

**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

**Recorrências Lineares de Primeira e Segunda
Ordem e Algumas Conexões com Equações
Diferenciais**

Marcos Said Miguel

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO
2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Marcos Said Miguel

Recorrências Lineares de Primeira e Segunda Ordem e Algumas Conexões com Equações Diferenciais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador
Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá

Rio Claro/SP
2026

M636r

Miguel, Marcos Said

Recorrências lineares de primeira e segunda ordem e algumas conexões com equações diferenciais / Marcos Said Miguel. -- Rio Claro, 2026

72 p. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Lucas Antonio Caritá

1. Sequências Recorrentes. 2. Recorrências Lineares. 3. Sequências de Fibonacci Generalizadas. 4. Torre de Hanói. 5. Equações Diferenciais Ordinárias Lineares. I. Título.

Impacto potencial desta pesquisa

Esta dissertação contribui para a sociedade ao tornar acessível o estudo de recorrências lineares de primeira e segunda ordem, apresentando métodos de resolução com exemplos claros, estabelecendo um paralelo com o estudo de equações diferenciais, e podendo ser utilizada como material de estudo complementar para ampliar a formação matemática.

Potential impact of this research

This dissertation contributes to society by making the study of first- and second-order linear recurrences accessible, presenting solution methods with clear examples, establishing a parallel with the study of differential equations, and serving as supplementary study material to enhance mathematical education.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Marcos Said Miguel

RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM E
ALGUMAS CONEXÕES COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá
Instituto Federal de São Paulo - IFSP
Orientador

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques
Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais
- CNPEM

Prof. Dr. Ricardo Aparecido de Moraes
Instituto Federal do Espírito Santo - IFES
Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 16 de janeiro de 2026

A quem torce por mim, dedico.

Agradecimentos

Ao único e verdadeiro Deus, que me amou, apesar de mim.

À minha mãe, Milene Souza Said, que me criou com amor e alegria, e nunca deixou a peteca cair, mesmo quando parecia certa a queda. A senhora é minha maior inspiração.

Ao meu pai, Savio Said Miguel (em memória), que também me criou com amor e alegria, me ensinando a fazer piadinhas, mesmo quando não era hora. Mesmo sem completar o ensino básico, me impressionava com sua inteligência e fome por conhecimento. Fazia cálculos mentais como poucos e sempre me desafiava. Mesmo não sendo o mais carinhoso do mundo, me dizia todas as noites, “não esquece que eu te amo”. Nunca vou me esquecer.

À minha esposa, Camilla Melo Said, minha melhor amiga, que sempre está comigo. Obrigado por ser quem você é. Você só precisa existir para me completar.

Ao Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá, meu professor na graduação e orientador no mestrado. É uma honra ser teu orientando. Gostaria de poder ter feito mais para retribuir tanto. Obrigado por essa oportunidade e por exercer tanta paciência comigo. O senhor me inspira.

Aos meus colegas da graduação, em especial a estes quatro: Daniel (o “Dêniel”, como na pronúncia em inglês), Isabela (a Isa B’), João Carlos (o Xuão) e Luana (a Lulu). Estiveram comigo na maior parte do tempo, ainda que virtualmente, durante a pandemia, e fizeram com que o curso fosse concluído com mais leveza. Aooooooooooba!

Aos meus colegas do mestrado, em especial aos que me acompanharam desde a graduação: Isabela (de novo a Isa B’) e Giovanni (o Gigio).

Aos meus professores da graduação, em especial à Prof. Dra. Fabiane Guimaraes Vieira Marcondes e ao Prof. Dr. Marcos William da Silva Oliveira, que além de serem professores memoráveis, escreveram as cartas de recomendação para o meu ingresso no mestrado.

Aos meus professores do mestrado, em especial à Prof. Dra. Suzete Maria Silva Afonso, que me impressionou com tamanho domínio do conteúdo e prontidão em atender os discentes.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) - Campus de São José dos Campos, por me proporcionar uma graduação excelente, com experiências inesquecíveis.

À Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP) - Campus de Rio Claro, por disponibilizar o curso e a estrutura necessária para sua realização.

Ao GPMCC, por proporcionar o espaço para o desenvolvimento do trabalho.

A todos os meus familiares, amigos e colegas que tornaram tudo isso possível ou participaram de toda a minha trajetória até aqui. Infelizmente, não poderei citar cada um pelo nome, mas quero que saibam da minha gratidão. Muito obrigado.

*Se é somente para esta vida que temos esperança em Cristo,
somos os mais miseráveis de todos os homens.*
1Coríntios 15:19

Resumo

Nesta dissertação, estudamos recorrências lineares, com ênfase tanto nos casos homogêneos quanto nos não homogêneos. Nosso objetivo principal é apresentar e demonstrar teoremas que facilitam a resolução dessas recorrências, evitando abordagens puramente por inspeção. A análise abrange recorrências lineares de primeira e segunda ordem. Ao longo do trabalho, destacamos também diversas sequências clássicas definidas por recorrência, como as sequências de Fibonacci, Lucas, Pell e a sequência associada ao problema da Torre de Hanói, ilustrando a aplicação dos métodos desenvolvidos. Além disso, realizamos uma análise comparativa entre recorrências e equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes, destacando a equivalência de seus operadores e equações características. Nesse sentido, a dissertação oferece não apenas ferramentas para resolver recorrências lineares, mas também uma compreensão integrada de sua estrutura e relação com a teoria das equações diferenciais.

Palavras-chave: Recorrências Lineares. Sequências Recorrentes. Sequências de Fibonacci Generalizadas. Torre de Hanói. Equações Diferenciais Ordinárias Lineares.

Abstract

In this master's thesis, we study linear recurrences, focusing on both homogeneous and non-homogeneous cases. The primary objective is to present and prove theorems that facilitate the resolution of such recurrences, avoiding approaches based purely on inspection. The analysis covers linear recurrences of first and second order. Throughout the work, we also highlight several classical sequences defined by recurrences, such as the Fibonacci, Lucas, Pell sequences, and the sequence associated with the Tower of Hanoi problem, illustrating the application of the developed methods. Moreover, we conduct a comparative analysis between linear recurrences and linear ordinary differential equations with constant coefficients, emphasizing the equivalence of their operators and characteristic equations. In this sense, the thesis not only provides tools for solving linear recurrences but also offers an integrated understanding of their structure and their relationship with the theory of differential equations.

Keywords: Linear Recurrences. Recursive Sequences. Generalized Fibonacci Sequences. Tower of Hanoi. Linear Ordinary Differential Equations.

Lista de Figuras

2.1	Carl Friedrich Gauss	20
3.1	Leonardo Fibonacci	25
3.2	Esquema de nascimento de coelhos.	26
3.3	Édouard Lucas	27
3.4	John Pell	28
3.5	Configuração inicial dos discos no jogo da Torre de Hanói	29
3.6	Solução de 7 movimentos para o jogo da Torre de Hanói com 3 discos . . .	30

Lista de Tabelas

3.1	Número de casais de coelhos.	27
-----	--------------------------------------	----

Sumário

1	Introdução	13
2	Sequências	17
2.1	Sequências finitas e infinitas	17
2.2	Progressões aritméticas e geométricas	18
3	Relações e sequências de recorrência	23
3.1	Definição e classificação	23
3.2	Exemplos famosos	25
3.3	Resolvendo relações de recorrência	31
4	Recorrências lineares de primeira ordem	39
4.1	Casos simples de recorrências homogêneas e não homogêneas	40
4.2	Simplificação de recorrências não homogêneas por substituição	41
5	Recorrências lineares de segunda ordem	48
5.1	Homogêneas	48
5.2	Não homogêneas	55
6	Considerações Finais	68
	Referências	69
A	Apêndice: Princípio da Indução Finita	71
A.1	Conceitos básicos	71
A.2	O Princípio da Indução Finita	71

1 Introdução

As relações de recorrência aparecem em diversos contextos, como em problemas de contagem, algoritmos iterativos, métodos numéricos e aplicações combinatórias. A ideia básica é que cada termo de uma sequência é obtido a partir de termos anteriores, segundo alguma regra previamente estabelecida. Fixado um número natural k , dizemos que uma sequência (a_n) satisfaz uma relação de recorrência de ordem k quando existe uma fórmula que permite calcular cada termo a_n , para $n \geq k + 1$, usando apenas os k termos anteriores: a_n é expresso em termos de $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$ e, possivelmente, do próprio n . A sequência (a_n) é então chamada de sequência definida por recorrência, e os valores $a_1, \dots, a_k$ são os valores iniciais, que determinam completamente todos os demais termos.

Um exemplo clássico é a sequência de Fibonacci, definida por

$$\begin{cases} F_1 = 1, \\ F_2 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

Note que, para determinar F_n , é necessário conhecer os valores dos dois termos anteriores F_{n-1} e F_{n-2} .

Além de Fibonacci, existem outras sequências definidas por recorrência que desempenham papéis relevantes na matemática. A sequência de Lucas, por exemplo, satisfaz a mesma recorrência de Fibonacci, mas com condições iniciais diferentes:

$$\begin{cases} L_1 = 1, \\ L_2 = 3, \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

Outro exemplo importante é a sequência de Pell, definida por

$$\begin{cases} P_1 = 1, \\ P_2 = 2, \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

Recorrências também aparecem em problemas clássicos, como o da *Torre de Hanói*, no qual se mostra que o número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema com n discos é dado por

$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \quad \text{com } T_1 = 1.$$

Esses exemplos ilustram como sequências de recorrência modelam situações reais e abstratas, além de motivarem técnicas gerais para solução e análise, que serão discutidas ao longo deste texto.

Relações de recorrência aparecem em diversos campos: em problemas de contagem e combinatória; em algoritmos iterativos de aproximação numérica; em análise de complexidade computacional, onde descrevem o número de operações necessárias para resolver um problema; e em processos de geração combinatória, nos quais estruturas mais complexas são construídas de forma incremental. Em particular, em ciência da computação, é comum que o número de passos de um algoritmo seja descrito por uma sequência (a_n) , onde n representa o tamanho da entrada do problema. Determinar uma fórmula explícita para a_n , quando possível, permite não apenas calcular o tempo de execução do algoritmo para valores elevados de n , mas também comparar o desempenho de diferentes métodos que resolvem um mesmo problema.

Assim, estudar relações de recorrência não significa apenas aprender a gerar uma sequência termo a termo, mas principalmente encontrar métodos que permitam expressar o termo geral a_n diretamente em função de n . Essa passagem do domínio recursivo para uma fórmula explícita é fundamental tanto para aplicações teóricas quanto práticas, e constitui um dos temas principais desenvolvidos nesta dissertação.

Nessa dissertação, o nosso foco será estudar recorrências lineares, que são aquelas em que cada termo da sequência aparece de forma linear na relação que o define. Em outras palavras, a_n depende de combinações lineares dos termos anteriores e, eventualmente, de uma função de n . Esse tipo de recorrência é particularmente importante porque admite métodos gerais de resolução, que permitem obter fórmulas explícitas para os termos da sequência ou, ao menos, expressões fechadas que descrevem seu comportamento. Focaremos em recorrências lineares de primeira e de segunda ordem, que dependem de um termo ou dois termos anteriores.

Apesar de que muitas recorrências possam ser resolvidas por inspeção (isto é, explorando a relação por alguns passos até que surja um padrão evidente), vamos abordar métodos de solução que independem completamente da adivinhação de padrões. Os resultados que apresentaremos possuem grande semelhança com técnicas conhecidas da teoria de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes. Isso ocorre porque, em ambos os contextos, a estrutura linear permite decompor o problema em duas partes: uma equação homogênea associada, cuja solução descreve o comportamento básico do sistema, e uma solução particular, que transmite o efeito dos termos não homogêneos. Assim, as ideias fundamentais aparecem de forma análoga nos dois cenários, ainda que aplicadas em contextos matemáticos diferentes.

Podemos fazer uma analogia na forma de solucionar recorrências lineares com coeficientes constantes com equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. Em ambos os contextos lidamos com operadores lineares e com soluções que emergem de uma equação algébrica associada (a equação característica).

No caso contínuo, uma EDO¹ linear de ordem k com coeficientes constantes relaciona uma função $y(t)$ às suas derivadas por meio de uma expressão da forma

$$\sum_{i=0}^k a_i \frac{d^i y}{dt^i} = f(t).$$

O operador fundamental é o diferencial $D = \frac{d}{dt}$. A função que apresenta o comportamento estrutural mais simples sob a ação de D é a exponencial e^{rt} , pois $D(e^{rt}) = re^{rt}$.

¹Equação diferencial ordinária.

Por essa razão, ao buscar soluções da equação homogênea associada, supomos $y(t) = e^{rt}$.

Por outro lado, no caso discreto, uma recorrência linear de ordem k com coeficientes constantes é dada por

$$\sum_{i=0}^k c_i a_{n+i} = g(n).$$

O papel do operador diferencial é desempenhado pelo operador de deslocamento E , definido por $Ea_n = a_{n+1}$ e, mais geralmente, $E^i a_n = a_{n+i}$. A sequência mais naturalmente adaptada à ação desse operador é a progressão geométrica r^n , pois $E(r^n) = r^{n+1} = r \cdot r^n$.

A proximidade estrutural entre EDOs e recorrências torna-se mais evidente quando observamos o papel das equações características. Consideremos apenas os casos homogêneos (com $f(t) = 0$ no caso das EDOs e $g(n) = 0$ no caso das recorrências).

1. **EDO homogênea (ordem k):** Supondo $y(t) = e^{rt}$, temos

$$a_k r^k e^{rt} + a_{k-1} r^{k-1} e^{rt} + \cdots + a_1 r e^{rt} + a_0 e^{rt} = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, obtemos a **equação característica**

$$a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0.$$

2. **Recorrência homogênea (ordem k):** Supondo $a_n = r^n$, obtemos

$$c_k r^{n+k} + c_{k-1} r^{n+k-1} + \cdots + c_1 r^{n+1} + c_0 r^n = 0.$$

Dividindo por $r^n \neq 0$, chegamos à **equação característica**

$$c_k r^k + c_{k-1} r^{k-1} + \cdots + c_1 r + c_0 = 0.$$

Esse paralelismo deixa claro que a estrutura algébrica que subjaz as EDOs e recorrências lineares são similares.

No caso das EDOs lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, podemos escrevê-las na forma $ay'' + by' + cy = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. A equação característica associada é $ar^2 + br + c = 0$. Se essa equação possui raízes r_1 e r_2 (reais ou complexas), então a solução geral da EDO é

$$y(t) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, & \text{se } r_1 \neq r_2, \\ C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}, & \text{se } r_1 = r_2 = r. \end{cases}$$

O fator t no segundo caso surge porque, quando há multiplicidade maior que um na raiz, a simples repetição de e^{rt} não fornece duas soluções linearmente independentes. Então é necessário introduzir uma segunda solução que não seja múltipla da primeira, o que leva naturalmente a $t e^{rt}$.

Em ambos os casos, os termos que aparecem na solução geral formam o que se chama de conjunto fundamental de soluções: um par de soluções da equação homogênea que é linearmente independente. Esse conjunto é fundamental no sentido de que qualquer solução da EDO homogênea pode ser escrita como combinação linear dessas duas soluções.

De forma análoga, para uma recorrência linear homogênea de ordem dois com coeficientes constantes, podemos escrevê-la na forma $a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = 0$, onde $p, q \in \mathbb{R}$ com $q \neq 0$. A equação característica associada é $r^2 + pr + q = 0$, cujas raízes denotaremos por

r_1 e r_2 . Assim como no caso contínuo, a forma das soluções depende da natureza dessas raízes.

A solução geral é dada por

$$a_n = \begin{cases} C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, & \text{se } r_1 \neq r_2, \\ C_1 r^n + C_2 n r^n, & \text{se } r_1 = r_2 = r. \end{cases}$$

No segundo caso, temos uma raiz com multiplicidade maior que um, a simples repetição de r^n não fornece duas soluções linearmente independentes; por isso surge o termo $n r^n$, que desempenha o papel da segunda solução independente.

Assim como nas EDOs, as soluções que aparecem nessas expressões formam um conjunto fundamental de soluções da recorrência: duas soluções linearmente independentes que geram todas as demais soluções da relação homogênea. Em outras palavras, qualquer sequência que satisfaça a recorrência pode ser escrita como combinação linear dessas duas sequências básicas.

Para o caso não homogêneo, tanto nas EDOs lineares com coeficientes constantes quanto nas recorrências lineares com coeficientes constantes, a solução geral é sempre dada pela soma de dois componentes: a solução geral da equação (ou recorrência) homogênea associada e uma solução particular da não homogênea.

Ao longo deste texto, o leitor notará diversas semelhanças entre os métodos de resolução utilizados para recorrências lineares e aqueles empregados na teoria de equações diferenciais ordinárias. Entretanto, o objetivo desta dissertação é desenvolver e justificar cada resultado de maneira autônoma, estabelecendo uma teoria completa para recorrências lineares de primeira e segunda ordem.

Nesse sentido, esta dissertação foi estruturada da seguinte forma. No segundo capítulo, estudaremos conceitos preliminares e fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, definindo sequências finitas e infinitas, além de definir e trazer alguns resultados sobre progressões aritméticas e geométricas (para a redação deste capítulo, consultamos [1], [2], [3] e [4]). No terceiro capítulo, definiremos relações de recorrência e exploraremos sua classificação, definiremos as sequências de recorrência e apresentaremos exemplos famosos e, por fim, definiremos e exploraremos a resolução de relações de recorrência (para a redação deste capítulo, consultamos [2], [3], [5], [6], [7], [8], [9], [10] e [11]). No quarto capítulo, nos aprofundaremos no estudo de recorrências lineares de primeira ordem, apresentando e aplicando uma substituição que simplifica a resolução do caso não homogêneo (para a redação deste capítulo, consultamos [12], [13] e [14]). No quinto capítulo, seguiremos para o estudo de recorrências lineares de segunda ordem, apresentando a equação característica e a utilização de suas raízes para a resolução do caso homogêneo e, ainda, trazendo resultados que auxiliam na resolução do caso não homogêneo e explorando diversos exemplos (para a redação deste capítulo, consultamos [12], [15], [16], [17], [18], [19], [20] e [21]). Ademais, foi redigido um capítulo com as considerações finais e um apêndice sobre o princípio da indução finita.

2 Sequências

2.1 Sequências finitas e infinitas

Definição 2.1. Considere $I_k = \{1, \dots, k\} \subset \mathbb{N}$. Uma **sequência finita** de números reais é uma função $a : I_k \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada elemento $n \in I_k$ a um número real a_n . Por sua vez, uma **sequência infinita** de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada natural n a um número real a_n .

As sequências de números reais, conforme estabelecidas na Definição 2.1, são geralmente denotadas por (a_n) . Em casos em que se deseja apresentar explicitamente todos os termos, pode-se utilizar uma notação enumerativa, como (a_1, a_2, a_3, a_4) para uma sequência finita com 4 elementos, ou $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ para uma sequência infinita. Além disso, é possível explicitar o conjunto de índices, empregando notações como $(a_n)_{n=1}^4$ para sequências finitas ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para sequências infinitas.

Existem diferentes formas de descrever uma sequência. Uma das formas mais diretas é a partir de um **termo geral**, ou seja, uma expressão que permite calcular qualquer termo da sequência diretamente, apenas substituindo o valor de n . Por exemplo, se quisermos uma sequência onde cada termo é o quadrado do seu índice, podemos escrever:

$$a_n = n^2.$$

Em outra notação, essa é a sequência $(n^2)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 4, 9, 16, \dots)$.

Uma outra forma é definir a sequência por uma **relação de recorrência**, que é uma regra que liga cada termo aos anteriores. Nesse caso, para descobrir um termo, precisamos conhecer alguns que vieram antes. Por exemplo, considere a sequência definida como:

$$a_1 \in \mathbb{R} \text{ fixado, } a_n = 3a_{n-1} + 1 \text{ para } n \geq 2.$$

Se começarmos com $a_1 = 2$, temos:

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7, \quad a_3 = 3 \cdot 7 + 1 = 22, \quad a_4 = 3 \cdot 22 + 1 = 67,$$

e assim por diante. Essa, portanto, é a sequência $(3, 7, 22, 67, \dots)$.

Em alguns casos convém considerar sequências infinitas de números reais como funções $a : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde X é um conjunto enumerável infinito, que associa cada $n \in X$ a um número real a_n . Por exemplo, considere uma sequência definida pela recorrência

$$a_n = a_{\frac{n}{2}} + 1,$$

nesse caso, não faz sentido tomar $n \in \{2, 3, 4, 5, \dots\}$, uma vez que $\frac{n}{2}$ não pertence a esse conjunto quando n é ímpar, por exemplo, se $n = 5$, então $\frac{n}{2} = \frac{5}{2} \notin \{2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Também n não deve ser tomado no conjunto $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$, pois $\frac{n}{2}$ não pertence a esse conjunto quando n não é o dobro de um número par, por exemplo, se $n = 6$, então $\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3 \notin \{2, 4, 6, 8, \dots\}$. Essa recorrência, no entanto, faz sentido para $n \in \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$. Se desejarmos, podemos reescrever a mesma recorrência para $k \in \mathbb{N}$ da seguinte forma;

$$a_{2^k} = a_{2^{k-1}} + 1.$$

2.2 Progressões aritméticas e geométricas

Entre as sequências de números reais definidas por uma recorrência, podemos destacar dois tipos muito conhecidos: as **progressões aritméticas** e as **progressões geométricas**.

Definição 2.2. Uma sequência (a_n) é chamada de **progressão aritmética** (P.A.) se existe uma constante real r , chamada de **razão**, tal que

$$a_{n+1} = a_n + r \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Nessa situação, cada termo da sequência é obtido somando-se a razão r ao termo anterior. Se a progressão aritmética inicia em a_1 , então seus termos podem ser escritos explicitamente como:

$$a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r, \dots$$

Definição 2.3. Uma sequência (a_n) é chamada de **progressão geométrica** (P.G.) se existe uma constante real q , chamada de **razão**, tal que

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Nessa situação, cada termo da sequência é obtido multiplicando-se o termo anterior pela razão q . Se a progressão geométrica inicia em a_1 , então seus termos podem ser escritos explicitamente como:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$$

A partir deste ponto, demonstraremos alguns resultados através do método da indução finita. O leitor pode consultar o Apêndice A para conhecer melhor o método, caso necessário.

Teorema 2.4. Se (a_n) é uma progressão aritmética com termo inicial a_1 e razão r , então o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Demonstração. Vamos demonstrar a fórmula por indução em $n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$, temos:

$$a_1 = a_1 + (1 - 1)r = a_1,$$

o que é verdadeiro.

ii) (H.I.¹) Suponha que a fórmula é válida para $n = k$, ou seja, que:

$$a_k = a_1 + (k - 1)r.$$

iii) Vamos verificar para $n = k + 1$. Pela definição de progressão aritmética, temos:

$$a_{k+1} = a_k + r.$$

Pela hipótese de indução:

$$a_{k+1} = (a_1 + (k - 1)r) + r = a_1 + kr = a_1 + ((k + 1) - 1)r,$$

que é exatamente a fórmula desejada para $n = k + 1$.

Por indução, a fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.5. Para uma P.A., é possível notar que sempre teremos $a_n = a_k + (n - k)r$, para todo $k, n \in \mathbb{N}$ com $k < n$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 podemos escrever $a_n = a_1 + (n - 1)r$ e $a_k = a_1 + (k - 1)r$. Assim, para todo $k, n \in \mathbb{N}$ com $k < n$:

$$a_k + (n - k)r = a_1 + (k - 1)r + (n - k)r = a_1 + (k - 1 + n - k)r = a_1 + (n - 1)r = a_n.$$
■

Teorema 2.6. Se (a_n) é uma progressão geométrica com termo inicial a_1 e razão q , então o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar a fórmula por indução em $n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$, temos:

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1 \cdot 1 = a_1,$$

o que é verdadeiro.

ii) (H.I.) Suponha que a fórmula é válida para $n = k$, ou seja, que:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}.$$

iii) Vamos verificar para $n = k + 1$. Pela definição de progressão geométrica, temos:

$$a_{k+1} = a_k \cdot q.$$

Pela hipótese de indução:

$$a_{k+1} = (a_1 \cdot q^{k-1}) \cdot q = a_1 \cdot q^k = a_1 \cdot q^{(k+1)-1},$$

que é exatamente a fórmula desejada para $n = k + 1$.

Por indução, a fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

¹Hipótese de indução.

Teorema 2.7. Para uma P.G., é possível notar que sempre teremos $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k < n$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.6 podemos escrever $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ e $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k < n$:

$$a_k \cdot q^{n-k} = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q^{n-k} = a_1 \cdot q^{k-1+n-k} = a_1 \cdot q^{n-1} = a_n.$$

■

A seguir vamos discutir sobre a soma dos n primeiros termos de uma P.A. e de uma P.G. Primeiramente, vale uma observação interessante.

Como provaremos no próximo teorema, a soma dos n primeiros termos de uma P.A. (a_n) é dada por

$$\frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

ou seja,

$$\frac{n(2a_1 + (n-1)r)}{2}.$$

Este resultado foi primeiramente descoberto por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (Figura 2.1).



Figura 2.1: Carl Friedrich Gauss

Fonte: MacTutor History of Mathematics Archive [3].

Segundo Boyer e Merzbach [4], um dia, para ocupar a classe, o professor de ensino infantil da turma de Gauss mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções para que cada um colocasse sua ardósia² sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente, Gauss colocou sua ardósia sobre a mesa, dizendo, “Aí está”; o professor olhou para ele com pouco caso enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o instrutor finalmente olhou os resultados, a ardósia de Gauss era a única com a resposta correta, 5050, sem outro cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculara mentalmente a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$, presumivelmente pela fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$.

²Rocha metamórfica compacta, de granulação fina e cor escura, aplicada no revestimento de casas e que, antigamente, era usada para escrever nas escolas.

Teorema 2.8. *Seja (a_n) uma progressão aritmética com termo inicial a_1 e razão r . A soma dos n primeiros termos, denotada por S_n , é dada por:*

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)r).$$

Demonstração. Vamos demonstrar a fórmula por indução em $n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$, temos:

$$S_1 = a_1.$$

Substituindo $n = 1$ na fórmula:

$$S_1 = \frac{1}{2}(2a_1 + (1-1)r) = \frac{1}{2}(2a_1) = a_1,$$

o que garante a procedência para $n = 1$.

ii) (H.I.) Suponha que a fórmula é válida para $n = k$, ou seja, que:

$$S_k = \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)r).$$

iii) Vamos verificar para $n = k + 1$. Temos:

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}.$$

Pela hipótese de indução e pela fórmula do termo geral da P.A.:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)r) + (a_1 + kr) \\ &= \frac{2ka_1 + k(k-1)r}{2} + a_1 + kr \\ &= \frac{2(k+1)a_1 + k^2r - kr + 2kr}{2} \\ &= \frac{2(k+1)a_1 + k^2r + kr}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)}{2}(2a_1 + kr).$$

O que é exatamente a fórmula desejada para $n = k + 1$.

Por indução, a fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

O próximo resultado nos traz uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma P.G.

Teorema 2.9. *Seja (a_n) uma progressão geométrica com termo inicial a_1 e razão $q \neq 1$. A soma dos n primeiros termos, denotada por S_n , é dada por:*

$$S_n = a_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right).$$

Demonstração. Vamos demonstrar a fórmula por indução em $n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$, temos:

$$S_1 = a_1.$$

Substituindo $n = 1$ na fórmula:

$$S_1 = a_1 \left(\frac{1 - q^1}{1 - q} \right) = a_1 \left(\frac{1 - q}{1 - q} \right) = a_1,$$

o que é verdadeiro.

ii) (H.I.) Suponha que a fórmula é válida para $n = k$, ou seja, que:

$$S_k = a_1 \left(\frac{1 - q^k}{1 - q} \right).$$

iii) Vamos verificar para $n = k + 1$. Temos:

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}.$$

Pela hipótese de indução e pela fórmula do termo geral da P.G.:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= a_1 \left(\frac{1 - q^k}{1 - q} \right) + a_1 q^k \\ &= a_1 \left(\frac{1 - q^k}{1 - q} + q^k \right) \\ &= a_1 \left(\frac{1 - q^k + q^k(1 - q)}{1 - q} \right) \\ &= a_1 \left(\frac{1 - q^k + q^k - q^{k+1}}{1 - q} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$S_{k+1} = a_1 \left(\frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \right).$$

O que é exatamente a fórmula desejada para $n = k + 1$.

Por indução, a fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Com isso encerramos este capítulo. No próximo discutiremos as relações de recorrência.

3 Relações e sequências de recorrência

3.1 Definição e classificação

Definição 3.1. Fixemos um número natural k . Uma **relação de recorrência** de ordem k , correspondente a uma sequência de números (a_n) , é uma equação da forma

$$a_n = \phi(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) + f(n); \quad n \geq k+1, \quad n \in \mathbb{N}$$

onde $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de $k+1$ variáveis e $f : \{n \in \mathbb{N} : n \geq k+1\} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de uma variável.

A sequência (a_n) é denominada **sequência de recorrência**.

Os primeiros k números $a_1, \dots, a_k$ da sequência são chamados de **valores iniciais**.

Quando $f(n) = 0$, dizemos que a relação é **homogênea**. Caso contrário, dizemos que é **não homogênea**.

Ainda, dizemos que a relação é **linear** quando pode ser expressa como:

$$\beta_n a_n + \beta_{n-1} a_{n-1} + \beta_{n-2} a_{n-2} + \dots + \beta_{n-k} a_{n-k} = f(n),$$

em que β_i , para $i \in \{n-k, \dots, n\}$, são constantes ou funções que dependem de n .

No capítulo anterior, já havíamos estudado progressões aritméticas e progressões geométricas. Esses tipos de sequências são definidas por relações de recorrência lineares de primeira ordem, a saber, $a_n = a_{n-1} + r$ e $a_n = a_{n-1} \cdot q$, respectivamente, onde r e q são constantes reais.

Vejamos alguns outros exemplos de relações de recorrência e como classificá-las.

Exemplo 3.2.

$$a_n = na_{n-1}$$

é linear, homogênea e de primeira ordem.

Exemplo 3.3.

$$a_n = 3a_{n-1} - n^2$$

é linear, não homogênea e de primeira ordem.

Exemplo 3.4.

$$a_n = a_{n-1}^2$$

é não linear, homogênea e de primeira ordem.

Exemplo 3.5.

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} - n$$

é não linear, não homogênea e de segunda ordem.

Exemplo 3.6.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2 + a_{n-3}^3$$

é não linear, homogênea e de terceira ordem.

Exemplo 3.7.

$$a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3a_{n-3} - 4a_{n-4} + 5 \cdot 2^n$$

é linear, não homogênea e de quarta ordem.

Exemplo 3.8.

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_{n-3} \cdot a_{n-4} \cdot a_{n-5}$$

é não linear, homogênea e de quinta ordem.

É importante ressaltar a diferença entre relação de recorrência e sequência de recorrência. Uma mesma relação de recorrência pode produzir diferentes sequências de recorrência.

Exemplo 3.9. Considere a recorrência $a_n = n \cdot a_{n-1}$, apresentada no Exemplo 3.2.

Calculemos os primeiros 6 termos para diferentes valores iniciais a_1 .

- Caso 1:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1; \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2; \\ a_3 &= 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6; \\ a_4 &= 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24; \\ a_5 &= 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120; \\ a_6 &= 6 \cdot a_5 = 6 \cdot 120 = 720. \end{aligned}$$

Ou seja, a sequência gerada é:

$$(1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots).$$

- Caso 2:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2; \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 2 = 4; \\ a_3 &= 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 4 = 12; \\ a_4 &= 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 12 = 48; \\ a_5 &= 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 48 = 240; \\ a_6 &= 6 \cdot a_5 = 6 \cdot 240 = 1440. \end{aligned}$$

Ou seja, a sequência gerada é:

$$(2, 4, 12, 48, 240, 1440, \dots).$$

- Caso 3:

$$a_1 = 3;$$

$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 6 = 18;$$

$$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 18 = 72;$$

$$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 72 = 360;$$

$$a_6 = 6 \cdot a_5 = 6 \cdot 360 = 2160.$$

Ou seja, a sequência gerada é:

$$(3, 6, 18, 72, 360, 2160, \dots).$$

Todas as sequências aqui mencionadas obedecem a mesma relação de recorrência, embora sejam sequências diferentes. Isso ocorre porque as sequências dependem também dos valores iniciais que, nesse caso, são distintos. Uma vez fixadas as condições iniciais, temos uma sequência única bem estabelecida.

Existem, inclusive, exemplos bastante conhecidos de sequências distintas obedecendo a mesma relação de recorrência, como as sequências de Fibonacci e de Lucas, como veremos na seção a seguir.

3.2 Exemplos famosos

Nesta seção, iniciaremos o estudo de algumas das sequências de recorrência mais conhecidas da história da Matemática: a de Fibonacci, a de Lucas, a de Pell e a associada à Torre de Hanói.

Exemplo 3.10 (Sequência de Fibonacci). O matemático Leonardo Fibonacci (1170-1250) (Figura 3.1), também conhecido como Leonardo de Pisa, é um dos mais conhecidos nomes quando se trata de relações de recorrência [6].



Figura 3.1: Leonardo Fibonacci

Fonte: MacTutor History of Mathematics Archive [3].

Em um de seus livros mais famosos, o *Liber Abaci*, introduziu um problema com a situação a seguir.

Há um casal de coelhos em um recinto no primeiro dia de janeiro. Este casal irá reproduzir outro casal de coelhos no primeiro dia de fevereiro e a cada primeiro dia dos meses seguintes. Cada novo casal irá amadurecer em um mês e, no início do terceiro mês de vida, assim como nos meses subsequentes, irá reproduzir um casal. Ou seja, o casal nascido no dia 1º de fevereiro estará apto a reprodução no dia 1º de março, e reproduzirá um novo casal, efetivamente, em 1º de abril, em 1º de maio, em 1º de junho, e assim por diante.

Denotemos por A cada casal adulto (aptos a reproduzir) e por B cada casal bebê (inaptos a reproduzir).

A Figura 3.2 nos mostra, de forma mais didática, os quatro primeiros meses de um casal adulto, mês após mês, bem como o que se sucede, como a evolução dos casais gerados a partir desse primeiro.

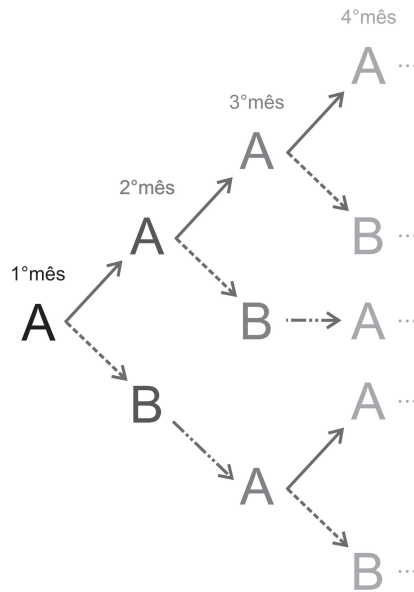


Figura 3.2: Esquema de nascimento de coelhos.

Fonte: Cruz [7], 2023.

A Tabela 3.1 traz o número de casais de cada tipo, A e B , além do número total de casais, a cada mês, a partir de janeiro, durante um ano.

Mês	Número de casais A	Número de casais B	Número total de casais
Janeiro	1	0	1
Fevereiro	1	1	2
Março	2	1	3
Abril	3	2	5
Maio	5	3	8
Junho	8	5	13
Julho	13	8	21
Agosto	21	13	34
Setembro	34	21	55
Outubro	55	34	89
Novembro	89	55	144
Dezembro	144	89	233
Janeiro/Ano 2	233	144	377

Tabela 3.1: Número de casais de coelhos.

A sequência de Fibonacci, a princípio, considerando $n \geq 1$, se dá conforme a coluna do número de casais A , ou seja,

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots).$$

Com alguma observação, é possível perceber que podemos obter a sequência anterior a partir da relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$, com $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$.

Exemplo 3.11 (Sequência de Lucas). Um dos grandes responsáveis por estudar e difundir a sequência de Fibonacci e sua lei de recorrência foi o matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842-1891) (Figura 3.3), mais conhecido como Édouard Lucas. Ele estudou com dedicação a sequência de Fibonacci, a qual nomeou e, além disso, estudou também a sequência que, posteriormente, levaria seu nome [6].



Figura 3.3: Édouard Lucas

Fonte: MacTutor History of Mathematics Archive [3].

A sequência de Lucas segue a mesma relação de recorrência da sequência de Fibonacci, porém, com termos iniciais $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$.

Desta forma, o que obtemos é a seguinte sequência:

$$(1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots).$$

A sequência de Lucas está profundamente ligada à sequência de Fibonacci e suas relações são motivos de estudo, frequentemente. Como veremos no Exemplo 5.10, a escolha de seus valores iniciais tornam sua versão da Fórmula de Binet mais simples que a de Fibonacci, o que a torna ainda mais notável [8].

Exemplo 3.12 (Sequência de Pell). Outra sequência famosa, também definida por uma relação de recorrência, é a sequência de Pell, cujo nome é atribuído ao matemático inglês John Pell (1611-1685) (Figura 3.4). É difícil afirmar quais as contribuições genuínas de Pell, devido ao pequeno número de publicações de sua autoria, mas não é complicado perceber que ele foi um matemático respeitado à sua época. De todo modo, entende-se que seu nome foi associado à sequência devido ao fato de que os números derivados dessa sequência são conhecidos como parte da *escada de Theon*, um algoritmo antigo para criar aproximações sucessivas para $\sqrt{2}$, e que possui relação com a *equação de Pell*, cujo nome pode ter surgido de uma confusão do matemático Leonhard Paul Euler (1707-1783) [9].



Figura 3.4: John Pell

Fonte: MacTutor History of Mathematics Archive [3].

A sequência de Pell tem como termos iniciais $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$. Entretanto, é definida pela relação de recorrência $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$, o que nos leva à sequência

$$(1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, \dots).$$

Exemplo 3.13. Curiosamente, o matemático que dá nome à sequência de Lucas é o responsável pela invenção de um dos jogos mais conhecidos no meio matemático, a Torre de Hanói (Figura 3.5), jogo inspirado por uma lenda hindu.

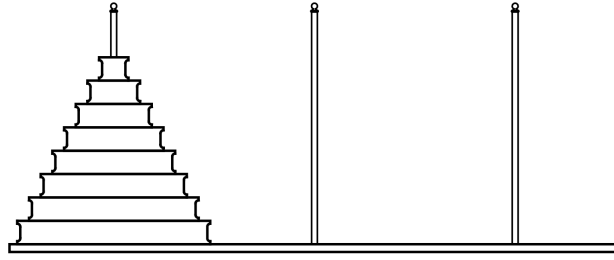


Figura 3.5: Configuração inicial dos discos no jogo da Torre de Hanói

Fonte: Lehman, Leighton, Meyer [10], 2017.

De acordo com a lenda, em um templo na cidade de Hanói, capital do Vietnã, haveria uma placa de bronze sobre a qual estariam fixadas três hastes de diamante. Encaixados em uma dessas hastes, o deus Brama (deus da criação, no hinduísmo), enquanto criava o mundo, teria encaixado 64 discos de ouro, cada um de um tamanho, de modo que os discos ficassem sobre a placa de bronze de forma decrescente, da base até o topo.

Aos monges do templo estaria atribuído o trabalho de mover os 64 discos para uma das outras duas hastes, com as seguintes restrições:

- Só seria permitido mover, de uma haste para outra, o disco da posição mais elevada na haste;
- Cada disco só poderia ser colocado sobre um disco maior que ele.

Ao término do trabalho, o mundo acabaria.

Com isso, surge uma questão: qual é número mínimo de movimentos necessários para finalizar o jogo?

Com 1 disco, a resposta é imediata. Um movimento. $T_1 = 1$.

Com 2 discos, três movimentos. $T_2 = 3$.

Com 3 discos, como mostra a Figura 3.6, são necessários 7 movimentos. $T_3 = 7$.

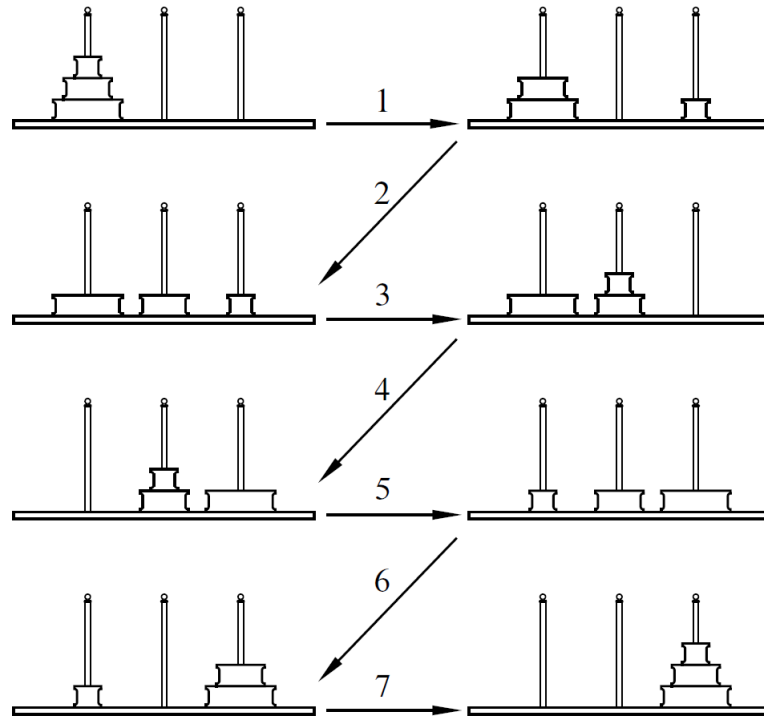


Figura 3.6: Solução de 7 movimentos para o jogo da Torre de Hanói com 3 discos
Fonte: Lehman, Leighton, Meyer [10], 2017.

Para facilitar a escrita, denotaremos a primeira haste (na qual estão os discos, inicialmente) por A e as outras duas por B e C , respectivamente.

Seja T_n o número mínimo de movimentos para finalizar um jogo com n discos, por exemplo, para mover os discos da haste A para a haste C .

A princípio, é necessário liberar o disco maior, ou seja, mover todos os $n - 1$ discos menores para a haste B , o que equivale a finalizar o jogo para $n - 1$ discos, ou seja, são necessários T_{n-1} movimentos.

Em seguida, podemos mover o disco maior para a haste C , com um único movimento.

Por fim, basta mover os $n - 1$ discos menores para cima do maior, agora na haste C , realizando T_{n-1} movimentos, novamente.

Somados os movimentos, temos a seguinte recorrência:

$$T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1.$$

Portanto, a sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dada por

$$T_1 = 1 \quad \text{e} \quad T_n = 2T_{n-1} + 1, \quad n \geq 2.$$

Note que, nos três primeiros casos, a recorrência corrobora o que havíamos assertado:

$$T_1 = 1;$$

$$T_2 = 2T_{2-1} + 1 = 2T_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3;$$

$$T_3 = 2T_{3-1} + 1 = 2T_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7.$$

No Exemplo 4.4 determinaremos o número mínimo de movimentos necessários para finalizar o jogo com 64 discos e descobriremos se devemos ou não nos preocupar com o fim do mundo.

3.3 Resolvendo relações de recorrência

Resolver uma relação de recorrência é encontrar uma expressão que forneça cada termo a_n das sequências geradas por ela, em função de n , não dos termos anteriores desconhecidos [11]. Tal expressão é chamada solução da recorrência.

Iniciaremos nossa exploração, provando que combinações lineares de soluções de recorrências lineares homogêneas, também são soluções.

Teorema 3.14. *Qualquer combinação linear de soluções de uma recorrência linear homogênea é também uma solução. Em outras palavras, se x_n e y_n são soluções da recorrência de ordem k*

$$\beta_n a_n + \beta_{n-1} a_{n-1} + \cdots + \beta_{n-k} a_{n-k} = 0,$$

então $\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n$ também o é, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Sendo x_n e y_n soluções da recorrência, podemos escrever

$$\beta_n x_n + \beta_{n-1} x_{n-1} + \cdots + \beta_{n-k} x_{n-k} = 0$$

e

$$\beta_n y_n + \beta_{n-1} y_{n-1} + \cdots + \beta_{n-k} y_{n-k} = 0.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} & \beta_n (\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n) + \beta_{n-1} (\alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 y_{n-1}) + \cdots + \beta_{n-k} (\alpha_1 x_{n-k} + \alpha_2 y_{n-k}) = \\ & \beta_n \alpha_1 x_n + \beta_n \alpha_2 y_n + \beta_{n-1} \alpha_1 x_{n-1} + \beta_{n-1} \alpha_2 y_{n-1} + \cdots + \beta_{n-k} \alpha_1 x_{n-k} + \beta_{n-k} \alpha_2 y_{n-k} = \\ & \alpha_1 (\beta_n x_n + \beta_{n-1} x_{n-1} + \cdots + \beta_{n-k} x_{n-k}) + \alpha_2 (\beta_n y_n + \beta_{n-1} y_{n-1} + \cdots + \beta_{n-k} y_{n-k}) = \\ & \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

o que significa que $\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n$ é solução, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. ■

Há vários métodos para solucionar uma relação de recorrência e para cada relação pode haver uma forma que pareça mais apropriada. Em alguns casos, é possível identificar um padrão na sequência gerada pela recorrência por meio de uma análise inicial, que pode envolver a observação de seus primeiros termos, uma interpretação geométrica ou outra forma exploratória. Com isso, podemos dar um palpite para sua solução e, após, provar a sua validade. A este método chamamos “inspeção”.

A seguir, veremos alguns exemplos de solução por inspeção.

Exemplo 3.15. Solucionaremos a relação $a_n = a_{n-1} + n + 1$ com termo inicial $a_1 = 3$.

Vamos iniciar expandindo a nossa recorrência

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n + 1 \\ &= a_{n-2} + (n-1) + 1 + n + 1 \\ &= a_{n-2} + (n-1) + n + 2 \\ &= a_{n-3} + (n-2) + 1 + (n-1) + n + 2 \\ &= a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n + 3 \\ &\vdots \\ &= a_{n-k} + (n-k+1) + (n-k+2) + \cdots + (n-1) + n + k. \end{aligned}$$

Tomando $k = n - 1$, essa inspeção revela o padrão:

$$a_n = a_1 + (n - n + 1 + 1) + (n - n + 1 + 2) + \cdots + (n - 1) + n + n - 1,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n) + n - 1 \\ &= 2 + (1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n) + n - 1 \\ &= 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n) + n \\ &= 1 + \frac{n(n + 1)}{2} + n \\ &= \frac{2 + n^2 + n + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}, \end{aligned}$$

o que resolve a recorrência pretendida.

Provemos, por indução finita sobre n , que $a_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$,

$$\frac{1^2 + 3 \cdot 1 + 2}{2} = \frac{1 + 3 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3 = a_1.$$

A base é válida.

ii) (H.I.) Suponhamos que valha para $n = k$, ou seja, $a_k = \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$.

iii) Provemos, usando a hipótese de indução, que $a_{k+1} = \frac{(k + 1)^2 + 3(k + 1) + 2}{2}$, ou seja, que $a_{k+1} = \frac{k^2 + 5k + 6}{2}$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + (k + 1) + 1 \\ &= a_k + k + 2 \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} + k + 2 \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2 + 2k + 4}{2} \\ &= \frac{k^2 + 5k + 6}{2} \end{aligned}$$

Por indução, segue o resultado.

Exemplo 3.16. Vamos resolver a relação de recorrência $a_n = \frac{n-2}{n} \cdot a_{n-1} + \frac{2}{n}$ com termo inicial $a_1 = 1$.

Podemos notar que:

$$\begin{aligned} a_2 &= \left(\frac{2-2}{2}\right) \cdot a_{2-1} + \frac{2}{2} = \frac{0}{2} \cdot a_1 + 1 = 0 \cdot 1 + 1 = 1; \\ a_3 &= \left(\frac{3-2}{3}\right) \cdot a_{3-1} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot a_2 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1; \\ a_4 &= \left(\frac{4-2}{4}\right) \cdot a_{4-1} + \frac{2}{4} = \frac{2}{4} \cdot a_3 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Um palpite plausível seria $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Provemos, por indução finita sobre n , que $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

- i) Para $n = 1$, $a_1 = 1$, o que já vimos ser verdade.
- ii) (H.I.) Suponhamos que valha para $n = k$, ou seja, $a_k = 1$.
- iii) Provemos, usando a hipótese de indução, que $a_{k+1} = 1$:

$$a_{k+1} = \left(\frac{(k+1)-2}{k+1} \right) \cdot a_k + \frac{2}{k+1} = \left(\frac{k-1}{k+1} \right) \cdot 1 + \frac{2}{k+1} = \frac{k+1}{k+1} = 1.$$

Por indução, segue o resultado.

Exemplo 3.17. Considere a relação de recorrência $a_n = n \cdot a_{n-1}$ com $a_1 = 1$.

Calculando os primeiros termos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2, \\ a_3 &= 3 \cdot a_2 = 6, \\ a_4 &= 4 \cdot a_3 = 24, \\ a_5 &= 5 \cdot a_4 = 120, \\ a_6 &= 6 \cdot a_5 = 720. \end{aligned}$$

Observamos que esses valores coincidem com os fatoriais dos respectivos índices. Assim, conjecturamos que:

$$a_n = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Provemos, por indução finita sobre n , que $a_n = n!, \forall n \in \mathbb{N}$.

- i) Para $n = 1$, temos $a_1 = 1 = 1!$, o que é verdadeiro.
- ii) (H.I.) Suponhamos que a afirmação seja válida para $n = k$, ou seja, que $a_k = k!$.
- iii) Provemos, usando a hipótese de indução, que $a_{k+1} = (k+1)!$:

$$a_{k+1} = (k+1) \cdot a_k = (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

Logo, pelo princípio da indução finita, concluímos que $a_n = n!, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.18. Consideramos a relação de recorrência dada por $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, com $a_1 = 1$ e $a_2 = 4$.

Vamos calcular os primeiros termos da sequência, a fim de identificar um padrão.

Considerando os valores iniciais $a_1 = 1$ e $a_2 = 4$ e aplicando a recorrência:

$$\begin{aligned} a_3 &= 4a_2 - 4a_1 = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 16 - 4 = 12, \\ a_4 &= 4a_3 - 4a_2 = 4 \cdot 12 - 4 \cdot 4 = 48 - 16 = 32, \\ a_5 &= 4a_4 - 4a_3 = 4 \cdot 32 - 4 \cdot 12 = 128 - 48 = 80, \\ a_6 &= 4a_5 - 4a_4 = 4 \cdot 80 - 4 \cdot 32 = 320 - 128 = 192, \\ a_7 &= 4a_6 - 4a_5 = 4 \cdot 192 - 4 \cdot 80 = 768 - 320 = 448, \\ a_8 &= 4a_7 - 4a_6 = 4 \cdot 448 - 4 \cdot 192 = 1792 - 768 = 1024. \end{aligned}$$

Observe que os primeiros termos da sequência são:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 12, \quad a_4 = 32, \quad a_5 = 80, \quad a_6 = 192, \quad a_7 = 448, \quad a_8 = 1024.$$

Buscando um padrão, observamos que se dividirmos os termos por potências de 2, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{2^0} &= 1, \\ \frac{a_2}{2^1} &= \frac{4}{2} = 2, \\ \frac{a_3}{2^2} &= \frac{12}{4} = 3, \\ \frac{a_4}{2^3} &= \frac{32}{8} = 4, \\ \frac{a_5}{2^4} &= \frac{80}{16} = 5, \\ \frac{a_6}{2^5} &= \frac{192}{32} = 6, \\ \frac{a_7}{2^6} &= \frac{448}{64} = 7, \\ \frac{a_8}{2^7} &= \frac{1024}{128} = 8. \end{aligned}$$

percebemos que os termos $\frac{a_n}{2^{n-1}}$ correspondem a n . Portanto, podemos conjecturar que a fórmula para a_n é:

$$a_n = n \cdot 2^{n-1}.$$

Provemos então, por indução finita sobre n , que $a_n = n \cdot 2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$, temos:

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad 1 \cdot 2^{1-1} = 1 \cdot 2^0 = 1.$$

A base é válida.

ii) (H.I.) Suponhamos que valha para $n \leq k$, dessa forma, valem $a_k = k \cdot 2^{k-1}$ e $a_{k-1} = (k-1) \cdot 2^{k-2}$.

iii) Provemos, usando a hipótese de indução, que $a_{k+1} = (k+1) \cdot 2^k$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4a_k - 4a_{k-1} \\ &= 4 \cdot k \cdot 2^{k-1} - 4 \cdot (k-1) \cdot 2^{k-2} \\ &= \frac{4 \cdot k \cdot 2^k}{2} - \frac{4 \cdot (k-1) \cdot 2^k}{4} \\ &= 2 \cdot k \cdot 2^k - (k-1) \cdot 2^k \\ &= (2 \cdot k - k + 1) \cdot 2^k \\ &= (k+1) \cdot 2^k. \end{aligned}$$

Logo, a fórmula é válida para $k+1$.

Pelo princípio da indução, a fórmula $a_n = n \cdot 2^{n-1}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.19. Solucionaremos a relação $a_n = a_{n-1} + 3n + 2$, com $a_1 = 1$.

Calculemos os primeiros termos da sequência, a fim de identificar um padrão.

$$\begin{aligned}a_1 &= 1, \\a_2 &= a_1 + 3 \cdot 2 + 2 = 1 + 6 + 2 = 1 + 8 = 9, \\a_3 &= a_2 + 3 \cdot 3 + 2 = 9 + 9 + 2 = 9 + 11 = 20, \\a_4 &= a_3 + 3 \cdot 4 + 2 = 20 + 12 + 2 = 20 + 14 = 34, \\a_5 &= a_4 + 3 \cdot 5 + 2 = 34 + 15 + 2 = 34 + 17 = 51, \\a_6 &= a_5 + 3 \cdot 6 + 2 = 51 + 18 + 2 = 51 + 20 = 71.\end{aligned}$$

Observe que, a partir de $n = 2$, o que temos é o termo anterior somado aos termos da sequência $(b_n) = (8, 11, 14, 17, 20, \dots)$, respectivamente. Podemos escrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned}a_1 &= 1, \\a_2 &= 1 + 8 = 9, \\a_3 &= 1 + 8 + 11 = 20, \\a_4 &= 1 + 8 + 11 + 14 = 34, \\a_5 &= 1 + 8 + 11 + 14 + 17 = 51, \\a_6 &= 1 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 = 71.\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever que $a_n = 1 + S_{n-1}$, em que S_{n-1} é a soma dos $n - 1$ primeiros termos da sequência (b_n) , que é uma P.A. de razão $r = 3$ e primeiro termo $b_1 = 8$.

O termo geral de (b_n) é

$$b_n = 8 + 3(n - 1) = 8 + 3n - 3 = 3n + 5,$$

e a soma de seus n primeiros termos é

$$S_n = \frac{(b_1 + b_n)n}{2} = \frac{(8 + (3n + 5))n}{2} = \frac{(3n + 13)n}{2} = \frac{3n^2 + 13n}{2}.$$

Desenvolvendo a_n , temos

$$a_n = 1 + \frac{3(n - 1)^2 + 13(n - 1)}{2} = \frac{3n^2 + 7n - 8}{2} = \frac{3n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 4.$$

Provemos então, por indução finita sobre n , que $a_n = \frac{3n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$, temos:

$$\frac{3}{2} + \frac{7}{2} - 4 = \frac{10}{2} - 4 = 5 - 4 = 1 = a_1.$$

ii) (H.I.) Suponhamos que valha para $n = k$, ou seja, que vale $a_k = \frac{3k^2}{2} + \frac{7k}{2} - 4$.

iii) Provemos, usando a hipótese de indução, que $a_{k+1} = \frac{3(k+1)^2}{2} + \frac{7(k+1)}{2} - 4$, ou seja, que $a_{k+1} = \frac{3k^2}{2} + \frac{13k}{2} + 1$.

Da recorrência, podemos escrever $a_{k+1} = a_k + 3(k+1) + 2$. Desenvolvendo, vem que:

$$a_{k+1} = a_k + 3(k+1) + 2 \stackrel{H.I.}{=} \frac{3k^2}{2} + \frac{7k}{2} - 4 + 3(k+1) + 2 = \frac{3k^2}{2} + \frac{13k}{2} + 1.$$

Pelo princípio da indução, a fórmula $a_n = \frac{3n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 4$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.20. Consideremos, agora, um tipo diferente de recorrência, que define a_n em termos de $a_{\frac{n}{2}}$:

$$a_n = a_{\frac{n}{2}} + 3.$$

Note que não faz sentido tomar n em $\{2, 3, 4, 5, \dots\}$, pois $\frac{n}{2}$ não pertence a esse conjunto, quando n é ímpar.

Isso pode nos levar a pensar em tomar n par, ou seja, em $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$, mas também não faz sentido, pois $\frac{n}{2}$ não pertence a esse conjunto quando n não é o dobro de um número par.

A recorrência faz sentido se tomarmos n em $\{2, 4, 8, 16, \dots\}$ ou, de outra forma, $\{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$. Podemos, então, reescrever a recorrência da seguinte forma:

$$a_{2^k} = a_{2^{k-1}} + 3,$$

para $k \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Há infinitas sequências que satisfazem essa recorrência. Para cada valor inicial a_1 ou a_{2^0} há uma única sequência que satisfaz a recorrência. Por exemplo, para $a_1 = a_{2^0} = 7$, temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{2^0} = 7, \\ a_2 &= a_{2^1} = a_{2^0} + 3 = 7 + 3 = 10, \\ a_4 &= a_{2^2} = a_{2^1} + 3 = 10 + 3 = 13, \\ a_8 &= a_{2^3} = a_{2^2} + 3 = 13 + 3 = 16, \\ a_{16} &= a_{2^4} = a_{2^3} + 3 = 16 + 3 = 19. \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} a_{2^k} &= a_{2^{k-1}} + 3 \\ &= a_{2^{k-2}} + 3 + 3 \\ &= a_{2^{k-3}} + 3 + 3 + 3 \\ &\vdots \\ &= a_{2^{k-k}} + 3k \\ &= a_{2^0} + 3k \\ &= 7 + 3k \end{aligned}$$

Provemos então, por indução finita sobre k , que $a_{2^k} = 7 + 3k, \forall k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

- i) Para $k = 0$, $7 + 3 \cdot 0 = 7 + 0 = 7 = a_{2^0}$.
- ii) (H.I.) Suponhamos que valha para $k = k'$, ou seja, que vale $a_{2^{k'}} = 7 + 3k'$.
- iii) Provemos, usando a hipótese de indução, que $a_{2^{k'+1}} = 7 + 3(k' + 1)$, ou seja, que $a_{2^{k'+1}} = 10 + 3k'$.

Da recorrência, podemos escrever $a_{2^{k'+1}} = a_{2^{k'}} + 3$. Desenvolvendo, temos:

$$a_{2^{k'+1}} = a_{2^{k'}} + 3 \stackrel{H.I.}{=} 7 + 3k' + 3 = 10 + 3k'.$$

Pelo princípio da indução, $a_{2^k} = 7 + 3k$ vale para todo $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Como $k = \log_2 n$, pois $n = 2^k$, temos:

$$a_n = 7 + 3 \log_2 n,$$

para todo $n \in \{2^0, 2^1, 2^2, 2^4, \dots\}$.

Exemplo 3.21. Consideremos a sequência definida em $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$ pela lei:

$$\begin{cases} a_n = 1, & \text{se } n = 1 \\ a_n = 2a_{\frac{n}{2}} + 7n + 2, & \text{se } n \in \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}. \end{cases}$$

Como no Exemplo 3.20, a recorrência faz sentido para $n \in \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$, pois para tais valores de n , temos $\frac{n}{2} \in \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$. Escrevendo 2^k no lugar de n , podemos reescrever a recorrência da seguinte forma:

$$a_{2^k} = 2a_{2^{k-1}} + 7 \cdot 2^k + 2,$$

para $k \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Ao abrirmos a expressão da recorrência, temos:

$$\begin{aligned} a_{2^k} &= 2a_{2^{k-1}} + 7 \cdot 2^k + 2 \\ &= 2(2a_{2^{k-2}} + 7 \cdot 2^{k-1} + 2) + 7 \cdot 2^k + 2 \\ &= 2^2 a_{2^{k-2}} + 7 \cdot 2^k + 2^2 + 7 \cdot 2^k + 2 \\ &= 2^2 a_{2^{k-2}} + 7 \cdot 2 \cdot 2^k + 2^2 + 2 \\ &= 2^2 (2a_{2^{k-3}} + 7 \cdot 2^{k-2} + 2) + 7 \cdot 2 \cdot 2^k + 2^2 + 2 \\ &= 2^3 a_{2^{k-3}} + 7 \cdot 2^k + 2^3 + 7 \cdot 2 \cdot 2^k + 2^2 + 2 \\ &= 2^3 a_{2^{k-3}} + 7 \cdot 3 \cdot 2^k + 2^3 + 2^2 + 2 \\ &\vdots \\ &= 2^k a_{2^{k-k}} + 7k2^k + \sum_{i=1}^k 2^i \\ &= 2^k a_{2^0} + 7k2^k + \sum_{i=1}^k 2^i \\ &= 2^k a_1 + 7k2^k + \sum_{i=1}^k 2^i \\ &= 2^k + 7k2^k + \sum_{i=1}^k 2^i \end{aligned}$$

Note que $\sum_{i=1}^k 2^i$ é a soma dos primeiros k termos de uma P.G. de termo inicial 2 e razão 2, que se dá da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^k 2^i = 2 \left(\frac{2^k - 1}{2 - 1} \right) = \frac{2^{k+1} - 2}{1} = 2^{k+1} - 2.$$

Assim,

$$a_{2^k} = 2^k + 7k2^k + 2^{k+1} - 2 = 2^k + 7k2^k + 2 \cdot 2^k - 2 = 7k2^k + 3 \cdot 2^k - 2.$$

Provemos então, por indução finita sobre k , que $a_{2^k} = 7k2^k + 3 \cdot 2^k - 2$, para todo $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

- i) Para $k = 0$, $7 \cdot 0 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^0 - 2 = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1 = a_{2^0}$.
- ii) (H.I.) Suponhamos que valha para $k = k'$, ou seja, que vale $a_{2^{k'}} = 7k'2^{k'} + 3 \cdot 2^{k'} - 2$.
- iii) Provemos, usando a hipótese de indução, que $a_{2^{k'+1}} = 7(k'+1)2^{k'+1} + 3 \cdot 2^{k'+1} - 2$, ou seja, que $a_{2^{k'+1}} = 2(7k'2^{k'} + 10 \cdot 2^{k'} - 1)$.

Da recorrência, podemos escrever $a_{2^{k'+1}} = 2a_{2^{k'}} + 7 \cdot 2^{k'+1} + 2$. Desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned} a_{2^{k'+1}} &= 2a_{2^{k'}} + 7 \cdot 2^{k'+1} + 2 \\ &\stackrel{H.I.}{=} 2(7k'2^{k'} + 3 \cdot 2^{k'} - 2) + 7 \cdot 2^{k'+1} + 2 \\ &= 7k'2^{k'+1} + 3 \cdot 2^{k'+1} - 4 + 7 \cdot 2^{k'+1} + 2 \\ &= 7k'2^{k'+1} + 10 \cdot 2^{k'+1} - 2 \\ &= 2(7k'2^{k'} + 10 \cdot 2^{k'} - 1). \end{aligned}$$

Pelo princípio da indução, $a_{2^k} = 7k2^k + 3 \cdot 2^k - 2$ vale para todo $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Como $k = \log_2 n$, pois $n = 2^k$, temos:

$$a_n = 7n \log_2 n + 3n - 2,$$

para todo $n \in \{2^0, 2^1, 2^2, 2^4, \dots\}$.

Embora a inspeção direta seja uma ferramenta útil e, por vezes, suficiente para resolver certas recorrências, especialmente as de baixa complexidade, ela não se mostra eficaz em casos mais elaborados. Por isso, a partir do próximo capítulo, exploraremos métodos mais sistemáticos e abrangentes, com base em teoremas e técnicas consolidadas, capazes de lidar com uma variedade maior de relações de recorrência — sejam elas lineares ou não, homogêneas ou não.

4 Recorrências lineares de primeira ordem

A maior parte das recorrências apresentadas até aqui pôde ser resolvida por inspeção direta: identificamos um padrão para os termos, propusemos uma conjectura para a_n e, por fim, verificamos que tal expressão satisfazia a relação de recorrência. Esse procedimento funciona bem em diversos casos, mas tem limitações. Algumas recorrências não exibem padrão simples nos primeiros termos, de modo que uma solução dificilmente pode ser adivinhada.

Considere, por exemplo, a recorrência linear não homogênea

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n + \frac{n}{2^n}.$$

À primeira vista, trata-se de uma relação de primeira ordem e parece acessível ao método de abrir a recorrência sucessivas vezes. Iniciando a expansão, obtemos:

$$\begin{aligned} a_2 &= \left(1 + \frac{1}{1}\right) a_1 + \frac{1}{2^1}, \\ a_3 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) a_2 + \frac{2}{2^2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) a_2 + \frac{1}{2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{1}\right) a_1 + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{1}\right) a_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \\ a_4 &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) a_3 + \frac{3}{2^3} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{1}\right) a_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] + \frac{3}{2^3} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{1}\right) a_1 + \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \\ &\quad + \left(1 + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} + \frac{3}{2^3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vamos tentar inferir um padrão para o termo geral a_n . A parte que acompanha a_1 é fácil de identificar e pode ser escrita como $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n$. O obstáculo é identificar um

padrão para o restante. Não que não seja possível, porém o leitor há de concordar que o padrão não está aparente.

Esse caso ilustra que, mesmo em recorrências lineares, o método de inspeção pode não ser suficiente. Surge, então, a necessidade de técnicas gerais para encontrar soluções.

4.1 Casos simples de recorrências homogêneas e não homogêneas

Uma recorrência linear de primeira ordem pode ser homogênea ou não homogênea. Quando é **homogênea**, pode ser escrita como

$$a_{n+1} = f(n) \cdot a_n,$$

onde $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida no conjunto de índices da sequência e, para cada n , tanto a_n quanto $f(n)$ são não nulos.

Resolver uma recorrência desse tipo é tarefa simples. Observe que, dado $a_1 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a_2 &= f(1) \cdot a_1, \\ a_3 &= f(2) \cdot a_2, \\ &\vdots \\ a_n &= f(n-1) \cdot a_{n-1}, \\ a_{n+1} &= f(n) \cdot a_n, \end{aligned}$$

o que implica:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot f(1) \cdot f(2) \cdots f(n-1) \cdot f(n),$$

ou seja,

$$a_{n+1} = a_1 \prod_{i=1}^n f(i).$$

Quando a recorrência linear de primeira ordem é **não homogênea**, ela pode ser escrita como

$$a_{n+1} = f(n) \cdot a_n + g(n),$$

onde $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções definidas no conjunto de índices da sequência e, para cada n , os valores a_n , $f(n)$ e $g(n)$ são não nulos.

O caso particular onde $f(n) = 1$ é de fácil análise. Dado $a_1 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + g(1), \\ a_3 &= a_2 + g(2), \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + g(n-1), \\ a_{n+1} &= a_n + g(n), \end{aligned}$$

o que implica:

$$a_{n+1} = g(n) + g(n-1) + \cdots + g(2) + g(1) + a_1,$$

ou seja,

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{i=1}^n g(i).$$

4.2 Simplificação de recorrências não homogêneas por substituição

Motivados pela exposição anterior, apresentaremos o próximo teorema, que garante que qualquer recorrência linear não homogênea $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n + g(n)$, com uma substituição adequada, pode ser transformada em uma recorrência, ainda não homogênea, mas da forma $b_{n+1} = b_n + h(n)$, que vimos ser simples de resolver, onde h é uma função definida no conjunto de índices da sequência.

Teorema 4.1. *Se x_n é uma solução não nula de $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$, com $f(n) \neq 0$, então a substituição $a_n = x_n \cdot b_n$ transforma a recorrência*

$$a_{n+1} = f(n) \cdot a_n + g(n)$$

em

$$b_{n+1} = b_n + \frac{g(n)}{f(n) \cdot x_n}.$$

Demonstração. Ao substituímos $a_n = x_n \cdot b_n$ em $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n + g(n)$, temos:

$$x_{n+1} \cdot b_{n+1} = f(n) \cdot x_n \cdot b_n + g(n).$$

Mas x_n é solução de $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$, o que implica que $x_{n+1} = f(n) \cdot x_n$ e, então

$$f(n) \cdot x_n \cdot b_{n+1} = f(n) \cdot x_n \cdot b_n + g(n),$$

ou seja,

$$b_{n+1} = b_n + \frac{g(n)}{f(n) \cdot x_n}.$$

■

Vejamos algumas aplicações do teorema anterior.

Exemplo 4.2. Considere $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$, onde $a_1 = 1$.

Claramente $a_{n+1} = 2a_n$ é a relação de recorrência de uma P.G. de razão 2 e, pelo Teorema 2.6, $x_n = x_1 \cdot 2^{n-1}$ é uma solução para ela. Assim sendo, pelo Teorema 3.14 $x_n = 2^{n-1}$ também o é.

Pelo Teorema 4.1, com a substituição $a_n = 2^{n-1} \cdot b_n$ vem que:

$$b_{n+1} = b_n + \frac{2^n}{2 \cdot 2^{n-1}} = b_n + \frac{2^n}{2^n} = b_n + 1.$$

Mas a relação de recorrência $b_{n+1} = b_n + 1$ caracteriza uma P.A. de razão 1, cujo termo geral é

$$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot 1 = b_1 + n - 1.$$

Como $a_n = 2^{n-1} \cdot b_n$ e $a_1 = 1$, então $b_1 = \frac{a_1}{2^{1-1}} = \frac{a_1}{2^0} = \frac{a_1}{1} = a_1 = 1$ e, com isso, $b_n = 1 + n - 1 = n$.

Por fim, $a_n = 2^{n-1} \cdot n$.

Exemplo 4.3. Resolveremos a recorrência $a_{n+1} = c_1 \cdot a_n + c_2$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes e $c_1 \notin \{0, 1\}$.

A recorrência $a_{n+1} = c_1 \cdot a_n$ caracteriza uma PG de razão c_1 . Por isso, $x_n = x_1 c_1^{n-1}$ é uma solução. E sendo assim, pelo Teorema 3.14, temos que $x_n = c_1^{n-1}$ também o é.

Fazendo a substituição $a_n = c_1^{n-1} \cdot b_n$, pelo Teorema 4.1 obtemos:

$$b_{n+1} = b_n + \frac{c_2}{c_1 \cdot c_1^{n-1}} = b_n + \frac{c_2}{c_1^n}.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 + \frac{c_2}{c_1^1} = b_1 + \frac{c_2}{c_1}; \\ b_3 &= b_2 + \frac{c_2}{c_1^2} = b_1 + \frac{c_2}{c_1} + \frac{c_2}{c_1^2}; \\ &\vdots \\ b_{n+1} &= b_1 + \frac{c_2}{c_1} + \frac{c_2}{c_1^2} + \cdots + \frac{c_2}{c_1^n} = b_1 + \sum_{i=1}^n \frac{c_2}{c_1^i} = b_1 + c_2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{c_1}\right)^i. \end{aligned}$$

Mas $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{c_1}\right)^i$ é a soma dos n primeiros termos de uma PG de razão $\frac{1}{c_1}$ e primeiro termo também $\frac{1}{c_1}$. Do Teorema 2.9, vem que:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{c_1}\right)^i = \frac{1}{c_1} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{c_1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{c_1}}\right) = \frac{1}{c_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{c_1^{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{c_1}{c_1 - 1}\right) = \frac{c_1^n - 1}{c_1^n(c_1 - 1)}.$$

Daí,

$$b_{n+1} = b_1 + c_2 \left(\frac{c_1^n - 1}{c_1^n(c_1 - 1)}\right).$$

Desfazendo a substituição, fazendo $b_n = \frac{a_n}{c_1^{n-1}}$, obtemos:

$$\frac{a_{n+1}}{c_1^n} = \frac{a_1}{c_1^0} + c_2 \left(\frac{c_1^n - 1}{c_1^n(c_1 - 1)}\right) = a_1 + \frac{c_2}{c_1^n} \left(\frac{c_1^n - 1}{c_1 - 1}\right).$$

Por fim, uma solução será:

$$a_{n+1} = a_1 c_1^n + c_2 \left(\frac{c_1^n - 1}{c_1 - 1}\right).$$

Exemplo 4.4. Voltemos a estudar a Torre de Hanói. Vamos solucionar a recorrência apresentada no Exemplo 3.13, ou seja, $T_n = 2T_{n-1} + 1$, com $T_1 = 1$.

A equação $T_n = 2T_{n-1}$ representa uma recorrência de P.G. de razão 2. Assim, $x_n = T_1 \cdot 2^{n-1}$ é uma solução e, pelo Teorema 3.14, $x_n = 2^{n-1}$ também o é.

Fazendo a substituição $T_n = 2^{n-1}W_n$, pelo Teorema 4.1 obtemos:

$$W_{n+1} = W_n + \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}} = W_n + \frac{1}{2^n}.$$

Note que:

$$\begin{aligned}
W_2 &= W_1 + \frac{1}{2}; \\
W_3 &= W_2 + \frac{1}{2^2} = W_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}; \\
&\vdots \\
W_{n+1} &= W_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = W_1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = W_1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i.
\end{aligned}$$

Pode-se observar que $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i$ é a soma dos n primeiros termos de uma P.G. de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo $\frac{1}{2}$.

Do Teorema 2.9, temos que:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} \right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Assim,

$$W_{n+1} = W_1 + \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Desfazendo a substituição, fazendo $W_n = \frac{T_n}{2^{n-1}}$, vem que:

$$\frac{T_{n+1}}{2^n} = \frac{T_1}{2^0} + \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 + \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{2^n}{2^n} + \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n - 1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}.$$

Portanto, uma solução para a recorrência será:

$$T_{n+1} = 2^{n+1} - 1,$$

ou ainda,

$$T_n = 2^n - 1.$$

Para responder à pergunta da lenda da Torre de Hanói, façamos $n = 64$. Assim:

$$T_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Portanto, para finalizar o jogo com 64 discos, são necessários 18 446 744 073 709 551 615 movimentos, no mínimo.

Curiosamente, se os monges realizassem um movimento por segundo, sem parar, levariam mais de 5 trilhões de anos para finalizar sua tarefa, enquanto que a idade estimada do Universo é de menos de 14 bilhões de anos. Podemos respirar aliviados, pois ainda que a lenda retratasse a realidade, não precisaríamos nos preocupar com o fim do mundo. Estaríamos mortos muito tempo antes que isso acontecesse.

Exemplo 4.5. Considere a recorrência $a_{n+1} = (n+1)a_n + n$, onde $a_1 = 1$.

Uma solução para $a_n = na_{n-1}$ é $x_n = n!$, como visto no Exemplo 3.17. Fazendo a substituição $a_n = n! \cdot b_n$, temos, pelo Teorema 3.14:

$$(n+1)!b_{n+1} = (n+1) \cdot n! \cdot b_n + n,$$

ou seja,

$$b_{n+1} = b_n + \frac{n}{(n+1) \cdot n!} = b_n + \frac{n}{(n+1)!} = b_n + \frac{n+1-1}{(n+1)!} = b_n + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Note que:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \\ b_3 &= b_2 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = b_1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = b_1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \\ b_4 &= b_3 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = b_1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = b_1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{4!} \\ &\vdots \\ b_n &= b_1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{n!} = b_1 + 1 - \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Desfazendo a substituição, fazendo $b_n = \frac{a_n}{n!}$, temos:

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{a_1}{1!} + 1 - \frac{1}{n!} = 1 + 1 - \frac{1}{n!} = 2 - \frac{1}{n!} = \frac{2n! - 1}{n!}.$$

Portanto,

$$a_n = 2n! - 1,$$

é uma solução para a recorrência.

Exemplo 4.6. Considere a recorrência $(n+1)a_{n+1} + na_n = 2n - 3$, com $a_1 = 1$.

Estudemos $(n+1)a_{n+1} + na_n = 0$, ou seja, $a_{n+1} = \left(-\frac{n}{n+1}\right)a_n$, onde $a_1 = 1$. Assim:

$$\begin{aligned} a_2 &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = -\frac{1}{2}, \\ a_3 &= \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}, \\ a_4 &= \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}, \\ a_5 &= \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}, \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Nesse caso, podemos conjecturar, observando o padrão anterior, que $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Provemos esse fato via indução finita:

i) Para $n = 1$, temos $\frac{(-1)^2}{1} = 1 = a_1$, o que é verdadeiro.

ii) (HI) Suponha que a fórmula vale para $n = k$, isto é, $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

iii) Provemos que vale para $n = k + 1$.

$$a_{k+1} = \left(-\frac{k}{k+1}\right) a_k \stackrel{H.I.}{=} -\frac{k}{k+1} \cdot \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{(k+1)+1}}{k+1}.$$

Assim, temos que a sequência (a_n) é, de fato, dada por $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, considerando $(n+1)a_{n+1} + na_n = 0$ com $a_1 = 1$.

Agora, para resolver a não homogênea, pelo Teorema 4.1, temos que, usando a substituição $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} b_n$:

$$\begin{aligned} (n+1) \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} b_{n+1} &= -n \frac{(-1)^{n+1}}{n} b_n + 2n - 3 \implies (-1)^n b_{n+1} = (-1)^n b_n + 2n - 3 \\ &\implies b_{n+1} = b_n + (-1)^n (2n - 3). \end{aligned}$$

Como $a_1 = 1$, segue que $b_1 = 1$, pois $a_1 = \frac{(-1)^2}{1} b_1$.

Busquemos uma solução, por inspeção, de $b_{n+1} = b_n + (-1)^n (2n - 3)$ com $b_1 = 1$. Considere $b_{j+1} = b_j + (-1)^j (2j - 3)$, então $b_{j+1} - b_j = (-1)^j (2j - 3)$. Somando para j variando de 1 até $n - 1$, em ambos os lados:

$$\sum_{j=1}^{n-1} b_{j+1} - b_j = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (2j - 3).$$

A soma do lado esquerdo resulta em $b_n - b_1$, então:

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (2j - 3) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (2j - 3).$$

Por fim, segue que a solução procurada neste exemplo fica

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (2j - 3) \right).$$

Exemplo 4.7. Seja a recorrência $a_{n+1} - na_n = (n+1)!$, com $a_1 = 1$.

Podemos reescrever a equação como $a_{n+1} = na_n + (n+1)!$. Uma solução para $a_{n+1} = na_n$ é $x_n = (n-1)!$.

De fato:

i) Para $n = 1$:

$$(1-1)! = 0! = 1 = a_1,$$

o que é verdadeiro.

ii) (H.I.) Suponhamos que valha para $n = k$, ou seja, que vale $a_k = (k-1)!$.

iii) Provemos, usando a hipótese de indução, que valha para $n = k + 1$, ou seja, que vale $a_{k+1} = k!$:

$$a_{k+1} = ka_k \stackrel{H.I.}{=} k(k-1)! = k!.$$

Portanto, pelo princípio da indução, $x_n = (n-1)!$ é uma solução para $a_{n+1} = na_n$, $n \in \mathbb{N}$

Fazendo $a_n = (n-1)! \cdot b_n$, temos, pelo Teorema 3.14:

$$n!b_{n+1} = n(n-1)!b_n + (n+1)!,$$

ou seja,

$$b_{n+1} = b_n + \frac{(n+1)!}{n!} = b_n + n + 1.$$

Observe:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 + 1 + 1 = 1 + 2; \\ b_3 &= b_2 + 2 + 1 = 1 + 2 + 3; \\ b_4 &= b_3 + 3 + 1 = 1 + 2 + 3 + 4; \\ &\vdots \\ b_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n. \end{aligned}$$

Veja que b_n é exatamente a soma dos n primeiros termos da P.A. de primeiro termo 1 e razão 1, ou seja, pelo Teorema 2.8:

$$b_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Desfazendo a substituição, ou seja, $b_n = \frac{a_n}{(n-1)!}$, vem que:

$$\frac{a_n}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n}{2}.$$

Portanto,

$$a_n = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{2} = \frac{(n+1)!}{2}$$

é uma solução para a recorrência.

Para finalizar esse capítulo, vamos solucionar o exemplo que introduzimos no início dele.

Exemplo 4.8. Considere a relação de recorrência

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n + \frac{n}{2^n}, \quad n \geq 1,$$

com $a_1 = 1$.

Estudemos $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n = \frac{n+1}{n} a_n$, com $a_1 = 1$. Escrevendo os primeiros termos:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{1} \cdot 1 = 2, \\ a_3 &= \frac{3}{2} a_2 = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3, \\ a_4 &= \frac{4}{3} a_3 = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Conjecturamos que $a_n = n$. Provemos por indução finita sobre n que essa fórmula vale para todo $n \geq 1$.

- i) Para $n = 1$ temos $a_1 = 1$, então obviamente a fórmula é válida.
- ii) (H.I.) Suponha que a fórmula vale para $n = k$, isto é, $a_k = k$.
- iii) Provemos que vale para $n = k + 1$.

$$a_{k+1} = \frac{k+1}{k} a_k \stackrel{\text{H.I.}}{=} \frac{k+1}{k} \cdot k = (k+1).$$

Portanto $a_n = n$ para todo $n \geq 1$. Para resolver a não homogênea, pelo Teorema 4.1, fazemos a substituição $a_n = n b_n$. Substituindo na recorrência original,

$$\begin{aligned} (n+1)b_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) (nb_n) + \frac{n}{2^n} \\ &= (n+1)b_n + \frac{n}{2^n}, \end{aligned}$$

de onde

$$b_{n+1} = b_n + \frac{n}{(n+1)2^n}.$$

Assim, $b_{n+1} - b_n = \frac{n}{(n+1)2^n}$. Somando essa igualdade para $k = 1, 2, \dots, n-1$ (telescopia discreta¹), obtemos

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)2^k}.$$

Como $a_1 = 1$ e $a_1 = 1 \cdot b_1$, segue $b_1 = 1$. Portanto

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)2^k}.$$

Finalmente, voltando à variável original $a_n = n b_n$, obtemos a solução explícita

$$a_n = n \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)2^k} \right), \quad n \geq 1.$$

Assim, finalizamos este capítulo. No próximo vamos apresentar as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas e não homogêneas.

¹Expressão somatória na qual os termos se cancelam sucessivamente, de modo que a soma total reduz-se apenas aos primeiros e últimos termos da sucessão.

5 Recorrências lineares de segunda ordem

5.1 Homogêneas

A princípio, trataremos de relações de recorrência lineares homogêneas de segunda ordem, com coeficientes constantes, ou seja, recorrências da forma:

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, \quad (5.1)$$

com p e q constantes reais, $q \neq 0$.

Solucionando relações de recorrência lineares homogêneas de primeira ordem do tipo $a_n = qa_{n-1}$, vimos que a solução geral é $a_n = a_0 \cdot q^n$, o que significa que $a_n = q^n$ também é uma solução.

É possível inferir que, para a recorrência da Equação (5.1), tenhamos também soluções da forma

$$a_n = r^n.$$

De fato, fazendo $a_n = r^n$ na Equação (5.1):

$$r^{n+2} + pr^{n+1} + qr^n = 0,$$

ou ainda,

$$r^n(r^2 + pr + q) = 0,$$

o que ocorre quando $r = 0$ ou quando

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (5.2)$$

A Equação (5.2) é chamada **equação característica** da recorrência da Equação (5.1) e suas raízes são chamadas raízes características da Equação (5.1).

O leitor familiarizado com a teoria das EDOs, deve ter reparado que a Equação (5.2) é a mesma equação característica da EDO linear homogênea de coeficientes constantes

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (5.3)$$

É conhecido, nesse contexto, que sendo r_1 e r_2 raízes da equação característica, se $r_1 \neq r_2$, a solução geral da Equação (5.3) fica $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, e caso $r_1 = r_2$, a solução geral fica $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_1 t}$. Isso ocorre porque a solução geral da homogênea é uma combinação linear de duas soluções linearmente independentes da homogênea. Em outras palavras, qualquer solução da EDO homogênea pode ser escrita na forma da solução geral, escolhendo-se as constantes adequadamente. Os dois teoremas seguintes, estabelecem um resultado análogo a este no contexto de recorrências.

Teorema 5.1. *Se as raízes complexas de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então uma solução da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ é*

a) $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$;

b) $x_n = C_1 r_1^n + C_2 n r_2^n$, para $r_1 = r_2 = \xi$;

quaisquer que sejam C_1 e C_2 .

Demonstração.

a) Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ em $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n$, obtemos:

$$\begin{aligned} & C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) = \\ & C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + pC_1 r_1^{n+1} + pC_2 r_2^{n+1} + qC_1 r_1^n + qC_2 r_2^n = \\ & C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = \\ & C_1 r_1^n \cdot 0 + C_2 r_2^n \cdot 0 = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

b) Se $r_1 = r_2 = \xi$, então $\xi = -\frac{p}{2}$.

Com efeito, se as raízes são iguais, o discriminante $p^2 - 4q$ de $r^2 + pr + q = 0$ é nulo, ou seja, sua raiz é

$$\xi = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-p \pm 0}{2} = -\frac{p}{2}. \quad (5.4)$$

Substituindo $a_n = C_1 \xi^n + C_2 n \xi^n$ em $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n$, obtemos:

$$\begin{aligned} & C_1 \xi^{n+2} + C_2 (n+2) \xi^{n+2} + p(C_1 \xi^{n+1} + C_2 (n+1) \xi^{n+1}) + q(C_1 \xi^n + C_2 n \xi^n) = \\ & C_1 \xi^{n+2} + C_2 n \xi^{n+2} + 2C_2 \xi^{n+2} + pC_1 \xi^{n+1} + pC_2 n \xi^{n+1} + pC_2 \xi^{n+1} + qC_1 \xi^n + qC_2 n \xi^n = \\ & C_1 \xi^n (\xi^2 + p\xi + q) + C_2 n \xi^n (\xi^2 + p\xi + q) + C_2 \xi^{n+1} (2\xi + p) \stackrel{\text{Equação (5.4)}}{=} \\ & C_1 \xi^n \cdot 0 + C_2 n \xi^n \cdot 0 + C_2 \xi^{n+1} \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

■

Teorema 5.2. *Se as raízes complexas de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então todas as soluções da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ são da forma*

a) $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, para $r_1 \neq r_2$;

b) $x_n = C_1 r_1^n + C_2 n r_2^n$, para $r_1 = r_2 = \xi$;

com C_1 e C_2 constantes.

Demonstração.

a) Seja y_n uma solução qualquer de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$.

Determinemos constantes C_1 e C_2 que solucionem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}$$

ou seja,

$$C_1 = \frac{r_2 y_1 - y_2}{r_1(r_2 - r_1)} \text{ e } C_2 = -\frac{r_1 y_1 - y_2}{r_2(r_2 - r_1)},$$

o que é possível, pois $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ e $r_1 \neq r_2$.

Afirmamos que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo n natural.

De fato, seja $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n . Observe que:

$$\begin{aligned} & z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n \\ &= y_{n+2} - C_1 r_1^{n+2} - C_2 r_2^{n+2} + py_{n+1} - pC_1 r_1^{n+1} - pC_2 r_2^{n+1} + qy_n - qC_1 r_1^n - qC_2 r_2^n \\ &= y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q). \end{aligned}$$

Mas y_n é solução de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, ou seja, $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.

Além disso, r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$, ou seja, $r_1^2 + pr_1 + q = 0$ e $r_2^2 + pr_2 + q = 0$.

Assim,

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0 - C_1 r_1^n \cdot 0 - C_2 r_2^n \cdot 0 = 0 - 0 - 0 = 0.$$

Dessa forma, $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. Também, como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$ com $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$, temos $z_1 = z_2 = 0$, o que implica $z_n = 0$ para todo n .

b) Seja y_n uma solução qualquer de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$.

Determinemos constantes C_1 e C_2 que solucionem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 \xi + C_2 \xi = y_1 \\ C_1 \xi^2 + 2C_2 \xi^2 = y_2 \end{cases}$$

ou seja,

$$C_1 = \frac{2\xi y_1 - y_2}{\xi^2} \text{ e } C_2 = \frac{y_2 - \xi y_1}{\xi^2},$$

o que é possível, pois $\xi \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1 \xi^n + C_2 n \xi^n$ para todo n natural.

De fato, seja $z_n = y_n - C_1 \xi^n - C_2 n \xi^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n . Observe que:

$$\begin{aligned} & z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n \\ &= y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n - C_1 \xi^n (\xi^2 + p\xi + q) - C_2 n \xi^n (\xi^2 + p\xi + q) - C_2 \xi^{n+1} (2\xi + p). \end{aligned}$$

Mas y_n é solução de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, ou seja, $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.

Além disso, ξ é raiz única de $r^2 + pr + q = 0$, o que implica $\xi^2 + p\xi + q = 0$, que traz ainda o fato, mostrado na Equação (5.4), de que, neste caso, $\xi = -\frac{p}{2}$, ou seja, $2\xi + p = 0$.

Assim,

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0 - C_1\xi^n \cdot 0 - C_2n\xi^n \cdot 0 - C_2\xi^{n+1} \cdot 0 = 0 - 0 - 0 - 0 = 0.$$

Dessa forma, $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. Também, como $C_1\xi + C_2\xi = y_1$ e $C_1\xi^2 + 2C_2\xi^2 = y_2$ com $z_n = y_n - C_1\xi^n - C_2n\xi^n$, temos $z_1 = z_2 = 0$, o que implica $z_n = 0$ para todo n .

■

De maneira análoga ao que ocorre na teoria das equações diferenciais ordinárias, as duas soluções linearmente independentes da recorrência linear homogênea de segunda ordem que geram a solução geral constituem o chamado **conjunto fundamental de soluções**. De acordo com o Teorema 5.2, quando as raízes características são distintas, isto é, $r_1 \neq r_2$, esse conjunto é dado por $\{r_1^n, r_2^n\}$. Já no caso de raiz dupla, $r_1 = r_2$, o conjunto fundamental de soluções é $\{r_1^n, nr_1^n\}$.

Observação 5.3. Consideremos, agora, um subcaso do item a) do Teorema 5.2: o caso em que as raízes r_1 e r_2 são conjugadas¹ complexas, mas não reais.

Podemos escrever as raízes em sua forma exponencial:

$$r_1 = ke^{i\theta} \text{ e } r_2 = ke^{-i\theta},$$

para algum número real k e algum ângulo $\theta \in]0, \pi[$, em particular, com $\sin \theta \neq 0$.

Ou ainda, na forma polar:

$$r_1 = k(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ e } r_2 = k(\cos \theta - i \sin \theta),$$

Assim, a solução apresentada no item a) do Teorema 5.2 pode ser escrita como:

$$x_n = C_1k^n e^{i \cdot n\theta} + C_2k^n e^{-i \cdot n\theta} = k^n(C_1e^{i \cdot n\theta} + C_2e^{-i \cdot n\theta}).$$

Usando a identidade de Euler, $e^{i \cdot n\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$, temos:

$$\begin{aligned} x_n &= k^n[C_1(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) + C_2(\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta))] \\ &= k^n[C_1(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) + C_2(\cos(n\theta) - i \sin(n\theta))] \\ &= k^n[(C_1 + C_2) \cos(n\theta) + i(C_1 - C_2) \sin(n\theta)]. \end{aligned}$$

Como vimos na Seção 2.1 do Capítulo 2, podemos considerar sequências como funções com domínios não necessariamente naturais, mas enumeráveis infinitos, que associam cada ponto no domínio a um número real. A seguir, é conveniente que consideremos o domínio dos naturais incluindo o zero, ou seja, $\{0\} \cup \mathbb{N}$.

Dados valores iniciais $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, temos:

$$a_0 = (C_1 + C_2) \cos(0) + i(C_1 - C_2) \sin(0) = C_1 + C_2 \quad (5.5)$$

e

$$a_1 = k[(C_1 + C_2) \cos(\theta) + i(C_1 - C_2) \sin(\theta)]. \quad (5.6)$$

¹O conjugado do número complexo $z = a + bi$ é o número complexo que possui parte real igual e parte imaginária oposta à de z , ou seja, $a - bi$. Denotamos o conjugado de z por $\bar{z}$.

Da Equação (5.5), temos que $C_1 + C_2$ é real, pois é igual a a_0 , o que significa que $\text{Im}(C_1) = -\text{Im}(C_2)$, onde $\text{Im}(C)$ indica a parte imaginária do número complexo C .

Da Equação (5.6), deduzimos que $i(C_1 - C_2)$ também é real, visto que $a_1, k \in \mathbb{R}$ e $\sin \theta \neq 0$. Sendo C_1 e C_2 complexos, podemos escrever $C_1 = x + yi$ e $C_2 = z + ti$, para $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$C_1 - C_2 = (x + yi) - (z + ti) = x - z + yi - ti = x - z + i(y - t).$$

Mas como $i(C_1 - C_2)$ é real, então $x - z = 0$, ou seja, $x = z$, o que implica que $\text{Re}(C_1) = \text{Re}(C_2)$, onde $\text{Re}(C)$ indica a parte real do número complexo C .

Das duas conclusões vem que $C_1 = \overline{C_2}$, ou seja, $C_1 = x + yi$ e $C_2 = x - yi$.

Com isso, podemos desenvolver a solução geral:

$$\begin{aligned} x_n &= k^n [(C_1 + C_2) \cos(n\theta) + i(C_1 - C_2) \sin(n\theta)] \\ &= k^n [(x + yi + x - yi) \cos(n\theta) + i(x + yi - x + yi) \sin(n\theta)] \\ &= k^n [2x \cos(n\theta) + i(2yi) \sin(n\theta)] \\ &= k^n [2x \cos(n\theta) + 2yi^2 \sin(n\theta)] \\ &= k^n [2x \cos(n\theta) - 2y \sin(n\theta)]. \end{aligned}$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 5.4. A recorrência $a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ possui equação característica $r^2 + 5r + 6 = 0$ com duas raízes reais, $r_1 = -3$ e $r_2 = -2$.

Assim, pelo Teorema 5.2, todas as soluções da recorrência são da forma

$$x_n = C_1(-3)^n + C_2(-2)^n,$$

com C_1 e C_2 constantes. Apenas para uma rápida comparação, observe que a equação característica dessa recorrência coincide com a da equação diferencial ordinária $y'' + 5y' + 6y = 0$. Nesse caso, todas as soluções da EDO são da forma

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t},$$

com C_1 e C_2 constantes, uma vez que a equação característica associada possui duas raízes reais e distintas, garantindo a existência de duas soluções linearmente independentes da forma exponencial.

Exemplo 5.5. A recorrência $a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 0$ possui equação característica $r^2 + 6r + 9 = 0$ com raiz única, $\xi = -3$.

Assim, pelo Teorema 5.2, todas as soluções da recorrência são da forma

$$x_n = C_1(-3)^n + C_2 n(-3)^n,$$

com C_1 e C_2 constantes. Para efeito de comparação, note que a equação característica dessa recorrência coincide com a da equação diferencial ordinária linear homogênea $y'' + 6y' + 9y = 0$. Nesse caso, todas as soluções da EDO são dadas por

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t},$$

com C_1 e C_2 constantes, uma vez que a equação característica associada possui uma raiz real de multiplicidade dois. Nessa situação, a simples repetição da solução exponencial não fornece duas soluções linearmente independentes, sendo necessário introduzir o fator t para obter um conjunto fundamental de soluções, assim como foi feito ao introduzir o fator n para obter um conjunto fundamental de soluções da recorrência.

Exemplo 5.6. A recorrência $a_{n+2} + 2a_{n+1} + 2a_n = 0$ possui equação característica $r^2 + 2r + 2 = 0$ com duas raízes complexas, $r_1 = -1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ e $r_2 = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Assim, pelo Teorema 5.2, todas as soluções da recorrência são da forma

$$x_n = C_1 \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right)^n + C_2 \left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)^n,$$

com C_1 e C_2 constantes complexas e conjugadas.

Ou ainda, pela Observação 5.3, podemos reescrever x_n como:

$$x_n = (\sqrt{2})^n \left[2x \cos \left(n \frac{3\pi}{4} \right) - 2y \sin \left(n \frac{3\pi}{4} \right) \right].$$

Para efeito de comparação, observe que a equação característica dessa recorrência coincide com a da equação diferencial ordinária linear homogênea $y'' + 2y' + 2y = 0$. Nesse caso, todas as soluções da EDO são da forma

$$y(t) = C_1 e^{(-1-i)t} + C_2 e^{(-1+i)t}.$$

Todavia, podemos reescrever essa solução em termos de funções reais. Usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, temos

$$e^{(-1-i)t} = e^{-t} e^{-it} = e^{-t} (\cos t - i \sin t),$$

$$e^{(-1+i)t} = e^{-t} e^{it} = e^{-t} (\cos t + i \sin t).$$

Substituindo na solução geral:

$$y(t) = C_1 e^{-t} (\cos t - i \sin t) + C_2 e^{-t} (\cos t + i \sin t) = e^{-t} [(C_1 + C_2) \cos t + i(C_2 - C_1) \sin t].$$

Definindo constantes reais $A = C_1 + C_2$ e $B = i(C_2 - C_1)$, obtemos a forma real

$$y(t) = e^{-t} (A \cos t + B \sin t),$$

que é equivalente à combinação linear de duas soluções linearmente independentes reais.

A partir do próximo exemplo, focaremos apenas nas soluções das recorrências homogêneas, deixando as analogias com EDOs de lado.

Exemplo 5.7. Considere a recorrência $a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, com $a_1 = -6$ e $a_2 = 12$.

Pelo Exemplo 5.4, temos que todas as soluções desta recorrência são da forma

$$x_n = C_1 (-3)^n + C_2 (-2)^n.$$

$$\text{Para } n = 1, -6 = C_1 (-3)^1 + C_2 (-2)^1 = -3C_1 - 2C_2.$$

$$\text{Para } n = 2, 12 = C_1 (-3)^2 + C_2 (-2)^2 = 9C_1 + 4C_2.$$

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3C_1 + 2C_2 = 6 \\ 9C_1 + 4C_2 = 12, \end{cases}$$

que nos leva a $C_1 = 0$ e $C_2 = 3$.

Portanto,

$$x_n = 3 \cdot (-2)^n.$$

Exemplo 5.8. Encontremos a fórmula para a sequência de Pell. Em outras palavras, resolvamos a recorrência $a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} + a_n$ para $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$. Podemos reescrever a recorrência como $a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0$.

Sua equação característica, $r^2 - 2r - 1 = 0$, possui duas raízes reais, $r_1 = 1 - \sqrt{2}$ e $r_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Assim, pelo Teorema 5.2, todas as soluções da recorrência são da forma:

$$x_n = C_1(1 - \sqrt{2})^n + C_2(1 + \sqrt{2})^n.$$

Para $n = 1$, $1 = C_1(1 - \sqrt{2}) + C_2(1 + \sqrt{2})$.

Para $n = 2$, $2 = C_1(1 - \sqrt{2})^2 + C_2(1 + \sqrt{2})^2$.

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1(1 - \sqrt{2}) + C_2(1 + \sqrt{2}) = 1 \\ C_1(1 - \sqrt{2})^2 + C_2(1 + \sqrt{2})^2 = 2, \end{cases}$$

que nos leva a $C_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ e $C_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Assim,

$$x_n = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2})^n.$$

O exemplo a seguir é um dos mais interessantes deste trabalho, pois nos dá a fórmula para a sequência de Fibonacci, conhecida como fórmula de Binet.

Exemplo 5.9 (Fórmula de Binet - Sequência de Fibonacci). Encontremos a fórmula para a sequência de Fibonacci. Em outras palavras, resolvamos a recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, para $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$.

Antes, vamos resolver a recorrência para quaisquer valores iniciais. Podemos reescrever a recorrência como $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$.

Sua equação característica, $r^2 - r - 1 = 0$, possui duas raízes reais, $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Observamos que $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o famoso *número de ouro* [21].

Assim, pelo Teorema 5.2, todas as soluções da recorrência são da forma:

$$x_n = C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Agora, apliquemos as condições iniciais da sequência de Fibonacci.

Para $n = 1$, $1 = C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$.

Para $n = 2$, $1 = C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2$.

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1, \end{cases}$$

que nos leva a $C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Assim,

$$x_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Desta forma, a fórmula de Binet deixa explícita a presença do *número de ouro* na sequência de Fibonacci.

Exemplo 5.10 (Fórmula de Binet - Sequência de Lucas). Encontremos a fórmula para a sequência de Lucas. Em outras palavras, resolvamos a recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, para $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$.

Note que já encontramos a solução geral para esta recorrência, no Exemplo 5.9. Portanto, basta aplicarmos as condições iniciais da sequência de Lucas.

$$\text{Para } n = 1, 1 = C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right).$$

$$\text{Para } n = 2, 3 = C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2.$$

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 3, \end{cases}$$

que nos leva a $C_1 = 1$ e $C_2 = 1$.

Assim,

$$x_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Observamos que, assim como na sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas está diretamente relacionada ao número de ouro.

5.2 Não homogêneas

Agora, trataremos de relações de recorrência lineares não homogêneas de segunda ordem, com coeficientes constantes, ou seja, recorrências da forma:

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n), \quad (5.7)$$

com p e q constantes, $q \neq 0$ e $f(n) \neq 0$.

Teorema 5.11. *Se x_n é uma solução particular da recorrência*

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n),$$

com p e q constantes, $q \neq 0$ e $f(n) \neq 0$, então a substituição $a_n = x_n + b_n$ transforma a recorrência em

$$b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n = 0.$$

Demonstração. Substituindo a_n por $x_n + b_n$ na recorrência, obtemos

$$\begin{aligned} x_{n+2} + b_{n+2} + p(x_{n+1} + b_{n+1}) + q(x_n + b_n) &= f(n) \implies \\ x_{n+2} + b_{n+2} + px_{n+1} + pb_{n+1} + qx_n + qb_n &= f(n) \implies \\ x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n + b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n &= f(n). \end{aligned}$$

Mas $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, por hipótese. Logo,

$$\begin{aligned} f(n) + b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n &= f(n) \implies \\ b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n &= 0. \end{aligned}$$

■

Observação 5.12. Com o Teorema 5.11, temos que a solução geral de uma relação de recorrência linear não homogênea de segunda ordem é a soma de uma de suas soluções particulares com a solução geral da homogênea associada. Mantendo as notações do Teorema 5.11, sendo x_n uma solução particular da recorrência

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$$

e b_n a solução geral de

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0,$$

então, a solução geral da recorrência é dada por

$$a_n = x_n + b_n.$$

O leitor que conhece a teoria de equações diferenciais sabe que a mesma propriedade ocorre com equações diferenciais ordinárias lineares não homogêneas. De fato, se considerarmos uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes

$$y'' + py' + qy = g(t),$$

uma solução particular $y_p(t)$ dessa equação não homogênea pode ser somada à solução geral $y_h(t)$ da equação homogênea associada

$$y'' + py' + qy = 0,$$

de modo que a solução geral da EDO não homogênea seja

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

O raciocínio é exatamente análogo ao fornecido pelo Teorema 5.11, qualquer solução da equação não homogênea pode ser escrita como a soma de uma solução particular e a solução geral da homogênea. Assim, tanto para EDOs quanto para recorrências lineares, a estrutura da solução geral se mantém, sendo sempre composta por uma parte formada pela solução geral da homogênea e uma parte por uma solução particular da não homogênea.

A partir deste ponto, discutiremos resultados relativos à obtenção de soluções particulares para recorrências lineares não homogêneas, uma vez que tais soluções são essenciais para construir a solução geral.

Teorema 5.13. *Sejam p , q e c constantes reais com $q \neq 0$. Uma solução particular da recorrência não homogênea*

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = c$$

é de uma das seguintes formas, para algum A constante.

- a) A , se 1 não é raiz característica da homogênea associada;
- b) An^m , se 1 é uma raiz característica da homogênea associada, com multiplicidade m , onde $m \in \{1, 2\}$.

Demonstração.

- a) Se 1 não é raiz característica da homogênea associada, então $1 + p + q \neq 0$.

Vejamos se é possível encontrar uma constante A que seja solução da recorrência.

Substituindo A na recorrência, temos:

$$\begin{aligned} A + pA + qA &= c \implies \\ A(1 + p + q) &= c \implies \\ A &= \frac{c}{1 + p + q}. \end{aligned}$$

Pela hipótese, $1 + p + q \neq 0$. Portanto, é possível encontrar uma constante A que seja solução da recorrência.

- b) Se 1 é uma raiz característica da homogênea associada, sabemos que $1 + p + q = 0$, que implica $q = -p - 1$. Mas além disso, temos dois casos possíveis:

- Caso 1: $m = 1$.

Neste caso², 1 é raiz de $f(r) = r^2 + pr + q$ com multiplicidade 1, o que implica $f'(1) \neq 0$. Como $f'(1) = 2 + p$, então $p \neq -2$.

Vejamos se é possível encontrar uma constante A tal que An seja solução da recorrência.

Substituindo An na recorrência, temos:

$$\begin{aligned} A(n + 2) + pA(n + 1) + qAn &= c \implies \\ An + 2A + pAn + pA + qAn &= c \implies \\ An(1 + p + q) + A(p + 2) &= c. \end{aligned}$$

Como $1 + p + q = 0$,

$$A(p + 2) = c \implies A = \frac{c}{p + 2}.$$

Como p não pode assumir o valor -2 , então $p + 2 \neq 0$ e, portanto, a expressão acima está bem definida.

Portanto, é possível encontrar uma constante A tal que An seja solução da recorrência.

- Caso 2: $m = 2$.

Neste caso³, 1 é raiz de $f(r) = r^2 + pr + q$ com multiplicidade 2, o que implica $f'(1) = 0$. Como $f'(1) = 2 + p$, então $p = -2$.

Assim, $1 + p + q = 1 - 2 + q = q - 1 = 0$, o que implica em $q = 1$, facilitando a escrita da recorrência, que passa a ser:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = c.$$

Vejamos se é possível encontrar uma constante A tal que An^2 seja solução da recorrência.

²O leitor pode consultar o Lema 9.18, na página 212, do livro [18].

³O leitor pode consultar o Lema 9.18, na página 212, do livro [18].

Substituindo An^2 no primeiro membro da recorrência e fazendo os devidos agrupamentos, temos:

$$\begin{aligned} A(n+2)^2 - 2A(n+1)^2 + An^2 &= c \implies \\ A(n^2 + 4n + 4) - 2A(n^2 + 2n + 1) + An^2 &= c \implies \\ An^2 + 4An + 4A - 2An^2 - 4An - 2A + An^2 &= c \implies \\ 2A &= c \implies \\ A &= \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, é possível encontrar uma constante A tal que An^2 seja solução da recorrência.

Analizados todos os casos, está concluída a prova. ■

Observação 5.14. Na prática, costuma-se substituir diretamente a forma proposta da solução particular na recorrência para determinar o coeficiente A . No entanto, também é possível utilizar fórmulas diretas, como as que foram encontradas durante a demonstração do Teorema 5.13, desde que suas condições sejam atendidas. São elas:

- $A = \frac{c}{1+p+q}$, se 1 não é raiz característica da homogênea associada;
- $A = \frac{c}{p+2}$, se 1 é raiz característica simples da homogênea associada;
- $A = \frac{c}{2}$, se 1 é raiz característica dupla da homogênea associada.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.15. A recorrência $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 7$ possui homogênea associada $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, cuja equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$ tem raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Assim, a solução geral da homogênea associada é $b_n = C_1 2^n + C_2 3^n$.

Agora, vamos procurar uma solução particular para a recorrência. Como 1 não é raiz característica da homogênea associada, sabemos que há uma solução particular da forma A , com $A = \frac{c}{1+p+q}$.

Neste caso, para $p = -5$, $q = 6$ e $c = 7$, temos

$$A = \frac{7}{1-5+6} = \frac{7}{2}.$$

Assim, a solução geral da recorrência é

$$a_n = \frac{7}{2} + C_1 2^n + C_2 3^n.$$

Exemplo 5.16. A recorrência $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 4$ possui homogênea associada $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, cuja equação característica $r^2 - 3r + 2 = 0$ tem raízes $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$. Assim, a solução geral da homogênea associada é $b_n = C_1 + C_2 2^n$.

Agora, vamos procurar uma solução particular para a recorrência. Como 1 é raiz característica da homogênea associada, com multiplicidade 1, sabemos que há uma solução particular da forma An , com $A = \frac{c}{p+2}$.

Neste caso, para $p = -3$ e $c = 4$, temos

$$A = \frac{4}{-3 + 2} = -4.$$

Assim, a solução geral da recorrência é

$$a_n = -4n + C_1 + C_2 2^n.$$

Exemplo 5.17. A recorrência $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = -1$ possui homogênea associada $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$, cuja equação característica $r^2 - 2r + 1 = 0$ tem raiz dupla igual a 1. Assim, a solução geral da homogênea associada é $b_n = C_1 + C_2 n$.

Agora, vamos procurar uma solução particular para a recorrência. Como 1 é raiz característica da homogênea associada, com multiplicidade 2, sabemos que há uma solução particular da forma An^2 , com $A = \frac{c}{2}$.

Neste caso, para $c = -1$, temos

$$A = -\frac{1}{2}.$$

Assim, a solução geral da recorrência é

$$a_n = -\frac{n^2}{2} + C_1 + C_2 n.$$

Teorema 5.18. *Sejam p , q e c constantes reais com $q \neq 0$. Uma solução particular da recorrência não homogênea*

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = cn$$

é de uma das seguintes formas, para algumas constantes A e B .

- a) $A + Bn$, se 1 não é raiz característica da homogênea associada;
- b) $An^m + Bn^{m+1}$, se 1 é uma raiz característica da homogênea associada, com multiplicidade m , onde $m \in \{1, 2\}$.

Demonstração.

- a) Se 1 não é raiz característica da homogênea associada, então $1 + p + q \neq 0$.

Vejamos se é possível encontrar A e B constantes tais que $A + Bn$ seja solução da recorrência.

Substituindo $A + Bn$ no primeiro membro da recorrência, temos:

$$\begin{aligned} A + B(n+2) + p(A + B(n+1)) + q(A + Bn) &= \\ A + Bn + 2B + pA + pBn + pB + qA + qBn &= \\ A(1 + p + q) + B(p + 2) + Bn(1 + p + q). \end{aligned}$$

Mas isso é igual a cn , então:

$$\begin{cases} A(1 + p + q) + B(p + 2) = 0 \\ B(1 + p + q) = c. \end{cases}$$

Da segunda equação,

$$B = \frac{c}{1 + p + q}.$$

Substituindo na primeira:

$$A(1+p+q) + \frac{c(p+2)}{1+p+q} = 0 \implies A = -\frac{c(p+2)}{(1+p+q)^2}.$$

Pela hipótese, $1+p+q \neq 0$. Portanto, é possível encontrar A e B constantes tais que $A+Bn$ seja solução da recorrência.

b) Se 1 é uma raiz característica da homogênea associada, sabemos que $1+p+q=0$, que implica $q=-p-1$. Mas além disso, temos dois casos possíveis:

- Caso 1: $m=1$.

Neste caso⁴, 1 é raiz de $f(r) = r^2 + pr + q$ com multiplicidade 1, o que implica $f'(1) \neq 0$. Como $f'(1) = 2+p$, então $p \neq -2$.

Vejamos se é possível encontrar A e B constantes tais que $An+Bn^2$ seja solução da recorrência.

Fazendo a substituição $a_n = An + Bn^2$, temos:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= A(n+1) + B(n+1)^2 \\ &= An + A + B(n^2 + 2n + 1) \\ &= An + A + Bn^2 + 2Bn + B \\ &= A + B + n(A + 2B) + Bn^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= A(n+2) + B(n+2)^2 \\ &= An + 2A + B(n^2 + 4n + 4) \\ &= An + 2A + Bn^2 + 4Bn + 4B \\ &= 2A + 4B + n(A + 4B) + Bn^2. \end{aligned}$$

Substituindo $An+Bn^2$ no primeiro membro da recorrência e fazendo os devidos agrupamentos, temos:

$$A(p+2) + B(p+4) + n[A(1+p+q) + 2B(p+2)] + Bn^2(1+p+q).$$

Da hipótese, $1+p+q=0$. Assim:

$$A(p+2) + B(p+4) + n[2B(p+2)].$$

Mas isso é igual a cn , então:

$$\begin{cases} A(p+2) + B(p+4) = 0 \\ 2B(p+2) = c. \end{cases}$$

Da segunda equação,

$$B = \frac{c}{2(p+2)}.$$

⁴O leitor pode consultar o Lema 9.18, na página 212, do livro [18].

Substituindo na primeira:

$$A(p+2) + \frac{c(p+4)}{2(p+2)} = 0 \implies A = -\frac{c(p+4)}{2(p+2)^2}.$$

Note que, se $p+2=0$, temos problemas, mas isso só acontece se $p=-2$, o que é impossível, como vimos.

Portanto, é possível encontrar A e B constantes tais que $An+Bn^2$ seja solução da recorrência.

- Caso 2: $m=2$.

Neste caso⁵, 1 é raiz de $f(r) = r^2 + pr + q$ com multiplicidade 2, o que implica $f'(1) = 0$. Como $f'(1) = 2+p$, então $p = -2$.

Assim, $1+p+q = 1-2+q = q-1 = 0$, o que implica em $q=1$, facilitando a escrita da recorrência, que passa a ser:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = cn.$$

Vejamos se é possível encontrar A e B constantes tais que An^2+Bn^3 seja solução da recorrência.

Fazendo a substituição $a_n = An^2+Bn^3$, temos:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= A(n+1)^2 + B(n+1)^3 \\ &= A(n^2 + 2n + 1) + B(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) \\ &= An^2 + 2An + A + Bn^3 + 3Bn^2 + 3Bn + B \\ &= A + B + n(2A + 3B) + n^2(A + 3B) + Bn^3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= A(n+2)^2 + B(n+2)^3 \\ &= A(n^2 + 4n + 4) + B(n^3 + 6n^2 + 12n + 8) \\ &= An^2 + 4An + 4A + Bn^3 + 6Bn^2 + 12Bn + 8B \\ &= 4A + 8B + n(4A + 12B) + n^2(A + 6B) + Bn^3. \end{aligned}$$

Substituindo An^2+Bn^3 no primeiro membro da recorrência, que agora escrevemos $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$, e fazendo os devidos agrupamentos, temos:

$$2A + 6B + 6Bn.$$

Mas isso é igual a cn , então:

$$\begin{cases} 2A + 6B = 0 \\ 6B = c. \end{cases}$$

Assim, na primeira equação,

$$2A + c = 0 \implies A = -\frac{c}{2}.$$

⁵O leitor pode consultar o Lema 9.18, na página 212, do livro [18].

E na segunda,

$$B = \frac{c}{6}.$$

Portanto, é possível encontrar A e B constantes tais que $An^2 + Bn^3$ seja solução da recorrência.

Analisados todos os casos, está concluída a prova. ■

Observação 5.19. Na prática, costuma-se substituir diretamente a forma proposta da solução particular na recorrência para determinar os coeficientes A e B . No entanto, também é possível utilizar fórmulas diretas, como as que foram encontradas durante a demonstração do Teorema 5.18, desde que suas condições sejam atendidas. São elas:

- $A = -\frac{c(p+2)}{(1+p+q)^2}$ e $B = \frac{c}{1+p+q}$, se 1 não é raiz característica da homogênea associada;
- $A = -\frac{c(p+4)}{2(p+2)^2}$ e $B = \frac{c}{2(p+2)}$, se 1 é raiz característica simples da homogênea associada;
- $A = -\frac{c}{2}$ e $B = \frac{c}{6}$, se 1 é raiz característica dupla da homogênea associada.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.20. A recorrência $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = -4n$ possui homogênea associada $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, cuja equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$ tem raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Assim, a solução geral da homogênea associada é $b_n = C_1 2^n + C_2 3^n$.

Agora, vamos procurar uma solução particular para a recorrência. Como 1 não é raiz característica da homogênea associada, sabemos que há uma solução particular da forma $A + Bn$, com $A = -\frac{c(p+2)}{(1+p+q)^2}$ e $B = \frac{c}{1+p+q}$.

Neste caso, para $p = -5$, $q = 6$ e $c = -4$, temos

$$A = -\frac{(-4)(-5+2)}{(1-5+6)^2} = -\frac{(-4)(-3)}{2^2} = -3$$

e

$$B = \frac{-4}{1-5+6} = -2.$$

Assim, a solução geral da recorrência é

$$a_n = -3 - 2n + C_1 2^n + C_2 3^n.$$

Exemplo 5.21. A recorrência $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 5n$ possui homogênea associada $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, cuja equação característica $r^2 - 3r + 2 = 0$ tem raízes $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$. Assim, a solução geral da homogênea associada é $b_n = C_1 + C_2 2^n$.

Agora, vamos procurar uma solução particular para a recorrência. Como 1 é raiz característica da homogênea associada, com multiplicidade 1, sabemos que há uma solução particular da forma $An + Bn^2$, com $A = -\frac{c(p+4)}{2(p+2)^2}$ e $B = \frac{c}{2(p+2)}$.

Neste caso, para $p = -3$ e $c = 5$, temos

$$A = -\frac{5(-3+4)}{2(-3+2)^2} = -\frac{5 \cdot 1}{2 \cdot (-1)^2} = -\frac{5}{2}$$

e

$$B = \frac{5}{2(-3+2)} = -\frac{5}{2}.$$

Assim, a solução geral da recorrência é

$$a_n = -\frac{5}{2}n - \frac{5}{2}n^2 + C_1 + C_2 2^n.$$

Exemplo 5.22. A recorrência $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2n$ possui homogênea associada $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$, cuja equação característica $r^2 - 2r + 1 = 0$ tem raiz dupla igual a 1. Assim, a solução geral da homogênea associada é $b_n = C_1 + C_2 n$.

Agora, vamos procurar uma solução particular para a recorrência. Como 1 é raiz característica da homogênea associada, com multiplicidade 2, sabemos que há uma solução particular da forma $An^2 + Bn^3$, com $A = -\frac{c}{2}$ e $B = \frac{c}{6}$.

Neste caso, para $c = 2$, temos

$$A = -\frac{2}{2} = -1$$

e

$$B = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Assim, a solução geral da recorrência é

$$a_n = -n^2 + \frac{n^3}{3} + C_1 + C_2 n.$$

Teorema 5.23. *Sejam p, q e c constantes reais com $q \neq 0$ e r constante complexa. Uma solução particular da recorrência não homogênea*

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = cr^n$$

é de uma das seguintes formas, para algum A constante.

- a) Ar^n , se r não é raiz característica da homogênea associada;
- b) $An^m r^n$, se r é uma raiz característica da homogênea associada, com multiplicidade m , onde $m \in \{1, 2\}$.

Demonstração. Note que $c, r \neq 0$, pois $cr^n \neq 0$, visto que a recorrência é não homogênea.

- a) Se r não é raiz característica da homogênea associada, então $r^2 + pr + q \neq 0$.

Vejamos se é possível encontrar A constante tal que Ar^n seja solução da recorrência.

Substituindo Ar^n na recorrência, temos:

$$\begin{aligned} Ar^{n+2} + pAr^{n+1} + qAr^n &= cr^n \implies \\ Ar^n(r^2 + pr + q) &= cr^n \implies \\ A &= \frac{c}{r^2 + pr + q}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ar^{n+2} + pAr^{n+1} + qAr^n &= cr^n \implies \\ Ar^n(r^2 + pr + q) &= cr^n \implies \\ A &= \frac{c}{r^2 + pr + q}. \end{aligned}$$

Se $r^2 + pr + q$ fosse nulo, teríamos problemas no denominador de A , mas a hipótese nos garante que isso não pode acontecer.

Portanto, é possível encontrar A constante tal que Ar^n seja solução da recorrência.

- b) Se r é uma raiz característica da homogênea associada, sabemos que $r^2 + pr + q = 0$. Mas além disso, temos dois casos possíveis:

- Caso 1: $m = 1$.

Neste caso⁶, r é raiz de $f(r) = r^2 + pr + q$ com multiplicidade 1, o que implica $f'(r) \neq 0$. Como $f'(r) = 2r + p$, então $2r + p \neq 0$.

Vejam se é possível encontrar A constante tal que Anr^n seja solução da recorrência.

Substituindo Anr^n na recorrência, temos:

$$\begin{aligned} A(n+2)r^{n+2} + pA(n+1)r^{n+1} + qAnr^n &= cr^n \implies \\ Ar^n((n+2)r^2 + pr(n+1) + qn) &= cr^n \implies \\ A(nr^2 + 2r^2 + prn + pr + qn) &= c \implies \\ A(n(r^2 + pr + q) + r(2r + p)) &= c. \end{aligned}$$

Mas pela hipótese, $r^2 + pr + q = 0$. Assim,

$$Ar(2r + p) = c \implies A = \frac{c}{r(2r + p)}.$$

Por fim, como $r \neq 0$ e $2r + p \neq 0$, é possível encontrar A constante tal que Anr^n seja solução da recorrência.

- Caso 2: $m = 2$.

Neste caso⁷, r é raiz de $f(r) = r^2 + pr + q$ com multiplicidade 2, o que implica $f'(r) = 0$. Como $f'(r) = 2r + p$, então $2r + p = 0$.

Vejam se é possível encontrar A constante tal que An^2r^n seja solução da recorrência.

Substituindo An^2r^n na recorrência, temos:

$$\begin{aligned} A(n+2)^2r^{n+2} + pA(n+1)^2r^{n+1} + qAn^2r^n &= cr^n \implies \\ Ar^n((n+2)^2r^2 + pr(n+1)^2 + qn^2) &= cr^n \implies \\ A(n^2 + 4n + 4)r^2 + pr(n^2 + 2n + 1) + qn^2 &= c \implies \\ A(r^2n^2 + 4r^2n + 4r^2 + prn^2 + 2prn + pr + qn^2) &= c \implies \\ A(n^2(r^2 + pr + q) + 2rn(2r + p) + 4r^2 + pr) &= c. \end{aligned}$$

⁶O leitor pode consultar o Lema 9.18, na página 212, do livro [18].

⁷O leitor pode consultar o Lema 9.18, na página 212, do livro [18].

Mas $r^2 + pr + q = 0$ e $2r + p = 0$. Assim:

$$A(4r^2 + pr) = c \implies A = \frac{c}{4r^2 + pr}.$$

Podemos simplificar ainda mais, pois $p = -2r$. Desse modo,

$$A = \frac{c}{4r^2 - 2r^2} = \frac{c}{2r^2},$$

o que é plenamente possível, visto que $r \neq 0$, ou seja, podemos encontrar A constante tal que An^2r^n seja solução da recorrência.

Analizados todos os casos, está concluída a prova. ■

Observação 5.24. Na prática, costuma-se substituir diretamente a forma proposta da solução particular na recorrência para determinar o coeficiente A . No entanto, também é possível utilizar fórmulas diretas, como as que foram encontradas durante a demonstração do Teorema 5.23, desde que suas condições sejam atendidas. São elas:

- $A = \frac{c}{r^2 + pr + q}$, se r não é raiz característica da homogênea associada;
- $A = \frac{c}{r(2r + p)}$, se r é raiz característica simples da homogênea associada;
- $A = \frac{c}{2r^2}$, se r é raiz característica dupla da homogênea associada.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.25. A recorrência $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 7 \cdot 5^n$ possui homogênea associada $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$, cuja equação característica $r^2 + r - 2 = 0$ tem raízes $r_1 = 1$ e $r_2 = -2$. Assim, a solução geral da homogênea associada é $b_n = C_1 + C_2(-2)^n$.

Agora, vamos procurar uma solução particular para a recorrência. Como 5 não é raiz característica da homogênea associada, sabemos que há uma solução particular da forma Ar^n , com $A = \frac{c}{r^2 + pr + q}$.

Neste caso, para $p = 1$, $q = -2$, $c = 7$ e $r = 5$, temos

$$A = \frac{7}{5^2 + 1 \cdot 5 - 2} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}.$$

Assim, a solução geral da recorrência é

$$a_n = \frac{5^n}{4} + C_1 + C_2(-2)^n.$$

Exemplo 5.26. A recorrência $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 6(-1)^n$ possui homogênea associada $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, cuja equação característica $r^2 + 3r + 2 = 0$ tem raízes $r_1 = -1$ e $r_2 = -2$. Assim, a solução geral da homogênea associada é $b_n = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n$.

Agora, vamos procurar uma solução particular para a recorrência. Como -1 é raiz característica da homogênea associada, com multiplicidade 1, sabemos que há uma solução particular da forma Anr^n , com $A = \frac{c}{r(2r + p)}$.

Neste caso, para $p = 3$, $q = 2$, $c = 6$ e $r = -1$, temos

$$A = \frac{6}{(-1)(2(-1) + 3)} = -6.$$

Assim, a solução geral da recorrência é

$$a_n = -6n(-1)^n + C_1(-1)^n + C_2(-2)^n.$$

Exemplo 5.27. A recorrência $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 10 \cdot 3^n$ possui homogênea associada $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$, cuja equação característica $r^2 - 6r + 9 = 0$ tem raiz dupla igual a 3. Assim, a solução geral da homogênea associada é $b_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$.

Agora, vamos procurar uma solução particular para a recorrência. Como 3 é raiz característica da homogênea associada, com multiplicidade 2, sabemos que há uma solução particular da forma $An^2 r^n$, com $A = \frac{c}{2r^2}$.

Neste caso, para $p = -6$, $q = 9$, $c = 10$ e $r = 3$, temos

$$A = \frac{10}{2 \cdot 3^2} = \frac{5}{9}.$$

Assim, a solução geral da recorrência é

$$a_n = \frac{5}{9} n^2 3^n + C_1 3^n + C_2 n 3^n.$$

Teorema 5.28 (Princípio da Superposição). *Sejam p e q constantes reais. Se x_n é uma solução de*

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$$

e y_n é uma solução de

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = g(n),$$

então, para as constantes A e B , $Ax_n + By_n$ é uma solução de

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = Af(n) + Bg(n).$$

Demonstração. De fato, substituindo a_n por $Ax_n + By_n$, em $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n$, obtemos:

$$\begin{aligned} Ax_{n+2} + By_{n+2} + p(Ax_{n+1} + By_{n+1}) + q(Ax_n + By_n) &= \\ Ax_{n+2} + By_{n+2} + pAx_{n+1} + pBy_{n+1} + qAx_n + qBy_n &= \\ A(x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n) + B(y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) &= \\ Af(n) + Bg(n), \end{aligned}$$

o que é verdade, pois da hipótese vem que

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$$

e

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = g(n).$$

Portanto, para as constantes A e B , $Ax_n + By_n$ é uma solução de

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = Af(n) + Bg(n).$$

■

O Teorema 5.28 ilustra o chamado princípio da superposição, que é válido não apenas para recorrências lineares de segunda ordem, mas também para equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Em outras palavras, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de

$$y'' + py' + qy = f(t) \quad \text{e} \quad y'' + py' + qy = g(t),$$

respectivamente, então qualquer combinação linear $Ay_1(t) + By_2(t)$, com constantes A e B , é solução da equação

$$y'' + py' + qy = Af(t) + Bg(t).$$

Esse paralelo decorre diretamente da linearidade dos operadores diferencial e deslocamento, apresentados na Introdução desta dissertação. Vejamos um exemplo de aplicação do Teorema 5.28.

Exemplo 5.29. Encontremos a solução geral da recorrência $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 7 + 5 \cdot 3^n$.

Como vimos no Exemplo 5.15:

- A solução geral para a recorrência homogênea associada $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ é

$$b_n = C_1 2^n + C_2 3^n;$$

- Uma solução particular para a recorrência $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 7$ é

$$x_n = \frac{7}{2}.$$

Agora, busquemos uma solução particular para $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 5 \cdot 3^n$. Como 3 é raiz característica da homogênea associada, com multiplicidade 1, sabemos que há uma solução particular da forma Anr^n , com $A = \frac{c}{r(2r+p)}$.

Neste caso, para $p = -5$, $q = 6$ e $c = 5$, temos

$$A = \frac{5}{3(2 \cdot 3 - 5)} = \frac{5}{3}.$$

Assim, obtemos a solução particular $y_n = \frac{5}{3}n3^n$, para $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 5 \cdot 3^n$

Portanto, pelo Teorema 5.28, $x_n + y_n$ é solução particular de $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 7 + 5 \cdot 3^n$.

Por fim, sua solução geral é

$$a_n = x_n + y_n + b_n = \frac{7}{2} + \frac{5}{3}n3^n + C_1 2^n + C_2 3^n.$$

6 Considerações Finais

Em suma, nesta dissertação nos propusemos a explorar relações de recorrências lineares de primeira e de segunda ordem, enunciando e demonstrando resultados que facilitam sua resolução, além de apresentar e justificar sua similaridade com as equações diferenciais ordinárias, por meio de investigações conceituais e exemplos detalhados.

Iniciamos o texto trazendo definições e teoremas sobre sequências, em especial, sobre progressões aritméticas e geométricas, conteúdos bem conhecidos, mas essenciais para a continuidade do trabalho. Em seguida, entramos, de fato, no assunto principal, definindo e classificando as relações de recorrência, exibindo diversos exemplos, incluindo exemplos famosos como as sequências de Fibonacci, Lucas e Pell, além de uma recorrência advinda do estudo do jogo da Torre de Hanói. Logo após estes primeiros exemplos, tratamos da resolução de relações de recorrência, trazendo o seu conceito, demonstrando um resultado sobre as soluções de uma recorrência linear homogênea e expondo exemplos de resolução pelo método da inspeção.

Mais adiante, nos deparamos com um caso em que o método da inspeção parecia não entregar uma saída tão satisfatória, o que nos motivou a buscar meios mais concretos de resolver relações de recorrência, a começar pelas de primeira ordem, em particular as não homogêneas, para as quais expusemos uma substituição que, via de regra, facilita a resolução deste tipo de recorrência, o que mostramos ao longo de diversos exemplos, incluindo o que se mostrara complexo por meio de inspeção. Por fim, discutimos a resolução de recorrências lineares de segunda ordem, a começar pelas homogêneas, onde a semelhança com o estudo de EDOs se tornou evidente, pois chegamos à equação característica e, a partir daí, surgiram resultados análogos aos do contexto das equações diferenciais ordinárias, os quais enunciamos, demonstramos e exemplificamos para as recorrências lineares de segunda ordem, tanto homogêneas como não homogêneas.

Cabe destacar a forma como os conteúdos foram abordados, trazendo demonstrações completas e exemplos para os resultados enunciados, a fim de evitar lacunas no desenvolvimento do trabalho, além das correlações apontadas com o contexto das EDOs. Para finalizar, é importante notar que recorrências raramente recebem um tratamento aprofundado nas disciplinas usuais dos cursos de graduação. Nesse contexto, este texto se apresenta como uma fonte de consulta para estudantes curiosos, servindo também como base para possíveis projetos de iniciação científica ou para estudos independentes introdutórios sobre o tema.

Referências

- [1] HEFEZ, A. *Indução Matemática*. 2009. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf>>. Acesso em: 27 mar. 2025.
- [2] FEOFILOFF, P. *Recorrências*. 2020. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/recurrence.html>. Acesso em: 03 abr. 2025.
- [3] MACTUTOR. *MacTutor History of Mathematics Archive*. 2025. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>>. Acesso em: 18 fev. 2025.
- [4] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Blucher, 2019.
- [5] OLIVEIRA, J. de C. *Números de Lucas e de Fibonacci: propriedades e conexões*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2023.
- [6] HOGGATT JR., V. E. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1969.
- [7] CRUZ, G. A. M. da S. *Um estudo sobre algumas famílias de números especiais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2023.
- [8] CARITÁ, L. A.; QUIRINO, M. E. S. C. Métodos da álgebra matricial para o estudo dos números de Lucas e de Fibonacci. Minicurso apresentado na Universidade Federal de São Carlos, pela XI Bienal da Matemática. 2024. Disponível em: <https://sbm.org.br/xi-bienal/wp-content/uploads/sites/31/2024/07/XI_BM_MINICURSO_Lucas_Carita_e_Maria_Eduarda_Quirino.pdf>.
- [9] NORONHA, W. F. R.; ALVES, F. R. V. Sequência de Pell: propriedades e considerações epistemológicas. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática (CQD)*, v. 13, p. 1 – 30, 2018.
- [10] LEHMAN, E.; LEIGHTON, F. T.; MEYER, A. R. *Mathematics for Computer Science*. Thames Ditton, Surrey, United Kingdom: Samurai Media Limited, 2017.
- [11] SÁ, L. S. C. de; SPREAFICO, E. V. P. Funções geradoras em recorrências lineares. *PORANDU - Revista de Divulgação Científica em Ciências Exatas e Tecnológicas*, v. 3, p. 33 – 40, 2019.
- [12] LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2022.

-
- [13] PEREIRA, M. V. *Recorrências – Problemas e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2014.
- [14] SIMÕES, D. A. da S. *Recorrências: Conceitos e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2014.
- [15] CHEN, B. *Recurrence Relations*. 2021. Disponível em: <<https://www.math.hkust.edu.hk/~mabfchen/Math2343/Recurrence.pdf>>. Acesso em: 03 abr. 2025.
- [16] UNIVERSITY, I. G. N. O. *Solving Recurrences*. 2017. Disponível em: <<https://egyankosh.ac.in/handle/123456789/10275>>. Acesso em: 10 jul. 2025.
- [17] LUNØE-NIELSEN, S. *Introduction to Recurrence Relations*. 2022. Disponível em: <<https://home.uia.no/sverreal/ma224/lecture7.pdf>>. Acesso em: 13 dez. 2024.
- [18] CARITÁ, L. A. *Tópicos Seleccionados em Estruturas Algébricas*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2024.
- [19] ZILL, D. G. *A First Course in Differential Equations With Modeling Applications*. New York: Cengage Learning, 2012.
- [20] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. [S.l.]: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2015.
- [21] ZAHN, M. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2011.
- [22] SILVA, B. T. da. *Indução Matemática: Discussão Teórica e uma Proposta de Ensino*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015.

A Apêndice: Princípio da Indução Finita

Neste apêndice, vamos explorar o Princípio da Indução Finita, uma ferramenta importante para a prova de proposições envolvendo os números naturais. Para isso, começaremos com algumas definições fundamentais e um axioma essencial para a construção da indução. Nossa principal referencia será a dissertação [22].

A.1 Conceitos básicos

A primeira definição importante é a de um *conjunto indutivo*.

Definição A.1. Um conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ é considerado indutivo se ele possui a seguinte propriedade: se um número natural n pertence a X , então seu sucessor, $n + 1$, também deve estar em X .

Em outras palavras, um conjunto é indutivo se, ao incluir um número, ele automaticamente inclui todos os seus sucessores.

Observação A.2. Se X é um conjunto indutivo que contém o número natural a , então X contém todos os números naturais que são maiores do que a .

Agora, introduzimos o *Axioma da Indução*, que é o pilar da indução finita.

Axioma A.3. Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ que seja indutivo e contenha o número 1, então X deve ser igual ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Esse axioma garante que, se um conjunto contém 1 e é indutivo, ele contém todos os números naturais, uma vez que podemos construir todos os naturais a partir de 1 utilizando a operação de sucessor.

Antes de enunciarmos o Princípio da Indução Finita, é necessário entender o que chamamos de uma *proposição em $\mathbb{N}$* . Trata-se de uma afirmação que pode ser verdadeira ou falsa dependendo de um número natural n . Pode-se usar a notação $P(n)$ para representar uma proposição que depende de n .

A.2 O Princípio da Indução Finita

Primeiramente, vejamos uma versão simplificada.

Teorema A.4 (Princípio da Indução Finita - Primeira Versão). *Se $P(n)$ é uma proposição associada ao número natural n , e se satisfaz as seguintes condições:*

1. $P(1)$ é verdadeira;

2. Para qualquer $n \geq 1$, se $P(n)$ verdadeira, implicar $P(n + 1)$ também verdadeira;

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar utilizando a definição de conjunto indutivo. Seja X o conjunto dos números naturais para os quais a proposição $P(n)$ é verdadeira, ou seja, $X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeira}\}$.

1. Sabemos que $P(1)$ é verdadeira (pela primeira condição).

2. Também sabemos que se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n + 1)$ também é verdadeira, para $n \geq 1$ (pela segunda condição).

Isso significa que X é um conjunto indutivo que contém 1. Pelo Axioma da Indução, concluímos que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Em algumas situações, pode ser necessária uma versão mais completa da indução finita. Suponhamos que a proposição $P(n)$ seja verdadeira a partir de um certo valor $a \in \mathbb{N}$. Nesse caso, podemos adaptar o princípio da indução para se aplicar a números naturais maiores ou iguais a a .

Teorema A.5 (Indução Finita - Versão Geral). *Se $P(n)$ é uma proposição que satisfaz as seguintes condições:*

1. $P(a)$ é verdadeira para algum $a \in \mathbb{N}$;

2. Para todo $n \geq a$, se $P(k)$ é verdadeira para todos os k tais que $a \leq k \leq n$, então $P(n + 1)$ também é verdadeira;

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Demonstração. Definimos $X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeira}\}$. Sabemos que $a \in X$ e que X é indutivo. Portanto, pela Observação A.2, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$. ■