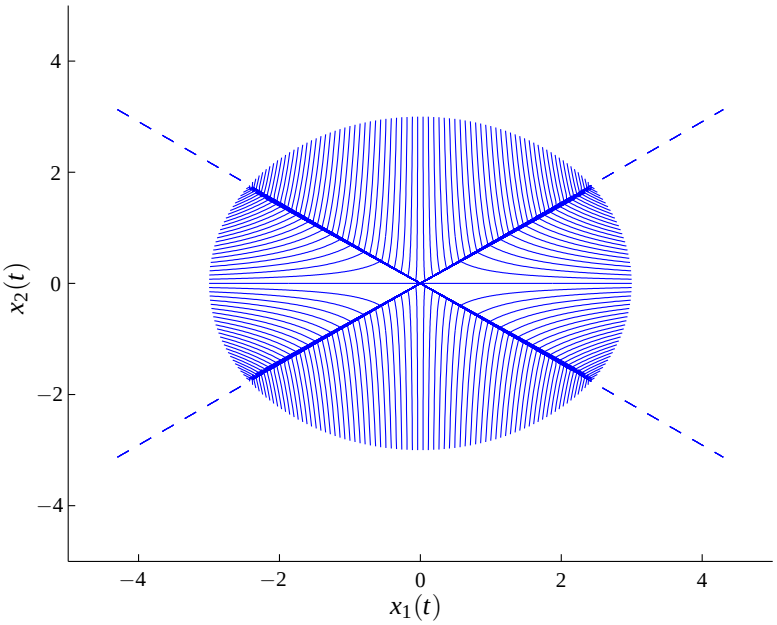
Neste exemplo, acrescentamos as desigualdades (28) nas condições do Teorema 9 e utilizamos a função objetivo (29) ao invés de (27). Após uma busca bidimensional, encontramos $\pi_{21} = 5$ e $\pi_{12} = 10$. Com estes valores de π_{21} e π_{12} as LMIs (32), ofereceram como resultado as seguintes matrizes simétricas definidas positivas.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Utilizando as matrizes P_1 e P_2, a lei de chaveamento (21) foi implementada. A Figura 4 representa o plano de fase do sistema com as superfícies de comutação destacadas. Estas superfícies foram obtidas lembrando que o instante da comutação é quando $x(t)^T P_1 x(t) = x(t)^T P_2 x(t)$.

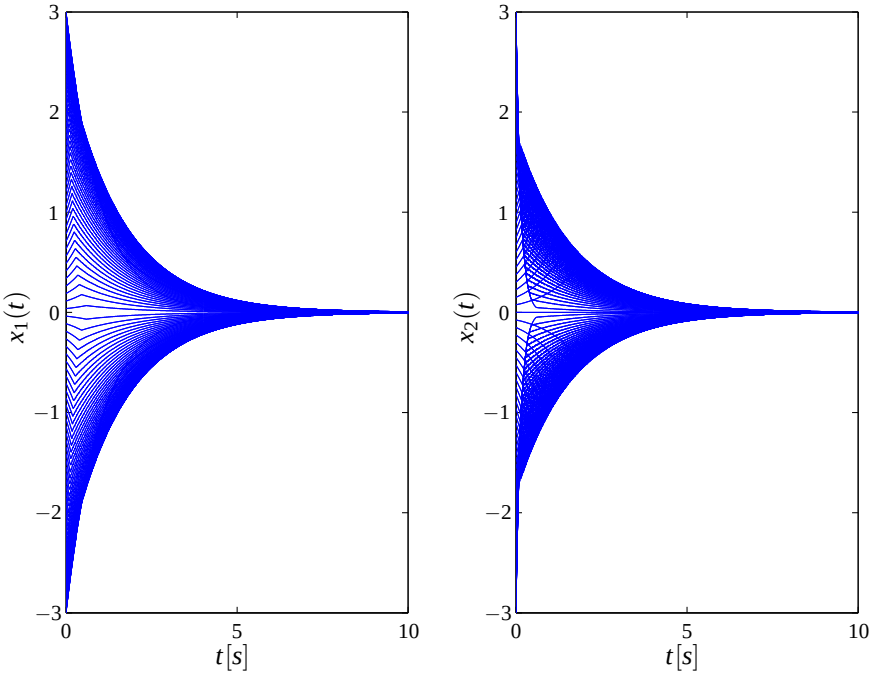
A Figura 5 representa as trajetórias dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e a Figura 6 representa o custo funcional para cada condição inicial, bem como o custo garantido do sistema. Como pode ser observado, as condições impostas pelo Teorema 9, utilizando (29), asseguram que a origem do sistema seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, com custo garantido igual a 25,5.

Figura 4 - Plano de fase (Exemplo 2.2).



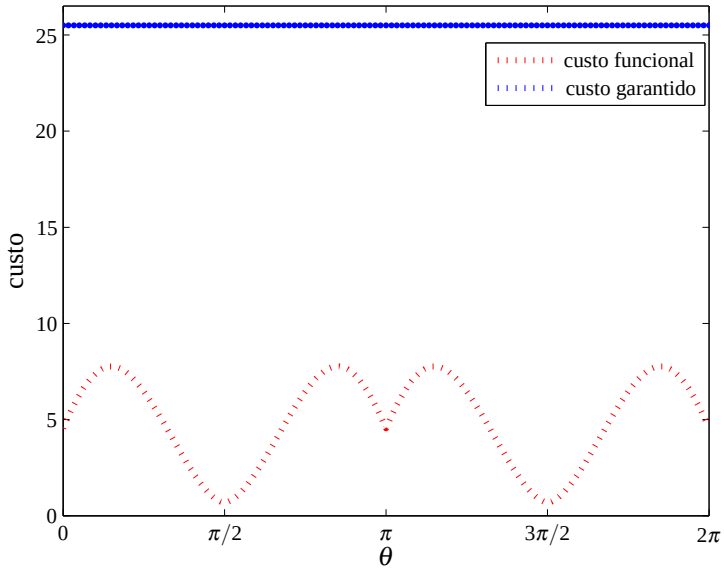
Fonte: O próprio autor.

Figura 5 - Trajetória dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ (Exemplo 2.2).



Fonte: O próprio autor.

Figura 6 - Custos para o sistema do Exemplo 2.2.



Fonte: O próprio autor.

2.4 CONTROLE CHAVEADO ROBUSTO

Nesta seção apresentamos condições para o controle robusto de sistemas politópicos com comutação e as generalizamos para tratar o problema de síntese via realimentação de estado. O ponto chave para a obtenção deste resultado é a utilização de uma matriz de Metzler com uma estrutura depende do parâmetro $\alpha \in \Lambda$.

2.4.1 Sistemas Lineares Chaveados Incertos

Considere o problema que consiste em determinar uma regra de comutação estabilizante para sistemas politópicos descritos pelas seguintes equações no espaço de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}(\alpha)x(t), \;\; x(0) = x_0, \\ z(t) &= E_{\sigma(t)}x(t), \end{aligned} \tag{33}$$

para algum $\sigma(t) \in \mathbb{K}_N$, $\alpha \in \Lambda$ e a matriz $A_\sigma(\alpha)$ dada por:

$$A_{\sigma(t)}(\alpha) = A_\sigma(\alpha) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j A_{j\sigma}, \tag{34}$$

sendo que o vetor α, representa as incertezas politópicas (ou falhas estruturais) da planta, assim o primeiro subíndice refere-se ao vértice do politopo e o segundo à regra de chaveamento. Considerando uma matriz de Metzler dependente do parâmetro desconhecido, isto é, $\Pi(\alpha)$:

$\Lambda \to \mathbb{R}^{n\times n}$ cujos elementos são definidos por

$$\pi_{ji}(\alpha) = \begin{cases} \mu\alpha_j, & j \neq i \\ \mu(\alpha_i - 1), & j = i \end{cases} \tag{35}$$

com $\mu > 0$ podemos verificar que eles constituem elementos de uma matriz de Metzler $\Pi(\alpha) \in \mathscr{M}$ para todo $\alpha \in \Lambda$. De fato, pela definição (35) todos os elementos fora da diagonal principal são não-negativos e as identidades

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji}(\alpha) & = & \sum_{j\neq i\neq 1}^{N} \mu\alpha_j + \mu(\alpha_i - 1), \\ & = & \mu(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j - 1), \\ & = & 0 \end{array} \tag{36}$$

são verificadas para cada $i \in \mathbb{K}_N$ e todo $\alpha \in \Lambda$. Além disso, utilizando $\Pi(\alpha) \in \mathscr{M}$ definida em (35), temos que as igualdades

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji}(\alpha)P_j & = & \mu \sum_{j\neq i\neq 1}^{N} \alpha_j P_j + \mu(\alpha_i - 1)P_i, \\ & = & \mu \sum_{j=1}^{N} \alpha_j P_j - \mu P_i, \\ & = & \mu \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (P_j - P_i) \end{array} \tag{37}$$

são verdadeiras para cada $i \in \mathbb{K}_N$ e todo $\alpha \in \Lambda$. Este é um resultado fundamental para o projeto de controle robusto em questão e que tornou possível a obtenção das condições que apresentaremos no próximo teorema.

Teorema 10. *(DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2011) Se existirem matrizes simétricas $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e um escalar $\mu \geq 0$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A_{ji}^T P_i + P_i A_{ji} + \mu(P_j - P_i) & * \\ E_i & -I \end{bmatrix} < 0, \;\; i, j \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N, \tag{38}$$

então a regra de comutação $\sigma(x(t)) = arg \min_{i\in\mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t)$ é globalmente estabilizante e a desigualdade $\|z\|_2^2 < \min_{i\in\mathbb{K}_N} x_0^T P_i x_0$ é válida.

Demonstração. Multiplicando (38) por $\alpha_j \geq 0$ e somando para todo $j = 1, 2, ..., N$, obtemos

$$\begin{bmatrix} A_i(\alpha)^T P_i + P_i A_i(\alpha) + \mu \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (P_j - P_i) & * \\ E_i & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{39}$$

utilizando o resultado apresentado em (37), verificamos que

$$\begin{bmatrix} A_i(\alpha)^T P_i + P_i A_i(\alpha) + \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji}(\alpha) P_j & * \\ E_i & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{40}$$

Finalmente, uma vez que (40) vale para todo $\alpha \in \Lambda$, obtemos (24). □

Destacamos que o teorema continua válido no caso em que $\alpha \in \Lambda$ for variante no tempo como uma consequência do fato de que a função de Lyapunov utilizada não depende explicitamente de $\alpha(t) \in \Lambda$.

2.4.2 Projeto de Controle Chaveado Robusto $\mathscr{H}_2$

Considere um sistema chaveado sujeito a incertezas politópicas descrito pelas seguintes equações no espaço de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + Hw(t), \;\; x(0) = 0, \\ z(t) &= E_{\sigma(t)}x(t) + F_{\sigma(t)}u(t), \end{aligned} \tag{41}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^p$, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ e as matrizes (A_j, B_j, H, E_i, F_i) possuem dimensões compatíveis e são conhecidas.

Considerando que a entrada $w(t)$ é do tipo impulsiva, isto é, $w(t) = \delta(t)e_k$, com $e_k \in \mathbb{R}^p$ representando a k-ésima coluna da matriz identidade I_p. O custo funcional $\mathscr{H}_2$ definido em (DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2011) é dado por

$$J_2(\sigma) = \sum_{k=1}^{p} \|z_k\|_2^2, \tag{42}$$

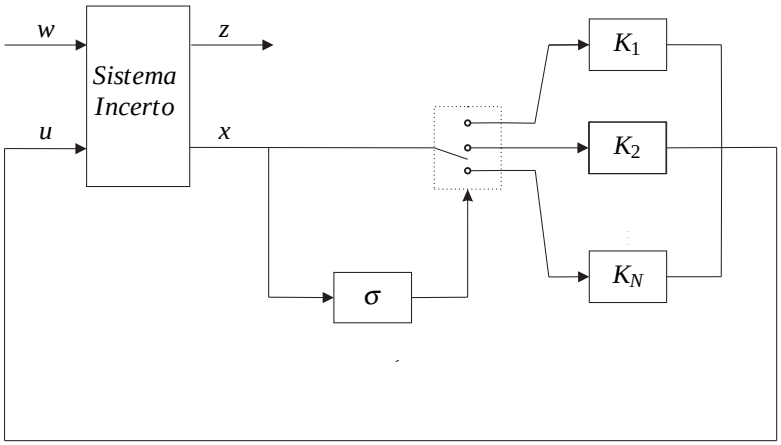
em que z_k é a saída correspondente a um impulso unitário aplicado no k-ésimo canal. Por outro lado, quando a entrada externa é do tipo impulsiva $w(t) = \delta(t)e_k$ este sistema pode ser alternativamente representado pelas mesmas equações com $w(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ e $x(0) = He_k$. Isto viabiliza a utilização do Teorema 10.

Neste contexto, o objetivo neste projeto é determinar uma lei de chaveamento e um conjunto de ganhos de realimentação de estado $\{K_1, ..., K_N\}$ de forma a fazer com que a origem $x = 0$ do sistema (41) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável assegurando um limitante superior do custo $J_2(\sigma)$. Aplicando a entrada de controle $u(t) = K_{\sigma(t)}x(t)$ em (41) obtemos, o sistema em malha fechada descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A(\alpha) + B(\alpha)K_{\sigma(t)})x(t) + Hw(t), \;\; x(0) = 0, \\ z(t) &= (E_{\sigma(t)} + F_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})x(t). \end{aligned} \tag{43}$$

Este esquema de controle é ilustrado pela Figura 7.

Figura 7 - Esquema de controle chaveado



Fonte : O próprio autor

Teorema 11. *(DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2011) Se existirem matrizes simétricas X_i, matrizes M_i para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e um escalar $\mu > 0$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} He\{A_jX_i + B_jM_i\} - \mu X_i & * & * \\ E_iX_i + F_iM_i & -I & * \\ \mu X_i & 0 & -\mu X_j \end{bmatrix} < 0, \quad i,j \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N, \tag{44}$$

então a lei de chaveamento $\sigma(x(t)) = \arg\min_{i\in\mathbb{K}_N} x(t)^T X_i^{-1} x(t)$ e os ganhos de realimentação de estado $K_i = M_iX_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$ fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada (43) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável satisfazendo $J_2(\sigma) < \min_{i\in\mathbb{K}_N} tr(H^T X_i^{-1} H)$.

Demonstração. Considere $P_i = X_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$. Aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (44), multiplicando o resultado de ambos os lados por $diag\{X_i^{-1}, I\}$ e realizando as seguintes associações $A_{ji} \to (A_j + B_jK_i)$ e $E_i \to (E_i + F_iK_i)$ obtemos (38). □

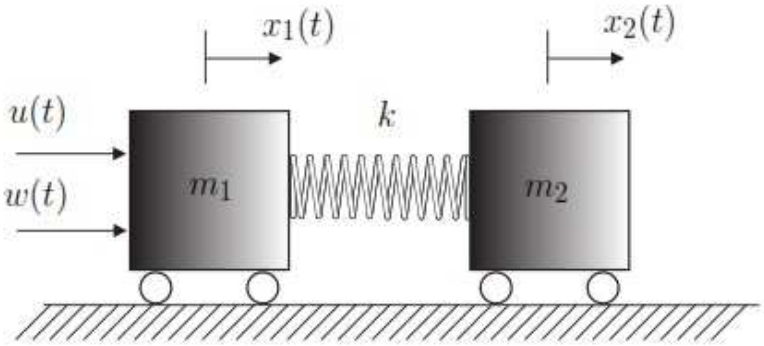
Baseado no resultado do Teorema 11 o custo garantido associado ao problema de projeto em consideração pode ser formulado como

$$\min_{\mu>0,\ i\in\mathbb{K}_N} \min_{\{X_i,\ M_i\}\in\Phi(\mu)} tr(H^T X_i^{-1} H), \tag{45}$$

sendo $\Phi(\mu)$ o conjunto de todas as soluções factíveis das desigualdades (44). O cálculo do minimo pode ser realizado usando rotinas disponíveis para a solução de LMIs e uma busca unidimensional com relação ao parâmetro μ. A minimização é realizada por simples comparação dos valores dos custos obtidos para cada $i \in \mathbb{K}_N$. A seguir, a efetividade da metodologia apresentada no teorema anterior será ilustrada através de um exemplo.

Exemplo 2.3. Considere o sistema constituído por dois carros conectados por uma mola ilustrado na Figura 8 e já proposto anteriormente (SKAFIDAS et al., 1999; REINELT, 1999). Desejamos realizar o projeto conjunto de ganhos matriciais $\{K_1, K_2\}$ e de uma lei de chaveamento $\sigma(x(t))$ de tal forma a assegurar estabilidade e um custo garantido. O sistema é contínuo no tempo e possui alguns parâmetros incertos em sua estrutura.

Figura 8 - Sistema carro-mola com dois graus de liberdade



Fonte: (REINELT, 1999)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} w(t), \tag{46}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \tag{47}$$

Os dois carros possuem massas nominais de $m_1 = 1kg$ e $m_2 = 1kg$ e estão conectados por uma mola de constante k. A constante da mola é modelada como um parâmetro incerto pertencente ao intervalo $0,5 \leq k \leq 2,0$. Os vértices do politopo são mostrados a seguir:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{48}$$

$$B_1 = B_2 = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_1 = H_2 = H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{49}$$

$$E_1 = E_2 = E = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = F_2 = F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Considerados as LMIs do Teorema 11, utilizando $\mu = 115$. As condições do Teorema 11 são factíveis, fornecendo os valores das matrizes X_1, X_2 e dos ganhos K_1, K_2 apresentados a seguir

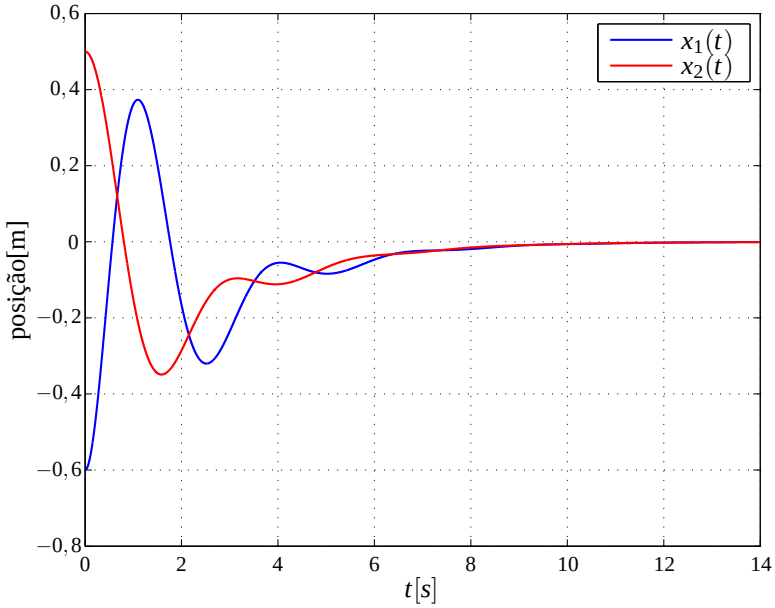
$$X_1 = \begin{bmatrix} 0,9231 & 0,7600 & -0,4061 & -0,3781 \\ 0,7600 & 0,7639 & -0,1991 & -0,2923 \\ -0,4061 & -0,1991 & 0,6525 & 0,1424 \\ -0,3781 & -0,2923 & 0,1424 & 0,2258 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0,9211 & 0,7600 & -0,4046 & -0,3760 \\ 0,7600 & 0,7639 & -0,1991 & -0,924 \\ -0,4046 & -0,1991 & 0,6524 & 0,1398 \\ -0,3760 & -0,2924 & 0,1398 & 0,2247 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -4,9769 & 3,3716 & -3,1715 & -1,9684 \end{bmatrix},$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} -4,9874 & 3,3791 & -3,1708 & -1,9766 \end{bmatrix}.$$

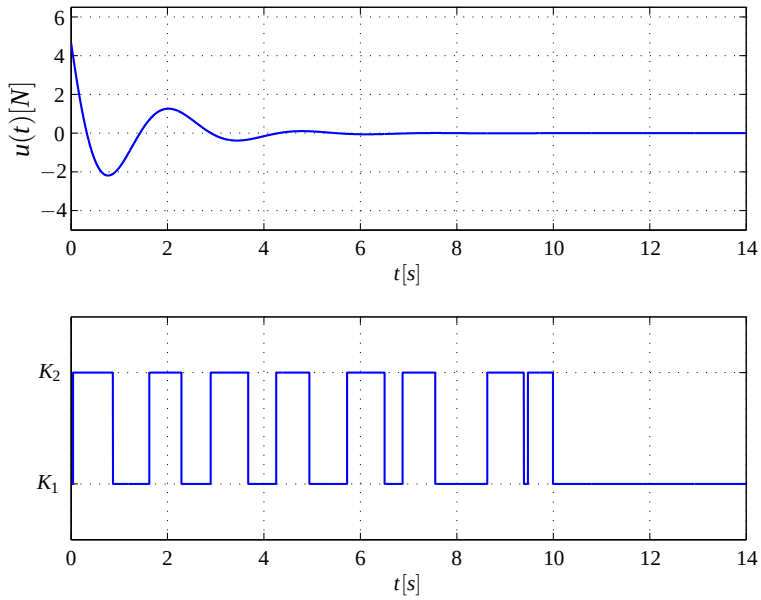
A simulação foi feita considerando condições iniciais x_0=[-0,6 0,5 0 0]^T, $w(t) = 0$ e $\alpha(t) = [\ 0,5 - 0,5sin(10t) \quad 0,5 + 0,5sin(10t)\ ]^T \in \Lambda$. Nas Figuras 9 e 10 estão ilustrados os gráficos das simulações das trajetórias das variáveis de estado $x_1(t)$, $x_2(t)$, o sinal de controle $u(t)$ e o chaveamento $K_{\sigma(t)}$, respectivamente. Estas simulações mostram que as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio aproximadamente em $t = 10s$, a amplitude máxima do esforço de controle foi de $4,67N$, podemos observar que o projeto realizado mostrou-se bastante eficaz mesmo com o grande intervalo de incerteza na constante da mola.

Figura 9 - Trajetória das variáveis de estado $x_1(t), x_2(t)$ do sistema controlado.



Fonte: O próprio autor.

Figura 10 - Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho K_σ.



Fonte: O próprio autor.

2.5 COMENTÁRIOS

Este capítulo apresentou uma breve revisão sobre a teoria básica de análise e controle de sistemas chaveados. Inicialmente, foi feita a distinção de sistemas chaveados partindo da definição dos sistemas híbridos. As principais ferramentas para análise de estabilidade para o caso de

sistemas chaveados sob comutação arbitrária (funções quadráticas comuns de Lyapunov) foram citadas. Os principais métodos para a estabilização através do projeto de uma lei de comutação para que o sistema chaveado apresente estabilidade, foram citados. Especialmente foi tratado um método de estabilização de forma a assegurar um custo garantido de desempenho; este método é baseado em condições que dependem da solução de um conjunto de desigualdades de Lyapunov-Metzler, definidas em (GEROMEL; COLANERI, 2006). Por último apresentou-se o estudo de sistemas lineares chaveados incertos. Para estes sistemas, existem duas variáveis de controle, isto é, a regra de comutação $\sigma(t)$ e a entrada $u(t) = K_{\sigma(t)}x(t)$. Foi apresentada uma maneira de obter as condições de estabilidade para estes sistemas, a saber, calculando os ganhos $K_i, i \in \mathbb{K}_N$, utilizando as desigualdades de Lyapunov-Metzler. Desta forma, buscou-se neste capítulo dar ao leitor uma visão geral sobre os principais trabalhos já desenvolvidos na área de sistemas chaveados e também auxiliar na compreensão das metodologias para o projeto de controle robusto de sistemas chaveados que serão apresentadas nos próximos capítulos.

3 SISTEMAS LYAPUNOV-METZLER-ERP

Neste capítulo, desejamos utilizar a potencialidade oferecida pela teoria de sistemas chaveados, apresentada no capítulo anterior, para resolver problemas de controle tendo como base as propriedades de estabilidade usuais dos sistemas Estritamente Reais Positivos (ERP). Primeiramente, apresentamos uma breve introdução sobre o assunto, com alguns conceitos sobre sistemas ERP. Em seguida são definidos os sistemas ERP com comutação, denominados sistemas Lyapunov-Metzler-ERP (CARDIM et al., 2008), e então aborda-se o problema que consiste em obter condições necessárias e suficientes (usando LMIs) para tornar um sistema realimentado, obtido pela comutação de sistemas lineares contínuos no tempo, Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP). A teoria é ilustrada através de exemplos numéricos e implementações práticas que consistem no projeto de uma regra de comutação e de ganhos de realimentação para o controle de um planta com chaveamento e incertezas politópicas no modelo. Os resultados aqui obtidos geraram um artigo apresentado e publicado nos anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2016) realizado em Vitória-ES.

3.1 INTRODUÇÃO

O conceito de Sistema Estritamente Real Positivos (ERP) apareceu na teoria de controle por Popov no início da década de 1960 com a noção de hiperestabilidade (ANDERSON, 1968). Basicamente um Sistema Linear Invariante no Tempo (SLIT) que é ERP tem as seguintes propriedades: é um sistema Real Positivo (RP), é assintoticamente estável e todos os zeros de transmissão apresentam parte real negativa. Estas propriedades dos sistemas ERP desempenham um papel crucial para garantir a estabilidade em sistemas com incertezas. Um problema relacionado a este método de projeto é chamado de síntese ERP e consiste no seguinte: dada uma planta linear invariante no tempo $\{A,B,C\}$, controlável e observável, então, devemos encontrar matrizes constantes F e K_o tal que o sistema controlado $\{A-BK_oC,B,FC\}$ seja ERP. Este problema é equivalente a um problema de estabilização com realimentação da saída.

As propriedades dos sistemas ERP tem sido aplicadas com resultados significativos por exemplo, no projeto de sistemas com controle adaptativo (OWENS; PRÄTZEL-WOLTERS; ILCHMANN, 1987; TEIXEIRA, 1989; HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994), Controle com Estrutura Variável(CEV) (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988; TEIXEIRA, 1990; TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000) e controle com realimentação das saídas de sistemas incertos (STEINBERG; CORLESS, 1985; CUNHA et al., 2003; XIANG; SU; CHU, 2005).

3.2 SISTEMAS ERP

Considere a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{51}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ a saída do sistema, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz característica do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a matriz de entrada do sistema e $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a matriz de saída do sistema .

Definição 6. *(ANDERSON, 1968) A matriz de transferência $G(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ do sistema (51) é Real Positiva (RP) se as seguintes condições forem satisfeitas:*

- *Os elementos de $G(s)$ não possuem polos com parte real positiva;*
- *$G^*(s) = G^T(s^*)$ e*
- *A matriz hermitiana $J(s) = G(s) + G^T(s^*)$ é semi-definida positiva em $Re(s) > 0$,*

sendo que o asterisco ($*$) denota o complexo conjugado de um escalar ou o complexo conjugado transposto de um vetor ou matriz.

Definição 7. *(ANDERSON, 1968) A matriz de transferência $G(s)$ é Estritamente Real Positiva (ERP) se $G(s-\varepsilon)$ for RP para algum $\varepsilon > 0$.*

Considerando, agora, a planta linear invariante no tempo, controlável e observável conforme (52) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{52}$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $y(t) \in \mathbb{R}^m$ e o vetor de entrada $u \in \mathbb{R}^m$ tal que, para todo T positivo, temos

$$\int_0^T u(t)^T y(t)dt < \delta[\|x(0)\|]sup\|x(t)\|, \;\; 0 \le t \le T. \tag{53}$$

Neste caso, δ é uma constante positiva, que depende do estado inicial do sistema $x(0)$ mas independe do tempo T. Os resultados a seguir foram formulados por V.M. Popov na década de 1960 (ANDERSON, 1968).

Definição 8. *(ANDERSON, 1968) O sistema (52) é dito hiperestável se, para qualquer $u(\cdot)$ limitado satisfazendo (53), a inequação*

$$\|x(t)\| \leq K(\|x(0)\| + \delta) \tag{54}$$

é satisfeita para alguma constante positiva K e para todo $t \geq 0$.

Definição 9. *(ANDERSON, 1968) O sistema (52) é dito assintoticamente hiperestável se, para qualquer $u(\cdot)$ limitado satisfazendo (53), a inequação (54) é satisfeita e, também,*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{55}$$

Seja $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ a matriz de transferência do sistema (52), então:

Teorema 12. *(ANDERSON, 1968) A condição necessária e suficiente para que o sistema (52) seja hiperestável é que G(s) seja RP.*

Teorema 13. *(ANDERSON, 1968) A condição necessária e suficiente para que o sistema (52) seja assintoticamente hiperestável é que G(s) seja ERP.*

O Lema 3.1, a seguir, fornece condições para os sistemas ERP

Lema 3.1. *(ANDERSON, 1968) A matriz de transferência do sistema (51), $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, é ERP se e somente se existir uma matriz $P = P^T$, tal que:*

$$\begin{aligned} &PA + A^T P < 0, \\ &B^T P = C, \\ &P > 0. \end{aligned} \tag{56}$$

3.3 SISTEMAS LYAPUNOV-METZLER-ERP (LMERP)

Baseado na estabilização pelo chaveamento usando as desigualdades de Lyapunov-Metzler, a definição de sistemas Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP) foi proposta em (CARDIM et al., 2008) para sistemas descritos pelas seguintes equações no espaço de estados

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t), \;\; x(0) = x_0, \\ &y(t) = C_{\sigma(t)}x(t), \end{aligned} \tag{57}$$

em que a cada instante de tempo a regra de comutação $\sigma(t) \in \mathbb{K}_N$ determina um elemento $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ do conjunto de matrizes $\{A_1, ..., A_N\}$, $\{B_1, ..., B_N\}$ e $\{C_1, ..., C_N\}$, respectivamente. Em que A_i, B_i, C_i são matrizes constantes com $\text{rank}(B_i) = m \;\; \forall i \in \mathbb{K}_N$.

Definição 10. *(CARDIM et al., 2008) O sistema linear chaveado (57) é um sistema Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP) se existirem matrizes $P_i = P_i^T$ e π_{ji}, $i, j = 1, 2, ..., N$, satisfazendo as seguintes condições:*

$$\begin{aligned} &P_i A_i + A_i^T P_i + \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji} P_j < 0, \;\; P_i > 0, \\ &B_i^T P_i = C_i, \;\; i, j \in \mathbb{K}_N, \end{aligned} \tag{58}$$

sendo que π_{ji}, $i, j \in \mathbb{K}_N$, são os elementos de uma matriz Metzler que obedecem as condições dadas em (22).

Sistemas Lineares Chaveados Incertos

Conforme foi mostrado no capítulo anterior, em muitos casos, alguns parâmetros da planta não são completamente conhecidos. Deste modo, considerando a definição de sistemas de LMERP, será abordado o problema de controle para o seguinte sistema linear chaveado com incertezas :

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(\alpha)x(t) + B_{\sigma(t)}(\alpha)u(t), \;\; x(0) = x_0, \\ &y(t) = C_{\sigma(t)}x(t), \end{aligned} \tag{59}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ a saída medida do sistema. As matrizes $A_{\sigma(t)}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_{\sigma(t)}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são dadas por :

$$\begin{aligned} A_{\sigma(t)}(\alpha) = A_\sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k A_{\sigma k}, \\ B_{\sigma(t)}(\alpha) = B_\sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k B_{\sigma k}, \end{aligned} \tag{60}$$

desta maneira, $A_{\sigma k}$, $B_{\sigma k}$ e C_σ são matrizes constantes tal que

$$\begin{aligned} A_{\sigma k} \in \{A_{1k}, A_{2k}, ..., A_{Nk}\}, \;\; B_{\sigma k} \in \{B_{1k}, B_{2k}, ..., B_{Nk}\}, \\ C_\sigma \in \{C_1, C_2 ..., C_N\}, \end{aligned} \tag{61}$$

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r]^T, \;\; \sum_{k=1}^{r} \alpha_k = 1, \quad \alpha_k \geq 0, \quad k \in \mathbb{K}_r. \tag{62}$$

Nas matrizes $A_{\sigma(t)}(\alpha)$, $B_{\sigma(t)}(\alpha)$, o vetor α, representa as incertezas politópicas (ou falhas estruturais) da planta e $\sigma(t)$ representa a estratégia de comutação o chaveamento, tal como descrito anteriormente.

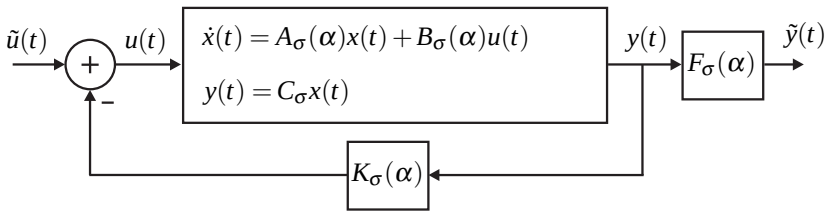
3.4 PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO LMERP

Baseado na estratégia de controle proposta para sistemas lineares chaveados usando a chamada síntese LMERP em (CARDIM et al., 2008), consideramos os Problemas 3.1, 3.2 propostos em (CARDIM et al., 2016) para descrever tal estratégia de controle, agora para sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas.

Problema 3.1. *Dado o sistema chaveado linear incerto (59)-(62), em que* $rank(B_\sigma(\alpha)) = m$ *para todo* α *definido em (62), então devemos encontrar condições necessárias e suficientes para a existência das matrizes* $F_{\sigma(t)}(\alpha) = F_\sigma(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ *e* $K_\sigma(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$*, sendo que* $K_\sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k K_{\sigma k}$ *e* $F_\sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k F_{\sigma k}$*, e* K_{ik}*,* F_{ik} *(com* $i \in \mathbb{K}_N$*,* $k \in \mathbb{K}_r$*) são matrizes constantes que tornam o sistema realimentado mostrado na Figura 11, com entrada* $\tilde{u}(t)$ *e saída* $\tilde{y}(t)$*, um sistema LMERP.*

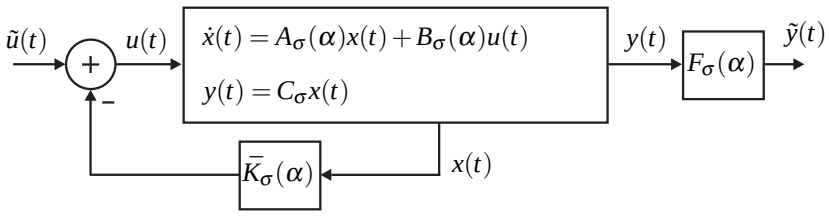
Problema 3.2. *Dado o sistema chaveado linear incerto (59)-(62), em que* $rank(B_\sigma(\alpha)) = m$ *para todo* α *definido em (62), então devemos encontrar condições necessárias e suficientes para a existência das matrizes* $F_{\sigma(t)}(\alpha) = F_\sigma(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ *e* $\bar{K}_\sigma(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$*, sendo que* $\bar{K}_\sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \bar{K}_{\sigma k}$ *e* $F_\sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k F_{\sigma k}$*, e* $\bar{K}_{ik}$*,* F_{ik} *(com* $i \in \mathbb{K}_N$*,* $k \in \mathbb{K}_r$*) são matrizes constantes que tornam o sistema realimentado mostrado na Figura 12, com entrada* $\tilde{u}(t)$ *e saída* $\tilde{y}(t)$*, um sistema LMERP.*

Figura 11 - Realimentação da saída de um sistema linear chaveado incerto para a síntese LMERP descrito no Problema 3.1



Fonte: Adaptado de (CARDIM et al., 2016)

Figura 12 - Realimentação do estado de um sistema linear chaveado incerto para a síntese LMERP descrito no Problema 3.2



Fonte: Adaptado de (CARDIM et al., 2016)

Um resultado importante respeito às soluções dos problemas 3.1 e 3.2 é apresentado no seguinte teorema.

Teorema 14. *(CARDIM et al., 2016) Existe solução para o Problema 3.1 se e somente se o problema 3.2 tem solução*

Demonstração. Para mais detalhes, veja (CARDIM et al., 2016). □

Segundo o Teorema 14, ao considerar que existe uma solução para o Problema 3.1. Então, existe $K_\sigma(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ e $F_\sigma(\alpha)$ tal que o sistema $\{A_\sigma(\alpha) - B_\sigma(\alpha)K_\sigma(\alpha)C_\sigma(\alpha),\ B_\sigma(\alpha),\ F_\sigma(\alpha)C_\sigma(\alpha)\}$ é um sistema LMERP. Portanto, definindo $\bar{K_\sigma}(\alpha) = K_\sigma(\alpha)C_\sigma \in \mathbb{R}^{m\times p}$, o sistema $\{A_\sigma(\alpha) - B_\sigma(\alpha)\bar{K_\sigma}(\alpha),\ B_\sigma(\alpha),\ F_\sigma(\alpha)C_\sigma(\alpha)\}$ é um sistema LMERP. Assim, $F_\sigma(\alpha)$ e $\bar{K_\sigma}(\alpha) = K_\sigma(\alpha)C_\sigma$ são uma solução para o Problema 3.2.

Assim, a síntese LMERP com realimentação estática da saída é equivalente ao caso de realimentação estática do estado, pelo que é mais fácil considerar primeiro a realimentação do estado para encontrar uma solução da síntese LMERP e depois, usando essa solução, para encontrar uma solução usando realimentação da saída.

Uma solução para o Problema 3.2 é proposto no próximo teorema que é uma extensão dos resultados apresentados para o tempo sistemas lineares invariantes no tempo (CARDIM et al., 2008, 2011), agora para sistemas lineares chaveados incertos . Além disso, vamos considerar um importante índice de desempenho, chamada taxa de decaimento. Em (BOYD et al., 1994), a taxa de decaimento é definida como o maior constante real γ, $\gamma > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} e^{\gamma t}\,\|x(t)\| = 0. \tag{63}$$

Lema 3.2. *(BOYD et al., 1994) O sistema controlado (59) tem uma taxa de decaimento pelo menos igual a γ, $\gamma > 0$ se para toda trajetória de $x(t)$, $t \geqslant 0$ existir $P_i = P_i^T > 0, i \in \mathbb{K}_N$ tal que $v(x(t)) = \min_{i\in\mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t)$ satisfaz a condição*

$$\dot{v}(x) \leq -2\gamma v(x). \tag{64}$$

Demonstração. ver (BOYD et al., 1994) para detalhes. □

Teorema 15. *(CARDIM et al., 2016) Considere-se que $p = n$ e $det(C_i) \neq 0$, para $i \in \mathbb{K}_N$. Então, o Problema 3.2 pode ser resolvido, com taxa de decaimento maior ou igual do que γ, se e somente se existirem matrizes $X_i = X_i^T, M_{iq}$ e escalares $\pi_{ji} \geq 0$ para $i \neq j$ e $\sum_{j=1}^{N} \pi_{ji} = 0$, $i, j \in \mathbb{K}_N$ $q \in \mathbb{K}_r$, tal que (65) é satisfeita :*

$$\begin{bmatrix} -(A_{ik}X_i + X_iA_{ik}^T - B_{ik}M_{iq} - M_{iq}^TB_{ik}^T + \pi_{ii}X_i + 2\gamma X_i) & X_i & & \cdots & & X_i \\ X_i & \frac{X_1}{\pi_{1i}} & 0 & \cdots & & 0 \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & & \frac{X_{i-1}}{\pi_{i-1,i}} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \frac{X_{i+1}}{\pi_{i+1,i}} & \\ & & & & & \ddots \quad 0 \\ X_i & 0 & & \cdots & & 0 \quad \frac{X_N}{\pi_{Ni}} \end{bmatrix} > 0, \tag{65}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $k, q \in \mathbb{K}_r$. Ademais, se (65) é factível, com uma solução dada por $X_i = P_i^{-1}, M_{ik}$ e π_{ji}, as seguintes Matrizes F_{ik} e K_{ik} são uma solução do Problema 3.2:

$$F_{ik} = B_{ik}^T P_i C_i^{-1}, \tag{66}$$

$$K_{ik} = M_{ik} P_i C_i^{-1}, \ i \in \mathbb{K}_N, \ k \in \mathbb{K}_r. \tag{67}$$

Demonstração. De (59) e da Figura 11, o sistema em malha fechada é dado por :

$$\dot{x}(t) = (A_\sigma(\alpha) - B_\sigma(\alpha)K_\sigma(\alpha)C_\sigma)x(t) + B_\sigma(\alpha)\tilde{u}(t), \tag{68}$$

$$y(t) = F_\sigma(\alpha)C_\sigma x(t). \tag{69}$$

Da Definição 10, as seguintes condições são necessárias e suficientes para a solução do problema 3.2:

$$P_i(A_{ik} - B_{ik}K_{iq}C_i) + (A_{ik} - B_{ik}K_{iq}C_i)^T P_i + \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji}P_j + 2\gamma P_i < 0, \tag{70}$$

$$P_i = P_i^T > 0, \tag{71}$$

$$B_{ik}^T P_i = F_{ik}C_i, \tag{72}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $k, \ q \in \mathbb{K}_r$, onde π_{ji} é dado em (22), $i, j \in \mathbb{K}_N$.

Multiplicando (70) pela esquerda e pela direita por P_i^{-1} e definindo $X_i = P_i^{-1} = X_i^T > 0$, obtemos :

$$A_{ik}X_i + X_iA_{ik}^T - B_{ik}K_{iq}C_iX_i - X_iC_i^TK_{iq}^TB_{ik}^T + \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji}X_iP_jX_i + 2\gamma X_i < 0. \tag{73}$$

De (73) e definindo $M_{iq} = K_{iq}C_iX_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ temos:

$$\begin{aligned} &A_{ik}X_i + X_iA_{ik}^T - B_{ik}M_{iq} - M_{iq}^TB_{ik}^T + \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji}X_iP_jX_i + 2\gamma X_i, \\ &= A_{ik}X_i + X_iA_{ik}^T - B_{ik}M_{iq} - M_{iq}^TB_{ik}^T + \pi_{ii}X_i + \sum_{j=1\ j\neq i}^{N} \pi_{ji}X_iP_jX_i + 2\gamma X_i, \end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned} &= A_{ik}X_i + X_iA_{ik}^T - B_{ik}M_{iq} - M_{iq}^TB_{ik}^T + \pi_{ii}X_i + [X_i \cdots X_i]diag(\pi_{1i}P_1, \pi_{2i}P_2, \cdots \\ &\pi_{i-1,i}P_{i-1}, \pi_{i+1,i}P_{i+1}, \cdots, \pi_{N-1,i}P_{N-1}, \pi_{N,i}P_N)[X_i \cdots X_i]^T + 2\gamma X_i < 0, \end{aligned} \tag{75}$$

onde $diag(\cdots) \in \mathbb{R}^{n(N-1)\times n(N-1)}$, $i \in \mathbb{K}_N$ é uma matriz diagonal.

Da equação (22), $\pi_{ji} \geq 0$, $i \neq j$ e $i, j \in \mathbb{K}_N$. Depois supondo que $\pi_{ji} > 0$, $i \neq j$ and $i, j \in \mathbb{K}_N$. Supondo também que (75) é mantida para algum $\pi_{ji} = 0$, $i \neq j$. Então, note que (75) também é mantida se substituirmos $\pi_{ji} = 0$ por um suficientemente pequeno $\pi_{ji} > 0$. Portanto, a suposição de $\pi_{ji} > 0$, para $i \neq j$ e $i, j \in \mathbb{K}_N$, não muda as condições para a solução do problema. Então, considerando $\pi_{ji} > 0$, $i \neq j$ e aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em (75), onde $X_i = P_i^{-1}$, a equação (65) e uma condição equivalente as equações (70) e (72) e, como foi descrito antes, as equações (70), (73) e (75) são equivalentes e $X_i = P_i^{-1} = X_i^T > 0$. Finalmente, (72) e (67) são equivalentes e (67) segue da condição $M_{iq} = K_{iq}C_iX_i$. □

O Teorema 15 resolve o Problema 3.2 e é um generalização do método proposto em (CARDIM et al., 2011) para sistemas lineares invariantes no tempo . Assim, este resultado pode ser útil na concepção de controladores chaveados usando realimentação estática do estado para plantas com incertezas, baseando-se na síntese LMERP. Outro índice de desempenho que pode ser adicionado no método de síntese LMERP, que permite a especificação de um limite superior da norma dos ganhos do controlador é apresentado através do seguinte lema.

Lema 3.3. *(ŠILJAK; STIPANOVIC, 2000) A norma dos ganhos do controlador, tal que $K_{ik}K_{ik}^T \leq \eta\eta_x^2$ é garantido se existirem constantes $\eta > 0$ and $\eta_x > 0$ tal que as LMIs do Teorema 15 junto com (76), são satisfeitas.*

$$\begin{bmatrix} \eta_x I_n & I_n \\ I_n & X_i \end{bmatrix} \geqslant 0, \ \begin{bmatrix} \eta I_n & M_{ik}^T \\ M_{ik} & I_m \end{bmatrix} \geqslant 0, \ i \in \mathbb{K}_N, k \in \mathbb{K}_r. \tag{76}$$

Demonstração. Veja (ŠILJAK; STIPANOVIC, 2000). □

3.4.1 Aplicação usando dois estágios de chaveamento

Nesta seção um método de projeto de controladores chaveados para o sistema de comutação (59)-(62) é apresentado. Para encontrar os ganhos de realimentação, a lei de controle utiliza duas etapas. A primeira etapa é baseada nos procedimentos citados anteriormente e escolhe um índice

$$\sigma(x(t)) = arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t), \tag{77}$$

sendo $P_i = P_i^T > 0$ e a função de Lyapunov é definida como: $v(x) = x(t)^T P_\sigma x(t)$. A ideia da segunda etapa é a minimização da derivada temporal da função de Lyapunov, através da seleção dos ganhos do controlador, que pertencem ao conjunto $\{K_{\sigma k}, k \in \mathbb{K}_r\}$ onde σ foi obtido na primeira etapa. Esta etapa usa matrizes simétricas auxiliares $Q_{ik}, i \in \mathbb{K}_N,\ k \in \mathbb{K}_r$ e seleciona um índice

$$v(x(t)) = arg \min_{q \in \mathbb{K}_r} x(t)^T Q_{\sigma q} x(t), \tag{78}$$

desta maneira, considerando os índices $\sigma(x(t))$ (77) e $v(x(t))$ (78), o controlador chaveado e definido como:

$$u(t) = u_{\sigma v}(t) = -K_{\sigma v} x(t). \tag{79}$$

De (59)-(62), o sistema controlado é dado por:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A_\sigma(\alpha)x(t) + B_\sigma(\alpha)u_{\sigma v}(t), \\ &x(0) = x_0. \end{aligned} \tag{80}$$

O método proposto neste trabalho, apresentado no seguinte teorema, baseou-se em (CARDIM et al., 2016). Certamente, o teorema foi adaptado para satisfazer mais LMIs do que o Teorema 5 apresentado em (CARDIM et al., 2016) para evitar modos instáveis mostrados na implementação prática, devido ao atraso da ação do sistema de controle em tempo real.

Teorema 16. *Considerando o sistema descrito (80). Se existirem $X_i = X_i^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $\bar{Z}_{ik} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\bar{Q}_{iq} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $M_{jq} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e escalares $\pi_{ji} > 0$ para $i \neq j$ e $\sum_{j=1}^{N} \pi_{ji} = 0$, tais que*

$$-B_{ik}M_{jq} - M_{jq}^T B_{ik}^T - \bar{Z}_{ik} - \bar{Q}_{iq} \leq 0, \tag{81}$$

$$A_{ik}X_i + X_i A_{ik}^T + \bar{Z}_{ik} + \bar{Q}_{ik} + \sum_{l=1}^{N} \pi_{li} X_i P_l X_i + 2\gamma X_i < 0, \tag{82}$$

são satisfeitas para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_N$, $k,\ q \in \mathbb{K}_r$. Então o controlador (79) com a lei de chaveamento definida por (77) e (78), $Q_{iq} = X_i^{-1}\bar{Q}_{iq}X_i^{-1}$, $K_{ij} = M_{ij}P_i C_i^{-1}$ e $P_i = X_i^{-1}$ para $i \in \mathbb{K}_N$ e $q \in \mathbb{K}_r$ torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (80) globalmente assintoticamente estável. Ademais, a taxa de decaimento é igual ou maior a γ.

Demonstração. Considerando que existem matrizes $Z_{ik} = Z_{ik}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Q_{iq} = Q_{iq}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que

$$-P_iB_{ik}K_{jq}C_i - C_i^TK_{jq}^TB_{ik}^TP_i \leq Z_{ik} + Q_{iq}. \tag{83}$$

As seguintes condições são suficientes para a solução do Problema 3.2, com especificação de taxa de decaimento:

$$P_i(A_{ik} - B_{ik}K_{jq}C_i) + (A_{ik} - B_{ik}K_{jq}C_i)^TP_i + \sum_{l=1}^{N}\pi_{li}P_i + 2\gamma P_i < 0, \tag{84}$$

$$P_i = P_i^T > 0, \tag{85}$$

$$B_{ik}^TP_i = F_{ik}C_i, \tag{86}$$

para $i,j,l \in \mathbb{K}_N$, $k,q \in \mathbb{K}_r$, onde $\pi_{ji} > 0$ para $i \neq j$ e $\sum_{j=1}^{N}\pi_{ji} = 0$. Portanto, segue que:

$$\begin{aligned} D^+(v(x)) &\leqslant \sum_{k=1}^{N}\alpha_k x^T(P_iA_{ik} + A_{ik}^TP_i - P_iB_{ik}K_{jq}C_i - C_i^TK_{jq}^TB_{ik}^TP_i)x + x^T\sum_{l=1}^{N}\pi_{li}P_lx + x^T2\gamma P_ix, \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N}\alpha_k x^T(P_iA_{ik} + A_{ik}^TP_i + Z_{ik} + Q_{iq})x + x^T\sum_{l=1}^{N}\pi_{li}P_lx + x^T2\gamma P_ix. \end{aligned} \tag{87}$$

Considerando que $x^TQ_{\sigma v}x \leq \sum_{k=1}^{N}\alpha_k x^TQ_{\sigma k}x$, temos,

$$\begin{aligned} D^+(v(x)) &\leqslant \sum_{k=1}^{N}\alpha_k x^T(P_iA_{ik} + A_{ik}^TP_i + Z_{ik})x + x^T\sum_{l=1}^{N}\pi_{li}P_lx + \min_{q\in\mathbb{K}_r} x^TQ_{\sigma q}x + x^T2\gamma P_ix, \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N}\alpha_k x^T(P_iA_{ik} + A_{ik}^TP_i + Z_{ik} + Q_{ik})x + x^T\sum_{l=1}^{N}\pi_{li}P_lx + x^T2\gamma P_ix < 0. \end{aligned} \tag{88}$$

Portanto, de (88), $D^+(v(x)) < 0$ é mantida se a seguinte condição e satisfeita:

$$P_iA_{ik} + A_{ik}^TP_i + Z_{ik} + Q_{ik} + \sum_{l=1}^{N}\pi_{li}P_l + 2\gamma P_i < 0, \tag{89}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $k,q \in \mathbb{K}_r$. Pre–multiplicando e pós–multiplicando (83) e (89) por $X_i = P_i^{-1}$ e definindo $\bar{Q}_{ik} = X_iQ_{ik}X_i$ e $\bar{Z}_{ik} = X_iZ_{ik}X_i$ obtemos (81) e (82). De (88) e (89) $x = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente e assintoticamente estável do sistema controlado. Do Lema 3.2 e de (89) a taxa de decaimento e maior ou igual a γ. A prova está concluída. □

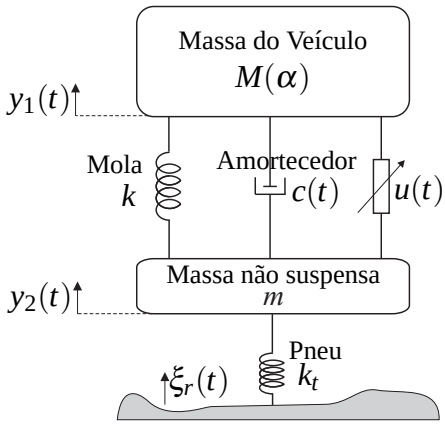
Notar que, aplicando o Complemento de Schur in (82), e seguindo o procedimento usado nas equações (37)-(39) em (CARDIM et al., 2016), temos:

$$\begin{bmatrix} -(A_{ik}X_i + X_iA_{ik}^T + \bar{Z}_{ik} + \bar{Q}_{ik} + \pi_{ii}X_i + 2\gamma X_i.) & X_i & & \cdots & & X_i \\ X_i & \frac{X_1}{\pi_{1i}} & 0 & \cdots & & 0 \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & & \frac{X_{i-1}}{\pi_{i-1,i}} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \frac{X_{i+1}}{\pi_{i+1,i}} & \\ & & & & \ddots & 0 \\ X_i & 0 & \cdots & & 0 & \frac{X_N}{\pi_{Ni}} \end{bmatrix} > 0. \tag{90}$$

Este procedimento será usado no projeto do sistema de controle de uma planta de suspensão ativa com a estrategia de chaveamento dada em (77)-(78) e as condições dadas no Teorema 16 .

Exemplo 3.1. O problema consiste em projetar uma estratégia de controle com comutação para sistemas de suspensão ativa em veículos rodoviários, e foi motivada pelos resultados apresentados em (GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2008). O sistema é mostrada na Figura 13.

Figura 13 - Modelo Esquemático do Sistema de Suspensão Ativa.



Fonte: (CARDIM et al., 2016)

Onde $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $\xi_r(t)$ são a posição vertical do corpo, a massa não suspensa e o perfil da estrada, respectivamente. Os coeficientes M e m são a massa da quarta parte do carro com passageiros (que é incerta) e a massa não suspensa (pneu, roda, freio, etc.), respectivamente. Além disso, é considerado uma estratégia de chaveamento no modelo, tal que $c(t)$ pode assumir apenas dois valores, ou seja, $c_{\min}$ e $c_{\max}$ (GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2008). Neste exemplo, consideramos δy_1 e δy_2 como as variações de y_1 e y_2 em torno do ponto de equilíbrio associado com um perfil de estrada zero atuando no sistema.

O modelo no espaço de estados é o seguinte :

$$\dot{x}(t) = A_\sigma(\alpha)x(t) + B_\sigma(\alpha)u(t) + B_r\xi_r(t), \quad (91)$$

$$y(t) = C_\sigma x(t), \quad (92)$$

$$z(t) = E_\sigma x(t), \quad (93)$$

sendo $x(t) = [\delta y_1(t)\ \dot{\delta y_1}(t)\ \delta y_2(t)\ \dot{\delta y_2}(t)]^T$ e $\xi_r(t)$ o perfil da estrada.

$$A_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k}{M(\alpha)} & \frac{-c_{\min}}{M(\alpha)} & \frac{k}{M(\alpha)} & \frac{c_{\min}}{M(\alpha)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{c_{\min}}{m} & \frac{-(k+k_t)}{m} & \frac{-c_{\min}}{m} \end{bmatrix}, \quad A_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k}{M(\alpha)} & \frac{-c_{\max}}{M(\alpha)} & \frac{k}{M(\alpha)} & \frac{c_{\max}}{M(\alpha)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{c_{\max}}{m} & \frac{-(k+k_t)}{m} & \frac{-c_{\max}}{m} \end{bmatrix}, \quad (94)$$

$$B_1(\alpha) = B_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M(\alpha)} & 0 & \frac{-1}{m} \end{bmatrix}^T, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k_t}{m} \end{bmatrix}^T, \quad (95)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{-k}{M(\alpha)} & \frac{-c_{\min}}{M(\alpha)} & \frac{k}{M(\alpha)} & \frac{c_{\min}}{M(\alpha)} \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} \frac{-k}{M(\alpha)} & \frac{-c_{\max}}{M(\alpha)} & \frac{k}{M(\alpha)} & \frac{c_{\max}}{M(\alpha)} \end{bmatrix}. \quad (96)$$

Neste exemplo, em primeiro lugar, assumimos que todas as variáveis de estado são mensuráveis ($C_1 = C_2 = I_{4\times4}$) e $z(t)$ definido em (93) é a aceleração $\delta\ddot{y}_1(t)$.

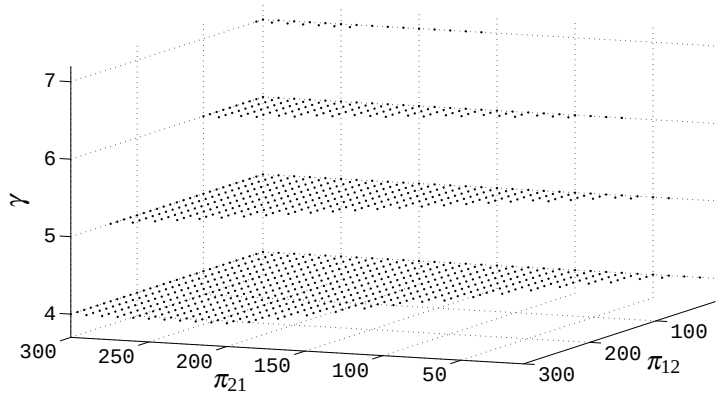
O procedimento usado para a resolução deste problema de controle é baseada na estratégia de chaveamento dada em (77)-(78) e as condições dadas no Teorema 16.

No projeto de controle, os seguintes parâmetros foram adotados: $M = 400kg$ com uma incerteza limitada de $\pm 50kg$, $m = 50kg$, $k = 2,0 \times 10^4$N/m, $k_t = 2,5 \times 10^5$N/m, $c_{\min} = 3,0 \times 10^2$(N.s)/m, e $c_{\max} = 3,9 \times 10^3$(N.s)/m. Para esses parâmetros, as dois matrizes A_1 e A_2 são estáveis (embora com insuficiente amortecimento) (GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2008).

A Figura 14 mostra a região de factibilidade, com restrições impostas na taxa de decaimento e norma do controlador.

Para os valores dos parâmetros mencionados acima, considerando as condições dadas no Teorema 16, com $\eta\eta_x^2 = (1 \times 10^4)500^2$ e com a maximização de $trace(X_1 + X_2)$ foram escolhidos (baseado nos resultados presentados na Figura 14), $\pi_{21} = 200$, $\pi_{12} = 5$, e $\gamma = 4$. O método proposto fornece as seguintes matrizes para o projeto de controle:

Figura 14 - Região de Factibilidade com $\eta\eta_x^2 = 25\times10^8$.



Fonte : O próprio autor.

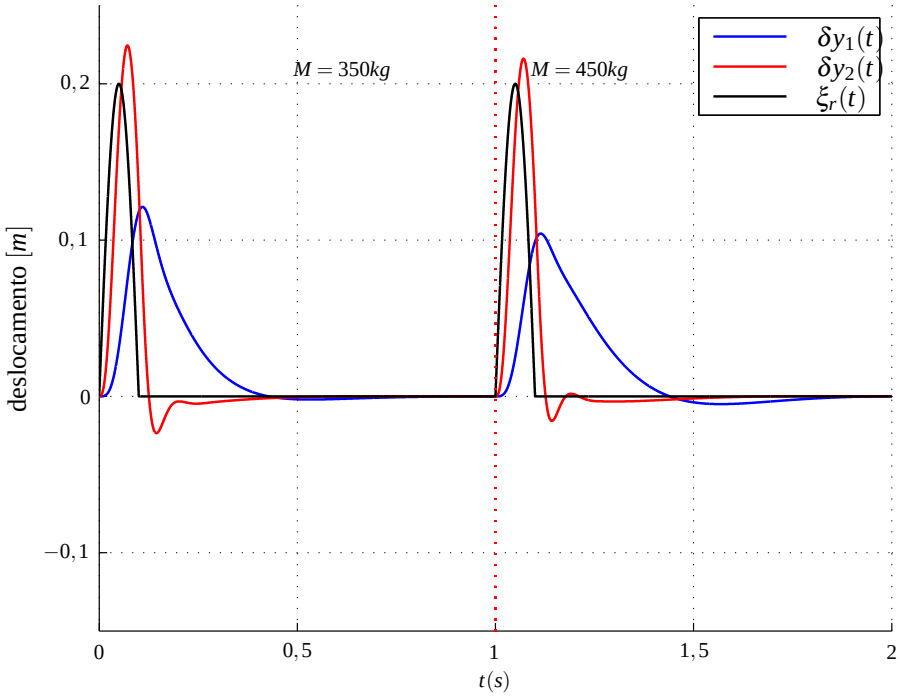
$$P_1 = \begin{bmatrix} 131,6319 & 12,5331 & -103,0249 & -0,0012 \\ 12,5331 & 2,2618 & -19,5985 & -0,0284 \\ -103,0249 & -19,5985 & 271,2452 & 0,9697 \\ -0,0012 & -0,0284 & 0,9697 & 0,0306 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 129,2672 & 12,1878 & -101,8369 & 0,2030 \\ 12,1878 & 2,1593 & -19,1244 & 0,0167 \\ -101,8369 & -19,1244 & 249,3262 & 0,3407 \\ 0,2030 & 0,0167 & 0,3407 & 0,0186 \end{bmatrix},$$

$$K_{11} = 1\times10^4 \begin{bmatrix} 1,2982 & 0,2081 & -2,6515 & -0,0083 \end{bmatrix},$$
$$K_{12} = 1\times10^4 \begin{bmatrix} 1,4676 & 0,2250 & -2,7963 & -0,0084 \end{bmatrix},$$
$$K_{21} = 1\times10^4 \begin{bmatrix} 1,2804 & 0,2029 & -2,4604 & -0,0023 \end{bmatrix},$$
$$K_{22} = 1\times10^4 \begin{bmatrix} 1,4468 & 0,2193 & -2,6024 & -0,0020 \end{bmatrix}.$$

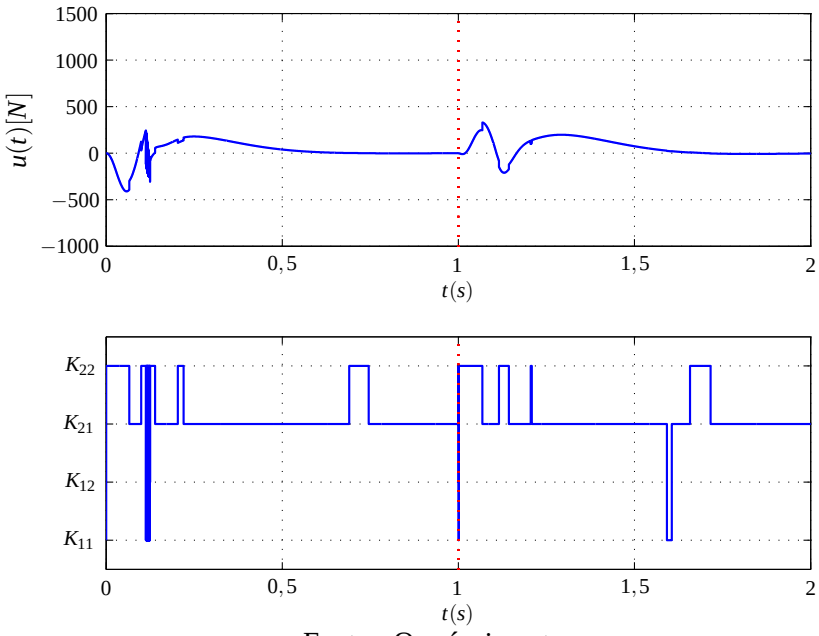
As Figuras 15 e 16 mostram os resultados da simulação considerando como sinal de excitação (no perfil da pista $\xi_r(t)$) um pulso com pico de $0,2$m no intervalo de $0,1$ segundos (mostrado na Figura 15) em dois casos: $M = 350kg$ ($0 \leq t < 1$ s) e $M = 450kg$ ($t \geq 1$ s). Notar que, como é mostrado na Figura 15, o sistema controlado apresenta um desempenho adequado e significativamente melhorado com relação à posição $\delta y_1(t)$.

Figura 15 - Trajetória das variáveis de estado $\delta y_1(t), \delta y_2(t)$ do sistema controlado. Considerando $M = 350kg$ ($0 \leq t < 1$ s) e $M = 450kg$ ($t \geq 1$ s).



Fonte : O próprio autor.

Figura 16 - Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$.



Fonte : O próprio autor.

3.5 COMENTÁRIOS

Neste capítulo, tratamos da síntese de controle LMERP de sistemas lineares com comutação via realimentação de estado proposta em (CARDIM et al., 2008, 2016). O método é baseado no projeto simultâneo de uma regra de comutação e ganhos de realimentação, tal que o sistema realimentado ilustrado na Figura 10, com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ seja um sistema Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP). Mais especificamente, o objetivo foi desenvolver uma abordagem para plantas que apresentam comutação e incertezas no modelo. Assim a análise de estabilidade com índices de desempenho (taxa de decaimento e norma do controlador) para uma classe de sistemas lineares comutados incertos foi apresentada na Subseção 3.3.1, na qual os controladores de comutação estabilizadores $K_{\sigma v}$ são projetados para atender duas estrategias de comutação. No exemplo de aplicação, mostrou-se que o método proposto pode ser utilizado na concepção de uma estratégia de controle chaveado robusto para sistemas de suspensão ativa em veículos rodoviários, sendo obtidos resultados com desempenho superior, comparado com métodos recentes de controle com modos deslizantes para sistemas chaveados (CARDIM et al., 2016). Os métodos propostos neste capítulo, geraram um artigo publicado no XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2016).

4 PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO $\mathscr{H}_\infty$ CHAVEADO

Neste capítulo, trata-se o problema de projeto de controle $\mathscr{H}_\infty$ chaveado para sistemas contínuos no tempo. Mais especificamente, o objetivo principal nesta abordagem é a síntese simultânea de uma lei de chaveamento $\sigma(t)$ e um controlador que garanta estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada impondo um limitante superior para o ganho $\mathscr{L}_2$ entre a entrada exógena e a saída controlada. A técnica abordada para este estudo utiliza uma função quadrática de Lyapunov por partes. Assim, é apresentada uma estratégia de chaveamento do ganho de realimentação do vetor de estado, que assegura também o critério desempenho $\mathscr{H}_\infty$. Foi demonstrado que esta nova modelagem oferece, em geral, um desempenho adequado em sistemas lineares chaveados incertos.

4.1 CUSTO FUNCIONAL $\mathscr{H}_\infty$

Considerando um sistema linear variante no tempo descrito pelas equações no espaço de estado :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A_{\sigma(t)}x(t)+H_{\sigma(t)}w(t),\ \ x(0)=0, \\ z(t) & = & E_{\sigma(t)}x(t)+G_{\sigma(t)}w(t), \end{array} \tag{97}$$

sendo $x(t)\in\mathbb{R}^n$ o vetor de estado, suposto disponível para realimentação, $w(t)\in\mathbb{R}^m$ é a entrada exógena, $z(t)\in\mathbb{R}^p$ é a saída controlada e $\sigma(t):t\geq 0\rightarrow\mathbb{K}_N$ é a função de comutação.

Nosso objetivo é definir um índice de desempenho que como a norma $\mathscr{H}_\infty$ estabeleça um limitante para a influência da perturbação de pior caso w na saída z do sistema. Neste caso, vamos considerar (97) excitado por entradas exógenas $w(t)$ com normas finitas, ou seja, $w(t)\in\mathscr{L}_2$. O vetor de saída $z(t)$ obtido como a resposta a estas entradas permite-nos definir o custo funcional $\mathscr{H}_\infty$

$$J_\infty(\sigma)=\sup_{w\in\mathscr{L}_2}\frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}. \tag{98}$$

Vale ressaltar que quando a regra de comutação é fixa $\sigma(t)=i\in\mathbb{K}_N$ para todo $t\geq 0$, o índice (98) se iguala ao quadrado da norma $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência do subsistema $\mathscr{G}_i(s)=E_i(sI-A_i)^{-1}H_i+G_i,\ \ i\in\mathbb{K}_N$ da entrada w para a saída z. Entretanto, quando a lei de chaveamento $\sigma(t)$ é variante no tempo o custo (98) torna-se bastante difícil de calcular e, por este motivo, a ideia consiste em determinar um limitante superior do mesmo, ou seja,

$$\sup_{w\in\mathscr{L}_2}\frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}<\rho, \tag{99}$$

e certificar o desempenho do sistema através da minimização deste limitante. Para o caso em que a função de Lyapunov é quadrática $v(x) = x(t)^T P x(t)$, temos que, dado $\rho > 0$, se existir $P = P^T > 0$ satisfazendo as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + E_i^T E_i & * \\ H_i^T P + G_i^T E_i & -\rho I + G_i^T G_i \end{bmatrix} < 0, \;\; i \in \mathbb{K}_N, \tag{100}$$

então a desigualdade (99) é valida para qualquer $\sigma(t)$ (chaveamento arbitrário). Considerando a função de Lyapunov $v(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, $P > 0$ e que para algum $t \geq 0$ a regra de comutação é dada por $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}_N$, a derivada relativa a uma trajetória qualquer do sistema (97) satisfaz

$$\begin{array}{rcl} \dot{v}(x(t)) & = & (A_i x(t) + H_i w(t))^T P x(t) + x(t)^T P (A_i x(t) + H_i w(t)), \\ & < & -z(t)^T z(t) + \rho w(t)^T w(t), \end{array} \tag{101}$$

sendo a ultima desigualdade obtida multiplicando à esquerda de (100) pelo vetor $[x(t)^T \;\; w(t)^T]$ e à direita pelo seu transposto e, posteriormente, rearranjando os termos. Logo, integrando ambos os lados de (101) de $t = 0$ a $t \to \infty$, temos

$$\begin{array}{rcl} \int_0^\infty (z(t)^T z(t) - \rho w(t)^T w(t)) dt & < & -\int_0^\infty \dot{v}(x(t)) dt, \\ & < & v(x(0)) - v(x(\infty)), \\ & < & 0, \end{array} \tag{102}$$

pois devido à estabilidade assintótica do sistema e à condição inicial $x(0) = 0$ verificamos que $v(x(\infty)) = v(x(0)) = 0$. Portanto, $\|z\|^2 - \rho \|w\|^2 < 0$ para qualquer $w \in \mathscr{L}_2$ e, consequentemente, a desigualdade (99) vale.

Podemos obter o menor limitante superior de $J_\infty(\sigma)$ satisfazendo (100) através da minimização do escalar ρ. Para a obtenção de um valor de custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ menor do que o quadrático, recorremos as condições resultantes da função de Lyapunov

$$v(x(t)) = \min_{i \in K_N} x(t)^T P_i x(t) = \min_{\lambda \in \Lambda} (\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x(t)^T P_i x(t)) \tag{103}$$

e da regra de chaveamento

$$\sigma(x(t)) = arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t). \tag{104}$$

4.1.1 Desigualdades de Riccati-Metzler

Considerando $\sigma(\cdot)$ como sinal de controle, a obtenção de um custo garantido (99) baseada na função de Lyapunov (103) e na regra (104) é dada pelo seguinte Teorema.

Teorema 17. *(DEAECTO; GEROMEL, 2010) Para $\rho > 0$ dado, a regra de comutação (104) é globalmente estabilizante e o sistema linear (97) satisfaz a restrição (99) se existirem matrizes*

$P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e uma matriz Metzler $\Pi \in \mathscr{M}$ satisfazendo as desigualdades de Riccati-Metzler

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j & * & * \\ H_i^T P_i & -\rho I & * \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, \;\; i \in \mathbb{K}_N. \tag{105}$$

Demonstração. A prova é uma consequência imediata das desigualdades de Lyapunov-Metzler da estabilidade global do ponto de equilíbrio $x = 0$ e da função de Lyapunov (103). Aplicando o complemento de Schur e rearranjando os termos, temos

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & * \\ H_i^T P_i & 0 \end{bmatrix} < - \begin{bmatrix} E_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i & G_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j & * \\ 0 & -\rho I \end{bmatrix}, \tag{106}$$

multiplicando à esquerda de (106) pelo vetor $[x(t)^T \;\; w(t)^T]$ e à direita pelo seu transposto, temos

$$\begin{aligned} D^+ v(x(t)) &= \min_{l \in I(x(t))} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T P_l + P_l A_i & * \\ H_i^T P_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \\ &\leq \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & * \\ H_i^T P_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \\ &\leq -z(t)^T z(t) + \rho w(t)^T w(t) - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} x(t)^T P_j x(t), \\ &\leq -z(t)^T z(t) + \rho w(t)^T w(t), \end{aligned} \tag{107}$$

sendo que a segunda desigualdade decorre diretamente de (106) e a última vem do fato de que $x(t)^T P_i x(t) \leq x(t)^T P_j x(t)$ como uma consequência de $i \in I(x(t))$, $j \in \mathbb{K}_N$ e $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} x(t)^T P_j x(t) \geq 0$.

Logo, integrando ambos os lados de (107) de $t = 0$ a $t \to \infty$, como $v(x(\infty)) = v(x(0)) = 0$, pois o sistema é assintoticamente estável e a condição inicial é dada por $x(0) = 0$, a desigualdade (99) é satisfeita para todo $w \in \mathscr{L}_2$, inclusive para aquele de pior caso. □

O corolário a seguir apresenta condições alternativas mais simples baseadas em matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal. Para esta subclasse, obtêm-se desigualdades matriciais alternativas dependentes somente dos elementos da diagonal principal π_{ii}, sendo o escalar μ dado por $\mu = -\pi_{ii} > 0$, onde a solução pode ser obtida usando busca unidimensional em relação a μ e por qualquer rotina disponível na literatura para a solução de LMIs.

Corolário 2. *(DEAECTO; GEROMEL, 2010) Para $\rho > 0$ dado, as condições do Teorema 17 continuam válidas se existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e um escalar $\mu > 0$ satisfazendo as desigualdades modificadas de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + \mu(P_j - P_i) & * & * \\ H_i^T P_i & -\rho I & * \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, \; i \neq j \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N. \tag{108}$$

Demonstração. Inicialmente, consideramos $\mu = -\pi_{ii} > 0$ e como $\Pi \in \mathscr{M}$, então $\mu^{-1} 1 \sum_{j\neq i=1}^{N} \pi_{ji} = 1$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$. Multiplicando (108) por π_{ji}, somando para todo $j \neq i \in \mathbb{K}_N$ e, finalmente, multiplicando o resultado por μ^{-1}, obtemos (105), pois

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji} P_j & = & \sum_{j\neq i=1}^{N} \pi_{ji} P_j - \mu P_i, \\ & = & \mu^{-1} \sum_{j\neq i=1}^{N} \pi_{ji} \mu (P_j - P_i), \end{array} \tag{109}$$

provando o corolário. □

4.2 PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO $\mathscr{H}_\infty$ CHAVEADO

Considere a seguinte subclasse de sistemas lineares chaveados incertos

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(\alpha)x(t) + B_{\sigma(t)}(\alpha)u(t) + H_{\sigma(t)}(\alpha)w(t), \;\; x(0) = 0, \\ z(t) = E_{\sigma(t)}(\alpha)x(t) + F_{\sigma(t)}(\alpha)u(t) + G_{\sigma(t)}(\alpha)w(t), \end{array} \tag{110}$$

para algum $\sigma \in \mathbb{K}_N$, $\alpha \in \Lambda$ e $(A,B,H,E,F)_\sigma(\alpha) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (A,B,H,E,F)_{j\sigma}$.

O objetivo é determinar uma lei de chaveamento e um conjunto de ganhos de realimentação de estado $\{K_1,...,K_N\}$ de forma a minimizar um limitante superior do custo (99). Conectando a entrada de controle $u(t) = K_{\sigma(t)}x(t)$ em (110) obtemos, o sistema em malha fechada descrito pelas equações

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = (A_{\sigma(t)}(\alpha) + B_{\sigma(t)}(\alpha)K_{\sigma(t)})x(t) + H_{\sigma(t)}(\alpha)w(t), \;\; x(0) = 0, \\ z(t) = (E_{\sigma(t)}(\alpha) + F_{\sigma(t)}(\alpha)K_{\sigma(t)})x(t) + G_{\sigma(t)}(\alpha)w(t). \end{array} \tag{111}$$

O seguinte teorema é uma generalização da subseção anterior para o projeto de controle robusto chaveado de forma a minimizar o custo (99).

Teorema 18. *Para $\rho > 0$ dado, se existirem matrizes simétricas X_i, matrizes M_i para $i \in \mathbb{K}_N$ e $\mu > 0$ satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} He\{A_{ji}X_i + B_{ji}M_i\} - \mu X_i & * & * & * \\ H_{ji}^T & -\rho I & * & * \\ E_{ji}X_i + F_{ji}M_i & G_{ji} & -I & * \\ \mu X_i & 0 & 0 & -\mu X_j \end{bmatrix} < 0, \quad i,j \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N, \tag{112}$$

então a regra de comutação

$$\sigma(x(t)) = arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} x(t)^T X_i^{-1} x(t) \tag{113}$$

e os ganhos de realimentação de estado $K_i = M_i X_i^{-1}$ i para todo $i \in \mathbb{K}_N$ fazem com que a origem x = 0 do sistema (110) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável satisfazendo a desigualdade (99).

Demonstração. Considere $P_i = X_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$. Aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (112) e multiplicando o resultado de ambos os lados por $diag\{X_i^{-1}, I, I\}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} He\left\{A_{ji}X_i + B_{ji}M_i\right\} + \mu X_i X_j^{-1} X_i - \mu X_i & * & * \\ H_{ji}^T & -\rho I & * \\ E_{ji}X_i + F_{ji}M_i & G_{ji} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0, \tag{114}$$

$$\begin{bmatrix} He\left\{P_i(A_{ji} + B_{ji}K_i)\right\} + \mu(P_j - P_i) & * & * \\ H_{ji}^T P_i & -\rho I & * \\ E_{ji} + F_{ji}K_i & G_{ji} & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{115}$$

multiplicando (115) por α_j, somando para todo $j = 1, 2, ..., N$ e levando em consideração o resultado (37) apresentado no Capítulo 2, obtemos

$$\begin{bmatrix} He\{P_i(A_i(\alpha) + B_i(\alpha)K_i)\} + \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\alpha)P_j & * & * \\ H_i^T(\alpha)P_i & -\rho I & * \\ E_i(\alpha) + F_i(\alpha)K_i & G_i(\alpha) & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{116}$$

realizando as seguintes associações $A_i(\alpha) + B_i(\alpha)K_i \to A_i$, $E_i(\alpha) + F_i(\alpha)K_i \to E_i$, $H_i(\alpha) \to H_i$, $G_i(\alpha) \to G_i$ e $\pi_{ji}(\alpha) \to \pi_{ji}$, obtemos (105). □

4.2.1 Aplicação usando dois estágios de chaveamento

Considere a subclasse de sistemas lineares incertos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}(\alpha)x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + H_{\sigma(t)}(\alpha)w(t),\ x(0) = 0, \\ z(t) &= E_{\sigma(t)}(\alpha)x(t) + F_{\sigma(t)}u(t) + G_{\sigma(t)}(\alpha)w(t). \end{aligned} \tag{117}$$

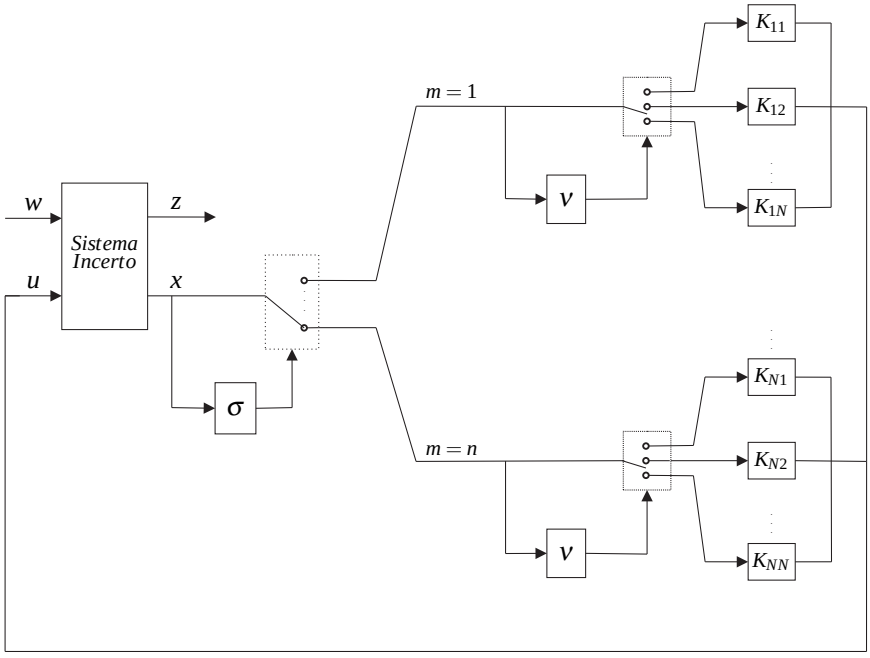
Nesta subseção, é proposto o projeto de um controlador chaveado para sistemas com incertezas politópicas (117). Para a determinação dos ganhos de realimentação, o controlador proposto utiliza dois estágios de comutação. O primeiro estágio, baseado em (GEROMEL; COLANERI, 2006), seleciona um índice $\sigma(x(t)) = arg\min_{i\in\mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t)$, sendo P_i, $i \in \mathbb{K}_N$, matrizes simétricas positivas definidas. O segundo estágio, baseado em baseado em (SOUZA, 2013), seleciona um índice $v(x(t)) = arg\min_{j\in\mathbb{K}_N} x(t)^T P_\sigma B_\sigma K_{\sigma j} x(t)$. A ideia deste segundo estágio é a minimização da derivada temporal da função de Lyapunov. Este esquema é ilustrado pela Figura (17). Deste modo, o sinal de controle chaveado é dado por

$$u(t) = u_{\sigma v}(t) = K_{\sigma v}x(t), \tag{118}$$

sendo

$$\sigma(x(t)) = arg\min_{i\in\mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t), \quad v(x(t)) = arg\min_{j\in\mathbb{K}_N} x(t)^T P_\sigma B_\sigma K_{\sigma j} x(t). \tag{119}$$

Figura 17 - Esquema de controle com dois estágios



Fonte : O próprio autor

Substituindo (118) em (117), é obtido o sistema em malha fechada dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_\sigma(\alpha) + B_\sigma K_{\sigma v})x(t) + H_\sigma(\alpha)w(t),\ x(0) = 0, \\ z(t) &= (E_\sigma(\alpha) + F_\sigma K_{\sigma v})x(t) + G_\sigma(\alpha)w(t). \end{aligned} \tag{120}$$

O seguinte teorema fornece condições suficientes para a existência do projeto de uma lei de controle com dois estágios de comutação de tal forma que o sistema (120) seja estável com um limitante superior do custo funcional (99).

Teorema 19. *Para $\rho > 0$ dado, se existirem matrizes simétricas $X_i > 0$, matrizes M_{ji} para $i, j \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N$ e $\mu > 0$ satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} He\{A_{ji}X_j + B_iM_{ji}\} - \mu X_j & * & * & * \\ H_{ji}^T & -\rho I & * & * \\ E_{ji}X_j + F_iM_{ji} & G_{ji} & -I & * \\ \mu X_j & 0 & 0 & -\mu X_i \end{bmatrix} < 0,\ \ i, j \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N, \tag{121}$$

então a lei de controle (118) com os ganhos de realimentação de estado $K_{ij} = M_{ji}X_i^{-1}$ para todo $i, j \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N$ fazem com que a origem x = 0 do sistema (120) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável satisfazendo a desigualdade (99).

Demonstração. Considere $P_i = X_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$. Aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (121) e multiplicando o resultado de ambos os lados por $diag\{X_i{}^{-1}, I, I\}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} He\left\{A_{ji}X_i + B_iM_{ji}\right\} + \mu X_iX_j^{-1}X_i - \mu X_i & * & * \\ H_{ji}^T & -\rho I & * \\ E_{ji}X_i + F_iM_{ji} & G_{ji} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0, \tag{122}$$

$$\begin{bmatrix} He\left\{P_i(A_{ji} + B_iK_{ij})\right\} + \mu(P_j - P_i) & * & * \\ H_{ji}^TP_i & -\rho I & * \\ E_{ji} + F_iK_{ij} & G_{ji} & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{123}$$

definindo $Ef_{ji} = E_{ji} + F_iK_{ij}$, multiplicando (123) por α_j, somando para todo $j = 1, 2, ..., N$ e levando em consideração o resultado (37) apresentado no Capítulo 2, obtemos

$$\begin{bmatrix} He\left\{P_i(A_i(\alpha) + \sum_{j=1}^N B_iK_{ij})\right\} + \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\alpha)P_j & * & * \\ H_i^T(\alpha)P_i & -\rho I & * \\ Ef_i(\alpha) & G_i(\alpha) & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{124}$$

Aplicando novamente o complemento de Schur em (124) e rearranjando os termos, obtemos

$$\begin{bmatrix} He\left\{P_i(A_i(\alpha)+\sum_{j=1}^{N}B_iK_{ij})\right\} & * \\ H_i^T(\alpha)P_i & 0 \end{bmatrix} < -\begin{bmatrix} E\,f_i^T(\alpha) \\ G_i^T(\alpha) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E\,f_i(\alpha) & G_i(\alpha) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N}\pi_{ji}(\alpha)P_j & * \\ 0 & -\rho I \end{bmatrix}, \tag{125}$$

multiplicando à esquerda de (125) pelo vetor $[x(t)^T \;\; w(t)^T]$ e à direita pelo seu transposto, temos

$$\begin{aligned} &2x(t)^TP_iA_i(\alpha)x(t)+2x(t)^T\textstyle\sum_{j=1}^{N}P_iB_iK_{ij}x(t)+2x(t)^TP_iH_i(\alpha)w(t) < -z(t)^Tz(t) \\ &-\textstyle\sum_{j=1}^{N}\pi_{ji}(\alpha)x(t)^TP_jx(t)+\rho w(t)^Tw(t), \end{aligned} \tag{126}$$

considerando $x(t)^TP_ix(t) \leq x(t)^TP_jx(t)$ como uma consequência de $i \in I(x(t))$, $j \in \mathbb{K}_N$ e $\sum_{j=1}^{N}\pi_{ji}x(t)^TP_jx(t) \geq 0$.

$$2x(t)^TP_iA_i(\alpha)x(t)+2x(t)^T\sum_{j=1}^{N}P_iB_iK_{ij}x(t)+2x(t)^TP_iH_i(\alpha)w(t)+z(t)^Tz(t)-\rho w(t)^Tw(t) < 0, \tag{127}$$

levando em consideração que $x(t)^T\sum_{j=1}^{N}P_iB_iK_{ij}x(t) \geq \min_{j\in\mathbb{K}_N}(x(t)^TP_iB_iK_{ij}x(t))$, temos

$$\begin{aligned} 2x(t)^TP_i(A_i(\alpha)x(t)+H_i(\alpha)w(t))+2\min_{j\in\mathbb{K}_N}(x(t)^TP_iB_iK_{ij}x(t))+z(t)^Tz(t)+-\rho w(t)^Tw(t) < 0, \\ 2x(t)^TP_i(A_i(\alpha)x+H_i(\alpha)w(t))+2(x(t)^TP_iB_iK_{iv}x(t))+z(t)^Tz(t)-\rho w(t)^Tw(t) < 0, \\ \min_{i\in I(x)}\{2x(t)^TP_i(A_i(\alpha)x(t)+H_i(\alpha)w(t))+2(x(t)^TP_iB_iK_{iv}x(t))\}+z(t)^Tz(t)-\rho w(t)^Tw(t) < 0, \\ D^+(v(x))+z(t)^Tz(t)-\rho w(t)^Tw(t) < 0, \end{aligned}$$

sendo $D^+(v(x))$ definida como a derivada direcional à direita de uma trajetória qualquer do sistema. Integrando ambos os lados da ultima equação de $t=0$ a $t=\infty$, obtemos que $J_\infty < \rho$ para todo $w(t) \in \mathscr{L}_2$. □

Sistemas lineares Chaveados com a Matriz $B_\sigma(\alpha)$ utilizando integrador

É notável que a lei de controle (118), por exigir que a matriz B_σ não dependa do parâmetro α, tem sua aplicação restrita apenas aos subsistemas descritos em (117). Contudo, é possível reduzir essa restrição, utilizando-se uma formulação com integrador, ao custo de se aumentar a dimensão do sistema.

Para o sistema (117), considere a nova variável, $v \in \mathbb{R}^m$ como sendo a derivada temporal da entrada de controle $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Definindo $x_{n+l}(t)$ e $v_l(t)$, tais que, $\dot{x}_{n+l}(t) = \dot{u}_l(t) = v_l(t)$, $l = 1,2,...,m$ e reescrevendo o sistema (117), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A_i(\alpha)x(t) + B_i(\alpha)u(t) + H_i(\alpha)w(t), \\
\dot{x}_{n+1}(t) &= v_1(t), \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n+m}(t) &= v_m(t), \\
z(t) &= E_i(\alpha)x(t) + F_i(\alpha)u(t) + G_i(\alpha)w(t),
\end{aligned} \tag{128}$$

ou de forma equivalente

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}_i(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}_i v(t) + \hat{H}_i(\alpha)w(t), \\
\hat{z}(t) &= \hat{E}_i(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{G}_i(\alpha)w(t),
\end{aligned} \tag{129}$$

sendo

$$\hat{x}(t) = [x(t)^T \; x_{n+1} \; \cdots \; x_{n+m}]^T, \; \hat{A}_i(\alpha) = \begin{bmatrix} A_i(\alpha) & B_i(\alpha) \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}, \hat{B}_i = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} \\ I_{m\times m} \end{bmatrix}, \tag{130}$$

$$\hat{H}_i(\alpha) = \begin{bmatrix} H_i(\alpha) \\ 0_{m\times p} \end{bmatrix}, \; \hat{E}_i(\alpha) = \begin{bmatrix} E_i(\alpha) & F_i \end{bmatrix} \; e \; \hat{G}_i(\alpha) = G_i(\alpha). \tag{131}$$

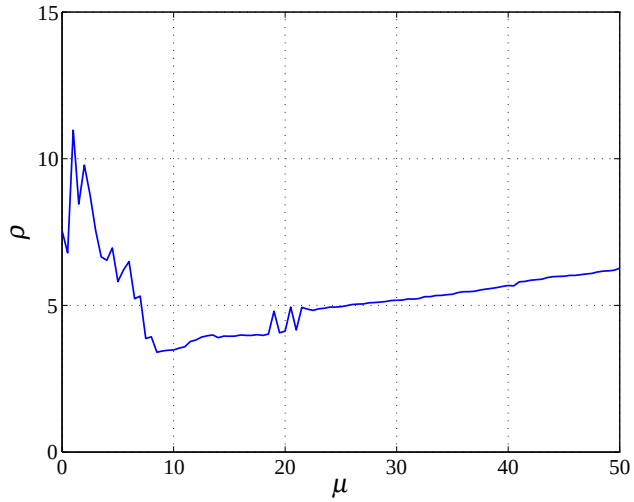
Das considerações acima, note que o sistema (129) é similar ao sistema (121), podendo-se adotar o procedimento estabelecido anteriormente para projetar a lei de controle (118).

Exemplo 4.1. Consideramos agora o mesmo sistema de suspensão ativa tratado no Exemplo 3.1 com modelo dado pelas equações (91)-(93) definido pelas matrizes (94)-(95). Neste caso a matriz (96) é redefinida como

$$E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{132}$$

com o fim de penalizar as desviações dos estados δy_1 e δy_2 em relação ao ponto de equilíbrio. Aplicando as condições do Teorema 19 através da minimização de ρ para vários valores de μ, foi obtido o seguinte gráfico

Figura 18 - Minimização de ρ.



Fonte : O próprio autor

Escolhendo $\mu = 0,01$ obtivemos um custo garantido de $\rho = 7,542$ com os ganhos de realimentação de estado e as matrizes definidas positivas mostradas a seguir

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,3285 & 0,0367 & -0,2163 & -0,0039 & 0,0000 \\ 0,0367 & 0,0057 & -0,0339 & -0,0006 & 0,0000 \\ -0,2163 & -0,0339 & 0,2619 & 0,0042 & -0,0000 \\ -0,0039 & -0,0006 & 0,0042 & 0,0001 & -0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0.,0000 & -0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0,3441 & 0,0265 & -0,2199 & 0,0007 & 0,0000 \\ 0,0265 & 0,0024 & -0,0208 & 0,0001 & 0,0000 \\ -0,2199 & -0,0208 & 0,2049 & -0,0003 & -0,0000 \\ 0,0007 & 0,0001 & -0,0003 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$K_{11} = 1 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1,0063 & 0,1803 & -0,5865 & -0,0334 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

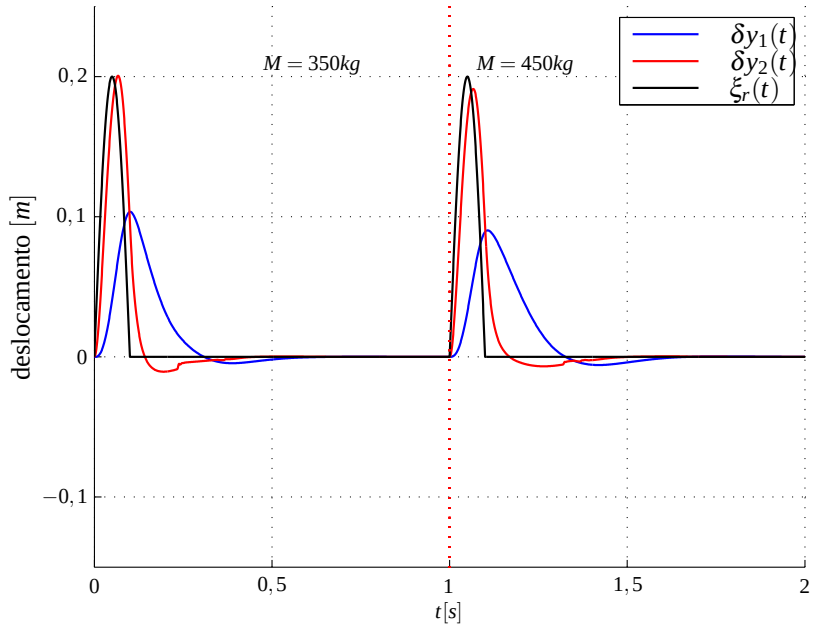
$$K_{12} = 1 \times 10^7 \begin{bmatrix} -1,6878 & -0,1557 & 1,5449 & -0,0032 & -0,0000 \end{bmatrix},$$

$$K_{21} = 1 \times 10^6 \begin{bmatrix} 2,9153 & 0,5299 & -3,6943 & -0,0762 & 0,0001 \end{bmatrix},$$

$$K_{22} = 1 \times 10^6 \begin{bmatrix} -0,8624 & 0,1075 & -1,1836 & -0,0001 & 0,0000 \end{bmatrix}.$$

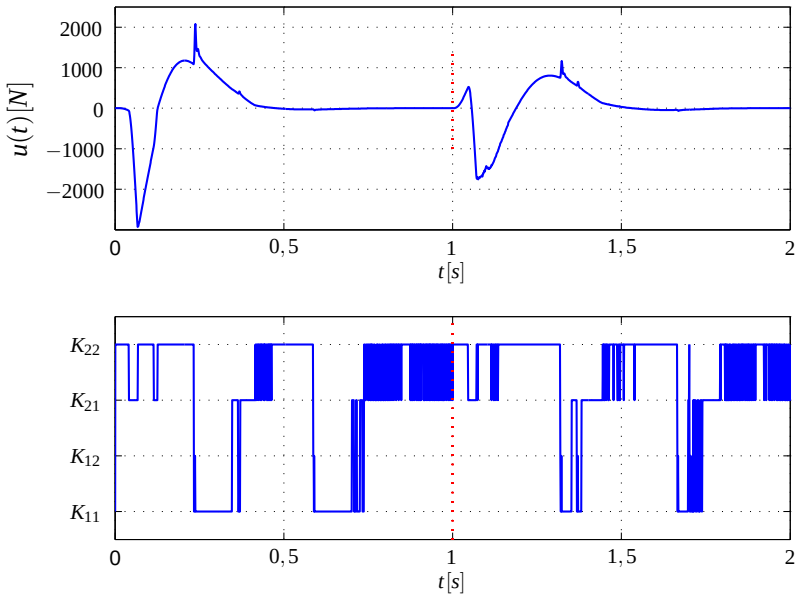
As Figuras 19 e 20 mostram os resultados da simulação considerando os mesmos parâmetros de simulação do Exemplo 3.1. Notar que, como é mostrado na Figura 19, o sistema controlado apresenta um desempenho adequado e significativamente melhorado com relação ao amortecimento nas posições $\delta y_1(t)$, $\delta y_2(t)$.

Figura 19 - Trajetória das variáveis de estado $x_1(t)$, $x_2(t)$ do sistema controlado. Considerando $M = 350kg$ ($0 \leq t < 1$ s) e $M = 450kg$ ($t \geq 1$ s).



Fonte: O próprio autor.

Figura 20 - Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$.



Fonte: O próprio autor.

4.3 COMENTÁRIOS

Neste capítulo, tratamos da síntese de controle $\mathscr{H}_\infty$ de sistemas lineares com comutação via realimentação de estado proposto em (DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2010). O método é baseado no projeto simultâneo de uma regra de comutação e ganhos de realimentação de forma a assegurar um limitante superior para o ganho $\mathscr{L}_2$ entre a entrada exógena e a saída controlada. Mais especificamente, o objetivo foi desenvolver um procedimento para uma abordagem com plantas que apresentam comutação e incertezas no modelo. A validade deste resultado foi ilustrado através do projeto de controle de um sistema de suspensão ativa com bons resultados no desempenho global.

5 IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA DOS PROJETOS DE CONTROLE : SUSPENSÃO ATIVA E *BALL BALANCER*

Neste capítulo são presentados os resultados correspondentes á implementação prática das estratégias de controle tratadas nos capítulos anteriores com o objetivo de avaliar sua eficiência e desempenho. Basicamente, consideramos a síntese conjunta de uma lei de chaveamento e de um conjunto de controladores visando satisfazer os critérios de desempenho definidos nos Capítulos 3 e 4. Os sistemas utilizados foram o sistema de suspensão ativa de bancada e o sistema *ball balancer*, ambos fabricados pela Quanser ®. A descrição e modelagem matemática dos equipamentos feitas neste capítulo tem como referências os manuais dos equipamentos (QUANSER, 2009, 2008).

5.1 SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA

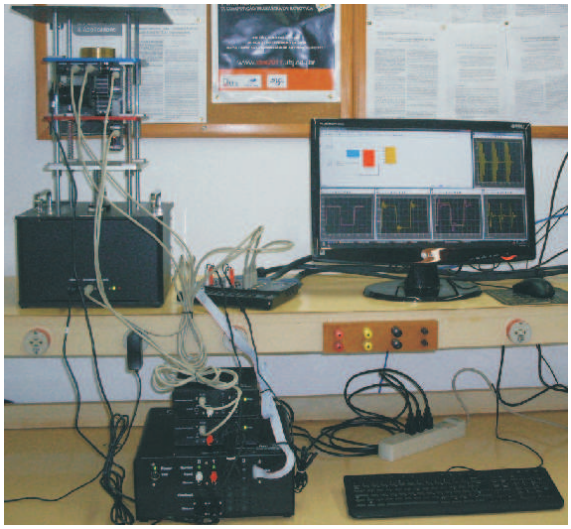
O sistema de suspensão ativa de bancada fabricado pela Quanser ® é um sistema que emula um quarto de veículo controlado por um mecanismo ativo de controle. Ele foi projetado para estudar aspectos críticos das implementações de controle de suspensão ativa. Na Figura 21, é mostrada uma foto desse equipamento no Laboratório de Pesquisa em Controle da Unesp de Ilha Solteira (LPC- FEIS - UNESP).

A planta consiste em três placas sobrepostas, intercaladas por molas e um atuador elétrico. A placa superior representa o corpo do veículo e é suspensa da placa intermediária por duas molas. Além das molas, entre as placas superior e intermediária também existe um motor de corrente contínua, que emula o componente ativo do sistema de suspensão.

As molas que unem as placas intermediária e inferior representam a dinâmica do pneu. A placa inferior representa a pista que o carro percorre e é conectada a um motor de corrente contínua de resposta rápida, permitindo ao projetista simular diferentes perfis de pista. Quando este motor gira, o torque criado em seu eixo é transformado, por meio de eixo roscado e engrenagens, em uma força linear, resultando no movimento da placa inferior.

A estrutura, feita de aço, permite que as três placas possam deslizar suavemente pelos eixos, usando rolamentos lineares. Os movimentos das placas inferior e intermediária são seguidos diretamente por dois encoders de alta resolução enquanto um terceiro encoder mede o movimento da placa superior relativo a placa intermediária (QUANSER, 2009).

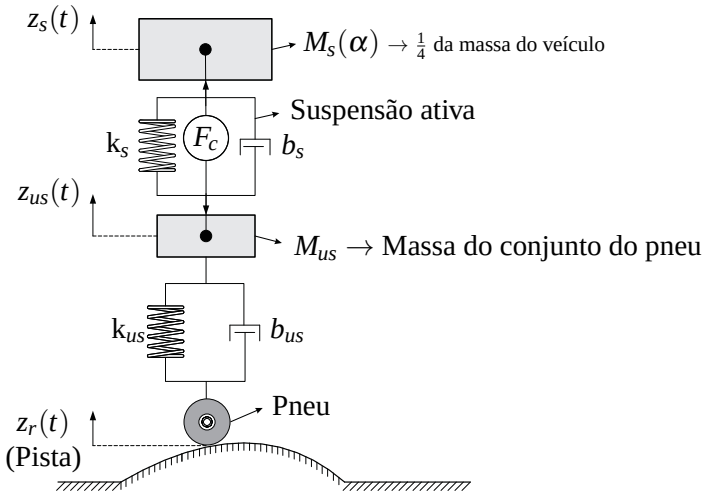
Figura 21 - Sistema de Suspensão Ativa da Quanser®.



Fonte: Arquivo do LPC - FEIS - UNESP.

O sistema de suspensão ativa de um quarto de veículo pode ser modelado segundo o diagrama esquemático dado na Figura 22 (QUANSER, 2009). O sistema consiste de um conjunto de dois massas $M_s(\alpha)$ e M_{us}. A massa M_s representa $\frac{1}{4}$ da massa total do veículo e é suportado pela mola k_s e pelo amortecedor b_s. A massa M_{us} corresponde a massa do conjunto do pneu e é suportada pela mola k_{us} e pelo amortecedor b_{us}. As vibrações causadas pelas irregularidades no caminho podem ser atenuadas pelo sistema de suspensão ativa do veiculo, representado pelo motor (atuador) conectado entre as massas M_s e M_{us}, e controlado pela força F_c.

Figura 22 - Modelo Esquemático.



Fonte: Adaptado de (QUANSER, 2009).

Para a modelagem do sistema foram escolhidos como variáveis de estado $x_1(t) = z_s(t) - z_{us}(t)$, deflexão (ou viagem) da suspensão; $x_2(t) = \dot{z_s}(t)$, velocidade vertical do corpo do veículo; $x_3(t) = z_{us}(t) - z_r(t)$, deflexão do pneu e $x_4(t) = \dot{z_{us}}(t)$, a velocidade vertical do conjunto da roda; como entrada $u(t)$ a força exercida pelo controlador $F_c(t)$ e como a entrada exógena $w(t)$ a velocidade do perfil da pista $\dot{z}_r(t)$, Assim o modelo dinâmico no espaço de estados pode ser representado por um sistema linear chaveado incerto, dado por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B_\sigma(\alpha)u(t) + Hw(t), \tag{133}$$

$$y(t) = Cx(t), \tag{134}$$

$$z(t) = Ex(t), \tag{135}$$

sendo $x(t) = [(z_s - z_{us}) \quad \dot{z}_s \quad (z_{us} - z_r) \quad \dot{z}_{us}]^T$,

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-k_s}{M_s(\alpha)} & \frac{-b_s}{M_s(\alpha)} & 0 & \frac{b_s}{M_s(\alpha)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & \frac{-k_{us}}{M_{us}} & \frac{-b_s - b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, \; B_\sigma(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta_{\sigma(t)}}{M_s(\alpha)} \\ 0 \\ \frac{-\beta_{\sigma(t)}}{M_s(\alpha)} \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}. \tag{136}$$

Nesta modelagem assumimos que todas as variáveis de estado são mensuráveis ($C = I_{4\times4}$), $\beta_1 = 0,5$ (quando $\sigma(t) = 1$) e $\beta_2 = 1$ (quando $\sigma(t) = 2$). Com o fim de penalizar os desvios dos estados $x_1(t)$ e $x_3(t)$ com relação ao ponto de equilíbrio, a saída controlada e definida pela matriz

$$E = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{137}$$

Os respectivos valores para os parâmetros do sistema são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros do sistema de suspensão ativa de bancada Quanser ®

Parâmetro	Descrição	Valor
K_s	Constante de rigidez entre o corpo do veículo e o pneu	$900(N/m)$
b_s	Constante de amortecimento entre o corpo do veículo e o pneu	$7,5(Ns/m)$
M_s	Massa do corpo do veículo	$2,45(kg)$
k_{us}	Constante de rigidez entre o pneu e a estrada	$2500(N/m)$
b_{us}	Constante de amortecimento entre o pneu e a estrada	$5(Ns/m)$
M_{us}	Massa do pneu	$1(kg)$

Fonte: (QUANSER, 2009).

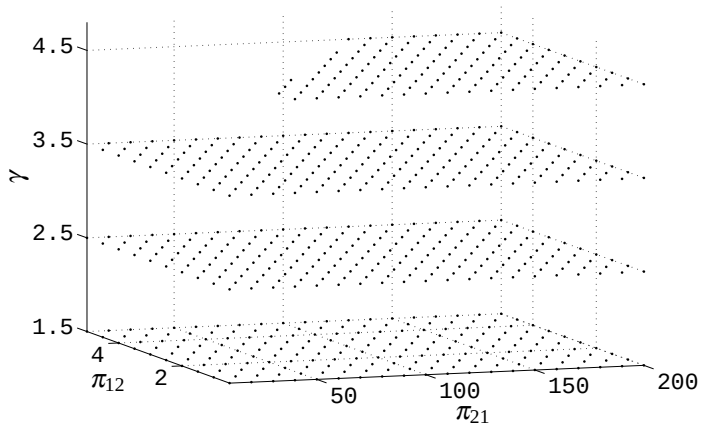
No modelo físico do sistema de suspensão ativa há uma massa de carga útil removível. isto

é composto de duas unidades idênticas de peso, resultando na massa $M_s(\alpha)$. Cada unidade tem o peso de $0,4975kg$, de tal forma que a massa M_s podem assumir valores entre $1,96kg$ (sem as duas unidades de peso) e $2,94kg$ (com as duas unidades de peso). Assim, no modelo para a simulação do sistema, a massa M_s pode ser incerta e pertencente ao intervalo de $1,96 \leq M_s \leq 2,94kg$.

5.1.1 Síntese LMERP

Considerando as condições dadas no Teorema 16, o Lema 3.3 e a maximização do traço de $(X_1 + X_2)$, a Figura 23 mostra a região de factibilidade tendo em conta as restrições na taxa de decaimento e na norma do controlador. Esses resultados se tornam úteis na seleção dos coeficientes π_{12} e π_{21} necessários para o projeto do controlador.

Figura 23 - Região factível, com $\eta\eta_x^2 = 16 \times 10^7$.



Fonte: O próprio autor.

Escolhendo $\pi_{21} = 160$, $\pi_{12} = 1,5$ e $\gamma = 3$, o método fornece as seguintes matrizes, necessárias para a implementação do projeto de controle.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 184,9141 & 99532 & 185,0909 & 1,4469 \\ 9,9532 & 4,3807 & 0,3330 & 0,5887 \\ 185,0909 & 0,3330 & 226,1800 & 0,2152 \\ 1.4469 & 0,5887 & 0,2152 & 0,0842 \end{bmatrix},$$

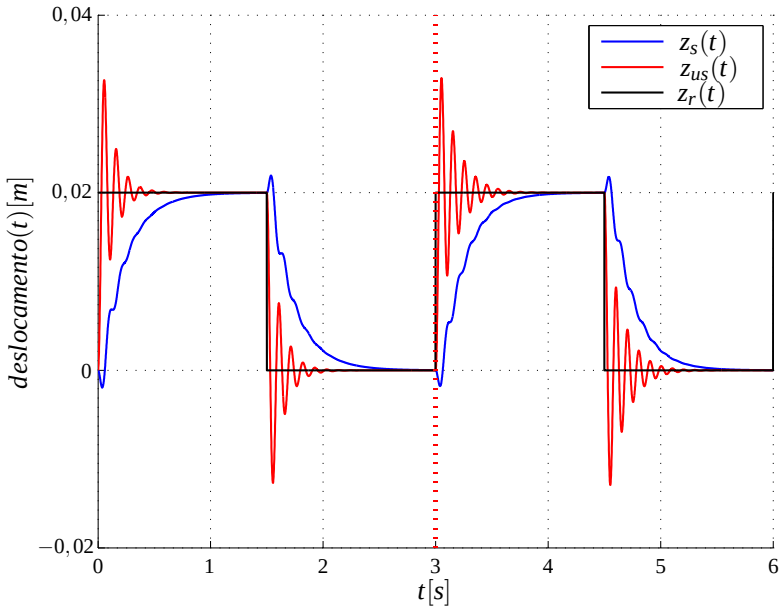
$$P_2 = \begin{bmatrix} 191,0166 & 10,8667 & 191,2933 & 1,5912 \\ 10,8667 & 3,4326 & 4,0839 & 0,4713 \\ 191,2933 & 4,0839 & 224,3725 & 0,7115 \\ 1,5912 & 0,4713 & 0,7115 & 0,0697 \end{bmatrix},$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -636,49 & 71,68 & -878,05 & 9,17 \end{bmatrix},$$
$$K_{12} = \begin{bmatrix} -149,77 & 242,55 & -1141,94 & 31,12 \end{bmatrix},$$
$$K_{21} = \begin{bmatrix} -639,04 & 41,58 & -804,51 & 5,30 \end{bmatrix},$$
$$K_{22} = \begin{bmatrix} -150,40 & 169,46 & -936,01 & 22,02 \end{bmatrix}.$$

Resultados da Simulação

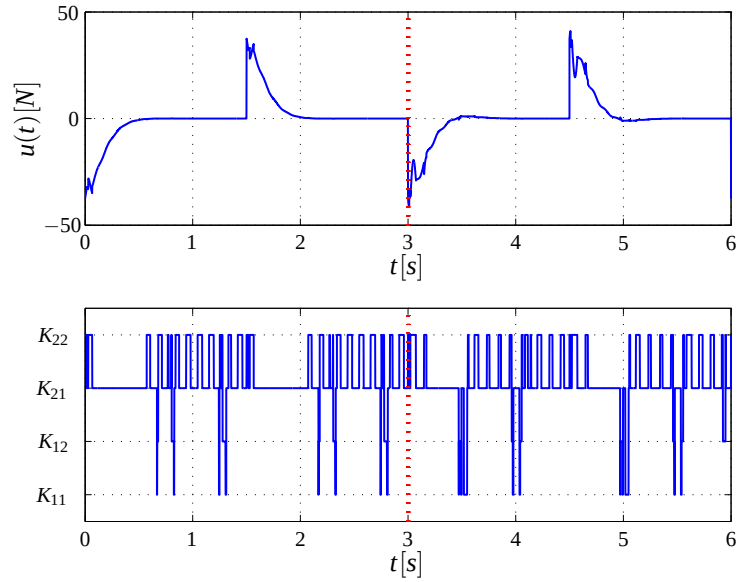
As Figuras 24 e 25 mostram os resultados da simulação considerando como sinal de excitação (perfil da pista $z_r(t)$) um sinal de onda quadrada, com amplitude $0,02m$, frequência de $\frac{1}{3}Hz$ com largura do pulso de 50% nos dois casos: $M_s = 1,96kg$ ($0 \leq t < 3$ s) e $M_s = 2,94kg$ ($t \geq 3$ s). Note-se que, como mostrado na Figura 24, o sistema controlado apresenta um desempenho adequado para a resposta $z_s(t)$.

Figura 24 - Trajetória das variáveis de estado $z_s(t)$, $z_{us}(t)$ do sistema controlado.



Fonte: O próprio autor.

Figura 25 - Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$.

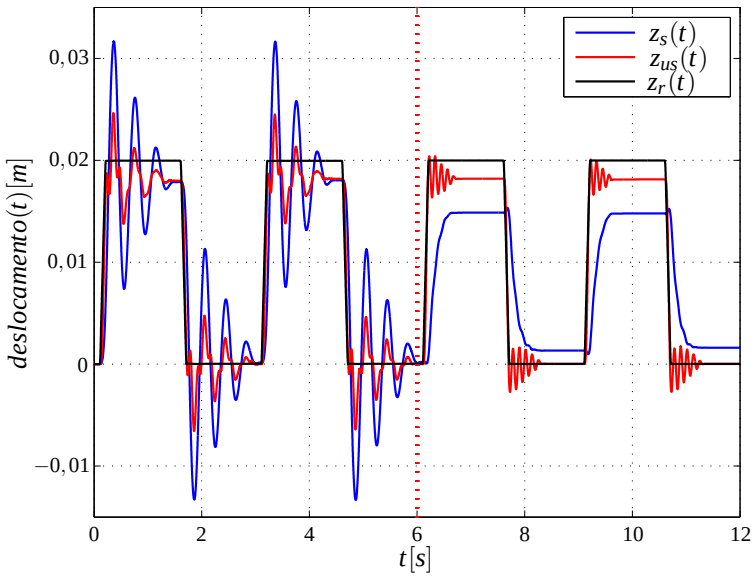


Fonte: O próprio autor.

Resultados da Implementação Prática

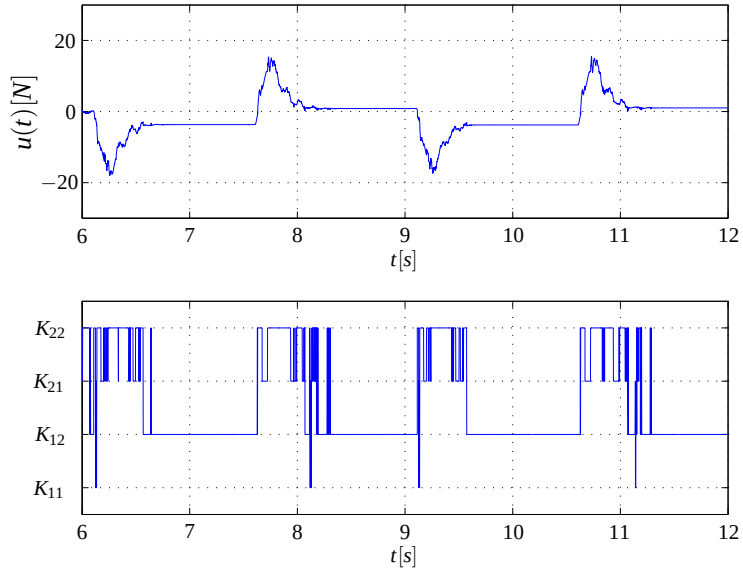
Os resultados práticos foram obtidos considerando as mesmas condições da simulação numérica e são mostradas nas Figuras 31 e 32. Nesta implementação foi considerado o sistema em malha aberta no intervalo $0 \leq t \leq 6$ segundos e o sistema em malha fechada em $6 < t \leq 12$ segundos.

Figura 26 - Trajetória das variáveis de estado $z_s(t)$, $z_{us}(t)$ do sistema em malha aberta e controlado.



Fonte: O próprio autor.

Figura 27 - Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$.

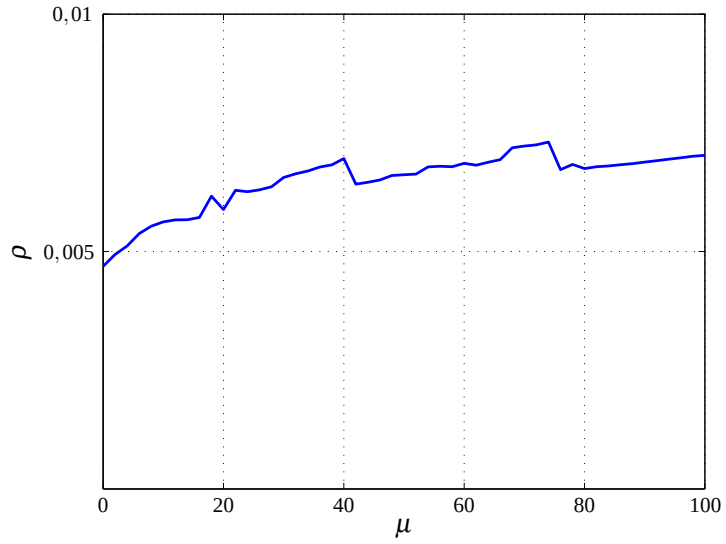


Fonte: O próprio autor.

5.1.2 Controle Robusto $\mathscr{H}_\infty$ Chaveado

Considerando as condições dadas no Teorema 19 e a minimização do custo garantido para $J_\infty(\sigma)$ foi obtida a evolução do parâmetro ρ em relação ao escalar μ e que é apresentada na Figura 28.

Figura 28 - Minimização de ρ.



Fonte : O próprio autor.

Selecionando $\mu = 0,01$ obtivemos um custo garantido $\rho = 0,001$ e as seguintes matrizes e

ganhos do controlador para o projeto de controle

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,0144 & 0,0004 & 0,0104 & 0,0003 & -0,0000 \\ 0,0004 & 0,0006 & -0,0096 & -0,0001 & 0,0000 \\ 0,0104 & -0,0096 & 0,2326 & 0,0025 & -0,0001 \\ 0,0003 & -0,0001 & 0,0025 & 0,0000 & -0,0000 \\ -0,0000 & 0,0000 & -0,0001 & -0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

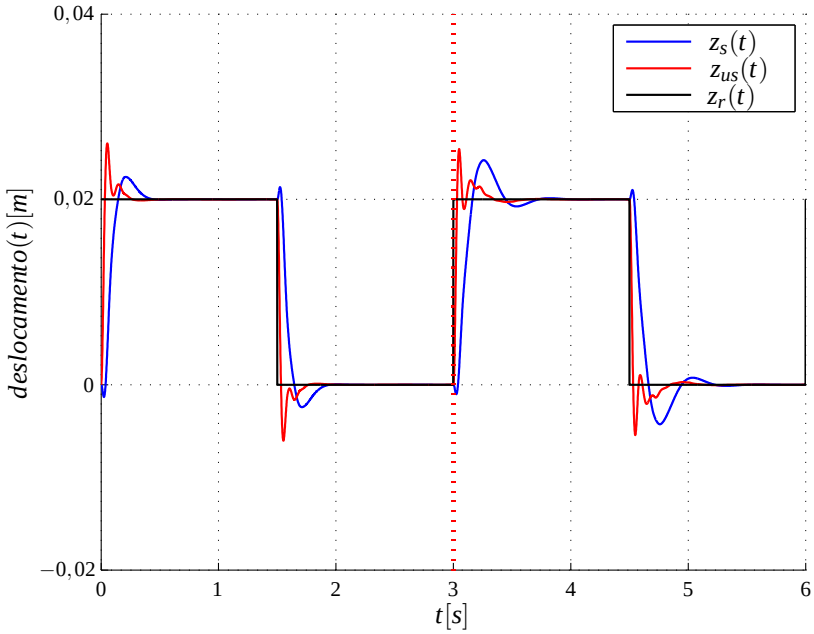
$$P_2 = \begin{bmatrix} 0,0129 & 0,0011 & -0,0045 & 0,0002 & 0,0000 \\ 0,0011 & 0,0003 & -0,0042 & -0,0000 & 0,0000 \\ -0,0045 & -0,0042 & 0,1242 & 0,0010 & -0,0001 \\ 0,0002 & -0,0000 & 0,0010 & 0,0000 & -0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0001 & -0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$K_{11} = 1 \times 10^5 \begin{bmatrix} -0,6405 & 0,2268 & -4,5967 & -0,0676 & 0,0020 \end{bmatrix},$$
$$K_{12} = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} -4,8271 & -0,0813 & -2,2638 & -0,1742 & 0,0028 \end{bmatrix},$$
$$K_{21} = 1 \times 10^6 \begin{bmatrix} -0,5779 & 0,3944 & -7,8357 & -0,1053 & 0,0033 \end{bmatrix},$$
$$K_{22} = 1 \times 10^5 \begin{bmatrix} -0,2889 & 0,0460 & -1,3215 & -0,0276 & 0,0009 \end{bmatrix}.$$

Resultados da Simulação

As Figuras 29 e 30 mostram os resultados da simulação considerando como entrada exógena (perfil da pista $z_r(t)$) o mesmo sinal de onda quadrada aplicada na simulação da síntese LMERP. Como previsto, o sistema em malha fechada garante um bom desempenho ao sistema, diminuindo as oscilações e a amplitude do movimento do assento do motorista, mesmo com a mudança de valor na masa M_s.

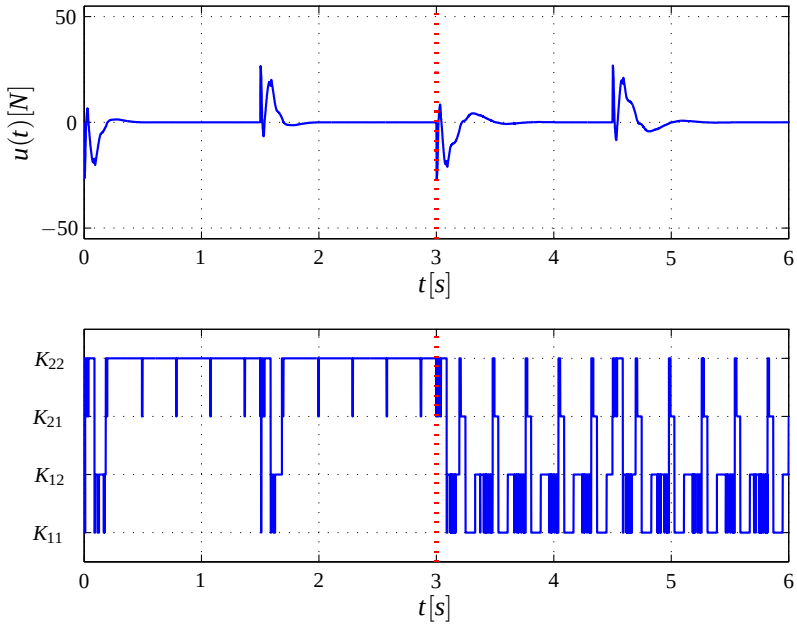
Figura 29 - Trajetória das variáveis de estado $z_s(t)$, $z_{us}(t)$ do sistema controlado.



Fonte: O próprio autor.

Figura 30 - Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$.

.

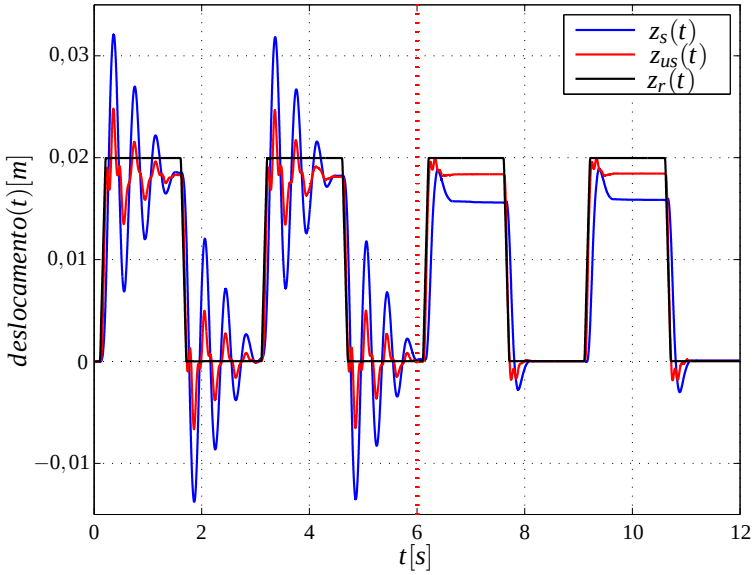


Fonte: O próprio autor.

Resultados da Implementação Prática

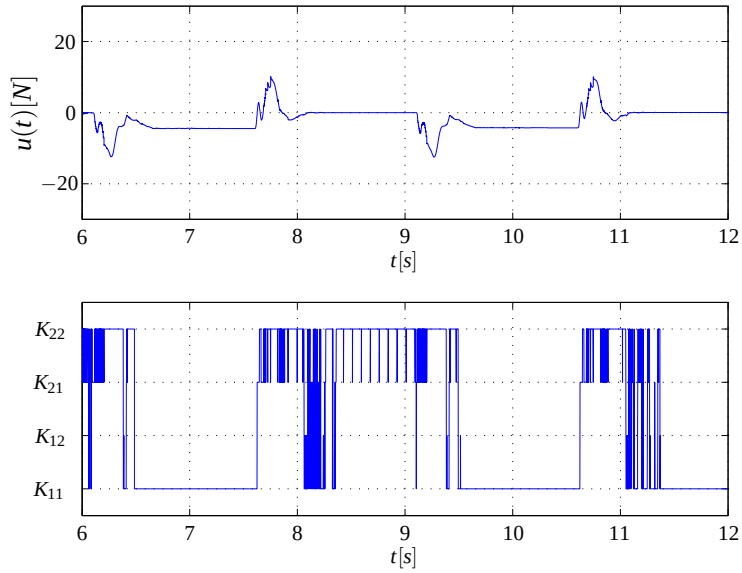
Os resultados práticos foram obtidos considerando as mesmas condições da simulação numérica e são mostradas em 31 e 32. Nesta implementação foi considerado o sistema em malha aberta no intervalo $0 \leq t \leq 6$ segundos e o sistema em malha fechada em $6 < t \leq 12$ segundos.

Figura 31 - Trajetória das variáveis de estado $z_s(t)$, $z_{us}(t)$ do sistema em malha aberta e controlado.



Fonte: O próprio autor.

Figura 32 - Sinal de controle $u(t)$ e chaveamento do ganho $K_{\sigma v}$.



Fonte: O próprio autor.

5.2 SISTEMA *BALL BALLANCER*

O sistema *ball balancer* consiste em uma placa sobre a qual uma esfera movimenta-se livremente. A placa é montada sobre eixos que lhe permitem dois graus de liberdade (2 DOF) e por isto podem movimentar a esfera em qualquer direção no plano. Existe uma câmera localizada acima da placa que é usada para medir a posição da esfera. Abaixo da placa existem dois servomotores, cada um conectado a um lado da placa. Controlando-se a posição da engrenagem do servomotor o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para levar a esfera até uma posição desejada. Na Figura 33, é apresentada uma foto do sistema *ball balancer* fabricado pela Quanser ® pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle da Unesp de Ilha Solteira (LPC- FEIS - UNESP).

O movimento em cada eixo do sistema *ball balancer* é independente do outro e, como há simetria no equipamento, é utilizado o mesmo modelo para os dois eixos. Por isto, será mostrado o modelo matemático de apenas um eixo. Um esquema que ilustra o movimento em um eixo do sistema ball balancer é mostrado na Figura 34.

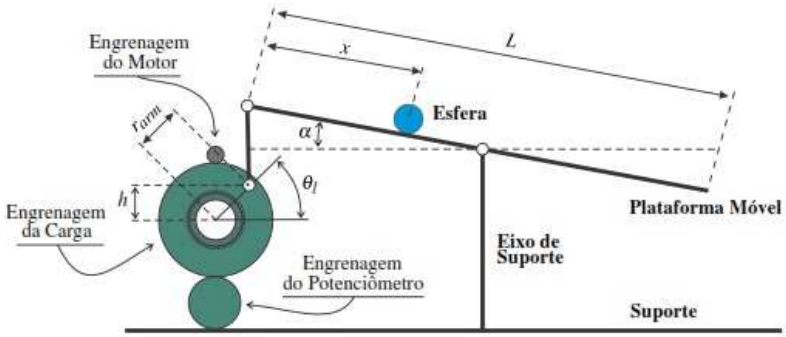
Figura 33 - Sistema ball balancer Quanser® pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle da Unesp de Ilha Solteira (LPC-FEIS- UNESP).



Fonte: Arquivo do LPC - FEIS - UNESP.

Ao controlar a posição das engrenagens de carga do servomotor, o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para equilibrar a bola em uma posição plana desejada. O modelo matemático do sistema 2D *ball balancer* (QUANSER, 2008) é dado por:

Figura 34 - Esquema do movimento em um eixo do *ball balancer*.



Fonte: Adaptado de (QUANSER, 2008).

$$\ddot{x}(t) = K_{bb}\theta(t), \qquad \tau\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = KV_m(t), \tag{138}$$

sendo:

$x(t)$ a posição da bola;
$\theta(t)$ o angulo de carga;
$V_m(t) = u(t)$ o sinal de controle;
τ e K são parâmetros do fabricante; $K_{bb} = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)}$

A descrição e os valores das constantes são dados na Tabela 2

Tabela 2 - Parâmetros do sistema 2*D ball balancer*.

Parâmetros	**Símbolo**	**Valor**
Massa da bola (kg)	m_b	0,003
Distância do eixo do motor ao ponto de fixacao da barra (cm)	r_{arb}	2,54
Raio da bola (cm)	r_b	1,96
Comprimento da mesa (cm)	L_{plate}	27,5
Parâmetro do fabricante (rad/sV)	K	1,76
Parâmetro do fabricante (s)	τ	0,00285
Momento de inercia de uma esfera sólida (kgm^2)	J_b	0,0046
Parâmetro do sistema ($m/s^2 rad$)	K_{bb}	1,3

Fonte: (QUANSER, 2008).

Assumindo como estados do sistema $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$, $x3(t) = \theta_l(t)$ e $x_4(t) = \dot{\theta}_l(t)$, O sistema (138) pode ser escrito no espaço de estados, na direção do x, como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t), \\ z(t) &= Ex(t)+Fu(t), \end{aligned} \tag{139}$$

sendo

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \; B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}. \tag{140}$$

Observa-se que a equação no espaço de estado na direção y pode ser escrita de forma semelhante à equação (139), trocando-se x por y. Para a simulação e implementação no laboratório, foi inserida uma falha na leitura do ângulo medido θ_l, e assim, no projeto de controle foi considerado que esta falha pode chegar a 50% e ela foi modelada como sendo uma incerteza do tipo politópica. Portanto, para o projeto do controlador foram utilizados os seguintes vértices do politopo, para as direções x e y:

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35,0877 \end{bmatrix}, \qquad A_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,065 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -17,5439 \end{bmatrix}, \tag{141}$$
$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 61,7544 \end{bmatrix}.$$

Nesta modelagem, as matrizes E e F são escolhidas para penalizar os desvios do estado $x(t)$ e as altas amplitudes da entrada de controle $u(t)$ de tal forma a fazer com que a esfera siga o sinal de referencia rapidamente com um custo adequado para nossa lei de controle.

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F=\begin{bmatrix} 0 & 0,05 \end{bmatrix}. \tag{142}$$

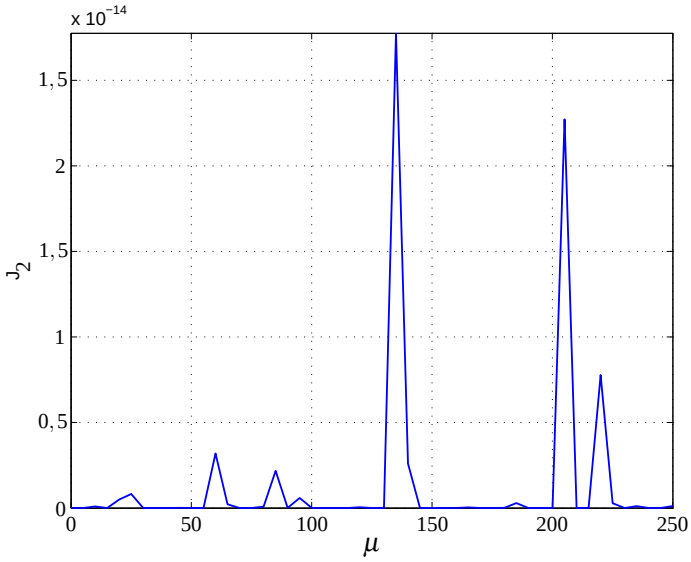
Tanto para a simulação quanto para a implementação prática consideramos que apenas as variáveis de estado x e θ estão disponíveis, e $\dot{x}$ e $\dot{\theta}$ são estimadas por meio de filtros derivativos $G_f(s)=20s/(s+20)$. O objetivo do controle é fazer com que a bolinha siga uma trajetória pré definida, que nesta dissertação foi considerada como sendo um quadrado de 10cm de lado.

5.2.1 Controle Robusto $\mathscr{H}_2$ Chaveado

Considerando as condições dadas no Teorema 11 e a minimização do custo garantido para $J_2(\sigma)$ foi obtida a evolução deste parâmetro em relação ao escalar μ e que é apresentada na

Figura 35.

Figura 35 - Minimização de J_2.



Fonte : O próprio autor

Selecionando $\mu = 250$ obtivemos um custo garantido $J_2(\sigma) < 0,02 \times 10^{-14}$ e as seguintes matrizes e ganhos do controlador para o projeto de controle

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,8470 & 0,3493 & 0,0520 & 0,0010 \\ 0,3493 & 0,2226 & 0,0385 & 0,0008 \\ 0,0520 & 0,0385 & 0,0116 & 0,0003 \\ 0,0010 & 0,0008 & 0,0003 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0,8485 & 0,3503 & 0,0523 & 0,0010 \\ 0,3503 & 0,2232 & 0,0387 & 0,0008 \\ 0,0523 & 0,0387 & 0,0116 & 0,0003 \\ 0,0010 & 0,0008 & 0,0003 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

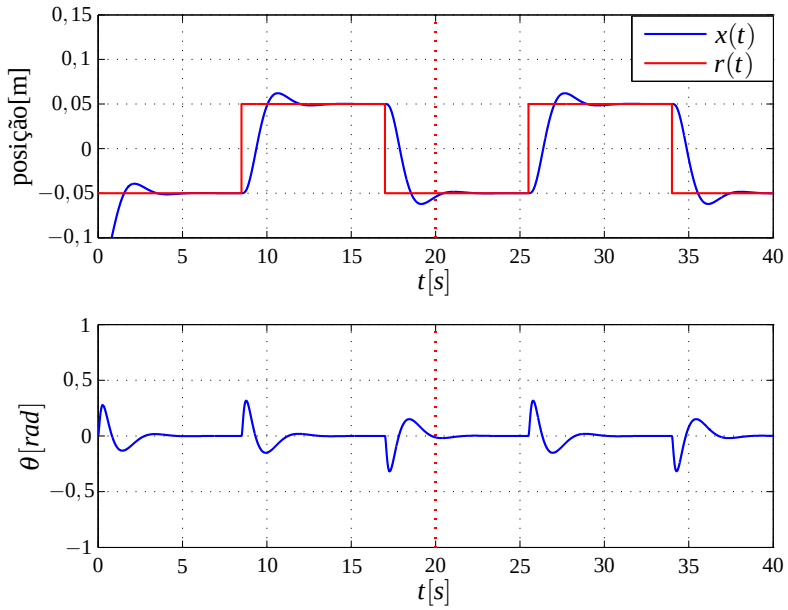
$$K_1 = \begin{bmatrix} -25,7593 & -19,6402 & -6,3933 & -0,1453 \end{bmatrix},$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} -25,9120 & -19,7427 & -6,3857 & -0,1450 \end{bmatrix}.$$

Resultados da Simulação

As Figuras 36 e 37 mostram os resultados da simulação considerando como sinal de referência um quadrado de 10*cm* de lado. Com 20 segundos do início da simulação foi inserida uma falha de 50% na leitura do ângulo do motor da direção *x* da placa e foi considerada a condição inicial $[-0.1375 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$. Como previsto, o sistema em malha fechada garante um bom

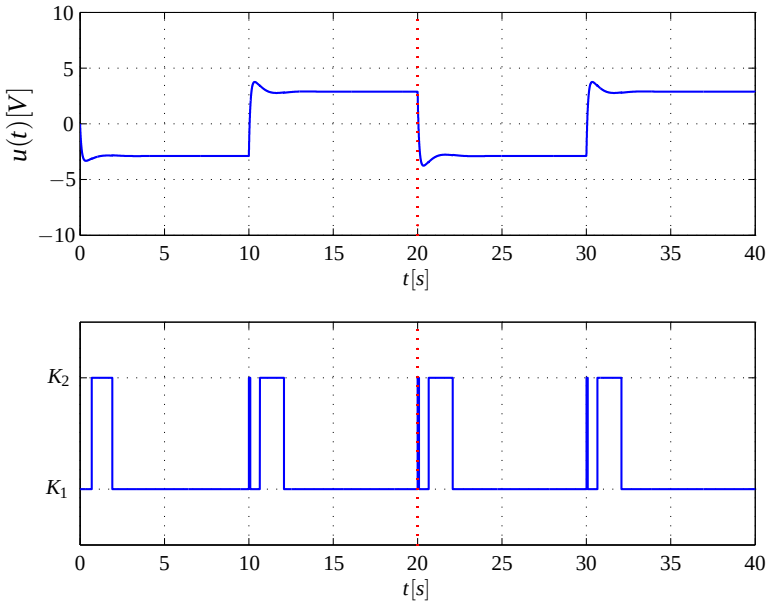
desempenho ao sistema.

Figura 36 - Trajetória da posição x e do ângulo θ do 2*D ball balacer*.



Fonte: O próprio autor.

Figura 37 - Sinal de controle e chaveamento do ganho K_σ.

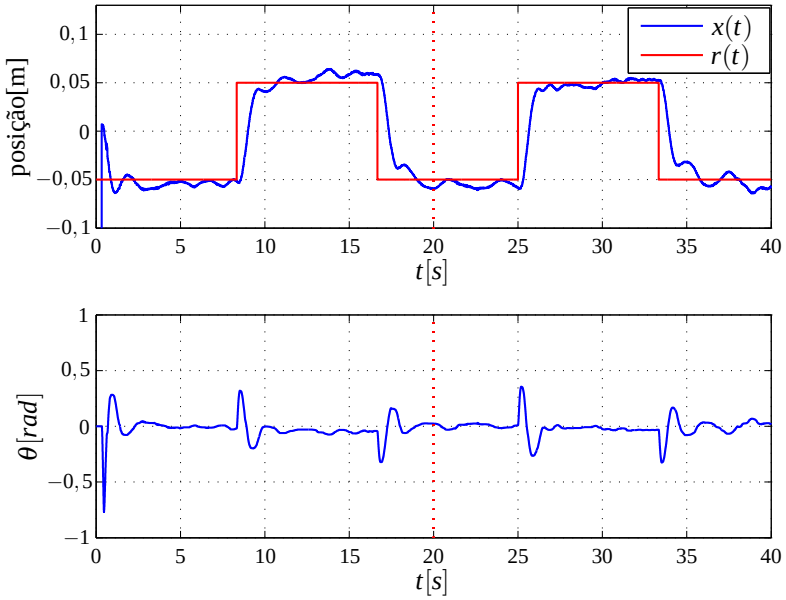


Fonte: O próprio autor.

Resultados da Implementação Prática

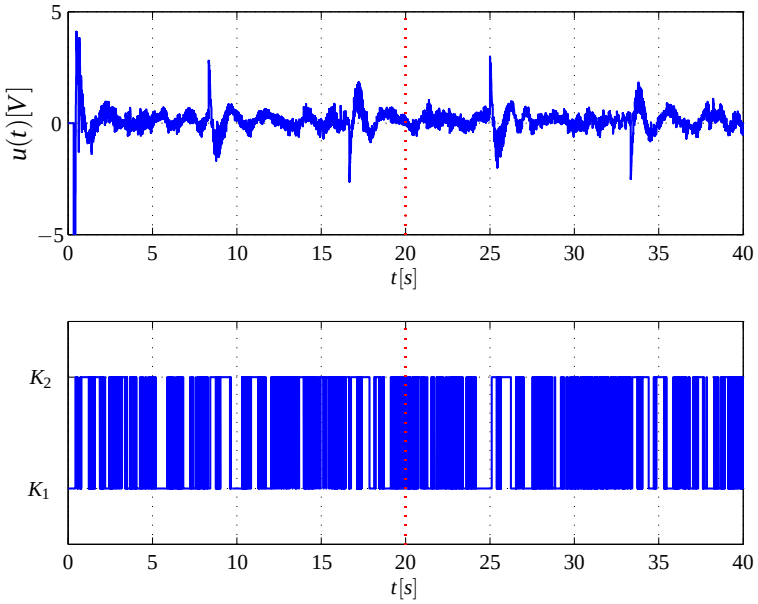
Os resultado práticos foram obtidos considerando as mesmas condições da simulação numérica e são mostradas nas Figuras 38, 39 e 40.

Figura 38 - Trajetória da posição x e do ângulo θ do 2*D ball balacer*.



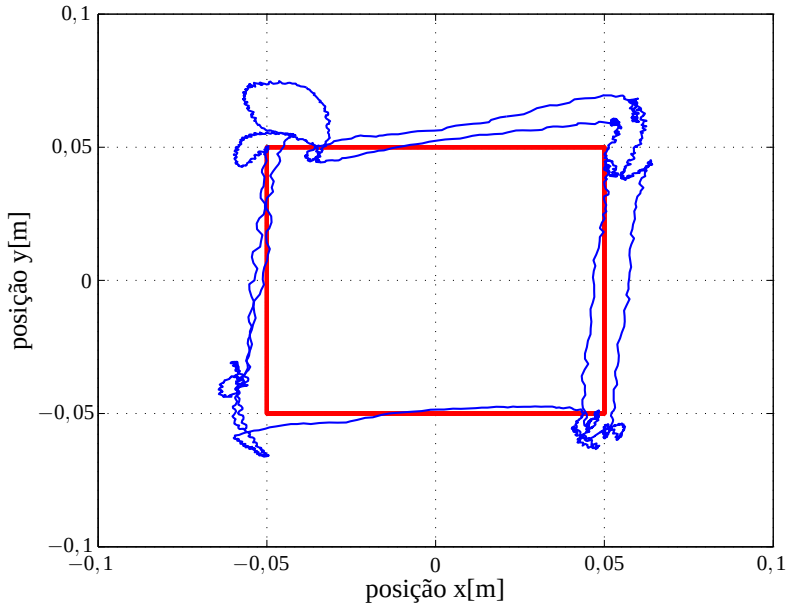
Fonte: O próprio autor.

Figura 39 - Sinal de controle e chaveamento do ganho K_σ.



Fonte: O próprio autor.

Figura 40 - Posição no plano xy



Fonte: O próprio autor.

5.3 COMENTÁRIOS

Os resultados práticos foram colhidos no LPC-FEIS-UNESP admitindo as mesmas condições das simulações numéricas. Tais experimentos demostraram a eficiência das técnicas de controle propostas neste trabalho. A inclusão de incertezas no projeto foi muito útil para garantir a estabilidade robusta do sistema. Os resultados mostram que a metodologia apresentada nos dois capítulos se tornam viáveis para aplicações práticas. O procedimento mostrado neste capítulo produziu alguns resultados, um deles que culminou em uma publicação na XXI edição do Congresso Brasileiro de Automática 2016 (Cardim et al., 2016).

6 CONCLUSÕES

Os sistemas chaveados têm sido objeto de crescente interesse nas últimas décadas, por parte da comunidade científica, para análise de estabilidade e projeto de controle. Estes sistemas possuem algumas vantagens em relação aos sistemas não chaveados, como a melhoria do desempenho global. Dentro deste contexto, os sistemas com técnicas baseadas na função da Lyapunov quadrática por partes têm uma grande importância. Supondo que condições como robustez e atenuação de distúrbios sejam consideradas, o desempenho destes métodos mostram uma grande eficiência e redução de conservadorismo no projeto de controle.

Este trabalho se inicia no Capítulo 2 com uma abordagem de resultados já consagrados e disponíveis na literatura sobre a estabilidade e estabilização dos sistemas chaveados com formulações baseadas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs). Destaque é dado ao projeto de controle baseado nas desigualdades de Lyapunov-Metzler. Esta formulação é de essencial importância no projeto da lei de chaveamento estabilizante usada neste trabalho.

Os resultados apresentados nos Capítulos 3 e 4, tanto comprovam que a abordagem LMERP e o controle $\mathscr{H}_\infty$ são eficientes no controle de sistemas com chaveamento e incertezas no modelo. As comparações entre os controladores projetados baseados na função de Lyapunov quadrática por partes com os controladores projetos baseados na função de Lyapunov quadrática comum mostram que as abordagens propostas apresentam menor conservadorismo e uma região de factibilidade maior quando índices de desempenho são estabelecidos.

A contribuição principal deste trabalho encontra-se nos Teoremas 16 e 19 dos Capítulos 3 e 4 respectivamente, ambos os Teoremas abordam o projeto de controle de sistemas chaveados incertos e consistem no projeto conjunto de duas regras de chaveamento e do ganho de realimentação do vetor de estado atendendo as propriedades dos sistemas LMERP e o desempenho $\mathscr{H}_\infty$ em malha fechada. Mais especificamente, a proposta apresentada seleciona em um dado instante de tempo um ganho $K_{\sigma v}$ o qual retorna o menor valor da derivada da função de Lyapunov quadrática por partes. Para remover a restrição sobre a matriz $B_\sigma(\alpha) = B_\sigma$, no Teorema 19, é possível aplicar uma estrutura modificada utilizando um integrador. Foi comprovado através da simulação e implementação prática, com uma abordagem que inclui incertezas no modelo, o projeto de controle de um sistema de suspensão ativa, verificando-se que esta modelagem de chaveamento dos ganhos, oferece um desempenho melhor quando comparado com o controle robusto clássico definido a partir de um ganho fixo de realimentação. Com a inserção de LMIs de restrição da norma do controlador, o método se mostra ainda mais valioso, uma vez que viabiliza a implementação prática.

É importante ressaltar, que os estudos abordados nos Capítulos 3 e 4 nesta dissertação geraram artigos para publicação no XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2016) realizado em Vitória-ES (CARDIM R.; TELLO et al., 2016) e no XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2017) realizado em Porto Alegre-RS (submetido). Estes trabalhos estão descritas no Anexo A que apresenta uma relação dos trabalhos desenvolvidos durante o mestrado.

Seguindo pela mesma ideia aqui desenvolvida, é possível e imediato obter também resultados do uso das estratégias de controle abordadas nestes trabalho, com algumas adequações em sua estrutura, em sistemas discretos. Uma proposta mais ambiciosa seria a aplicação em casos nos quais o vetor de estado não está disponível para realimentação, em que o projeto de observadores de estados chaveados e realimentação da saída possibilitariam sua aplicação geral. Estes pontos serão investigados em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, B. A simplified viewpoint of hyperstability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 13, n. 3, p. 292–294, 1968.

BOSKOVIC, J. D.; MEHRA, R. K. Multi-mode switching in flight control. In: DIGITAL AVIONICS SYSTEMS CONFERENCE - DASC,19., 2000, Philadelphia. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2000. v. 2, p. 6F2–1.

BOYD, S. P.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: SIAM, 1994.

BROCKETT, R. Asymptotic stability and feedback stabilization, w: RW brockett, RS millman, HJ sussmann (red.). *Differential geometric control theory*, Birkhäuser, Boston, 1983.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Variable structure control of switched systems based on Lyapunov-Metzler-SPR systems. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS, 2008, Antalya. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2008. p. 18–23.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R.; SEIXAS, F. J. D.; FARIA, F. A.; JÚNIOR, E. I. M. Design and implementation of a dc-dc converter based on variable structure control of switched systems. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 44, n. 1, p. 11048–11054, 2011.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; RIBEIRO, J.; COVACIC, M. R.; GAINO, R. Robust switched control based on strictly positive real systems and variable structure control techniques. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Chichester, v. 30, n. 8-10, p. 1244–1268, 2016.

CARDIM R.; TELLO, I. F. Y.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; OLIVEIRA, D. R.; ALVES, U. N. L. T. Application of robust switched controllers in active suspension system. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO, 21., Vitória. *Anais...* Vitória, 2016. p. 955.

CUNHA, J. P. V.; HSU, L.; COSTA, R. R.; LIZARRALDE, F. Output-feedback model-reference sliding mode control of uncertain multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 48, n. 12, p. 2245–2250, 2003.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. $\mathscr{H}_\infty$ control for continuous-time switched linear systems. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, New York, v. 132, n. 4, p. 041013, 2010.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. On $\mathscr{H}_\infty$ control design of continuous-time switched linear systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 49., 2010, Atlanta. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2010. p. 7345–7350.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, 2011.

DECARLO, R. A.; ZAK, S. H.; MATTHEWS, G. P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. *Proceedings of the IEEE*, Piscataway, v. 76, n. 3, p. 212–232, 1988.

FERON, E. *Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback*. [S.l.]: Center for Intelligent Control Systems, 1996.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P.; BOLZERN, P. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 53, n. 3, p. 720–733, 2008.

HESPANHA, J. P. Uniform stability of switched linear systems: extensions of lasalle's invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 49, n. 4, p. 470–482, 2004.

HESPANHA, J. P.; MORSE, A. S. Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching. *Automatica*, Kidlington, v. 35, n. 3, p. 385–393, 1999.

HSU, L.; ARAÚJO, A. D. de; COSTA, R. R. Analysis and design of i/o based variable structure adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 39, n. 1, p. 4–21, 1994.

LIBERZON, D. *Switching in systems and control, ser*. Systems & Control: Foundations & Applications. Boston: Birkhäuser, 2003.

LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control systems*, Piscataway, v. 19, n. 5, p. 59–70, 1999.

LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 54, n. 2, p. 308–322, 2009.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 2004, Taipei. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2004. p. 284–289.

LORD, N. Theory of differentiation: a unified theory of differentiation via new derivate theorems and new derivatives, by krishna m. garg. pp. 525.£ 80.95. 1998. isbn 0 471 25387 1 (wiley). *The Mathematical Gazette*, Cambridge, v. 84, n. 499, p. 183–184, 2000.

MANCILLA-AGUILAR, J.; GARCIA, R.; SONTAG, E.; WANG, Y. Uniform stability properties of switched systems with switchings governed by digraphs. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Cambridge, v. 63, n. 3, p. 472–490, 2005.

MORSE, A. S. Supervisory control of families of linear set-point controllers. 2. robustness. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 42, n. 11, p. 1500–1515, 1997.

OWENS, D. H.; PRÄTZEL-WOLTERS, D.; ILCHMANN, A. Positive-real structure and high-gain adaptive stabilization. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Oxford, v. 4, n. 2, p. 167–181, 1987.

PALMER, E.; LEDWICH, G. Switching control for power systems with line losses. *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, Piscataway, v. 146, n. 5, p. 435–440, 1999.

PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy. In: IEEE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2001, Arlington. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2001. v. 1, p. 223–228.

QUANSER. *2D ball balancer control using QUARC: instructor manual*. Ontario, 2008.

QUANSER. *Active suspension system - User's Manual*. Ontario, 2009.

REINELT, W. *Robust control of a two-mass-spring system subject to its input constraints*. [S.1]: Linköping University Electronic, 1999.

SHORTEN, R.; NARENDRA, K. S.; MASON, O. A result on common quadratic Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 48, n. 1, p. 110–113, 2003.

SHORTEN, R. N. *A study of hybrid dynamical systems with application to automobile control*. Dublin: University College Dublin, 1996.

SHORTEN, R. N.; MASON, O.; O'CAIRBRE, F.; CURRAN, P. A unifying framework for the siso circle criterion and other quadratic stability criteria. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 77, n. 1, p. 1–8, 2004.

ŠILJAK, D.; STIPANOVIC, D. Robust stabilization of nonlinear systems: the LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 6, n. 5, p. 461–493, 2000.

SKAFIDAS, E.; EVANS, R. J.; SAVKIN, A. V.; PETERSEN, I. R. Stability results for switched controller systems. *Automatica*, Kidlington, v. 35, n. 4, p. 553–564, 1999.

SOUZA, W. A. d. *Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno.* 2013. 92 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013.

STEINBERG, A.; CORLESS, M. Output feedback stabilization of uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 30, n. 10, p. 1025–1027, 1985.

SUN, Z.; GE, S. S. Analysis and synthesis of switched linear control systems. *Automatica*, Kidlington, v. 41, n. 2, p. 181–195, 2005.

TEIXEIRA, M. C. M. *Real positive systems and adaptive control.* 1989. Tese (Doutorado) — Pontificia Universidade Catolica, Rio de Janeiro, 1989.

TEIXEIRA, M. C. M. Condições para tornar um sistema estritamente real positivo e aplicação no controle com EVMD utilizando somente as saıdas da planta. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO, 8., São José dos Campos. *Anais...* São José dos Campos, 1990. p. 291–296.

TEIXEIRA, M. C. M.; LORDELO, A.; ASSUNÇÃO, E. On LMI based design of SPR systems and output variable structure controllers. In: IEEE INTERNATIONAL WORKSHOP ON VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS, 6., 2000, Alghero. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2000. p. 199–208.

TROFINO, A.; SCHARLAU, C. C.; DEZUO, T. J.; OLIVEIRA, M. C. de. Stabilizing switching rule design for affine switched systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL AND EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 50., 2011, [S.1]. *Proceedings...* [S.l.], 2011. p. 1183–1188.

WICKS, M.; PELETIES, P.; DECARLO, R. Switched controller synthesis for the quadratic stabilisation of a pair of unstable linear systems. *European Journal of Control*, Amsterdam, v. 4, n. 2, p. 140–147, 1998.

WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, [S.1.]. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 1994. v. 4, p. 3492–3497.

XIANG, J.; SU, H.; CHU, J. Robust sliding mode output feedback control design using LMI approach. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2005, [S.1]. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2005. p. 4078–4083.

ZHAI, G.; LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 76, n. 7, p. 747–753, 2003.

APÊNDICE A - ARTIGOS APRESENTADOS EM CONGRESSO

APPLICATION OF ROBUST SWITCHED CONTROLLERS IN ACTIVE SUSPENSION SYSTEM

Rodrigo Cardim*, Ivan F. Y. Tello*, Marcelo C. M. Teixeira*, Edvaldo Assunção*, Diogo R. de Oliveira*, Uiliam Nelson L. T. Alves*

* *UNESP - Univ Estadual Paulista, Campus of Ilha Solteira, Department of Electrical Engineering, Av. José Carlos Rossi 1370, 15385-000, Ilha Solteira - SP, Brazil.*

Emails: rcardim@dee.feis.unesp.br, ivan.uni.fim@gmail.com, marcelo@dee.feis.unesp.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br, diogo_oliveira6@hotmail.com, uiliamlendzionalves@gmail.com

Abstract— In this paper, some results concerned with the control of uncertain switched linear systems using Lyapunov-Metzler inequalities and properties of Strictly Positive Real (SPR) systems are presented. A practical implementation is realized with the design of a robust controller, proposed in this paper, based on switched static state feedback and using Linear Matrix Inequalities (LMIs), in an active suspension system manufactured by the Quanser®. For the implementation, it is supposed that the active suspension system is subject to uncertainties in the model. Performance indices such as decay rate and restriction in the norm of controller gains are considered in the design. The results show an adequate performance and an efficient solution for this control problem.

Keywords— Robust Switched Control, LMIs, Uncertain Switched System, Strictly Positive Real Systems, Lyapunov-Metzler Inequalities.

Resumo— Neste artigo, são apresentados alguns resultados relacionados ao controle de sistemas lineares chaveados incertos usando as desigualdades de Lyapunov-Metzler e as propriedades de sistemas Estritamente Reais Positivos (SPR). Uma implementação prática é realizada com o projeto de um controlador robusto, proposto neste trabalho, baseado em realimentação com comutação estática do estado e usando Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), em um sistema de suspensão ativa, fabricado pela Quanser®. Para a aplicação, supõe-se que o sistema de suspensão ativa está sujeito a incertezas no modelo. Os índices de desempenho, tais como taxa de decaimento e restrição na norma dos ganhos do controlador são considerados no projeto. Os resultados mostram um desempenho adequado e uma solução eficiente para este problema de controle.

Palavras-chave— Controle Chaveado Robusto, LMIs, Sistema Chaveado Incerto, Sistemas Estritamente Reais Positivos, Desigualdades de Lyapunov-Metzler.

1 Introduction

Switched systems are dynamical systems composed of several subsystems switching among themselves according to a decision rule. This kind of dynamical systems exist in a variety of engineering applications. An important stability problem concerning switched systems, that has been studied, is the problem of finding conditions for the existence of a stabilizing switching signal for a given switched system (DeCarlo et al., 2000). The main idea of this paper is the design of Variable Structure Controller (VSC) based on the Lyapunov-Metzler (LM) inequalities proposed by Geromel and Colaneri (Geromel and Colaneri, 2006) and the stability properties of the Strictly Positive Real (SPR) systems. It is known that a linear time-invariant system is SPR if it satisfies the following properties. It is a passive system, is asymptotically stable, and all its transmission zeros have negative real parts. The SPR synthesis has been studied for various purposes, in the specialized literature is possible to find works that report its use in Linear Time-Invariant (LTI) systems such as the design of VSC systems (Teixeira et al., 2002; Hung et al., 1993), and in the output feedback tracking of uncertain systems (Hsu et al., 2001).

A sufficient condition to apply the SPR synthesis is that, given a LTI plant $\{A, B, C\}$,which is controllable and observable, find constant matrices F and K_0 such that the controlled system $\{A - BK_0C, B, FC\}$ is SPR. For plants with the number of inputs m equal to the number of outputs p, this problem has solution if and only if all transmission zeros of the plant have negative real parts and $det(CB) \neq 0$ (Owens et al., 1987). The procedure to solve this problem using Linear Matrix Inequalities (LMIs) can be easily solved with available software. Moreover, using this tool, we can consider other design specifications like plant uncertainties, decay rate (related to the setting time), and output and input constraints (Teixeira et al., 2002; Bernussou et al., 1999).

In (Geromel and Colaneri, 2006), a stability analysis and control design is proposed for the continuous-time switched linear system given by $\dot{x} = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(0) = x_0$, where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $\sigma(t)$ is the switching control rule, and x_0 is the initial condition. The design of this control law was described as the solution of LM inequalities. This method was applied in the design of a switching control law of a comfort-oriented semiactive suspension in road vehicles and a better performance was obtained when compared with other available methods (Geromel et al., 2008). In (Deaecto et al., 2010), it is studied a novel procedure for switched affine systems control design es-

pecially developed to deal with switched converters where the main goal is to attain a set of equilibrium points. More recent researches in this context can be found in (Duan and Wu, 2012; Contzen and Raisch, 2014; Hsu et al., 2015).

This work aims mainly to confirm the good performance of the proposed methodology in (Cardim et al., 2016). Thus, a practical implementation was realized in an active suspension system manufactured by the Quanser®, for that, failures and uncertainties in the plant model were considered. The computer simulations were carried out by using the software package *YALMIP* (Löfberg, 2004), with the solver *LMIlab* (Gahinet et al., 1995).

For convenience, some notations that will be used at work shall be established: $\mathbb{K}_N = \{1, 2, ..., N\}$, $N \in \mathbb{N}$, $A_{\sigma(t)}(\alpha) = A_\sigma(\alpha)$, $K(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i K_i$, for $\alpha_i \geqslant 0$ and $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$.

2 Uncertain Switched Linear System

As some parameters of the plant are not completely known, let us consider the following uncertain switched linear system:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(\alpha)x(t) + B_{\sigma(t)}(\alpha)u_a(t), \tag{1}$$

$$y(t) = C_{\sigma(t)}x(t), \tag{2}$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $\sigma(t)$ is the switching control rule, $x(0) = x_0$ is the initial condition, $u_a(t)$ is an additional control input and $y(t) \in \mathbb{R}^p$ is the output. The matrices $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ are given by

$$A_{\sigma(t)}(\alpha) = A_\sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k A_{\sigma k}, \tag{3}$$

$$B_{\sigma(t)}(\alpha) = B_\sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k B_{\sigma k}, \tag{4}$$

where $A_{\sigma k}$ and $B_{\sigma k}$ are known matrices

$$\begin{aligned} A_{\sigma k} &\in \{A_{1k}, A_{2k}, ..., A_{Nk}\}, \\ B_{\sigma k} &\in \{B_{1k}, B_{2k}, ..., B_{Nk}\}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r]^T, \sum_{k=1}^{r} \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0, k \in \mathbb{K}_r. \tag{6}$$

In the matrices $A_{\sigma(t)}(\alpha), B_{\sigma(t)}(\alpha)$, the vector α is associated with the polytopic uncertainties (or structural failures) of the plant and $\sigma(t)$ is the switching strategy, as described earlier.

2.1 LM-SPR Synthesis for Uncertain Switched Linear Plants

Based in the control synthesis for switched linear systems through the so-called LM-SPR in (Cardim et al., 2008), let us consider the Problem 1 to describe the proposed synthesis for uncertain switched linear plants in (Cardim et al., 2016).

Problem 1 *Given the uncertain switched linear system (1)–(6), with $B_\sigma(\alpha)$ and $C_\sigma(\alpha)$ as defined in (4), where $rank(B_\sigma(\alpha)) = m$ for all α defined in (6), then find necessary and sufficient conditions for the existence of matrices $F_\sigma(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ and $\bar{K}_\sigma(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\bar{K}_\sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \bar{K}_{\sigma k}$ and $F_\sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k F_{\sigma k}$, and $\bar{K}_{ik}$, F_{ik} with ($i \in \mathbb{K}_N$, $k \in \mathbb{K}_r$) are constant matrices that make the feedback system shown in Figure 1, with input $\tilde{u}(t)$ and output $\tilde{y}(t)$, an LM-SPR system.*

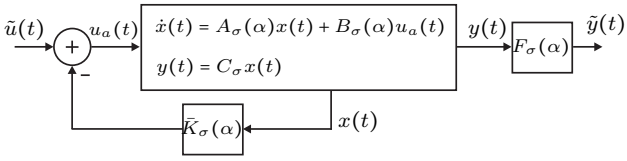


Figure 1: Feedback uncertain linear system for LM-SPR synthesis described in Problem 1.

A solution for Problem 1 is proposed in the next theorem which is an extension of the results presented for linear time invariant and known systems in (Cardim et al., 2008; Cardim et al., 2011), now for uncertain switched systems. Furthermore let us consider an important performance index, called decay rate. In (Boyd et al., 1994), the decay rate is defined as the largest real constant γ, $\gamma > 0$ such that

$$\lim_{t\to\infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0. \tag{7}$$

Lemma 1 *(Boyd et al., 1994) the controlled system (1)–(2) has a decay rate at least equal to $\gamma, \gamma > 0$ if for all trajectory of $x(t)$, $t \geqslant 0$ there exist $P_i = P_i^T > 0, i \in \mathbb{K}_N$ such that $v(x) = \min_{i=1,2...,N} x^T P_i x$ satisfies the condition*

$$\dot{V}(x) \leq -2\gamma V(x). \tag{8}$$

Proof: see (Boyd et al., 1994) for details. □

Theorem 1 *Assume that $p = n$ and $det(C_i) \neq 0$, for $i \in \mathbb{K}_N$. Then, Problem 1 can be solved, with decay rate greater than or equal to γ, if and only if there exist matrices $X_i = X_i^T, M_{iq}$ and scalars $\pi_{ji} \geq 0$ for $i \neq j$ and $\sum_{j=1}^{N} \pi_{ji} = 0$, $i, j \in \mathbb{K}_N$ $q \in \mathbb{K}_r$, such that (9) holds:*

$$\begin{bmatrix} -R_{ik} & X_i & & & \cdots & & X_i \\ X_i & \frac{X_1}{\pi_{1i}} & 0 & & \cdots & & 0 \\ & 0 & \ddots & & & & \\ & & & \frac{X_{i-1}}{\pi_{i-1,i}} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \frac{X_{i+1}}{\pi_{i+1,i}} & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ X_i & 0 & & \cdots & & 0 & \frac{X_N}{\pi_{Ni}} \end{bmatrix} > 0,$$

$$R_{ik} = A_{ik}X_i + X_i A_{ik}^T - B_{ik}M_{iq} - M_{iq}^T B_{ik}^T + \pi_{ii}X_i + 2\gamma X_i, \tag{9}$$

for all $i \in \mathbb{K}_N$ and $k, q \in \mathbb{K}_r$. Furthermore, if (9) are feasible, with a solution given by $X_i = P_i^{-1}, M_{ik}$

and π_{ji}, the following Matrices F_{ik} and K_{ik} are a solution of Problem 1:

$$F_{ik} = B_{ik}^T P_i C_i^{-1}, \tag{10}$$

$$K_{ik} = M_{ik} P_i C_i^{-1}, \quad i \in \mathbb{K}_N, \quad k \in \mathbb{K}_r. \tag{11}$$

Proof: See (Cardim et al., 2016) for details. □

The Theorem 1 solves Problem 1 and is a generalization of the method proposed in (Cardim et al., 2011) for known linear time-invariant plants. Thus, this result can be useful in the design of switched static state feedback controllers for uncertain switched plants, based on SPR synthesis. Another performance index that can be added in the LM-SPR synthesis method, that allows the specification of an upper bound for the norm of the controller gains, as described later.

Lemma 2 *(Šiljak and Stipanovic, 2000) The norm of the gains, such that $K_{ik}K_{ik}^T \leq \eta\eta_x^2$ is guaranteed if there are constants $\eta > 0$ and $\eta_x > 0$ such that the LMIs of Theorem 1, with (12), hold.*

$$\begin{bmatrix} \eta_x I_n & I_n \\ I_n & X_i \end{bmatrix} \geqslant 0, \ \begin{bmatrix} \eta I_n & M_{ik}^T \\ M_{ik} & I_m \end{bmatrix} \geqslant 0, \ i \in \mathbb{K}_N, k \in \mathbb{K}_r. \tag{12}$$

Proof: See (Šiljak and Stipanovic, 2000). □

2.2 Application using state feedback

A design method of switched controllers for the switched system (1)–(6) is presented. To find the feedback gains, the control law uses two stages. The first stage is based on the procedures cited before and chooses an index

$$\sigma = arg \min_{i=1,2...,N} x^T P_i x, \tag{13}$$

where $P_i = P_i^T > 0$ and the Lyapunov function is equal to $v(x) = x^T P_\sigma x$. The idea of the second stage is the minimization of the time derivative of the Lyapunov function, through the selection of the controller gain, which belongs to the set of gains $\{K_{\sigma k}, k \in \mathbb{K}_r\}$ where σ was obtained in the first stage. This stage uses auxiliary symmetric matrices $Q_{ik}, i \in \mathbb{K}_N, k \in \mathbb{K}_r$ and selects an index

$$\nu = arg \min_{q=1,2..,r} x^T Q_{\sigma q} x, \tag{14}$$

Therefore, considering the indices σ (13) and ν (14), the switched controller is defined as follows:

$$u_a(t) = u_{\sigma\nu}(t) = -K_{\sigma\nu}x(t). \tag{15}$$

From (1)-(6), the controlled system is given by

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma(\alpha)x(t) + B_\sigma(\alpha)u_{\sigma\nu}(t), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{16}$$

The proposed method in this paper, presented in the next theorem, was based on (Cardim et al., 2016). Certainly, the proposed theorem was adapted to satisfy more LMIs than the Theorem 5 presented in (Cardim et al., 2016) to avoid unstable modes showed in the practical implementation owing to the delay of the control action of the real time system.

Theorem 2 *Consider the system described by (16). If there exist $X_i = X_i^T > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, symmetric matrices $\bar{Z}_{ik} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $\bar{Q}_{iq} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrices $M_{jq} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and scalars $\pi_{ji} > 0$ for $i \neq j$ and $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 0$, such that*

$$-B_{ik}M_{jq} - M_{jq}^T B_{ik}^T - \bar{Z}_{ik} - \bar{Q}_{iq} \leq 0, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} A_{ik}X_i + X_i A_{ik}^T + \bar{Z}_{ik} + \bar{Q}_{ik} + \sum_{l=1}^N \pi_{li} X_i P_l X_i + \\ 2\gamma X_i < 0, \end{aligned} \tag{18}$$

hold for all $i, j, l \in \mathbb{K}_N$, k, $q \in \mathbb{K}_r$. Then the controller (15) with the switched control law (13) and (14), $Q_{iq} = X_i^{-1}\bar{Q}_{iq}X_i^{-1}$, $K_{ij} = M_{ij}P_iC_i^{-1}$ and $P_i = X_i^{-1}$ for $i \in \mathbb{K}_N$ and $q \in \mathbb{K}_r$ makes the equilibrium point $x(t) = 0$ of the system (16) globally asymptotically stable. Furthermore, the decay rate is equal to or greater than γ.

Proof: Assume that there exist matrices $Z_{ik} = Z_{ik}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $Q_{iq} = Q_{iq}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, such that

$$-P_iB_{ik}K_{jq}C_i - C_i^T K_{jq}^T B_{ik}^T P_i \leq Z_{ik} + Q_{iq}. \tag{19}$$

The following conditions are sufficient for the solution of Problem 1, with decay rate specification:

$$\begin{aligned} P_i(A_{ik} - B_{ik}K_{jq}C_i) + (A_{ik} - B_{ik}K_{jq}C_i)^T P_i + \\ \sum_{l=1}^N \pi_{li}P_i + 2\gamma P_i < 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$P_i = P_i^T > 0, \tag{21}$$

$$B_{ik}^T P_i = F_{ik}C_i, \tag{22}$$

for $i, j, l \in \mathbb{K}_N$, $k, q \in \mathbb{K}_r$, where $\pi_{ji} > 0$ for $i \neq j$ and $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 0$. Therefore, it follows that:

$$\begin{aligned} D^+(v(x)) &\leqslant \sum_{k=1}^N \alpha_k x^T (P_iA_{ik} + A_{ik}^T P_i - P_iB_{ik}K_{jq}C_i \\ &\quad -C_i^T K_{jq}^T B_{ik}^T P_i)x + x^T \sum_{l=1}^N \pi_{li}P_l x + x^T 2\gamma P_i x \\ &\leqslant \sum_{k=1}^N \alpha_k x^T (P_iA_{ik} + A_{ik}^T P_i + Z_{ik} + Q_{iq})x + \\ &\quad x^T \sum_{l=1}^N \pi_{li}P_l x + x^T 2\gamma P_i x. \end{aligned} \tag{23}$$

Considering that $x^T Q_{\sigma\nu} x \leq \sum_{k=1}^N \alpha_k x^T Q_{\sigma k} x$

$$\begin{aligned} D^+(v(x)) &\leqslant \sum_{k=1}^N \alpha_k x^T (P_iA_{ik} + A_{ik}^T P_i + Z_{ik})x + \\ &\quad x^T \sum_{l=1}^N \pi_{li}P_l x + \min_{q=1,..,r} x^T Q_{\sigma q} x + x^T 2\gamma P_i x \\ &\leqslant \sum_{k=1}^N \alpha_k x^T (P_iA_{ik} + A_{ik}^T P_i + Z_{ik} + Q_{ik})x + \\ &\quad x^T \sum_{l=1}^N \pi_{li}P_l x + x^T 2\gamma P_i x < 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Therefore, from (24), $D^+(v(x)) < 0$ holds if the following condition holds:

$$P_i A_{ik} + A_{ik}^T P_i + Z_{ik} + Q_{ik} + \sum_{l=1}^{N} \pi_{li} P_l + 2\gamma P_i < 0, \quad (25)$$

for all $i \in \mathbb{K}_N$, $k, q \in \mathbb{K}_r$. Premultiplying and postmultiplying (19) and (25) by $X_i = P_i^{-1}$ and defining $\bar{Q}_{ik} = X_i Q_{ik} X_i$ and $\bar{Z}_{ik} = X_i Z_{ik} X_i$ one obtains (17) and (18). From (24) and (25) $x = 0$ is a globally asymptotically stable equilibrium point of the controlled system. From Lemma 1 and from (25) the decay rate is equal to or greater than γ. The proof is concluded. □

Note that, applying the Schur Complement in (18), and following the procedure used in equations (37)-(39) in (Cardim et al., 2016), one has:

$$\begin{bmatrix} -G_{ik} & X_i & & & \cdots & & X_i \\ X_i & \frac{X_1}{\pi_{1i}} & 0 & & \cdots & & 0 \\ & 0 & \ddots & & & & \\ & & & \frac{X_{i-1}}{\pi_{i-1,i}} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \frac{X_{i+1}}{\pi_{i+1,i}} & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ X_i & 0 & & \cdots & & 0 & \frac{X_N}{\pi_{Ni}} \end{bmatrix} > 0 \quad (26)$$

$$G_{ik} = A_{ik} X_i + X_i A_{ik}^T + \bar{Z}_{ik} + \bar{Q}_{ik} + \pi_{ii} X_i + 2\gamma X_i.$$

This procedure is used in the simulation of an Active Suspension System with the switching strategy given in (13)-(14) and the conditions given in Theorem 2.

3 Active Suspension System

Consider the active suspension system of a vehicle, with the schematic model given in Figure 2. This system is manufactured by Quanser® (Figure 3) (Quanser, 2009). The system consists of a set of two masses, calls of $M_s(\alpha)$ and M_{us}. The M_s mass represents $\frac{1}{4}$ of the total vehicle body and is supported by the spring k_s and by the damper b_s. The M_{us} mass corresponds the mass of the tire set and is supported by the spring k_{us} and by the damper b_{us}. The vibrations caused by irregularities in the street can be attenuated by the vehicle's active suspension system, represented by a motor (actuator) connected between the masses M_s and M_{us}, and controlled by the force F_c.

The dynamic model can be represented by the uncertain linear system given in (1), considering

$$x(t) = [(z_s - z_{us}) \quad \dot{z}_s \quad (z_{us} - z_r) \quad \dot{z}_{us}]^T,$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-k_s}{M_s(\alpha)} & \frac{-b_s}{M_s(\alpha)} & 0 & \frac{b_s}{M_s(\alpha)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & \frac{-k_{us}}{M_{us}} & \frac{-b_s - b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_{\sigma(t)}}{M_s(\alpha)} & 0 & \frac{-\beta_{\sigma(t)}}{M_{us}} \end{bmatrix}^T u. \quad (27)$$

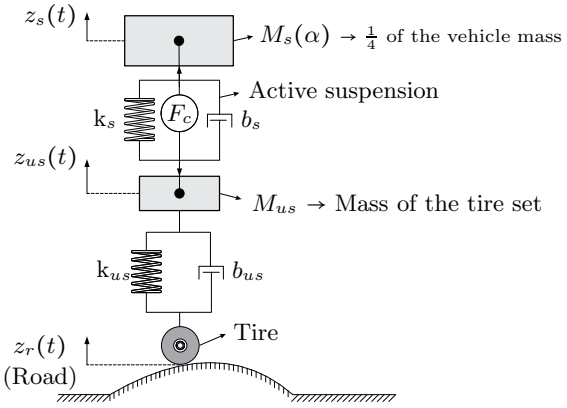


Figure 2: Schematic model.

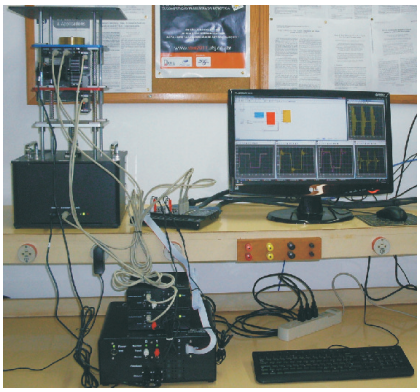


Figure 3: Active suspension system from Quanser®.

The respective values for the system parameters are shown in Table 1. In the physical model of the active suspension system there is a payload mass (brass) removable. It consists of two identical weight units, resulting in the mass $M_s(\alpha)$. Each unit has the weight of 0.4975kg, such that, the total mass corresponds to the 2.45kg, reported in the Table 1. Therefore, the M_s mass may assume values between 1.455kg (without the two weight units) and 2.45kg (with the two weight units). Thus, the M_s mass may be uncertain and belongs to the interval $1.455 \leq M_s \leq 2.45$(kg).

Table 1: Parameters of the system.

Symbol	Value
M_s	2,45 (Kg)
M_{us}	1 (Kg)
K_s	900 (N/m)
k_{us}	2500 (N/m)
b_s	7,5 (Ns/m)
b_{us}	5 (Ns/m)

4 Simulation Results

In the system simulation, it is considered M_s = 2.45kg with a limited uncertainty ±0.49kg, furthermore $\beta_1 = 0.5$ (when $\sigma(t) = 1$) and $\beta_2 = 1$ (when $\sigma(t) = 2$). For these parameters, the two matrices $A_1(\alpha)$ and $A_2(\alpha)$ are both stable.

Figure 4 shows a simulation of the feasible region, with constraints on the decay rate and norm

of controller gains. To design the controller, these results may help the designer to find coefficients regions (π_{12} and π_{21}) for the controller design.

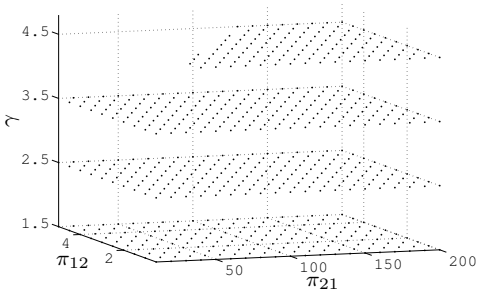


Figure 4: Feasible region, with $\eta\eta_x^2 = 16 \times 10^7$.

Considering the conditions given in Theorem 2, and considering the maximization of the $trace(X_1 + X_2)$, choosing $\pi_{21} = 160$, $\pi_{12} = 1.5$, and $\gamma = 3$, the method provides the following matrices:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 184.9141 & 9.9532 & 185.0909 & 1.4469 \\ 9.9532 & 4.3807 & 0.3330 & 0.5887 \\ 185.0909 & 0.3330 & 226.1800 & 0.2152 \\ 1.4469 & 0.5887 & 0.2152 & 0.0842 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 191.0166 & 10.8667 & 191.2933 & 1.5912 \\ 10.8667 & 3.4326 & 4.0839 & 0.4713 \\ 191.2933 & 4.0839 & 224.3725 & 0.7115 \\ 1.5912 & 0.4713 & 0.7115 & 0.0697 \end{bmatrix},$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -636.49 & 71.68 & -878.05 & 9.17 \end{bmatrix},$$
$$K_{12} = \begin{bmatrix} -149.77 & 242.55 & -1141.94 & 31.12 \end{bmatrix},$$
$$K_{21} = \begin{bmatrix} -639.04 & 41.58 & -804.51 & 5.30 \end{bmatrix},$$
$$K_{22} = \begin{bmatrix} -150.40 & 169.46 & -936.01 & 22.02 \end{bmatrix}.$$

Figures 5 and 6 show the simulations results considering as excitation signal (in the road profile $z_r(t)$) a square wave signal, with amplitude 0.04m, frequency of $\frac{1}{3}$Hz with pulse width of 50% in two cases: $M = 1.96$Kg ($0 \le t < 3$ s) and $M = 2.94$Kg ($t \ge 3$ s). Note that, as shown in Figure 5, the controlled system presented an adequate performance for the response of the position $z_s(t)$.

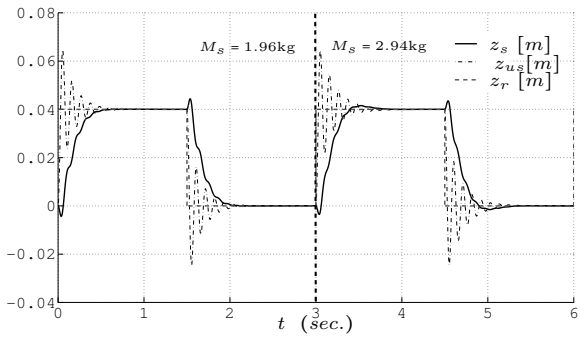


Figure 5: Simulation response with switching control strategy, $\eta\eta_x^2 = 16 \times 10^7$ and $\gamma = 3$.

5 Practical Implementation - Active Suspension Control

Practical results were obtained considering the same conditions of numerical simulation and the outcomes presented were obtained in Figures 7 and 8. In this implementation, it was considered the open-loop system in the range $0 \le t \le 6$ seconds and the controlled system in $6 < t \le 12$ seconds.

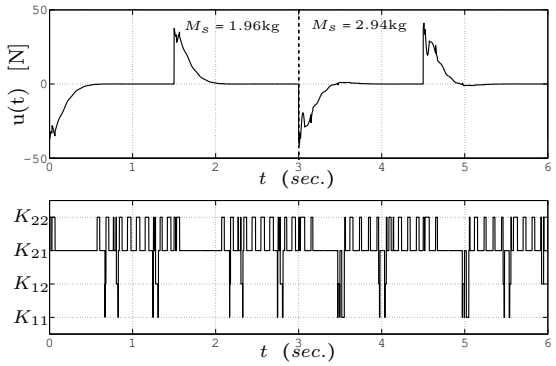


Figure 6: Control signal and gain selection $K_{\sigma\nu}(t)$ at each moment.

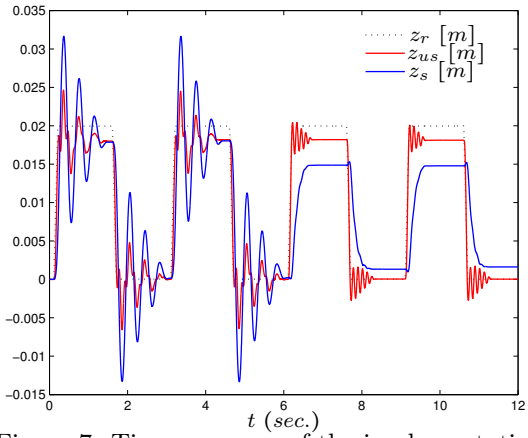


Figure 7: Time response of the implementation.

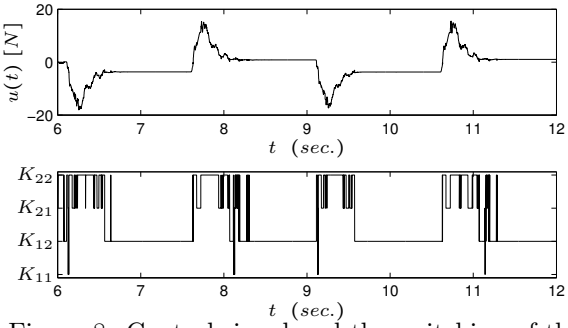


Figure 8: Control signal and the switching of the gain $K_{\sigma\nu}(t)$ in the practical implementation.

6 Conclusions

A control design method for continuous-time uncertain switched linear systems using a state feedback switching strategy was proposed in this paper, based on (Cardim et al., 2016). New conditions were obtained and the theory developed is illustrated through of simulation and implementation in the active suspension control system. The results obtained with the proposed method showed adequate performance.

It is important to mention that the presence of the offset, showed in Figure 7, in spite of the adequate behavior of the response signal, is due to the nonlinearities that occur in the real model of the active suspension system, such as friction and dead band. In this case, the possibility of improving the calibration and study the nonlinearities of the system can be considered. This subject is suggested for a future research.

7 Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge the financial support by FAPESP (Grant 2011/17610-0), CNPq and CAPES, from Brazil.

References

Bernussou, J., Geromel, J. C. and De Oliveira, M. C. (1999). On strict positive real systems design: guaranteed cost and robustness issues, *Systems & control letters* **36**(2): 135–141.

Boyd, S. P., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Vol. 15, SIAM.

Cardim, R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Covacic, M. R. (2008). Variable structure control of switched systems based on lyapunov-metzler-spr systems, *Variable Structure Systems, 2008. VSS'08. International Workshop on*, IEEE, pp. 18–23.

Cardim, R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E., Covacic, M. R., Seixas, F. J. M., Faria, F. A. and Mainardi Júnior, E. I. (2011). Design and implementation of a dc-dc converter based on variable structure control of switched systems, *18th IFAC World Congress*, Vol. 18, pp. 11048–11054.

Cardim, R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E., Ribeiro, J. M. S., Covacic, M. R. and Gaino, R. (2016). Robust switched control based on strictly positive real systems and variable structure control techniques, *Int. Journal of Adaptive Control and Signal Processing* .

Contzen, M. P. and Raisch, J. (2014). A polytopic approach to switched linear systems, *Control Applications (CCA), 2014 IEEE Conference on*, IEEE, pp. 1521–1526.

Deaecto, G. S., Geromel, J. C., Garcia, F. S. and Pomilio, J. A. (2010). Switched affine systems control design with application to dc-dc converters, *Control Theory & Applications, IET* **4**(7): 1201–1210.

DeCarlo, R. A., Branicky, M. S., Pettersson, S. and Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proceedings of the IEEE* **88**(7): 1069–1082.

Duan, C. and Wu, F. (2012). Switching control synthesis for discrete-time switched linear systems via modified Lyapunov-Metzler inequalities, *American Control Conference (ACC), 2012*, IEEE, pp. 3186–3191.

Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox - For Use with Matlab*, The Math Works, Inc.

Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **45**(5): 1915–1930.

Geromel, J. C., Colaneri, P. and Bolzern, P. (2008). Dynamic output feedback control of switched linear systems, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **53**(3): 720–733.

Hsu, L., Cunha, J. P. V. S. and Costa, R. R. (2001). Model-reference sliding mode control of uncertain multivariable systems, *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, Vol. 1, IEEE, pp. 756–761.

Hsu, L., Teixeira, M. C. M., Costa, R. R. and Assunção, E. (2015). Lyapunov design of multivariable mrac via generalized passivation, *Asian Journal of Control* **17**(5): 1484–1497.

Hung, J. Y., Gao, W. and Hung, J. C. (1993). Variable structure control: a survey, *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* **40**(1): 2–22.

Löfberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab, *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE Int. Symposium on*, IEEE, pp. 284–289.

Owens, D. H., Prätzel-Wolters, D. and Ilchmann, A. (1987). Positive-real structure and high-gain adaptive stabilization, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* **4**(2): 167–181.

Quanser (2009). *Active Suspension - User's Manual*, Quanser Consulting Inc., Ontario, Canada.

Šiljak, D. D. and Stipanovic, D. M. (2000). Robust stabilization of nonlinear systems: the LMI approach, *Mathematical problems in Engineering* **6**(5): 461–493.

Teixeira, M. C. M., Covacic, M. R., Assunção, E. and Lordelo, A. D. S. (2002). Design of SPR systems and output variable structure controllers based on LMI, *7th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*, Vol. 1, pp. 133–144.

ROBUST $\mathcal{H}_\infty$ SWITCHED STATE-FEEDBACK CONTROL OF UNCERTAIN LINEAR SYSTEMS

Ivan F. Y. Tello*, Rodrigo Cardim *, Marcelo C. M. Teixeira*, Edvaldo Assunção*, Diogo R. de Oliveira*, Uiliam Nelson L. T. Alves*

* *UNESP - Univ Estadual Paulista, Campus of Ilha Solteira, Department of Electrical Engineering, Av. José Carlos Rossi 1370, 15385-000, Ilha Solteira - SP, Brazil.*

Emails: ivan.uni.fim@gmail.com, rcardim@dee.feis.unesp.br, marcelo@dee.feis.unesp.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br, diogo_oliveira6@hotmail.com, uiliamlendzionalves@gmail.com

Abstract— This paper addresses the issue of robust $\mathcal{H}_\infty$ control for a class of continuous-time uncertain switched linear systems. A set of state feedback gains and two switching rules are designed to render the closed-loop system asymptotically stable and assuring a guaranteed $\mathcal{H}_\infty$ cost. The corresponding parameters of the controller are obtained by using the Linear Matrix Inequalities (LMIs) optimization. Finally, a practical example in an active suspension system illustrates the effectiveness of the proposed approach.

Keywords— Robust Switched Control, LMIs, Uncertain Switched System, $\mathcal{H}_\infty$ Control, Lyapunov-Metzler Inequalities.

Resumo— Este artigo aborda a questão do controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ para uma classe de sistemas lineares comutados incertos de tempo contínuo. Um conjunto de ganhos de realimentação de estado e duas regras de comutação são projetados para tornar o sistema em malha fechada assintoticamente estável com custo $\mathcal{H}_\infty$ garantido. Os parâmetros correspondentes do controlador são obtidos usando a otimização de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Finalmente, um exemplo prático em um sistema de suspensão ativa ilustra a eficácia da abordagem proposta.

Palavras-chave— Controle Chaveado Robusto, LMIs, Sistema Chaveado Incerto, Controle $\mathcal{H}_\infty$, Desigualdades de Lyapunov-Metzler.

1 Introduction

A switched system comprises a family of subsystems described by continuous or discrete-time dynamic systems and a rule specifying the switching among them. The motivation for studying switched systems is mainly from the fact that many practical systems can be modeled as switched systems, such as computer controlled systems, automotive engine control systems, network control systems and so on. Switched systems have attracted much attention in the control field (Liberzon and Morse, 1999; Liberzon, 2003; Lin and Antsaklis, 2009; Hespanha, 2004).

When additional conditions such as robustness to deal with uncertainties and disturbances are considered, the control design problem that uses the $\mathcal{H}_\infty$ performance criterion emerges as a possibility, thus, $\mathcal{H}_\infty$ control is a vital field in control systems design and it is widely noted in (Assawinchaichote et al., 2004; Gao et al., 2005). In (Hespanha, 2003; Zhai et al., 2001) are found studies and results on the attenuation of perturbations of switched systems and other works like (Lall and Dullerud, 1997; Nie and Zhao, 2003) have also approached the study of problems related to the $\mathcal{H}_\infty$ control design.

In this paper, we focus on the robust $\mathcal{H}_\infty$ control design for uncertain switched systems having the following considerations: (1) the uncertainties in the state space model belongs to the field type polytopic; (2) all states are available for feedback; (3) the switching rule forms part of the design. Thereby, this work aims to present results corresponding to the switched control by designing, simultaneously, a set of state-feedback gains and two switching rules such that the closed-loop system is globally asymptotically stable as well as a guaranteed $\mathcal{H}_\infty$ cost is minimized. Such control strategy is based on results obtained in (Deaecto et al., 2010; Souza et al., 2014), extending them for polytopic systems by using Metzler matrices depending on a unknow parameter that represents uncertainties or structural failures in the plant. The problem was approached in terms of LMIs using the language of *YALMIP* (Löfberg, 2004), with the solver *LMIlab* (Gahinet et al., 1995). To illustrate the effectiveness of the proposed method, a computer simulation of these switched control design was realized for active suspension systems in road vehicles, and was motivated by the results presented in (Cardim et al., 2016). Throughout this paper, the notations are standard. The superscript "T" denotes matrix transposition, "$*$" the symmetric term in a symmetric matrix, $diag\{\cdots\}$ a block-diagonal matrix and I the identity matrix. The class of Metzler matrices denoted by $\mathcal{M}$ consists of all matrices $\Pi \in \mathbb{R}^{N\times N}$ with elements π_{ji}, such that $\pi_{ji} \geq 0 \ \forall j \neq i = 1, 2, ..., N$ and $\sum_{j=1}^{N} \pi_{ji} = 0$ for all $i = 1, 2, ..., N$. The set $\{1, 2, ..., N\}$ is denoted by $\mathbb{K}_N$ and matrices depending linearly on a parameter are denoted as $A_\sigma(\alpha) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j A_{j\sigma}$, for $\alpha_j \geqslant 0$ and $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1$. The unitary simplex set Λ may be defined as $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1, \ \lambda \geq 0\}$. Fi-

nally, $\|\xi\|_2^2 = \int_0^\infty \xi(t)^T \xi(t) dt$ and $He\{A\} = A + A^T$.

2 Problem formulation and preliminaries

Consider the following switched system:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + H_{\sigma(t)}w(t), \quad x(0) = 0 \quad (1)$$
$$z(t) = E_{\sigma(t)}x(t) + G_{\sigma(t)}w(t). \quad (2)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ the control input, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ the exogenous disturbance, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ the controlled output. The switching signal $\sigma(t) : t \geq 0 \to \mathbb{K}_N$ that selects at each instant of time $t \geq 0$ a particular subsystem among N available ones.

Let us consider (1)-(2) with exogenous inputs $w(t)$ with finite norms, i.e., $w(t) \in \mathcal{L}_2$. the output vector $z(t)$ obtained corresponding to this inputs allow us define the functional cost $\mathcal{H}_\infty$.

$$J_\infty(\sigma) = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} \quad (3)$$

The aim is to determine the switching control law $\sigma(x(t))$ such that for a given scalar $\rho > 0$ the origin $x = 0$ of the system (1)-(2) is globally asymptotically stable and, from the initial condition x(0)=0, the inequality

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} < \rho \quad (4)$$

holds. Based on the results obtained in (Deaecto et al., 2010) that generalizes the ones obtained in (Geromel and Colaneri, 2006) which adopts the min-type, piece-wise quadratic Lyapunov function

$$v(x(t)) = \min_{i \in \mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t) = \min_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x(t)^T P_i x(t)\right) \quad (5)$$

where $P_i > 0$ for all $i \in \mathbb{K}_N$, the next theorem will show that whenever these matrices satisfy some matrix inequalities, then the min-switching strategy

$$\sigma(x(t)) = arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t) \quad (6)$$

is globally stabilizing and (4) holds.

Theorem 1 *(Deaecto et al., 2010) let $\rho > 0$ be given, the min-switching strategy (6) is globally stabilizing and the switched system (1)-(2) fulfills (4) if there exist $P_i = P_i^T > 0$ for all $i \in \mathbb{K}_N$ and a Metzler matrix $\Pi \in \mathcal{M}$ satisfying the so-called Riccati-Metzler Inequalities.*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j & * & * \\ H_i^T P_i & -\rho I & * \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, \ i \in \mathbb{K}_N \quad (7)$$

Proof: See (Deaecto et al., 2010) for details. □

2.1 Robust $\mathcal{H}_\infty$ Control

Consider now the problem of determining a stabilizing switching strategy and a set of feedback gains $\{K_1, ..., K_N\}$ with the aim of minimize the upper bound of the $J_\infty(\sigma)$ cost, defined in (4), for uncertain switched systems described by the following equations in the state space

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(\alpha)x(t) + B_{\sigma(t)}(\alpha)u(t) + H_{\sigma(t)}(\alpha)w(t), \\ &z(t) = E_{\sigma(t)}(\alpha)x(t) + F_{\sigma(t)}(\alpha)u(t) + G_{\sigma(t)}(\alpha)w(t), \\ &x(0) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

where $A_\sigma(\alpha), B_\sigma(\alpha), H_\sigma(\alpha), E_\sigma(\alpha), F_\sigma(\alpha), G_\sigma(\alpha)$ are matrices of adequate dimensions that describe the system and belong to a convex politopic set

$$(A, B, H, E, F)_\sigma(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j (A, B, H, E, F)_{j\sigma}, \quad (9)$$

$$\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N]^T, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \ j \in \mathbb{K}_N \quad (10)$$

where the vector α is associated with the politopic uncertainties (or structural failures) of the plant and $\sigma(t)$ is the switching strategy, as described earlier. Thus, the first subscript refers to the vertex of the polytope and the second to the switching law.

Considering a Metzler matrix dependent on the unknown parameter (Deaecto and Geromel, 2009), that is, $\Pi(\alpha) : \Lambda \to \mathbb{R}^{N \times N}$ whose elements are defined by

$$\pi_{ji}(\alpha) = \begin{cases} \mu\alpha_j, & j \neq i \\ \mu(\alpha_i - 1), & j = i \end{cases} \quad (11)$$

with $\mu \geq 0$ we can verify that they constitute elements of a Metzler matrix $\Pi(\alpha) \in \mathcal{M}$ for all α defined in (10). Indeed, based on definition (11) all elements outside the main diagonal are non-negative and the identities

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\alpha) &= \sum_{j \neq i=1}^N \mu\alpha_j + \mu(\alpha_i - 1) \\ &= \mu(\sum_{j=1}^N \alpha_j - 1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

are verified for all $i \in \mathbb{K}_N$. Furthermore, using $\Pi(\alpha) \in \mathcal{M}$ defined in (11), we have the following equations

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\alpha) P_j &= \mu \sum_{j \neq i=1}^N \alpha_j P_j + \mu(\alpha_i - 1) P_i \\ &= \mu \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j - \mu P_i \\ &= \mu \sum_{j=1}^N \alpha_j (P_j - P_i) \end{aligned} \quad (13)$$

This issue is a fundamental result for the robust $\mathcal{H}_\infty$ control design that can be obtained using the conditions of Theorem 1. Thereby, by connecting the control input $u(t) = K_\sigma x(t)$ in (8), it is obtained the closed loop system described by the following state space equations

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = (A_\sigma(\alpha) + B_\sigma(\alpha)K_\sigma)x(t) + H_\sigma(\alpha)w(t), \\ &z(t) = (E_\sigma(\alpha) + F_\sigma(\alpha)K_\sigma)x(t) + G_\sigma(\alpha)w(t), \\ &x(0) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

The next theorem is a generalization of Theorem 1 for uncertain switched plants with the aim of minimize the upper-bound of the $J_\infty(\alpha)$ cost.

Theorem 2 *Let $\rho > 0$ be given, if there exist matrices $X_i = X_i^T > 0$, matrices M_i for $i \in \mathbb{K}_N$ and $\mu > 0$ satisfying*

$$\begin{bmatrix} He\{A_{ji}X_i + B_{ji}M_i\} - \mu X_i & * & * & * \\ H_{ji}^T & -\rho I & * & * \\ E_{ji}X_i + F_{ji}M_i & G_{ji} & -I & * \\ \mu X_i & 0 & 0 & -\mu X_j \end{bmatrix} < 0, \tag{15}$$

for all $i, j \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N$, then the switching rule

$$\sigma(x(t)) = arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} x(t)^T X_i^{-1} x(t) \tag{16}$$

and the state feedback gains $K_i = M_i X_i^{-1}$ for all $i \in \mathbb{K}_N$ makes the equilibrium point $x(t) = 0$ of the system (8) globally asymptotically stable fulfilling (4).

Proof: Consider $P_i = X_i^{-1}$ for all $i \in \mathbb{K}_N$. Performing the Schur complement to (15) with respect to the last row and column and multiplying the result both sides by $diag\{X_i^{-1}, I, I\}$, we obtain

$$\begin{bmatrix} He\{P_i(A_{ji} + B_{ji}K_i)\} + \mu(P_j - P_i) & * & * \\ H_{ji}^T P_i & -\rho I & * \\ E_{ji} + F_{ji}K_i & G_{ji} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{17}$$

Multiplying (17) by α_j, summing up all terms for all $j = 1, 2, ..., N$ and taking into account the result (13), it yields

$$\begin{bmatrix} He\{P_i(A_i(\alpha) + B_i(\alpha)K_i)\} + \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\alpha) & * & * \\ H_i^T(\alpha)P_i & -\rho I & * \\ E_i(\alpha) + F_i(\alpha)K_i & G_i(\alpha) & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{18}$$

Performing the following associations $A_i(\alpha) + B_i(\alpha)K_i \to A_i$, $E_i(\alpha) + F_i(\alpha)K_i \to E_i$, $H_i(\alpha) \to H_i$, $G_i(\alpha) \to G_i$ and $\pi_{ji}(\alpha) \to \pi_{ji}$, we obtain (7). Thereby, that conditions are verified for all α defined in (10). □

2.2 Application using two switching signals

Consider the subclass of uncertain linear systems

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(\alpha)x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + H_{\sigma(t)}(\alpha)w(t), \\ &z(t) = E_{\sigma(t)}(\alpha)x(t) + F_{\sigma(t)}u(t) + G_{\sigma(t)}(\alpha)w(t), \\ &x(0) = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

A new design method of switched controllers for the uncertain switched system (19) is presented in this subsection. Thus, to find the feedback gains, the control law uses two stages. The first stage is based on the procedures proposed in Theorem 2 and chooses an subscript

$$\sigma(x(t)) = arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} x(t)^T P_i x(t), \tag{20}$$

where $P_i = P_i^T > 0$ and the Lyapunov function is equal to $v(x) = x^T P_\sigma x$. The idea of the second stage is the minimization of the time derivative of the Lyapunov function, through the selection of the controller gain, which belongs to the set of gains $\{K_{\sigma k}, k \in \mathbb{K}_N\}$ where σ was obtained in the first stage. Thus, this stage selects an subscript

$$\nu(x(t)) = arg \min_{j \in \mathbb{K}_N} x(t)^T P_\sigma B_\sigma K_{\sigma j} x(t), \tag{21}$$

Thereby, considering the subscripts σ (20) and ν (21), the switched controller is defined as follows

$$u(t) = u_{\sigma\nu}(t) = K_{\sigma\nu}x(t). \tag{22}$$

From (19) and (22) the controlled system is given by

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = (A_\sigma(\alpha) + B_\sigma K_{\sigma\nu})x(t) + H_\sigma(\alpha)w(t), \ x(0) = 0 \\ &z(t) = (E_\sigma(\alpha) + F_\sigma K_{\sigma\nu})x(t) + G_\sigma(\alpha)w(t). \end{aligned} \tag{23}$$

The proposed method in this paper, presented in Theorem 3 was based on (Deaecto et al., 2010; Souza et al., 2014). Certainly, the Theorem was adapted to obtain sufficient conditions to approach the $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain switched linear systems using two switching rules.

Theorem 3 *Let $\rho > 0$ be given, if there exist $X_i = X_i^T > 0$, matrices M_{ji} for $i, j \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N$ and $\mu > 0$ satisfying*

$$\begin{bmatrix} He\{A_{ji}X_j + B_i M_{ji}\} - \mu X_j & * & * & * \\ H_{ji}^T & -\rho I & * & * \\ E_{ji}X_j + F_i M_{ji} & G_{ji} & -I & * \\ \mu X_j & 0 & 0 & -\mu X_i \end{bmatrix} < 0,$$

$$i, j \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N \tag{24}$$

then, the control law (22) with the feedback gains $K_{ij} = M_{ji}X_i^{-1}$ for all $i, j \in \mathbb{K}_N \times \mathbb{K}_N$ makes the equilibrium point $x(t) = 0$ of the system (8) globally asymptotically stable fulfilling (4).

Proof: Consider $P_i = X_i^{-1}$ for all $i \in \mathbb{K}_N$. Applying Schur complement with respect to the last row and column of (24) and multiplying the result both sides by $diag\{X_i^{-1}, I, I\}$, we obtain

$$\begin{bmatrix} He\{P_i(A_{ji} + B_i K_{ij})\} + \mu(P_j - P_i) & * & * \\ H_{ji}^T P_i & -\rho I & * \\ E_{ji} + F_i K_{ij} & G_{ji} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{25}$$

let us define $Ef_{ji} = E_{ji} + F_i K_{ij}$, multiplying (25) by α_j, summing up all terms for all $j = 1, 2, ..., N$ and taking into account the result (13), it yields

$$\begin{bmatrix} He\{P_i(A_i(\alpha) + \sum_{j=1}^N B_i K_i)\} + \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\alpha) & * & * \\ H_i^T(\alpha)P_i & -\rho I & * \\ Ef_i(\alpha) & G_i(\alpha) & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{26}$$

Performing the Schur complement in (26) and rearranging the terms, we obtain

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} He\{P_i(A_i(\alpha) + \sum_{j=1}^N B_i K_i)\} & * \\ H_i^T(\alpha)P_i & 0 \end{bmatrix} < \\ &-\begin{bmatrix} Ef_i^T(\alpha) \\ G_i^T(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ef_i(\alpha) & G_i(\alpha) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\alpha)P_j & * \\ 0 & -\rho I \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{27}$$

pre- and post-multiplying (27) by the vector $[x(t)^T \ w(t)^T]$ and its transpose respectively, it yields

$$\begin{aligned} &2x(t)^T P_i A_i(\alpha)x(t) + 2x(t)^T \sum_{j=1}^N P_i B_i K_{ij} x(t) \\ &+2x(t)^T P_i H_i(\alpha)w(t) < -z(t)^T z(t) - \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\alpha)x(t)^T P_j x(t) \\ &+\rho w(t)^T w(t) \end{aligned} \tag{28}$$

considering $x(t)^T P_i x(t) \le x(t)^T P_j x(t)$ as consequence of $i \in I(x(t))$, $j \in \mathbb{K}_N$ and $\sum_{j=1}^N \pi_{ji}x(t)^T P_j x(t) \ge 0$.

$$\begin{aligned} &2x(t)^T P_i A_i(\alpha)x(t) + 2x(t)^T \sum_{j=1}^N P_i B_i K_{ij} x(t) \\ &+2x(t)^T P_i H_i(\alpha)w(t) + z(t)^T z(t) - \rho w(t)^T w(t) < 0 \end{aligned} \tag{29}$$

furthermore,
$x(t)^T \sum_{j=1}^{N} P_i B_i K_{ij} x(t) \geq \min_{j\in\mathbb{K}_N} \{x(t)^T P_i B_i K_{ij} x(t)\}$

$$
\begin{array}{l}
2x(t)^T P_i(A_i(\alpha)x(t) + H_i(\alpha)w(t))+ \\
2\min_{j\in\mathbb{K}_N} \{x(t)^T P_i B_i K_{ij} x(t)\} + z(t)^T z(t) - \rho w(t)^T w(t) < 0 \\
2x(t)^T P_i(A_i(\alpha)x + H_i(\alpha)w(t))+ \\
2(x(t)^T P_i B_i K_{i\nu} x(t)) + z(t)^T z(t) - \rho w(t)^T w(t) < 0 \\
\min_{i\in I(x)}\{2x(t)^T P_i(A_i(\alpha)x(t) + H_i(\alpha)w(t))+ \\
2(x(t)^T P_i B_i K_{i\nu} x(t))\} + z(t)^T z(t) - \rho w(t)^T w(t) < 0 \\
D^+(v(x)) + z(t)^T z(t) - \rho w(t)^T w(t) < 0
\end{array}
$$

Where $D^+(v(x))$ is defined as the directional derivative to the right of any path in the system. Integrating both sides of the last equation from $t = 0$ to $t = \infty$, we get $J_\infty < \rho$ for all $w \in \mathcal{L}_2$. □

2.3 Linear Switched Systems with Matrix $B_\sigma(\alpha)$

It is notable that the control law (22), by requiring that $B_\sigma(\alpha) = B_\sigma$, $F_\sigma(\alpha) = F_\sigma$, has its application restricted only to the subsystems described in (19). However, this restriction can be reduced by using an integrator formulation at the cost of increasing the size of the system.

For the system (19), consider the new variable $v \in \mathbb{R}^m$ as the temporal derivative of the control input $u(t) \in \mathbb{R}^m$, such that, $\dot{x}_{n+l}(t) = \dot{u}_l(t) = v_l(t)$, $l = 1, 2, ..., m$, by rewriting the system (19), we obtain the following system

$$
\begin{array}{rl}
\dot{x}(t) = & A_i(\alpha)x(t) + B_i(\alpha)u(t) + H_i(\alpha)w(t), \\
\dot{x}_{n+1}(t) = & v_1(t), \\
\vdots & \\
\dot{x}_{n+m}(t) = & v_m(t), \\
z(t) = & E_i(\alpha)x(t) + F_i(\alpha)u(t) + G_i(\alpha)w(t)
\end{array}
\tag{30}
$$

which is equivalent to

$$
\begin{array}{l}
\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}_i(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}_i v(t) + \hat{H}_i(\alpha)w(t), \\
\hat{z}(t) = \hat{E}_i(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{G}_i(\alpha)w(t)
\end{array}
\tag{31}
$$

where

$$\hat{x}(t) = [x(t)^T \; x_{n+1} \cdots x_{n+m}]^T, \tag{32}$$

$$\hat{A}_i(\alpha) = \begin{bmatrix} A_i(\alpha) & B_i(\alpha) \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}, \hat{B}_i = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} \\ I_{m\times m} \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\hat{H}_i(\alpha) = \begin{bmatrix} H_i(\alpha) \\ 0_{m\times p} \end{bmatrix}, \; \hat{E}_i(\alpha) = \begin{bmatrix} E_i(\alpha) & F_i \end{bmatrix} \; and \; \hat{G}_i(\alpha) = G_i(\alpha) \tag{34}$$

Therefore, with this procedure, the results of Theorem 3 can be applied to control the plant (8), using the modified plant given by (31). This generalization is used in the simulation of an Active Suspension System described as follows.

3 Practical Application: Active Suspension Control

Consider the active suspension system of a vehicle (Williams, 1997; Geromel et al., 2008) whose schematic model is represented in Figure 1, the problem consists of design a switching control strategy and was motivated by the results presented in (Cardim et al., 2016).

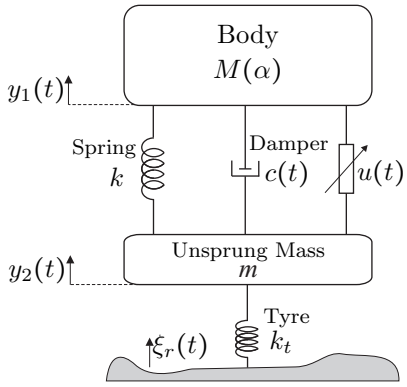


Figure 1: Active Suspension system (quarter car).

The mathematical model can be described by the following equations (Williams, 1997; Geromel et al., 2008):

$$
\begin{array}{l}
M\ddot{y}_1(t) = -c(t)(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) - k(y_1(t) - y_2(t)) \\
+k\Delta_s - Mg + u(t), \\
m\ddot{y}_2(t) = c(t)(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) + k(y_1(t) - y_2(t)) \\
-k_t(y_2(t) - \xi_r(t)) - k\Delta_s + k_t\Delta_t - mg - u(t), \\
\dot{c}(t) = -\beta c(t) + \beta c_{in}(t),
\end{array}
\tag{35}
$$

where $y_1(t)$, $y_2(t)$ and $\xi_r(t)$ are the vertical position of the body, the unsprung mass, and the road profile, respectively. The coefficients M and m are the quarter-car body mass (that is uncertain) and the unsprung mass (tire, wheel, brake, etc.), respectively. The coefficients β, k and k_t are the bandwidth of the active shock absorber, the stiffness of the suspension spring, and the stiffness of the tire, respectively. The coefficients Δ_s and Δ_t are the length of the unloaded suspension spring and of the tire, and $c(t)$ and $c_{in}(t)$ are the actual and requested damping coefficients of the passive shock absorber. In this paper, to simplify the computations is assumed that β is large enough so that $c(t) \approx c_{in}(t)$. Moreover, it is considered a switching strategy such that $c(t)$ can assume only two values, namely $c_{\min}$ and $c_{\max}$ (Geromel et al., 2008).

$$
\begin{array}{rcll}
\dot{x}(t) & = & A_\sigma(\alpha)x(t) + B_\sigma(\alpha)u(t) + B_r\xi_r(t), & (36) \\
z(t) & = & E_\sigma x(t), & (37)
\end{array}
$$

where the vector $x(t) = [y_1(t) \; \dot{y}_1(t) \; y_2(t) \; \dot{y}_2(t)]^T$, $\xi_r(t)$ is the road profile and

$$
\begin{array}{l}
A_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k}{M(\alpha)} & \frac{-c_{\min}}{M(\alpha)} & \frac{k}{M(\alpha)} & \frac{c_{\min}}{M(\alpha)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{c_{\min}}{m} & \frac{-(k+k_t)}{m} & \frac{-c_{\min}}{m} \end{bmatrix}, \\
A_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k}{M(\alpha)} & \frac{-c_{\max}}{M(\alpha)} & \frac{k}{M(\alpha)} & \frac{c_{\max}}{M(\alpha)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{c_{\max}}{m} & \frac{-(k+k_t)}{m} & \frac{-c_{\max}}{m} \end{bmatrix},
\end{array}
\tag{38}
$$

$$
\begin{array}{l}
B_1(\alpha) = B_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M(\alpha)} & 0 & \frac{-1}{m} \end{bmatrix}^T, \\
B_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k_t}{m} \end{bmatrix}^T, \\
E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{array}
\tag{39}
$$

4 Simulation Results

In the system simulation, the following parameters were adopted: M = 400kg with a limited uncertainty ±50kg, m = 50kg, $k = 2.0 \times 10^4$N/m, $k_t = 2.5 \times 10^5$N/m, $c_{\min} = 3.0 \times 10^2$(N.s)/m, and $c_{\max} = 3.9 \times 10^3$(N.s)/m. For these parameters, the two matrices A_1 and A_2 are both stable (although with poorly damped oscillating modes).

Figure 2 shows the nonlinear dependence between ρ and μ with minimization of the $\mathcal{H}_\infty$ cost of the closed loop system. Thus, to design the controller, the results shown in Figure 2 may help the designer to find coefficients (μ and ρ) according with the requirements of the design.

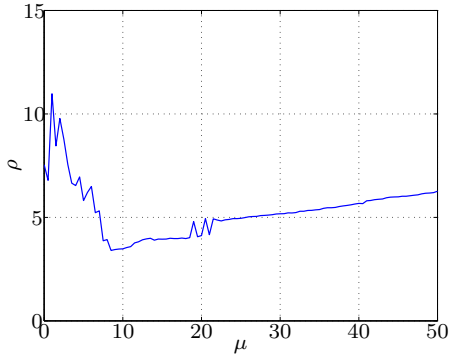


Figure 2: minimization of ρ

For the system parameters described above, considering the conditions given in Theorem 3, selecting randomly μ = 0.01, and considering the minimization of ρ (for the minimization of $J_\infty(\sigma)$ given in (3)), the proposed method provides the following matrices:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.3285 & 0.0367 & -0.2163 & -0.0039 & 0.0000 \\ 0.0367 & 0.0057 & -0.0339 & -0.0006 & 0.0000 \\ -0.2163 & -0.0339 & 0.2619 & 0.0042 & -0.0000 \\ -0.0039 & -0.0006 & 0.0042 & 0.0001 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.3441 & 0.0265 & -0.2199 & 0.0007 & 0.0000 \\ 0.0265 & 0.0024 & -0.0208 & 0.0001 & 0.0000 \\ -0.2199 & -0.0208 & 0.2049 & -0.0003 & -0.0000 \\ 0.0007 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = 1 \times 10^7 \begin{bmatrix} 1.0063 & 0.1803 & -0.5865 & -0.0334 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = 1 \times 10^7 \begin{bmatrix} -1.6878 & -0.1557 & 1.5449 & -0.0032 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = 1 \times 10^6 \begin{bmatrix} 2.9153 & 0.5299 & -3.6943 & -0.0762 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = 1 \times 10^6 \begin{bmatrix} -0.8624 & 0.1075 & -1.1836 & -0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Figures 3 and 4 show the simulations results considering as excitation signal (in the road profile $\xi_r(t)$) a pulse with peak 0.2m in the range of 0.1 seconds (shown in Figure 4) in two cases: M = 350Kg ($0 \le t < 1$ s) and M = 450Kg ($t \ge 1$ s). Note that, as shown in Figure 3, the controlled system presented an adequate performance and significantly improved the response of the position $\delta y_1(t)$.

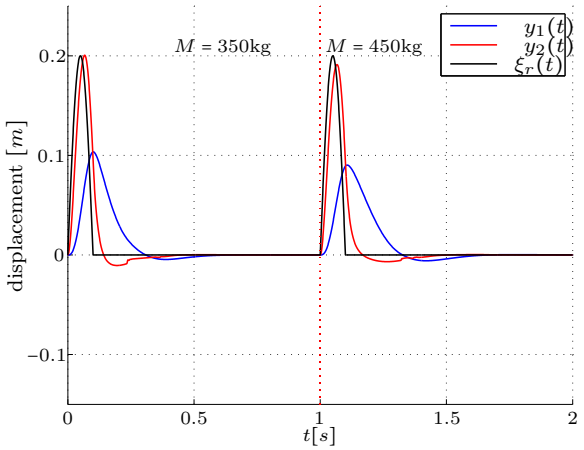


Figure 3: Trajectory of the state variables $x_1(t), x_2(t)$ of the controlled system. Considering M = 350Kg ($0 \le t < 1$ s) and M = 450Kg ($t \ge 1$

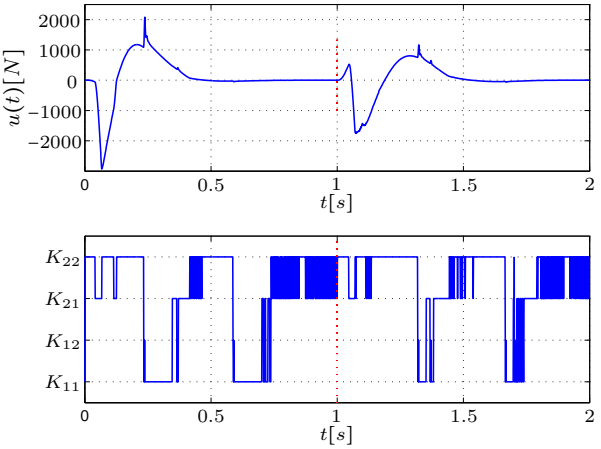


Figure 4: Control signal $u(t)$ and switching of the feedback gain $K_{\sigma\nu}$.

5 Conclusions

In this paper, the design of a set of state feedback gains with two switching rules to orchestrate them, in order to assure stability and a specified upper bound of the $\mathcal{H}_\infty$ cost, has been studied. By using the Ricatti Metzler Inequalities approach, sufficient conditions in terms of LMIs have been given to guarantee the solvability of this problem. It was verified that the switched control technique using this approach increased the flexibility of the design, in addition to obtaining a better minimization of the guaranteed cost $\mathcal{H}_\infty$, comparing with control technique that uses only a switching rule for the state vector . Finally, a practical example in an active suspension control system illustrated the effectiveness of the theoretical results.

Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge the financial support by FAPESP (Grant 2011/17610-0), CNPq and CAPES, from Brazil.

References

Assawinchaichote, W., Nguang, S. K. and Shi, P. (2004). $\mathcal{H}_\infty$ output feedback control design for uncertain fuzzy singularly perturbed systems: an LMI approach, *Automatica* **40**(12): 2147–2152.

Cardim, R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E., Ribeiro, J. M. S., Covacic, M. R. and Gaino, R. (2016). Robust switched control based on strictly positive real systems and variable structure control techniques, *Int. Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **30**: 1244–1268.

Deaecto, G. S. and Geromel, J. C. (2009). Switched state feedback control for continuous-time polytopic systems and its relationship with LPV control, *Control Conference (ECC), 2009 European*, IEEE, pp. 2073–2078.

Deaecto, G. S., Geromel, J. C. and Daafouz, J. (2010). On $\mathcal{H}_\infty$ control design of continuous-time switched linear systems, *49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, USA, pp. 7345–7350.

Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox - For Use with Matlab*, The Math Works, Inc.

Gao, H., Wang, Z. and Wang, C. (2005). Improved $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time fuzzy systems: a cone complementarity linearization approach, *Information sciences* **175**(1): 57–77.

Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **45**(5): 1915–1930.

Geromel, J. C., Colaneri, P. and Bolzern, P. (2008). Dynamic output feedback control of switched linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**(3): 720–733.

Hespanha, J. P. (2003). Root-mean-square gains of switched linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(11): 2040–2045.

Hespanha, J. P. (2004). Uniform stability of switched linear systems: extensions of Lasalle's invariance principle, *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**(4): 470–482.

Lall, S. G. and Dullerud, G. E. (1997). $\mathcal{H}_\infty$ synthesis for multi-rate hybrid systems, *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, Vol. 3, IEEE, pp. 2035–2040.

Liberzon, D. (2003). Switching in systems and control, ser. systems & control: Foundations & applications.

Liberzon, D. and Morse, A. S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control systems* **19**(5): 59–70.

Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results, *Automatic control, IEEE Transactions on* **54**(2): 308–322.

Löfberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab, *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE Int. Symposium on*, IEEE, pp. 284–289.

Nie, H. and Zhao, J. (2003). Hybrid state feedback $\mathcal{H}_\infty$ robust control for a class of linear systems with time-varying norm-bounded uncertainty, *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*, Vol. 4, IEEE, pp. 3608–3613.

Souza, W. A., Teixeira, M. C. M., Cardim, R. and Assunção, E. (2014). On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi–Sugeno fuzzy models, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **22**(6): 1720–1727.

Williams, R. A. (1997). Automotive active suspensions, Part I: Basic principles, *IMechE* **211**: 415–426.

Zhai, G., Hu, B., Yasuda, K. and Michel, A. N. (2001). Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems, *Journal of the franklin institute* **338**(7): 765–779.