



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Pós-Graduação em Engenharia Mecânica



Difusão Tridimensional Não Linear Transiente

Odacir Almeida Neves

Ilha Solteira - SP

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DIFUSÃO TRIDIMENSIONAL NÃO LINEAR TRANSIENTE

ODACIR ALMEIDA NEVES

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Orientador: Prof. Dr. João Batista Aparecido

Ilha Solteira - SP, Julho de 2003

BCpIS - FEIS - UNESP

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da FEIS/UNESP

Neves, Odacir Almeida

N518d Difusão tridimensional não linear transiente / Odacir Almeida Neves.
Ilha Solteira : [s.n.], 2003
xxv, 162 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2003

Orientador: João Batista Aparecido
Bibliografia: p. 109-113

1. Difusão - Problemas. 2. Difusão em sólidos. 3. Transformadas integrais.
4. Não-lineares. 5. Transferência de calor. 6. Equações diferenciais não-lineares – Soluções numéricas.

30501016

Difusão Tridimensional Não Linear Transiente

Odacir Almeida Neves

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO
DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: "CIÊNCIAS TÉRMICAS" E APROVADA
EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. João Antonio Pereira – Coordenador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. João Batista Aparecido - Orientador

Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo

Prof. Dr. João Batista Campos Silva

Proc. 063104 - NPD 42

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCNICO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
13/10/03	31.03.04
RECEBIDO POR	TOMBO
ailza	T. 1466
AQUIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Wloacão Autor R\$ 10,00	N518d

cc
bys 215167
lps 56122

Ilha Solteira – SP, julho de 2003

*Dedico este trabalho
a meus pais Jaimiro e Maria
e minhas irmãs Iderli e Joseli.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela sabedoria concedida no desenvolvimento deste trabalho.

Durante sua realização, contei com ajuda de várias pessoas, às quais gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos:

- *Ao Prof. João Batista Aparecido, pela orientação, amizade e, acima de tudo, à experiência de vida adquirida no convívio do dia a dia;*
- *Aos Profs. João Batista Campos Silva e José Ricardo Figueiredo, membros da banca examinadora, que aceitaram a incumbência de julgar este trabalho;*
- *Aos Profs. André Luiz Seixlack, Cássio Roberto Macedo Maia, Edson Del Rio Vieira, João Batista Campos Silva e Sérgio Said Mansur que, direta ou indiretamente, proporcionaram valiosas sugestões e discussões nas etapas deste trabalho;*
- *Aos colegas do Departamento de Engenharia Mecânica, Alex, Elaine, Elias, Juliana, Sandra e Vânia, pela dedicação e apoio;*
- *Agradeço também os bibliotecários João, Sandra e Elaine pela ajuda na revisão bibliográfica;*
- *Aos amigos da pós-graduação pelo apoio, força e companheirismo. Não me atrevo citar nomes pois, cada um de sua maneira, deixou sua contribuição para a realização deste trabalho. Muito obrigado!*
- *Ao DEM / Unesp / Ilha Solteira que me recebeu, dando plenas condições de desenvolver este projeto;*
- *À minha família pelo constante incentivo e encorajamento, em especial aos meus avós, Licindo (in memorian) e Carolina;*
- *À Fapesp pelo suporte financeiro que viabilizou a realização deste trabalho, concedido na forma de bolsa de mestrado (Proc. 01/04481-6);*
- *O melhor resultado deste trabalho foram os amigos verdadeiros, que entre outras coisas, me ensinaram a olhar a vida em outro ângulo. Vocês valem ouro para mim!*

Lista de Figuras.....	xiii
Lista de Tabelas.....	xix
Lista de Símbolos.....	xxi
Resumo.....	xxiii
Abstract.....	xxv

Capítulo 1 – Introdução.....01

1.1 – Revisão Bibliográfica.....	02
----------------------------------	----

Capítulo 2 – Difusão não-linear transiente em geometria cartesiana.....09

2.1 – Formulação Matemática.....	09
2.1 – Problema Auxiliar de Autovalor.....	11
2.3 – Transformação da Formulação do Problema.....	12
2.3.1 – Par Transformada - Inversa.....	12
2.3.2 – Transformação do Problema para o Eixo x.....	14
2.3.3 – Transformação do Problema para o Eixo y.....	16
2.3.4 – Transformação do Problema para o Eixo z.....	19
2.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas.....	23
2.5 – Solução do Sistema Não-Linear.....	24

Capítulo 3 – Difusão não-linear transiente em geometria cilíndrica.....25

3.1 – Formulação Matemática.....	25
3.2 – Problema Auxiliar de Autovalor.....	27
3.3 – Transformação da Formulação do Problema.....	28
3.3.1 – Par Transformada - Inversa para o Eixo z.....	28
3.3.2 – Transformação do Problema para o Eixo z.....	30
3.3.3 – Par Transforma – Inversa para o Eixo θ	31
3.3.4 – Transformação do Problema para o Eixo θ	32
3.3.5 – Par Transforma – Inversa para o Eixo r.....	35
3.3.6 – Transformação do Problema para o Eixo r.....	36
3.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas.....	41
3.5 – Solução do Sistema Não-Linear.....	41

Capítulo 4 – Aplicação em Coordenadas Cartesianas: Resfriamento do Paralelepípedo.....43

4.1 – Análise Matemática.....	43
4.2 – Problema Auxiliar de Autovalor.....	46
4.3 – Transformada Integral Generalizada.....	47
4.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas.....	50
4.5 – Solução do Sistema Não Linear.....	51
4.6 – Resultados e Discussão.....	51
4.6 1– Resultados para os diferentes materiais com $K(T) = a$	54
4.6 2– Resultados para os diferentes materiais com $K(T) = a + bT$	62
4.6 3– Resultados para os diferentes materiais com $K(T) = a + bT + bT^2$	74
4.7 – Comparação dos resultados com os apresentados na literatura.....	79

Capítulo 5 – Aplicação em Coordenadas Cilíndricas: Resfriamento de um setor de cilindro.....87

5.1 – Formulação Matemática.....	87
5.2 – Problema Auxiliar de Autovalor.....	90
5.3 – Transformada Integral Generalizada.....	92
5.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas.....	94
5.5 – Resultados e Discussão.....	95

Capítulo 6 – Conclusões e sugestões para trabalhos futuros.....105

Referências Bibliográficas109

Apêndice A – Integrais na Transformação das Geometrias Cartesianas e Cilíndricas.....115

Apêndice B – Problema de Sturm - Liouville.....133

Apêndice C – Problema de Autovalor em Coordenadas Cartesianas.....137

Apêndice D – Problema de Autovalor em Coordenadas Cilíndricas.....141

Apêndice E – Funções de Classe C^k145

Anexo A – Distribuição de temperatura no paralelepípedo e no setor de cilindro.....147

Anexo B – Subrotinas fcn e fcnj.....153

Lista de Figuras

Capítulo 4

Figura 4.1 - Condutividade térmica dimensional em função da temperatura.....	52
Figura 4.2 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média, em função do número de Fourier, para $N_x = N_y = N_z = 5$, material Chumbo.....	55
Figura 4.3 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média, em função do número de Fourier, para $N_x = N_y = N_z = 7$, material Chumbo.....	55
Figura 4.4 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier, para $N_x = N_y = N_z = 10$, material Chumbo.....	56
Figura 4.5 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo para $K(T) = 1$ em função dos eixos do espaço, para $Fo = 0,02$, material Chumbo.....	56
Figura 4.6 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo para $K(T) = 1$ em função dos eixos do espaço, para $Fo = 0,18$, material Chumbo.....	57
Figura 4.7 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo para $K(T) = 1$ em função dos eixos do espaço, para $Fo = 0,5$, material Chumbo.....	57
Figura 4.8 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média, em função do número de Fourier, para $N_x = N_y = N_z = 5$, material Aço Aisi 304.....	58
Figura 4.9 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média, em função do número de Fourier, para $N_x = N_y = N_z = 7$, material Aço Aisi 304.....	59

Figura 4.10 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média, em função do número de Fourier, para $N_x = N_y = N_z = 10$, material Aço Aisi 304.....	59
Figura 4.11 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média, em função do número de Fourier, para $N_x = N_y = N_z = 5$, material Paládio.....	60
Figura 4.12 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média, em função do número de Fourier, para $N_x = N_y = N_z = 7$, material Paládio.....	61
Figura 4.13 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média, em função do número de Fourier, para $N_x = N_y = N_z = 10$, material Paládio.....	61
Figura 4.14 - Distribuição da temperatura máxima e média em função do número de Fourier para o chumbo com $N_x = N_y = N_z = 5$ e $N_x = N_y = N_z = 7$, material Chumbo.....	63
Figura 4.15 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier com $N_x = N_y = N_z = 10$, material Chumbo.....	63
Figura 4.16 - Diferença da distribuição das temperaturas máxima e média em função do número de Fourier, material Chumbo.....	63
Figura 4.17 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier para a condutividade térmica constante e variando linearmente com a temperatura, material Chumbo.....	64
Figura 4.18 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,02$, material Chumbo.....	65
Figura 4.19 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,18$, material chumbo.....	65
Figura 4.20 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, material chumbo.....	66



- Figura 4.21 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier com $N_x = N_y = N_z = 5$ e $N_x = N_y = N_z = 7$, material Aço Aisi 304.....67
- Figura 4.22 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier, com $N_x = N_y = N_z = 10$, material Aço Aisi 304.....67
- Figura 4.23 - Diferença da distribuição das temperaturas máxima e média em função do número de Fourier, material Aço Aisi 304.....67
- Figura 4.24 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier para a condutividade térmica constante e variando linearmente com a temperatura, material Aço Aisi 304.....68
- Figura 4.25 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,02$, material Aço Aisi 304.....68
- Figura 4.26 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,18$, material Aço Aisi 304.....69
- Figura 4.27 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, material Aço Aisi 304.....69
- Figura 4.28 - Diferença da distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, entre os materiais Aço Aisi 304 e Chumbo.....70
- Figura 4.29 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier, com $N_x = N_y = N_z = 5$ e $N_x = N_y = N_z = 7$, material Paládio.....71
- Figura 4.30 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier, com $N_x = N_y = N_z = 10$, material Paládio.....71
- Figura 4.31 - Diferença da distribuição das temperaturas máxima e média em função do número de Fourier, material Paládio.....71
- Figura 4.32 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,02$, material Paládio.....72



Figura 4.33 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,18$, material Paládio.....	72
Figura 4.34 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, material Paládio.....	73
Figura 4.35 - Diferença da distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, entre os materiais Paládio e Aço Aisi 304.....	74
Figura 4.36 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier, com $N_x = N_y = N_z = 5$ e $N_x = N_y = N_z = 7$, material Paládio.....	75
Figura 4.37 - Distribuição da temperatura máxima e média em função do número de Fourier para a condutividade térmica constante, linear e quadrática com a temperatura, material Paládio.....	75
Figura 4.38 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,02$, material Paládio.....	76
Figura 4.39 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,18$, material Paládio.....	76
Figura 4.40 - Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, material Paládio.....	77
Figura 4.41 - Diferença da distribuição da temperaturas máxima em função do número de Fourier, com largura de bandas iguais a 1, 3, 5, 11, 21, 41, 101 e 201.....	78
Figura 4.42 - Diferença da distribuição da temperaturas média em função do número de Fourier, com largura de bandas iguais a 1, 3, 5, 11, 21, 41, 101 e 201.....	78
Figura 4.43 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,05$, com $b = 0,1$ e $x = 0,1$	79
Figura 4.44 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,05$, com $b = 0,1$ e $x = 0,3$	80
Figura 4.45 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,1$, com $b = 0,1$ e $x = 0,1$	80

Figura 4.46 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,1$, com $b = 0,1$ e $x = 0,3$	81
Figura 4.47 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,5$, com $b = 0,1$ e $x = 0,1$	81
Figura 4.48 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,5$, com $b = 0,1$ e $x = 0,3$	82
Figura 4.49 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,05$, com $b = 0,5$ e $x = 0,1$	83
Figura 4.50 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,05$, com $b = 0,5$ e $x = 0,3$	83
Figura 4.51 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,1$, com $b = 0,5$ e $x = 0,1$	84
Figura 4.52 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,1$, com $b = 0,5$ e $x = 0,3$	84
Figura 4.53 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,5$, com $b = 0,5$ e $x = 0,1$	85
Figura 4.54 - Comportamento da temperatura para $Fo = 0,3$, com $b = 0,5$ e $x = 0,3$	85

Capítulo 5

Figura 5.1 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média, respectivamente, em função do número de Fourier, material Aço Aisi.....	97
Figura 5.2 - Distribuição de temperatura no setor de cilindro para $K(T) = 1$ em função dos eixos do espaço, com $Fo = 0,02$	98
Figura 5.3 - Distribuição de temperatura no setor de cilindro para $K(T) = 1$ em função dos eixos do espaço, com $Fo = 0,08$	99
Figura 5.4 - Distribuição de temperatura no setor de cilindro para $K(T) = 1$ em função dos eixos do espaço, com $Fo = 0,25$	99
Figura 5.5 - Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier, material Aço Aisi 304.....	101



Figura 5.6 - Distribuição das (a) temperatura máxima e (b) da temperatura média em função do número de Fourier para a condutividade térmica constante e variável com a temperatura.....101

Figura 5.7 - Distribuição de temperatura tridimensional no setor de cilindro para o equacionamento não linear e $Fo = 0,02$102

Figura 5.8 - Distribuição de temperatura tridimensional no setor de cilindro para o equacionamento não linear e $Fo = 0,08$103

Figura 5.9 - Distribuição de temperatura tridimensional no setor de cilindro para o equacionamento não linear e $Fo = 0,25$103

Lista de Tabelas

Capítulo 4

Tabela 4.1 – Intervalos adotados no resfriamento do Paralelepípedo.....52

Tabela 4.2 – Condutividade térmica para os materiais analisados.....53

Tabela 4.3 – Condutividade térmica para os materiais analisados, caso $K(T) = a$54

Capítulo 5

Tabela 5.1 – Geometrias para o problema difusivo em coordenadas cilíndricas.....90

Anexo A

Tabela A.1 – Distribuição de temperatura adimensional no paralelepípedo, $Fo = 0,02$147

Tabela A.2 – Distribuição de temperatura adimensional no paralelepípedo, $Fo = 0,18$148

Tabela A.3 – Distribuição de temperatura adimensional no paralelepípedo, $Fo = 0,5$149

Tabela A.4 – Distribuição de temperatura adimensional no setor de cilindro, $Fo = 0,02$150

Tabela A.5 – Distribuição de temperatura adimensional no setor de cilindro, $Fo = 0,08$151

Tabela A.6 – Distribuição de temperatura adimensional no setor de cilindro, $Fo = 0,25$152



Lista de Símbolos

Símbolos Arábicos

A	matriz que representa os termos lineares do problema
B	matriz que representa os termos não-lineares do problema
$d(\mathbf{x})$	coeficiente do termo de dissipação linear na equação diferencial parcial
$d^*(\mathbf{x})$	termo fonte da equação não-transformável
Fo	número de Fourier
$f(\mathbf{x})$	distribuição inicial do potencial
$\tilde{f}_{imp}^{(xyz)}$	distribuição inicial do potencial transformada para os eixos x , y e z
k_{ref}^*	condutividade térmica de referência
$k^*(T^*)$	condutividade térmica dimensional
$K(T)$	condutividade térmica adimensional
$K(\mathbf{x}, T)$	coeficiente do termo difusivo na equação diferencial parcial
$K_0(\mathbf{x})$	parcela do coeficiente não-linear independente da temperatura
$K_T(\mathbf{x}, T)$	parcela do coeficiente não-linear dependente da temperatura
N_k	ordem de truncamento na direção k
$P(\mathbf{x}, t)$	termo fonte da equação diferencial parcial
$P_{imp}^{(xyz)}(t)$	termo fonte da equação diferencial parcial transformado para os eixos x , y e z
t^*	variável tempo na forma dimensional
t	variável tempo na forma adimensional
$T(\mathbf{x}, t)$	distribuição de temperatura
$w(\mathbf{x})$	coeficiente do termo transiente da equação diferencial parcial
$w^*(\mathbf{x})$	coeficiente não-transformável do termo transiente
$\mathbf{x}$	vetor posição



$\tilde{T}_i^{(x)}$	distribuição de temperatura transformada para o eixo x
$\tilde{T}_{im}^{(xy)}$	distribuição de temperatura transformada para o eixo x e y
$\tilde{T}_{imp}^{(xyz)}$	distribuição de temperatura transformada para o eixo x, y e z
$\tilde{T}_\infty(t)$	vetor que contém os termos transformados infinitos
$\tilde{T}_\infty^{(x)}$	termo dependente da temperatura, transformado para o eixo x
$\tilde{T}_\infty^{(xy)}$	termo dependente da temperatura, transformado para o eixo x e y
$\tilde{T}_\infty^{(xyz)}$	termo dependente da temperatura, transformado para o eixo x, y e z
$\tilde{T}^{(xyz)}$	termo dependente da temperatura, transformado e truncado nos eixos x, y e z.

Símbolos Gregos

α, β	coeficientes da condição de contorno
Ψ	autofunções
μ	autovalores dos problemas auxiliares
γ	autovalores presentes no argumento das autofunções

Resumo

Este trabalho trata de uma aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada para resolver uma classe de problemas de difusão tridimensional, não linear e transiente. Os sistemas de coordenadas ortogonais assumidos foram o cartesiano e o cilíndrico e os domínios analisados foram um paralelepípedo cartesiano e um setor de cilindro. Considerou-se condições de contorno de primeiro, segundo e terceiro tipos e efetuou-se uma análise formal da classe de problemas envolvidos. Como aplicação dessa análise formal, apresentou-se para os dois sistemas de coordenadas adotados, o problema de condução de calor tridimensional não-linear e transiente, obtendo resultados para a distribuição de temperatura através de um programa computacional implementado para simular o fenômeno difusivo no paralelepípedo e no setor de cilindro circular. Os resultados obtidos foram comparados com resultados disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Difusão, não-linear, transformada integral, tridimensional, transiente.



Abstract

This work is about applying the Generalized Integral Transform Technique to solve a class of three-dimensional, non-linear unsteady state diffusion problems. The orthogonal coordinate systems considered were the cartesian and the cylindrical, and the domains analyzed were a cartesian parallelepiped and a cylindrical sector. It was considered boundary conditions of first, second and third kind, and it was done a formal analysis of that class of diffusion problems in order to solve them. As application for that analysis developed, it was presented for the two coordinate systems the three-dimensional non-linear unsteady state heat conduction problem, obtaining results for temperature distribution through the use of a computational program implemented to simulate the diffusive phenomenon within a parallelepiped and a circular sector. The obtained results were compared to those ones available in the open literature.

Keywords: Diffusion, non-linear, integral transform, three-dimensional, unsteady state.



Introdução

Os processos de transferência de calor estão presentes em aplicações industriais e tecnológicas. Mesmo na natureza, animais e plantas não sobrevivem sem os processos vitais de transferência de calor que fazem parte de seu metabolismo. Assim, a transferência de calor tornou-se, desde tempos remotos, um importante campo de pesquisa teórica e aplicada.

Fisicamente, o processo da transferência de calor pode ocorrer em regime permanente ou transiente. As propriedades físicas do material podem ser homogêneas ou heterogêneas. Este pode ser ainda isotrópico ou anisotrópico.

Matematicamente, o modelamento existente leva a equações diferenciais ordinárias de primeira ou segunda ordem ou a equações diferenciais parciais de segunda ordem sobre domínios bidimensionais ou tridimensionais. Tais equações podem ser lineares ou não lineares.

Uma hipótese muito utilizada na solução de problemas de difusão é considerar as propriedades físicas da matéria como homogêneas e isotrópicas. Este modelamento físico leva a um modelo matemático linear. Se as propriedades termodinâmicas variam consideravelmente no domínio e ao longo do tempo, o modelo físico que admite tais propriedades constantes pode não ser satisfatório. Em vista disso, torna-se necessário considerar a variação das propriedades difusivas, em função de propriedades termodinâmicas. Este modelamento físico leva a um equacionamento matemático não linear.

Em engenharia, muitos dos problemas reais de transferência de calor são tridimensionais e transientes. Porém, dependendo das características geométricas e temporais do problema em questão, pode-se considerá-lo unidimensional ou bidimensional e em regime



permanente. São aproximações feitas com o objetivo de simplificar e diminuir o esforço matemático e computacional, correndo-se o risco do modelo físico ficar muito distante da realidade que se deseja investigar.

Pretende-se neste trabalho, estender a Técnica da Transformada Integral Generalizada - TTIG, para resolver problemas de difusão não lineares, tridimensionais e transientes, em coordenadas cartesianas e cilíndricas, sobre domínios na forma de paralelepípedos cartesianos, cilindros maciços, cilindros ocos e setores de cilindros. As soluções formais obtidas na fase de análise matemática das classes de problemas investigados foram implementadas computacionalmente e resultados numéricos foram, então, obtidos.

Com o objetivo de generalizar a presente análise, considera-se no modelo físico os efeitos tridimensionais e transientes, o que naturalmente torna o modelo matemático do problema mais complexo. Acrescentando os efeitos tridimensionais, não lineares e transientes, tem-se um modelo matemático constituído por equações diferenciais parciais não lineares, em três eixos do espaço e no eixo do tempo.

1.1 - Revisão Bibliográfica

Os problemas de difusão são formulados por equações diferenciais parciais lineares ou não-lineares. As técnicas analíticas tradicionais não abordam todos problemas. Soluções aproximadas foram propostas através de métodos numéricos, como exemplo, o Método de Elementos Finitos e o Método de Diferenças Finitas.

Técnicas de soluções híbridas analítico-numéricas têm sido desenvolvidas e utilizadas em diversos trabalhos disponíveis na literatura. Nesse contexto destacam-se a Técnica da Transformada Integral Clássica - TTIC e a Técnica da Transformada Integral Generalizada - TTIG.

A Técnica da Transformada Integral Clássica (Mikhailov e Özisik, 1984), recebeu um forte impulso depois da representação sistemática de sete classes diferentes de problemas lineares no campo da difusão de calor e massa. A TTIC é uma extensão do método de separação de variáveis, que trabalha com não-homogeneidades na equação ou nas condições de contorno, em problemas lineares, não separáveis, em razão da presença dos termos fontes. É aplicada na solução de problemas de difusão lineares, transientes ou permanentes, homogêneos ou não homogêneos.

A idéia básica da TTIC é, após a definição de um problema auxiliar de autovalor mais apropriado, transformar a equação diferencial parcial original em um sistema de equações diferenciais ordinárias infinito e desacoplado que pode ser prontamente resolvido.

Na aplicação da Técnica da Transformada Integral Clássica, os passos básicos a serem seguidos (Cotta, 1993) são:

1. Encontrar o problema de autovalor associado, muitas vezes, por meio da separação de variáveis, aplicado ao problema homogêneo;
2. Desenvolver o par transformada-inversa apropriado;
3. Aplicar a transformada na equação diferencial parcial, fazendo uso das condições de contorno;
4. Resolver o sistema resultante de equações diferenciais ordinárias desacopladas;
5. Utilizar a fórmula da inversa estabelecida anteriormente para construção do potencial original.

Porém, esta técnica é limitada, na obtenção de uma solução exata, caso não seja possível transformar alguns dos termos envolvidos em um determinado problema, mesmo quando esses, são lineares, (Cotta, 1993). Assim, a Técnica da Transformada Integral Clássica é aplicada somente em problemas lineares, em que todos os termos sejam transformáveis.

Na literatura, encontra-se diversas aplicações em transferência de calor e massa que são representadas por modelos não lineares dos fenômenos de difusão, (Serfaty, 1997). Em geral, a formulação matemática resultante não pode ser abordada por técnicas analíticas clássicas, como a Técnica da Transformada Integral Clássica, principalmente em problemas multidimensionais e transientes.

Embora extremamente útil nas aplicações apresentadas em Mikhailov e Özisik, (1984), a TTIC torna-se inviável na obtenção de uma solução analítica para o problema, quando neste, aparecem termos não transformáveis.

Com o objetivo de aumentar a flexibilidade desta técnica, foi desenvolvida a Técnica da Transformada Integral Generalizada, que consiste em transformar a equação diferencial parcial original em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas, que é truncado com uma ordem suficientemente grande e resolvido numericamente. Em seguida, faz-se uso da fórmula de inversão para obter o potencial original.



A TTIG é então utilizada para resolver, entre outros, problemas de difusão não lineares e transientes, presentes nos processos da transferência de calor e massa. Desde o trabalho pioneiro de Ozisik & Murray (1974), que tratava de coeficientes da condição de contorno variáveis, diversas idéias têm surgido com o objetivo de estender o procedimento desta técnica para problemas mais complexos. Assim a Técnica da Transformada Integral Generalizada abrange problemas das seguintes categorias:

- Problemas envolvendo equações com coeficientes variáveis;
- Problemas envolvendo condição de contorno com coeficientes da variáveis;
- Problemas com contornos móveis;
- Problemas em que a complexidade está associada ao problema auxiliar;
- Problemas não-lineares.

Para a aplicação da TTIG, os passos básicos são:

1. Escolher um problema auxiliar associado, evitando-se problemas computacionalmente complexos;
2. Obter o par transformada-inversa apropriado;
3. Aplicar a transformada integral na equação diferencial parcial original, resultando em um sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado;
4. Resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, truncando-o com uma ordem suficientemente grande para então resolvê-lo numericamente;
5. Utilizar a fórmula da inversa para construir o potencial original.

Cotta e Özisik (1987), analisaram problemas de difusão com coeficientes dependentes do tempo, obtendo soluções analíticas. Para isso, fizeram uso da TTIG, a fim de evitar a dependência do tempo no problema de autovalor correspondente, sendo que foram analisados três tipos de problemas, cada qual associando o tempo com um determinado coeficiente. Estabeleceram-se soluções formais tridimensionais para casos gerais e, então, soluções específicas unidimensionais foram sistematicamente obtidas.

Problemas difusivos bidimensionais em regime permanente e em escoamento laminar em domínios irregulares foram resolvidos por Aparecido, Cotta e Özisik (1989). Os autores utilizaram a TTIG no desenvolvimento analítico das soluções. Como exemplo,

apresentou-se uma aplicação em escoamento laminar plenamente desenvolvido no interior de dutos triangulares com ângulo reto. A precisão das soluções numéricas foi examinada, comparando-as com os resultados apresentados por Shah & London (1978).

A Técnica da Transformada Integral Generalizada foi utilizada por Cotta (1990), a fim de obter a solução de problemas de difusão não-lineares, nos quais, as não-linearidades estavam presente no termo fonte. Para ilustrar o caso, considerou-se a aplicação de um problema transiente de condução de calor por radiação em aletas, sujeito a uma dissipação de calor não linear. Os fluxos de calor e os perfis de temperatura foram obtidos para diferentes situações e para várias ordens de truncamento e realizou-se também uma análise da convergência para valores crescentes da ordem de truncamento e valores diferentes de tempo.

Serfaty e Cotta (1990) consideraram a não-linearidade no termo difusivo, enquanto a equação e os termos fontes foram mantidos lineares. Naquele trabalho, considerou-se uma formulação geral do problema multidimensional transiente e assim soluções formais foram obtidas em termos do potencial transformado. Uma aplicação em condução de calor com condutividade térmica dependente da temperatura foi proposta e, então, foram apresentados resultados numéricos ilustrando a convergência para diferentes ordens de truncamento do sistema de equações diferenciais ordinárias, EDO, infinito associado.

Vários tipos de problemas que podem ser resolvidos pela técnica da transformada integral generalizada foram apresentados em Cotta (1993): problemas com coeficientes variáveis na equação e nas condições de contorno, problemas com contornos móveis, problemas em geometrias irregulares não transformáveis, problemas de autovalores multidimensionais não separáveis, problemas acoplados, problemas de difusão não-linear, problemas do tipo convectivo-difusivo, problemas de camada limite e equações de Navier-Stokes, em formato bidimensional e simplificada.

Mikhailov e Cotta (1994) fizeram uso da técnica da transformada integral generalizada com o objetivo de transformar problemas de autovalores descritos por equações diferenciais parciais em problemas de autovalores algébricos, que podem ser resolvidos utilizando códigos computacionais existentes na literatura. Os autores apresentaram uma formulação para os operadores que freqüentemente aparecem em fenômenos de difusão de calor e massa. Para ilustrar o método, três exemplos foram considerados: problema de autovalores para escoamento laminar no interior de um canal de placas paralelas; problemas de autovalores para convecção forçada em dutos com a temperatura variando periodicamente e problemas de autovalores para escoamento laminar no interior de dutos retangulares. Em ambos exemplos, o

método mostrou-se preciso e eficiente, podendo ser aplicado em funções mais gerais e problemas multidimensionais.

Aparecido (1997) utilizou a TTIG na elaboração de um trabalho cujo objetivo era mostrar como escolher problemas de autovalores auxiliares para resolver problemas térmicos do tipo convectivo-difusivo. Uma classe de problemas considerados foi matematicamente modelado por uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, sujeita a condições de contorno gerais de primeiro, segundo e terceiro tipo e condição inicial. Como exemplo, foi resolvido o problema convectivo-difusivo de Graetz, usando dois tipos de problemas auxiliares de autovalores, um com autofunções do tipo trigonométricas e o segundo com autofunções hipergeométricas degeneradas. Os resultados computacionais obtidos pelo autor concordaram muito bem com os apresentados na literatura.

A técnica da transformada integral generalizada foi utilizada por Dantas, Orlande e Cotta (2002), para obter a solução de problemas de secagem bidimensional em coordenadas cilíndricas. A modelagem física considerada pelos autores foi descrita pela equação linear de Luikov e então, através da TTIG, as soluções foram obtidas e a convergência das séries de soluções para tal problema foram examinadas para diferentes números de Biot. A solução para o caso envolvendo superfície lateral adiabática mostrou-se de acordo com os resultados unidimensionais previamente obtidos com a mesma técnica.

Problemas puramente difusivos modelados por equações diferenciais elípticas lineares, definidos em domínios irregulares, ou seja, aqueles em que não se consegue encontrar um sistema de coordenadas ortogonais que coincidam com a geometria do problema, foram resolvidos por Aparecido & Cotta (1987, 1990b), Aparecido, Cotta & Ozisik (1989), Cotta, Leiroz & Aparecido (1992), e Aparecido, Vieira & Campos Silva (2000, 2001).

Problemas convectivo-difusivo, termicamente em desenvolvimento e hidrodinamicamente desenvolvidos, são modelados matematicamente por equações diferenciais parciais de segunda ordem, do tipo parabólico bidimensional ou tridimensional. Esses tipos de problemas foram resolvidos utilizando a TTIG por Aparecido (1997); Aparecido & Cotta (1990a, 1990c, 1992); Aparecido & Ozisik (1996, 1998); Dias Júnior & Aparecido (1999); Lindquist e Aparecido (1999, 2001) e Maia, Aparecido & Milanez (2000). Parte desses problemas foram definidos sobre domínios irregulares e outra parte sobre domínios regulares. No trabalho de Maia, Aparecido & Milanez (2000) o domínio elíptico original foi transformado em um domínio regular, mediante uma transformação de coordenadas. No novo sistema de coordenadas o

domínio tornou-se regular, mas o equacionamento ficou com coeficientes variáveis não separáveis.

Alguns dos trabalhos mencionados no parágrafo anterior a respeito do escoamento laminar em dutos retos de seção transversal regular ou irregular, bem como a transferência de calor nesse tipo de tubo sob condições de contorno de primeiro, segundo e terceiro tipos, foram apresentados por Aparecido (2001).

O problema de desenvolvimento simultâneo da velocidade e temperatura (termicamente e hidrodinamicamente em desenvolvimento) também foi resolvido por Campos Silva, Aparecido & Cotta (1992), utilizando a TTIG.

A TTIG também foi utilizada com sucesso na solução de problemas inversos de convecção, termicamente em desenvolvimento, em dutos retos com seção transversal em forma de setor circular por Aparecido & Ozisik, (1998, 1999a,b; 2001) e na solução de problemas não-lineares unidimensionais de difusão térmica em sólidos, com mudança de fase na fronteira, por Diniz & Aparecido (1990), Diniz et al. (1990), Diniz et al. (1992) e Diniz et al. (1993).

Difusão não-linear transiente em geometria cartesiana

A formulação matemática do problema de difusão tridimensional não linear transiente no sistema de coordenadas cartesianas, utilizando a TTIG é desenvolvida a seguir.

2.1 – Formulação Matemática

Considere um problema de difusão tridimensional, não-linear, transiente, definido no interior de um paralelepípedo cartesiano, incluindo efeitos não-lineares no termo difusivo de acordo com a formulação matemática geral abaixo

$$w(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{x}, t) + LT(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, definido no domínio $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$, $z_0 \leq z \leq z_1$, com condições inicial e de contorno, respectivamente, dadas por,

$$T(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ e } f \in C^0 \quad (2.2a)$$

$$B_0 T(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} = (x = x_0, y = y_0, z = z_0) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \quad (2.2b)$$

$$B_1 T(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} = (x = x_1, y = y_1, z = z_1) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \quad (2.2c)$$

nas quais os operadores L , B_0 e B_1 são definidos como seguem,

$$L \equiv -\nabla \bullet [K(\mathbf{x}, T) \nabla(\cdot)] + d(\mathbf{x}); \quad (2.3a)$$

$$B_0 \equiv \alpha_0(\mathbf{x}_0) + \beta_0(\mathbf{x}_0) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}; \quad (2.3b)$$

$$B_1 \equiv \alpha_1(\mathbf{x}_1) + \beta_1(\mathbf{x}_1) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}, \quad (2.3c)$$

onde $d(\mathbf{x}) = d^{(x)}(x) + d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z) + d^*(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x}) = w^{(x)}(x)w^{(y)}(y)w^{(z)}(z)w^*(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x}) > 0$, $P(\mathbf{x}, t)$ são funções quadrado integráveis conhecidas e $d(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})$ e $P(\mathbf{x}, t) \in C^0$.

As contribuições $d^*(\mathbf{x}) \equiv d(x, y, z)$ e $w^*(\mathbf{x}) \equiv w(x, y, z)$ são o termo fonte da equação e o coeficiente do termo transiente, respectivamente, não transformáveis pela TTIC.

É assumido que o coeficiente não-linear $K(\mathbf{x}, T)$ é composto por um termo dependente das coordenadas espaciais e outro dependente do potencial como apresentado abaixo

$$K(\mathbf{x}, T) \equiv K_0(\mathbf{x}) + K_T(\mathbf{x}, T), \quad (2.4)$$

sendo $K(\mathbf{x}, T) > 0$, $K_0(\mathbf{x}) \equiv K^{(x)}(x)K^{(y)}(y)K^{(z)}(z)$ com $K^{(x)}(x), K^{(y)}(y), K^{(z)}(z) > 0$.

Assim, substituindo a equação (2.4) na equação (2.3a), tem-se que,

$$L = -\nabla \bullet \{[K_0(\mathbf{x}) + K_T(\mathbf{x}, T)] \nabla(\cdot)\} + d(\mathbf{x}) = -\nabla \bullet [K_0(\mathbf{x}) \nabla(\cdot)] - \nabla \bullet [K_T(\mathbf{x}, T) \nabla(\cdot)] + d(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

Definindo-se,

$$L_0 = -\nabla \bullet [K_0(\mathbf{x}) \nabla(\cdot)] + d^{(x)}(x) + d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z) + d^*(\mathbf{x}) \text{ e } L_T = -\nabla \bullet [K_T(\mathbf{x}, T) \nabla(\cdot)],$$

a equação (2.5) pode ser reescrita como $L = L_0 + L_T$.

O operador gradiente, em coordenadas cartesianas, é definido como segue

$$\nabla(\cdot) = \bar{\mathbf{i}} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \bar{\mathbf{j}} \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} + \bar{\mathbf{k}} \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}.$$

2.2 – Problema Auxiliar de Autovalor

Como mencionado anteriormente, a aplicação da TTIG requer a definição de um problema auxiliar de autovalor para transformação das equações governantes.

Os problemas auxiliares de autovalores associados às direções x, y e z são expressos respectivamente por:

$$L^{(x)}\Psi_i^{(x)}(x) + [(\mu_i^{(x)})^2 w^{(x)}(x) - d^{(x)}(x)]\Psi_i^{(x)}(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty; \quad (2.6a)$$

$$L^{(y)}\Psi_m^{(y)}(y) + [(\mu_m^{(y)})^2 w^{(y)}(y) - d^{(y)}(y)]\Psi_m^{(y)}(y) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty; \quad (2.6b)$$

$$L^{(z)}\Psi_p^{(z)}(z) + [(\mu_p^{(z)})^2 w^{(z)}(z) - d^{(z)}(z)]\Psi_p^{(z)}(z) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (2.6c)$$

no qual, Ψ e μ são as autofunções e os autovalores para cada direção, respectivamente, e os operadores $L^{(x)}, L^{(y)}$ e $L^{(z)}$ são dados por

$$L^{(x)} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left[K^{(x)}(x) \frac{\partial(\quad)}{\partial x} \right] \text{ para } x_0 < x < x_1;$$

$$L^{(y)} \equiv \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial(\quad)}{\partial y} \right] \text{ para } y_0 < y < y_1;$$

$$L^{(z)} \equiv \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial(\quad)}{\partial z} \right] \text{ para } z_0 < z < z_1.$$

As respectivas condições de contorno são descritas por,

$$\alpha_0^{(x)}(x_0)\Psi_i^{(x)}(x_0) + \beta_0^{(x)}(x_0) \frac{d\Psi_i^{(x)}(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \infty; \quad (2.7a)$$

$$\alpha_1^{(x)}(x_1)\Psi_i^{(x)}(x_1) + \beta_1^{(x)}(x_1) \frac{d\Psi_i^{(x)}(x)}{dx} \Big|_{x=x_1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \infty; \quad (2.7b)$$

$$\alpha_0^{(y)}(y_0)\Psi_m^{(y)}(y_0) + \beta_0^{(y)}(y_0)\left.\frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy}\right|_{y=y_0} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \infty; \quad (2.7c)$$

$$\alpha_1^{(y)}(y_1)\Psi_m^{(y)}(y_1) + \beta_1^{(y)}(y_1)\left.\frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy}\right|_{y=y_1} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \infty; \quad (2.7d)$$

$$\alpha_0^{(z)}(z_0)\Psi_p^{(z)}(z_0) + \beta_0^{(z)}(z_0)\left.\frac{d\Psi_p^{(z)}(z)}{dz}\right|_{z=z_0} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, \infty; \quad (2.7e)$$

$$\alpha_1^{(z)}(z_1)\Psi_p^{(z)}(z_1) + \beta_1^{(z)}(z_1)\left.\frac{d\Psi_p^{(z)}(z)}{dz}\right|_{z=z_1} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, \infty, \quad (2.7f)$$

nas quais os α_k e β_k , $k = 0; 1$ pertencem ao conjunto dos números reais e $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$.

2.3 – Transformação da Formulação do Problema

Nesta seção é apresentada a transformação do problema difusivo tridimensional não-linear e transiente nos três eixos espaciais, através da Técnica da Transformada Integral Generalizada, obtendo-se ao término de tal transformação, um sistema de equações diferenciais ordinárias não-linear acoplado e infinito.

2.3.1 – Par Transformada-Inversa

Uma representação para a distribuição $T(\mathbf{x}, t)$ em termos das autofunções $\Psi_i^{(x)}(x)$ pode ser postulada, (Ozisik & Mikhailov, 1984) como segue

$$T(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(y, z, t) \Psi_i^{(x)}(x) \quad (2.8)$$

Multiplicando a equação (2.8) por $[w^{(x)}(x)\Psi_j^{(x)}(x)]$ e integrando-a sobre o domínio $[x_0, x_1]$, tem-se

$$\int_{x_0}^{x_1} w^{(x)}(x)\Psi_j^{(x)}(x)T(x,t)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(y,z,t) \int_{x_0}^{x_1} w^{(x)}(x)\Psi_j^{(x)}(x)\Psi_i^{(x)}(x)dx. \quad (2.9)$$

Utilizando a propriedade de ortonormalidade das autofunções (ver Apêndice B),

$$\int_{x_0}^{x_1} w^{(x)}(x)\Psi_i^{(x)}(x)\Psi_j^{(x)}(x)dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (2.10)$$

a equação (2.9) pode ser reescrita como

$$\int_{x_0}^{x_1} w^{(x)}(x)\Psi_j^{(x)}(x)T(x,t)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(y,z,t)\delta_{ij} = \beta_j(y,z,t). \quad (2.11)$$

Seja $\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t) \equiv \int_{x_0}^{x_1} w^{(x)}(x)\Psi_j^{(x)}(x)T(x,t)dx$, então

$$\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{ij}\beta_i(y,z,t) = \beta_j(y,z,t) \Leftrightarrow \tilde{T}_i^{(x)}(y,z,t) = \beta_i(y,z,t).$$

Logo, pode-se definir um par transformada-inversa para o eixo x como segue,

$$\tilde{T}_i^{(x)}(y,z,t) = \int_{x_0}^{x_1} w^{(x)}(x)\Psi_i^{(x)}(x)T(x,y,z,t)dx \quad (\text{transformada}) \quad (2.12a)$$

$$T(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t)\Psi_j^{(x)}(x) \quad (\text{inversa}) \quad (2.12b)$$

Para obter um par transformada-inversa referente ao eixo y, considera-se também uma representação para a distribuição transformada $\tilde{T}_i^{(x)}(y,z,t)$ em termos das autofunções $\Psi_m^{(y)}(y)$,

$$\tilde{T}_i^{(x)}(y,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{im}(z,t)\Psi_m^{(y)}(y) \quad (2.13)$$

e segue analogamente ao processo apresentado para o eixo x. Com isso, um par transformada-inversa para o eixo y pode ser expresso por

$$\tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) = \int_{y_0}^{y_1} w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) dy \quad (\text{transformada}) \quad (2.14a)$$

$$\tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) \Psi_n^{(y)}(y) \quad (\text{inversa}) \quad (2.14b)$$

Portanto, semelhante ao eixo x e y, um par transformada-inversa para o eixo z é também obtido, a partir de uma representação para a distribuição transformada $\tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t)$ em termos das autofunções $\Psi_p^{(z)}(z)$

$$\tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \beta_{imp}(t) \Psi_p^{(z)}(z), \quad (2.15)$$

e no final deste processo, tem-se o par transformada-inversa para o eixo z,

$$\tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t) = \int_{z_0}^{z_1} w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) dz \quad (\text{transformada}) \quad (2.16a)$$

$$\tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) = \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{imq}^{(xyz)}(t) \quad (\text{inversa}) \quad (2.16b)$$

Agora, é possível realizar a transformação do problema tridimensional desejado.

2.3.2 - Transformação do Problema para o Eixo x

Com o objetivo de resolver o problema de difusão tridimensional proposto, multiplica-se a equação (2.1) por $\Psi_i^{(x)}(x)$ e a equação (2.6a) por $K^{(y)}(y)K^{(z)}(z)T(x, t)$, resultando em

$$w(x)\Psi_i^{(x)}(x)\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) + \Psi_i^{(x)}(x)L_T T(x,t) = \Psi_i^{(x)}(x)P(x,t), \quad (2.17)$$

$$K^{(y)}(y)K^{(z)}(z)T(x,t)\{L^{(x)}\Psi_i^{(x)}(x) + [(\mu_i^{(x)})^2 w^{(x)}(x) - d^{(x)}(x)]\Psi_i^{(x)}(x)\} = 0. \quad (2.18)$$

Somando as equações (2.17) e (2.18) e integrando-as em relação à direção x , sobre o intervalo $[x_0, x_1]$ tem-se

$$\begin{aligned} & w^{(y)}(y)w^{(z)}(z)\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_0}^{x_1} w^*(x)w^{(x)}(x)\Psi_i^{(x)}(x)T(x,t)dx + \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x)L_T T(x,t)dx - \\ & - K^{(y)}(y)K^{(z)}(z)\int_{x_0}^{x_1} d^{(x)}(x)\Psi_i^{(x)}(x)T(x,t)dx + K^{(y)}(y)K^{(z)}(z)(\mu_i^{(x)})^2 \int_{x_0}^{x_1} w^{(x)}(x)\Psi_i^{(x)}(x)T(x,t)dx = \\ & = \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x)P(x,t)dx - K^{(y)}(y)K^{(z)}(z)\int_{x_0}^{x_1} T(x,t)L^{(x)}\Psi_i^{(x)}(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x)L_0 T(x,t)dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A resolução das integrais envolvidas na equação (2.19) é mostrada no Apêndice A. Substituindo os resultados dessas integrais na equação (2.19), obtêm-se a equação (2.20), a seguir

$$\begin{aligned} & w^{(y)}(y)w^{(z)}(z)\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(y,z)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t) + K^{(y)}(y)K^{(z)}(z)(\mu_i^{(x)})^2 \tilde{T}_i^{(x)}(y,z,t) + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}(y,z,\tilde{T}_{\infty}^{(x)})\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t) + \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}(y,z,\tilde{T}_{\infty}^{(x)})\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t) + [1 - K^{(y)}(y)K^{(z)}(z)]\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t) = \\ & = K^{(z)}(z)\sum_{j=1}^{\infty} F_{ij}\frac{\partial}{\partial y}\left[K^{(y)}(y)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t)\right] + K^{(y)}(y)\sum_{j=1}^{\infty} F_{ij}\frac{\partial}{\partial z}\left[K^{(z)}(z)\frac{\partial}{\partial z}\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t)\right] - \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} E_{ij}(y,z,\tilde{T}_{\infty}^{(x)})\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t) - d^{(y)}(y)d^{(z)}(z)\sum_{j=1}^{\infty} D_{ij}\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y}\left[R_{ij}(y,z,\tilde{T}_{\infty}^{(x)})\frac{\partial}{\partial y}\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t)\right] + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z}\left[R_{ij}(y,z,\tilde{T}_{\infty}^{(x)})\frac{\partial}{\partial z}\tilde{T}_j^{(x)}(y,z,t)\right] + P_i^{(x)}(y,z,t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

na qual

$$A_{ij}(y,z) = \int_{x_0}^{x_1} w^*(x)w^{(x)}(x)\Psi_i^{(x)}(x)\Psi_j^{(x)}(x)dx;$$

$$B_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) = \int_{x_0}^{x_1} K_T(x, T) \frac{d\Psi_j^{(x)}(x)}{dx} \cdot \frac{d\Psi_i^{(x)}(x)}{dx} dx ;$$

$$C_{ij} = \int_{x_0}^{x_1} d^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx ;$$

$$D_{ij} = \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx ;$$

$$E_{ij}(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} d^*(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx ;$$

$$F_{ij} = \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx ;$$

$$k_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) = \left[-\Psi_i^{(x)}(x) K_T(x, T) \frac{d\Psi_j^{(x)}(x)}{dx} \right]_{x_0}^{x_1} ;$$

$$R_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) = \int_{x_0}^{x_1} K_T(x, T) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx ,$$

nas quais, $\tilde{T}_\infty^{(x)}$ é o termo dependente da temperatura transformado em relação ao eixo x .

2.3.3 - Transformação do Problema para o Eixo y

Uma vez obtido o par transformada-inversa para o eixo y , é possível transformar o problema difusivo sobre o domínio $[y_0, y_1]$. Para isso, a equação (2.20) foi multiplicada por $\Psi_m^{(y)}(y)$ e a equação (2.6b) por $F_{ii} K^{(z)}(z) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t)$ como apresentado a seguir

$$\begin{aligned} & w^{(z)}(z) \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(y, z) w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) + K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) (\mu_i^{(x)})^2 \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) + [1 - K^{(y)}(y) K^{(z)}(z)] \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} K^{(z)}(z) \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] - \sum_{j=1}^{\infty} E_{ij}(y, z) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) - \\
& - \sum_{j=1}^{\infty} d^{(z)}(z) D_{ij} d^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] + \Psi_m^{(y)}(y) P_i^{(x)}(y, z, t) \quad (2.21)
\end{aligned}$$

$$F_{ii} K^{(z)}(z) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) \{ L^{(y)} \Psi_m^{(y)}(y) + [(\mu_m^{(y)})^2 w^{(y)}(y) - d^{(y)}(y)] \Psi_m^{(y)}(y) \} = 0 \quad (2.22)$$

Somando as equações (2.21) e (2.22) e integrando-as em relação à direção y , sobre o intervalo $[y_0, y_1]$ tem-se

$$\begin{aligned}
& w^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{y_0}^{y_1} A_{ij}(y, z) w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy + K^{(z)}(z) (\mu_i^{(x)})^2 \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) dy + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{y_0}^{y_1} B_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{y_0}^{y_1} k_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy - K^{(z)}(z) \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy + \\
& + F_{ii} K^{(z)}(z) (\mu_m^{(y)})^2 \int_{y_0}^{y_1} w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) dy - F_{ii} K^{(z)}(z) \int_{y_0}^{y_1} d^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) dy = \\
& = K^{(z)}(z) \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} \int_{y_0}^{y_1} \{ \Psi_m^{(y)}(y) L^{(y)} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) - \delta_{ij} \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) L^{(y)} \Psi_m^{(y)}(y) \} dy + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) L^{(z)} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{y_0}^{y_1} E_{ij}(y, z) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy - \\
& - \sum_{j=1}^{\infty} d^{(z)}(z) D_{ij} \int_{y_0}^{y_1} d^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] dy + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] dy + \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) P_i^{(x)}(y, z, t) dy, \quad (2.23)
\end{aligned}$$

A resolução das integrais presentes na equação (2.23) é mostrada no Apêndice A. Substituindo os resultados dessas integrais na equação (2.23), obtêm-se a equação (2.24) dada por

$$\begin{aligned}
 & w^{(z)}(z) \sum_{j,n=1}^{\infty} A_{ijmn}(z) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + K^{(z)}(z) (\mu_i^{(x)})^2 \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} B_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + \\
 & + \sum_{j,n=1}^{\infty} k_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} C_{mn} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) - K^{(z)}(z) \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} C_{mn} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + \\
 & + F_{ii} K^{(z)}(z) (\mu_m^{(y)})^2 \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) - F_{ii} K^{(z)}(z) \sum_{n=1}^{\infty} O_{mn} \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) = K^{(z)}(z) \sum_{j,n=1}^{\infty} F_{ij} [P_{mn} - Q_{mn}] (1 - \delta_{ij}) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + \\
 & + \sum_{j,n=1}^{\infty} F_{ij} H_{mn} L^{(z)} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) - \sum_{j,n=1}^{\infty} E_{ijmn}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) - d^{(z)}(z) \sum_{j,n=1}^{\infty} D_{ij} O_{mn} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + \\
 & + \sum_{j,n=1}^{\infty} \left\{ W_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) - R_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \right\} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \right] + \\
 & + P_{im}^{(xy)}(z, t). \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

na qual

$$A_{ijmn}(z) = \int_{y_0}^{y_1} A_{ij}(y, z) w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy ;$$

$$H_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy ;$$

$$B_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) = \int_{y_0}^{y_1} B_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy ;$$

$$k_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) = \int_{y_0}^{y_1} k_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy ;$$

$$C_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy ;$$

$$O_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} d^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy ;$$

$$P_{mn} = K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \Big|_{y_0}^{y_1};$$

$$Q_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} dy;$$

$$E_{ijmn}(z) = \int_{y_0}^{y_1} E_{ij}(y, z) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy;$$

$$W_{ijmn}(z, \tilde{T}_\infty^{(xy)}) = \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \right]_{y_0}^{y_1};$$

$$R_{ijmn}(z, \tilde{T}_\infty^{(xy)}) = \int_{y_0}^{y_1} R_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} dy;$$

$$S_{ijmn}(z, \tilde{T}_\infty^{(xy)}) = \int_{y_0}^{y_1} R_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy,$$

nas quais, $\tilde{T}_\infty^{(xy)}$ é o termo dependente da temperatura, transformado em relação aos eixos x e y .

2.3.4 - Transformação do Problema para o Eixo z

Nesta etapa, o problema será transformado sobre o domínio $[z_0, z_1]$. Para isso, multiplica-se a equação (2.24) por $\Psi_p^{(z)}(z)$ e a equação (2.6c) por $F_{ii} H_{mn} \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t)$, assim, resulta a equação

$$\begin{aligned} & \sum_{j,n=1}^{\infty} A_{ijmn}(z) w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + K^{(z)}(z) (\mu_i^{(x)})^2 \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) + \\ & + \sum_{j,n=1}^{\infty} B_{ijmn}(z, \tilde{T}_\infty^{(xy)}) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} k_{ijmn}(z, \tilde{T}_\infty^{(xy)}) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} C_{mn} \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) - \\ & - \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} H_{mn} K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + F_{ii} K^{(z)}(z) (\mu_m^{(y)})^2 \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) - F_{ii} \sum_{n=1}^{\infty} O_{mn} K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,n=1}^{\infty} F_{ij} [P_{mn} - Q_{mn}] (1 - \delta_{ij}) K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} F_{ij} H_{mn} \Psi_p^{(z)}(z) L^{(z)} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) - \\
&- \sum_{j,n=1}^{\infty} E_{ijmn}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) - d^{(z)}(z) \sum_{j,n=1}^{\infty} D_{ij} O_{mn} \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + \\
&+ \sum_{j,n=1}^{\infty} \{ W_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) - R_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \} \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} \Psi_p^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \right] + \\
&+ \Psi_p^{(z)}(z) P_{im}^{(xy)}(z, t)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$F_{ii} H_{mm} \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) \{ L^{(z)} \Psi_p^{(z)}(z) + [(\mu_p^{(z)})^2 w^{(z)}(z) - d^{(z)}(z)] \Psi_p^{(z)}(z) \} = 0 \tag{2.26}$$

Somando as equações (2.25) e (2.26) e integrando o resultado em relação à direção z , sobre o intervalo $[z_0, z_1]$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{z_0}^{z_1} A_{ijmn}(z) w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz + (\mu_i^{(x)})^2 \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \int_{z_0}^{z_1} K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) dz + \\
&+ \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{z_0}^{z_1} B_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz + \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{z_0}^{z_1} k_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz + \\
&+ \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} C_{mn} \int_{z_0}^{z_1} \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz - \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} H_{mn} \int_{z_0}^{z_1} K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz + \\
&+ F_{ii} (\mu_m^{(y)})^2 \int_{z_0}^{z_1} K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) dz - F_{ii} \sum_{n=1}^{\infty} O_{mn} \int_{z_0}^{z_1} K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) dz + \\
&+ F_{ii} H_{mm} (\mu_p^{(z)})^2 \int_{z_0}^{z_1} w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) dz - F_{ii} H_{mm} \int_{z_0}^{z_1} d^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) dz = \\
&= \sum_{j,n=1}^{\infty} (1 - \delta_{ij}) F_{ij} [P_{mn} - Q_{mn}] \int_{z_0}^{z_1} K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz + \\
&+ \sum_{j,n=1}^{\infty} F_{ij} H_{mn} \int_{z_0}^{z_1} \Psi_p^{(z)}(z) L^{(z)} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz - \sum_{j,n=1}^{\infty} \delta_{ij} \delta_{mn} F_{ij} H_{mn} \int_{z_0}^{z_1} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) L^{(z)} \Psi_p^{(z)}(z) dz - \\
&- \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{z_0}^{z_1} E_{ijmn}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz - \sum_{j,n=1}^{\infty} D_{ij} O_{mn} \int_{z_0}^{z_1} d^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz + \\
&+ \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{z_0}^{z_1} [W_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) - R_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)})] \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{z_0}^{z_1} \Psi_p^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \right] dz + \int_{z_0}^{z_1} \Psi_p^{(z)}(z) P_{im}^{(xy)}(z, t) dz \quad (2.27)$$

A resolução das integrais presentes na equação (2.27) é mostrada no Apêndice A. Substituindo os resultados dessas integrais na equação (2.27), obtêm-se a equação (2.28) dada por

$$\begin{aligned} \sum_{j,n,q=1}^{\infty} A_{ijmnpq} \frac{d}{dt} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) = & -(\mu_i^{(x)})^2 \sum_{n,q=1}^{\infty} H_{mn} H_{pq} \tilde{T}_{inq}^{(xyz)}(t) - \sum_{j,n,q=1}^{\infty} B_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) - \\ & - \sum_{j,n,q=1}^{\infty} k_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) - \sum_{j,n,q=1}^{\infty} C_{ij} C_{mn} C_{pq} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) + \sum_{j,n,q=1}^{\infty} C_{ij} H_{mn} H_{pq} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) - \\ & - F_{ii} H_{mm} (\mu_p^{(z)})^2 \tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t) - F_{ii} (\mu_m^{(y)})^2 \sum_{q=1}^{\infty} H_{pq} \tilde{T}_{imq}^{(xyz)}(t) + F_{ii} \sum_{n,q=1}^{\infty} O_{mn} H_{pq} \tilde{T}_{inq}^{(xyz)}(t) + \\ & + F_{ii} H_{mm} \sum_{q=1}^{\infty} J_{pq} \tilde{T}_{imq}^{(xyz)}(t) + \sum_{j,n,q=1}^{\infty} (1 - \delta_{ij}) F_{ij} [P_{mn} - Q_{mn}] H_{pq} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) + \\ & + \sum_{j,n,q=1}^{\infty} F_{ij} H_{mn} (1 - \delta_{ij} \delta_{mn}) [\alpha_{pq} - \omega_{pq}] \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) - \sum_{j,n,q=1}^{\infty} E_{ijmnpq} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) - \sum_{j,n,q=1}^{\infty} D_{ij} O_{mn} J_{pq} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) + \\ & + \sum_{j,n,q=1}^{\infty} W_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) - \sum_{j,n,q=1}^{\infty} R_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) + \\ & + \sum_{j,n,q=1}^{\infty} [S_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) - V_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)})] \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) + P_{imp}^{(xyz)}(t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

na qual

$$A_{ijmnpq} = \int_{z_0}^{z_1} A_{ijmn}(z) w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz;$$

$$H_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz;$$

$$B_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) = \int_{z_0}^{z_1} B_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz;$$

$$k_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) = \int_{z_0}^{z_1} k_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz;$$

$$C_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz;$$

$$J_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} d^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz;$$

$$\alpha_{pq} = \left[K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \right]_{z_0}^{z_1};$$

$$\omega_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} K^{(z)}(z) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \frac{d\Psi_p^{(z)}(z)}{dz} dz;$$

$$E_{ijmnpq} = \int_{z_0}^{z_1} E_{ijmn}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz;$$

$$W_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(xyz)}) = \int_{z_0}^{z_1} W_{ijmn}(z, \tilde{T}_\infty^{(xy)}) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz;$$

$$R_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(xyz)}) = \int_{z_0}^{z_1} R_{ijmn}(z, \tilde{T}_\infty^{(xy)}) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz;$$

$$S_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(xyz)}) = \left[\Psi_p^{(z)}(z) S_{ijmn}(z, \tilde{T}_\infty^{(xy)}) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \right]_{z_0}^{z_1};$$

$$V_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(xyz)}) = \int_{z_0}^{z_1} S_{ijmn}(z, \tilde{T}_\infty^{(xy)}) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \frac{d\Psi_p^{(z)}(z)}{dz} dz,$$

nas quais, $\tilde{T}_\infty^{(xyz)}$ é o termo dependente da temperatura transformado em relação aos eixos x, y e z.

Definindo,

$$B_{ijmnpq}^* = C_{ij} [H_{mn} H_{pq} - C_{mn} C_{pq}] - E_{ijmnpq} - D_{ij} O_{mn} J_{pq} + \\ + (1 - \delta_{ij}) F_{ij} (P_{mn} - Q_{mn}) H_{pq} + F_{ij} H_{mn} (1 - \delta_{ij} \delta_{mn}) (\alpha_{pq} - \omega_{pq});$$

$$C_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) = W_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) - R_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) - B_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) - k_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) + \\ + S_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) - V_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)});$$

$$D_{iimnpq} = F_{ii} O_{mn} H_{pq} - (\mu_i^{(x)})^2 H_{mn} H_{pq};$$

$$E_{iimmnpq} = F_{ii} H_{mm} J_{pq} - F_{ii} (\mu_m^{(y)})^2 H_{pq};$$

$$F_{iimppp} = F_{ii} H_{mm} (\mu_p^{(z)})^2,$$

pode-se apresentar a equação (2.28) como segue

$$\sum_{j,n,q=1}^{\infty} A_{ijmnpq} \frac{d}{dt} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) = \sum_{j,n,q=1}^{\infty} B_{ijmnpq}^* \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) + \sum_{j,n,q=1}^{\infty} C_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) + \\ + \sum_{n,q=1}^{\infty} D_{iimnpq} \tilde{T}_{inq}^{(xyz)}(t) + \sum_{q=1}^{\infty} E_{iimmnpq} \tilde{T}_{imq}^{(xyz)}(t) - F_{iimppp} \tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t) + P_{imp}^{(xyz)}(t). \quad (2.29)$$

A equação (2.29) acima constitui um sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas. Para que sua postulação fique completa é necessário obter-se sua condição inicial. Isto pode ser efetuado, transformando a condição inicial original,

$$T(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

para os três eixos espaciais, tem-se

$$\tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(0) = \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} w^{(x)}(x) w^{(y)}(y) w^{(z)}(z) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_p^{(z)}(z) f(x, y, z) dx dy dz = \tilde{f}_{imp}^{(xyz)}. \quad (2.30)$$

na qual, $\tilde{f}_{imp}^{(xyz)}$ é a distribuição do potencial inicial transformada nos eixos x, y e z.

2.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas

O sistema descrito pela equação (2.29) possui um número infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas, sujeito à condição inicial transformada, dada pela equação (2.30). Para se obter resultados numéricos o sistema infinito (2.29) tem que ser truncado em um número de equações como mostrado a seguir

$$\begin{aligned}
\sum_{j,n,q=1}^{N_x, N_y, N_z} A_{ijmnpq} \frac{d}{dt} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) = & \sum_{j,n,q=1}^{N_x, N_y, N_z} B_{ijmnpq}^* \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) + \sum_{j,n,q=1}^{N_x, N_y, N_z} C_{ijmnpq} (\tilde{T}^{(xyz)}) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) + \\
& + \sum_{j,n,q=1}^{N_x, N_y, N_z} \delta_{ij} [D_{iimnpq} + \delta_{mn} (E_{iimmpq} - \delta_{pq} F_{iimmpp})] D_{iimnpq} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) + P_{imp}^{(xyz)}(t)
\end{aligned} \quad (2.31)$$

sujeito à condição inicial

$$\tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(0) = \tilde{f}_{imp}^{(xyz)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x; \quad m = 1, 2, \dots, N_y; \quad p = 1, 2, \dots, N_z; \quad (2.32)$$

na qual N_x, N_y, N_z , são as quantidades de termos na série truncada, escolhidos suficientemente grandes para se obter a precisão desejada, respeitando os recursos computacionais disponíveis.

2.5 – Solução do Sistema Não-Linear

O sistema finito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não linear (2.31) pode ser resolvido usando subrotinas computacionais para problemas de valor inicial, como a DIVPAG do Visual Numeric (1994), proporcionando a solução do sistema com precisão pré-definida.

Uma vez obtida a solução do sistema, utiliza-se as fórmulas de inversão (2.16b), (2.14b) e (2.12b), respectivamente para obter a distribuição de temperatura

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i,m,p=1}^{N_x, N_y, N_z} \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t).$$

Difusão não-linear transiente em geometria cilíndrica

Neste Capítulo, apresenta-se a formulação matemática do problema de difusão tridimensional não linear transiente no sistema de coordenadas cilíndricas, utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada e uma aplicação em um problema de condução de calor não-linear.

3.1 – Formulação Matemática

Considere um problema de difusão tridimensional, não linear, transiente, definido no interior de um cilindro, incluindo efeitos não lineares no termo difusivo de acordo com a formulação matemática geral abaixo

$$w(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{x}, t) + LT(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{x} = (r, \theta, z) \in \mathcal{R}^3$, $t > 0$, definido no domínio $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$, $z_0 \leq z \leq z_1$, com condições inicial e de contorno dadas respectivamente por,

$$T(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^3 \text{ e } f \in C^0 \quad (3.2a)$$

$$B_0 T(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} = (x = x_0, y = y_0, z = z_0) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \quad (3.2b)$$

$$B_1 T(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} = (x = x_1, y = y_1, z = z_1) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \quad (3.2c)$$

no qual os operadores L , B_0 e B_1 são definidos como seguem,

$$L \equiv -\nabla \cdot [K(\mathbf{x}, T) \nabla(\cdot)] + d(\mathbf{x}), \quad (3.3a)$$

$$B_0 \equiv \alpha_0(\mathbf{x}_0) + \beta_0(\mathbf{x}_0) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}; \quad (3.3b)$$

$$B_1 \equiv \alpha_1(\mathbf{x}_1) + \beta_1(\mathbf{x}_1) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}, \quad (3.3c)$$

sendo $d(\mathbf{x}) \equiv d^{(r)}(r) + d^{(\theta)}(\theta) + d^{(z)}(z) + d^*(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x}) \equiv w^{(r)}(r)w^{(\theta)}(\theta)w^{(z)}(z)w^*(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x}) > 0$, $P(\mathbf{x}, t)$ funções quadrado integráveis conhecidas e $d(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x})$ e $P(\mathbf{x}, t) \in C^0$.

Os contribuições $d^*(\mathbf{x})$ e $w^*(\mathbf{x})$, não transformáveis pela TTIG, são o termo fonte da equação e o coeficiente do termo transiente, respectivamente, a saber, $d^*(\mathbf{x}) \equiv d(r, \theta, z)$ e $w^*(\mathbf{x}) \equiv w(r, \theta, z)$.

O coeficiente não-linear $K(\mathbf{x}, T)$ é composto por um termo dependente das coordenadas espaciais e outro dependente do potencial, a saber,

$$K(\mathbf{x}, T) \equiv K_0(\mathbf{x}) + K_T(\mathbf{x}, T), \quad (3.4)$$

sendo $K(\mathbf{x}, T) > 0$, $K_0(\mathbf{x}) = K^{(r)}(r)K^{(\theta)}(\theta)K^{(z)}(z)$ e $K^{(r)}(r)$, $K^{(\theta)}(\theta)$, $K^{(z)}(z) > 0$.

Assim, após a substituição da equação (3.4) na equação (3.3a) obtém-se a equação (3.5) mostrada abaixo,

$$L = -\nabla \cdot \{[K_0(\mathbf{x}) + K_T(\mathbf{x}, T)] \nabla(\cdot)\} + d(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot [K_0(\mathbf{x}) \nabla(\cdot)] - \nabla \cdot [K_T(\mathbf{x}, T) \nabla(\cdot)] + d(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

Definindo agora os operadores L_0 e L_T como

$$L_0 = -\nabla \cdot [K_0(\mathbf{x}) \nabla(\cdot)] + d^{(r)}(r) + d^{(\theta)}(\theta) + d^{(z)}(z) + d^*(\mathbf{x}) \text{ e } L_T = -\nabla \cdot [K_T(\mathbf{x}, T) \nabla(\cdot)],$$

pode-se reescrever a equação (3.5) como sendo a soma de L_0 e L_T , ou seja, $L = L_0 + L_T$.

O operador Laplaciano, em coordenadas cilíndricas, é definido como segue

$$\nabla \cdot [K \nabla(\cdot)] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(rK \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(rK \frac{\partial}{\partial z} \right) \right].$$

3.2 – Problema Auxiliar de Autovalor

Os problemas auxiliares de autovalores associados as direções r, θ e z são expressos respectivamente por:

$$L^{(r)} \Psi_p^{(r)}(r) + [(\mu_p^{(r)})^2 w^{(r)}(r) - d^{(r)}(r)] \Psi_p^{(r)}(r) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots, \infty; \quad (3.6a)$$

$$L^{(\theta)} \Psi_m^{(\theta)}(\theta) + [(\mu_m^{(\theta)})^2 w^{(\theta)}(\theta) - d^{(\theta)}(\theta)] \Psi_m^{(\theta)}(\theta) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty; \quad (3.6b)$$

$$L^{(z)} \Psi_i^{(z)}(z) + [(\mu_i^{(z)})^2 w^{(z)}(z) - d^{(z)}(z)] \Psi_i^{(z)}(z) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (3.6c)$$

nos quais, Ψ e μ são as autofunções e os autovalores para cada direção, respectivamente, e os operadores $L^{(r)}$, $L^{(\theta)}$ e $L^{(z)}$ são definidos como

$$L^{(r)} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r K^{(r)}(r) \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \text{ para } r_0 < r < r_1;$$

$$L^{(\theta)} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} \left[K^{(\theta)}(\theta) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \right] \text{ para } \theta_0 < \theta < \theta_1;$$

$$L^{(z)} \equiv \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \right] \text{ para } z_0 < z < z_1.$$

As respectivas condições de contorno são descritas por:

$$\alpha_0^{(r)}(r_0)\Psi_p^{(r)}(r_0) + \beta_0^{(r)}(r_0) \frac{d\Psi_p^{(r)}(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, \infty; \quad (3.7a)$$

$$\alpha_1^{(r)}(r_1)\Psi_p^{(r)}(r_1) + \beta_1^{(r)}(r_1) \frac{d\Psi_p^{(r)}(r)}{dr} \Big|_{r=r_1} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.7b)$$

$$\alpha_0^{(\theta)}(\theta_0)\Psi_m^{(\theta)}(\theta_0) + \beta_0^{(\theta)}(\theta_0) \frac{d\Psi_m^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \infty; \quad (3.7c)$$

$$\alpha_1^{(\theta)}(\theta_1)\Psi_m^{(\theta)}(\theta_1) + \beta_1^{(\theta)}(\theta_1) \frac{d\Psi_m^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_1} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \infty; \quad (3.7d)$$

$$\alpha_0^{(z)}(z_0)\Psi_i^{(z)}(z_0) + \beta_0^{(z)}(z_0) \frac{d\Psi_i^{(z)}(z)}{dz} \Big|_{z=z_0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \infty; \quad (3.7e)$$

$$\alpha_1^{(z)}(z_1)\Psi_i^{(z)}(z_1) + \beta_1^{(z)}(z_1) \frac{d\Psi_i^{(z)}(z)}{dz} \Big|_{z=z_1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \infty; \quad (3.7f)$$

nas quais os α_k e β_k , $k = 0, 1$ pertencem ao conjunto dos números reais e $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$.

3.3 – Transformação da Formulação do Problema

A transformação do problema difusivo tridimensional não-linear e transiente nos três eixos espaciais para sistema de coordenadas cilíndricas é apresentada nesta seção. Para isso, fez-se uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada, obtendo ao final do processo, um sistema de equações diferenciais ordinárias não-linear acoplado e infinito.

3.3.1 – Par Transformada-Inversa para o Eixo z

Considera-se uma representação para a distribuição $T(\mathbf{x}, t)$ em termos das autofunções $\Psi_i^{(z)}(z)$, como segue

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(r, \theta, t) \Psi_i^{(z)}(z) \quad (3.8)$$

na qual, $\mathbf{x} = (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$.

Multiplicando a equação (3.8) por $[w^{(z)}(z)\Psi_j^{(z)}(z)]$ e integrando o resultado sobre o domínio $[z_0, z_1]$, tem-se

$$\int_{z_0}^{z_1} w^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) T(\mathbf{x}, t) dz = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(r, \theta, t) \int_{z_0}^{z_1} w^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) \Psi_i^{(z)}(z) dz. \quad (3.9)$$

Utilizando a propriedade de ortonormalidade das autofunções (ver Apêndice B),

$$\int_{z_0}^{z_1} w^{(z)}(z) \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) dz = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (3.10)$$

a equação (3.9) pode ser escrita como

$$\int_{z_0}^{z_1} w^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) T(\mathbf{x}, t) dz = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(r, \theta, t) \delta_{ij} = \beta_j(r, \theta, t). \quad (3.11)$$

Seja $\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) \equiv \int_{z_0}^{z_1} w^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) T(\mathbf{x}, t) dz$, então

$$\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{ij} \beta_i(r, \theta, t) = \beta_j(r, \theta, t) \Leftrightarrow \tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t) = \beta_i(r, \theta, t).$$

Logo, tem-se o par transformada-inversa, expresso como segue

$$\tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t) = \int_{z_0}^{z_1} w^{(z)}(z) \Psi_i^{(z)}(z) T(r, \theta, z, t) dz \quad (\text{transformada}) \quad (3.12a)$$

$$T(r, \theta, z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) \Psi_j^{(z)}(z) \quad (\text{inversa}) \quad (3.12b)$$

3.3.2 - Transformação do Problema para o Eixo z

Para resolver o problema de difusão não-linear tridimensional proposto, deve-se eliminar a dependência dos três eixos espaciais, permanecendo somente a dependência do tempo. Inicia-se a transformação do problema pelo eixo z e então multiplica-se a equação (3.1) por $\Psi_i^{(z)}(z)$ e a equação (3.6c) por $K^{(r)}(r)K^{(\theta)}(\theta)T(\mathbf{x}, t)$, obtendo-se respectivamente:

$$w(\mathbf{x})\Psi_i^{(z)}(z)\frac{\partial}{\partial t}T(\mathbf{x}, t) + \Psi_i^{(z)}(z)L_T T(\mathbf{x}, t) = \Psi_i^{(z)}(z)P(\mathbf{x}, t) \quad (3.13)$$

$$K^{(r)}(r)K^{(\theta)}(\theta)T(\mathbf{x}, t)\{L^{(z)}\Psi_i^{(z)}(z) + [(\mu_i^{(z)})^2 w^{(z)}(z) - d^{(z)}(z)]\Psi_i^{(z)}(z)\} = 0 \quad (3.14)$$

Somando as equações (3.13) e (3.14) e integrando a soma obtida em relação à direção z, sobre o intervalo $[z_0, z_1]$ tem-se

$$\begin{aligned} & w^{(r)}(r)w^{(\theta)}(\theta)\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_0}^{z_1} w^*(\mathbf{x})w^{(z)}(z)\Psi_i^{(z)}(z)T(\mathbf{x}, t)dz + \int_{z_0}^{z_1} \Psi_i^{(z)}(z)L_T T(\mathbf{x}, t)dz - \\ & - K^{(r)}(r)K^{(\theta)}(\theta)\left[\int_{z_0}^{z_1} d^{(z)}(z)\Psi_i^{(z)}(z)T(\mathbf{x}, t)dz - (\mu_i^{(z)})^2 \int_{z_0}^{z_1} w^{(z)}(z)\Psi_i^{(z)}(z)T(\mathbf{x}, t)dz\right] = \int_{z_0}^{z_1} \Psi_i^{(z)}(z)P(\mathbf{x}, t)dz - \\ & - K^{(r)}(r)K^{(\theta)}(\theta)\int_{z_0}^{z_1} T(\mathbf{x}, t)L^{(z)}\Psi_i^{(z)}(z)dz - \int_{z_0}^{z_1} \Psi_i^{(z)}(z)L_0 T(\mathbf{x}, t)dz. \end{aligned} \quad (3.15)$$

A resolução das integrais presentes na equação (3.15) é análoga às desenvolvidas no apêndice A, para o eixo x. Substituindo os resultados dessas integrais na equação (3.15), tem-se a equação (3.16), a seguir

$$\begin{aligned} & w^{(r)}(r)w^{(\theta)}(\theta)\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(r, \theta)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) + K^{(r)}(r)K^{(\theta)}(\theta)(\mu_i^{(z)})^2\tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t) + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)})\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) + \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)})\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) + [1 - K^{(r)}(r)K^{(\theta)}(\theta)]\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) = \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij}K^{(\theta)}(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left[K^{(r)}(r)\frac{\partial}{\partial r}\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t)\right] + \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij}K^{(r)}(r)\frac{\partial}{\partial \theta}\left[K^{(\theta)}(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t)\right] - \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} E_{ij}(r, \theta)\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) - \sum_{j=1}^{\infty} d^{(r)}(r)d^{(\theta)}(\theta)D_{ij}\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial r}\left[R_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)})\frac{\partial}{\partial r}\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t)\right] + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[R_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)})\frac{\partial}{\partial \theta}\tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t)\right] + P_i^{(z)}(r, \theta, t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

na qual,

$$A_{ij}(r, \theta) = \int_{z_0}^{z_1} w^*(\mathbf{x}) w^{(z)}(z) \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) dz;$$

$$k_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_\infty^{(z)}) = \left[-\Psi_i^{(z)}(z) K_T(\mathbf{x}, T) \frac{d\Psi_j^{(z)}(z)}{dz} \right]_{z_0}^{z_1};$$

$$B_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_\infty^{(z)}) = \int_{z_0}^{z_1} K_T(\mathbf{x}, T) \frac{d\Psi_j^{(z)}(z)}{dz} \frac{d\Psi_i^{(z)}(z)}{dz} dz;$$

$$R_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_\infty^{(z)}) = \int_{z_0}^{z_1} K_T(\mathbf{x}, T) \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) dz;$$

$$F_{ij} = \int_{z_0}^{z_1} K^{(z)}(z) \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) dz;$$

$$C_{ij} = \int_{z_0}^{z_1} d^{(z)}(z) \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) dz;$$

$$D_{ij} = \int_{z_0}^{z_1} \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) dz;$$

$$E_{ij}(r, \theta) = \int_{z_0}^{z_1} d^*(\mathbf{x}) \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) dz.$$

nas quais, $\tilde{T}_\infty^{(z)}$ é o termo dependente da temperatura, transformado no eixo z .

3.3.3 – Par Transformada-Inversa para o Eixo θ

Para o potencial transformado $\tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t)$, considere a representação em termos das autofunções $\Psi_m^{(\theta)}(\theta)$, como segue,

$$\tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{im}(r, t) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \quad (3.17)$$

Multiplicando a equação (3.17) por $[w^{(\theta)}(\theta)\Psi_n^{(\theta)}(\theta)]$ e integrando o produto obtido sobre o domínio $[\theta_0, \theta_1]$ tem-se

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} w^{(\theta)}(\theta)\Psi_n^{(\theta)}(\theta)\tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t)d\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{im}(r, t) \int_{\theta_0}^{\theta_1} w^{(\theta)}(\theta)\Psi_n^{(\theta)}(\theta)\Psi_m^{(\theta)}(\theta)d\theta. \quad (3.18)$$

Utilizando a propriedade de ortonormalidade das autofunções (ver Apêndice B),

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} w^{(\theta)}(\theta)\Psi_n^{(\theta)}(\theta)\Psi_m^{(\theta)}(\theta)d\theta = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases},$$

a equação (3.18) pode ser escrita como

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} w^{(\theta)}(\theta)\Psi_n^{(\theta)}(\theta)\tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t)d\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{im}(r, t)\delta_{mn}. \quad (3.19)$$

Seja $\tilde{T}_{in}^{(z\theta)}(r, t) \equiv \int_{\theta_0}^{\theta_1} w^{(\theta)}(\theta)\Psi_n^{(\theta)}(\theta)\tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t)d\theta$, então

$$\tilde{T}_{in}^{(z\theta)}(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{mn}\beta_{im}(r, t) = \beta_{in}(r, t) \Leftrightarrow \tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) = \beta_{im}(r, t).$$

Logo, tem-se o par transformada-inversa, expresso como segue

$$\tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} w^{(\theta)}(\theta)\Psi_m^{(\theta)}(\theta)\tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t)d\theta \quad (\text{transformada}) \quad (3.20a)$$

$$\tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{in}^{(z\theta)}(r, t)\Psi_n^{(\theta)}(\theta) \quad (\text{inversa}) \quad (3.20b)$$

3.3.4 - Transformação do Problema para o Eixo θ

Uma vez obtido o par transformada-inversa para o eixo θ , é possível transformar o problema difusivo sobre o domínio $[\theta_0, \theta_1]$. Para isso, a equação (3.16) foi multiplicada por $\Psi_m^{(\theta)}(\theta)$ e a equação (3.6b) por $F_{ij}K^{(r)}(r)\tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t)$ como apresentado a seguir

$$\begin{aligned}
& w^{(r)}(r) \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(r, \theta) w^{(0)}(\theta) \Psi_m^{(0)}(\theta) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) + K^{(r)}(r) K^{(0)}(\theta) (\mu_i^{(z)})^2 \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t) + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)}) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) + [1 - K^{(r)}(r) K^{(0)}(\theta)] \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)}) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) = \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} K^{(0)}(\theta) \Psi_m^{(0)}(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left[K^{(r)}(r) \frac{\partial}{\partial r} \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) \right] + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} K^{(r)}(r) \Psi_m^{(0)}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[K^{(0)}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) \right] - \sum_{j=1}^{\infty} E_{ij}(r, \theta) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) - \\
& - \sum_{j=1}^{\infty} D_{ij} d^{(0)}(\theta) d^{(r)}(r) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_m^{(0)}(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left[R_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)}) \frac{\partial}{\partial r} \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) \right] + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_m^{(0)}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[R_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)}) \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) \right] + \Psi_m^{(0)}(\theta) P_i^{(z)}(r, \theta, t) \quad (3.21)
\end{aligned}$$

$$F_{ij} K^{(r)}(r) \tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t) \{ L^{(0)} \Psi_m^{(0)}(\theta) + [(\mu_m^{(0)})^2 w^{(0)}(\theta) - d^{(0)}(\theta)] \Psi_m^{(0)}(\theta) \} = 0 \quad (3.22)$$

As equações (3.21) e (3.22) são somadas e o resultado integrado em relação à direção θ , sobre o intervalo $[\theta_0, \theta_1]$ como expresso a seguir

$$\begin{aligned}
& w^{(r)}(r) \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_0}^{\theta_1} A_{ij}(r, \theta) w^{(0)}(\theta) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) d\theta + K^{(r)}(r) (\mu_i^{(z)})^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} K^{(0)}(\theta) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t) d\theta + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_0}^{\theta_1} B_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)}) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) d\theta + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_0}^{\theta_1} k_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)}) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) d\theta + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) d\theta - K^{(r)}(r) \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \int_{\theta_0}^{\theta_1} K^{(0)}(\theta) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) d\theta + \\
& + F_{ii} K^{(r)}(r) (\mu_m^{(0)})^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} w^{(0)}(\theta) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t) d\theta - F_{ii} K^{(r)}(r) \int_{\theta_0}^{\theta_1} d^{(0)}(\theta) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t) d\theta = \\
& = K^{(r)}(r) \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\Psi_m^{(0)}(\theta) L^{(0)} \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) - \delta_{ij} \tilde{T}_i^{(z)}(r, \theta, t) L^{(0)} \Psi_m^{(0)}(\theta) \right] d\theta + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} \int_{\theta_0}^{\theta_1} K^{(0)}(\theta) \Psi_m^{(0)}(\theta) L^{(r)} \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) d\theta - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_0}^{\theta_1} E_{ij}(r, \theta) \Psi_m^{(0)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) d\theta -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^{\infty} D_{ij} d^{(r)}(r) \int_{\theta_0}^{\theta_1} d^{(\theta)}(\theta) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) d\theta + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[R_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)}) \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) \right] d\theta + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left[R_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)}) \frac{\partial}{\partial r} \tilde{T}_j^{(z)}(r, \theta, t) \right] d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Psi_m^{(\theta)}(\theta) P_i^{(z)}(r, \theta, t) d\theta, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

A resolução das integrais apresentadas na equação (3.23) são análogas às desenvolvidas no apêndice A, para o eixo y da geometria cartesiana. Os resultados das integrais foram substituídos na equação (3.23) resultando a equação (3.24),

$$\begin{aligned}
& w^{(r)}(r) \sum_{j,n=1}^{\infty} A_{ijmn}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + K^{(r)}(r) (\mu_i^{(z)})^2 \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \tilde{T}_{in}^{(z\theta)}(r, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} B_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \\
& + \sum_{j,n=1}^{\infty} k_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} C_{mn} \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) - K^{(r)}(r) \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} C_{mn} \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \\
& + F_{ii} K^{(r)}(r) (\mu_m^{(\theta)})^2 \tilde{T}_{in}^{(z\theta)}(r, t) - F_{ii} K^{(r)}(r) \sum_{n=1}^{\infty} O_{mn} \tilde{T}_{in}^{(z\theta)}(r, t) = K^{(r)}(r) \sum_{j,n=1}^{\infty} F_{ij} [P_{mn} - Q_{mn}] (1 - \delta_{ij}) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \\
& + \sum_{j,n=1}^{\infty} F_{ij} H_{mn} L^{(r)} \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) - \sum_{j,n=1}^{\infty} E_{ijmn}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) - d^{(r)}(r) \sum_{j,n=1}^{\infty} D_{ij} O_{mn} \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \\
& + \sum_{j,n=1}^{\infty} [W_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) - R_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)})] \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left[S_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) \frac{\partial}{\partial r} \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) \right] + \\
& + P_{im}^{(z\theta)}(r, t). \quad (3.24)
\end{aligned}$$

na qual,

$$A_{ijmn}(r) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} A_{ij}(r, \theta) w^{(\theta)}(\theta) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_n^{(\theta)}(\theta) d\theta;$$

$$H_{mn} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} K^{(\theta)}(\theta) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_n^{(\theta)}(\theta) d\theta;$$

$$B_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} B_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)}) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_n^{(\theta)}(\theta) d\theta;$$

$$k_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} k_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_{\infty}^{(z)}) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_n^{(\theta)}(\theta) d\theta;$$

$$C_{mn} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_n^{(\theta)}(\theta) d\theta;$$

$$O_{mn} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d^{(\theta)}(\theta) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_n^{(\theta)}(\theta) d\theta;$$

$$Q_{mn} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} K^{(\theta)}(\theta) \frac{d\Psi_n^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} \frac{d\Psi_m^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} d\theta;$$

$$P_{mn} = K^{(\theta)}(\theta) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \frac{d\Psi_n^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}^{\theta_1};$$

$$E_{ijmn}(r) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} E_{ij}(r, \theta) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_n^{(\theta)}(\theta) d\theta;$$

$$W_{ijmn}(r, \tilde{T}_\infty^{(z\theta)}) = \left[R_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_\infty^{(z)}) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \frac{d\Psi_n^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} \right]_{\theta_0}^{\theta_1};$$

$$R_{ijmn}(r, \tilde{T}_\infty^{(z\theta)}) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} R_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_\infty^{(z)}) \frac{d\Psi_n^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} \frac{d\Psi_m^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} d\theta;$$

$$S_{ijmn}(r, \tilde{T}_\infty^{(z\theta)}) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} R_{ij}(r, \theta, \tilde{T}_\infty^{(z)}) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_n^{(\theta)}(\theta) d\theta,$$

nas quais, $\tilde{T}_\infty^{(z\theta)}$ é o termo dependente da temperatura, transformado nos eixos z e θ .

3.3.5 – Par Transformada-Inversa para o Eixo r

Uma representação em termos das autofunções $\Psi_p^{(r)}(r)$ para o potencial transformado $\tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t)$ pode ser considerada da seguinte forma

$$\tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \beta_{imp}(t) \Psi_p^{(r)}(r) \quad (3.25)$$

A equação (3.25) é então multiplicada por $[r w^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r)]$ e o produto resultante é integrado sobre o domínio $[r_0, r_1]$, obtendo a equação (3.26),

$$\int_{r_0}^{r_1} r w^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) \tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) dr = \sum_{p=1}^{\infty} \beta_{imp}(t) \int_{r_0}^{r_1} r w^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) dr. \quad (3.26)$$

A propriedade de ortonormalidade das autofunções (ver Apêndice B),

$$\int_{r_0}^{r_1} r w^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) dr = \delta_{pq} = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases},$$

é aplicada na equação (3.26) podendo então essa mesma equação ser reescrita como

$$\int_{r_0}^{r_1} r w^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) \tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) dr = \sum_{p=1}^{\infty} \beta_{imp}(t) \delta_{pq}. \quad (3.27)$$

Fazendo $\tilde{T}_{imq}^{(z\theta r)}(t) \equiv \int_{r_0}^{r_1} r w^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) \tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) dr$, então

$$\tilde{T}_{imq}^{(z\theta r)}(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \delta_{pq} \beta_{imp}(t) = \beta_{imq}(t) \Leftrightarrow \tilde{T}_{imp}^{(z\theta r)}(t) = \beta_{imp}(r, t),$$

e assim, o par transformada-inversa é expresso como segue

$$\tilde{T}_{imp}^{(z\theta r)}(t) = \int_{r_0}^{r_1} r w^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) dr \quad (\text{transformada}) \quad (3.28a)$$

$$\tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) = \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(r)}(r) \tilde{T}_{imq}^{(z\theta r)}(t) \quad (\text{inversa}) \quad (3.28b)$$

3.3.6 - Transformação do Problema para o Eixo r

O próximo passo é transformar o problema sobre o domínio $[r_0, r_1]$. Assim sendo, a equação (3.24) deve ser multiplicada por $r \Psi_p^{(r)}(r)$ e a equação (3.6a) por $r F_{ii} H_{mm} \tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t)$, obtendo então as equações (3.29) e (3.30) abaixo

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,n=1}^{\infty} A_{ijmn}(r) r w^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + K^{(r)}(r) (\mu_i^{(z)})^2 \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{in}^{(z\theta)}(r, t) + \\
& + \sum_{j,n=1}^{\infty} B_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} k_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \\
& + \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} C_{mn} r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) - \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} H_{mn} r K^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \\
& + F_{ii} K^{(r)}(r) (\mu_m^{(0)})^2 r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) - F_{ii} \sum_{n=1}^{\infty} O_{mn} r K^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{in}^{(z\theta)}(r, t) = \\
& = \sum_{j,n=1}^{\infty} F_{ij} [P_{mn} - Q_{mn}] (1 - \delta_{ij}) r K^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \sum_{j,n=1}^{\infty} F_{ij} H_{mn} r \Psi_p^{(r)}(r) L^{(r)} \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) - \\
& - \sum_{j,n=1}^{\infty} E_{ijmn}(r) r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) - \sum_{j,n=1}^{\infty} D_{ij} O_{mn} r d^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \\
& + \sum_{j,n=1}^{\infty} [W_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) - R_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)})] r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) + \\
& \sum_{j,n=1}^{\infty} r \Psi_p^{(r)}(r) \frac{\partial}{\partial r} \left[S_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) \frac{\partial}{\partial r} \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) \right] + r \Psi_p^{(r)}(r) P_{im}^{(z\theta)}(r, t) \quad (3.29)
\end{aligned}$$

$$r F_{ii} H_{mm} \tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) \{ L^{(r)} \Psi_p^{(r)}(r) + [(\mu_p^{(r)})^2 w^{(r)}(r) - d^{(r)}(r)] \Psi_p^{(r)}(r) \} = 0 \quad (3.30)$$

As equações (3.29) e (3.30) foram somadas e integradas em relação à direção r , sobre o intervalo $[r_0, r_1]$ como apresentado a seguir

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{r_0}^{r_1} A_{ijmn}(r) r w^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) dr + (\mu_i^{(z)})^2 \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \int_{r_0}^{r_1} r K^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{in}^{(z\theta)}(r, t) dr + \\
& + \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{r_0}^{r_1} B_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) dr + \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{r_0}^{r_1} k_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) dr + \\
& + \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} C_{mn} \int_{r_0}^{r_1} r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) dr - \sum_{j,n=1}^{\infty} C_{ij} H_{mn} \int_{r_0}^{r_1} r K^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) dr + \\
& + F_{ii} (\mu_m^{(0)})^2 \int_{r_0}^{r_1} r K^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) dr - F_{ii} \sum_{n=1}^{\infty} O_{mn} \int_{r_0}^{r_1} r K^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{in}^{(z\theta)}(r, t) dr + \\
& + F_{ii} H_{mm} (\mu_i^{(z)})^2 \int_{r_0}^{r_1} r w^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) dr - F_{ii} H_{mm} \int_{r_0}^{r_1} r d^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{im}^{(z\theta)}(r, t) dr =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,n=1}^{\infty} (1 - \delta_{ij}) F_{ij} [P_{mn} - Q_{mn}] \int_{r_0}^{r_1} r K^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) dr + \\
&+ \sum_{j,n=1}^{\infty} F_{ij} H_{mn} \int_{r_0}^{r_1} r \Psi_p^{(r)}(r) L^{(r)} \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) dr - \sum_{j,n=1}^{\infty} \delta_{ij} \delta_{mn} F_{ij} H_{mn} \int_{r_0}^{r_1} r \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) L^{(r)} \Psi_p^{(r)}(r) dr - \\
&- \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{r_0}^{r_1} E_{ijmn}(r) r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) dr - \sum_{j,n=1}^{\infty} D_{ij} O_{mn} \int_{r_0}^{r_1} r d^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) dr + \\
&+ \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{r_0}^{r_1} [W_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) - R_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)})] r \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) dr + \\
&+ \sum_{j,n=1}^{\infty} \int_{r_0}^{r_1} r \Psi_p^{(r)}(r) \frac{\partial}{\partial r} \left[S_{ijmn}(r, \tilde{T}_{\infty}^{(z\theta)}) \frac{\partial}{\partial r} \tilde{T}_{jn}^{(z\theta)}(r, t) \right] dr + \int_{r_0}^{r_1} r \Psi_p^{(r)}(r) P_{im}^{(z\theta)}(r, t) dr \quad (3.31)
\end{aligned}$$

O desenvolvimento analítico das integrais da equação (3.31) é semelhante aos apresentados no apêndice A, para o eixo z da geometria cartesiana, acrescentando o termo r em cada integral. Assim, substituindo os respectivos resultados na equação (3.31) obtêm-se a equação (3.32) dada por

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,n,q=1}^{\infty} A_{ijmnpq} \frac{d}{dt} \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) = -(\mu_i^{(z)})^2 \sum_{n,q=1}^{\infty} H_{mn} H_{pq} \tilde{T}_{inq}^{(z\theta r)}(t) - \sum_{j,n,q=1}^{\infty} B_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) - \\
&- \sum_{j,n,q=1}^{\infty} k_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) - \sum_{j,n,q=1}^{\infty} C_{ij} C_{mn} C_{pq} \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) + \sum_{j,n,q=1}^{\infty} C_{ij} H_{mn} H_{pq} \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) - \\
&- F_{ij} H_{mn} (\mu_p^{(r)})^2 \tilde{T}_{imp}^{(z\theta r)}(t) - F_{ii} (\mu_m^{(0)})^2 \sum_{q=1}^{\infty} H_{pq} \tilde{T}_{imq}^{(z\theta r)}(t) + F_{ii} \sum_{n,q=1}^{\infty} O_{mn} H_{pq} \tilde{T}_{inq}^{(z\theta r)}(t) + \\
&+ F_{ii} H_{mn} \sum_{q=1}^{\infty} J_{pq} \tilde{T}_{imq}^{(z\theta r)}(t) + \sum_{j,n,q=1}^{\infty} (1 - \delta_{ij}) F_{ij} [P_{mn} - Q_{mn}] H_{pq} \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) + \\
&+ \sum_{j,n,q=1}^{\infty} F_{ij} H_{mn} (1 - \delta_{ij} \delta_{mn}) [\alpha_{pq} - \omega_{pq}] \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) - \sum_{j,n,q=1}^{\infty} E_{ijmnpq} \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) - \sum_{j,n,q=1}^{\infty} D_{ij} O_{mn} J_{pq} \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) + \\
&+ \sum_{j,n,q=1}^{\infty} W_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) - \sum_{j,n,q=1}^{\infty} R_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) + \\
&+ \sum_{j,n,q=1}^{\infty} [S_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) - V_{ijmnpq} (\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)})] \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) + P_{imp}^{(z\theta r)}(t) . \quad (3.32)
\end{aligned}$$

na qual,

$$A_{ijmnpq} = \int_{r_0}^{r_1} A_{ijmn}(r) r w^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) dr ;$$

$$H_{pq} = \int_{r_0}^{r_1} r K^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) dr ;$$

$$B_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(z\theta r)}) = \int_{r_0}^{r_1} B_{ijmn}(r, \tilde{T}_\infty^{(z\theta)}) r \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) dr ;$$

$$k_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(z\theta r)}) = \int_{r_0}^{r_1} k_{ijmn}(r, \tilde{T}_\infty^{(z\theta)}) r \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) dr ;$$

$$C_{pq} = \int_{r_0}^{r_1} r \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) dr ;$$

$$J_{pq} = \int_{r_0}^{r_1} r d^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) dr ;$$

$$\alpha_{pq} = \left[r \Psi_p^{(r)}(r) K^{(r)}(r) \frac{d\Psi_q^{(r)}(r)}{dr} \right]_{r_0}^{r_1} ;$$

$$\omega_{pq} = \int_{r_0}^{r_1} K^{(r)}(r) \frac{d\Psi_q^{(r)}(r)}{dr} \frac{d[r \Psi_p^{(r)}(r)]}{dr} dr ;$$

$$E_{ijmnpq} = \int_{r_0}^{r_1} E_{ijmn}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) dr ;$$

$$W_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(z\theta r)}) = \int_{r_0}^{r_1} W_{ijmn}(r, \tilde{T}_\infty^{(z\theta)}) r \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) dr ;$$

$$R_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(z\theta r)}) = \int_{r_0}^{r_1} R_{ijmn}(r, \tilde{T}_\infty^{(z\theta)}) r \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) dr ,$$

$$S_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(z\theta r)}) = \left[r \Psi_p^{(r)}(r) S_{ijmn}(r, \tilde{T}_\infty^{(z\theta)}) \frac{d\Psi_q^{(r)}(r)}{dr} \right]_{r_0}^{r_1} ;$$

$$V_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(z\theta r)}) = \int_{r_0}^{r_1} S_{ijmn}(r, \tilde{T}_\infty^{(z\theta)}) \frac{d\Psi_q^{(r)}(r)}{dr} \frac{d[r \Psi_p^{(r)}(r)]}{dr} dr ,$$

nas quais, $\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}$ é o termo dependente da temperatura, transformado para as coordenadas z, θ e r .

Para escrever a equação (3.32) em uma forma mais compacta, definiu-se os coeficientes como sendo

$$\begin{aligned}
 B_{ijmnpq}^* &= C_{ij}[H_{mn}H_{pq} - C_{mn}C_{pq}] - E_{ijmnpq} - D_{ij}O_{mn}J_{pq} + \\
 &\quad + (1 - \delta_{ij})F_{ij}(P_{mn} - Q_{mn})H_{pq} + F_{ij}H_{mn}(1 - \delta_{ij}\delta_{mn})(\alpha_{pq} - \omega_{pq}); \\
 C_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) &= W_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) - R_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) - B_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) - k_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) + \\
 &\quad + S_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) - V_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}); \\
 D_{iimnpq} &= F_{ii}O_{mn}H_{pq} - (\mu_i^{(z)})^2 H_{mn}H_{pq}; \\
 E_{iimmpq} &= F_{ii}H_{mm}J_{pq} - F_{ii}(\mu_m^{(\theta)})^2 H_{pq}; \\
 F_{iimppp} &= F_{ii}H_{mm}(\mu_p^{(r)})^2,
 \end{aligned}$$

e então, a equação (3.32) é escrita novamente, como apresentada a seguir

$$\begin{aligned}
 \sum_{j,n,q=1}^{\infty} A_{ijmnpq} \frac{d}{dt} \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) &= \sum_{j,n,q=1}^{\infty} B_{ijmnpq}^* \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) + \sum_{j,n,q=1}^{\infty} C_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(z\theta r)}) \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) + \\
 &+ \sum_{n,q=1}^{\infty} D_{iimnpq} \tilde{T}_{inq}^{(z\theta r)}(t) + \sum_{q=1}^{\infty} E_{iimmpq} \tilde{T}_{imq}^{(z\theta r)}(t) - F_{iimppp} \tilde{T}_{imp}^{(z\theta r)}(t) + P_{imp}^{(z\theta r)}(t). \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

A equação acima é um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não linear. Para que sua postulação fique completa é necessário obter a condição inicial. Isto pode ser efetuado, transformando a condição inicial original

$$T(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Logo, tem-se para os três eixos espaciais

$$\tilde{T}_{imp}^{(z\theta r)}(0) = \int_{r_0}^{r_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{z_0}^{z_1} r w^{(r)}(r) w^{(\theta)}(\theta) w^{(z)}(z) \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_i^{(z)}(z) f(\mathbf{x}) dz d\theta dr = \tilde{f}_{imp}^{(z\theta r)}. \quad (3.34)$$

3.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas

O sistema descrito pela equação (3.33) possui um número infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas, sujeito a condição inicial transformada, dada pela equação (3.34). Para obter resultados numéricos o sistema não-linear e infinito de equações diferenciais ordinárias (3.33) deve ser truncado em uma ordem suficientemente grande como mostrado a seguir

$$\begin{aligned} \sum_{j,n,q=1}^{N_z, N_\theta, N_r} A_{ijmnpq} \frac{d}{dt} \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) = & \sum_{j,n,q=1}^{N_z, N_\theta, N_r} B_{ijmnpq}^* \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) + \sum_{j,n,q=1}^{N_z, N_\theta, N_r} C_{ijmnpq} (\tilde{T}^{(z\theta r)}) \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) + \\ & + \sum_{j,n,q=1}^{N_z, N_\theta, N_r} \delta_{ij} [D_{iimnpq} + \delta_{mn} (E_{iimmpq} - \delta_{pq} F_{iimpp})] \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t) + P_{imp}^{(z\theta r)}(t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

sujeito à condição inicial

$$\tilde{T}_{imp}^{(z\theta r)}(0) = \tilde{f}_{imp}^{(z\theta r)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_z; \quad m = 1, 2, \dots, N_\theta; \quad p = 1, 2, \dots, N_r; \quad (3.36)$$

na qual N_z, N_θ, N_r , são as quantidades de termos na série truncada, escolhidos suficientemente grandes para se obter a precisão desejada, respeitando os recursos computacionais disponíveis.

3.5 – Solução do Sistema Não Linear

O sistema finito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não linear (3.35) pode ser resolvido usando subrotinas computacionais para problemas de valor inicial, como a DIVPAG do IMSL, (1994) proporcionando a solução do sistema com precisão.

Uma vez que a solução do sistema seja encontrada, utiliza-se as fórmulas de inversão (3.12b), (3.20b) e (3.28b), respectivamente, para obter a distribuição de temperatura

$$T(r, \theta, z, t) = \sum_{i,m,p=1}^{N_z, N_\theta, N_r} \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_i^{(z)}(z) \tilde{T}_{imp}^{(z\theta r)}(t).$$

Aplicação em Coordenadas Cartesianas: Resfriamento de Paralelepípedo

Como aplicação da formulação apresentada no Capítulo 2, será analisado neste Capítulo, um exemplo da equação da difusão do calor em um meio sólido.

Segundo Incropera (1992), o objetivo mais importante numa análise de condução é o de determinar a distribuição de temperatura num meio, resultante das condições impostas às suas fronteiras. Num sólido, o conhecimento da distribuição de temperatura pode ser usado para o julgamento da integridade estrutural através da determinação de tensões, das expansões e das deflexões térmicas. A distribuição de temperatura também pode ser usada para se otimizar a espessura de um material isolante ou para determinar a compatibilidade entre revestimentos ou adesivos especiais e o material.

4.1 – Análise Matemática

Considera-se o problema de condução de calor transiente no interior de um material isotrópico com condutividade térmica dependente da temperatura. Para tal fenômeno, a formulação matemática é dada por

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \nabla \bullet [K(T(x, y, z, t)) \nabla T(x, y, z, t)] \quad (4.1)$$

definido para o domínio, $0 < x < l_x$, $0 < y < l_y$, $0 < z < l_z$, $t > 0$.

Na equação (4.1), todas variáveis e parâmetros são adimensionais e as relações entre eles e suas dimensões são expressos pela formulação seguinte

$$T(x, y, z, t) \equiv \frac{T^*(x^*, y^*, z^*, t) - T_\infty^*}{T_0^* - T_\infty^*} \Leftrightarrow T^*(x^*, y^*, z^*, t) = T_\infty^* + (T_0^* - T_\infty^*) T(x, y, z, t), \quad (4.2a)$$

$$x \equiv \frac{x^*}{L^*}, \quad y \equiv \frac{y^*}{L^*}, \quad z \equiv \frac{z^*}{L^*}, \quad t \equiv \frac{k_{\text{ref}}^* t^*}{\rho c (L^*)^2} \Leftrightarrow x^* = x L^*, \quad y^* = y L^*, \quad z^* = z L^*, \quad t^* = \frac{\rho c (L^*)^2 t}{k_{\text{ref}}^*} \quad (4.2b-e)$$

$$k_{\text{ref}}^* \equiv \frac{\int_{T_0^*}^{T_\infty^*} k^*(T^*) dT^*}{\int_{T_0^*}^{T_\infty^*} dT^*} = \frac{\int_{T_0^*}^{T_\infty^*} k^*(T^*) dT^*}{T_\infty^* - T_0^*}, \quad K[T(x, y, z, t)] \equiv \frac{k^*[T^*(x^*, y^*, z^*, t)]}{k_{\text{ref}}^*} \quad (4.2f,g)$$

$$L^* = \max\{l_x^*, l_y^*, l_z^*\}, \quad l_x \equiv \frac{l_x^*}{L^*}, \quad l_y \equiv \frac{l_y^*}{L^*}, \quad l_z \equiv \frac{l_z^*}{L^*} \Leftrightarrow l_x^* \equiv l_x L^*, \quad l_y^* \equiv l_y L^*, \quad l_z^* \equiv l_z L^* \quad (4.2h-l)$$

O tempo adimensional (t) é também conhecido na literatura como número de Fourier, Fo , assim $Fo \equiv t = \alpha t^* / (L^*)^2$.

As condições inicial e de contorno para a equação (4.1) são respectivamente dadas por

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z) = 1, \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad 0 \leq y \leq l_y, \quad 0 \leq z \leq l_z, \quad (4.3a)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad t > 0, \quad (4.3b)$$

$$T(l_x, y, z, t) = 0, \quad T(x, l_y, z, t) = 0, \quad T(x, y, l_z, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.3c)$$

As condições anteriores são as expressões, para esta aplicação, das equações (2.2a,b,c) da formulação geral apresentada no Capítulo 2.

A condutividade térmica é representada por uma função não-linear da temperatura, como segue

$$K(T(x, y, z, t)) = a + bT(x, y, z, t) + cT^2(x, y, z, t), \quad (4.4)$$

onde os parâmetros a , b e c são dependentes da condutividade do material para uma dada faixa de temperatura. Esta aproximação é boa porque alguns materiais tem condutividade térmica quase constante em um determinado intervalo de temperatura, outros tem condutividade térmica variando linearmente com a temperatura, e alguns materiais com variação mais geral, podem ter a condutividade térmica aproximada através de um polinômio de segunda ordem. De fato, esta relação entre condutividade térmica e temperatura pode ser feita usando qualquer função satisfatória.

Substituindo-se a equação (4.4) em (4.1) obtém-se

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = a \nabla^2 T(x, y, z, t) + b \nabla \cdot [T(x, y, z, t) \nabla T(x, y, z, t)] + c \nabla \cdot [T^2(x, y, z, t) \nabla T(x, y, z, t)] \quad (4.5)$$

No caso particular $b = c = 0$, a equação (4.5) terá somente o primeiro termo do membro da direita, pois os outros dois se anularão e o problema difusivo não-linear se torna linear.

Comparando a equação (4.5) com a equação (2.1), observa-se que os termos,

$$K^{(x)}(x) = K^{(y)}(y) = K^{(z)}(z) = a^{1/3};$$

$$K_T(x, T) = bT(x, t) + cT^2(x, t);$$

$$P(\mathbf{x}, t) = d^*(\mathbf{x}) = d^{(x)}(x) = d^{(y)}(y) = d^{(z)}(z) = 0;$$

$$w^{(x)}(x) = w^{(y)}(y) = w^{(z)}(z) = w^*(\mathbf{x}) = 1, \text{ sendo } \mathbf{x} = (x, y, z).$$

Os operadores L_0 e L_T em coordenadas cartesianas são:

$$L_0 = -\nabla \cdot [K^{(x)}(x)K^{(y)}(y)K^{(z)}(z)\nabla(\)] + d^{(x)}(x) + d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z) + d^*(x, y, z);$$

$$L_T = -\nabla \cdot [K_T(x, y, z, T)\nabla(\)];$$

Nesta aplicação estes operadores tem a seguinte forma:

$$L_0 = -\nabla \cdot [a \nabla ()];$$

$$L_T = -\nabla \cdot \{ [bT(x, y, z, t) + cT^2(x, y, z, t)] \nabla () \};$$

4.2 – Problema Auxiliar de Autovalor

Os problemas de autovalores auxiliares e suas condições de contorno para os eixos x , y e z são escolhidos em conformidade com Aparecido (1997) e são expressos por

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_i^{(x)}(x)}{dx^2} + (\mu_i^{(x)})^2 \Psi_i^{(x)}(x) = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad (4.6)$$

$$\left. \frac{d\Psi_i^{(x)}(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad (4.6a)$$

$$\Psi_i^{(x)}(x = l_x) = 0; \quad (4.6b)$$

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_m^{(y)}(y)}{dy^2} + (\mu_m^{(y)})^2 \Psi_m^{(y)}(y) = 0, \quad 0 < y < l_y, \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad (4.7a)$$

$$\Psi_m^{(y)}(y = l_y) = 0; \quad (4.7b)$$

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_p^{(z)}(z)}{dz^2} + (\mu_p^{(z)})^2 \Psi_p^{(z)}(z) = 0, \quad 0 < z < l_z, \quad (4.8)$$

$$\left. \frac{d\Psi_p^{(z)}(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad (4.8a)$$

$$\Psi_p^{(z)}(z = l_z) = 0; \quad (4.8b)$$

As soluções dos problemas (4.6), (4.7) e (4.8), sujeitas as condições de contorno (4.6a,b), (4.7a,b) e (4.8a,b) para os três eixos espaciais são efetuadas e portanto são obtidas as autofunções normalizadas $\Psi_i^{(x)}$, $\Psi_m^{(y)}$ e $\Psi_p^{(z)}$, as autoconstantes $B_i^{(x)}$, $B_m^{(y)}$ e $B_p^{(z)}$, bem como os autovalores $\mu_i^{(x)}$, $\mu_m^{(y)}$ e $\mu_p^{(z)}$. Estas entidades matemáticas são apresentadas a seguir:

$$\Psi_i^{(x)}(x) = B_i^{(x)} \cos(\gamma_i^{(x)} x), B_i^{(x)} = \sqrt{\frac{2}{l_x}}, \mu_i^{(x)} = \frac{(2i-1)\pi}{2l_x} a^{1/6}, \gamma_i^{(x)} = \frac{\mu_i^{(x)}}{a^{1/6}}, i = 1, 2, \dots, \infty; \quad (4.9a)$$

$$\Psi_m^{(y)}(y) = B_m^{(y)} \cos(\gamma_m^{(y)} y), B_m^{(y)} = \sqrt{\frac{2}{l_y}}, \mu_m^{(y)} = \frac{(2m-1)\pi}{2l_y} a^{1/6}, \gamma_m^{(y)} = \frac{\mu_m^{(y)}}{a^{1/6}}, m = 1, 2, \dots, \infty; \quad (4.9b)$$

$$\Psi_p^{(z)}(z) = B_p^{(z)} \cos(\gamma_p^{(z)} z), B_p^{(z)} = \sqrt{\frac{2}{l_z}}, \mu_p^{(z)} = \frac{(2p-1)\pi}{2l_z} a^{1/6}, \gamma_p^{(z)} = \frac{\mu_p^{(z)}}{a^{1/6}}, p = 1, 2, \dots, \infty. \quad (4.9c)$$

4.3 – Transformada Integral Generalizada

A Técnica da Transformada Integral Generalizada aplicada na solução da equação diferencial parcial (4.1) transforma o problema investigado em um sistema infinito acoplado de equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem, o qual é truncado e resolvido numericamente. Através da fórmula de inversão que esta técnica proporciona é possível reconstruir o potencial original.

O par transformada-inversa associado aos três eixos é constituído seguindo a teoria da Transformada Integral Generalizada, (Cotta, 1993), e é expresso pelas seguintes equações,

$$\tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_p^{(z)}(z) T(x, y, z, t) dx dy dz, \quad i, m, p = 1, 2, \dots, \infty \quad (4.10a)$$

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i, m, p=1}^{\infty} \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t) \quad (4.10b)$$

O termo $\tilde{T}_{imp}^{(xyz)}$ significa a transformação da variável dependente para os eixos x, y e z com respeito às autofunções $\Psi_i^{(x)}$, $\Psi_m^{(y)}$ e $\Psi_p^{(z)}$, respectivamente.

De acordo com o apresentado na seção 2.3 do Capítulo 2, para transformar a equação diferencial parcial original (4.5) multiplica-se esta equação pelas respectivas autofunções; os problemas de autovalores foram multiplicados por $T(x, y, z, t)$; as equações resultantes foram somadas e integradas sobre todo o domínio. Assim, um sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado é obtido e dado por

$$\frac{d\tilde{T}_{\text{imp}}^{(\text{xyz})}(t)}{dt} = \sum_{j, n, q=1}^{\infty} [A_{ijmnpq} + B_{ilmnpq}(\tilde{T}_{\infty}(t))] \tilde{T}_{jnq}^{(\text{xyz})}(t), \quad i, m, p = 1, 2, \dots, \infty \quad (4.11)$$

onde o vetor $\tilde{T}_{\infty}(t)$ contém todos os termos infinitos, transformados para $i, m, p = 1, 2, \dots, \infty$,

$$\tilde{T}_{\infty}(t) \equiv [\{\tilde{T}_{111}, \tilde{T}_{112}, \tilde{T}_{113}, \dots\}, \{\tilde{T}_{121}, \tilde{T}_{122}, \tilde{T}_{123}, \dots\}, \dots, \{\tilde{T}_{211}, \tilde{T}_{212}, \tilde{T}_{213}, \dots\}, \{\tilde{T}_{221}, \tilde{T}_{222}, \tilde{T}_{223}, \dots\}, \dots]^T(t) \quad (4.11a)$$

A equação (4.11) é um sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas. Para que sua postulação fique completa é necessário prover uma condição inicial. Isto pode ser efetuado, transformando a condição inicial original (4.3a). Logo tem-se,

$$\tilde{T}_{\text{imp}}^{(\text{xyz})}(0) = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_p^{(z)}(z) dx dy dz = \tilde{f}_{\text{imp}}^{(\text{xyz})} \text{ com } i, m, p = 1, 2, \dots, \infty. \quad (4.11b)$$

Os coeficientes na equação (4.11) são resultantes da transformação dos termos lineares e não-lineares da equação (4.5) e são representados por

$$A_{ijmnpq} = B_{ijmnpq}^* + \delta_{ij} D_{ijmnpq} + \delta_{ij} \delta_{mn} E_{ijmnpq} + \delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{pq} F_{ijmnpq}; \quad (4.11c)$$

$$B_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}(t)) = -\{R_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}(t)) + C_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}(t)) + V_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}(t))\}, \quad (4.11d)$$

e os coeficientes envolvidos na equação (4.11c) são expressos por:

$$B_{ijmnpq}^* = (1 - \delta_{ij}) F_{ij} Q_{mn} H_{pq} - F_{ij} H_{mn} \omega_{pq} (1 - \delta_{ij} \delta_{mn}); \quad (4.11e)$$

$$D_{iimnpq} = -(\mu_i^{(x)})^2 H_{mn} H_{pq}; \quad E_{iimnpq} = -(\mu_m^{(y)})^2 F_{ii} H_{pq}; \quad F_{iimpp} = (\mu_p^{(3)}) F_{ii} H_{mm}, \quad (4.11f-h)$$

sendo

$$Q_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} dy; \quad \omega_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} K^{(z)}(z) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \frac{d\Psi_p^{(z)}(z)}{dz} dz; \quad (4.11i,j)$$

$$F_{ij} = \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx; \quad H_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy; \quad (4.11k,l)$$

$$H_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz. \quad (4.11m)$$

Após realização das integrações anteriores tem-se

$$F_{ij} = \delta_{ij}; \quad H_{mn} = \delta_{mn}; \quad H_{pq} = \delta_{pq}; \quad \omega_{pq} = \mu_q^{(z)} \mu_p^{(z)} \delta_{pq}; \quad Q_{mn} = \mu_n^{(y)} \mu_m^{(y)} \delta_{mn}. \quad (4.11n-s)$$

Os coeficientes da equação (4.11d) devem ser obtidos numericamente devido as não linearidades. Suas expressões matemáticas são dadas por

$$R_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(xyz)}) = b \sum_{a,b,c=1}^{\infty} X_{ijmnpqabc} \tilde{T}_{abc}^{(xyz)}(t) + c \sum_{a,b,c,d,e,f=1}^{\infty} X_{ijmnpqabc\delta f} \tilde{T}_{abc}^{(xyz)}(t) \tilde{T}_{def}^{(xyz)}(t); \quad (4.12a)$$

$$B_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(xyz)}) = b \sum_{a,b,c=1}^{\infty} Y_{ijmnpqabc} \tilde{T}_{abc}^{(xyz)}(t) + c \sum_{a,b,c,d,e,f=1}^{\infty} Y_{ijmnpqabc\delta f} \tilde{T}_{abc}^{(xyz)}(t) \tilde{T}_{def}^{(xyz)}(t); \quad (4.12b)$$

$$V_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty^{(xyz)}) = b \sum_{a,b,c=1}^{\infty} Z_{ijmnpqabc} \tilde{T}_{abc}^{(xyz)}(t) + c \sum_{a,b,c,d,e,f=1}^{\infty} Z_{ijmnpqabc\delta f} \tilde{T}_{abc}^{(xyz)}(t) \tilde{T}_{def}^{(xyz)}(t); \quad (4.12c)$$

nas quais,

$$X_{ijmnpqabc} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} \Psi_{abc}^{(xyz)}(x) \Psi_{ij}^{(x)}(x) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} \Psi_{pq}^{(z)}(z) dx dy dz; \quad (4.12d)$$

$$X_{ijmnpqabc\delta f} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} \Psi_{abc}^{(xyz)}(x) \Psi_{def}^{(xyz)}(x) \Psi_{ij}^{(x)}(x) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} \Psi_{pq}^{(z)}(z) dx dy dz; \quad (4.12e)$$

$$Y_{ijmnpqabc} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} \Psi_{abc}^{(xyz)}(x) \frac{d\Psi_j^{(x)}(x)}{dx} \frac{d\Psi_i^{(x)}(x)}{dx} \Psi_{mn}^{(y)}(y) \Psi_{pq}^{(z)}(z) dx dy dz; \quad (4.12f)$$

$$Y_{ijmnpqabc\delta f} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} \Psi_{abc}^{(xyz)}(x) \Psi_{def}^{(xyz)}(x) \frac{d\Psi_j^{(x)}(x)}{dx} \frac{d\Psi_i^{(x)}(x)}{dx} \Psi_{mn}^{(y)}(y) \Psi_{pq}^{(z)}(z) dx dy dz; \quad (4.12g)$$

$$Z_{ijmnpqabc} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} \Psi_{abc}^{(xyz)}(x) \Psi_{ij}^{(x)}(x) \Psi_{mn}^{(y)}(y) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \frac{d\Psi_p^{(z)}(z)}{dz} dx dy dz; \quad (4.12h)$$

$$Z_{ijmnpqabc\mathfrak{d}\mathfrak{f}} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} \Psi_{abc}^{(xyz)}(x) \Psi_{\mathfrak{d}\mathfrak{f}}^{(xyz)}(x) \Psi_{ij}^{(x)}(x) \Psi_{mn}^{(y)}(y) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \frac{d\Psi_p^{(z)}(z)}{dz} dx dy dz, \quad (4.12i)$$

sendo

$$\Psi_{ij}^{(x)}(x) = \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x); \quad \Psi_{mn}^{(y)}(y) = \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y); \quad \Psi_{pq}^{(z)}(z) = \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z); \quad (4.12j-l)$$

$$\Psi_{abc}^{(xyz)}(\mathbf{x}) = \Psi_a^{(x)}(x) \Psi_b^{(y)}(y) \Psi_c^{(z)}(z); \quad \Psi_{\mathfrak{d}\mathfrak{f}}^{(xyz)}(\mathbf{x}) = \Psi_{\mathfrak{d}}^{(x)}(x) \Psi_{\mathfrak{f}}^{(y)}(y) \Psi_{\mathfrak{f}}^{(z)}(z). \quad (4.12m,n)$$

4.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas

A equação (4.11) é a versão, para esta aplicação, do sistema apresentado pela equação (2.29) do Capítulo 2. Logo, como descrito naquela seção, o sistema (4.11) possui um número infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem sujeito à condição inicial transformada, dada pela equação (4.11b) e para obter resultados numéricos o sistema infinito (4.11) deve ser truncado em uma ordem finita suficientemente grande de acordo com a precisão desejada ou respeitando os recursos computacionais disponíveis. Deste modo, truncando a expansão x para um N_x , a expansão y para um N_y e a expansão z para um N_z número de termos, tem-se o sistema para um total de $(N_x N_y N_z)$ equações diferenciais ordinárias, como segue

$$\frac{d\tilde{T}_{\text{imp}}^{(xyz)}(t)}{dt} = \sum_{j, n, q=1}^{N_x, N_y, N_z} [(A_{ijmnpq} + B_{ijmnpq}(\tilde{T}^{(xyz)}(t))) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t)], \quad \{i, m, p\} = \{1, 2, \dots, N_x; 1, 2, \dots, N_y; 1, 2, \dots, N_z\} \quad (4.13)$$

sujeito a condição inicial

$$\tilde{T}_{\text{imp}}^{(xyz)}(0) = \tilde{f}_{\text{imp}}^{(xyz)}, \quad \{i, m, p\} = \{1, 2, \dots, N_x; 1, 2, \dots, N_y; 1, 2, \dots, N_z\}. \quad (4.13a)$$

A equação (4.13) é um sistema finito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-lineares e pode ser escrito na forma matricial, como dado a seguir

$$\frac{d\tilde{\mathbf{T}}(t)}{dt} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{T}}(t))]\tilde{\mathbf{T}}(t), \quad (4.13b)$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz dos coeficientes lineares A_{ijmnpq} e $\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{T}}(t))$ a matriz dos coeficientes não-lineares $B_{ijmnpq}(\tilde{\mathbf{T}}^{(xyz)}(t))$. O vetor $\tilde{\mathbf{T}}(t)$ é o vetor $\tilde{\mathbf{T}}_{\infty}(t)$ truncado, como comentado anteriormente, e é expresso por

$$\tilde{\mathbf{T}}(t) = [\tilde{T}_{111}, \tilde{T}_{112}, \dots, \tilde{T}_{11N_z}, \tilde{T}_{121}, \tilde{T}_{122}, \dots, \tilde{T}_{12N_z}, \dots, \tilde{T}_{1N_y1}, \tilde{T}_{1N_y2}, \dots, \tilde{T}_{1N_yN_z}, \dots, \tilde{T}_{2N_yN_z}, \dots, \tilde{T}_{N_xN_y1}, \tilde{T}_{N_xN_y2}, \dots, \tilde{T}_{N_xN_yN_z}]^T.$$

4.5 – Solução do Sistema Não Linear

Para resolver o sistema finito não-linear de equações diferenciais ordinárias (4.13) foi implementado um programa em Fortran 90/95 que simula a difusão tridimensional não-linear transiente em corpos com geometria cartesiana. Neste programa a subrotina DIVPAG do IMSL (1994) foi usada com precisão $\varepsilon = 10^{-5}$, para resolver o sistema de equações diferenciais.

Uma vez que a solução do sistema foi encontrada, a fórmula de inversão (4.10b), depois da série truncada é usada para obter a distribuição de temperatura.

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i,m,p=1}^{N_x, N_y, N_z} \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t). \quad (4.14)$$

4.6 – Resultados e Discussão

Neste trabalho, foi considerado um paralelepípedo cartesiano (cubo), com comprimento unitário em cada direção, x , y e z , $l_x = l_y = l_z = 1$ e os materiais analisados foram o Chumbo, o Aço Inoxidável Aisi 304 e o Paládio. Todos os materiais sofreram um processo de resfriamento de uma temperatura inicial T_0^* até uma temperatura final T_{∞}^* de acordo com a Tabela 4.1. As ordens usadas nos truncamentos das séries foram de 5, 7 e 10 termos para cada direção, resultando em sistemas diferenciais com 125, 343 e 1000 equações diferenciais, respectivamente.

Tabela 4.1 – Intervalos adotados no resfriamento do Paralelepípedo.

MATERIAL	TEMPERATURA INICIAL T_0^* (K)	TEMPERATURA FINAL T_∞^* (K)
Chumbo	600	300
Aço Aisi 304	1200	400
Paládio	1000	100

As condições de contorno adotadas na formulação dessa aplicação são de temperatura prescrita igual a zero na superfície do cubo. Por conveniência, o sistema de coordenadas cartesianas foi adotado com a origem coincidindo com o centro geométrico do paralelepípedo, já que o problema satisfaz a condição de simetria. Para uma análise detalhada da distribuição de temperatura no seu interior, o paralelepípedo foi seccionado nos três planos, resultando em oito paralelepípedos idênticos, um dos quais foi analisado.

As condutividades térmicas na forma dimensional, $k^*(T^*)$, dos materiais foram obtidas dos dados experimentais disponíveis em Incropera & Witt (1992). A Figura 4.1 ilustra a condutividade térmica na forma dimensional dos três materiais adotados para os intervalos de temperatura mostrados na Tabela 4.1.

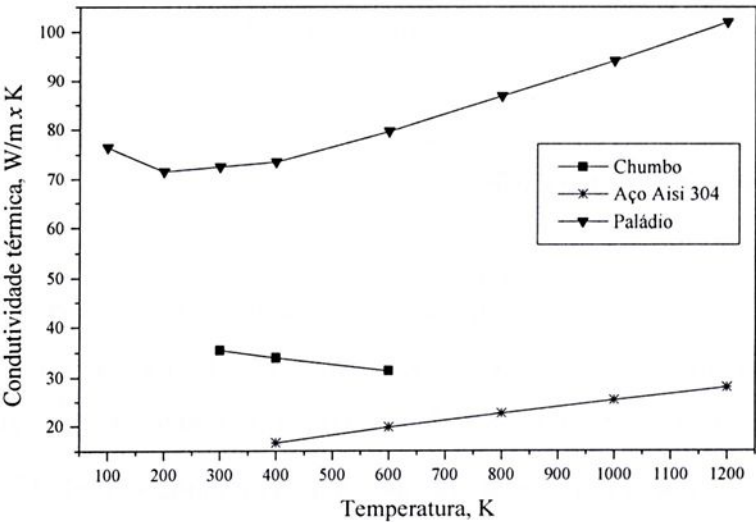


Figura 4.1: Condutividade térmica em função da temperatura

A equação (4.2f) foi utilizada para calcular as respectivas condutividades térmicas de referência k_{ref}^* e então, através da equação (4.2g) obteve-se as condutividades térmicas na forma

adimensional, $K(T)$. Na Tabela 4.2 são apresentadas as expressões de $K(T)$ e os valores de k_{ref}^* para cada material.

Tabela 4.2 – Condutividade térmica para os materiais analisados

MATERIAIS	CONDUTIVIDADE TÉRMICA		
	k_{ref}^*	$K(T) = a + bT$	$K(T) = a + bT + cT^2$
Chumbo	33,41	$1,061 - 0,122T$	-
Aço Aisi 304	22,42	$0,756 + 0,489T$	-
Paládio	79,91	$0,890 + 0,253T$	$0,932 - 0,110T + 0,370T^2$

Para os casos mostrados na Tabela 4.2, o tempo de processamento para se obter a solução do sistema finito não-linear (4.13) aumenta significativamente em consequência do cálculo repetido dos coeficientes dependentes da temperatura. Com o objetivo de reduzir este tempo, as matrizes **A** e **B**, da equação (4.13b), foram calculadas na forma de matrizes de banda, uma vez que os elementos das matrizes que estão fora da banda são assumidos como nulos. Caso se aumente a largura de banda, a aproximação para a solução melhora, porém, o tempo computacional também aumenta. A largura da banda adotada para matrizes foi 11, sendo que, para o material Paládio, analisou-se a influência de largura da banda e então, os valores utilizados foram 1, 3, 5, 11, 21, 41, 101 e 201.

Para o caso $b = c = 0$, como já dito anteriormente, a equação (4.5) torna-se linear, dependendo apenas do parâmetro a e então, três maneiras foram adotadas para analisar o problema linear gerado: a primeira consiste em tomar a condutividade térmica igual ao valor médio k_{ref}^* e assim, $K(T) = k_{ref}^* / k_{ref}^* = 1$ e as outras duas foram tomadas como sendo $K(T) = k_{min}^* / k_{ref}^* \neq 1$ e $K(T) = k_{max}^* / k_{ref}^* \neq 1$, onde $k_{max}^* = k^*(T_{max}^*)$ e $k_{min}^* = k^*(T_{min}^*)$ são os respectivos valores da condutividade nas temperaturas máximas e mínimas, de acordo com a Tabela 4.1 e os valores de k_{ref}^* estão na Tabela 4.2. Na Tabela 4.3 apresenta-se os valores de $K(T)$ que foram utilizados para esta análise.



Tabela 4.3 – Condutividade térmica para os materiais analisados, caso $K(T) = a$

MATERIAIS	CONDUTIVIDADE TÉRMICA, $K(T)$		
	$K(T) = k_{\min}^* / k_{\text{ref}}^*$	$K(T) = k_{\text{ref}}^* / k_{\text{ref}}^* = 1$	$K(T) = k_{\max}^* / k_{\text{ref}}^*$
Chumbo	0,940	1	1,062
Aço Aisi 304	0,741	1	1,249
Paládio	0,958	1	1,179

Na seqüência, serão apresentados as análises realizadas com os diferentes materiais para $K(T) = a$, $K(T) = a + bT$ e $K(T) = a + bT + cT^2$.

4.6.1 - Resultados para os diferentes materiais com $K(T) = a$

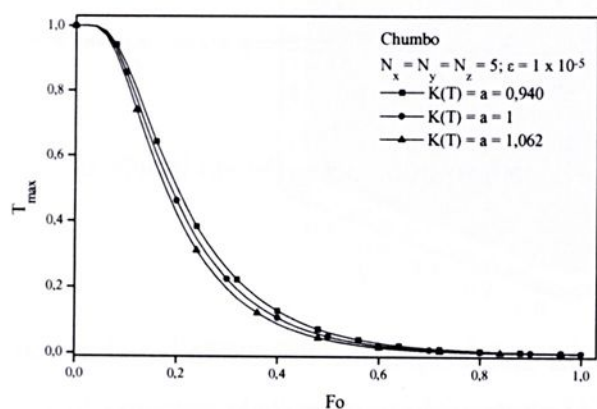
- **Chumbo**

Nas Figura 4.2 - 4.4 são apresentadas as distribuições de temperaturas máxima ($T_{\max}$) e média ($T_{\text{média}}$), em função do número de Fourier, Fo , para $K(T) = a$ e para as três ordens de truncamento analisadas. Como esperado, as curvas que apresentam o comportamento da temperatura se aproximam mais rapidamente de zero para os casos em que a condutividade térmica é maior.

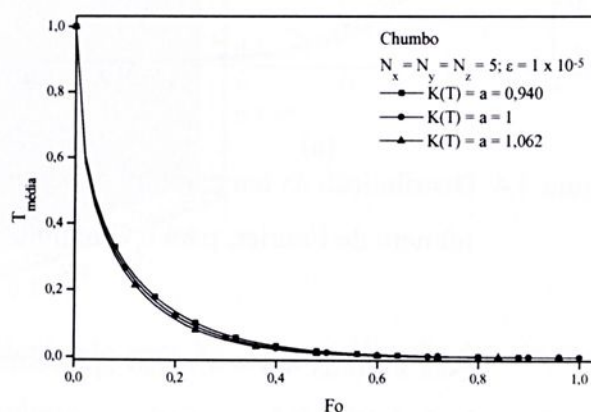
Pode-se observar que, apesar das distribuições de temperatura estarem visualmente próximas, os resultados obtidos em um determinado tempo Fo são distintos em todos os casos investigados. A condutividade térmica do Chumbo no intervalo de temperatura adotado possui um comportamento quase constante.

Analizou-se o caso para o qual a ordem de truncamento é 10, no instante $Fo = 0,2$. Tem-se para o caso $K(T) = 0,940$, a temperatura máxima $T_{\max} = 0,501$ e para $K(T) = 1,062$, a temperatura $T_{\max} = 0,422$. Isto determina uma diferença da ordem de 18% em relação ao menor valor. Analisando os resultados obtidos para a temperatura média, a diferença é maior, da ordem de 20%. Uma outra questão é observar o tempo que leva para a temperatura atingir, por exemplo, um décimo de seu valor inicial. Logo, para a temperatura máxima atingir $T_{\max} = 0,1$ quando calculada utilizando $K(T) = 0,940$ tem-se $Fo \approx 0,44$ e quando calculada para $K(T) = 1,062$

tem-se $Fo \approx 0,38$, acarretando em uma diferença de aproximadamente 16% com relação ao menor valor. Analogamente, para $T_{\text{média}} = 0,1$ obtém-se uma diferença de aproximadamente 20%. Para este material, nos casos que as ordens de truncamento são iguais a 5 e 7 termos na série, os resultados comportam-se de maneira semelhante.

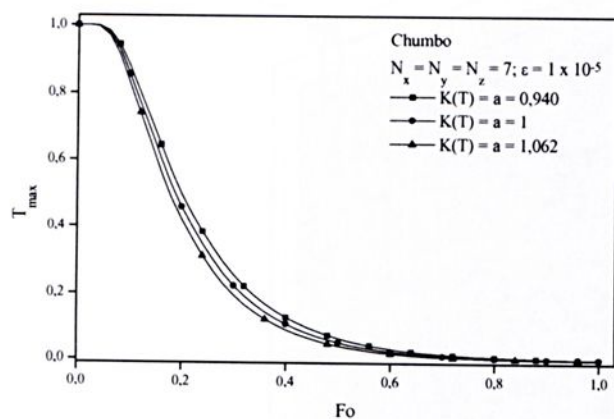


(a)

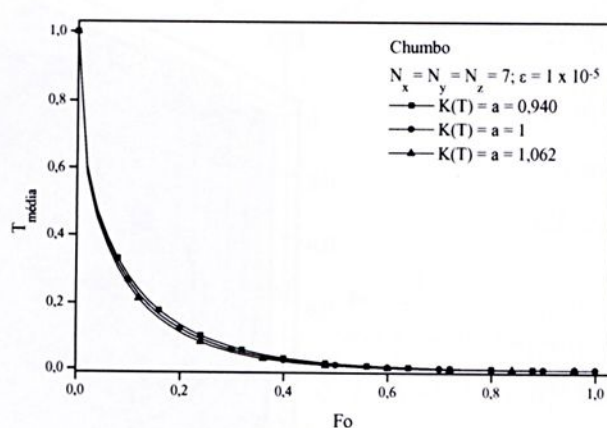


(b)

Figura 4.2: Distribuição da temperatura máxima (a) e da temperatura média (b), em função do número de Fourier, para o Chumbo.



(a)



(b)

Figura 4.3: Distribuição da temperatura máxima (a) e da temperatura média (b), em função do número de Fourier, para o Chumbo.

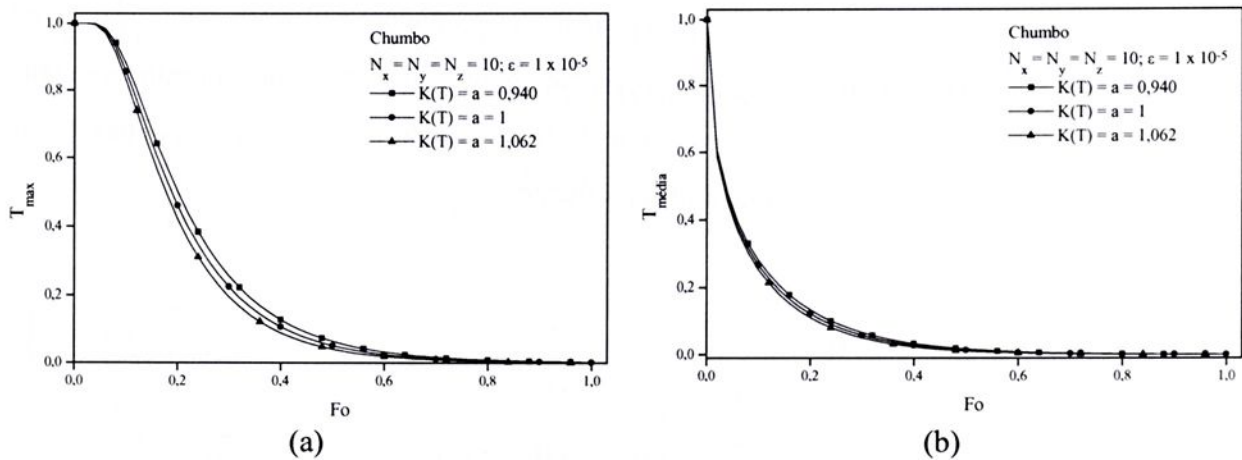


Figura 4.4: Distribuição da temperatura máxima (a) e da temperatura média (b) em função do número de Fourier, para o Chumbo.

Nas Figuras 4.5 - 4.7 são apresentadas as distribuições de temperaturas no sólido, para $Fo = 0,02; 0,18$ e $0,5$, respectivamente, com condutividade térmica dada por uma função constante $K(T) = 1$ e $N_x = N_y = N_z = 10$.

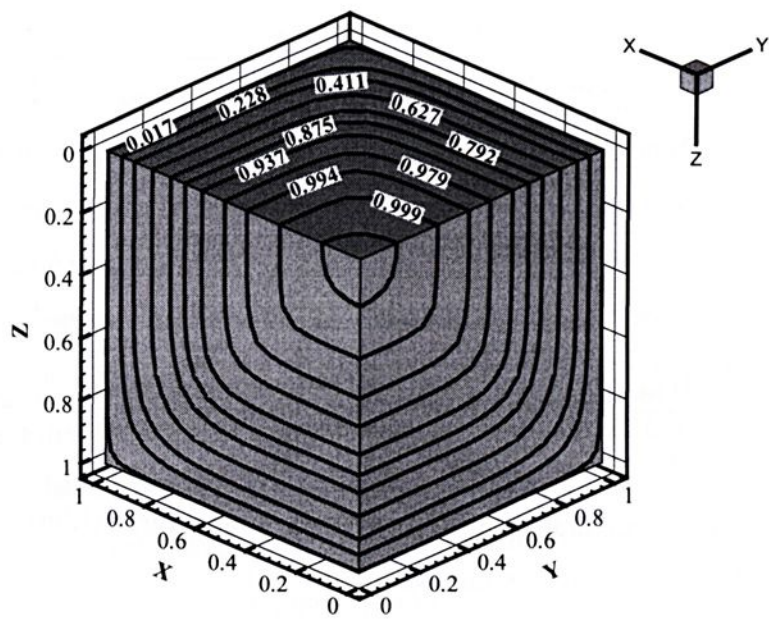


Figura 4.5: Distribuição de temperatura no paralelepípedo para $K(T) = 1$ em função dos eixos do espaço, para $Fo = 0,02$, material Chumbo.

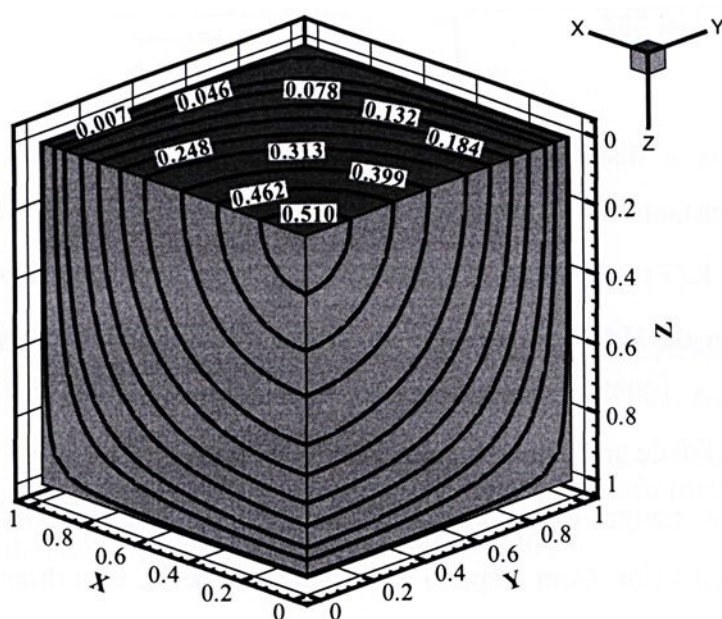


Figura 4.6: Distribuição de temperatura no paralelepípedo para $K(T)=1$ em função dos eixos do espaço, para $Fo = 0,18$, material Chumbo.

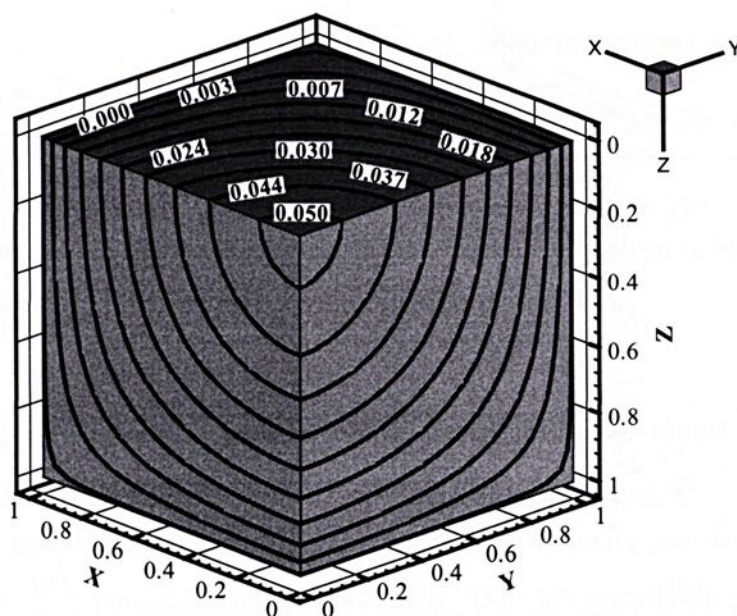


Figura 4.7: Distribuição de temperatura no paralelepípedo para $K(T)=1$ em função dos eixos do espaço, para $Fo = 0,5$, material Chumbo.

• Aço Inoxidável Aisi 304

Analizou-se a distribuição de temperatura no paralelepípedo de aço inoxidável Aisi 304 no mesmo instante de tempo $Fo = 0,2$. Tem-se para $K(T) = 0,741$, uma temperatura $T_{max} = 0,652$ e para $K(T) = 1,249$, a temperatura $T_{max} = 0,322$ acarretando uma diferença de temperatura da ordem de 100% em relação ao menor valor. Para a temperatura média, essa diferença é superior a 100%. O tempo que o paralelepípedo gasta para resfriar até uma temperatura $T_{max} = 0,1$ é de aproximadamente $Fo \approx 0,54$ para $K(T) = 0,741$ e quando calculada para $K(T) = 1,249$, o tempo é de $Fo \approx 0,32$ levando a uma diferença superior a 60% relativamente ao menor valor. Com respeito à temperatura média, essa diferença é da ordem de 70%.

Nas Figuras 4.8 - 4.10 são apresentadas as distribuições de temperaturas máxima (T_{max}) e média ($T_{média}$) em função do número de Fourier, Fo , para $K(T) = a$, segundo os três modelamentos de condutividade térmica constante, conforme a Tabela 4.3. Utilizou-se $N_x = N_y = N_z = 5, 7$ e 10 produzindo sistemas não-lineares de 125, 343 e 100 equações diferenciais ordinárias, respectivamente.

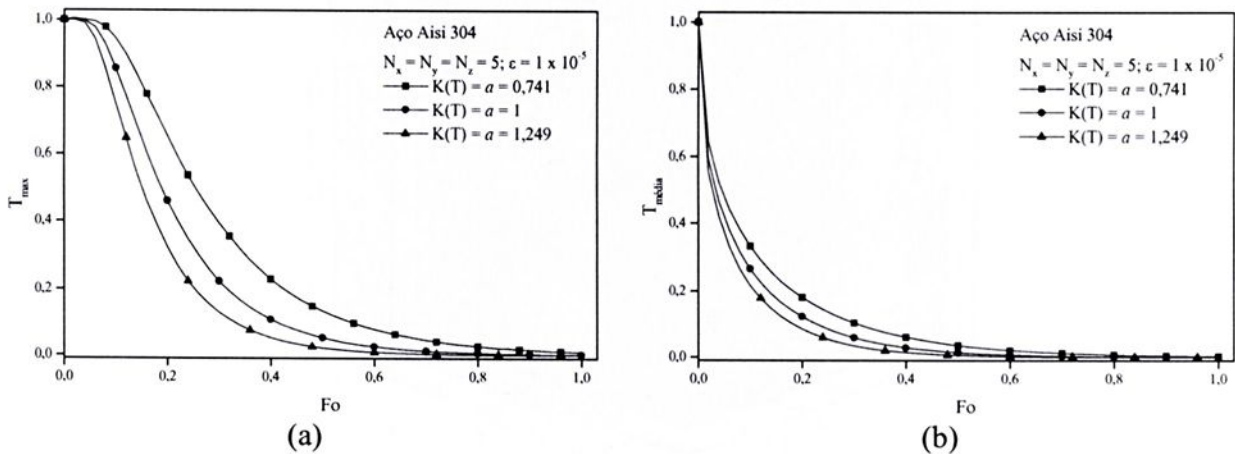


Figura 4.8: Distribuição da temperatura máxima (a) e da temperatura média (b), em função do número de Fourier, para o Aço Inoxidável Aisi 304.

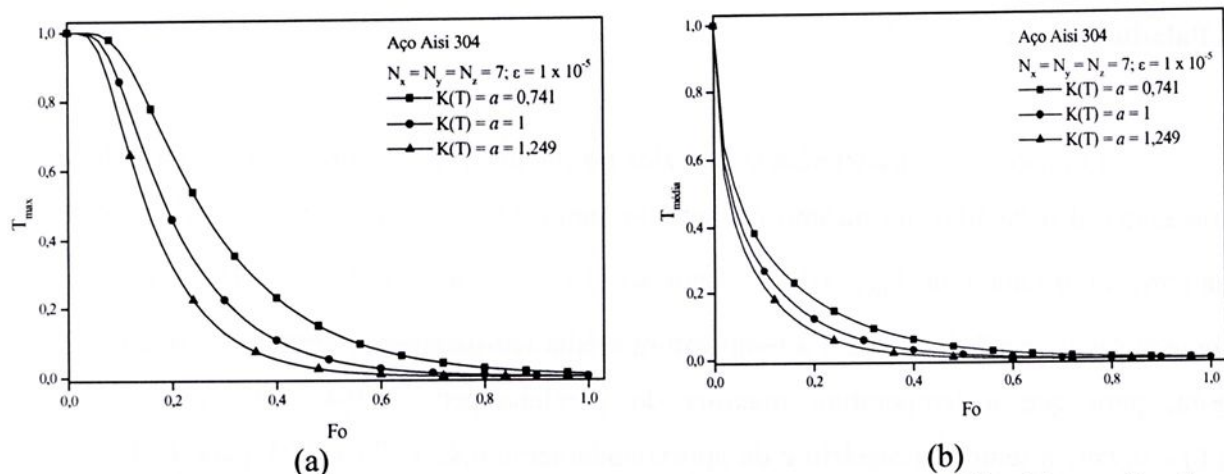


Figura 4.9: Distribuição da temperatura máxima (a) e da temperatura média (b), em função do número de Fourier, para o Aço Inoxidável Aisi 304.

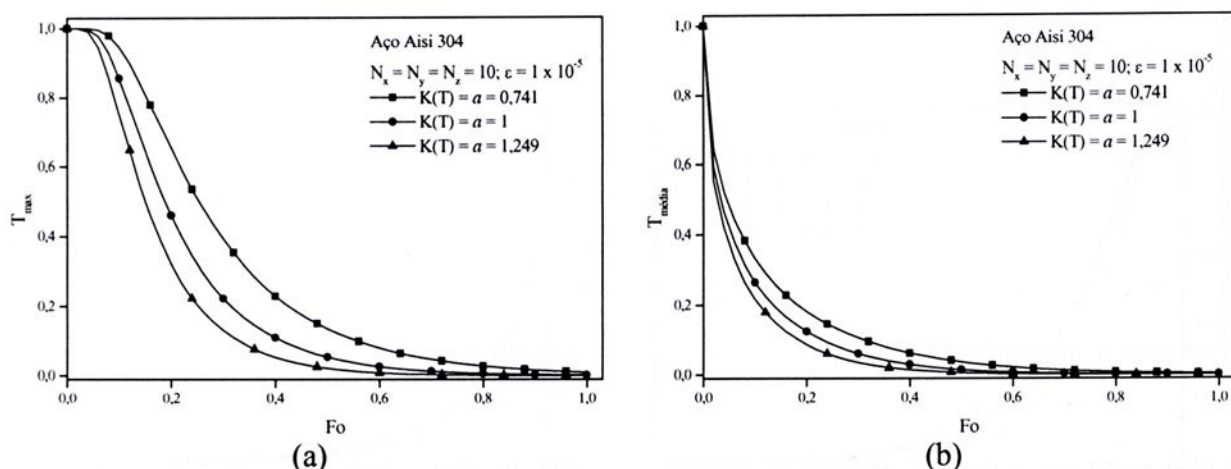


Figura 4.10: Distribuição da temperatura máxima (a) e da temperatura média (b), como função do número de Fourier, para o Aço Inoxidável Aisi 304.

Os resultados para as diferentes ordens de expansão são muito próximos, conforme pode ser observado nas Figuras 4.8 - 4.10.

As distribuições de temperatura em relação ao sistema de coordenadas tridimensional para $Fo = 0,02$; $0,18$ e $0,5$ para este material (aço Aisi 304), são semelhantes às apresentadas nas Figuras 4.5 – 4.7, pois em todos estes casos, apresentam-se distribuições de temperatura para a condutividade térmica expressa por uma função constante igual à unidade, isto é $K(T) = 1$ para $N_x = N_y = N_z = 10$.

• Paládio

O processo de transferência de calor no paralelepípedo também foi analisado tendo como material o Paládio, no mesmo instante de tempo $Fo = 0,2$. Para $K(T) = 0,958$ obtém-se uma temperatura máxima $T_{max} = 0,489$, para $K(T) = 1,179$, tem-se $T_{max} = 0,357$ o que dá uma diferença superior a 30%. Já para a temperatura média tem-se uma diferença da ordem de 40%. Agora, para que a temperatura máxima do paralelepípedo atinja o valor de 0,1 com $K(T) = 0,958$, o tempo necessário é de aproximadamente 0,42 e $Fo \approx 0,34$ para $K(T) = 1,179$, levando a uma diferença superior a 20%. Para que $T_{média} = 0,1$, a diferença também se encontra na faixa de 20%. As Figuras 4.11 - 4.13 ilustram as distribuições de temperaturas máxima e média em função do número de Fourier, segundo as três maneiras de obter $K(T) = a$.

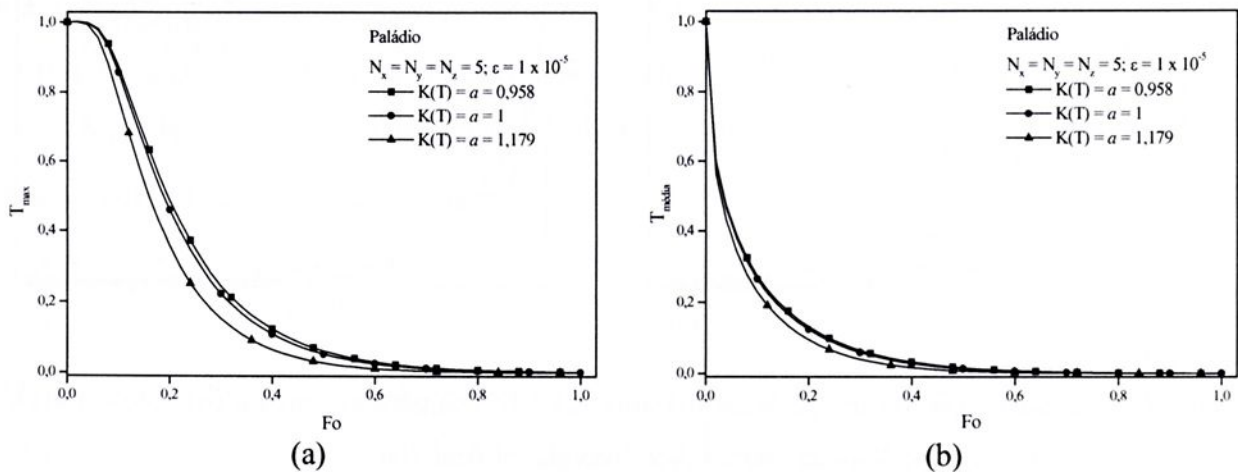
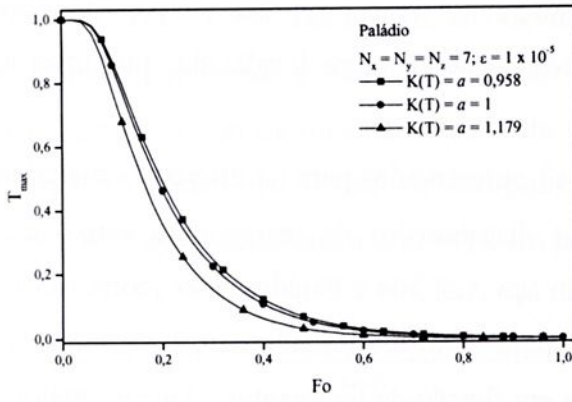
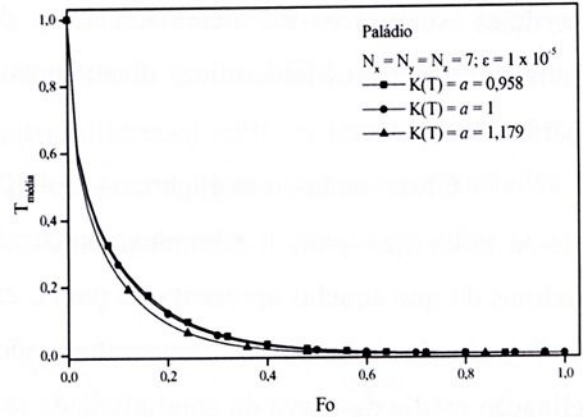


Figura 4.11: Distribuição da temperatura máxima (a) e da temperatura média (b), em função do número de Fourier, para o Paládio.

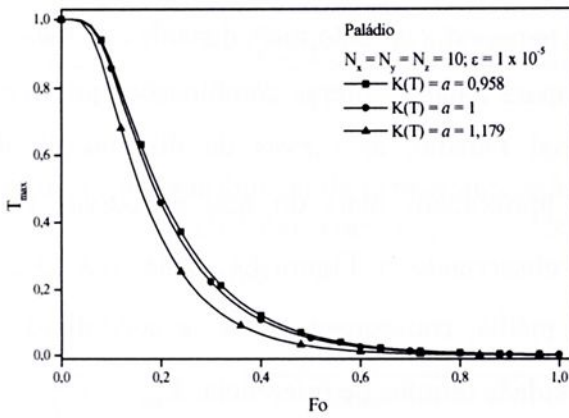


(a)

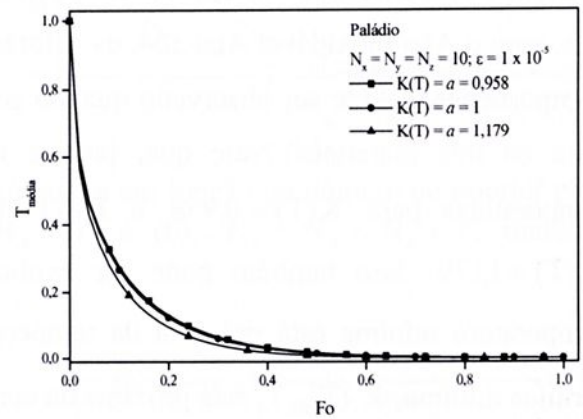


(b)

Figura 4.12: Distribuição da temperatura máxima (a) e da temperatura média (b), como função do número de Fourier, para o Paládio.



(a)



(b)

Figura 4.13: Distribuição da temperatura máxima (a) e da temperatura média (b), como função do número de Fourier, para o Paládio.

Neste caso, também as distribuições de temperaturas em função dos eixos do espaço tridimensional, para $Fo = 0,02; 0,18$ e $0,5$ são iguais àquelas apresentadas nas Figuras 4.5 - 4.7, pois nestes casos, trata-se da distribuição de temperatura para a condutividade térmica expressa por uma função constante $K(T) = 1$.

Pode observar pelos resultados já apresentados, que a distribuição de temperatura varia rapidamente no início do processo de transferência de calor apresentando grandes gradientes. Posteriormente, a rapidez do processo diminui, e então passa a ter uma tendência assintótica na direção da temperatura final, com gradientes tendendo a zero. Como a temperatura adimensional inicial é igual à unidade e as condições de contorno são de simetria e temperatura prescrita na parede igual a zero, então a distribuição tridimensional da temperatura apresenta

superfícies isotérmicas de menores valores da temperatura mais próximas da superfície do volume, e superfícies isotérmicas de maiores valores da temperatura localizadas próximas às superfícies isoladas.

Observando-se as Figuras 4.4, 4.10 e 4.13 apresentadas para os diferentes materiais pode-se notar que para o Chumbo, as curvas das distribuições de temperatura estão mais próximas do que àquelas apresentadas para o caso do aço Aisi 304 e Paládio. Isso ocorre devido à influência do intervalo de temperatura adotado para analisar o fenômeno, bem como da inclinação média da curva da condutividade térmica em função da temperatura. Quanto maior o intervalo e quanto maior a inclinação média da curva da condutividade térmica maior será a distância entre aqueles resultados provenientes dos três diferentes modelos adotados para se estabelecer a condutividade térmica constante. No caso do Chumbo, o intervalo é pequeno (Tabela 4.1) e então, os valores das temperaturas máximas e mínima estão próximos, enquanto que, para o Aço Inoxidável Aisi 304, os valores das temperaturas estão mais distantes. O mesmo comportamento pode ser observado quando se compara todas as outras combinações possíveis para os três materiais. Note que, para o material Paládio, as curvas da distribuição de temperaturas para $K(T) = 0,958$ e $K(T) = 1$ se aproximam mais do que às curvas para $K(T) = 1,179$. Isso também pode ser explicado observando a Figura 4.1, uma vez que a temperatura mínima está próxima da temperatura média, consequentemente, a condutividade térmica mínima, $k^*(T_{\min}^*)$, está próxima da condutividade térmica de referência, k_{ref}^* .

4.6.2 - Resultados para os diferentes materiais com $K(T) = a + bT$

Para o problema não-linear difusivo, analisou-se também o processo de resfriamento do paralelepípedo para os diferentes materiais, com respeito às condutividades térmicas apresentadas na Tabela 4.2. São apresentados na seqüência, os resultados para o caso em que a condutividade térmica varia linearmente com a temperatura, $K(T) = a + bT$, $b \neq 0$. A largura de banda, para este caso é igual a 21.

• Chumbo

Nas Figura 4.14(a, b) e 4.15 apresenta-se a distribuição da temperatura máxima e média em função do número de Fourier para as três ordens de truncamento mencionadas para o

Chumbo. Observa-se em ambas as figuras que para um mesmo Fourier, os valores das temperaturas máximas e médias variam muito pouco, sendo muito difícil notar essa diferença visualmente. A fim de mostrar claramente a pequena diferença entre as temperaturas, para os diferentes valores da ordem de truncamento, plotou-se as quatro curvas apresentadas na Figura 4.16 que representa a diferença, em módulo, das temperaturas máximas e médias.

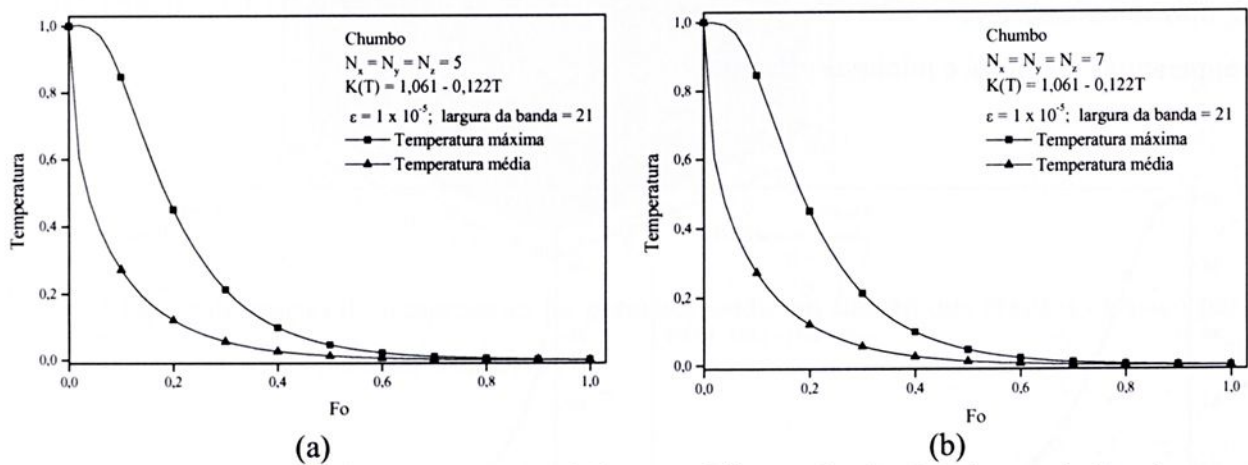


Figura 4.14: Distribuição da temperatura máxima e média em função do número de Fourier para o chumbo com (a), $N_x = N_y = N_z = 5$, e (b), $N_x = N_y = N_z = 7$, material Chumbo.

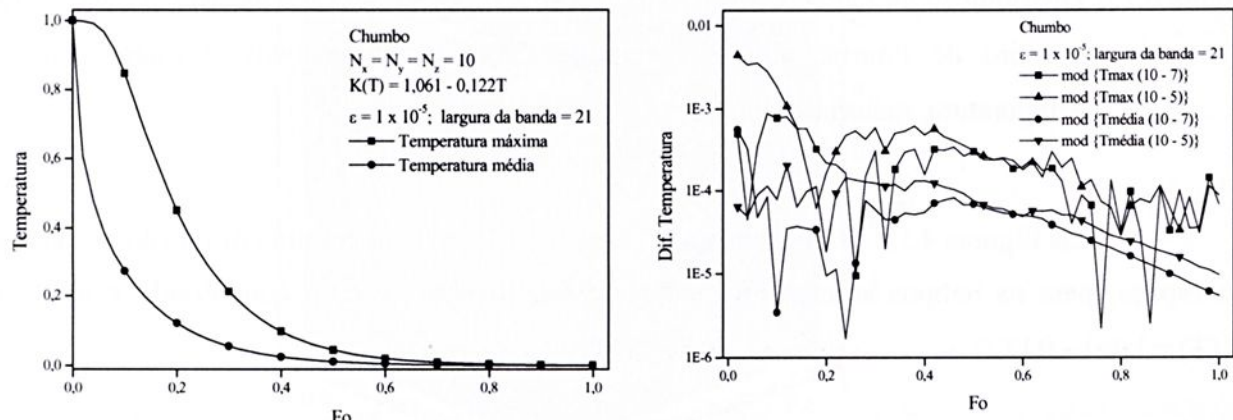


Figura 4.15: Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier para o chumbo com $N_x = N_y = N_z = 10$.
Figura 4.16: Diferença da distribuição das temperaturas máxima e média em função do número de Fourier para o chumbo.

Como esperado, observa-se na Figura 4.16, quanto maior for a quantidade de informação, as curvas tendem a permanecer mais próximas e então verifica-se uma tendência à convergência, na medida que o valor da ordem de truncamento aumenta.

Na Figura 4.17 apresenta-se uma comparação dos resultados obtidos através do equacionamento não-linear (condutividade térmica linear com a temperatura) com aqueles obtidos utilizando o equacionamento linear (condutividade térmica constante). Observa-se na Figura 4.4 para o problema linear, que dos três casos analisados para a condutividade térmica, os dois que mais se aproximam dos resultados do caso não-linear são aqueles correspondentes a $K(T) = 1$ e $K(T) = 1,062$. Este fato deve-se também ao intervalo de temperatura adotado, como já dito anteriormente, o intervalo para este material é pequeno (Tabela 4.1), o que leva a temperaturas máximas e mínimas próximas.

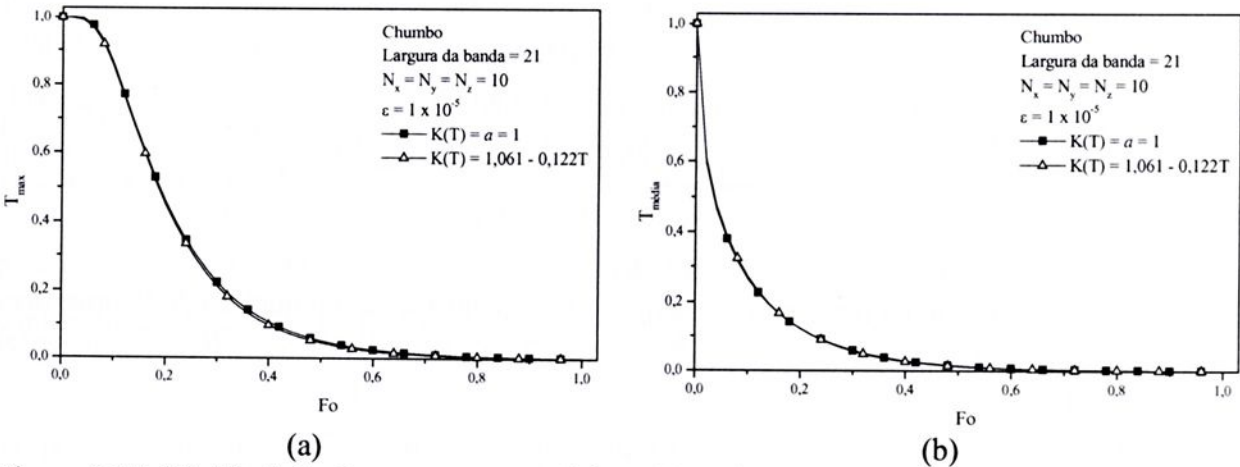


Figura 4.17: Distribuição da temperatura máxima (a) e da temperatura média (b) em função do número de Fourier para a condutividade térmica constante e linear com a temperatura, material Chumbo.

Nas Figuras 4.18 - 4.20 ilustrou-se a distribuição de temperatura em função dos eixos do espaço, para os tempos adimensionais $Fo = 0,02$; $0,18$ e $0,5$ com condutividade térmica $K(T) = 1,061 - 0,122T$.

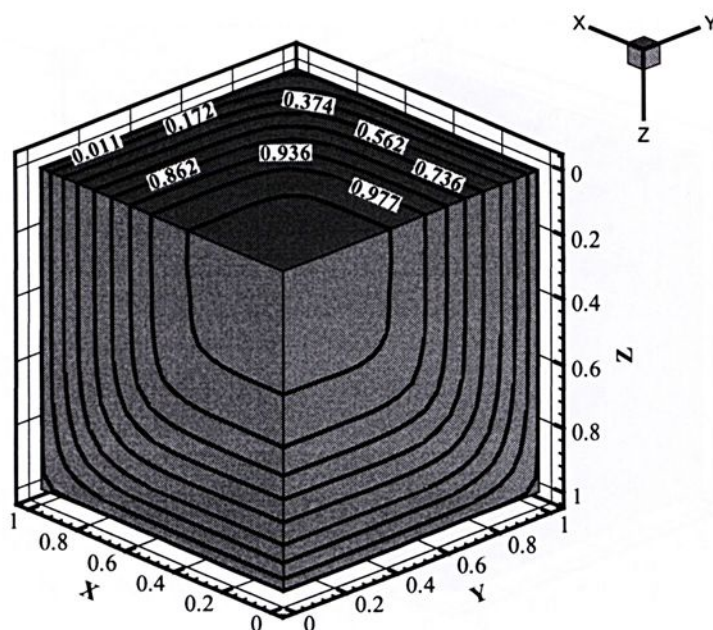


Figura 4.18: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,02$, material Chumbo.

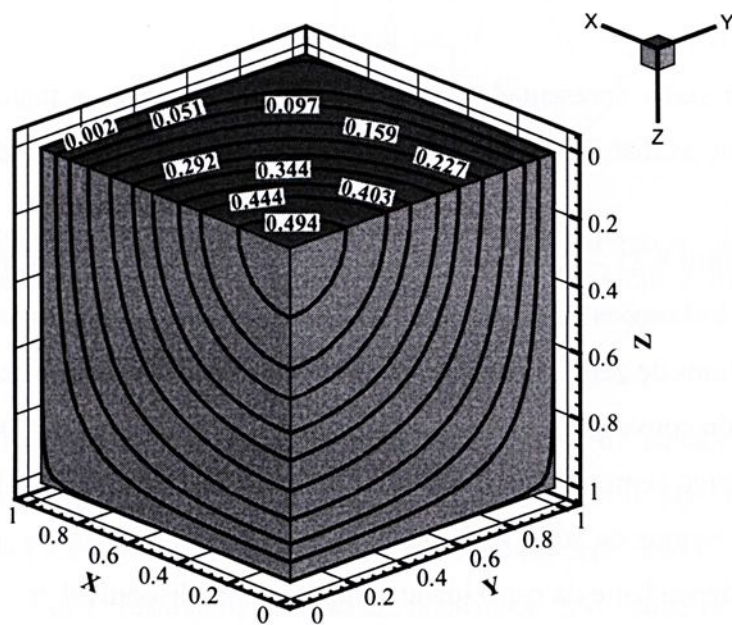


Figura 4.19: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,18$, material chumbo.

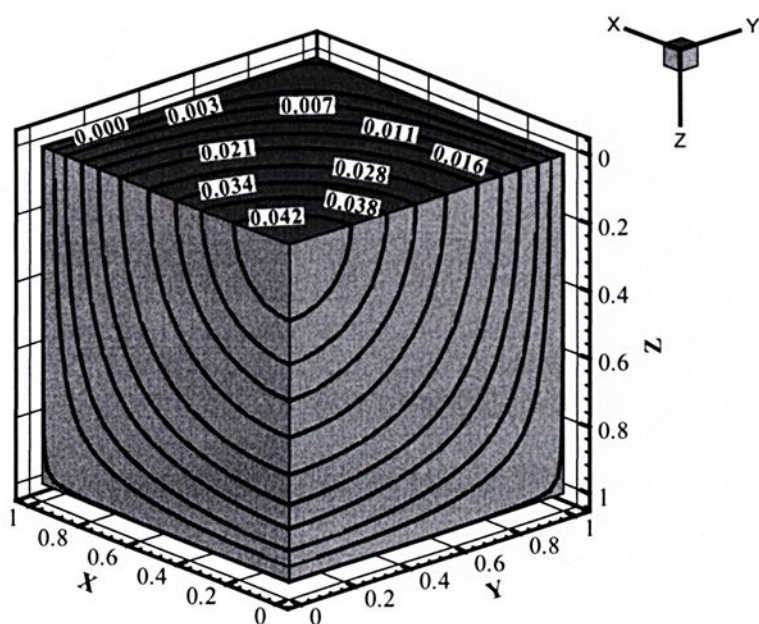
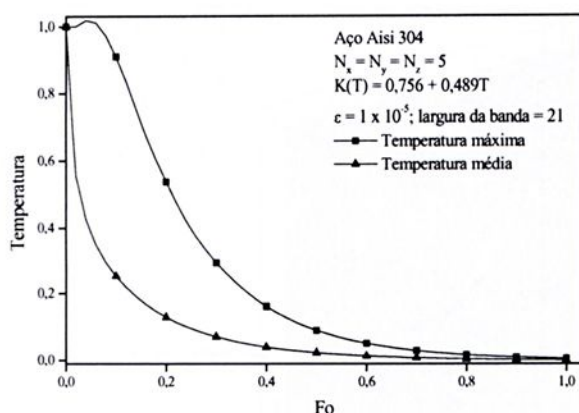


Figura 4.20: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, material chumbo.

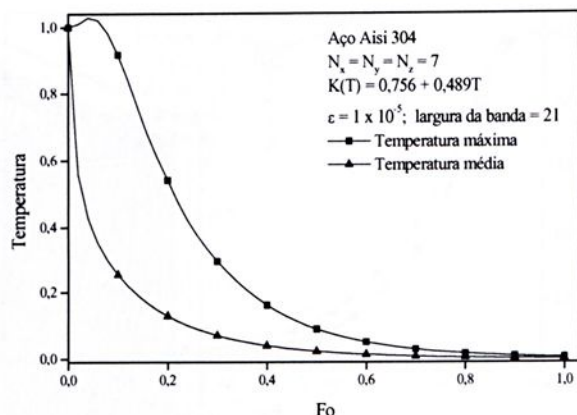
- **Aço Inoxidável Aisi 304**

A seguir serão apresentados os resultados obtidos para o material Aço Inoxidável Aisi 304. Nota-se que as distribuições de temperatura seguem as mesmas tendências observadas para o chumbo.

Nas Figuras 4.21 – 4.23 pode-se observar pequenos picos no início das curvas que representam as distribuições de temperatura máxima. Isso acontece pois para tempos adimensionais próximos de zero, existe uma insuficiência de autovalores necessários para obter o processo adequado de convergência. Ao se aumentar a quantidade de termos na série a precisão irá melhorar, no entanto sempre haverá um valor suficientemente pequeno do tempo para o qual um número fixo de termos na série será insuficiente. Em termos práticos a quantidade total de termos utilizados é dependente da capacidade computacional disponível em termos de memória e tempo de processamento.



(a)



(b)

Figura 4.21: Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier para o Aço Aisi 304 com (a) $N_x = N_y = N_z = 5$ e (b) $N_x = N_y = N_z = 7$.

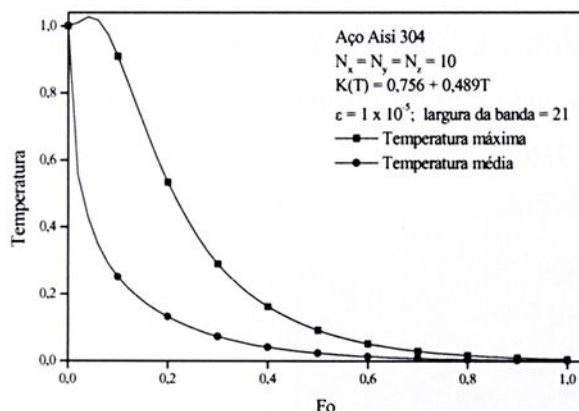


Figura 4.22: Distribuição das temperaturas máxima e média em função do n.º de Fourier, Aço Aisi 304 com $N_x = N_y = N_z = 10$.

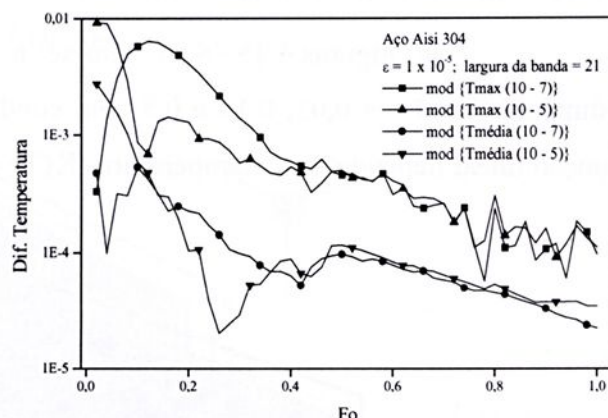


Figura 4.23: Diferença da distribuição das temperaturas máxima e média em função do número de Fourier para o Aço Aisi 304.

Também comparam-se os resultados obtidos através do equacionamento não-linear com aqueles obtidos utilizando o equacionamento linear para o aço Aisi 304, conforme apresentado na Figura 4.24. Observa-se na Figura 4.10 para o problema linear, que os dois que mais se aproximam dos resultados do caso não-linear são aqueles correspondentes a $K(T) = 0,741$ e $K(T) = 1$. Os resultados com menor concordância são os correspondentes a $K(T) = 1,249$. Note que, para $K(T) = 1$ tem-se uma aproximação razoável, pois trata-se de uma distribuição de temperatura correspondente à condutividade térmica média.

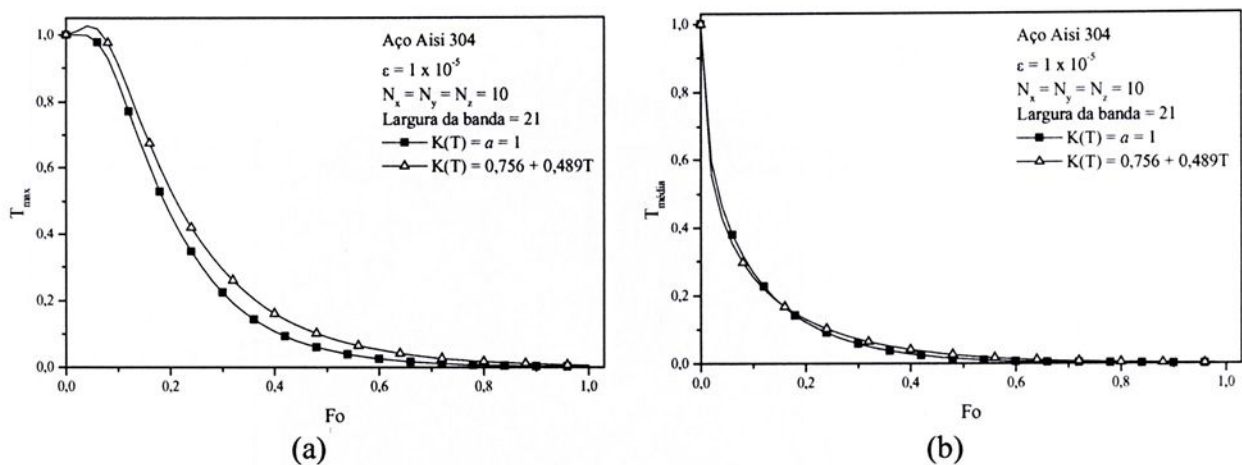


Figura 4.24: Distribuição da temperatura máxima (a) e da temperatura média (b) em função do número de Fourier para a condutividade térmica constante e linear com a temperatura, material Aço Inoxidável Aisi 304.

Nas Figuras 4.25 - 4.27 tem-se a distribuição de temperatura para os tempos adimensionais $Fo = 0,02$; $0,18$ e $0,5$ com condutividade térmica do material expressa por uma função linear dependente da temperatura, $K(T) = 0,756 + 0,489T$.

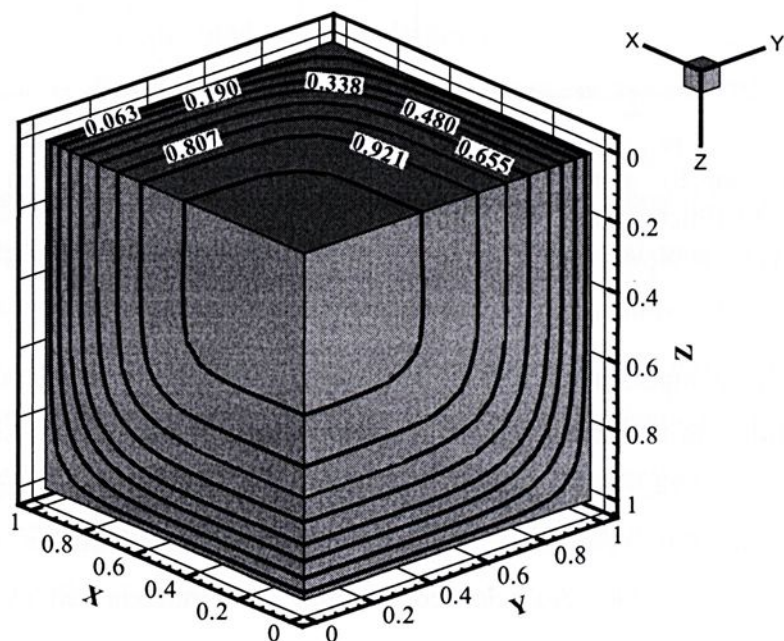


Figura 4.25: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,02$, material Aço Inoxidável Aisi 304.

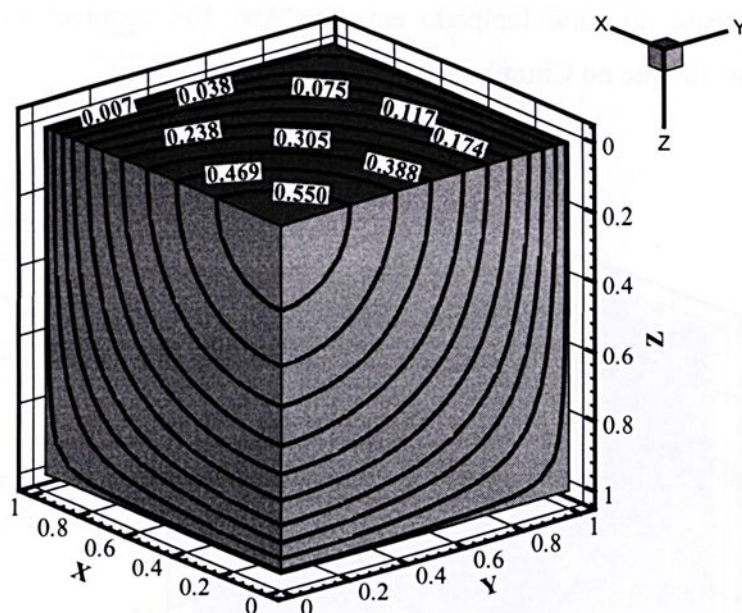


Figura 4.26: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,18$, material Aço Inoxidável Aisi 304.

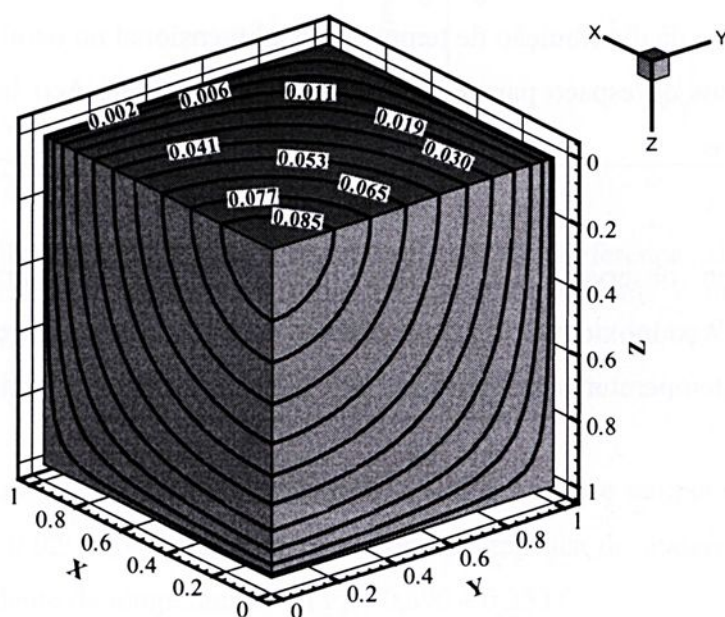


Figura 4.27: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, material Aço Inoxidável Aisi 304.

Na Figura 4.28 apresenta-se a diferença da distribuição de temperatura tridimensional entre os materiais Aço Inoxidável Aisi 304 e Chumbo em um dado instante $Fo = 0,5$. Pode-se observar que os valores das isotérmicas são positivos e isso significa que o

processo de resfriamento no paralelepípedo em Aço Aisi 304 acontece mais lentamente, em termos adimensionais, do que no Chumbo.

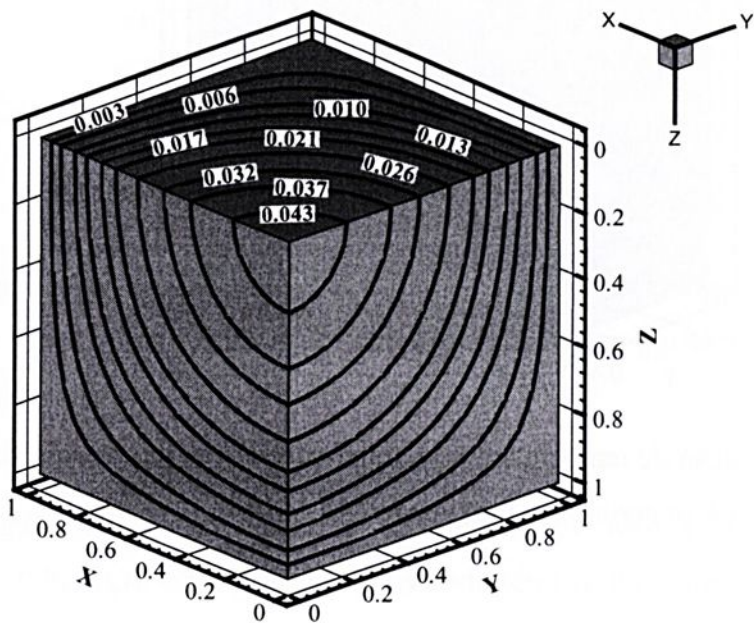
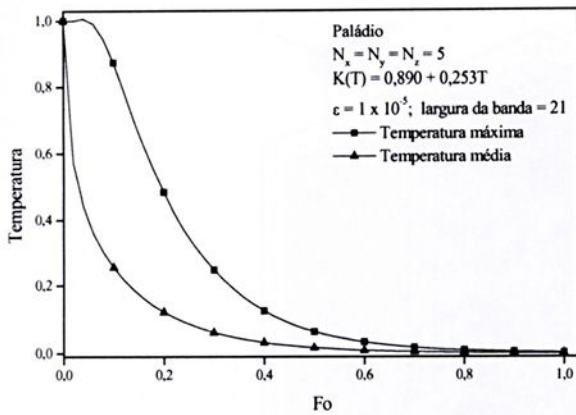


Figura 4.28: Diferença da distribuição de temperatura adimensional no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, entre os materiais Aço Inoxidável Aisi 304 e Chumbo.

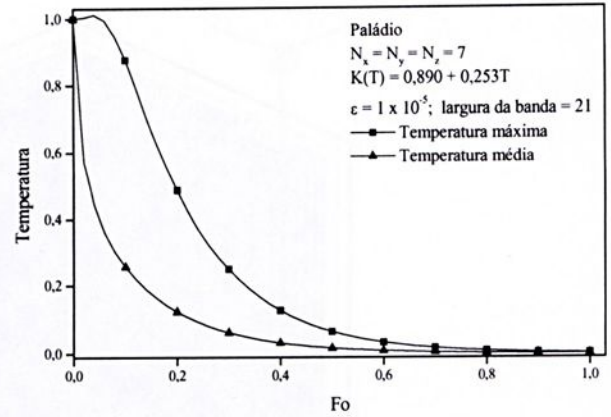
Conforme observado nas figuras anteriores, que ilustram as diferenças de temperaturas para o Aço Inoxidável Aisi 304, pode-se reafirmar a semelhança no comportamento das distribuições de temperaturas entre o Aisi 304 e o Chumbo, embora com valores distintos.

• **Paládio**

A seguir serão apresentados os resultados obtidos para o material Paládio. Nota-se que as distribuições de temperaturas seguem as mesmas tendências qualitativas daquelas observadas para o chumbo e o Aço Inoxidável Aisi 304, como pode ser observado nas Figuras 4.29 a 4.31.



(a)



(b)

Figura 4.29: Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier para o Paládio com (a) $N_x = N_y = N_z = 5$ e (b) $N_x = N_y = N_z = 7$.

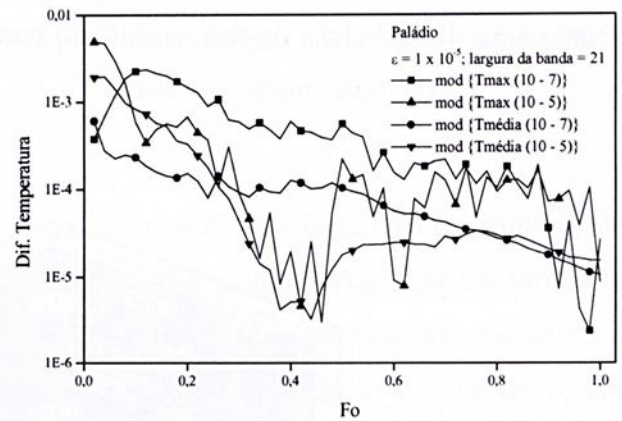
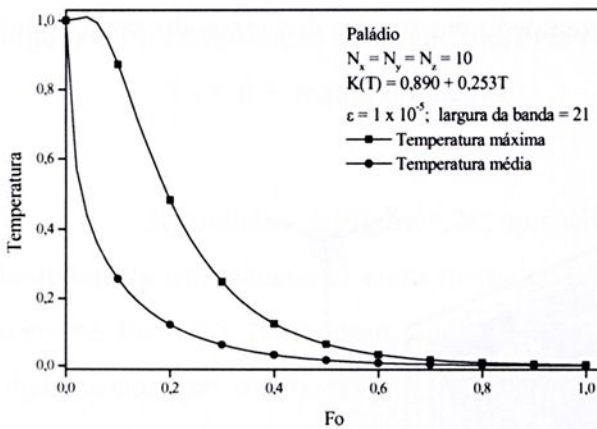


Figura 4.30: Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier para o Paládio com $N_x = N_y = N_z = 10$.

Figura 4.31: Diferença da distribuição das temperaturas máxima e média em função do número de Fourier para o Paládio.

$N_x = N_y = N_z = 10$.

Nas Figuras 4.32 - 4.34 apresentou-se a distribuição de temperatura para os tempos adimensionais $Fo = 0,02$; $0,18$ e $0,5$ com condutividade térmica do material expressa por uma função linear dependente da temperatura, $K(T) = 0,890 + 0,253T$.

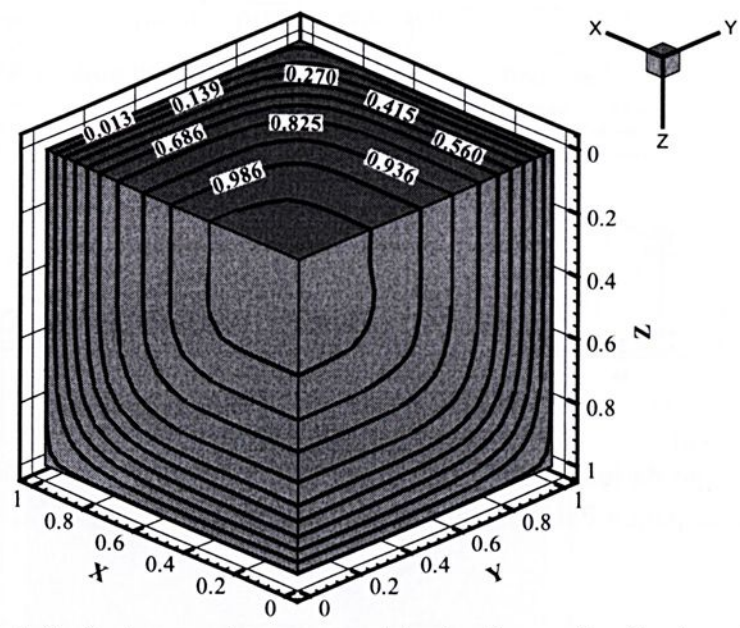


Figura 4.32: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,02$, material Paládio.

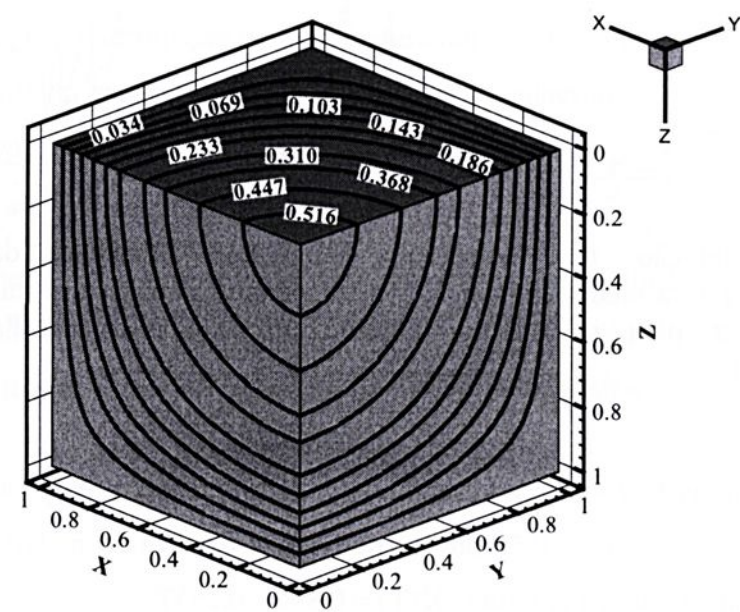


Figura 4.33: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,18$, material Paládio.

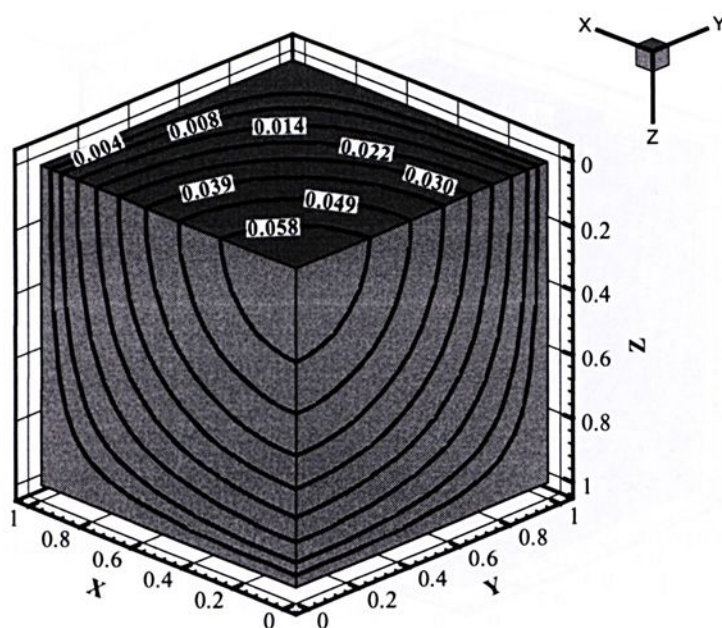


Figura 4.34: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, material Paládio.

Semelhante à Figura 4.28, apresenta-se na Figura 4.35 a diferença da distribuição de temperatura tridimensional entre os materiais Paládio e Aço Inoxidável Aisi 304 em um dado instante, $Fo = 0,5$. Neste caso, pode-se observar que os valores das isotérmicas são negativos e significando que o processo de resfriamento no paralelepípedo de Paládio é mais lento, em termos adimensionais, do que o de Aço Inoxidável Aisi 304, porém com valores muito próximos.

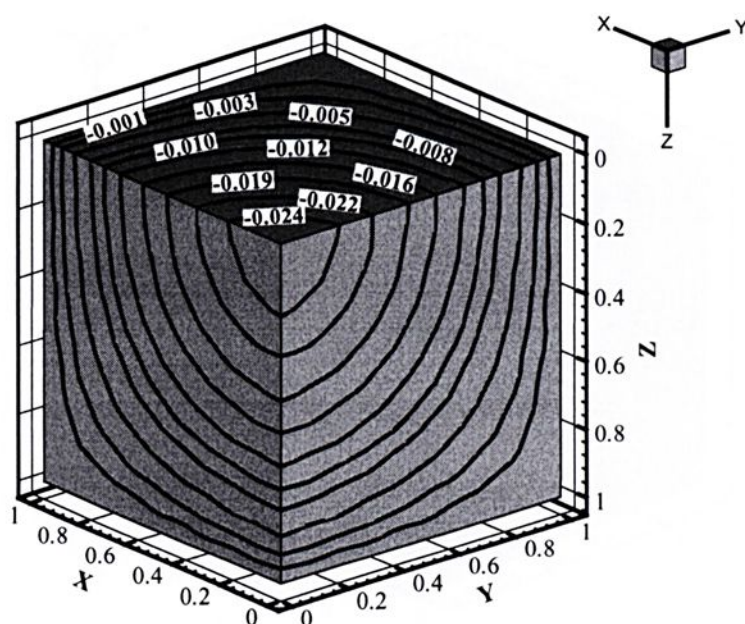


Figura 4.35: Diferença da distribuição de temperatura adimensional no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, entre os materiais Paládio e Aço Inoxidável Aisi 304.

Conforme observado nas figuras anteriores, que ilustram as diferenças de temperaturas para o Paládio, pode-se reafirmar a semelhança no comportamento das distribuições de temperaturas entre este material, Aço Aisi 304 e o Chumbo.

4.6.3 - Resultados para os diferentes materiais com $K(T) = a + bT + cT^2$

A condutividade térmica do Paládio é representada também através de uma função de segunda ordem, $K(T) = 0,932 - 0,110T + 0,370T^2$, de acordo com a Tabela 4.1. A distribuição das temperaturas máximas e média são apresentadas na Figuras 4.36.

Apesar da condutividade térmica variar de acordo com um polinômio de segundo grau, as distribuições de temperatura se comportam de maneira semelhante ao caso $K(T) = a + bT$, mostrado anteriormente.

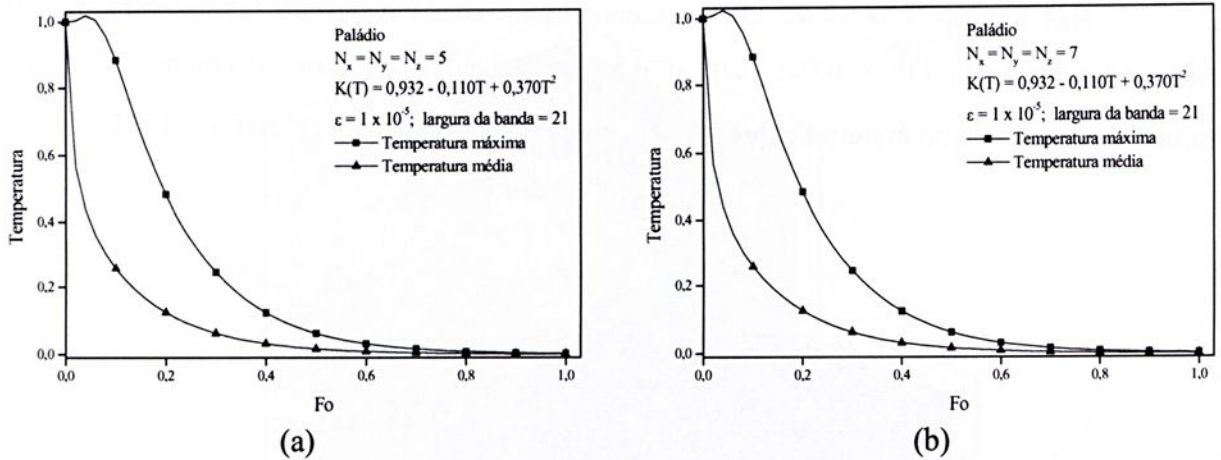


Figura 4.36: Distribuição da temperatura máxima e da temperatura média em função do número de Fourier, para o Paládio, com (a) $N_x = N_y = N_z = 5$ e (b) $N_x = N_y = N_z = 7$.

A Figura 4.37 apresenta uma comparação dos resultados obtidos através do equacionamento não-linear com aqueles obtidos utilizando o equacionamento linear. Observa-se na Figura 2.12 para o problema linear, que dos três casos analisados para a condutividade térmica, os dois que mais se aproximam dos casos não-lineares são aqueles correspondentes a $K(T) = 1$ e $K(T) = 0,958$. Para $K(T) = 1$ os resultados tendem a ter boa aproximação com os resultados obtidos para $K(T) = 0,890 + 0,253T$ e $K(T) = 0,932 - 0,110T + 0,370T^2$.

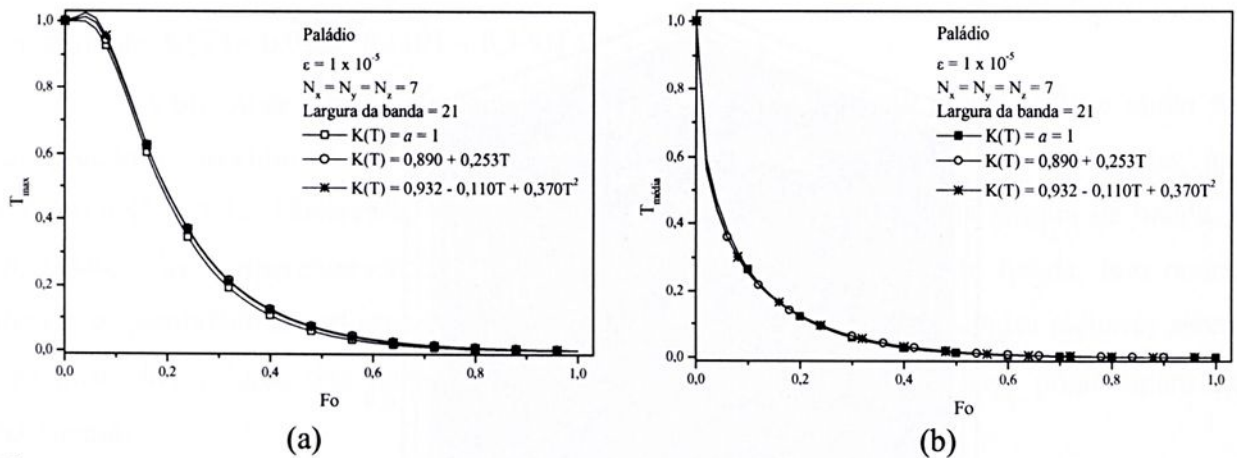


Figura 4.37: Distribuição da (a) temperatura máxima e da (b) temperatura média em função do número de Fourier para a condutividade térmica constante, linear e quadrática com a temperatura.

Nas Figuras 4.38 - 4.40 são apresentadas as distribuições de temperatura para os tempos adimensionais $Fo = 0,02$; $0,18$ e $0,5$ em função dos eixos tridimensionais, com condutividade térmica do material expressa pela função $K(T) = 0,932 - 0,110T + 0,370T^2$.

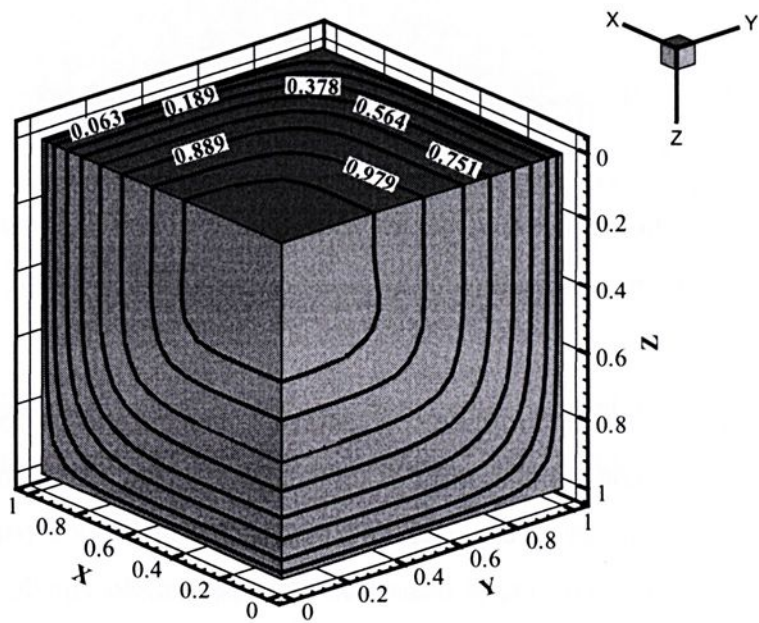


Figura 4.38: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,02$, material Paládio.

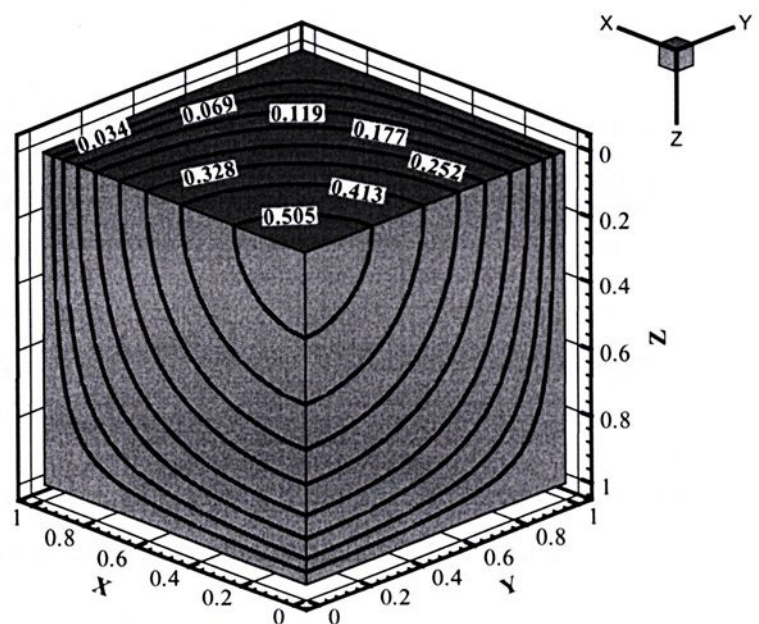


Figura 4.39: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,18$, material Paládio.

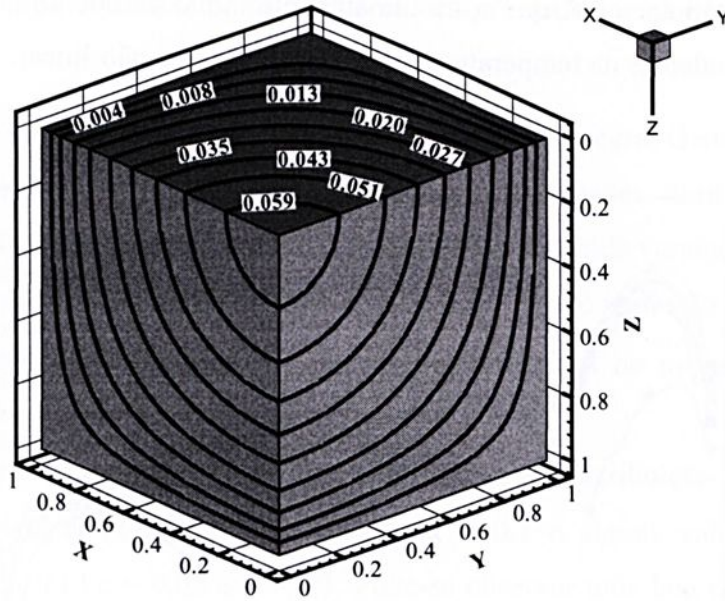


Figura 4.40: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para $Fo = 0,5$, material Paládio.

As Figuras 4.41 e 4.42 mostram o comportamento em módulo da distribuição de temperatura máxima e média, respectivamente, para $N_x = N_y = N_z = 5$, com valores da largura da banda iguais a 1, 3, 5, 11, 21, 41, 101 e 201. Os resultados apresentados nas referidas figuras permitem avaliar a influência da largura da banda sobre os resultados obtidos para o caso não-linear onde a condutividade térmica foi modelada como uma função quadrática da temperatura $K(T) = 0,932 - 0,110T + 0,370T^2$.

Utilizou-se como referência o valor da largura da banda igual a 201 e então foi computado o módulo da diferença das temperaturas, obtendo as curvas mostradas nas Figuras 4.41 e 4.42. Observa-se nitidamente que para menores valores da largura de banda, a distribuição de temperatura recebe menor influência da largura de banda fixada. Isso ocorre devido à quantidade de informação presente nos dados para larguras de bandas menores serem próximas dos valores dos dados da diagonal principal, que por sua vez, predominam no fenômeno.

O contrario pode ser observado quando o valor da largura de banda aumenta pois o módulo da diferença vai tendendo a zero e assim, a diferença das distribuições de temperatura vão se aproximando e uma tendência à convergência começa a ser notada. Com isso, quanto maior o valor da largura de banda, melhor será a acurácia dos resultados, porém acoplado a este

fato, está o tempo computacional, que sofre um aumento muito grande no processo de cômputo dos coeficientes dependentes da temperatura presentes no sistema não-linear.

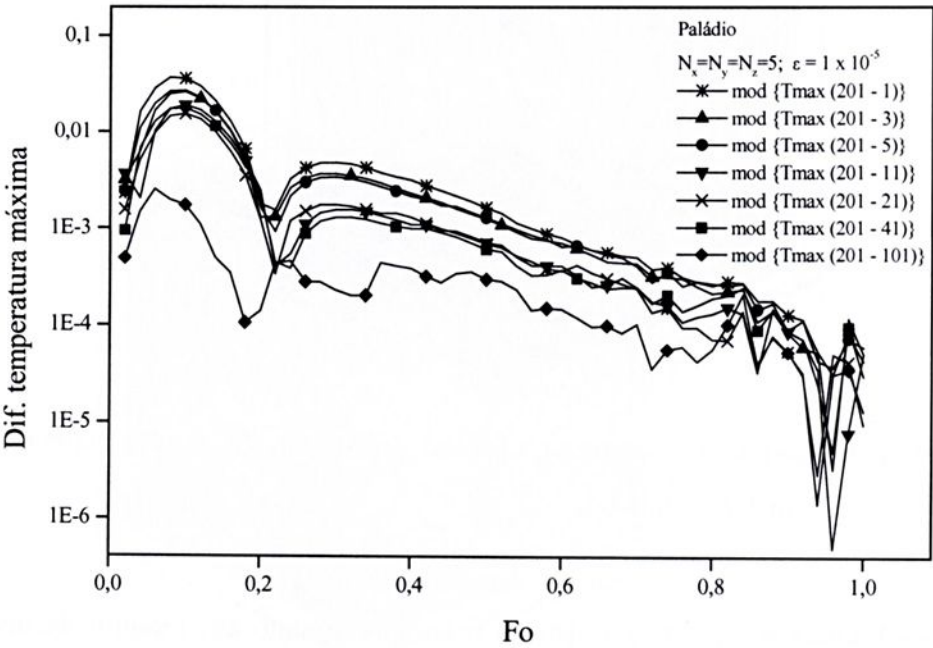


Figura 4.41: Diferença da distribuição da temperaturas máxima em função do número de Fourier para os valores de largura da banda iguais a 1, 3, 5, 11, 21, 41, 101 e 201.

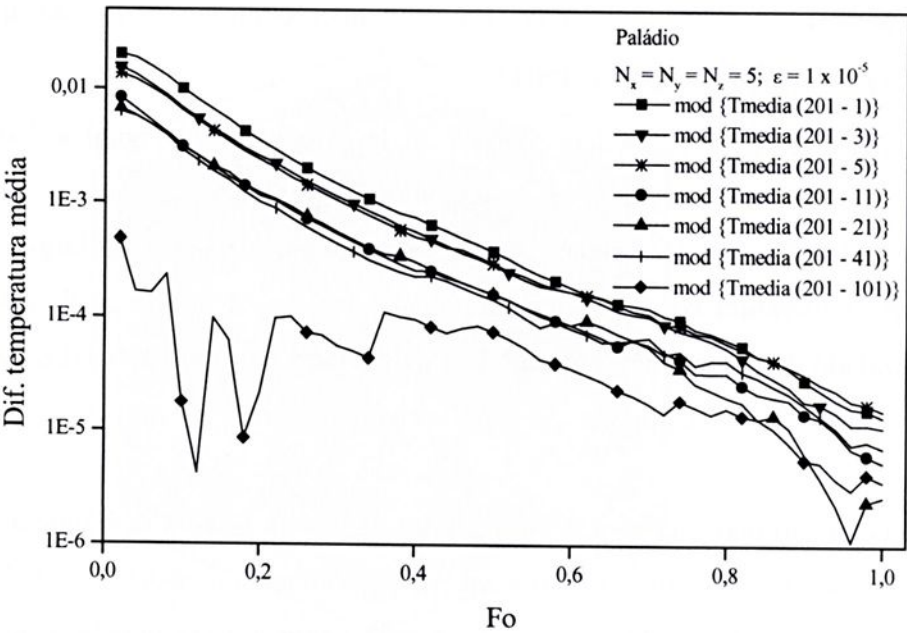


Figura 4.42: Diferença da distribuição da temperaturas média em função do número de Fourier para os valores de largura da banda iguais a 1, 3, 5, 11, 21, 41, 101 e 201.

4.7 - Comparação dos resultados com os apresentados na literatura

Serfaty (1997) utilizou a Técnica da Transformada Integral Generalizada para obter a solução de problemas de condução não-linear com propriedades térmicas dependendo da temperatura. A condutividade térmica, em seu trabalho, foi assumida variando linearmente com a temperatura, $K(T) = 1 + bT$, para valores de $b = 0,1$ e $0,5$ e para o intervalo de tempo de 0 a 1 . A seguir será apresentado uma comparação dos resultados obtidos no presente trabalho com os dados contidos na literatura.

Na Figura 4.43 é apresentado uma comparação da distribuição de temperatura em z com os dados de Serfaty (1997), para a posição $x = 0,1$ e alguns valores de y . O tempo adimensional adotado foi $Fo = 0,05$ e $b = 0,1$. Pode-se observar uma boa concordância entre os resultados apresentados. Pode-se verificar, por exemplo, que no presente trabalho, o valor da temperatura no ponto $(x, y, z) = (0,1; 0,1; 0,5)$ é $T = 0,8634$ e para os resultados apresentados por Serfaty (1997), $T = 0,8648$ o que determina uma diferença da ordem de 10^{-3} .

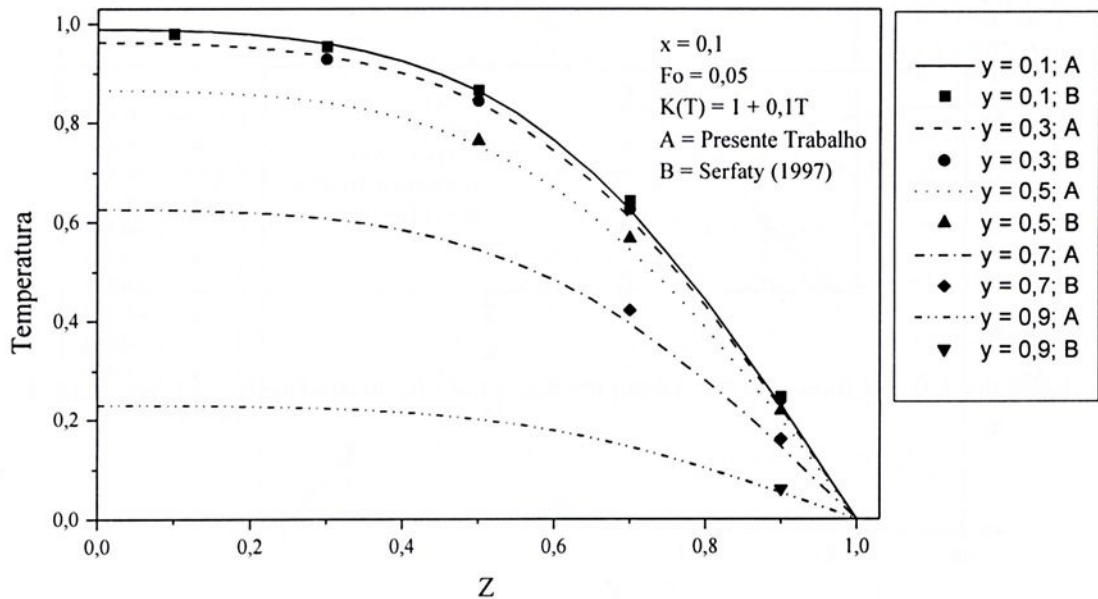


Figura 4.43: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,05$, com $b = 0,1$ e $x = 0,1$.

As curvas da Figura 4.44 possuem comportamento semelhante ao apresentado na Figura 4.43, neste caso, $x = 0,3$, e então y variou de acordo com os valores apresentados na legenda. Logo afirma-se novamente que para o dado $Fo = 0,05$ os resultados concordam muito bem com os apresentados por Serfaty, (1997).

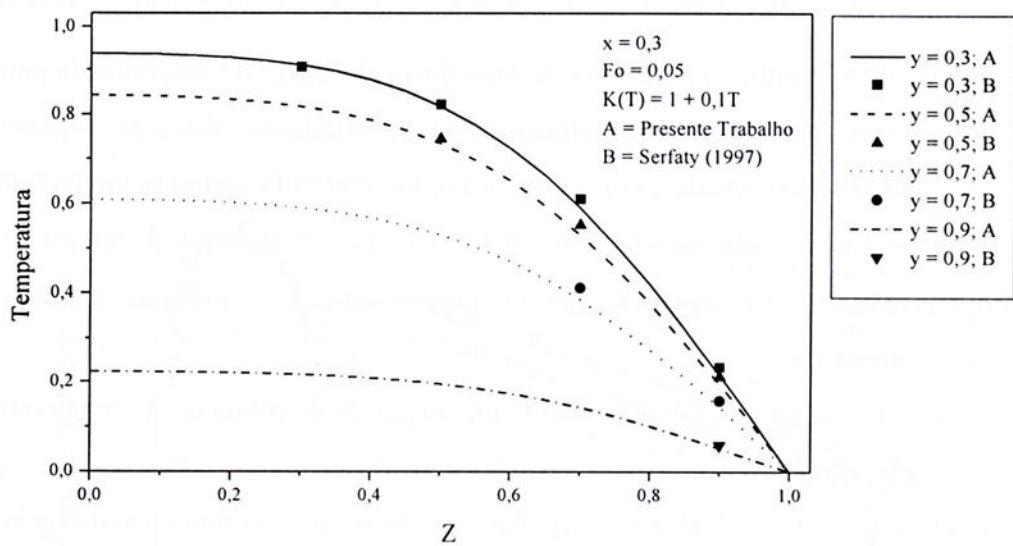


Figura 4.44: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,05$, com $b = 0,1$ e $x = 0,3$.

A seguir são apresentados alguns resultados, para posições $x = 0,1$ e $0,3$, $Fo = 0,1$ e $0,5$ que também concordam bem com os dados de Serfaty (1997), Figuras 4.45 – 4.48.

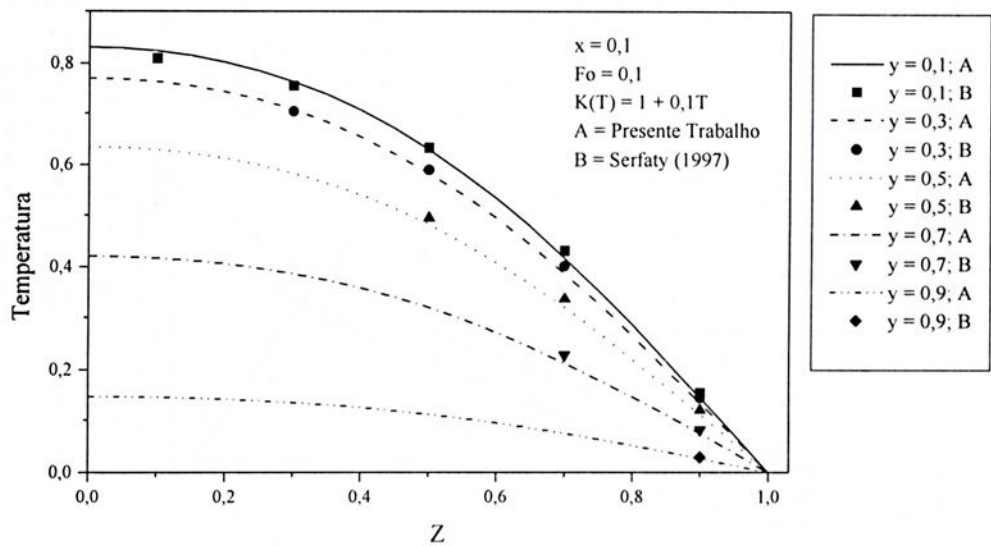


Figura 4.45: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,1$, com $b = 0,1$ e $x = 0,1$.

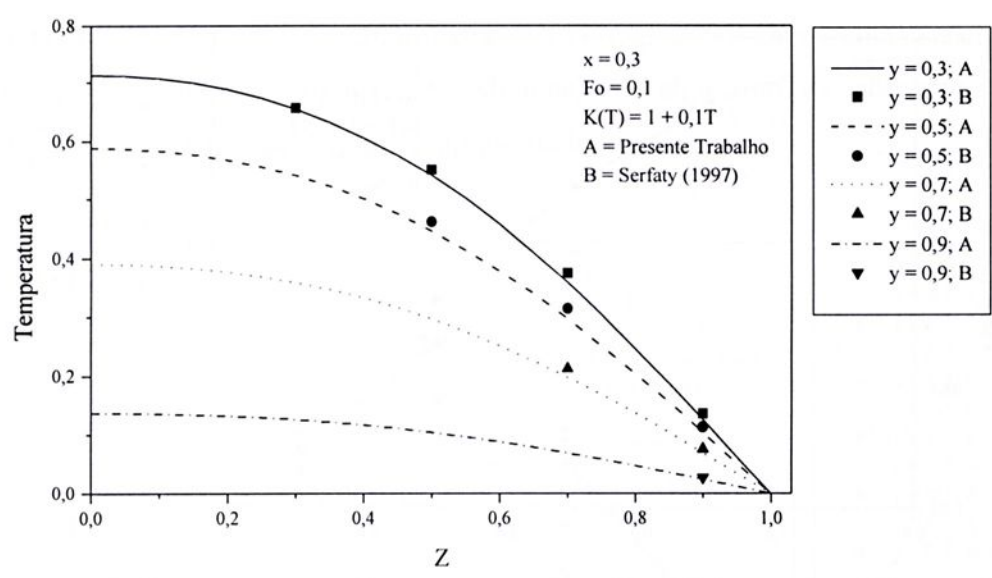


Figura 4.46: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,1$, com $b = 0,1$ e $x = 0,3$.

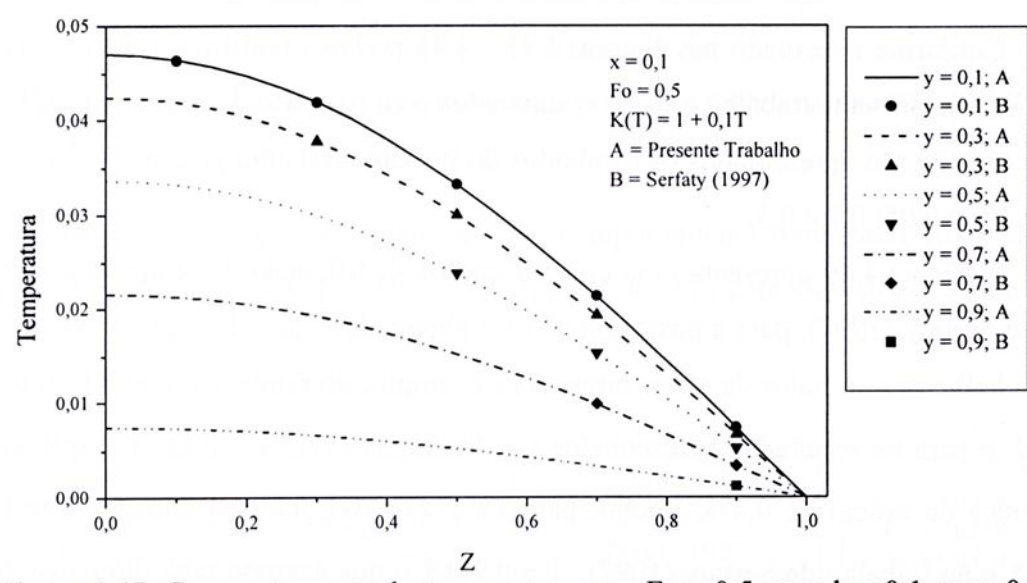


Figura 4.47: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,5$, com $b = 0,1$ e $x = 0,1$.

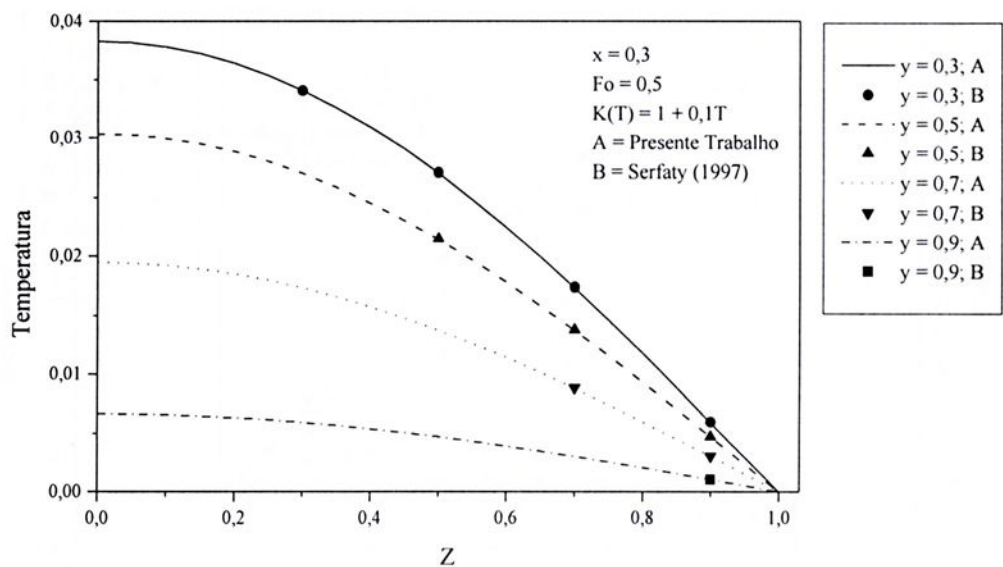


Figura 4.48: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,5$, com $b = 0,1$ e $x = 0,3$.

Conforme observado nas Figuras 4.45 – 4.48 pode-se reafirmar a boa concordância dos resultados do presente trabalho quando comparados com os dados de Serfaty (1997).

Agora, são apresentados os resultados do presente trabalho para $b = 0,5$ e os tempos de Fourier, $Fo = 0,05$; $0,1$ e $0,5$.

A Figura 4.49 apresenta uma comparação da distribuição de temperatura em z com os dados de Serfaty (1997), para a posição $x = 0,1$ e alguns de y, para $Fo = 0,05$. Verifica-se, no presente trabalho, que o valor da temperatura, por exemplo, no ponto $(x, y, z) = (0,1; 0,1; 0,5)$ é $T = 0,8132$ e para os resultados apresentados por Serfaty (1997), $T = 0,8168$ o que determina uma diferença da ordem de 0,4%. Porém, para $(x, y, z) = (0,1; 0,1; 0,3)$, no presente trabalho, $T = 0,9525$ e no trabalho de Serfaty (1997), $T = 0,9119$ o que acarreta uma diferença da ordem de 4% relativo ao menor valor. Já para a posição $(x, y, z) = (0,1; 0,1; 0,7)$, neste trabalho, $T = 0,5433$ e nos dados de Serfaty (1997), $T = 0,6095$ que determina uma diferença da ordem de 12% relativamente ao menor valor.

Esta diferença deve-se a diferentes procedimentos na escolha dos termos que seriam retidos e descartados da série. Para uma mesma quantidade de termos, Serfaty (1997) se preocupou em verificar as combinações, nas quais os resultados, em caráter numérico, seriam mais significativos, enquanto neste trabalho, variou-se as expansões até um certo número de termos, previamente definidos sem efetuar uma verificação iterativa da contribuição efetiva de cada um. Efetivamente, a maioria dos termos importantes estão presentes nos dois processos de escolha, no entanto o processo de Serfaty (1997) é mais otimizado, mas possui um custo

computacional também maior. Também utilizou-se no presente trabalho, o conceito de largura de banda, que também introduz algum erro adicional no algoritmo de cômputo, apesar de influenciar pouco nos resultados, conforme apresentado anteriormente.

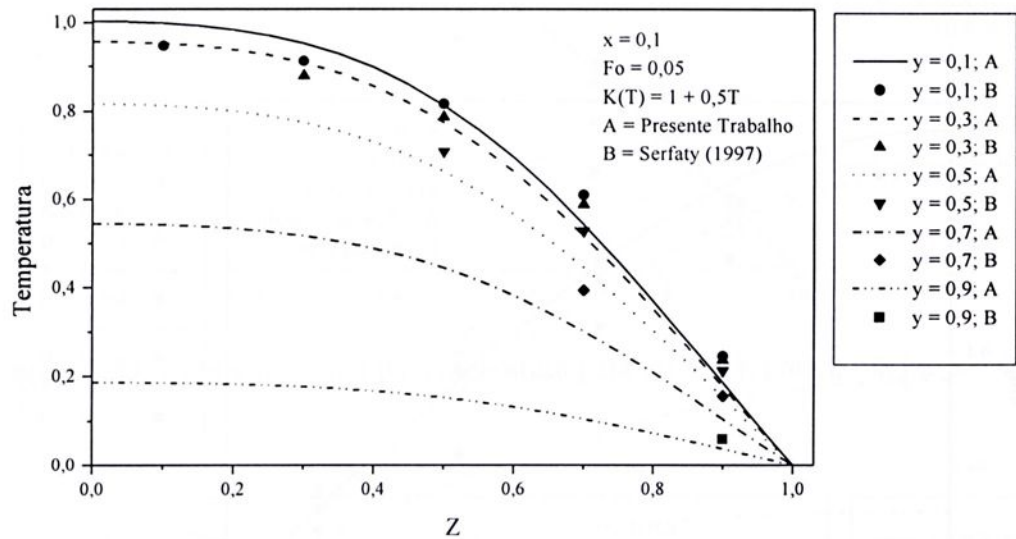


Figura 4.49: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,05$, com $b = 0,5$ e $x = 0,1$.

As curvas na Figura 4.50 possuem um comportamento semelhante ao apresentado na Figura 4.49, neste caso, $x = 0,3$ e então, y variou de acordo com os valores apresentados na legenda.

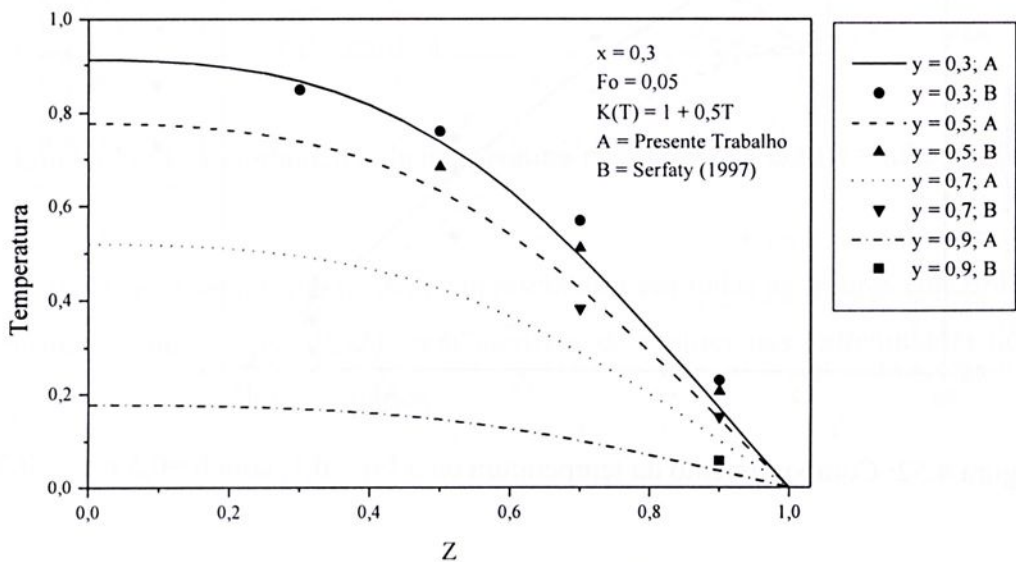


Figura 4.50: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,05$, com $b = 0,5$ e $x = 0,3$.

A seguir serão apresentados alguns resultados, para posições $x = 0,1$ e $0,3$, $Fo = 0,1$ e $0,5$, Figuras 4.51 – 4.54. Pode-se notar que conforme se aproxima da superfície do paralelepípedo ($y, z \rightarrow 1$) a concordância com os resultados de Serfaty (1997) melhora, para resultados mais no interior do volume ($y, z \rightarrow 0$) os resultados pioram, ligeiramente.

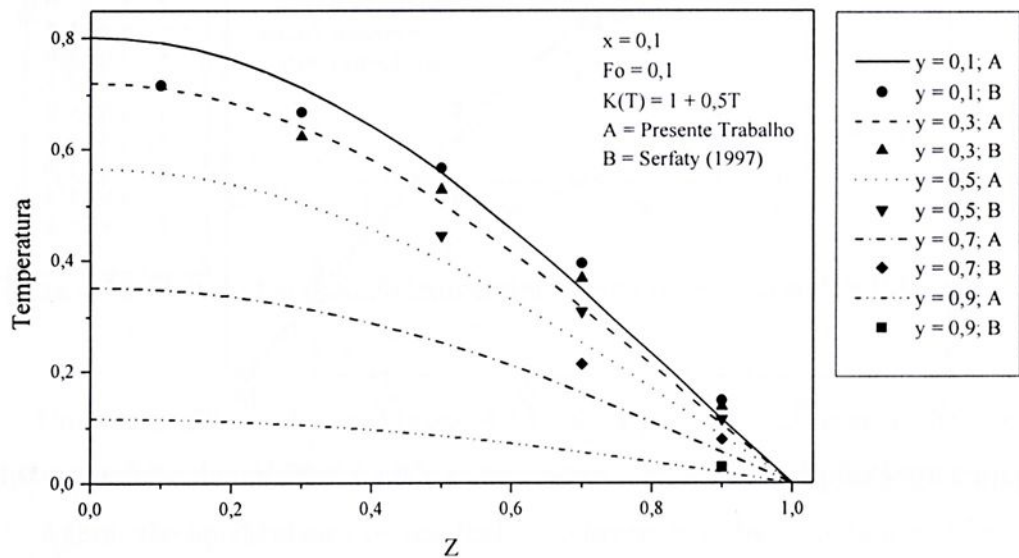


Figura 4.51: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,1$, com $b = 0,5$ e $x = 0,1$.

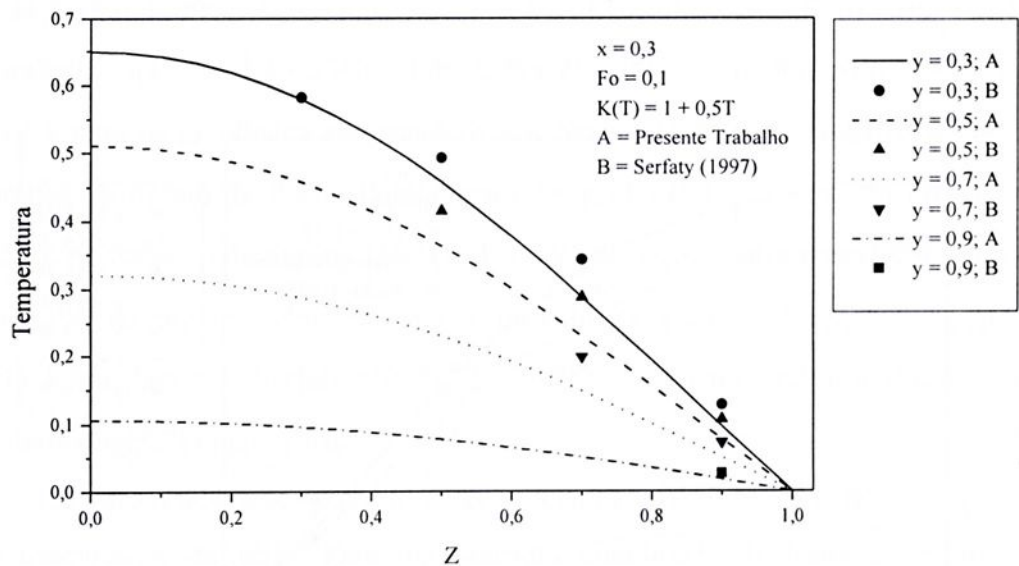


Figura 4.52: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,1$, com $b = 0,5$ e $x = 0,3$.

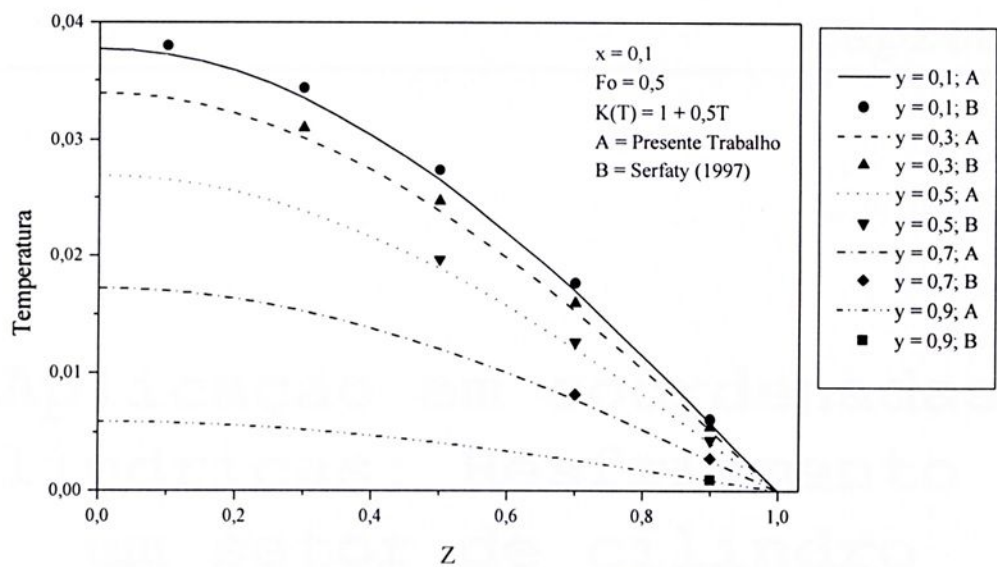


Figura 4.53: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,5$, com $b=0,5$ e $x = 0,1$.

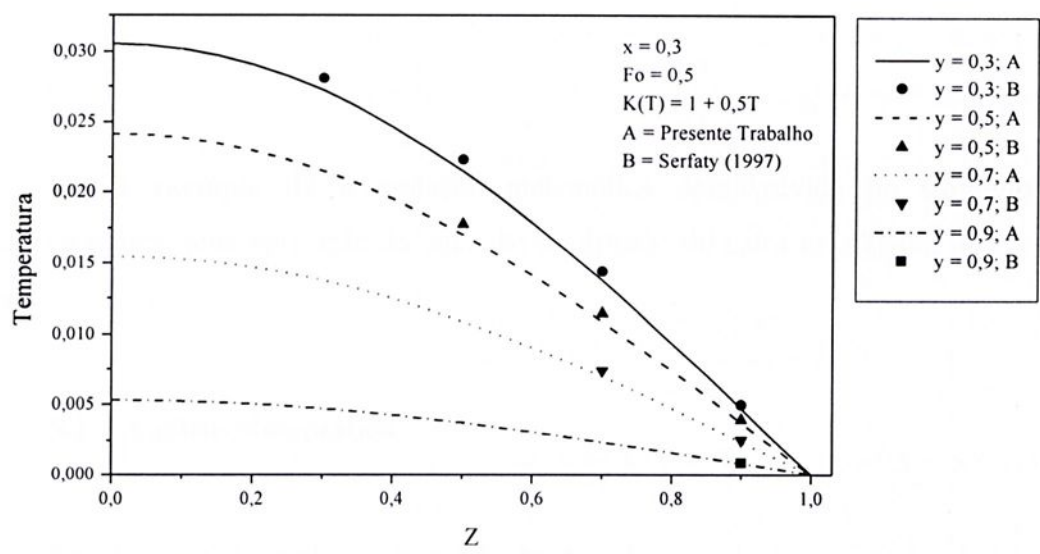


Figura 4.54: Comportamento da temperatura para $Fo = 0,3$, com $b=0,5$ e $x = 0,3$.

Pode-se observar que os dados apresentados em todas as figuras concordam melhor com os resultados de Serfaty (1997), para números de Fourier nas extremidades do intervalo $[0,1]$ do que para instantes intermediários.

Aplicação em coordenadas cilíndricas: Resfriamento de um setor de cilindro

Como exemplo da formulação matemática desenvolvida no Capítulo 3, será apresentado a seguir, uma aplicação da equação da difusão do calor no sistema de coordenadas cilíndricas.

5.1 – Análise Matemática

Considera-se o problema de condução de calor transiente no interior de um material isotrópico com condutividade térmica dependente da temperatura. Para tal fenômeno, a formulação matemática é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r, \theta, z, t)}{\partial t} = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r K(T(r, \theta, z, t)) \frac{\partial T(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[K(T(r, \theta, z, t)) \frac{\partial T(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(T(r, \theta, z, t)) \frac{\partial T(r, \theta, z, t)}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

no qual, $0 \leq r_0 < r < r_1$, $0 < \theta < \theta_0 \leq 2\pi$, $0 < z < l_z$, $t > 0$.

Na equação (5.1), todas variáveis e parâmetros são adimensionais e as relações entre eles e suas dimensões são expressas pela formulação seguinte

$$T(r, \theta, z, t) \equiv \frac{T^*(r^*, \theta^*, z^*, t^*) - T_\infty^*}{T_0^* - T_\infty^*} \Leftrightarrow T^*(r^*, \theta^*, z^*, t^*) = T_\infty^* + (T_0^* - T_\infty^*)T(r, \theta, z, t), \quad (5.2a)$$

$$r \equiv \frac{r^*}{L^*}, \quad z \equiv \frac{z^*}{L^*}, \quad t \equiv \frac{k_{\text{ref}}^* t^*}{\rho c (L^*)^2} \Leftrightarrow r^* = r L^*, \quad z^* = z L^*, \quad t^* = \frac{\rho c (L^*)^2 t}{k_{\text{ref}}^*} \quad (5.2b-d)$$

$$k_{\text{ref}}^* \equiv \frac{\int_{T_0^*}^{T_\infty^*} k^*(T^*) dT^*}{\int_{T_0^*}^{T_\infty^*} dT^*} = \frac{\int_{T_0^*}^{T_\infty^*} k^*(T^*) dT^*}{T_\infty^* - T_0^*}, \quad K[T(r, \theta, z, t)] \equiv \frac{k^*[T^*(r^*, \theta^*, z^*, t^*)]}{k_{\text{ref}}^*} \quad (5.2e,f)$$

$$L^* = \max\{l_r^*, l_z^*\}, \quad l_r \equiv \frac{l_r^*}{L^*}, \quad l_z \equiv \frac{l_z^*}{L^*} \Leftrightarrow l_r^* \equiv l_r L^*, \quad l_z^* \equiv l_z L^* \quad (5.2g-i)$$

As condições inicial e de contorno para a equação (5.1) são, respectivamente, dadas por

$$T(r, \theta, z, 0) = f(r, \theta, z) = 1, \quad 0 \leq r_0 < r < r_1, \quad 0 < \theta < \theta_0 \leq 2\pi, \quad 0 < z < l_z, \quad (5.3a)$$

$$T(r, \theta, z, t)|_{r=r_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(r, \theta, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad t > 0, \quad (5.3b-d)$$

$$T(r_1, \theta, z, t) = 0, \quad T(r, \theta_0, z, t) = 0, \quad T(r, \theta, l_z, t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.3e-g)$$

A relação entre a condutividade térmica e a temperatura foi modelada usando um polinômio de primeira ordem, como segue

$$K(T(r, \theta, z, t)) = a + bT(r, \theta, z, t), \quad (5.4)$$

onde os parâmetros a e b são dependentes da condutividade do material utilizado.

Substituindo a equação (5.4) em (5.1) obtêm-se

$$\frac{\partial T(r, \theta, z, t)}{\partial t} = a \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T(r, \theta, z, t)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T(r, \theta, z, t)}{\partial z^2} \right\} +$$

$$+b\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rT(r,\theta,z,t)\frac{\partial T(r,\theta,z,t)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[T(r,\theta,z,t)\frac{\partial T(r,\theta,z,t)}{\partial \theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[T(r,\theta,z,t)\frac{\partial T(r,\theta,z,t)}{\partial z}\right]\right\} \quad (5.5)$$

No caso particular $b = 0$, o segundo termo do membro direito da equação (5.5) se anula e o problema difusivo não-linear e transiente se torna linear.

Comparando a equação (5.5) com a equação (3.1), observa-se que os termos,

$$K^{(r)}(r) = K^{(\theta)}(\theta) = K^{(z)}(z) = a^{1/3};$$

$$K_T(r, \theta, z, T) = bT(r, \theta, z, t);$$

$$P(r, \theta, z, t) = 0; \quad d^*(r, \theta, z) = 0;$$

$$d^{(r)}(r) = (\mu_m^{(\theta)} / \gamma)^2; \quad d^{(\theta)}(\theta) = d^{(z)}(z) = 0;$$

$$w^{(r)}(r) = w^{(\theta)}(\theta) = w^{(z)}(z) = 1; \quad w^*(r, \theta, z) = 1.$$

Os operadores L_0 e L_T em coordenadas cilíndricas são:

$$L_0 = -\nabla \cdot [K^{(r)}(r)K^{(\theta)}(\theta)K^{(z)}(z)\nabla(\cdot)] + d^{(r)}(r) + d^{(\theta)}(\theta) + d^{(z)}(z) + d^*(r, \theta, z);$$

$$L_T = -\nabla \cdot [K_T(r, \theta, z, T)\nabla(\cdot)];$$

Nesta aplicação esses operadores tem a seguinte forma:

$$L_0 = -\nabla \cdot [\nabla(\cdot)];$$

$$L_T = -\nabla \cdot [bT(r, \theta, z, t)\nabla(\cdot)].$$

As geometrias que podem ser analisados nesta aplicação são da forma de cilindros, setor de cilindro circular, setor de coroa e coroa circular. A definição dos domínios para essas geometrias estão apresentadas na tabela abaixo.

Tabela 5.1 – Geometrias para o problema difusivo em coordenadas cilíndricas

Geometria	Domínio
Cilindro maciço	$0 = r_0 \leq r \leq r_1, 0 < \theta < \theta_0 = 2\pi, 0 < z < l_z$
Setor de cilindro circular	$0 = r_0 \leq r \leq r_1, 0 < \theta < \theta_0 < 2\pi, 0 < z < l_z$
Setor de coroa circular	$0 \leq r_0 \leq r \leq r_1, 0 < \theta < \theta_0 < 2\pi, 0 < z < l_z$
Coroa circular	$0 \leq r_0 \leq r \leq r_1, 0 < \theta < \theta_0 = 2\pi, 0 < z < l_z$

Nesta aplicação, considerou-se o domínio na forma de setor de cilindro circular para resolver o problema de condução de calor transiente dado pela equação (5.5). As condições inicial e de contorno nesta geometria são

$T(r,\theta,z,0) = f(r,\theta,z) = 1, \quad 0 = r_0 \leq r \leq r_1, 0 < \theta < \theta_0 = \frac{\pi}{2}, 0 < z < l_z, t = 0$ (5.6a)

$T(r_0,\theta,z,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial T(r,\theta,z,t)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(r,\theta,z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad t > 0,$ (5.6b-d)

$T(r_1,\theta,z,t) = 0, \quad T(r,\theta_0,z,t) = 0, \quad T(r,\theta,l_z,t) = 0, \quad t > 0.$ (5.6e-g)

5.2 – Problema Auxiliar de Autovalor

Os problemas de autovalores auxiliares (para aplicação da TTIG) e suas condições de contorno para os eixos r, θ e z são escolhidos em conformidade com Aparecido (1997) e expressos por

$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_i^{(z)}(z)}{dz^2} + (\mu_i^{(z)})^2 \Psi_i^{(z)}(z) = 0, \quad 0 < z < l_z;$ (5.7a)

$\left. \frac{d \Psi_i^{(z)}(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad \Psi_i^{(z)}(z = l_z) = 0;$ (5.7b,c)

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_m^{(\theta)}(\theta)}{d\theta^2} + (\mu_m^{(\theta)})^2 \Psi_m^{(\theta)}(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \theta_0 = \frac{\pi}{2}; \quad (5.8a)$$

$$\left. \frac{d\Psi_m^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0, \quad \Psi_m^{(\theta)}(\theta = \theta_0) = 0; \quad (5.8b,c)$$

$$a^{1/3} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Psi_p^{(r)}(r)}{dr} \right] \right\} + \left((\mu_p^{(r)})^2 - \frac{(\mu_m^{(\theta)})^2}{r^2} \right) \Psi_p^{(r)}(r) = 0, \quad 0 = r_0 \leq r \leq r_1; \quad (5.9a)$$

$$\left. \frac{d\Psi_p^{(r)}(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = 0, \quad \Psi_p^{(r)}(r = r_1) = 0. \quad (5.9b,c)$$

As soluções dos problemas (5.7a), (5.8a) e (5.9a), sujeito às condições de contorno (5.7b,c), (5.8b,c) e (5.9b,c) para os três eixos espaciais, são efetuadas e, assim obtidas as autofunções normalizadas $\Psi_i^{(z)}$, $\Psi_m^{(\theta)}$ e $\Psi_p^{(r)}$, as autoconstantes $B_i^{(z)}$, $B_m^{(\theta)}$ e $B_p^{(r)}$, bem como os autovalores $\mu_i^{(z)}$, $\mu_m^{(\theta)}$ e $\mu_p^{(r)}$. Estas entidades matemáticas são representadas a seguir:

$$\Psi_i^{(z)}(z) = B_i^{(z)} \cos(\gamma_i^{(z)} z), \quad B_i^{(z)} = \sqrt{\frac{2}{l_z}}, \quad \mu_i^{(z)} = \frac{(2i-1)\pi}{2l_z} a^{1/6}, \quad \gamma_i^{(z)} = \frac{\mu_i^{(z)}}{a^{1/6}}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty; \quad (5.10a-d)$$

$$\Psi_m^{(\theta)}(\theta) = B_m^{(\theta)} \cos(\gamma_m^{(\theta)} \theta), \quad B_m^{(\theta)} = \sqrt{\frac{2}{\theta_0}}, \quad \mu_m^{(\theta)} = \frac{(2m-1)\pi}{2\theta_0} a^{1/6}, \quad \gamma_m^{(\theta)} = \frac{\mu_m^{(\theta)}}{a^{1/6}}, \quad m = 1, 2, \dots, \infty; \quad (5.11a-d)$$

$$\Psi_p^{(r)}(r) = B_{pm}^{(r)} J_{\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r), \quad B_{pm}^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 [r J_{\gamma_m^{(\theta)}}^2(\gamma_p^{(r)} r)] dr}}, \quad \gamma_p^{(r)} = \frac{\mu_p^{(r)}}{a^{1/6}}, \quad p = 1, 2, \dots, \infty; \quad (5.12a-c)$$

e os autovalores $\gamma_p^{(r)}$, obtidos numericamente, são as raízes positivas de $J_{\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r_1) = 0$.

5.3 – Transformada Integral Generalizada

Como apresentado na seção anterior, a equação diferencial parcial (5.5) é transformada em um sistema infinito acoplado de equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem através da Técnica da Transformada Integral Generalizada. Esse sistema infinito deve ser truncado para que seja possível resolvê-lo numericamente e com a fórmula de inversão que esta técnica proporciona é possível reconstruir o potencial original.

O par transformada-inversa associado aos três eixos espaciais é constituído de acordo com a teoria da Transformada Integral Generalizada, (Cotta, 1993), e é expresso pelas seguintes equações,

$$\tilde{T}_{\text{imp}}^{(z\theta r)}(t) = \int_0^{r_1} \int_0^{\theta_0} \int_0^z r \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_p^{(r)}(r) T(r, \theta, z, t) dr d\theta dz, \quad i, m, p = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.13a)$$

$$T(r, \theta, z, t) = \sum_{i, m, p=1}^{\infty} \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{\text{imp}}^{(z\theta r)}(t) \quad (5.13b)$$

Como já dito na aplicação do Capítulo 4, o termo $\tilde{T}_{\text{imp}}^{(z\theta r)}$ significa a transformação da variável dependente em relação aos eixos r , θ e z com respeito as autofunções $\Psi_i^{(z)}$, $\Psi_m^{(\theta)}$ e $\Psi_p^{(r)}$, respectivamente.

Para transformar a equação diferencial parcial original (5.5) é necessário multiplicá-la pelas suas respectivas autofunções e as equações dos problemas de autovalores, multiplicadas por $T(r, \theta, z, t)$. Assim, as equações resultantes são somadas e em seguida, integradas sobre todo o domínio. Assim, o sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas é obtido e dado por

$$\frac{d\tilde{T}_{\text{imp}}^{(z\theta r)}(t)}{dt} = \sum_{j, n, q=1}^{\infty} [A_{ijmnpq} + B_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}(t))] \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t), \quad i, m, p = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.14a)$$

onde o vetor $\tilde{T}_{\infty}(t)$ contém todos os infinitos termos transformados para $i, m, p = 1, 2, \dots, \infty$,

$$\tilde{T}_{\infty}(t) \equiv [\{\tilde{T}_{111}, \tilde{T}_{112}, \tilde{T}_{113}, \dots\}, \{\tilde{T}_{121}, \tilde{T}_{122}, \tilde{T}_{123}, \dots\}, \dots, \{\tilde{T}_{211}, \tilde{T}_{212}, \tilde{T}_{213}, \dots\}, \{\tilde{T}_{221}, \tilde{T}_{222}, \tilde{T}_{223}, \dots\}, \dots]^T(t) \quad (5.14b)$$

É necessário prover uma condição inicial para o sistema não-linear acoplado de primeira ordem dado pela equação (5.14a). Isto pode ser realizado com a transformação da condição inicial original (5.6a). Logo tem-se

$$\tilde{T}_{\text{imp}}^{(z\theta r)}(0) = \int_0^{r_1} \int_0^{\theta_0} \int_0^{l_z} r \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_p^{(r)}(r) dr d\theta dz = \tilde{f}_{\text{imp}}^{(z\theta r)} \text{ com } i, m, p = 1, 2, \dots, \infty. \quad (5.14c)$$

Os coeficientes da equação (5.14a) resultam da transformação dos termos lineares e não lineares da equação (5.5) e são expressos por

$$A_{ijmnpq} = B_{ijmnpq}^* + \delta_{ij} D_{iimnpq} + \delta_{ij} \delta_{mn} E_{iimmpq} + \delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{pq} F_{iimpp}; \quad (5.14d)$$

$$B_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty(t)) = -\{R_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty(t)) + C_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty(t)) + V_{ijmnpq}(\tilde{T}_\infty(t))\}. \quad (5.14e)$$

Os coeficientes envolvidos nas equações (5.14d) são definidos a seguir:

$$B_{ijmnpq}^* = -(1 - \delta_{ij}) F_{ij} Q_{mn} H_{pq} - F_{ij} H_{mn} (1 - \delta_{ij} \delta_{mn}) \omega_{pq}; \quad (5.14f)$$

$$D_{iimnpq} = -(\mu_i^{(z)})^2 H_{mn} H_{pq}; \quad E_{iimmpq} = -(\mu_m^{(\theta)})^2 F_{ii} H_{pq}; \quad F_{iimpp} = (\mu_p^{(r)})^2 F_{ii} H_{mm}, \quad (5.14g-i)$$

sendo que estes coeficientes são descritos pelas seguintes expressões:

$$F_{ij} = \int_0^{l_z} K^{(z)}(z) \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z) dz; \quad H_{mn} = \int_0^{\theta_0} K^{(\theta)}(\theta) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_n^{(\theta)}(\theta) d\theta; \quad (5.14j,k)$$

$$Q_{mn} = \int_0^{\theta_0} K^{(\theta)}(\theta) \frac{d\Psi_n^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} \frac{d\Psi_m^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} d\theta; \quad \omega_{pq} = \int_0^{r_1} K^{(r)}(r) \frac{d\Psi_q^{(r)}(r)}{dr} \frac{d[r\Psi_p^{(r)}(r)]}{dr} dr; \quad (5.14l,m)$$

$$H_{pq} = \int_0^{r_1} r K^{(r)}(r) \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r) dr, \quad (5.14n)$$

nas quais, $K^{(z)}(z) = K^{(\theta)}(\theta) = K^{(r)}(r) = a^{1/3}$.

Para esta aplicação, tem-se

$$F_{ij} = a^{1/3} \delta_{ij}; \quad H_{mn} = a^{1/3} \delta_{mn}; \quad Q_{mn} = a^{1/3} \gamma_n^{(\theta)} \gamma_m^{(\theta)} \delta_{mn}, \quad (5.14o-q)$$

e ω_{pq} , H_{pq} foram calculados numericamente.

E os coeficientes da equação (5.14e) também foram obtidos numericamente e suas expressões matemáticas são dadas por

$$R_{ijmnpq}(\tilde{T}^{(z\theta r)}) = b \sum_{a,b,c=1}^{\infty} X_{ijmnpqabc} \tilde{T}_{abc}^{(z\theta r)}(t); \quad (5.15a)$$

$$B_{ijmnpq}(\tilde{T}^{(z\theta r)}) = b \sum_{a,b,c=1}^{\infty} Y_{ijmnpqabc} \tilde{T}_{abc}^{(z\theta r)}(t); \quad (5.15b)$$

$$V_{ijmnpq}(\tilde{T}^{(z\theta r)}) = b \sum_{a,b,c=1}^{\infty} Z_{ijmnpqabc} \tilde{T}_{abc}^{(z\theta r)}(t); \quad (5.15c)$$

nos quais,

$$X_{ijmnpqabc} = \int_0^{r_1} \int_0^{\theta_0} \int_0^{l_z} \Psi_{abc}^{(z\theta r)}(x) \Psi_{ij}^{(z)}(z) \frac{d\Psi_n^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} \frac{d\Psi_m^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} \Psi_{pq}^{(r)}(r) dr d\theta dz; \quad (5.15d)$$

$$Y_{ijmnpqabc} = \int_0^{r_1} \int_0^{\theta_0} \int_0^{l_z} \Psi_{abc}^{(z\theta r)}(x) \frac{d\Psi_j^{(z)}(z)}{dz} \frac{d\Psi_i^{(z)}(z)}{dz} \Psi_{mn}^{(\theta)}(\theta) \Psi_{pq}^{(r)}(r) dr d\theta dz; \quad (5.15e)$$

$$Z_{ijmnpqabc} = \int_0^{r_1} \int_0^{\theta_0} \int_0^{l_z} \Psi_{abc}^{(z\theta r)}(x) \Psi_{ij}^{(z)}(z) \Psi_{mn}^{(\theta)}(\theta) \frac{d\Psi_q^{(r)}(r)}{dr} \frac{d[r\Psi_p^{(r)}(r)]}{dr} dr d\theta dz; \quad (5.15f)$$

com

$$\Psi_{abc}^{(z\theta r)}(x) = \Psi_a^{(z)}(z) \Psi_b^{(\theta)}(\theta) \Psi_c^{(r)}(r); \quad \Psi_{def}^{(z\theta r)}(x) = \Psi_d^{(z)}(z) \Psi_e^{(\theta)}(\theta) \Psi_f^{(r)}(r); \quad (5.15g-h)$$

$$\Psi_{ij}^{(z)}(z) = \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_j^{(z)}(z); \quad \Psi_{mn}^{(\theta)}(\theta) = \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_n^{(\theta)}(\theta); \quad \Psi_{pq}^{(r)}(r) = r \Psi_p^{(r)}(r) \Psi_q^{(r)}(r). \quad (5.15i-k)$$

5.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas

O sistema descrito pela equação (5.14a) possui um número infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem sujeito à condição inicial transformada, equação (5.14c). Deste modo, truncando a expansão z em N_z termos, a expansão θ em N_θ termos e a

expansão r em N_r termos, o número total de termos será $N_z N_\theta N_r$, implicando no sistema de equações diferenciais ordinárias, que segue

$$\frac{d\tilde{T}_{\text{imp}}^{(z\theta r)}(t)}{dt} = \sum_{j, n, q=1}^{N_z, N_\theta, N_r} (A_{ijmnpq} + B_{ijmnpq}(\tilde{T}^{(z\theta r)}(t))) \tilde{T}_{jnq}^{(z\theta r)}(t), \quad \{i, m, p\} = \{1, 2, \dots, N_z; 1, 2, \dots, N_\theta; 1, 2, \dots, N_r\} \quad (5.16a)$$

sujeito à condição inicial

$$\tilde{T}_{\text{imp}}^{(z\theta r)}(0) = \tilde{f}_{\text{imp}}^{(z\theta r)}, \quad \{i, m, p\} = \{1, 2, \dots, N_z; 1, 2, \dots, N_\theta; 1, 2, \dots, N_r\} \quad (5.16b)$$

A equação (5.16a) é um sistema finito de equações diferenciais não-lineares e pode ser escrito na forma matricial, como mostrado a seguir

$$\frac{d\tilde{T}(t)}{dt} = [A + B(\tilde{T}(t))] \tilde{T}(t), \quad (5.17c)$$

onde A é a matriz dos coeficientes lineares A_{ijmnpq} e $B(\tilde{T}(t))$ a matriz dos coeficientes não-lineares $B_{ijmnpq}(\tilde{T}^{(z\theta r)}(t))$. O vetor $\tilde{T}(t)$ é o vetor $\tilde{T}_\infty(t)$ truncado na ordem N_z , N_θ e N_r , como comentado anteriormente, e é expresso como

$$\tilde{T}(t) = [\tilde{T}_{111}, \tilde{T}_{112}, \dots, \tilde{T}_{11N_r}, \tilde{T}_{121}, \tilde{T}_{122}, \dots, \tilde{T}_{12N_r}, \dots, \tilde{T}_{1N_\theta 1}, \tilde{T}_{1N_\theta 2}, \dots, \tilde{T}_{1N_\theta N_r}, \dots, \tilde{T}_{2N_\theta 1}, \dots, \tilde{T}_{2N_\theta N_r}, \dots, \tilde{T}_{N_z N_\theta 1}, \tilde{T}_{N_z N_\theta 2}, \dots, \tilde{T}_{N_z N_\theta N_r}]^T$$

Assim, a fórmula de inversão (5.13b) depois de truncada, é usada para obter a distribuição de temperatura

$$T(r, \theta, z, t) = \sum_{i, m, p=1}^{N_z, N_\theta, N_r} \Psi_i^{(z)}(z) \Psi_m^{(\theta)}(\theta) \Psi_p^{(r)}(r) \tilde{T}_{\text{imp}}^{(z\theta r)}(t). \quad (5.18)$$

5.5 - Resultados e Discussão

Foi considerado no presente trabalho um setor de cilindro circular, com comprimento unitário para as direções r e z , $l_r = l_z = 1$. O material analisado é o aço inoxidável Aisi 304 que é submetido a um processo de resfriamento de uma temperatura inicial $T_0^* = 1200K$ até a

temperatura de $T_{\infty}^* = 400\text{K}$. A ordem de truncamento na série foi fixada em 5 termos para cada direção, isto é, $N_r = N_{\theta} = N_z = 5$ o que resulta em um sistema de 125 equações diferenciais.

O sistema finito não-linear de equações diferenciais ordinárias (5.17) foi resolvido através de um programa implementado em Fortran 90/95 que simula a difusão tridimensional não linear transiente para um corpo com o formato de um setor de cilindro circular. Neste programa a subrotina DIVPAG do IMSL (1994) foi usada para resolver o sistema diferencial de equações. A precisão da subrotina foi fixada em $\varepsilon = 10^{-5}$.

A condutividade térmica dimensional do Aço Aisi 304 foi obtida a partir dos dados experimentais disponíveis em Incropera & Witt (1992), para o intervalo de temperatura de 400K a 1200K e é expressa por

$$k^*(T^*) = 11,47 + 0,013T^*, \quad [T^*] = \text{K}, \quad [k^*] = \text{W}/(\text{m} \times \text{K}).$$

Após a obtenção desse polinômio de primeira ordem, utilizou-se a equação (5.2e) para calcular uma condutividade térmica de referência k_{ref}^* que possui valor igual a $22,42 \text{ W}/(\text{m} \times \text{K})$ e então, através da equação (5.2f) obteve-se a condutividade térmica adimensional

$$K(T) = 0,756 + 0,489T.$$

Para este caso, o tempo computacional necessário para se obter a solução, aumenta significativamente devido ao cômputo repetido dos coeficientes dependentes da temperatura. Para reduzir o tempo de processamento, as matrizes **A** e **B**, presentes na equação (5.17), foram computadas na forma de matrizes banda, sendo que os elementos das matrizes que estejam fora da banda são desprezados. Quando o tamanho da banda aumenta a aproximação para a solução é melhor mas também aumenta o custo computacional. Os valores adotados para a largura da banda, neste caso, foram 1, 3 e 11.

Para o caso linear ($b = 0$), adotou-se três maneiras para analisar o problema linear gerado: a primeira consiste em tomar a condutividade térmica igual ao valor médio k_{ref}^* e portanto $K(T) = k_{\text{ref}}^* / k_{\text{ref}}^* = 1$; as outras duas consistem em tomar $K(T) = k_{\text{min}}^* / k_{\text{ref}}^* = 0,741$ e $K(T) = k_{\text{max}}^* / k_{\text{ref}}^* = 1,249$, onde $k_{\text{min}}^* = k^*(T_{\text{min}}^*)$ e $k_{\text{max}}^* = k^*(T_{\text{max}}^*)$ são os valores da

condutividade térmica nas temperaturas máxima e mínima, respectivamente. Para este caso, $T_{\min}^* = 400\text{K}$ e $T_{\max}^* = 1200\text{K}$.

Na Figura 5.1, são apresentadas as distribuições de temperatura máxima ($T_{\max}$) e temperatura média ($T_{\text{média}}$), respectivamente, como função do tempo adimensional, Fo . Como esperado, observa-se que as curvas da temperatura tendem para zero, mais rapidamente nos casos em que a condutividade térmica é maior.

É importante observar que, apesar das distribuições de temperatura estarem próximas, os resultados obtidos, para um dado instante Fo , se diferenciam bastante para os três casos analisados. Para $Fo = 0,1$ obteve-se para o caso $K(T) = 0,741$, a temperatura $T_{\max} = 0,490$, e para $K(T) = 1,249$, a temperatura $T_{\max} = 0,209$. Isto equivale a uma diferença superior a 100% relativamente ao menor valor. Com respeito aos resultados obtidos para a temperatura média, a diferença é maior, da ordem de 200%. Uma outra observação sobre este mesmo efeito pode ser percebida ao analisar-se o tempo necessário para a temperatura adimensional atingir, por exemplo, um décimo de seu valor inicial. Então para a temperatura máxima atingir $T_{\max} = 0,1$ quando calculada utilizando $K(T) = 0,741$ tem-se $Fo \approx 0,23$ e quando calculada para $K(T) = 1,249$ tem-se $Fo \approx 0,14$, o que dá uma diferença de aproximadamente 60% relativamente ao menor valor. De maneira semelhante, para $T_{\text{média}} = 0,1$ tem-se uma diferença de aproximadamente 70%.

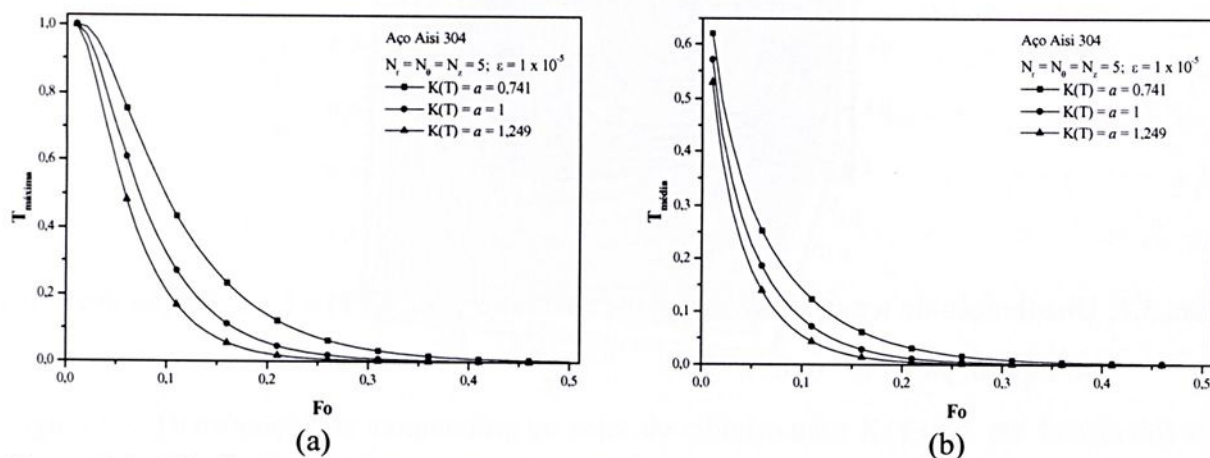


Figura 5.1: Distribuição das temperaturas máxima (a) e média (b), respectivamente, em função do número de Fourier, Fo .

Nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 são apresentadas as distribuições de temperaturas em relação aos eixos do espaço tridimensional para os tempos adimensionais $Fo = 0,02$; $0,08$ e $0,25$ com condutividade térmica representada por uma função constante, $K(T)=1$. Os resultados apresentados até o momento mostram que a distribuição de temperatura varia muito rapidamente no início do processo de transferência de calor apresentando grandes gradientes de temperatura, posteriormente a rapidez deste processo diminui, e por fim passa a ter uma tendência assintótica na direção da temperatura ambiente, com gradientes tendendo a zero. Como a temperatura adimensional inicial é igual à unidade e as condições de contorno são do tipo termicamente isolado (ou simetria) e temperatura prescrita igual a zero, então a distribuição espacial da temperatura apresenta superfícies isotérmicas para menores valores da temperatura mais próximas da superfície do volume, e superfícies isotérmicas localizadas no interior do corpo e próximas de superfícies isoladas para maiores valores da temperatura.

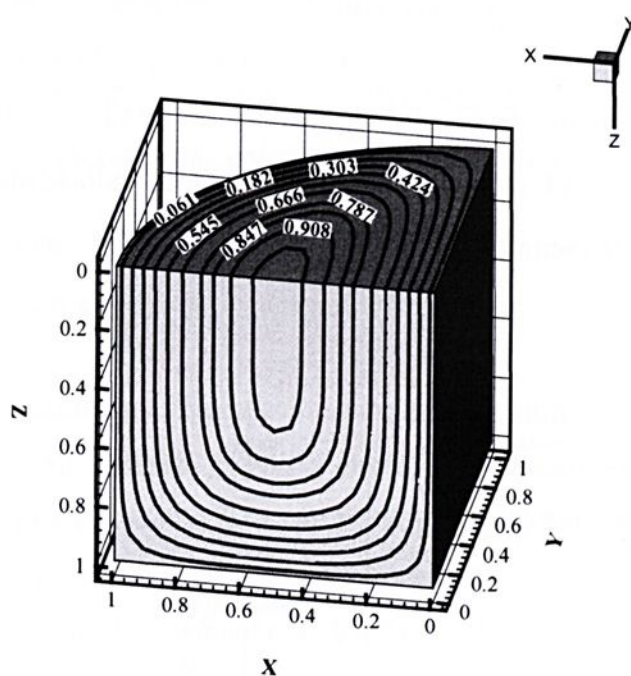


Figura 5.2: Distribuição de temperatura no setor de cilindro para $K(T)=1$ em função dos eixos do espaço, para $Fo = 0,02$.

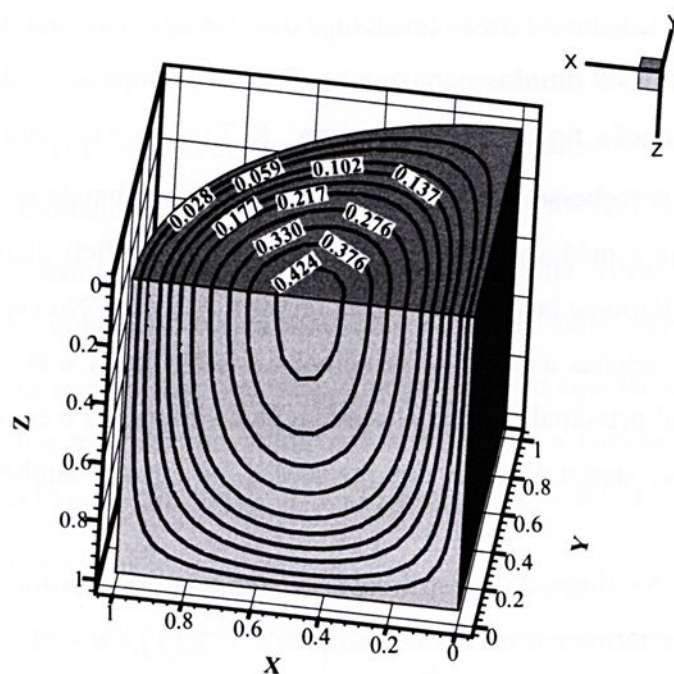


Figura 5.3: Distribuição de temperatura no setor de cilindro para $K(T) = 1$ em função dos eixos do espaço, para $Fo = 0,08$.

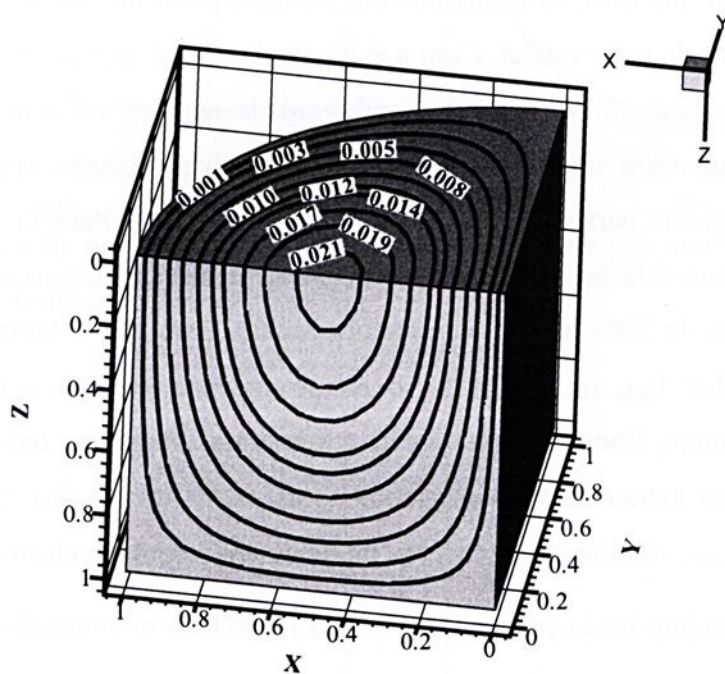


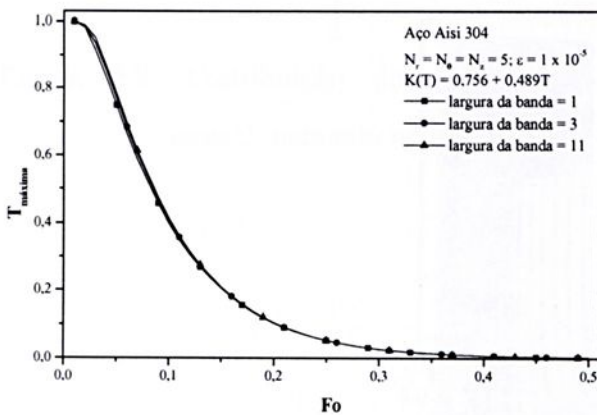
Figura 5.4: Distribuição de temperatura no setor de cilindro para $K(T) = 1$ em função dos eixos do espaço, para $Fo = 0,25$.

Na Figura 5.5, apresentam-se resultados que permitem avaliar a influência da largura da banda sobre os resultados obtidos para o caso não linear onde a condutividade térmica foi modelada como uma função linear da temperatura, $K(T) = a + bT$, para o aço Aisi 304. Por inspeção na Figura 5.5 percebe-se que a influência da largura de banda sobre os resultados para as temperaturas máxima e média é bem pequena, tanto que é difícil distinguir-se visualmente uma curva da outra. Utilizou-se larguras de banda iguais a 1, 3 e 11. No caso da largura de banda igual a 1 considerou-se apenas a diagonal principal das matrizes **A** e **B**, nos outros dois casos considerou-se a diagonal principal e algumas subdiagonais inferiores e superiores. Quanto maior a largura de banda maior será a acurácia dos resultados, no entanto também será maior o custo computacional.

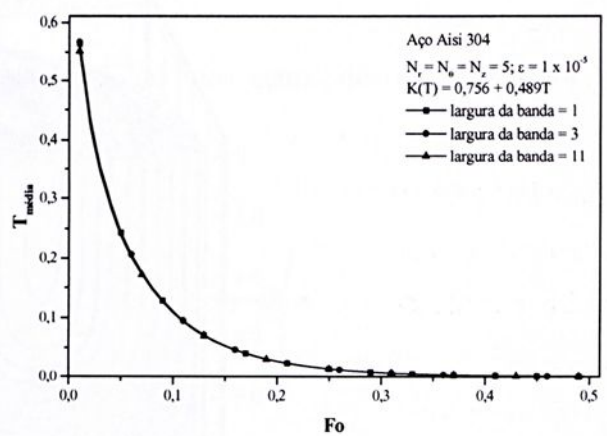
Na Figura 5.6 é ilustrada a distribuição de temperatura máxima e média para os casos em que a condutividade térmica é constante, $K(T) = a$ e $K(T) = a + bT$, $b \neq 0$. Percebe-se na Figura 5.6 que os resultados obtidos através da solução de uma equação diferencial parcial linear (condutividade térmica constante) e os obtidos através da solução de uma equação diferencial parcial não-linear (condutividade térmica variável linearmente com a temperatura) são distintos. Logo após o início do processo, os resultados são bastante próximos em consequência de que o problema enfocado ser de valor inicial. Com a evolução temporal, em consequência da diferença do modelamento constante ou variável da condutividade térmica, os valores previstos para a distribuição de temperatura tornam-se diferentes. Esta diferenciação reflete-se nos valores apresentados graficamente para as temperaturas máxima e média. Para $Fo = 0,1$ a temperatura máxima apresenta uma diferença aproximada de 30%, relativamente ao menor valor; e uma diferença aproximada de 50% para a temperatura média. Para que a temperatura máxima ou média atinja um valor $T_{\max}$ ou $T_{\text{med}} = 0,1$ o tempo previsto para as soluções baseadas em diferentes modelamentos, linear ou não-linear, apresentam diferenças temporais em torno de 20%, relativamente ao menor valor, para ambos os casos. Diferença dos resultados, 30% para $T_{\max}$ e 50% para T_{med} , obtidos utilizando o modelamento com condutividade variável e os obtidos utilizando condutividade constante ($k = k_{\text{ref}}^*$), são bem menores do que a diferença dos resultados obtida utilizando apenas modelamento com condutividades constantes ($k = k_{\max}^*$ e $k = k_{\min}^*$), 100% para $T_{\max}$ e 200% para T_{med} , conforme mencionado acima.

Comparando-se os resultados obtidos com o equacionamento não-linear, Figura 5.6, com aqueles obtidos com equacionamento linear, Figura 5.1, percebe-se que dos três casos de

equacionamento linear os dois que mais se aproximam dos resultados do caso não linear são aqueles correspondente a $K(T)=1$ e $K(T)=0,749$. Os resultados com menor concordância são os correspondentes a $K(T)=1,249$. Para $K(T)=1$ os resultados tendem a ter uma boa aproximação com os resultados obtidos para $K(T)=a+bT$ pois $K(T)=1$ representa um valor médio que em geral tende a produzir resultados com uma aproximação razoável. Para $K(T)=0,749$ tem-se também uma aproximação razoável, uma vez que no processo de transferência de calor as regiões que dominam o fenômeno são aquelas com grandes gradientes, ou seja regiões próximas à parede do volume, e neste locais a temperatura adimensional está próxima de zero e $K(T)=a+bT$ tende a $K(T)=a$, ou seja $K(T)=0,756$ que é um valor bastante próximo a $K(T)=0,749$.

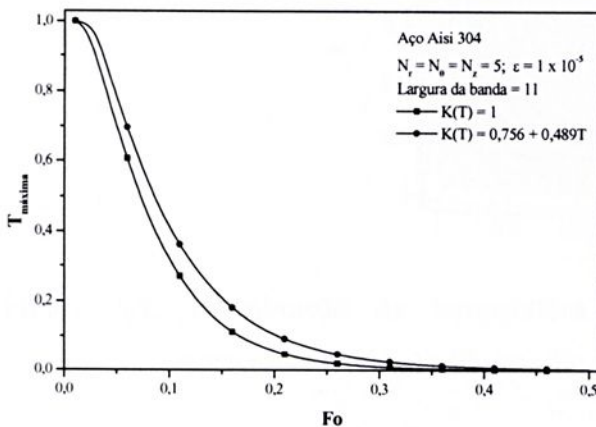


(a)

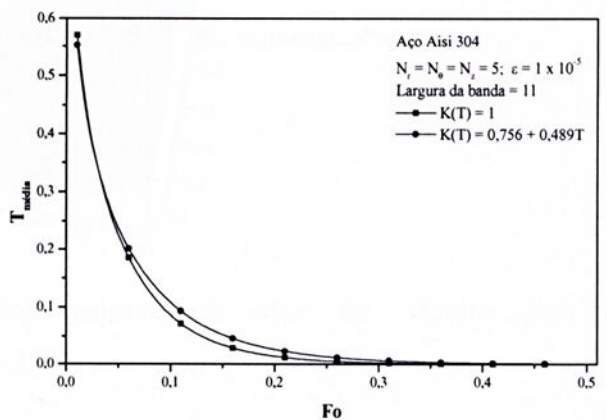


(b)

Figura 5.5: Distribuição de temperatura máxima (a) e temperatura média (b) em função do número de Fourier, Fo .



(a)



(b)

Figura 5.6: Distribuição das temperaturas máxima (a) e média (b) em função do número de Fourier para a condutividade térmica constante e variável com a temperatura.

Nas Figuras 5.7, 5.8 e 5.9 apresentam-se os resultados obtidos para a distribuição tridimensional de temperatura para os tempos adimensionais $Fo = 0,02$; $0,08$ e $0,25$; respectivamente, com condutividade térmica expressa por uma função linear dependente da temperatura e valor da largura de banda igual a 11. Como apresentado na Figura 5.6 os resultados para o equacionamento não-linear são próximos porém distintos daqueles obtidos com equacionamento linear. Assim, nas Figuras 5.7-5.9 são apresentadas a evolução da distribuição de temperatura para o caso não-linear sendo semelhantes àquelas obtidas para o caso linear, Figuras 5.2-5.4.

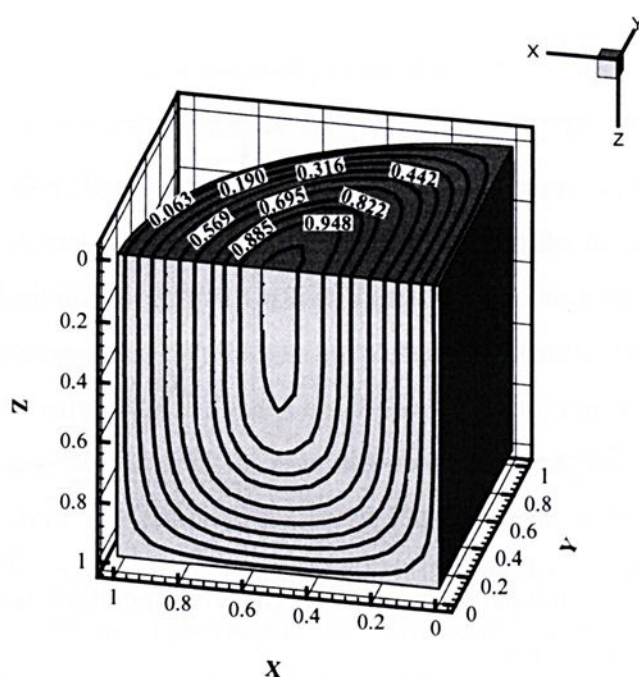


Figura 5.7: Distribuição de temperatura tridimensional no setor de cilindro para o equacionamento não linear e $Fo = 0,02$.

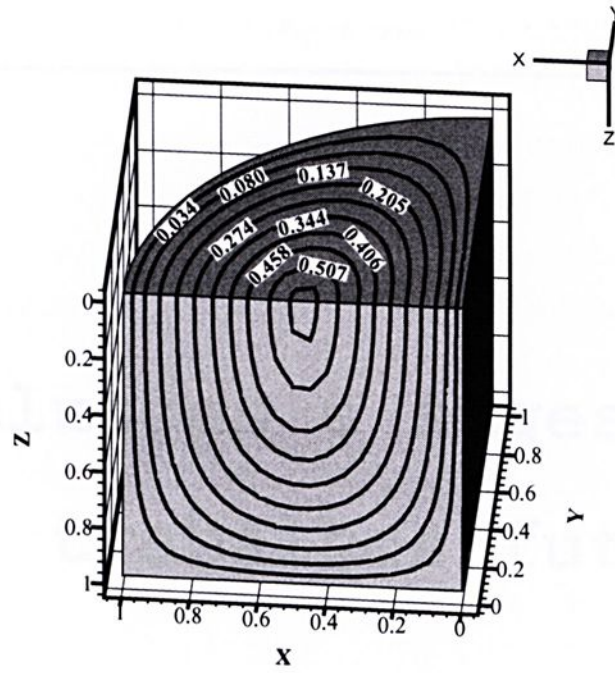


Figura 5.8: Distribuição de temperatura tridimensional no setor de cilindro para o equacionamento não linear e $Fo = 0,08$.

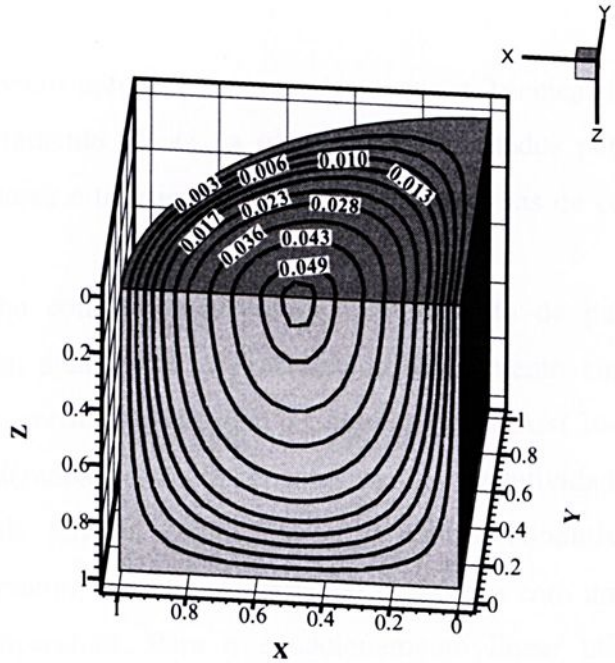


Figura 5.9: Distribuição de temperatura tridimensional no setor de cilindro para o equacionamento não linear e $Fo = 0,25$.

Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

Do procedimento apresentado entende-se que a Técnica da Transformada Integral Generalizada é uma ferramenta eficaz na obtenção de resultados para problemas de difusão tridimensionais, não-lineares e transientes, definidos em sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas.

Neste trabalho considerou-se corpos com formato de paralelepípedo e setor de cilindro circular, e então, analisou-se o processo de resfriamento em um dado intervalo de temperatura. Os materiais considerados foram o Chumbo, o Aço Aisi 304 e o Paládio.

Foram considerados três modelamentos para a condutividade térmica dos materiais: um com a condutividade térmica constante, outro com a condutividade térmica variável linearmente com a temperatura e o último, variando de acordo com um polinômio de segundo grau dependente da temperatura. Para o equacionamento linear utilizou-se três diferentes estratégias para se definir um valor constante da condutividade térmica. Uma que utilizava um valor médio e outras duas que utilizaram o maior e o menor valor. O equacionamento linear produz melhores resultados quando se considera um valor médio para a condutividade térmica. Para os materiais estudados, o equacionamento não linear com modelamento linear para a

condutividade térmica produz resultados bem aproximados daqueles obtidos usando a formulação quadrática, com um custo computacional bem mais reduzido.

Os equacionamentos linear e não-linear foram resolvidos utilizando-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) a qual propiciou a transformação da equação diferencial parcial transiente tridimensional original em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias. Para efeito computacional, este equacionamento foi truncado em um número finito de termos. Para o caso linear o sistema de equações diferenciais final é desacoplado e pode ser resolvido inclusive manualmente, sendo que o custo computacional em termos de memória e tempo de processamento é baixo. Para o caso não-linear o sistema de equações diferenciais ordinárias é acoplado e não-linear, tendo sido resolvido usando rotinas do IMSL, e o custo computacional é alto, principalmente quando a geometria é em coordenadas cilíndricas, por que as rotinas disponíveis para o cômputo das funções de Bessel envolvidas são bem mais lentas do que as rotinas para o cômputo de funções trigonométricas que aparecem no caso cartesiano.

Os resultados obtidos apresentam um comportamento no qual a distribuição tridimensional de temperatura evolui rapidamente do valor inicial, igual à unidade, para valores menores em uma queda exponencial com altos fluxos de calor (gradientes de temperatura). Com a evolução do processo de transferência de calor os fluxos tornam-se menores e por fim tendem a zero quando a temperatura adimensional tende ao valor final, igual a zero.

Quando o problema de condução é analisado na geometria cartesiana, a distribuição de temperatura no paralelepípedo se comporta de maneira semelhante para os diferentes materiais. O intervalo de temperatura adotado para os materiais influencia diretamente no comportamento da temperatura. Outros dois fatores que também foram investigados foram a influencia da largura da banda e da ordem de truncamento do sistema não-linear, sobre a acurácia final dos resultados. Conforme aumentam-se esses parâmetros a acurácia dos resultados melhora, entretanto, o tempo computacional também sofre um aumento significativo.

O custo computacional para obter soluções do fenômeno difusivo em coordenadas cilíndricas é bem maior que no caso cartesiano. Um fator que contribui para esse aumento é o cômputo das integrais que envolvem as funções de Bessel, uma vez que elas são obtidas repetidamente durante todo o processo computacional.

Os resultados deste trabalho, quando comparados com os apresentados por Serfaty (1997), mostraram-se em boa concordância, principalmente para números de Fourier no início e do final do processo de transferência de calor.

Com o objetivo de dar continuidade ao presente trabalho, apresenta-se as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Desenvolver algoritmos para implementação computacional que tornem o cômputo de soluções para fenômenos tridimensionais, não-lineares e transientes, mais baratos computacionalmente;
- Utilizar a transformada de Kirchhoff para linearizar o equacionamento não-linear apresentado pelo problema difusivo analisado; e por conseguinte facilitar a implementação e diminuir o custo computacional;
- Construir novos e mais rápidos algoritmos para o cômputo das funções de Bessel;



Referências Bibliográficas

- Aparecido, J. B. & Cotta, R. M.** (1987), *Fully Developed Laminar Flow in Trapezoidal Ducts*, Proc. of 9th Brazilian Congress of Mech. Eng., COBEM 87, v. I, pp.25 - 28.
- Aparecido, J. B.** (1988), *Transformada Integral Generalizada no Escoamento Laminar e Transferência de Calor em Dutos Retilíneos de Geometria Arbitrária*, Tese de Doutorado, São José dos Campos, São Paulo, Brasil.
- Aparecido, J. B., Cotta, R. M. & Özisik, M. N.,** (1989), *Analytical Solutions to Two-Dimensional Diffusion Type Problems in Irregular Geometries*, Journal of Franklin Institute, vol. 326, pp. 421-434.
- Aparecido, J. B. & Cotta, R. M.** (1990a), *Thermally Developing Laminar Flow Inside Rectangular Ducts*, International Journal Heat and Mass Transfer, vol. 33, n.2, pp.341 - 347.
- Aparecido, J. B. & Cotta, R. M.** (1990b), *Laminar Flow Inside Hexagonal Ducts*, Computational Mechanics, vol. 6, n.2, pp.93 - 100.
- Aparecido, J. B. & Cotta, R. M.** (1990c), *Analytical Solutions to Parabolic Multi-Dimensional Diffusion Problems within Irregularly Shaped Domains*, In: Wrobel, L. C., Brebia, C. A., Nowac, A. J., (Eds.), *Advanced Computational Methods in Heat Transfer*, Berlin: Springer-Verlag, vol. 1, pp.27 - 38.
- Aparecido, J. B. & Cotta, R. M.** (1992), *Laminar Thermally Developing Flow inside Right-Angularly Triangular Ducts*, Applied Scientific Research, 49, pp.355 - 368.
- Aparecido, J. B.** (1994), *Fundamentos da Solução de uma Classe de Equações do Tipo Convectivo-Difusivo*, Tese de Livre Docência, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil.
- Aparecido, J. B. & Özisik, M. N.** (1996), *Laminar Forced Convection Inside Circular Sector Tube*, In: II Workshop sobre a Técnica da Transformada Integral Generalizada, Instituto Militar de Engenharia, pp.08 - 12, Rio de Janeiro, RJ.

- Aparecido, J. B.**, (1997), *How to Choose Eigenvalue Problems when Using Generalized Integral Transforms to Solve Thermal Convection - Diffusion Problems*, In: Proc. of 14th Brazilian Congress of Mech. Eng., Bauru, SP, Brazil.
- Aparecido, J. B. & Özisik, M. N.** (1998), *Laminar Forced Convection Inside Circular Sector Tube with Variable Boundary Condition*, 7th Brazilian Congress of Engineering and Thermal Science - ENCIT 98, Rio de Janeiro.
- Aparecido, J. B. & Özisik, M. N.** (1999a), *Nonlinear Parameter Estimation in Laminar Forced Convection Inside a Circular Sector Tube*, In: K. A. Woodbury (Editor), *Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, ASME, New York, pp.283-294.
- Aparecido, J. B. & Özisik, M. N.** (1999b), *Nonlinear Parameter Estimation in Laminar Forced Convection Inside Circular Sector Tube*, In: Third International Conference on Inverse Problems and Engineering, CD-ROM, Paper ASME HT-08, august 12 - 18, Port Ludlow, WA, USA.
- Aparecido, J. B. & Özisik, M. N.** (2001), *Nonlinear Parameter Estimation in Laminar Forced Convection Within a Circular Sector Tube*, *Inverse Problems in Engineering* (accepted for publication).
- Aparecido, J. B., Vieira, E. D. R. & Campos-Silva, J. B.** (2000), *Analysis of a Low Speed Wind Tunnel Contraction By Generalized Integral Transform Technique*, In: ENCIT 2000 - 8th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences, Paper S01P10, Porto Alegre, RS, Brazil.
- Aparecido, J. B., Vieira, E. D. R. & Campos-Silva, J. B.** (2001), *Flowfield and Flow Parameters for Flow Inside a Low Speed Wind Tunnel Contraction With Circular Cross-Section*, In: Proc. of 16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Paper TRB2453, Uberlândia, MG, Brazil,
- Arpaci, V. S.**, (1966), *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.



- Boyce, N. E., DiPrima, R. C.,** (1979), *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, RJ.
- Cotta, R. M. & Özisik, M. N.,** (1987), *Diffusion Problems with General Time-Dependent Coefficients*, Ciências Mecânicas, vol. IX, n.º 4.
- Cotta, R. M.,** (1990), *Hybrid Numerical / Analytical Approach to Nonlinear Diffusion Problems*, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 17, pp. 217-226.
- Cotta, R. M., Leiroz, A. & Aparecido, J. B.,** (1992), *Steady State Diffusion Problems with Variable Equation Coefficients*, Heat and Technology, v.10, n.3 - 4, pp.104 - 129.
- Cotta, R. M.,** (1993), *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*, Boca Raton, FL, USA, CRC Press.
- Dantas, L. B., Orlande, H. R. B., & Cotta, R. M.,** (2002), *Solution of a Two-Dimensional Drying Problem in Cylindrical Coordinates*, II National Congress of Mechanical Engineering, João Pessoa – PB, Brazil
- Dias Júnior, T. & Aparecido, J. B.,** (1999), *Thermally Developing Laminar Flow Inside Rectangular Ducts Submitted to Boundary Conditions of Third Kind*, In: COBEM-99, Águas de Lindóia, Brazil.
- Diniz, A. J. & Aparecido, J. B.** (1990), *Analytical Solution to Ablation Problem with Transient Heat Flux*, In: III National Thermal Science Meeting, Itapema - SC, Brazil, pp.329-- 333 (in Portuguese).
- Diniz, A. J., Aparecido, J. B. & Cotta, R. M.** (1990), *Heat Conduction with Ablation in a Finite Slab*, Heat and Technology, vol. 8, n.3 - 4, pp.30 - 43.
- Diniz, A. J., Campos-Silva, J. B., Aparecido, J. B. & Zaparoli, E. L.** (1992), *Thermal Protection in Sphere using Ablation Process*, II North-Northeast Congress of Mechanical Engineering, João Pessoa, PB, Brazil, pp. 9 - 16 (in Portuguese).



- Diniz, A. J., Aparecido, J. B. & Zaparoli, E. L.** (1993), *Solution to Thermal Problem with Nonlinear Couplings*, In: Proc. of 12th Brazilian Congress of Mech. Eng., Brasília, DF, Brasil, 577 - 580 (in Portuguese).
- Honig, C. S.**, (1978), *Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville*, Editora Edgard Blucher, São Paulo, Brasil.
- Incropera, F. P., & Witt, D. P.**, (1992), *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*, Editora Guanabara Koogan S.A., Rio de Janeiro, Brasil.
- Lima, E. L.**, (1970), *Análise no Espaço $\mathfrak{R}^n$* , Editora Edgard Blucher, São Paulo, Brasil.
- Lima, E. L.**, (1976), *Curso de Análise, Vol. 1*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil.
- Lindquist, C. & Aparecido, J. B.**, (1999), *Laminar Forced Convection Through Rectangular Ducts with Uniform Axial and Peripheral Heat Flux*, In: COBEM-99, Águas de Lindóia, Brazil.
- Lindquist, C. & Aparecido, J. B.** (2001), *Integral Transform Solution for the Laminar Forced Convection Inside Rectangular Ducts with Surface Uniform Heat Flux*, Hybrid Methods in Engineering (accepted for publication).
- Maia, C. R. M., Aparecido, J. B. & Milanez, L. F.**, (2000), *Heat Transfer in Laminar Forced Convection Inside Elliptical Tube With Boundary Condition of First Kind*, In: Proceedings of the 3rd European Thermal Science Conference, Heidelberg, Germany, 10-13 September, pp.247 - 252.
- Mikhailov, M. D. & Özisik, M. N.** (1984), *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, Dover Publications, Inc., New York.
- Mikhailov, M. D. & Cotta, R. M.**, (1994), *Integral Transform Solutions of Eigenvalue Problems*, Communication in Numerical Methods in Engineering, vol. 10, pp. 827-835.
- Özisik, M. N. & Murray, R. L.**, (1974), *On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters*, Journal Heat Transfer, v.96c, pp.48-51.



Özisik, M. N., (1980), *Heat Conduction*, Wiley, New York.

Serfaty, R. & Cotta, R. M., (1990), *Integral Transform Solutions of Diffusion Problems with Nonlinear Equation Coefficients*, International Communication Heat Mass Transfer, vol. 17, pp. 851-864.

Serfaty, R., (1997), *Problemas Não Lineares Multidimensionais em Difusão e Convecção-Difusão: Benchmarks via Transformada Integral*, Tese de Doutorado, Coppe/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

Shah, R. K. & London, A. L., (1978), *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*, Advances in Heat Transfer (Supplement 1), Academic Press, New York.

Campos-Silva, J. B., Cotta, R. M. & Aparecido, J. B., (1992), *Analytical Solutions to Simultaneously Developing Laminar Flow inside Parallel-Plate Channels*, Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 35, n.4, pp. 887 - 895.

Visual Numeric, (1994), *IMSL Math/Library*, Edition 10, Version 2.0, Suite 400, 9990 Richmond Avenue, Houston, TX-77042.

Zayed, A. I., (1996), *Handbook of Function and Generalized Function Transformation*, Boca Raton, CRC Press.



Integrais na transformação das geometrias cartesianas e cilíndricas

No Capítulo 2 foi discutido o problema difusivo não-linear transiente na geometria cartesiana. Neste Apêndice, apresenta-se a resolução das integrais envolvidas no processo de transformação do problema para o sistema de coordenadas cartesianas e cilíndricas. No Capítulo 3, as integrais presentes nas equações (3.15), (3.23) e (3.31), referentes aos eixos z , θ e r , respectivamente, são semelhantes às respectivas integrais das equações (2.19), (2.23) e (2.27), nos eixos x , y e z . A diferença está nas variáveis, onde escreve-se x , y e z no sistema de coordenadas cartesianas, em coordenadas cilíndricas será z , θ e r , respectivamente.

Para resolver as integrais apresentadas nas equações mencionadas, é necessário utilizar os pares transformada-inversa referente ao sistema de coordenadas em questão. Estes pares foram obtidos no decorrer do processo de transformação mostrado em ambos os Capítulos. Apresenta-se em seguida, os pares transformada-inversa para cada eixo no sistema de coordenadas cartesianas. No caso da geometria cilíndrica, os pares para a transformação em z e θ são semelhantes aos dos eixos x e y , respectivamente com respeito ao comentário realizado no parágrafo anterior. Para o par transformada-inversa do eixo r da geometria cilíndrica, se tornar semelhante ao do eixo z , é necessário acrescentar um termo r^s nas equações (2.12a), (2.14a) e (2.16a). No caso da geometria cartesiana, o expoente s do termo r é igual a 0, recuperando a



forma original dessas equações e no caso do sistema de coordenadas cilíndricas, o termo s assume valor igual a 1.

Logo, os pares da transformação do sistema de coordenadas cartesianas nos eixos x , y e z , são, respectivamente, apresentados a seguir.

$$\tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) = \int_{x_0}^{x_1} w^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) T(x, y, z, t) dx \quad (\text{transformada}) \quad (2.12a)$$

$$T(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \Psi_j^{(x)}(x) \quad (\text{inversa}) \quad (2.12b)$$

$$\tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) = \int_{y_0}^{y_1} w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) dy \quad (\text{transformada}) \quad (2.14a)$$

$$\tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) \Psi_n^{(y)}(y) \quad (\text{inversa}) \quad (2.14b)$$

$$\tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t) = \int_{z_0}^{z_1} r^s w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) dz \quad (\text{transformada}) \quad (2.16a)$$

$$\tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) = \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{imq}^{(xyz)}(t) \quad (\text{inversa}) \quad (2.16b)$$

na qual $s = \begin{cases} 0, & \text{para geometria cartesiana} \\ 1, & \text{para geometria cilíndrica} \end{cases}$.

Agora, mostraremos a resolução das integrais envolvidas na equação (2.19).

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} w^*(x) w^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) T(x, t) dx &= \int_{x_0}^{x_1} w^*(x) w^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx = \\ \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{\infty} w^*(x) w^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} w^*(x) w^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx = \\ = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \int_{x_0}^{x_1} w^*(x) w^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx. \end{aligned}$$

Seja $A_{ij}(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} w^*(x) w^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx$, logo

$$\int_{x_0}^{x_1} w^*(\mathbf{x}) w^{(x)}(\mathbf{x}) \Psi_i^{(x)}(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(y, z) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \quad (\text{A.1})$$

$$(\mu_i^{(x)})^2 \int_{x_0}^{x_1} w^{(x)}(\mathbf{x}) \Psi_i^{(x)}(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = (\mu_i^{(x)})^2 \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) \quad (\text{A.2})$$

Como, $L^{(x)} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K^{(x)}(x) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \right]$ com $x_0 \leq x \leq x_1$, então

$$L^{(x)} \Psi_i^{(x)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[K^{(x)}(x) \frac{\partial \Psi_i^{(x)}(x)}{\partial x} \right].$$

Portanto,

$$-K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) \int_{x_0}^{x_1} T(\mathbf{x}, t) L^{(x)} \Psi_i^{(x)}(x) d\mathbf{x} = -K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) \int_{x_0}^{x_1} T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x} \left[K^{(x)}(x) \frac{\partial \Psi_i^{(x)}(x)}{\partial x} \right] d\mathbf{x} \quad (\text{A.3})$$

O operador L_0 é definido como,

$$L_0 = -\nabla \bullet [K_0(\mathbf{x}) \nabla(\cdot)] + d^{(x)}(x) + d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z) + d^*(\mathbf{x}),$$

no qual $K_0(\mathbf{x}) = K^{(x)}(x) K^{(y)}(y) K^{(z)}(z)$.

Logo,

$$\begin{aligned} L_0 T(\mathbf{x}, t) = & -\frac{\partial}{\partial x} \left[K^{(x)}(x) K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(x)}(x) K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(x)}(x) K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right] + d^{(x)}(x) T(\mathbf{x}, t) + [d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z)] T(\mathbf{x}, t) + d^*(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

E então,

$$\int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) L_0 T(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = -K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[K^{(x)}(x) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right] d\mathbf{x} -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{x_0}^1 K^{(x)}(x) K^{(z)}(z) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial T(x, t)}{\partial y} \right] dx - \int_{x_0}^1 K^{(x)}(x) K^{(y)}(y) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial T(x, t)}{\partial z} \right] dx + \\
& + \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) d^{(x)}(x) T(x, t) dx + [d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z)] \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) T(x, t) dx + \\
& + \int_{x_0}^1 d^*(x) \Psi_i^{(x)}(x) T(x, t) dx.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Subtraindo (A.3) e (A.4) obtemos,

$$\begin{aligned}
& - K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) \int_{x_0}^1 T(x, t) L^{(x)} \Psi_i^{(x)}(x) dx - \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) L_0 T(x, t) dx = \\
& = -K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) \int_{x_0}^1 T(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left[K^{(x)}(x) \frac{\partial \Psi_i^{(x)}(x)}{\partial x} \right] dx + K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[K^{(x)}(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right] dx + \\
& + \int_{x_0}^1 K^{(x)}(x) K^{(z)}(z) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial T(x, t)}{\partial y} \right] dx + \int_{x_0}^1 K^{(x)}(x) K^{(y)}(y) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial T(x, t)}{\partial z} \right] dx - \\
& - \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) d^{(x)}(x) T(x, t) dx - [d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z)] \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) T(x, t) dx - \int_{x_0}^1 d^*(x) \Psi_i^{(x)}(x) T(x, t) dx = \\
& = K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) \int_{x_0}^1 \left\{ \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[K^{(x)}(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right] - T(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left[K^{(x)}(x) \frac{\partial \Psi_i^{(x)}(x)}{\partial x} \right] \right\} dx + \\
& + \int_{x_0}^1 K^{(x)}(x) K^{(z)}(z) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial T(x, t)}{\partial y} \right] dx + \int_{x_0}^1 K^{(x)}(x) K^{(y)}(y) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial T(x, t)}{\partial z} \right] dx - \\
& - \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) d^{(x)}(x) T(x, t) dx - [d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z)] \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) T(x, t) dx - \int_{x_0}^1 d^*(x) \Psi_i^{(x)}(x) T(x, t) dx.
\end{aligned}$$

Assim, devido a ortogonalidade das autofunções (ver Apêndice B),

$$\begin{aligned}
& - K^{(y)}(y) K^{(z)}(z) \int_{x_0}^1 T(x, t) L^{(x)} \Psi_i^{(x)}(x) dx - \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) L_0 T(x, t) dx = \\
& + \int_{x_0}^1 K^{(x)}(x) K^{(z)}(z) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial T(x, t)}{\partial y} \right] dx + \int_{x_0}^1 K^{(x)}(x) K^{(y)}(y) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial T(x, t)}{\partial z} \right] dx - \\
& - \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) d^{(x)}(x) T(x, t) dx - [d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z)] \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) T(x, t) dx - \\
& - \int_{x_0}^1 d^*(x) \Psi_i^{(x)}(x) T(x, t) dx.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

As integrais envolvidas na equação (A.5) são desenvolvidas a seguir:

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) K^{(z)}(z) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \right] dx = \\
& = K^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial y} dx \right] = K^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) T(\mathbf{x}, t) dx \right] = \\
& = K^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx \right] = \\
& = K^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx \right].
\end{aligned}$$

Seja $F_{ij} = \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx$, logo

$$\int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) K^{(z)}(z) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \right] dx = \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} K^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) K^{(y)}(y) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right] dx = \\
& = K^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial z} dx \right] = K^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) T(\mathbf{x}, t) dx \right] = \\
& = K^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx \right] = \\
& = K^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx \right].
\end{aligned}$$

Como $F_{ij} = \int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx$, então

$$\int_{x_0}^{x_1} K^{(x)}(x) K^{(y)}(y) \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right] dx = \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} K^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{x_0}^{x_1} d^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) T(\mathbf{x}, t) dx = \int_{x_0}^{x_1} d^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_0}^1 \sum_{j=1}^{\infty} d^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_0}^1 d^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \int_{x_0}^1 d^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx.
\end{aligned}$$

Seja $C_{ij} = \int_{x_0}^1 d^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx$, logo,

$$\int_{x_0}^1 d^{(x)}(x) \Psi_i^{(x)}(x) T(\mathbf{x}, t) dx = \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}
[d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z)] \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) T(\mathbf{x}, t) dx &= [d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z)] \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx = \\
&= [d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z)] \int_{x_0}^1 \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx = [d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z)] \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx.
\end{aligned}$$

Seja $D_{ij} = \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx$, então

$$[d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z)] \int_{x_0}^1 \Psi_i^{(x)}(x) T(\mathbf{x}, t) dx = \sum_{j=1}^{\infty} [d^{(y)}(y) + d^{(z)}(z)] D_{ij} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^1 d^*(\mathbf{x}) \Psi_i^{(x)}(x) T(\mathbf{x}, t) dx &= \int_{x_0}^1 d^*(\mathbf{x}) \Psi_i^{(x)}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx = \\
&= \int_{x_0}^1 \sum_{j=1}^{\infty} d^*(\mathbf{x}) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \int_{x_0}^1 d^*(\mathbf{x}) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx.
\end{aligned}$$

Seja $E_{ij}(y, z) = \int_{x_0}^1 d^*(\mathbf{x}) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx$, logo

$$\int_{x_0}^1 d^*(\mathbf{x}) \Psi_i^{(x)}(x) T(\mathbf{x}, t) dx = \sum_{j=1}^{\infty} E_{ij}(y, z) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \quad (\text{A.10})$$

Como $L_T = -\nabla \cdot [K_T(\mathbf{x}, T) \nabla(\)]$, então $L_T T(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot [K_T(\mathbf{x}, T) \nabla T(\mathbf{x}, t)]$.

Logo,

$$L_T T(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[K_T(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[K_T(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[K_T(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right].$$

E assim,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) L_T T(\mathbf{x}, t) dx &= - \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[K_T(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right] dx - \\ &- \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[K_T(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \right] dx - \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial z} \left[K_T(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right] dx. \end{aligned}$$

Como $T(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)$, então

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) L_T T(\mathbf{x}, t) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ -\Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[K_T(\mathbf{x}, T) \frac{\partial \Psi_j^{(x)}(x) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial x} \right] \right\} dx - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[K_T(\mathbf{x}, T) \Psi_j^{(x)}(x) \frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial y} \right] dx - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial z} \left[K_T(\mathbf{x}, T) \Psi_j^{(x)}(x) \frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial z} \right] dx = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} - \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[K_T(\mathbf{x}, T) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \frac{\partial \Psi_j^{(x)}(x)}{\partial x} \right] dx - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{x_0}^{x_1} K_T(\mathbf{x}, T) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) \frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial y} dx \right] - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_{x_0}^{x_1} K_T(\mathbf{x}, T) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) \frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial z} dx \right] = \sum_{j=1}^{\infty} - \int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[K_T(\mathbf{x}, T) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \frac{\partial \Psi_j^{(x)}(x)}{\partial x} \right] dx - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial y} \int_{x_0}^{x_1} K_T(\mathbf{x}, T) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx \right] - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial z} \int_{x_0}^{x_1} K_T(\mathbf{x}, T) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (A.11)$$

Utilizando integração por partes na equação (A.11) obtém-se,

$$\int_{x_0}^{x_1} \Psi_i^{(x)}(x) L_T T(\mathbf{x}, t) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \left[-\Psi_i^{(x)}(x) K_T(\mathbf{x}, T) \frac{d\Psi_j^{(x)}(x)}{dx} \right]_{x_0}^{x_1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \int_0^1 \left[K_T(\mathbf{x}, T) \frac{d\Psi_j^{(x)}(x)}{dx} \cdot \frac{d\Psi_i^{(x)}(x)}{dx} \right] dx - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial y} \int_0^1 K_T(\mathbf{x}, T) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx \right] - \\
& - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial z} \int_0^1 K_T(\mathbf{x}, T) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx \right].
\end{aligned}$$

Sejam,

$$K_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) = \left[-\Psi_i^{(x)}(x) K_T(\mathbf{x}, T) \frac{d\Psi_j^{(x)}(x)}{dx} \right]_{x_0}^{x_1};$$

$$B_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) = \int_0^1 \left[K_T(\mathbf{x}, T) \frac{d\Psi_j^{(x)}(x)}{dx} \cdot \frac{d\Psi_i^{(x)}(x)}{dx} \right] dx;$$

$$R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) = \int_0^1 K_T(\mathbf{x}, T) \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_j^{(x)}(x) dx,$$

sendo que $\tilde{T}_{\infty}^{(x)}$ é o termo dependente da temperatura, transformado em relação ao eixo x .

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Psi_i^{(x)}(x) L_T T(x, t) dx &= \sum_{j=1}^{\infty} [K_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) + B_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)})] \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) + \\
&- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial y} \right] - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial z} \right]. \quad (A.12)
\end{aligned}$$

Na sequência, são apresentadas as resoluções das integrais envolvidas na equação (2.23) referentes ao eixo y .

Nesta etapa, utilizaremos o par transformada-inversa dado pelas equações (2.20a,b).

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 A_{ij}(y, z) w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy &= \int_0^1 A_{ij}(y, z) w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dy = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \int_0^1 A_{ij}(y, z) w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy.
\end{aligned}$$

Seja $A_{ijmn}(z) = \int_{y_0}^{y_1} A_{ij}(y, z) w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy$, logo

$$\int_{y_0}^{y_1} A_{ij}(y, z) w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} A_{ijmn}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \quad (A.13)$$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) dy &= \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) dy = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy. \end{aligned}$$

Seja $H_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy$, então

$$\int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) \quad (A.14)$$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} B_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy &= \int_{y_0}^{y_1} B_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dy = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \int_{y_0}^{y_1} B_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy. \end{aligned}$$

Seja $B_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) = \int_{y_0}^{y_1} B_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy$, assim

$$\int_{y_0}^{y_1} B_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} B_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \quad (A.15)$$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} k_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy &= \int_{y_0}^{y_1} k_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dy = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \int_{y_0}^{y_1} k_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy. \end{aligned}$$

Seja $k_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) = \int_{y_0}^{y_1} k_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy$, logo

$$\int_{y_0}^{y_1} k_{ij}(y, z, \tilde{\mathbf{T}}_\infty^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} k_{ijmn}(z, \tilde{\mathbf{T}}_\infty^{(xy)}) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \quad (\text{A.16})$$

$$\int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy = \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy.$$

Seja $C_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy$, então

$$\int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy &= \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dy = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy. \end{aligned}$$

Como $H_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy$, assim

$$\int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \quad (\text{A.18})$$

$$\int_{y_0}^{y_1} w^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) dy = \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} d^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) dy &= \int_{y_0}^{y_1} d^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) dy = \\ &= \int_{y_0}^{y_1} d^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) dy. \end{aligned}$$

Seja $O_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} d^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy$, logo

$$\int_{y_0}^{y_1} d^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} O_{mn} \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) \quad (\text{A.20})$$

Como, $L^{(y)} = \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \right]$ com $y_0 \leq y \leq y_1$, então

$$L^{(y)} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) = \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial y} \right].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) L^{(y)} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy &= \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t)}{\partial y} \right] dy = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t)}{\partial y} \right] dy = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[K^{(y)}(y) \frac{\partial \Psi_n^{(y)}(y)}{\partial y} \right] dy. \end{aligned}$$

Utilizando integração por partes na equação anterior, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) L^{(y)} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \Psi_m^{(y)}(y) K^{(y)}(y) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \Big|_{y_0}^{y_1} - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \int_{y_0}^{y_1} \left[K^{(y)}(y) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} \right] dy. \end{aligned}$$

Sejam,

$$P_{mn} = K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \Big|_{y_0}^{y_1},$$

$$Q_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} dy.$$

Logo,

$$\int_{y_0}^{y_1} \left\{ \Psi_m^{(y)}(y) L^{(y)} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) - \delta_{ij} \tilde{T}_i^{(x)}(y, z, t) L^{(y)} \Psi_m^{(y)}(y) \right\} dy = \sum_{n=1}^{\infty} [P_{mn} - Q_{mn}] (1 - \delta_{ij}) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \quad (A.21)$$

$$\int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) L^{(z)} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy = L^{(z)} \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy =$$

$$= L^{(z)} \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dy = L^{(z)} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) dy.$$

Como, $H_{mn} = \int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy$, então

$$\int_{y_0}^{y_1} K^{(y)}(y) \Psi_m^{(y)}(y) L^{(z)} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} L^{(z)} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \quad (A.22)$$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} E_{ij}(y, z) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy &= \int_{y_0}^{y_1} E_{ij}(y, z) \Psi_m^{(y)}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dy = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \int_{y_0}^{y_1} E_{ij}(y, z) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy. \end{aligned}$$

Seja $E_{ijmn}(z) = \int_{y_0}^{y_1} E_{ij}(y, z) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy$, assim

$$\int_{y_0}^{y_1} E_{ij}(y, z) \Psi_m^{(y)}(y) \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} E_{ijmn}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \quad (A.23)$$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] dy &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) \frac{\partial \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t)}{\partial y} \right] dy = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) \frac{\partial \Psi_n^{(y)}(y)}{\partial y} \right] dy. \end{aligned}$$

Usando integração por partes na equação (A.23), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] dy &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \Big|_{y_0}^{y_1} - \int_{y_0}^{y_1} R_{ij}(y, z, \tilde{T}_\infty^{(x)}) \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dz} dy \right]. \end{aligned}$$

Sejam,

$$W_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) = \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \right]_{y_0}^{y_1};$$

$$R_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) = \int_{y_0}^{y_1} R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \frac{d\Psi_n^{(y)}(y)}{dy} \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} dy.$$

Assim,

$$\int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] dy = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \{ W_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) - R_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \} \quad (A.24)$$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] dy &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \frac{\partial \Psi_n^{(y)}(y) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t)}{\partial z} \right] dy = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_n^{(y)}(y) \frac{\partial \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t)}{\partial z} \right] dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t)}{\partial z} \int_{y_0}^{y_1} R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy \right]. \end{aligned}$$

Seja, $S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) = \int_{y_0}^{y_1} R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_n^{(y)}(y) dy$, logo

$$\int_{y_0}^{y_1} \Psi_m^{(y)}(y) \frac{\partial}{\partial z} \left[R_{ij}(y, z, \tilde{T}_{\infty}^{(x)}) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_j^{(x)}(y, z, t) \right] dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) \right] \quad (A.25)$$

Agora, serão apresentados o desenvolvimentos das integrais referentes ao eixo z . Para isso, utilizaremos as equações (2.16a,b). Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} A_{ijmn}(z) r^s w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz &= \int_{z_0}^{z_1} A_{ijmn}(z) r^s w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} A_{ijmn}(z) r^s w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz. \end{aligned}$$

Seja $A_{ijmnpq} = \int_{z_0}^{z_1} A_{ijmn}(z) r^s w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz$, assim

$$\int_{z_0}^{z_1} A_{ijmn}(z) r^s w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} A_{ijmnpq} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \quad (A.26)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) dz &= \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{inq}^{(xyz)}(t) dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{inq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz. \end{aligned}$$

Seja $H_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz$, logo

$$\int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{in}^{(xy)}(z, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} H_{pq} \tilde{T}_{inq}^{(xyz)}(t) \quad (A.27)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} B_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz &= \int_{z_0}^{z_1} B_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} B_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz. \end{aligned}$$

Seja $B_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) = \int_{z_0}^{z_1} B_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz$, então

$$\int_{z_0}^{z_1} B_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} B_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \quad (A.28)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} k_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz &= \int_{z_0}^{z_1} k_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} k_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz. \end{aligned}$$

Seja $k_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) = \int_{z_0}^{z_1} k_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz$, assim

$$\int_{z_0}^{z_1} k_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} k_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \quad (A.29)$$

$$\int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz = \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz.$$

Seja $C_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz$, logo

$$\int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} C_{pq} \tilde{T}_{jmq}^{(xyz)}(t) \quad (A.30)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz &= \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{jmq}^{(xyz)}(t) dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jmq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz . \end{aligned}$$

Como $H_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz$, portanto

$$\int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} H_{pq} \tilde{T}_{jmq}^{(xyz)}(t) \quad (A.31)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) dz &= \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{imq}^{(xyz)}(t) dz = \\ &= \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{imq}^{(xyz)}(t) dz . \end{aligned}$$

Como $H_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz$, assim

$$\int_{z_0}^{z_1} r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{im}^{(xy)}(x_3, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} H_{pq} \tilde{T}_{imq}^{(xyz)}(t) \quad (A.32)$$

$$\int_{z_0}^{z_1} r^s w^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) dz = \tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t) \quad (A.33)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} r^s d^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{im}^{(xyq)}(z, t) dz &= \int_{z_0}^{z_1} r^s d^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{imq}^{(xyz)}(t) dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{imq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} r^s d^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz . \end{aligned}$$

Seja $J_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} r^s d^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz$, então

$$\int_{z_0}^{z_1} r^s d^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{im}^{(xy)}(z, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} J_{pq} \tilde{T}_{imq}^{(xyz)}(t) \quad (A.34)$$

Como, $L^{(z)} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \right]$ com $z_0 \leq z \leq z_1$, então

$$L^{(z)} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t)}{\partial z} \right].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) L^{(z)} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz &= \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t)}{\partial z} \right] dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t)}{\partial z} \right] dz = \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[K^{(z)}(z) \frac{\partial \Psi_q^{(z)}(z)}{\partial z} \right] dz. \end{aligned}$$

Usando integração por partes na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) L^{(z)} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \left[r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \Big|_{z_0}^{z_1} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} \left[K^{(z)}(z) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \frac{d[r^s \Psi_p^{(z)}(z)]}{dz} \right] dz. \right. \end{aligned}$$

Sejam,

$$\alpha_{pq} = \left[r^s K^{(z)}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \right]_{z_0}^{z_1};$$

$$\omega_{pq} = \int_{z_0}^{z_1} K^{(z)}(z) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \frac{d[r^s \Psi_p^{(z)}(z)]}{dz} dz.$$

Logo,

$$\int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) L^{(z)} \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} (1 - \delta_{ij} \delta_{mn}) [\alpha_{pq} - \omega_{pq}] \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \quad (A.35)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} r^s E_{ijmn}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz &= \int_{z_0}^{z_1} r^s E_{ijmn}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} r^s E_{ijmn}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz . \end{aligned}$$

Seja $E_{ijmnpq} = \int_{z_0}^{z_1} r^s E_{ijmn}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz$. Com isso,

$$\int_{z_0}^{z_1} r^s E_{ijmn}(z) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} E_{ijmnpq} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \quad (A.36)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} W_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz &= \int_{z_0}^{z_1} W_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} W_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz . \end{aligned}$$

Seja $W_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) = \int_{z_0}^{z_1} W_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz$, assim

$$\int_{z_0}^{z_1} W_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} W_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \quad (A.37)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} R_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz &= \int_{z_0}^{z_1} R_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} R_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz . \end{aligned}$$

Seja $R_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) = \int_{z_0}^{z_1} R_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \Psi_q^{(z)}(z) dz$, então

$$\int_{z_0}^{z_1} R_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) r^s \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t) dz = \sum_{q=1}^{\infty} R_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \quad (A.38)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{\partial \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t)}{\partial z} \right] dz &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{\partial \Psi_q^{(z)}(z) \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t)}{\partial z} \right] dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{\partial \Psi_q^{(z)}(z)}{\partial z} \right] dz. \end{aligned}$$

Utilizando integração por partes na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{\partial \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t)}{\partial z} \right] dz &= \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \left[r^s \Psi_p^{(z)}(z) S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \frac{d[r^s \Psi_p^{(z)}(z)]}{dz} dz \right]. \end{aligned}$$

Sejam,

$$S_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) = \left[r^s \Psi_p^{(z)}(z) S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \right]_{z_0}^{z_1};$$

$$V_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) = \int_{z_0}^{z_1} S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{d\Psi_q^{(z)}(z)}{dz} \frac{d[r^s \Psi_p^{(z)}(z)]}{dz} dz.$$

Assim,

$$\int_{z_0}^{z_1} r^s \Psi_p^{(z)}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[S_{ijmn}(z, \tilde{T}_{\infty}^{(xy)}) \frac{\partial \tilde{T}_{jn}^{(xy)}(z, t)}{\partial z} \right] dz = \sum_{q=1}^{\infty} [S_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)}) - V_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}^{(xyz)})] \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t) \quad (A.39)$$

Problema de Sturm-Liouville

Segundo Zayed (1996), os núcleos de muitas transformações integrais são soluções das equações diferenciais de Sturm-Liouville. Visto que a teoria espectral dos problemas de valores de contorno de Sturm-Liouville está muito bem desenvolvida, é natural usá-los para estudar muitas transformações de funções de um modo unificado. Chama-se de par de Sturm-Liouville, a transformada e sua forma inversa.

Os problemas de Sturm-Liouville (Honig, 1978) aparecem naturalmente quando se aplica o método de separação de variáveis ao estudo de certas equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem.

Considere o operador diferencial linear de segunda ordem,

$$L_{\lambda}[y] \equiv -(p(x)y')' + q(x)y - \lambda r(x)y, \quad a \leq x \leq b \quad (\text{B.1})$$

onde $p \in C^{(1)}([a, b])$, $r \in C([a, b])$, $q \in C([a, b], \mathbb{R})$ com $p(x), r(x) > 0$ para $x \in [a, b]$ e sujeito às condições de contorno dadas por,

$$F_1[y] \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a), \quad (\text{B.2})$$

$$F_2[y] \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b), \quad (\text{B.3})$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$, com $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ e $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

O problema de Sturm-Liouville consiste em achar uma função $y(x)$ solução do sistema

$$L_\lambda[y](x) = f(x) \quad \text{para } x \in [a, b], \quad (\text{B.4})$$

$$F_1[y] = 0, F_2[y] = 0. \quad (\text{B.5})$$

Os exemplos mais comuns de condições de contorno são

$$y(a) = y(b) = 0 \quad \text{e} \quad y'(a) = y'(b) = 0,$$

ou combinações lineares destas.

Diz-se que λ é um autovalor do sistema (B.4) com respeito as equações (B.5) ou do problema de Sturm-Liouville se a equação homogênea

$$L_\lambda[y] = 0, \quad (\text{B.6})$$

isto é, $L_0[y] = \lambda r(x)y$ ou ainda,

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y$$

tem uma solução $y(x) \neq 0$ que satisfaz as condições de contorno (B.5). A solução $y(x)$ chama-se, então, autofunção (correspondente ao autovalor λ).

Seja $L[y] = -(p(x)y')' + q(x)y$ em $[a, b]$. Dados $u, v \in C^{(2)}([a, b])$, então vale a identidade de Lagrange

$$\int_a^b (\overline{v}L[u] - u\overline{L[v]})dx = M[u, v](b) - M[u, v](a), \quad (\text{B.7})$$

onde $M[u, v](x) = -p(x)[u'(v)\overline{v(x)} - u(x)\overline{v'(x)}]$.

A demonstração desta identidade encontra-se em Honig, (1978).

Suponha-se que $y_1, y_2 \in C^{(2)}([a, b])$ satisfaçam as condições de contorno (B.5), então

$$M[y_1, y_2](a) = M[y_1, y_2](b) = 0,$$

assim, para o operador diferencial $L[y]$, tem-se,

$$\int_a^b (\bar{y}_1 L[y_2] - y_2 \overline{L[y_1]}) dx = 0, \quad (\text{B.8})$$

ou seja, a identidade de Lagrange se reduzirá a zero.

O produto interno (u, v) de duas funções u e v no intervalo $[a, b]$ é dado por:

$$(u, v) = \int_a^b u(x) \overline{v(x)} dx. \quad (\text{B.9})$$

E assim, a equação (B.8) pode ser rescrita como

$$(\bar{y}_1, L[y_2]) - (y_2, \overline{L[y_1]}) = 0. \quad (\text{B.10})$$

Segue algumas implicações da equação (B.10) para o problema de valores de contorno de Sturm-Liouville.

1- Todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville são reais.

2- Autofunções do problema de Sturm-Liouville correspondentes a autovalores distintos são ortogonais relativamente a r , isto é, se

$$L[y_1] = \lambda r(x)y_1 \text{ e } L[y_2] = \mu r(x)y_2, \quad (\text{B.11})$$

com $\lambda \neq \mu$, então

$$\int_a^b r(x)y_1(x) \overline{y_2(x)} dx = 0. \quad (\text{B.12})$$

3- Os autovalores do problema de Sturm-Liouville são todos simples, isto é, a cada autovalor corresponde somente uma autofunção linearmente independente. Também, os autovalores formam um conjunto enumerável e $\lambda_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

A demonstração dos três resultados anteriores, encontram-se em Honig (1978).

Segundo Aparecido (1986), associado ao autovalor λ_n está uma autofunção correspondente y_n , determinada a menos de uma constante multiplicativa. Frequentemente, é conveniente escolher a constante arbitrária que multiplica cada autofunção de modo a satisfazer a condição

$$\int_a^b r(x) y_n^2(x) dx = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B.13})$$

A equação (B.13) é denominada condição de normalização e diz-se que as autofunções que satisfazem esta condição são normalizadas. Neste caso, diz-se que as autofunções formam um conjunto ortonormal (em relação à função peso $r(x)$), posto que elas satisfazem automaticamente a relação de ortogonalidade (B.12). Às vezes, é útil combinar as equações (B.11) e (B.13) em uma única equação. Com isto, introduz-se o símbolo δ_{mn} , conhecido como delta de Kronecker e definido por

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n, \\ 1 & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

E então, utiliza-se o delta de Kronecker para escrever as equações (B.12) e (B.13) na forma

$$\int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = \delta_{mn}. \quad (\text{B.15})$$

Suponha-se que dada uma função $f(x)$, satisfazendo as condições adequadas, possa ser expandida em uma série infinita de autofunções do problema de Sturm-Liouville. Assim,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad (\text{B.16})$$

onde as $y_n(x)$ satisfazem as equações (B.5) e (B.6) e também a condição de ortogonalidade (B.15). Para obter os coeficientes c_n , multiplica-se a equação (B.16) por $r(x)y_m(x)$ e integra-se sobre o domínio $[a,b]$, Considerando-se que a série possa ser integrada termo a termo, obtém-se

$$\int_a^b r(x) f(x) y_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn}. \quad (\text{B.17})$$

Logo, com a definição do delta de Kronecker, tem-se,

$$c_m = \int_a^b r(x) f(x) y_m(x) dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{B.18})$$

E com isso, determinou-se formalmente os coeficientes envolvidos na série (B.16).

Problema de autovalor em coordenadas cartesianas

Neste Apêndice encontra-se a resolução dos problemas de autovalores apresentados no Capítulo 4.

Os problemas auxiliares de autovalores e suas condições de contorno para os eixos x , y e z são dados respectivamente por

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_i^{(x)}(x)}{dx^2} + (\mu_i^{(x)})^2 \Psi_i^{(x)}(x) = 0, \quad 0 < x < l_x; \quad (C.1)$$

$$\left. \frac{d\Psi_i^{(x)}(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad (C.2)$$

$$\Psi_i^{(x)}(x = l_x) = 0; \quad (C.3)$$

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_m^{(y)}(y)}{dy^2} + (\mu_m^{(y)})^2 \Psi_m^{(y)}(y) = 0, \quad 0 < y < l_y; \quad (C.4)$$

$$\left. \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad (C.5)$$

$$\Psi_m^{(y)}(y = l_y) = 0; \quad (C.6)$$

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_p^{(z)}(z)}{dz^2} + (\mu_p^{(z)})^2 \Psi_p^{(z)}(z) = 0, \quad 0 < z < l_z; \quad (C.7)$$

$$\left. \frac{d\Psi_p^{(z)}(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad (C.8)$$

$$\Psi_p^{(z)}(z = l_z) = 0; \quad (C.9)$$

Neste apêndice desenvolveu-se somente a resolução do problema de autovalor no eixo x, uma vez que a resolução dos problemas para os eixos y e z são idênticas à do eixo x.

A equação (C.1) pode ser escrita da seguinte forma,

$$\frac{d^2 \Psi_i^{(x)}(x)}{dx^2} + (\gamma_i^{(x)})^2 \Psi_i^{(x)}(x) = 0, \quad \gamma_i^{(x)} = \frac{\mu_i^{(x)}}{a^{1/6}}, \quad 0 < x < l_x; \quad (C.10)$$

O problema (C.10) é uma equação homogênea com coeficientes constantes e suponhamos que a solução seja dada por

$$\Psi_i^{(x)}(x) = e^{\lambda x},$$

e então, a equação característica do problema (C.1) é

$$\lambda^2 + (\gamma_i^{(x)})^2 = 0. \quad (C.10a)$$

A solução da equação (C.10) é um par de raízes complexas conjugadas não repetidas, a saber,

$$\lambda = \pm \gamma_i^{(x)} i,$$

e assim, a solução do problema (C.1) é dada em termos das funções seno e cosseno, ou seja,

$$\Psi_i^{(x)}(x) = e^{ax} (A \sin bx + B \cos bx). \quad (C.11)$$



Como $a = 0$ e $b = \pm \gamma_i^{(x)}$, pode-se reescrever a equação (C.11), obtendo

$$\Psi_i^{(x)}(x) = (A \sin \gamma_i^{(x)} x + B \cos \gamma_i^{(x)} x). \quad (C.12)$$

Utiliza-se então as condições de contorno (C.2) e (C.3) na equação (C.12), e obtêm

$$\Psi_i^{(x)}(x) = B_i \cos \gamma_i^{(x)} x,$$

onde

$$\gamma_i^{(x)} = \frac{(2i-1)}{2l_x} \pi, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

e

$$\|\Psi_i^{(x)}(x)\|^2 = 1 \Rightarrow (B_i^{(x)})^2 \int_0^{l_x} \cos^2(\gamma_i^{(x)} x) dx = 1 \Rightarrow (B_i^{(x)})^2 \left[\frac{l_x}{2} + \frac{\sin 2\gamma_i^{(x)} l_x}{4\gamma_i^{(x)}} \right] = 1 \Rightarrow B_i^{(x)} = \sqrt{\frac{2}{l_x}},$$

uma vez que $\sin 2\gamma_i^{(x)} l_x = 0$.

Portanto, as soluções dos problemas (C.1), (C.4) e (C.7) para os três eixos espaciais são descritas por:

$$\Psi_i^{(x)}(x) = B_i^{(x)} \cos(\gamma_i^{(x)} x), B_i^{(x)} = \sqrt{\frac{2}{l_x}}, \mu_i^{(x)} = \frac{(2i-1)\pi}{2l_x} a^{1/6}, \gamma_i^{(x)} = \frac{\mu_i^{(x)}}{a^{1/6}}, i = 1, 2, \dots, \infty; \quad (C.13)$$

$$\Psi_m^{(y)}(y) = B_m^{(y)} \cos(\gamma_m^{(y)} y), B_m^{(y)} = \sqrt{\frac{2}{l_y}}, \mu_m^{(y)} = \frac{(2m-1)\pi}{2l_y} a^{1/6}, \gamma_m^{(y)} = \frac{\mu_m^{(y)}}{a^{1/6}}, m = 1, 2, \dots, \infty; \quad (C.14)$$

$$\Psi_p^{(z)}(z) = B_p^{(z)} \cos(\gamma_p^{(z)} z), B_p^{(z)} = \sqrt{\frac{2}{l_z}}, \mu_p^{(z)} = \frac{(2p-1)\pi}{2l_z} a^{1/6}, \gamma_p^{(z)} = \frac{\mu_p^{(z)}}{a^{1/6}}, p = 1, 2, \dots, \infty. \quad (C.15)$$

Problema de autovalor em coordenadas cilíndricas

Neste Apêndice encontra-se a resolução dos problemas de autovalores apresentados no Capítulo 5.

Os três problemas de autovalores e suas condições de contorno em coordenadas cilíndricas, para os eixos z , θ e r são respectivamente:

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_i^{(z)}(z)}{dz^2} + (\mu_i^{(z)})^2 \Psi_i^{(z)}(z) = 0, \quad 0 < z < l_z; \quad (D.1)$$

$$\left. \frac{d\Psi_i^{(z)}(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0; \quad (D.2)$$

$$\Psi_i^{(z)}(z = l_z) = 0; \quad (D.3)$$

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_m^{(\theta)}(\theta)}{d\theta^2} + (\mu_m^{(\theta)})^2 \Psi_m^{(\theta)}(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \theta_0 = \frac{\pi}{2}; \quad (D.4)$$

$$\left. \frac{d\Psi_m^{(\theta)}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0; \quad (D.5)$$

$$\Psi_m^{(\theta)}(\theta = \theta_0) = 0; \quad (D.6)$$

$$a^{1/3} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Psi_p^{(r)}(r)}{dr} \right) \right] + \left((\mu_p^{(r)})^2 - \frac{(\mu_m^{(\theta)})^2}{r^2} \right) \Psi_p^{(r)}(r) = 0, \quad 0 < r < r_1; \quad (D.7)$$

$$\left. \frac{d\Psi_p^{(r)}(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0; \quad (D.8)$$

$$\Psi_p^{(r)}(r = r_1) = 0; \quad (D.9)$$

Os problemas (D.1) e (D.4) são equações homogêneas com coeficientes constantes, idênticas ao problema (C.1), analisado no apêndice C. Assim suas soluções são também expressas em termos das funções seno e cosseno.

Portanto, as soluções dos problemas (D.1) e (D.4) para os eixos z e θ , respectivamente são dadas por

$$\Psi_i^{(z)}(z) = B_i^{(z)} \cos(\gamma_i^{(z)} z), \quad B_i^{(z)} = \sqrt{\frac{2}{l_z}}, \quad \mu_i^{(z)} = \frac{(2i-1)\pi}{2l_z} a^{1/6}, \quad \gamma_i^{(z)} = \frac{\mu_i^{(z)}}{a^{1/6}}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty; \quad (D.10)$$

$$\Psi_m^{(\theta)}(\theta) = B_m^{(\theta)} \cos(\gamma_m^{(\theta)} \theta), \quad B_m^{(\theta)} = \sqrt{\frac{2}{\theta_0}}, \quad \mu_m^{(\theta)} = \frac{(2m-1)\pi}{2\theta_0} a^{1/6}, \quad \gamma_m^{(\theta)} = \frac{\mu_m^{(\theta)}}{a^{1/6}}, \quad m = 1, 2, \dots, \infty; \quad (D.11)$$

A equação (D.7) pode ser escrita da seguinte forma,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Psi_p^{(r)}(r)}{dr} \right) + \left((\gamma_p^{(r)})^2 - \frac{(\gamma_m^{(\theta)})^2}{r^2} \right) \Psi_p^{(r)}(r) = 0, \quad \gamma_p^{(r)} = \frac{\mu_p^{(r)}}{a^{1/6}} \text{ e } \gamma_m^{(\theta)} = \frac{\mu_m^{(\theta)}}{a^{1/6}}, \quad 0 < r < r_1; \quad (D.12)$$

sujeita às condições de contorno dadas pelas equações (D.8) e (D.9).

O problema (D.12) é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes variáveis, denominada equação diferencial de Bessel de ordem $\gamma_m^{(\theta)}$, e suas soluções, $J_{\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r)$ e $Y_{\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r)$, são as funções de Bessel de ordem $\gamma_m^{(\theta)}$ de primeiro e segundo tipo, respectivamente, que são obtidas fazendo uso de séries de potências (Arpaci, 1966).

A solução é

$$\Psi_p^{(r)}(r) = B J_{\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r) + D Y_{\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r). \quad (D.12a)$$

Na Equação (D.12a),

$$J_{\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\gamma_p^{(r)} r / 2)^{2k + \gamma_m^{(\theta)}}}{k! \Gamma(k + \gamma_m^{(\theta)} + 1)} \quad (D.13)$$

e

$$Y_{\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r) = \frac{(\cos \gamma_m^{(\theta)} \pi) J_{\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r) - J_{-\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r)}{\sin \gamma_m^{(\theta)} \pi}, \quad (D.14)$$

onde

$$J_{-\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\gamma_p^{(r)} r / 2)^{2k - \gamma_m^{(\theta)}}}{k! \Gamma(k - \gamma_m^{(\theta)} + 1)}. \quad (D.15)$$

A função presente no denominador das Equações (D.13) e (D.15), é conhecida como função Gamma, e é definida como

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!, \quad \Gamma(1) = 0! = 1$$

para inteiros, e na forma

$$\Gamma(\gamma_m^{(\theta)})\Gamma(\gamma_m^{(\theta)} - 1) = \pi / \sin \pi \gamma_m^{(\theta)}, \quad \Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$$

para números fracionários.

Se $\gamma_m^{(\theta)}$ não é um inteiro, $J_{\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r)$ e $J_{-\gamma_m^{(\theta)}}(\gamma_p^{(r)} r)$ são soluções independentes da Equação (D.7), mas se $\gamma_m^{(\theta)}$ é um inteiro, n , então

$$J_n(\gamma_p^{(r)} r) = (-1)^n J_{-n}(\gamma_p^{(r)} r). \quad (D.16)$$

Para obter uma segunda solução da Equação (D.7) a qual é válida para todos os valores de $\gamma_m^{(0)}$, a Equação (D.14) é então definida como

$$\lim_{\gamma_m^{(0)} \rightarrow n} Y_{\gamma_m^{(0)}}(\gamma_p^{(r)} r) \rightarrow Y_n(\gamma_p^{(r)} r),$$

onde

$$\begin{aligned} \pi Y_n(\gamma_p^{(r)} r) = & 2 \left(\ln \frac{\gamma_p^{(r)} r}{2} + \eta \right) J_n(\gamma_p^{(r)} r) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{\gamma_p^{(r)} r}{2} \right)^{2k-n} \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [\varphi(k) + \varphi(k+n)] \frac{(\gamma_p^{(r)} r/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}, \end{aligned} \quad (D.15)$$

no qual

$$\varphi(k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}, \quad \varphi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \eta = 0,5772\dots$$

As condições de contorno (D.8) e (D.9) quando aplicadas na equação (D.12) obtém-se, (Ozisik, 1980):

$$\Psi_p^{(r)}(r) = B_{pm}^{(r)} J_{\gamma_m^{(0)}}(\gamma_p^{(r)} r)$$

e

$$B_{pm}^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{r_1} [r J_{\gamma_m^{(0)}}^2(\gamma_p^{(r)} r)] dr}}, \quad \text{com } \gamma_p^{(r)} = \frac{\mu_p^{(r)}}{a^{1/6}}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Funções de classe C^k

Os conceitos aqui apresentados podem ser obtidos em (Lima, 1970 e 1976; Aparecido, 1994).

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$.

Definição 1: Uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se contínua no ponto $\mathbf{a} \in X$ quando é possível tornar $f(\mathbf{x})$, arbitrariamente próximo de $f(\mathbf{a})$ desde que se tome $\mathbf{x}$ suficientemente próximo de $\mathbf{a}$.

Definição 2: Diz-se que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação de classe C^k ou k vezes continuamente diferenciável, e escreve-se $f(\mathbf{x}) \in C^k$, quando todas as derivadas parciais

$$\frac{\partial^{(\alpha)} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{(m)} \partial x_2^{(p)} \dots \partial x_n^{(q)}}; \quad m = 0, 1, \dots, \alpha; \quad p = 0, 1, \dots, \alpha; \quad q = 0, 1, \dots, \alpha; \quad m + p + q = \alpha \leq k$$

existem e são contínuas em X . Então, C^0 indicará o conjunto das aplicações contínuas.

Definição 3: A classe das aplicações infinitamente diferenciáveis, C^∞ , é a interseção de todas as classes C^k ; isto é $C^\infty = C^0 \cap C^1 \cap C^2 \cap \dots$. Assim $f(\mathbf{x}) \in C^\infty$ se, e somente se, possuir derivadas de todas as ordens em cada ponto de X .

É claro que

$$C^\infty \subset \dots \subset C^k \subset C^{k-1} \subset \dots \subset C^1 \subset C^0.$$

Tabela A-1: Distribuição de temperatura adimensional no paralelepípedo

$K(T) = 0,932 - 0,110T + 0,370T^2$:- Fo = 0,02

Material: Paládio :- Largura de banda: 21

TEMPERATURA				
Posição			Número de Termos	
x	y	z	125	343
0,1	0,1	0,1	1,0054240	1,0087540
		0,3	1,0049630	1,0095060
		0,5	0,9863572	0,9900100
		0,7	0,8179834	0,8209227
		0,9	0,3302775	0,3313794
	0,3	0,3	1,0075160	1,0066580
		0,5	0,9890702	0,9871831
		0,7	0,8219995	0,8194392
		0,9	0,3328898	0,3315113
	0,5	0,5	0,9678116	0,9629649
		0,7	0,8059940	0,8007045
		0,9	0,3278384	0,3251764
	0,7	0,7	0,6697489	0,6749355
		0,9	0,2733619	0,2752437
	0,9	0,9	0,1125808	0,1162028
0,3	0,3	0,3	1,0068490	1,0063670
		0,5	0,9884920	0,9869825
		0,7	0,8219118	0,8196314
		0,9	0,3330892	0,3317951
	0,5	0,5	0,9673314	0,9628774
		0,7	0,8059615	0,8009659
		0,9	0,3280680	0,3255101
	0,7	0,7	0,6700574	0,6753937
		0,9	0,2736496	0,2756099
	0,9	0,9	0,1128005	0,1163745
0,5	0,5	0,5	0,9514530	0,9469050
		0,7	0,7929031	0,7878630
		0,9	0,3227394	0,3201668
	0,7	0,7	0,6593927	0,6647755
		0,9	0,2693999	0,2713114
	0,9	0,9	0,1110555	0,1146927
0,7	0,7	0,7	0,5648317	0,5695311
		0,9	0,2300003	0,2317388
	0,9	0,9	0,0948304	0,0980706
0,9	0,9	0,9	0,0402483	0,0418239

Tabela A-2: Distribuição de temperatura adimensional no paralelepípedo

$K(T) = 0,932 - 0,110T + 0,370T^2$:- $Fo = 0,18$

Material: Paládio :- Largura de banda: 21

TEMPERATURA				
Posição			Número de Termos	
x	y	z	125	343
0,1	0,1	0,1	0,5303405	0,5310303
		0,3	0,4777696	0,4784488
		0,5	0,3786642	0,3792470
		0,7	0,2433765	0,2437628
		0,9	0,0842133	0,0843942
	0,3	0,3	0,4308557	0,4319699
		0,5	0,3421153	0,3430482
		0,7	0,2202144	0,2208193
		0,9	0,0762423	0,0764919
	0,5	0,5	0,2725546	0,2734007
		0,7	0,1758778	0,1764105
		0,9	0,0609322	0,0611759
	0,7	0,7	0,1138300	0,1140062
		0,9	0,0394812	0,0395740
	0,9	0,9	0,0136828	0,0136957
0,3	0,3	0,3	0,3913840	0,3924474
		0,5	0,3107352	0,3116168
		0,7	0,2000153	0,2005749
		0,9	0,0692303	0,0694885
	0,5	0,5	0,2475575	0,2483476
		0,7	0,1597118	0,1602329
		0,9	0,0553543	0,0555549
	0,7	0,7	0,1033950	0,1035455
		0,9	0,0358291	0,0359397
	0,9	0,9	0,0124522	0,0124491
0,5	0,5	0,5	0,1985850	0,1992723
		0,7	0,1281497	0,1285596
		0,9	0,0443679	0,0445802
	0,7	0,7	0,0828970	0,0830719
		0,9	0,0287818	0,0288345
	0,9	0,9	0,0099390	0,0099753
0,7	0,7	0,7	0,0538386	0,0539128
		0,9	0,0186199	0,0187121
	0,9	0,9	0,0065097	0,0064757
0,9	0,9	0,9	0,0021989	0,0022533

Tabela A-3: Distribuição de temperatura adimensional no paralelepípedo

$$K(T) = 0,932 - 0,110T + 0,370T^2 \quad \text{--:-} \quad Fo = 0,5$$

Material: Paládio --:- Largura de banda: 21

TEMPERATURA				
Posição			Número de Termos	
x	y	z	125	343
0,1	0,1	0,1	0,0601171	0,0601766
		0,3	0,0542556	0,0543141
		0,5	0,0430923	0,0431338
		0,7	0,0276975	0,0277249
		0,9	0,0095545	0,0095675
	0,3	0,3	0,0489630	0,0490118
		0,5	0,0388861	0,0389357
		0,7	0,0249915	0,0250208
		0,9	0,0086200	0,0086240
	0,5	0,5	0,0308814	0,0309136
		0,7	0,0198437	0,0198657
		0,9	0,0068433	0,0068562
	0,7	0,7	0,0127501	0,0127617
		0,9	0,0043961	0,0044017
	0,9	0,9	0,0015156	0,0015110
0,3	0,3	0,3	0,0441711	0,0442371
		0,5	0,0350805	0,0351095
		0,7	0,0225456	0,0225688
		0,9	0,0077765	0,0077996
	0,5	0,5	0,0278590	0,0278995
		0,7	0,0179018	0,0179239
		0,9	0,0061734	0,0061712
	0,7	0,7	0,0115022	0,0115133
		0,9	0,0039661	0,0039679
	0,9	0,9	0,0013671	0,0013807
0,5	0,5	0,5	0,0221101	0,0221300
		0,7	0,0142073	0,0142225
		0,9	0,0048997	0,0049127
	0,7	0,7	0,0091288	0,0091368
		0,9	0,0031473	0,0031523
	0,9	0,9	0,0010853	0,0010771
0,7	0,7	0,7	0,0058609	0,0058665
		0,9	0,0020212	0,0020233
	0,9	0,9	0,0006964	0,0006953
0,9	0,9	0,9	0,0002404	0,0002514

Tabela A-4: Distribuição de temperatura adimensional no setor de cilindro circular

Material: Aço inoxidável Aisi 304 -:- Largura de banda: 11

$K(T) = 0,756 + 0,489T$ -:- $Fo = 0,02$

TEMPERATURA			
Posição			Número de Termos
x	y	z	125
0,1	0,1570796	0,1	0,3400013
		0,3	0,3399773
		0,5	0,3335949
		0,7	0,2831478
		0,9	0,1199489
	0,3141593	0,3	0,3279757
		0,5	0,3218013
		0,7	0,2731433
		0,9	0,1157139
	0,5497787	0,5	0,2898039
		0,7	0,2459968
		0,9	0,1042210
	0,7068583	0,7	0,2202272
		0,9	0,0933090
	0,9424778	0,9	0,0725682
0,3	0,3141593	0,3	0,8446629
		0,5	0,8297120
		0,7	0,7089689
		0,9	0,3027194
	0,5497787	0,5	0,7746722
		0,7	0,6620381
		0,9	0,2826703
	0,7068583	0,7	0,6114221
		0,9	0,2610830
	0,9424778	0,9	0,2136142
0,5	0,5497787	0,5	0,9634232
		0,7	0,8268509
		0,9	0,3550241
	0,7068583	0,7	0,7978014
		0,9	0,3425160
	0,9424778	0,9	0,3032667
0,7	0,7068583	0,7	0,6924639
		0,9	0,2964295
	0,9424778	0,9	0,2791035
0,9	0,9424778	0,9	0,1017824

Tabela A-5: Distribuição de temperatura adimensional no setor de cilindro circular

Material: Aço inoxidável Aisi 304 -:- Largura de banda: 11

$K(T) = 0,756 + 0,489T$ -:- $Fo = 0,08$

TEMPERATURA			
Posição			Número de Termos
x	y	z	125
0,1	0,1570796	0,1	0,1645896
		0,3	0,1559304
		0,5	0,1337663
		0,7	0,0926790
		0,9	0,0334458
	0,3141593	0,3	0,1501758
		0,5	0,1288286
		0,7	0,0892572
		0,9	0,0322108
	0,5497787	0,5	0,1155500
		0,7	0,0800557
		0,9	0,0288898
0,3	0,7068583	0,7	0,0714218
		0,9	0,0257738
	0,9424778	0,9	0,0199339
	0,3141593	0,3	0,4051710
		0,5	0,3478995
		0,7	0,2412664
		0,9	0,0871293
	0,5497787	0,5	0,3132579
		0,7	0,2172108
		0,9	0,0784228
	0,7068583	0,7	0,1943926
		0,9	0,0701721
	0,9424778	0,9	0,0545371
0,5	0,5497787	0,5	0,3788815
		0,7	0,2627605
		0,9	0,0948851
	0,7068583	0,7	0,2365664
		0,9	0,0854050
	0,9424778	0,9	0,0669519
0,7	0,7068583	0,7	0,1745286
		0,9	0,0629388
	0,9424778	0,9	0,0498630
0,9	0,9424778	0,9	0,0167113

Tabela A-6: Distribuição de temperatura adimensional no setor de cilindro circular

Material: Aço inoxidável Aisi 304 -:- Largura de banda: 11

$K(T) = 0,756 + 0,489T$ -:- $Fo = 0,25$

TEMPERATURA			
Posição			Número de Termos
x	y	z	125
0,1	0,1570796	0,1	0,0166425
		0,3	0,0150680
		0,5	0,0120280
		0,7	0,0077674
		0,9	0,0026861
	0,3141593	0,3	0,0145089
		0,5	0,0115818
		0,7	0,0074792
		0,9	0,0025864
	0,5497787	0,5	0,0103829
		0,7	0,0067050
		0,9	0,0023187
	0,7068583	0,7	0,0059795
		0,9	0,0020678
	0,9424778	0,9	0,9000000
0,3	0,3141593	0,3	0,0375395
		0,5	0,0299647
		0,7	0,0193523
		0,9	0,0066906
	0,5497787	0,5	0,0268560
		0,7	0,0173426
		0,9	0,0059977
	0,7068583	0,7	0,0154613
		0,9	0,0053484
0,5	0,5497787	0,9	0,0041306
		0,5	0,0320715
		0,7	0,0207113
	0,7068583	0,9	0,0071619
		0,7	0,0184585
0,7	0,9424778	0,9	0,0063822
		0,7	0,0049290
	0,7068583	0,9	0,0130783
0,9	0,9424778	0,7	0,0045240
		0,9	0,0037543
0,9	0,9424778	0,9	0,0013195

Segue abaixo, as subrotinas fnc e fncj necessárias no cômputo do jacobiano da matriz do sistema não-linear, desenvolvidas no contexto do programa que simula difusão tridimensional não linear transiente.

!Modulo para cálculo das subrotinas FCN e FCNJ chamadas pelo IMSL

!Data: 27/11/2002

!Local: Ilha Solteira

!Programador: Odacir Almeida Neves

module CalculaJacobiano

implicit none

contains

!!

subroutine fcn(n_total,t,y,grad_y)

!subrotina para cálculo do gradiente da função dependente

!Data: 27/11/2002

!Local: Ilha Solteira

!Programador: Odacir Almeida Neves

use data_type

use constants

use DadosBasicos, only : nx, ny, nz, b, c, Lx, Ly, Lz

use DadosABijmnpq, only : Aijmnpq, Bijmnpq

use AutValsMod, only : AutValsMod_x, AutValsMod_y, AutValsMod_z

implicit none

integer(long), intent(in) :: n_total

integer(long) :: icona, jconta, i, j, m, n, p, q

integer(long) :: a1, b1, c1, d1, e1, f1, rstSoma, defSoma

real(double), intent(in) :: t

real(double) :: aux_t, aux, aux_root, soma_b, soma_c

real(double), save :: norma_antiga, norma_nova, norma_diferenca

real(double) :: Apqt, Bmns, Cijr

real(double) :: Lpqt, Gmns, Hijr

real(double) :: Dcfpq, Ebemn, Fadij

real(double) :: Mcfpq, Ibemn, Jadij

real(double) :: AutVal_ij_mais, AutVal_ij_menos

real(double) :: AutVal_mn_mais, AutVal_mn_menos

```
real(double) :: AutVal_pq_mais, AutVal_pq_menos
```

```
real(double) :: AutVal_ij_vezes
real(double) :: AutVal_mn_vezes
real(double) :: AutVal_pq_vezes
```

```
real(double) :: AutVal_ij_mais_a_mais, AutVal_ij_mais_a_menos
real(double) :: AutVal_ij_menos_a_mais, AutVal_ij_menos_a_menos
```

```
real(double) :: AutVal_mn_mais_b_mais, AutVal_mn_mais_b_menos
real(double) :: AutVal_mn_menos_b_mais, AutVal_mn_menos_b_menos
```

```
real(double) :: AutVal_pq_mais_c_mais, AutVal_pq_mais_c_menos
real(double) :: AutVal_pq_menos_c_mais, AutVal_pq_menos_c_menos
```

```
real(double) :: y2_rst_def_Soma
```

```
real(double), dimension(iEight) :: d, e, f, ii, jj, mm
```

```
real(double), dimension(nx*ny*nz), intent(in) :: y
real(double), dimension(nx*ny*nz), intent(out) :: grad_y
```

```
aux_t = t
aux = rEight/(Lx*Ly*Lz)
aux_root = dsqrt(aux)
```

```
!!!!!!!!!!!!!!
norma_antiga = norma_nova
```

```
Aijmnpq = rZero
```

```
ICONTA=0
```

```
do_i : DO I=iOne,nx
  do_m : DO M=iOne,ny
    do_p : do p = iOne, nz
      ICONTA=ICONTA + iOne
      JCONTA = iZero
      do_j : DO J=iOne,nx
        AutVal_ij_mais = AutValsMod_x(i) + AutValsMod_x(j)
        AutVal_ij_menos = AutValsMod_x(i) - AutValsMod_x(j)
        AutVal_ij_vezes = AutValsMod_x(i) * AutValsMod_x(j)
        do_n : DO N=iOne,ny
          AutVal_mn_mais = AutValsMod_y(m) + AutValsMod_y(n)
          AutVal_mn_menos = AutValsMod_y(m) - AutValsMod_y(n)
          AutVal_mn_vezes = AutValsMod_y(m) * AutValsMod_y(n)
          do_q : do q = iOne, nz
            JCONTA = JCONTA + iOne
            AutVal_pq_mais = AutValsMod_z(p) + AutValsMod_z(q)
            AutVal_pq_menos = AutValsMod_z(p) - AutValsMod_z(q)
            AutVal_pq_vezes = AutValsMod_z(p) * AutValsMod_z(q)

            soma_b = Rzero
            soma_c = rZero
            rstSoma = iZero

            do_a : do a1 = iOne, nx
```


!!!!!!!!!!!!!! Início dos if (b /= Zero)...

if_CHijr : if(b /= rZero) then

```
AutVal_ij_mais_a_mais = rOne/(AutValsMod_x(a1) + AutVal_ij_mais)
AutVal_ij_mais_a_menos = rOne/(AutValsMod_x(a1) - AutVal_ij_mais)
AutVal_ij_menos_a_mais = rOne/(AutValsMod_x(a1) + AutVal_ij_menos)
AutVal_ij_menos_a_menos = rOne/(AutValsMod_x(a1) - AutVal_ij_menos)
```

```
Cijr = (AutVal_ij_mais_a_mais + &
        AutVal_ij_mais_a_menos - &
        AutVal_ij_menos_a_mais - &
        AutVal_ij_menos_a_menos)/rFour
```

if(((i + j + a1)/iTwo)*iTwo /= (i + j + a1)) Cijr = -Cijr

```
Hijr = (-AutVal_ij_mais_a_mais - &
        AutVal_ij_mais_a_menos - &
        AutVal_ij_menos_a_mais - &
        AutVal_ij_menos_a_menos)/rFour
```

if(((i + j + a1)/iTwo)*iTwo /= (i + j + a1)) Hijr = -Hijr

end if if_CHijr

do_b : do b1 = iOne, ny

if_BGmns : if(b /= rZero) then

```
AutVal_mn_mais_b_mais = rOne/(AutValsMod_y(b1) + AutVal_mn_mais)
AutVal_mn_mais_b_menos = rOne/(AutValsMod_y(b1) - AutVal_mn_mais)
AutVal_mn_menos_b_mais = rOne/(AutValsMod_y(b1) + AutVal_mn_menos)
AutVal_mn_menos_b_menos = rOne/(AutValsMod_y(b1) - AutVal_mn_menos)
```

```
Bmns = (-AutVal_mn_mais_b_mais - &
        AutVal_mn_mais_b_menos - &
        AutVal_mn_menos_b_mais - &
        AutVal_mn_menos_b_menos)/rFour
```

if(((m + n + b1)/iTwo)*iTwo /= (m + n + b1)) Bmns = -Bmns

```
Gmns = (AutVal_mn_mais_b_mais + &
        AutVal_mn_mais_b_menos - &
        AutVal_mn_menos_b_mais - &
        AutVal_mn_menos_b_menos)/rFour
```

if(((m + n + b1)/iTwo)*iTwo /= (m + n + b1)) Gmns = -Gmns

end if if_BGmns

do_c : do c1 = iOne, nz
rstSoma = rstSoma + iOne

if_ALpqt : if(b /= rZero) then

```
AutVal_pq_mais_c_mais = rOne/(AutValsMod_z(c1) + AutVal_pq_mais)
AutVal_pq_mais_c_menos = rOne/(AutValsMod_z(c1) - AutVal_pq_mais)
AutVal_pq_menos_c_mais = rOne/(AutValsMod_z(c1) + AutVal_pq_menos)
AutVal_pq_menos_c_menos = rOne/(AutValsMod_z(c1) - AutVal_pq_menos)
```



```

Apqt = (AutVal_pq_mais_c_mais + &
        AutVal_pq_mais_c_menos - &
        AutVal_pq_menos_c_mais - &
        AutVal_pq_menos_c_menos)/rFour

if(((p + q + c1)/iTwo)*iTwo /= (p + q + c1)) Apqt = -Apqt

Lpqt = (-AutVal_pq_mais_c_mais - &
        AutVal_pq_mais_c_menos - &
        AutVal_pq_menos_c_mais - &
        AutVal_pq_menos_c_menos)/rFour

if(((p + q + c1)/iTwo)*iTwo /= (p + q + c1)) Lpqt = -Lpqt

soma_b = soma_b + &
        (AutVal_mn_vezes*Apqt*Bmns*Cijr + &
        AutVal_ij_vezes*Apqt*Gmns*Hijr + &
        AutVal_pq_vezes*Lpqt*Gmns*Cijr) * y(rstSoma)

end if if_ALpqt

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! Início do if (c /= Zero)...

if_FJadij : if(c /= rZero) then
                defSoma = iZero
                do_d : do d1 = iOne, nx

f(iOne) = rZero

if((a1 + d1 - i - j) == iZero) then
    f(iTwo) = Lx
else
    f(iTwo) = rZero
end if

if((a1 + d1 + i - j - iOne) == iZero) then
    f(iThree) = Lx
else
    f(iThree) = rZero
end if

if((a1 + d1 - i + j - iOne) == iZero) then
    f(iFour) = Lx
else
    f(iFour) = rZero
end if

if((a1 - d1 + i + j - iOne) == iZero) then
    f(iFive) = Lx
else
    f(iFive) = rZero
end if

if((a1 - d1 - i - j + iOne) == iZero) then
    f(iSix) = Lx
else
    f(iSix) = rZero
end if

if((a1 - d1 + i - j) == iZero) then

```

```

        f(iSeven) = Lx
    else
        f(iSeven) = rZero
    end if

    if((a1 - d1 - i + j) == iZero) then
        f(iEight) = Lx
    else
        f(iEight) = rZero
    end if

    Fadij = sum(f(:))/rEight

    if((a1 + d1 + i - j - iOne) == iZero) then
        jj(iOne) = Lx
    else
        jj(iOne) = rZero
    end if

    if((a1 + d1 - i + j - iOne) == iZero) then
        jj(iTwo) = Lx
    else
        jj(iTwo) = rZero
    end if

    jj(iThree) = rZero

    if((a1 + d1 - i - j) == iZero) then
        jj(iFour) = Lx
    else
        jj(iFour) = rZero
    end if

    if((a1 - d1 + i - j) == iZero) then
        jj(iFive) = Lx
    else
        jj(iFive) = rZero
    end if

    if((a1 - d1 - i + j) == iZero) then
        jj(iSix) = Lx
    else
        jj(iSix) = rZero
    end if

    if((a1 - d1 + i + j - iOne) == iZero) then
        jj(iSeven) = Lx
    else
        jj(iSeven) = rZero
    end if

    if((a1 - d1 - i - j + iOne) == iZero) then
        jj(iEight) = Lx
    else
        jj(iEight) = rZero
    end if

    Jadij = (jj(iOne) + jj(iTwo) + jj(iFive) + jj(iSix) - &

```


$$jj(iThree) - jj(iFour) - jj(iSeven) - jj(iEight))/rEight$$

$$do_e : do\ e1 = iOne, ny$$

```
if((b1 + e1 + m - n - iOne) == iZero) then
    e(iOne) = Ly
else
    e(iOne) = rZero
end if
```

```
if((b1 + e1 - m + n - iOne) == iZero) then
    e(iTwo) = Ly
else
    e(iTwo) = rZero
end if
```

$$e(iThree) = rZero$$

```
if((b1 + e1 - m - n) == iZero) then
    e(iFour) = Ly
else
    e(iFour) = rZero
end if
```

```
if((b1 - e1 + m - n) == iZero) then
    e(iFive) = Ly
else
    e(iFive) = rZero
end if
```

```
if((b1 - e1 - m + n) == iZero) then
    e(iSix) = Ly
else
    e(iSix) = rZero
end if
```

```
if((b1 - e1 + m + n - iOne) == iZero) then
    e(iSeven) = Ly
else
    e(iSeven) = rZero
end if
```

```
if((b1 - e1 - m - n + iOne) == iZero) then
    e(iEight) = Ly
else
    e(iEight) = rZero
end if
```

$$Ebemn = (e(iOne) + e(iTwo) + e(iFive) + e(iSix) - \& \\ e(iThree) - e(iFour) - e(iSeven) - e(iEight))/rEight$$

$$ii(iOne) = rZero$$

```
if((b1 + e1 - m - n) == iZero) then
    ii(iTwo) = Ly
else
    ii(iTwo) = rZero
```

```

end if

if((b1 + e1 + m - n - iOne) == iZero) then
    ii(iThree) = Ly
else
    ii(iThree) = rZero
end if

if((b1 + e1 - m + n - iOne) == iZero) then
    ii(iFour) = Ly
else
    ii(iFour) = rZero
end if

if((b1 - e1 + m + n - iOne) == iZero) then
    ii(iFive) = Ly
else
    ii(iFive) = rZero
end if

if((b1 - e1 - m - n + iOne) == iZero) then
    ii(iSix) = Ly
else
    ii(iSix) = rZero
end if

if((b1 - e1 + m - n) == iZero) then
    ii(iSeven) = Ly
else
    ii(iSeven) = rZero
end if

if((b1 - e1 - m + n) == iZero) then
    ii(iEight) = Ly
else
    ii(iEight) = rZero
end if

Ibemn = sum(ii(:))/rEight

do_f : do f1 = iOne, nz

    defSoma = defSoma + iOne
d(iOne) = rZero

if((c1 + f1 - p - q) == iZero) then
    d(iTwo) = Lz
else
    d(iTwo) = rZero
end if

if((c1 + f1 + p - q - iOne) == iZero) then
    d(iThree) = Lz
else
    d(iThree) = rZero
end if

if((c1 + f1 - p + q - iOne) == iZero) then

```

```

        d(iFour) = Lz
    else
        d(iFour) = rZero
    end if

    if((c1 - f1 + p + q - iOne) == iZero) then
        d(iFive) = Lz
    else
        d(iFive) = rZero
    end if

    if((c1 - f1 - p - q + iOne) == iZero) then
        d(iSix) = Lz
    else
        d(iSix) = rZero
    end if

    if((c1 - f1 + p - q) == iZero) then
        d(iSeven) = Lz
    else
        d(iSeven) = rZero
    end if

    if((c1 - f1 - p + q) == iZero) then
        d(iEight) = Lz
    else
        d(iEight) = rZero
    end if

    Dcfpq = sum(d(:))/rEight

    if((c1 + f1 + p - q - iOne) == iZero) then
        mm(iOne) = Lz
    else
        mm(iOne) = rZero
    end if

    if((c1 + f1 - p + q - iOne) == iZero) then
        mm(iTwo) = Lz
    else
        mm(iTwo) = rZero
    end if

    mm(iThree) = rZero

    if((c1 + f1 - p - q) == iZero) then
        mm(iFour) = Lz
    else
        mm(iFour) = rZero
    end if

    if((c1 - f1 + p - q) == iZero) then
        mm(iFive) = Lz
    else
        mm(iFive) = rZero
    end if

    if((c1 - f1 - p + q) == iZero) then

```



```

        mm(iSix) = Lz
    else
        mm(iSix) = rZero
    end if

    if((c1 - fl + p + q - iOne) == iZero) then
        mm(iSeven) = Lz
    else
        mm(iSeven) = rZero
    end if

    if((c1 - fl - p - q + iOne) == iZero) then
        mm(iEight) = Lz
    else
        mm(iEight) = rZero
    end if

    Mcfpq = (mm(iOne) + mm(iTwo) + mm(iFive) + mm(iSix) - &
        mm(iThree) - mm(iFour) - mm(iSeven) - mm(iEight))/rEight

    y2_rst_def_Soma = y(rstSoma)*y(defSoma)

    soma_c = soma_c + &
        (AutVal_mn_vezes*Dcfpq*Ebemn*Fadij + &
        AutVal_ij_vezes*Dcfpq*Ibemn*Jadij + &
        AutVal_pq_vezes*Mcfpq*Ibemn*Fadij) * y2_rst_def_Soma

end do do_f
end do do_e
end do do_d
end if if_FJadij
end do do_c
end do do_b
end do do_a

Aijmnpq(iconta,jconta) = aux*(b*aux_root*soma_b + &
    c*aux*soma_c)
end do do_q
end do do_n
end do do_j
end do do_p
end do do_m
end do do_i

!!!!!!!!!!!!!!
write(*,*)
write(*,*)
write(*,*)
write(*,*)

do i = iOne, n_total
    Aijmnpq(i,i) = Bijmnpq(i) - Aijmnpq(i,i)

    if(i.lt.10) then
        write(*,*)i, Aijmnpq(i,i), Bijmnpq(i)
    end if

```



```
end do
```

```
norma_nova = rZero
```

```
do i = iOne, n_total
```

```
    grad_y(i) =      sum(Aijmnpq(i,:)*y(:))
```

```
    norma_nova = norma_nova + sum(Aijmnpq(i,:)*Aijmnpq(i,:))
```

```
end do
```

```
norma_diferenca = norma_nova - norma_antiga
```

```
write(*,*)'Normas...',norma_antiga, norma_nova, norma_diferenca, t
```

```
return
```

```
end subroutine fcn
```

```
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

```
subroutine fcnj(n_total,t,y,jacob)
```

```
!subrotina para cálculo do jacobiano do sistema de EDOs
```

```
!Data: 27/11/2002
```

```
!Local: Ilha Solteira
```

```
!Programador: Odacir Almeida Neves
```

```
use data_type
```

```
use constants
```

```
use DadosBasicos, only : nx, ny, nz
```

```
use DadosABijmnpq, only : Aijmnpq
```

```
implicit none
```

```
integer(long), intent(in) :: n_total
```

```
real(double), intent(in) :: t
```

```
real(double) :: aux_t
```

```
real(double), dimension(nx*ny*nz), intent(in) :: y
```

```
real(double), dimension(nx*ny*nz,nx*ny*nz), intent(out) :: jacob
```

```
integer(long) :: i_aux
```

```
i_aux = n_total !Just to avoid warnings.
```

```
aux_t = t !Just to avoid warnings.
```

```
aux_t = jacob(iOne,iOne) !Just to avoid warnings.
```

```
aux_t = y(iOne) !Just to avoid warnings.
```

```
!jacob = Aijmnpq
```

```
write(*,*) 'Não deveria estar passando por aqui (sub FCNJ)!!!'
```

```
pause
```

```
return
```

```
end subroutine fcnj
```

```
end module CalculaJacobiano
```

Lista de Figuras.....	xiii
Lista de Tabelas.....	xix
Lista de Símbolos.....	xxi
Resumo.....	xxiii
Abstract.....	xxv

Capítulo 1 – Introdução.....01

1.1 – Revisão Bibliográfica.....	02
----------------------------------	----

Capítulo 2 – Difusão não-linear transiente em geometria cartesiana.....09

2.1 – Formulação Matemática.....	09
2.1 – Problema Auxiliar de Autovalor.....	11
2.3 – Transformação da Formulação do Problema.....	12
2.3.1 – Par Transformada - Inversa.....	12
2.3.2 – Transformação do Problema para o Eixo x.....	14
2.3.3 – Transformação do Problema para o Eixo y.....	16
2.3.4 – Transformação do Problema para o Eixo z.....	19
2.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas.....	23
2.5 – Solução do Sistema Não-Linear.....	24

Capítulo 3 – Difusão não-linear transiente em geometria cilíndrica.....25

3.1 – Formulação Matemática.....	25
3.2 – Problema Auxiliar de Autovalor.....	27
3.3 – Transformação da Formulação do Problema.....	28
3.3.1 – Par Transformada - Inversa para o Eixo z.....	28
3.3.2 – Transformação do Problema para o Eixo z.....	30
3.3.3 – Par Transforma – Inversa para o Eixo θ	31
3.3.4 – Transformação do Problema para o Eixo θ	32
3.3.5 – Par Transforma – Inversa para o Eixo r.....	35
3.3.6 – Transformação do Problema para o Eixo r.....	36
3.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas.....	41
3.5 – Solução do Sistema Não-Linear.....	41

Capítulo 4 – Aplicação em Coordenadas Cartesianas: Resfriamento do Paralelepípedo.....43

4.1 – Análise Matemática.....	43
4.2 – Problema Auxiliar de Autovalor.....	46
4.3 – Transformada Integral Generalizada.....	47
4.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas.....	50
4.5 – Solução do Sistema Não Linear.....	51
4.6 – Resultados e Discussão.....	51
4.6 1– Resultados para os diferentes materiais com $K(T) = a$	54
4.6 2– Resultados para os diferentes materiais com $K(T) = a + bT$	62
4.6 3– Resultados para os diferentes materiais com $K(T) = a + bT + bT^2$	74
4.7 – Comparação dos resultados com os apresentados na literatura.....	79

Capítulo 5 – Aplicação em Coordenadas Cilíndricas: Resfriamento de um setor de cilindro.....	87
5.1 – Formulação Matemática.....	87
5.2 – Problema Auxiliar de Autovalor.....	90
5.3 – Transformada Integral Generalizada.....	92
5.4 – Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas.....	94
5.5 – Resultados e Discussão.....	95
 Capítulo 6 – Conclusões e sugestões para trabalhos futuros.....	105
 Referências Bibliográficas	109
 Apêndice A – Integrais na Transformação das Geometrias Cartesianas e Cilíndricas.....	115
 Apêndice B – Problema de Sturm - Liouville.....	133
 Apêndice C – Problema de Autovalor em Coordenadas Cartesianas.....	137
 Apêndice D – Problema de Autovalor em Coordenadas Cilíndricas.....	141
 Apêndice E – Funções de Classe C^k	145
 Anexo A – Distribuição de temperatura no paralelepípedo e no setor de cilindro.....	147
 Anexo B – Subrotinas fcn e fcnj.....	153





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dem.feis.unesp.br

