



**PÓS-GRADUAÇÃO
ENGENHARIA
MECÂNICA**



MARCO TOSATI

**ESTUDO SOBRE A APLICABILIDADE DE UM NOVO MÉTODO DE
ACOPLAMENTO PARA MALHAS NÃO CONFORMES DE ELEMENTOS FINITOS
EM PROJETOS MECÂNICOS**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli

**Coorientador: Prof. Dr. Luís Antônio Guimarães
Bitencourt Júnior**

BAURU (SP)

2019

MARCO TOSATI

**ESTUDO SOBRE A APLICABILIDADE DE UM NOVO MÉTODO DE
ACOPLAMENTO PARA MALHAS NÃO CONFORMES DE ELEMENTOS FINITOS
EM PROJETOS MECÂNICOS**

**Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia
de Bauru da Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, como requisito para a obtenção do
título de Mestre em Engenharia Mecânica.**

**Orientador: Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli
Coorientador: Prof. Dr. Luís Antônio Guimarães
Bitencourt Júnior**

BAURU (SP)

2019

Tosati, Marco.

Estudo sobre a aplicabilidade de um novo método de acoplamento para malhas não conformes de elementos finitos em projetos mecânicos / Marco Tosati, 2019
84 p.: tabs.; fotos

Orientador: Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli

Coorientador: Prof. Dr. Luís Antônio Guimarães
Bitencourt Júnior

Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2019

1. Elementos Finitos de Acoplamento. 2. Malhas não Conformes. 3. Problemas de Contato I. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE MARCO TOSATI, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 25 dias do mês de fevereiro do ano de 2019, às 14:00 horas, no(a) Sala de Reuniões da Pós-graduação / FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Civil e Ambiental / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. CAIO GORLA NOGUEIRA do(a) Departamento de Engenharia Civil e Ambiental / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. LEONARDO JOSÉ DO NASCIMENTO GUIMARÃES do(a) Departamento de Engenharia Civil e Ambiental / Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de MARCO TOSATI, intitulada **ESTUDO SOBRE A APLICABILIDADE DE UM NOVO MÉTODO DE ACOPLAMENTO PARA MALHAS NÃO CONFORMES DE ELEMENTOS FINITOS EM PROJETOS MECÂNICOS**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI

Prof. Dr. CAIO GORLA NOGUEIRA

P/ Prof. Dr. LEONARDO JOSÉ DO NASCIMENTO GUIMARÃES

DEDICATÓRIA

À memória de Isaltino Tosati.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Aos Professores Dr. Luís Bitencourt Jr., Dr. Osvaldo Luís Manzoli e Dr. Eduardo Rodrigues pelo suporte e orientação durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos Professores Dr. Avelino Alves Filho e Dr. Reinaldo Sebastião Silva, pelo incentivo e apoio no segmento acadêmico.

À minha família por todo o apoio. Por fim, uma dedicatória especial ao meu pai Tosati, que descanse em paz.

“Com grandes poderes vêm grandes responsabilidades.”
Stan Lee (Tio Ben)

RESUMO

Este trabalho aborda a simulação de problemas que envolvem contato mecânico, utilizando uma nova técnica de acoplamento de malhas independentes de elementos finitos. Esta técnica se baseia no uso de elementos finitos especiais denominados elementos finitos de acoplamento, que compartilham nós de malhas independentes. A técnica é capaz de estabelecer a interação entre duas malhas de elementos finitos, representando dois domínios diferentes, que compartilham entre si uma ou mais de suas faces. No caso mais geral, devido a possíveis diferenças nas dimensões e naturezas dos domínios, as posições dos nós na face de uma malha podem não coincidir com as posições dos nós da outra malha. As principais vantagens da técnica proposta são: (i) não há adição de graus de liberdade para a resolução do problema; (ii) um acoplamento não rígido pode ser considerado para descrever o comportamento não linear de interfaces similares aos modelos coesivos e (iii) malhas não compatibilizadas de quaisquer dimensões e quaisquer tipos de elementos finitos podem ser compatibilizadas. Como extensão da utilização da técnica, visa-se representar a interação entre duas peças genéricas distintas, demonstrando a capacidade da técnica em simular efeitos de contato, ou de perda de contato, de forma coerente e precisa. Foram empregados modelos baseados na mecânica do dano contínuo para simular efeitos de atrito em uma formulação de acoplamento não rígido. Os resultados obtidos neste trabalho demonstram que a representação da interação entre partes de um problema mediante esse método é bastante promissora e consegue representar os efeitos da interação entre componentes estruturais.

PALAVRAS-CHAVE: Problemas de Contato, Malhas Não Conformes, Elementos Finitos de Acoplamento, Mecânica do Dano.

ABSTRACT

This work deals with the numerical simulation of contact problems using a novel technique for coupling non-matching finite element meshes. The technique is based on the use of special finite element termed coupling finite element, which share nodes with non-matching meshes. Thus, the interaction among two non-matching meshes, representing two different subdomains of a problem can be described. In addition, this technique has demonstrated to be highly versatile, since no additional degree of freedom is introduced to the problem; non-rigid coupling can be considered to describe the nonlinear behavior among the subdomains and non-matching meshes of any dimension and any type of finite elements can be coupled. In this work the technique is applied to simulate the interaction among some parts of mechanical components discretized initially in finite elements in a totally independent way, by demonstrating its capability to represent contact problems or loss of adherence. A combined constitutive model based on the damage mechanics theory is used for modeling the friction effects using a non-rigid coupling procedure. The results demonstrated that the strategy applied can represent the interaction among the parts of mechanical components, coherently and accurately.

KEYWORDS: Contact problems, Non-Matching Meshes, Coupling Finite Elements, Damage Mechanics.

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO IMPLÍCITO-EXPLÍCITO DO MODELO DE CONTATO PROPOSTO.	23
TABELA 2 – DESLOCAMENTOS NODAIS [MM] POR PASSO DE CARGA.	43
TABELA 3 – DESLOCAMENTOS NODAIS [MM] POR PASSO DE CARGA.	46
TABELA 4 – DESLOCAMENTOS NODAIS [MM] POR PASSO DE CARGA.	50
TABELA 5 – DESLOCAMENTOS NODAIS [MM] POR PASSO DE CARGA.	52
TABELA 6 – DESLOCAMENTOS NODAIS [MM] POR PASSO DE CARGA.	53
TABELA 7 – RIGIDEZ E TENSÃO POR NÚMERO DE ELEMENTOS NA ESPESSURA DE CADA LÂMINA.	61
TABELA 8 – COMPARAÇÃO DE TENSÃO NORMAL ENTRE MODELO TEÓRICO, MODELO DE ELEMENTOS FINITOS E ENSAIO DE B BANCADA	68
TABELA 9 - TENSÕES DE CISALHAMENTO VARIANDO-SE O COEFICIENTE DE ATRITO.	71
TABELA 10 - TENSÃO DE CISALHAMENTO ANALÍTICA E DE ELEMENTOS FINITOS, VARIANDO-SE A TENSÃO DE COMPRESSÃO.....	72

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - DISCRETIZAÇÃO DA ESTRUTURA EM ELEMENTOS FINITOS (ALVES FILHO, 2000).	1
FIGURA 2 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS: (A) DISCRETIZAÇÃO PADRÃO COM MALHAS CONFORMES E REFINAMENTO NA REGIÃO DE INTERESSE E (B) DISCRETIZAÇÃO COM MALHAS NÃO CONFORMES.	2
FIGURA 3 - MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS NÃO CONFORMES COMPATIBILIZADAS UTILIZANDO- SE ELEMENTOS FINITOS DE ACOPLAMENTO (BITENCOURT JR. ET AL., 2015).	4
ALÉM DISSO, AINDA HÁ A POSSIBILIDADE DE ESCORREGAMENTO ENTRE PARTES, PODENDO-SE CONSIDERAR FORÇAS DE ATRITO QUE DEPENDEM DAS FORÇAS NORMAIS E DO COEFICIENTE DE ATRITO. PARA TAL REPRESENTAÇÃO, COSTUMA-SE EFETUAR A DECOMPOSIÇÃO DOS VETORES EM COMPONENTES NORMAIS E TANGENCIAIS À SUPERFÍCIE DE CONTORNO (FIGURA 4).	12
FIGURA 5 - CONTATO SEM ATRITO: (A) CONTATO COM LUBRIFICANTE E (B) FORÇAS NA SUPERFÍCIE DE CONTATO (MAN, 1994).	12
FIGURA 6 - CONTATO COM ATRITO: (A) <i>STICK</i> E (B) <i>SLIP</i> (MAN, 1994)	13
FIGURA 7 – TIPOS DE CONTATO: (A) CONFORME E (B) NÃO CONFORME (MAN, 1994).	14
FIGURA 8 - PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO COM O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (SOUZA NETO, PERIC E, OWEN, 2011)	17
FIGURA 9 - COMPONENTES DE TENSÃO NORMAL E TANGENCIAL DE CONTATO SEGUNDO O SISTEMA DE COORDENADAS LOCAIS (N,S).	19
FIGURA 10 - MODELO DE ATRITO DE COULOMB	20
FIGURA 11 - CRITÉRIO DE DANO COM ATRITO DE COULOMB	21
FIGURA 12 – PROCEDIMENTO DE ACOPLAMENTO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS NÃO CONFORMES: A) PROBLEMA 2D COM DUAS MALHAS NÃO CONFORMES; B) PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DOS NÓS QUE IRÃO COMPOR OS ELEMENTOS DE ACOPLAMENTO; C) CRIAÇÃO E INSERÇÃO DOS ELEMENTOS DE ACOPLAMENTO (BITENCOURT JR. ET AL., 2015).	26
FIGURA 13 - ELEMENTOS FINITOS DE ACOPLAMENTO 2D: A) TRIANGULAR E B) QUADRILATERAL (BITENCOURT JR. ET AL., 2015).	28
FIGURA 14 - ESQUEMA DE ACOPLAMENTO EM UM SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAIS E LOCAIS.	31

FIGURA 15 – PROCEDIMENTO DE ACOPLAMENTO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS NÃO CONFORMES APLICADO AO EXEMPLO UNIDIMENSIONAL: (A) PROBLEMA REAL - GEOMETRIA E CONDIÇÃO DE CONTORNO; (B) MODELO DE CÁLCULO DISCRETIZADO – PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DOS NÓS QUE IRÃO COMPOR OS ELEMENTOS DE ACOPLAMENTO; (C) CRIAÇÃO E INSERÇÃO DO EFA NO MODELO E (D) ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS NESTE EXEMPLO – DOIS ELEMENTOS PADRÃO E UM ELEMENTO ESPECIAL.....	35
FIGURA 16 – DIMENSÕES GEOMÉTRICAS	42
FIGURA 17 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS.....	43
FIGURA 18 – CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	43
FIGURA 19 – TENSÃO DE COMPRESSÃO, PARA O ÚLTIMO PASSO DE CARGA	44
FIGURA 20 – PROCEDIMENTO DE ACOPLAMENTO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS NÃO CONFORMES APLICADO AO EXEMPLO UNIDIMENSIONAL: (A) PROBLEMA REAL - GEOMETRIA; (B) MODELO DE CÁLCULO DISCRETIZADO – PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DOS NÓS QUE IRÃO COMPOR OS ELEMENTOS DE ACOPLAMENTO, CRIAÇÃO E INSERÇÃO DO EFA NO MODELO; (C) ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS NESTE EXEMPLO – QUATRO ELEMENTOS PADRÃO E UM ELEMENTO ESPECIAL.	45
FIGURA 21 – DESLOCAMENTO NODAL – PASSO 10 DE CARGA.....	47
FIGURA 22 - CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	48
FIGURA 24 – DESLOCAMENTOS NODAIS – PASSO 8.....	49
FIGURA 25 – DEFORMAÇÃO, POR ELEMENTO, PARA OS PASSOS DE CARGA 2, 4, 8, 24 E 32.....	50
FIGURA 26 – TENSÃO, POR ELEMENTO, PARA OS PASSOS DE CARGA 2, 4, 8, 24 E 32.....	51
FIGURA 27 - GEOMETRIA, CONDIÇÕES DE CONTORNO E DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS.	54
FIGURA 28 - REPRESENTAÇÃO DA INTERAÇÃO DE COMPRESSÃO E PERDA DE ADERÊNCIA ATRAVÉS DO CAMPO DE TENSÕES NORMAIS VERTICAIS (MPA).	55
FIGURA 29 - ISOCURVAS DE DESLOCAMENTOS TOTAIS (MM)	56
FIGURA 30 - GEOMETRIA E CONDIÇÕES DE CONTORNO E DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS.....	57
FIGURA 31 - REPRESENTAÇÃO DA INTERAÇÃO DE COMPRESSÃO E PERDA DE ADERÊNCIA ATRAVÉS DO CAMPO DE TENSÕES NORMAIS VERTICAIS (MPA).	57
FIGURA 32 - ISOCURVAS DE DESLOCAMENTOS TOTAIS (MM)	58
FIGURA 33 – DIMENSÕES GEOMÉTRICAS.....	58
FIGURA 34 - ELEMENTOS DE ACOPLAMENTO ENTRE AS LÂMINAS 1 E 2.	59
FIGURA 35 - DISCRETIZAÇÃO POR LÂMINA, 40 ELEMENTOS.....	60

FIGURA 36 - GRÁFICO DE RIGIDEZ EM FUNÇÃO DA DISCRETIZAÇÃO DO MODELO.....	61
FIGURA 37 – DESLOCAMENTO VERTICAL (FATOR DE ESCALA 10).....	62
FIGURA 38 – (A) TENSÃO POR LÂMINA, (B) DETALHE DAS LÂMINAS (FATOR DE ESCALA 10).	62
FIGURA 39 – DESLOCAMENTO VERTICAL (FATOR DE ESCALA 10).....	63
FIGURA 40 – (A) TENSÃO POR LÂMINA, (B) DETALHE DAS LÂMINAS (FATOR DE ESCALA 10).	63
FIGURA 41 - SEPARAÇÃO DAS LÂMINAS (FATOR DE ESCALA 10).....	64
FIGURA 42 - DESCONTINUIDADE DOS DESLOCAMENTO HORIZONTAIS.....	64
FIGURA 43 - FEIXE DE MOLAS (DARÉ NETO, 1998).....	65
FIGURA 44 - CONDIÇÕES DE CONTORNO.	65
FIGURA 45 - DETALHE DA DISCRETIZAÇÃO DAS LÂMINAS 4 E 5.	66
FIGURA 46 - PONTOS EM ESTUDOS DO FEIXE DE MOLAS (DARÉ NETO, 1998).....	67
FIGURA 47 - RIGIDEZ VERTICAL DO CONJUNTO.....	67
FIGURA 48 – TENSÃO NORMAL XX [N/MM ²].	68
FIGURA 49 - BLOCO ENTRE BASES RÍGIDAS.....	69
FIGURA 50 - COEFICIENTE DE ATRITO NULO E TENSÃO DE CISALHAMENTO NULA.	70
FIGURA 51 - PRIMEIRO HISTÓRICO DE CARREGAMENTO.....	70
FIGURA 52 - DESLOCAMENTO VERTICAL PARA O PRIMEIRO HISTÓRICO DE CARREGAMENTO.	70
FIGURA 53 - COEFICIENTE DE ATRITO 0,1 – TENSÃO DE CISALHAMENTO = 9,52N/MM ²	71
FIGURA 54 - VARIAÇÃO DA TENSÃO DE CISALHAMENTO DEVIDO À VARIAÇÃO DA TENSÃO ENTRE O BLOCO E AS BASES RÍGIDAS.....	73
FIGURA 55 - DISCRETIZAÇÃO E ELEMENTOS DE ACOPLAMENTO	74
FIGURA 56 – MODELO NUMÉRICO DO PROBLEMA DE CISALHAMENTO À 45°.....	75
FIGURA 57 - DESLOCAMENTOS - PASSO DE CARGA 20 (FATOR DE ESCALA 0,1).....	76
FIGURA 58 - DESLOCAMENTOS - PASSO DE CARGA 60 (FATOR DE ESCALA 0,1).....	76
FIGURA 59 - PASSO DE CARGA 70 (FATOR DE ESCALA 0,2).	77
FIGURA 60 - GRÁFICO DE TRAJETÓRIAS.	77

LISTA DE SÍMBOLOS

F	<i>Vetor de Forças Externas</i>
K	<i>Matriz de Rigidez</i>
D	<i>Vetor de Deslocamentos Nodais</i>
$\bar{\mathbf{U}}$	<i>Campo de Deslocamentos Dentro do Elemento</i>
$\bar{N}_i$	<i>Função de Forma</i>
ϵ	<i>Vetor de Deformações dentro do Elemento</i>
B	<i>Matriz Deslocamento-Deformação</i>
f	<i>Vetor de Força Interna</i>
A	<i>Área da Seção do Elemento</i>
S	<i>Matriz de Elasticidade</i>
τ_{externo}	<i>Trabalho Externo</i>
$\tau_{\text{int erno}}$	<i>Trabalho Interno</i>
D*	<i>Vetor Deslocamento Virtual Arbitrário</i>
P	<i>Vetor Carga Pontual</i>
b	<i>Vetor Força de Volume</i>
p	<i>Vetor Força de Superfície</i>
σ	<i>Tensor das Tensões</i>
α	<i>Ângulo da Curva Tensão-Deformação no Regime Elástico</i>
E	<i>Módulo de Elasticidade</i>
ν	<i>Coefficiente de Poisson</i>
Ω	<i>Domínio</i>
Γ	<i>Contorno</i>
EFA	<i>Elemento Finito de Acoplamento</i>

A	<i>Operador de Montagem</i>
L	<i>Comprimento do Elemento</i>
$[[\mathbf{u}]]$	<i>Campo de Deslocamentos Relativos</i>
X_C	<i>Ponto Material</i>
B_e	<i>Matriz Deslocamento Relativo-Deslocamento Nodal</i>
C	<i>Matriz de Constantes Elásticas</i>
C_{node}	<i>Nó de Acoplamento</i>
δW_e^{int}	<i>Trabalho Virtual Interno do EFA</i>
$\mathbf{F}_e^{\text{int}}$	<i>Vetor de Força Interna do EFA</i>
$\mathbf{K}_e$	<i>Matriz de Rigidez do EFA</i>
$[[\mathbf{u}]]$	<i>Vetor de Deslocamento Relativo em Coordenadas Locais</i>
$\mathbf{f}_l$	<i>Vetor de Força Interna em Coordenadas Locais</i>
α	<i>Coeficiente de Atrito</i>

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Contexto e Motivação	1
1.2. Objetivos	5
1.3. Estrutura da Dissertação	6
2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	8
2.1. Formulação do MEF	8
2.2. Equações do MEF	9
2.3. Análise Não Linear Pelo Método dos Elementos Finitos	11
2.3.1. Classificação do Contato	12
2.3.1.1. Contato sem Atrito	12
2.3.1.2. Contato com Atrito	13
2.3.1.3. Contato conforme.....	14
2.3.1.4. Contato não conforme	14
2.3.2. Condições de Impenetrabilidade: Karush-Kuhn-Tucker	14
2.3.3. Processo Incremental e Iterativo de Solução das Equações de Equilíbrio	15
3. Modelo de Dano Discreto para Interação Entre Superfícies	18
3.1. Modelo de Contato	18
3.2. Modelos de Atrito de Coulomb	19
3.3. Modelo de Contato com Atrito	22
3.4. Esquema de Integração do Modelo Constitutivo (Impl-ex)	22
4. ACOPLAMENTO DE MALHAS NÃO CONFORMES	25
4.1. Visão Geral da Estratégia Para Acoplamento de Malhas Não Conformes	25
4.2. Elemento Finito de Acoplamento	28
4.2.1. Formulação Geral do EFA.....	28
4.2.1.1. Vetor de Força Interna	29

4.2.2.2. Matriz de Rigidez EFA	29
4.2.2. Modelo Linear Elástico.....	30
4.3. Acoplamento Rígido	30
4.4. Acoplamento Não Rígido	31
5. EXEMPLOS NUMÉRICOS	34
5.1. Introdução – EFA 1D.....	34
5.1.1. Análise Linear.....	37
5.1.1.1. Interpolação do Campo de Deslocamentos – Funções de Forma	37
5.1.1.2. Cálculo das Deformações	37
5.1.1.3. Cálculo das Tensões.....	38
5.1.1.4. Determinação dos Vetores de Força Interna.....	38
5.1.1.5. Determinação da Matriz de Rigidez da Estrutura Acoplada.....	39
5.1.2. Análise não linear	40
5.1.2.1. Incrementos de Carga	41
5.2. Barras Interferentes Sob Compressão – Exemplo com Elementos Finitos Padrões Considerando-se o Acoplamento Rígido	42
5.3. Barras Interferentes Sob Compressão – Exemplo com Elementos Finitos de Acoplamento Considerando-se o Acoplamento Rígido.....	44
5.4. Barras Interferentes Sob Carga Cíclica – Exemplo com Elementos Finitos Padrões Considerando-se o Acoplamento Rígido	47
5.5. Barras Interferentes Sob Carga Cíclica – Exemplo com Elementos Finitos de Acoplamento Considerando-se o Acoplamento Rígido.....	51
5.6. Mancal de Apoio (Contato sem Atrito)	54
5.7. Placa Sobre Base Não Rígida (Contato sem Atrito)	56
5.8. Lâminas Sobrepostas (Feixe de Mola).....	58
5.9. Lâminas Sobrepostas (Feixe de Mola).....	64
5.10. Bloco entre Bases Rígidas (Variações de Coeficiente de Atrito)	68
5.11. Bloco entre Bases Rígidas (Variações de Tensão Compressiva).....	71
5.12. Cisalhamento à Quarenta e Cinco Graus (Coeficiente de Atrito Constante	72

6. CONCLUSÕES.....	77
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

Na engenharia estrutural, tem-se como objetivo geral garantir a integridade da estrutura objeto de análise, de forma que ela seja capaz de resistir aos esforços decorrentes de suas condições de trabalho. Para isso, com base nas teorias da mecânica estrutural, utilizam-se métodos e ferramentas matemáticas disponíveis para a análise desta estrutura. Um dos métodos mais conhecidos para a análise estrutural é o Método dos Elementos Finitos (MEF), um método numérico já consagrado e que vem sendo aplicado para simular o comportamento mecânico de inúmeros problemas de engenharia, como ilustrado na Figura 1.

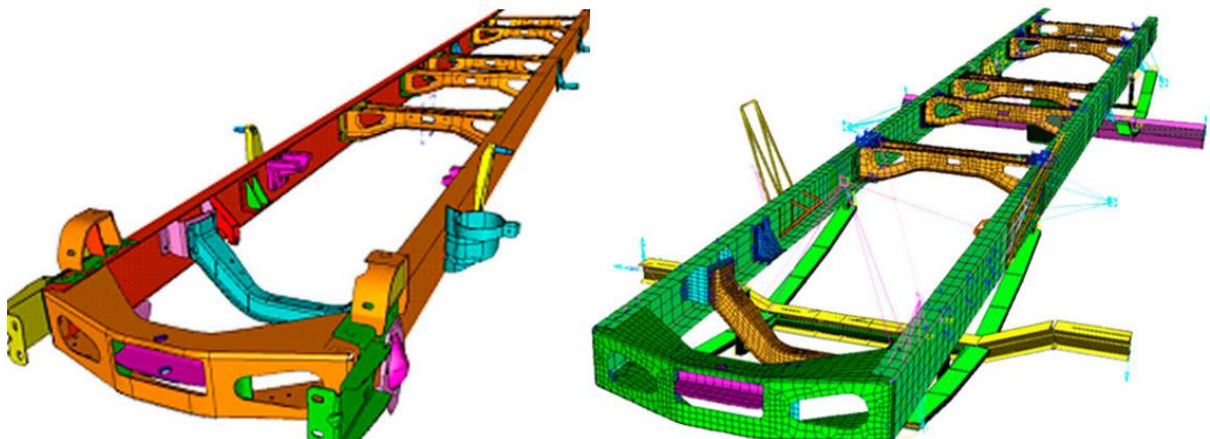


Figura 1 - Discretização da estrutura em elementos finitos (Alves Filho, 2000).

Sabe-se que a precisão do método está diretamente relacionada com o grau de refinamento da malha de elementos finitos. No entanto, quanto maior o número de graus de liberdade do problema, maior também a necessidade de recursos computacionais para sua resolução. Desta forma, soluções alternativas ao refinamento da discretização foram elaboradas. A mais comum delas consiste na discretização mais refinada somente nas regiões de interesse

do problema, mantendo-se uma discretização grosseira em regiões adjacentes. Em contrapartida, esta técnica pode implicar na presença de elementos distorcidos (Sellitto et al., 2011) na região de transição entre as regiões com malhas finas e grosseiras, prejudicando a qualidade dos resultados obtidos, como se pode observar na Figura 2(a). Alternativamente, esse tipo de problema também pode ser tratado através da discretização dos seus subdomínios de forma totalmente independentes e posterior aplicação de uma técnica de acoplamento de malhas não conformes, conforme ilustra a Figura 2(b). Nesta linha, destacam-se atualmente a aplicação desse tipo de técnica em problemas com abordagens multiescala (Unger et al., 2011; Lloberas-Valls et al., 2012; e Thirunavukkarasu e Guddati, 2012) e multifísica (Dureisseix e Bavestrello, 2006; Hueber e Wohlmuth, 2009; Bazilevs et al., 2012; e Peters et al., 2012).

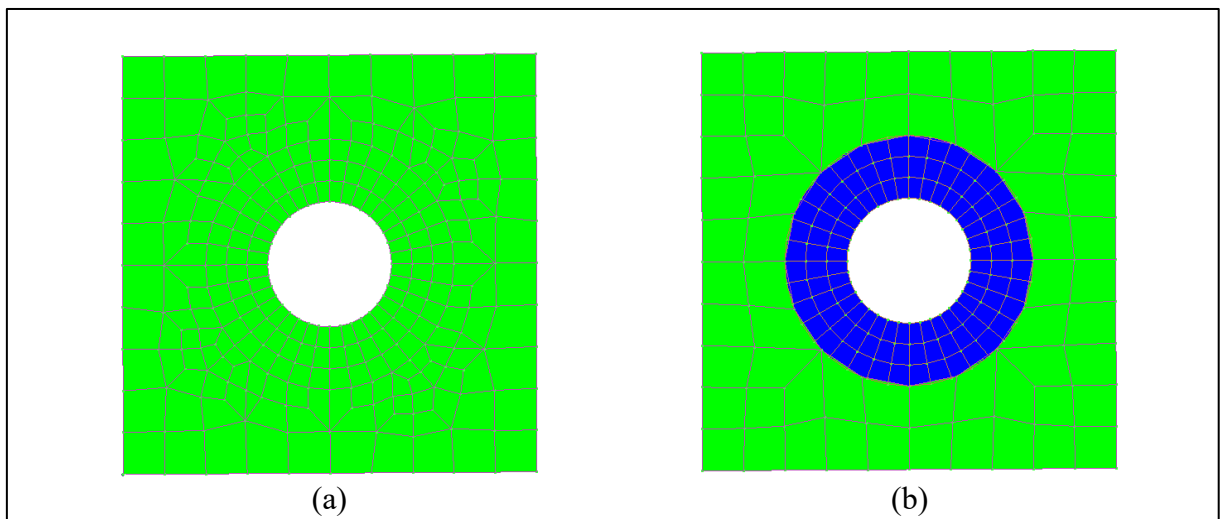


Figura 2 – Malha de elementos finitos: (a) discretização padrão com malhas conformes e refinamento na região de interesse e (b) discretização com malhas não conformes.

Diversos métodos de acoplamento têm sido propostos a fim de descrever de forma precisa a interação entre interfaces de malhas não conformes (Haikal e Hjelmstad, 2010). Dentre eles destacam-se: Multi-Point Constraint (MPC) (Unger et al., 2011); Mortar Method (Wohlmuth, 2001; e Lamichhane e Wohlmuth, 2004); e Arlequin Method (Dhia, 1998; e Dhia e Rateau, 2005). A primeira técnica consiste em obter os deslocamentos dos nós “solto” da malha local (refinada) na interface através da interpolação dos valores dos nós adjacentes da malha global (grosseira). Nos outros dois métodos, a condição de contorno é imposta através de um campo de multiplicadores de Lagrange, os quais introduzem graus de liberdade adicionais ao problema, e são usualmente classificados como abordagens duais. Outras alternativas existentes, como o Penalty Method (Pantano e Averill, 2002; e Pantano e

Averill, 2007), Discontinuous Galerkin Methods (Arnold et al., 2002) e Nitsche Methods (Nitsche, 1971), variáveis duais não são introduzidas ao problema, uma vez que a interface é representada através de seu campo de deslocamento e, por este motivo, em contraste com os métodos duais, esses métodos não estão sujeitos a restrições Ladyzhenskaya–Babuska–Brezzi (LBB). Contudo, um parâmetro de estabilização é necessário. Por fim, cabem destacar os métodos baseados em elementos finitos de interface, os quais usualmente transformam elementos finitos padrões localizados nas interfaces não conformes, em elementos finitos especiais para acoplar os subdomínios inicialmente independentes (H.-G. Kim, 2002; e H.-G. Kim, 2003).

Levando-se em consideração tais técnicas de acoplamento, pode-se também utilizá-las para a representação do contato entre corpos, como o Penalty Method e o Lagrange Multiplier Method (Sitzmann, Wikkner e Wohlmuth, 2015). Simplificadamente, o Penalty Method considera que uma mola é gerada entre a superfície independente (*master surface*) e a região dependente (*slave location*), modelando o vetor de tensão de contato (*contact traction*) como uma função dos deslocamentos através de uma constante de mola, quando a condição de penetração é violada. Como vantagem desta abordagem, tem-se a não adição de variáveis ao sistema, porém pode haver o mau condicionamento do sistema de matrizes para o contato rígido. O Lagrange Multiplier Method, por sua vez, trata o vetor de tensão de contato como uma variável extra com o benefício de ser capaz de modelar arbitrariamente o contato rígido. A desvantagem está no maior custo computacional, uma vez que a solução do sistema de equações se torna mais trabalhosa (Sitzmann, Wikkner e Wohlmuth, 2015), tendo de solucionar um sistema de equações ampliado (*saddle point system*) com respeito aos deslocamentos e ao vetor de tensão de contato para toda interação da análise (iteração por Newton-Raphson).

Para o modelamento do contato entre corpos deformáveis e malhas não conformes, o Lagrange Multiplier Method está fortemente relacionado aos Mortar Methods (Bernardi, Maday, Patera, 1994; e Belgacem, 1999). Encontra-se este método adaptado para problemas de contato envolvendo pequenas deformações em Belgacem, Hild e Laborde (1998). Dentre os Mortar Methods, o Dual Mortar Method (Wohlmuth, 2011; e Wohlmuth, 2001) é um dos que mais gera interesse nos últimos anos, uma vez que ele aplica a condição de não penetração de forma consistente variacionalmente, sem o aumento do sistema de equações, pois o multiplicador de Lagrange é condensado no sistema global antes da iteração, sem prejudicar a qualidade da solução.

Sabendo-se da necessidade de desenvolvimento de técnicas que facilitem o dia a dia na engenharia, possibilitando que os modelos numéricos elaborados sejam cada vez mais simples e precisos, esse trabalho aborda a simulação de problemas de engenharia envolvendo contato, utilizando uma nova técnica de acoplamento de malhas independentes de elementos finitos, recentemente desenvolvida por Bitencourt Jr. et al. (2015). As principais vantagens da técnica proposta são: (i) não há adição de graus de liberdade para a resolução do problema; (ii) um acoplamento não rígido pode ser considerado para descrever o comportamento não linear de interfaces similares aos modelos coesivos; (iii) malhas originalmente não compatibilizadas de quaisquer dimensões e quaisquer tipos de elementos finitos podem ser compatibilizadas e (iv) malhas sobrepostas e não sobrepostas podem ser consideradas. Em Bitencourt Jr. et al. (2015), apresentam-se a validação e demonstração das vantagens e desvantagens da aplicação do método em relação ao custo computacional, simplicidade de elaboração dos modelos de elementos finitos, a melhora da qualidade dos elementos, entre outros, em comparação com outros métodos existentes. Apresentam-se também exemplos 2D e 3D de malhas não conformes para demonstrar a aplicabilidade da técnica proposta. Além disso, demonstra-se a capacidade de representar a continuidade dos deslocamentos para o caso de acoplamentos rígidos e a transferência das forças de interação entre as interfaces não conformes, de acordo com o modelo de interface escolhido, para casos de acoplamento não rígido. Na Figura 3, tem-se a ilustração de um exemplo da compatibilização de malhas não conformes, apresentado por Bitencourt Jr. et al. (2015).

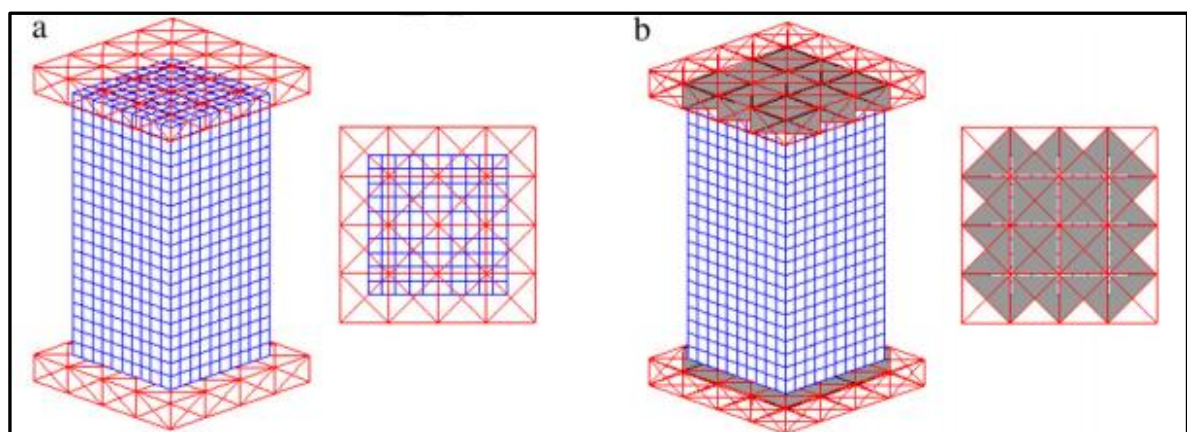


Figura 3 - Malhas de elementos finitos não conformes: (a) discretização dos apoios e coluna em elementos finitos de forma independente; e (b) acoplamento (compatibilização) das malhas utilizando elementos finitos de acoplamento (Bitencourt Jr. et al., 2015).

Neste trabalho, para a elaboração dos modelos a serem utilizados como exemplo, primeiro utiliza-se um programa computacional de desenho CAD (*Computer-Aided Design*)

para o desenvolvimento da geometria dos componentes do modelo estabelecendo as regiões de contato entre as partes, a fim de se entender os variados comportamentos físicos que servirão de parâmetro para a modelagem do problema. Posteriormente, são elaborados os modelos em elementos finitos de todos os componentes de forma independente, podendo-se utilizar tipos diferentes de elementos e refinamentos de malha para cada domínio, de acordo com os objetivos da análise de cada subdomínio. Para a construção desses modelos, utilizam-se programas computacionais de pré-processamento: FEMAP with NX Nastran® e GiD®. Como processador, será utilizado um programa próprio, desenvolvido em MATLAB® pelo grupo de pesquisa em Modelagem Computacional em Mecânica dos Sólidos da Faculdade de Engenharia de Bauru (FEB) da Universidade Estadual Paulista (UNESP), coordenado pelo Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli. Também em MATLAB®, são gerados os elementos especiais responsáveis pela compatibilização das malhas. Os programas computacionais de pré-processamento (FEMAP with NX Nastran®) e de desenho CAD foram gentilmente disponibilizados pela empresa NCE (Núcleo de Cálculos Especiais) para a realização desse trabalho. Os programas computacionais GiD® e MATLAB® têm licença da Faculdade de Engenharia.

Como aplicação da técnica desenvolvida originalmente por Bitencourt Jr. et al. (2015), aborda-se neste trabalho problemas mecânicos práticos considerando os efeitos de contato, ou de perda de contato, representando a interação entre peças genéricas distintas, assim como o fenômeno de atrito entre distintas regiões.

1.2. OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo geral estender a aplicabilidade do novo método de compatibilização de malhas de elementos finitos não conformes, a projetos mecânicos que envolvam contato, usuais da indústria e cotidiano da engenharia.

O objetivo específico deste trabalho consiste no desenvolvimento de um modelo constitutivo simples e robusto, baseado na mecânica do dano, para modelar, empregando elementos de acoplamento, problemas mecânicos de contato, com ênfase em aplicações envolvendo uniões entre malhas não conformes. Objetiva-se validar o modelo mediante análises de casos envolvendo comportamentos mecânicos práticos existentes.

Na técnica proposta, o contato é caracterizado como sendo uma particularidade do tipo de acoplamento que é utilizado com relação à variação de solicitações na interface de contato em uma mesma análise. Para solicitações de compressão, deve-se representar a resistência do

componente à penetração do outro, utilizando-se um acoplamento rígido para isso. Ao contrário, para cargas de tração, o contato deve ser capaz de representar a possibilidade de perda de aderência, sem ou com resistência (se houver algum tipo de colagem entre os componentes) à separação das partes.

Outro fator que influencia o comportamento mecânico na região de contato é a representação da presença de forças de resistência ao deslizamento relativo devido ao atrito entre superfícies. Portanto, o modelo de dano proposto deve modelar o comportamento de atrito, no qual a tensão cisalhante de resistência ao deslizamento tangencial à superfície de contato, entre dois corpos, depende da tensão normal atuante entre os componentes e o coeficiente de atrito (estático ou dinâmico) entre suas superfícies.

1.3. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho está estruturado em mais 6 capítulos, resumidos a seguir.

O Capítulo 2 introduz, de forma geral e simplificada, os fundamentos do Método dos Elementos Finitos (MEF), necessários para o entendimento da formulação da técnica de acoplamento de malhas não conformes. Aspectos relevantes para a utilização do MEF aplicados à análise não linear de contato são apresentados, como o método de iteração de Newton-Raphson. Ainda neste capítulo, faz-se menção à mecânica do contato, efeito que será considerado nos problemas desta dissertação. Os problemas de contato envolvem uma série de fatores que influenciam em sua resolução, podendo torná-lo extremamente complexo. Entretanto, no contexto deste trabalho, serão abordados problemas no âmbito elástico linear, desconsiderando os fatores não relacionados com essa teoria. Descreve-se simplificadamente os tipos de contato, sem atrito, com atrito, conforme e não conforme.

No Capítulo 3, aborda-se a teoria da mecânica do dano, implementada junto à técnica de acoplamento proposta para representar a interação entre os domínios e os esforços decorrentes do contato entre os componentes. Também é apresentado, resumidamente, o algoritmo de integração implícito-explícito (IMPL-EX) utilizado.

O Capítulo 4 detalha a formulação da técnica utilizada, introduzindo a influência do elemento de acoplamento no equacionamento da matriz de rigidez da estrutura. Apresenta-se a formulação generalizada da técnica e os modelos constitutivos aplicáveis. Faz-se o detalhamento do modelo de dano implementado a fim de representar o contato entre os componentes e as forças de atrito existentes devido ao contato.

O Capítulo 5 contém exemplos para a representação da capacidade da técnica proposta, apresentando os resultados obtidos para as condições criadas.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões obtidas do uso da técnica para a representação do contato mecânico. Também se encontra neste capítulo os trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos após esta dissertação.

CAPÍTULO 2

2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1. FORMULAÇÃO DO MEF

Segundo Alves Filho, (2000), para a solução analítica de problemas de engenharia, lança-se mão das técnicas clássicas para a resolução de problemas, embasadas no estudo das equações diferenciais, que descrevem o equilíbrio da estrutura. Por exemplo, as soluções analíticas para análises de barras e vigas (Teoria de Vigas) podem ser encontradas em livros de Resistência dos Materiais (Timonshenko, 1981) detalhadamente, enquanto que se pode encontrar na Teoria Geral de Placas e Cascas (Timonshenko e Krieger, 1970) soluções desenvolvidas para diversas condições de fixação e carregamento em 2D. Da mesma forma, tem-se para o estudo dos sólidos deformáveis, a Teoria da Elasticidade (Timonshenko e Goodier, 1951).

A questão central que motiva o estudo do MEF está no fato de que os métodos analíticos clássicos permitem o cálculo dos deslocamentos, deformações e tensões apenas em estruturas com geometria e carregamentos simples. Para estruturas com forma arbitrária, a solução analítica frequentemente torna-se impossível e o problema requer grandes e excessivas simplificações, resultando em cálculos pouco acurados (Alves Filho, 2000). Com base nisso, o MEF fornece um caminho alternativo para o cálculo de deslocamentos, deformações e tensões de qualquer estrutura, independentemente de sua forma e condição de contorno, a partir da discretização do domínio da estrutura em elementos com dimensões finitas (elementos finitos).

Para isso, o método se assenta em algumas leis fundamentais que fornecem subsídios para a obtenção das relações matemáticas que representam de forma discreta o conjunto. Um componente estrutural em equilíbrio deve satisfazer três “leis” ou relações fundamentais, a saber:

- a) *Equilíbrio de Forças*: considerando a condição de equilíbrio da estrutura, pode-se aplicar as equações de equilíbrio a cada um dos elementos finitos isolados e, da mesma forma, se o elemento está em equilíbrio, parte dele também estará.
- b) *Compatibilidade de Deslocamentos*: dois elementos finitos conectados em um mesmo nó na condição indeformada da estrutura, devem se manter conectados no mesmo nó na condição deformada, devido à condição de compatibilidade de deslocamentos. Caso contrário, a estrutura estaria “abrindo-se” ou “interpenetrando-se” nesse ponto. Dessa forma, impõe-se a condição de compatibilidade de deslocamentos para todos os nós do modelo, incluindo-se os pontos internos de todos os elementos.
- c) *Lei de Comportamento do Material*: os elementos se deformam ao serem solicitados e os esforços externos são transmitidos pelos elementos por esforços internos. A lei de comportamento do material rege a relação entre os esforços internos e as deformações. Em grande parte das aplicações práticas, quando o nível de esforços não é muito elevado, as forças internas crescem proporcionalmente às deformações. Esta relação linear constitui a conhecida Lei de Hooke, que também leva em consideração a hipótese de elasticidade do material.

Com a finalidade de revisar a formulação teórica do método dos elementos finitos, em cima da qual elaborou-se a técnica de acoplamento apresentada em Bitencourt Jr. et al. (2015), apresenta-se o desenvolvimento simplificado deste método (Zienkiewicz, 1971).

2.2. EQUAÇÕES DO MEF

Segundo Zienkiewicz (1971), pode-se definir a função de interpolação de deslocamentos e posição adequada para o elemento, ou seja, que defina de forma única o estado de deslocamentos em todos os pontos dentro do elemento, em termos dos graus de liberdade dos nós, permitindo, a partir dos deslocamentos nodais conhecidos, determinar os deslocamentos dentro do elemento. Assim, para o domínio Ω^e de um elemento, pode-se estabelecer a relação entre o campo de deslocamento em um ponto material $\mathbf{X}$ dentro do elemento e os deslocamentos nodais $\mathbf{D}_i$ ($i=1, 2, \dots, nn$) como:

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{nn} \bar{\mathbf{N}}_i(\mathbf{X}) \mathbf{D}_i \quad (1)$$

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) = \mathbf{N} \mathbf{D} \quad (2)$$

onde nn é o número de nós do elemento e $\bar{N}_i$ ($i=1, 2, \dots, nn$) são as funções de forma do elemento finito. A matriz função de forma $\mathbf{N}$ reúne as funções de forma e permite “passar” dos deslocamentos nodais, reunidos no vetor $\mathbf{D}$, para os deslocamentos dentro dos elementos $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X})$ definindo-se a forma pela qual se estabelece a interpolação do campo de deslocamentos.

Para que a equação 1 seja válida é necessário que seja satisfeita a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^{nn} \bar{N}_i(\mathbf{X}) = 1 \quad (3)$$

De forma similar às funções de forma, pode-se obter a correlação entre as deformações dentro do elemento e os deslocamentos nodais:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{D} \quad (4)$$

onde $\mathbf{B}$ é a matriz deslocamento-deformação, que permite correlacionar os deslocamentos nodais com as deformações dentro dos elementos, definindo o modo pelo qual se estabelece o campo de deformações no interior do elemento.

Na mesma linha de raciocínio, pode-se determinar as tensões a partir dos deslocamentos nodais:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{D} \quad (5)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz de constantes elásticas.

As equações definidas permitem determinar os deslocamentos, as deformações, e as tensões dos elementos finitos.

Levando-se em consideração o equilíbrio entre a força interna e externa que age no sistema, tem-se:

$$\mathbf{F} = \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d_{vol} \mathbf{D} \quad (6)$$

$$\mathbf{K} = \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d_{vol} \quad (7)$$

O cálculo da integral para obter a matriz de rigidez do elemento finito normalmente apresenta grandes dificuldades do ponto de vista algébrico. Esse cálculo é efetuado por procedimento numérico e a qualidade dos resultados obtidos está condicionada ao número de pontos de integração utilizados nesse procedimento aproximado de cálculo. Um dos procedimentos numéricos bastante importante é o método de Quadratura de Gauss, que otimiza a posição dos pontos utilizados na definição dos valores da função, bem como os pesos

utilizados no somatório para obtenção da integral. Os pontos escolhidos para avaliar as matrizes participantes da somatória para obtenção da integral da matriz de rigidez são chamados pontos de integração. Em particular para esse método, são chamados pontos de integração de Gauss.

2.3. ANÁLISE NÃO LINEAR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Quando se pode classificar um sistema como linear, implicitamente tem-se que ao conhecer a rigidez da estrutura objeto de análise, a relação força e deslocamento já está previamente definida. Em outras palavras, o grande responsável pela hipótese do comportamento linear da estrutura é a garantia de que a sua rigidez sempre se mantém inalterada durante todo o processo de carregamento, independente dos deslocamentos. Se isso não for verdade, a linearidade não pode ser garantida, entrando-se então em regime não linear. (Alves Filho, 2012).

Na mecânica estrutural, um problema é não linear quando a rigidez da estrutura é dependente do estágio do carregamento em que ela se encontra. Logo, deve-se entender os motivos pelos quais a rigidez de uma estrutura pode variar, ou seja, quais parâmetros estão relacionados com essa variação. Será dada ênfase à abordagem da não linearidade associada à mudança das condições de contorno, isto é, ao problema de contato.

2.3.1. NÃO LINEARIDADE ASSOCIADA ÀS MUDANÇAS DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO: O PROBLEMA DE CONTATO

O problema de contato é caracterizado pela modificação nas condições de contorno durante o processo de carregamento da carga. O procedimento numérico a ser introduzido em um problema de não linearidade e, em particular, o caso do contato entre partes, deve verificar, de incrementos em incrementos de carga, se a condição de contato foi atingida para, a partir daí, assumir a nova condição de contorno.

Utilizando-se a técnica de acoplamento proposta em Bitencourt Jr. et al. (2015), aborda-se problemas em que a região de contato já está pré-estabelecida e um modelo de dano é utilizado para atualizar a rigidez da estrutura a partir da verificação da evolução do deslocamento na interface de contato, em que se constata determinada condição dentro do cálculo (domínios sobrepostos, por exemplo). Logicamente, deve-se então testar sucessivamente se essa condição é ou não atingida, caracterizando-se um procedimento iterativo e incremental.

Assim, quando se inicia o processo de análise, o elemento EFA já faz parte do modelo, porém ele só começa a trabalhar a partir do instante em que determinadas condições são atingidas. Não se modifica a condição de contorno nesse caso, mas a rigidez do elemento ou sua propriedade física, de tal sorte que o seu valor numérico proporcione deslocamento nulo para a região de interface.

Além disso, ainda há a possibilidade de escorregamento entre partes, podendo-se considerar forças de atrito que dependem das forças normais e do coeficiente de atrito. Para tal representação, costuma-se efetuar a decomposição dos vetores em componentes normais e tangenciais à superfície de contorno.

2.3.1.1.CLASSIFICAÇÃO DO CONTATO

2.3.1.1.1. CONTATO SEM ATRITO

De Sampaio (2009), caracteriza-se contato sem atrito como aquele em que os corpos deslizam entre si sem que haja resistência na direção tangencial à superfície de contato. Desta forma, a força tangencial de contato sempre será nula (Figura 4b) e o efeito do carregamento externo na interface de contato será somente de compressão normal. Tal abordagem representa um número limitado de exemplos, sendo utilizada na representação de problemas envolvendo superfícies lisas e bem lubrificadas (Man, 1994), conforme ilustra a Figura 4a.

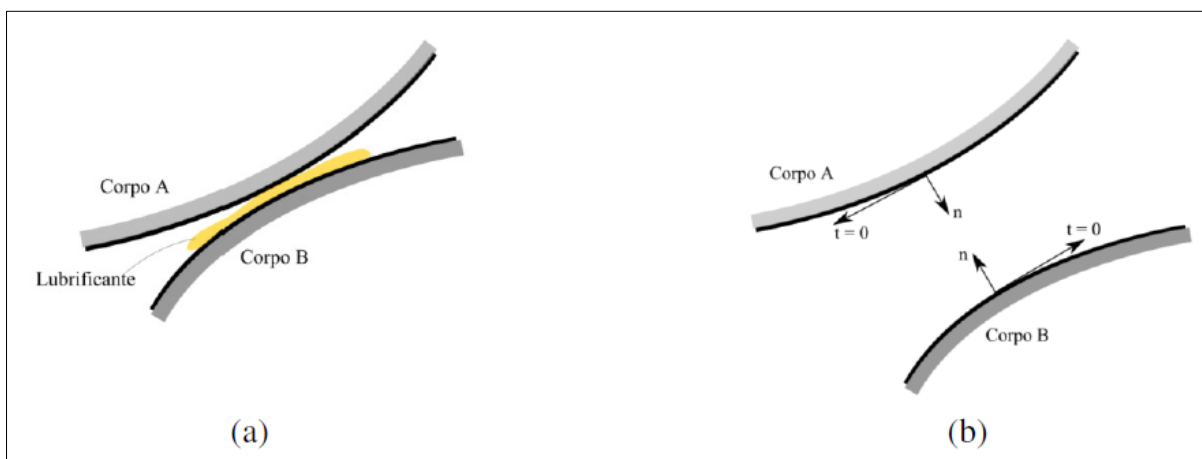


Figura 4 - Contato sem atrito: (a) contato com lubrificante e (b) forças na superfície de contato (Man, 1994).

2.3.1.1.2. CONTATO COM ATRITO

Quando se trata de problemas de contato onde o efeito de atrito é considerado, têm-se duas situações:

- Contato entre superfícies sem a ocorrência de deslizamento tangencial (*Stick* – Figura 5a);
- Contato com deslizamento tangencial (*Slip* – Figura 5b).

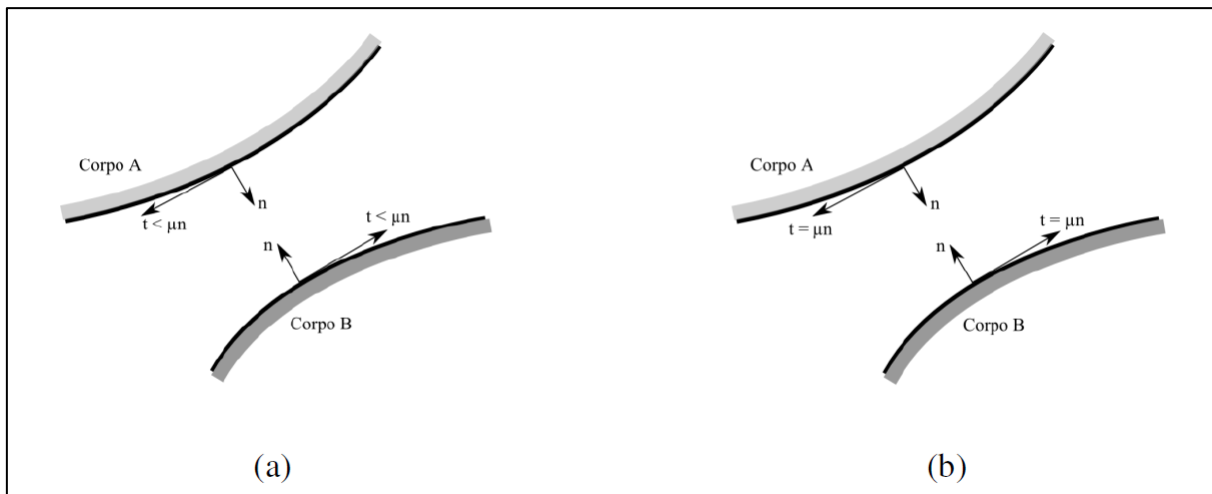


Figura 5 - Contato com atrito: (a) *stick* e (b) *slip* (Man, 1994).

Na primeira hipótese, onde não há movimento relativo na interface dos corpos em contato, o deslizamento tangencial é restringido pela ação da força resistente de atrito na superfície, ou seja, a componente de força tangencial à superfície proveniente das condições de trabalho do conjunto é menor do que limite de atrito. No segundo caso, o limite de atrito é atingido e, a partir de então, os sólidos passam a se movimentar relativamente. Desta forma, a componente de força tangencial à superfície assume o valor do limite de atrito, não podendo haver força tangente maior que este limite (Sampaio, 2009).

Tal força tangencial pode ser definida, em ambos os casos, pela lei de atrito de Coulomb, relativo à força normal existente na interface e às características de cada sólido (topologia, rugosidade, entre outros). A simplicidade desta formulação faz com que esta lei seja amplamente utilizada em modelos de contato (Man, 1994).

Em adição às condições apresentadas, pode-se definir também condições de restrição de atrito:

- O atrito de Coulomb é uma função da velocidade e/ou pressão. Leis mais gerais de atrito podem ser introduzidas;
- A tensão tangencial trabalha no sentido oposto ao escorregamento;
- Não ocorre escorregamento se a tensão tangencial não atingir um máximo local e, se ocorrer escorregamento, então ela atingiu o seu máximo. Tal valor máximo é definido pelo produto da componente normal e uma constante de atrito (Wriggers, 2006).

2.3.1.1.3. CONTATO CONFORME

Nesta situação, o tamanho da área de contato independe do carregamento, estando previamente ajustada num estado sem carga. Assim, ao final do ciclo a região de contato será a mesma da inicial (Figura 6a). Sendo assim, o histórico de carregamento não tem grande importância na análise do problema, uma vez que a área permanece definida.



Figura 6 – Tipos de contato: (a) conforme e (b) não conforme (Man, 1994).

2.3.1.1.4. CONTATO NÃO CONFORME

Para casos em que o contato acontece em um ponto ou uma linha, classifica-se tal interação como não conforme (Figura 6b). Tem-se como exemplo o contato entre duas esferas ou dois cilindros, em que a superfície de contato entre os sólidos irá se alterar com a aplicação do carregamento, sendo importante para esta categoria de problemas o histórico de carregamento.

2.3.1.2. CONDIÇÃO DE IMPENETRABILIDADE: KARUSH-KUHN-TUCKER

Em um modelo contínuo não é possível que dois pontos ocupem a mesma posição no espaço. Para diferentes e múltiplos corpos, essa questão reduz-se à colocação da condição de que nenhum ponto do contorno do primeiro corpo possa penetrar no outro corpo. Assim, o

problema completo de contato reduz-se a um problema de contorno, em que o sinal da distância de qualquer ponto do primeiro corpo seja não negativo em relação ao outro. As condições de restrição de contato podem ser colocadas da seguinte forma:

$$d_n(i) \geq 0 \quad (8)$$

$$\sigma_n(i) \leq 0 \quad (9)$$

$$\sigma_n(i)d_n(i) = 0 \quad (10)$$

onde d_n é a distância entre qualquer ponto do primeiro corpo em relação a qualquer ponto do outro; e σ_n é a tensão normal de contato.

A equação 8 rege a condição que estabelece que não pode ocorrer penetração entre corpos. A equação 9, por sua vez, estabelece a condição em que a tensão normal de contato deve ser compressiva para que haja interação e, finalmente, a equação 10 como condição complementar: se não há contato, nenhuma compressão pode ocorrer ou, alternativamente, se não há compressão, então a distância deve ser positiva. Essas três condições juntas são chamadas de condições de Karush-Kuhn-Tucker.

2.3.1.3. PROCESSO INCREMENTAL E ITERATIVO DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

A ideia para se determinar a rigidez da estrutura para tal condição na análise não linear é basicamente a mesma para a análise linear, porém neste caso a rigidez varia à medida que o carregamento se manifesta. Sabe-se que a condição de equivalência entre os trabalhos externo e interno constitui uma forma de se determinar a rigidez dos elementos e da estrutura. Nos casos em que a formulação aproximada do método considera as forças de contato, estas devem ser contabilizadas no cômputo do trabalho das forças que deformam a estrutura. As forças de contato são mais uma classe dessas forças, inseridas no conceito mais geral do trabalho. Deve-se então, utilizar um processo incremental. Porém, como a rigidez da estrutura varia e não se sabe no próximo trecho qual o seu valor, não há a possibilidade de se utilizar a rigidez para calcular os deslocamentos no próximo trecho, pois ela é desconhecida. Admite-se então que a estrutura se desloca em um trecho seguinte, propondo uma tentativa para os deslocamentos. As forças internas associadas a essa condição deformada proposta devem ser consistentes com os deslocamentos assumidos ou, do ponto de vista energético, o trabalho interno deve ser igual ao trabalho externo. Como a configuração proposta não se verifica na primeira tentativa, deve-se repetir diversas tentativas até que em uma delas o trabalho interno seja equivalente ao trabalho

externo, utilizando-se então processos iterativos para a obtenção dos deslocamentos. Um desses processos é o método de Newton-Raphson, utilizado nestas aplicações, que busca a convergência através da aproximação da trajetória de equilíbrio da estrutura por retas tangentes a ela, para satisfazer a equação 11 de equilíbrio global, segundo Souza Neto, Peric e, Owen (2011):

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{D}) - \mathbf{f}^{ext} = 0 \quad (11)$$

Em um estado definido pelo vetor de deslocamento global $\mathbf{D}_{n+1}^{(k-1)}$, a iteração típica (k) do esquema de Newton-Raphson consiste em resolver o sistema linear de equações:

$$\mathbf{r}^{(k-1)} = -\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{D}^{(k)} \quad (12)$$

para $\Delta \mathbf{D}^{(k)}$, onde define-se o vetor residual $\mathbf{r}$ como:

$$\mathbf{r}^{(k-1)} \equiv \mathbf{f}^{int}(\mathbf{D}_{n+1}^{(k-1)}) - \mathbf{f}_{n+1}^{ext} \quad (13)$$

e $\mathbf{K}_t$ como a matriz de rigidez global tangente:

$$\mathbf{K}_t = \int_{h,\Omega} (\mathbf{B})^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{D}_{n+1}} \right|_{\mathbf{D}_{n+1}^{(k-1)}} \quad (14)$$

Com a solução $\mathbf{D}^k$ do sistema linear da equação 14, aplica-se a correção de Newton para o deslocamento global:

$$\mathbf{D}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{D}_{n+1}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{D}^{(k)} \quad (15)$$

Cada iteração do esquema de Newton-Raphson compreende a solução da versão linearizada da equação de equilíbrio incremental discretizada (equação 12) ou, equivalentemente, a versão discreta da equação do trabalho virtual linearizada.

$$\mathbf{r}(\mathbf{D}_{n+1}) \equiv \mathbf{f}^{int}(\mathbf{D}_{n+1}) - \mathbf{f}_{n+1}^{ext} = 0 \quad (16)$$

Computacionalmente, a equação 12 não é resolvida determinando a inversa $\mathbf{K}_t^{-1}$, mas sim se resolvendo o sistema linear correspondente.

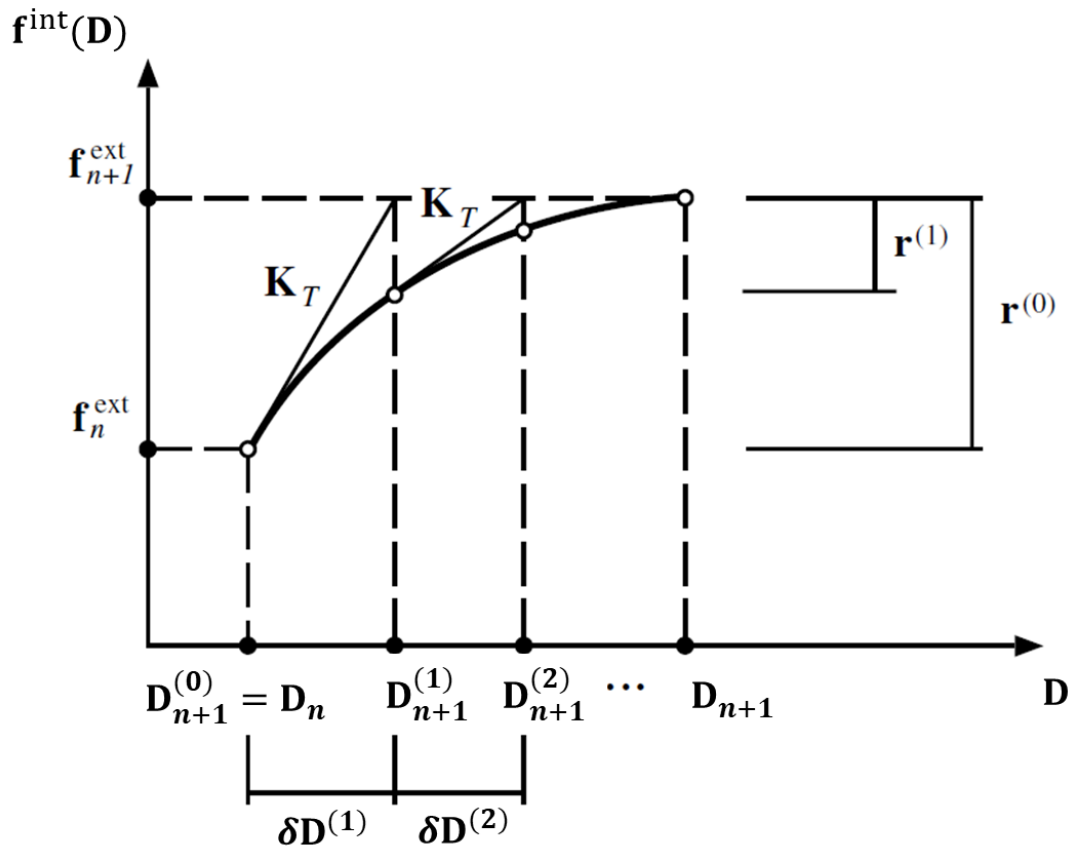


Figura 7 - Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson (Souza Neto, Peric e, Owen, 2011).

O método é esquematicamente ilustrado na figura 7. As iterações de Newton-Raphson são repetidas m vezes, até que o critério de convergência (equação 17) seja satisfeito:

$$\frac{|r^{(m)}|}{|f_{n+1}^{ext}|} \leq \varepsilon_{tol} \quad (17)$$

onde ε_{tol} é um resíduo ou uma tolerância de convergência de equilíbrio suficientemente pequena.

CAPÍTULO 3

3. MODELO DE DANO DISCRETO PARA INTERAÇÃO ENTRE SUPERFÍCIES

3.1. MODELO DE CONTATO

Um modelo constitutivo de dano discreto pode ser empregado para representar o contato ou a perda de contato entre materiais.

A Figura 8 ilustra um esquema de representação bidimensional do contato entre dois domínios, Ω_1 e Ω_2 . De acordo com esta figura, duas componentes de tensão estabelecem as condições de contato, de acordo com o deslocamento relativo desses domínios.

Na situação apresentada, pode ocorrer o contato entre esses domínios ou a perda dele. No caso de contato, o modelo proposto deve garantir que não ocorra a penetração dos materiais, enquanto que na perda de contato este modelo não deve impor restrições.

O modelo proposto pode ser definido mediante uma variável de dano escalar, $\hat{d}$, a qual será empregada da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - \hat{d}) \underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{\sigma} \\ \bar{\tau} \end{Bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (18)$$

onde essa variável assume os valores 0 ou 1, de acordo com as seguintes condições:

$$\hat{d} = \begin{cases} 1 & \text{caso } \bar{\sigma} > 0 \\ 0 & \text{caso } \bar{\sigma} \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ e $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ são os vetores que armazenam as componentes (normais e tangenciais) do tensor das tensões nominal e efetivo, respectivamente, na superfície de contato.

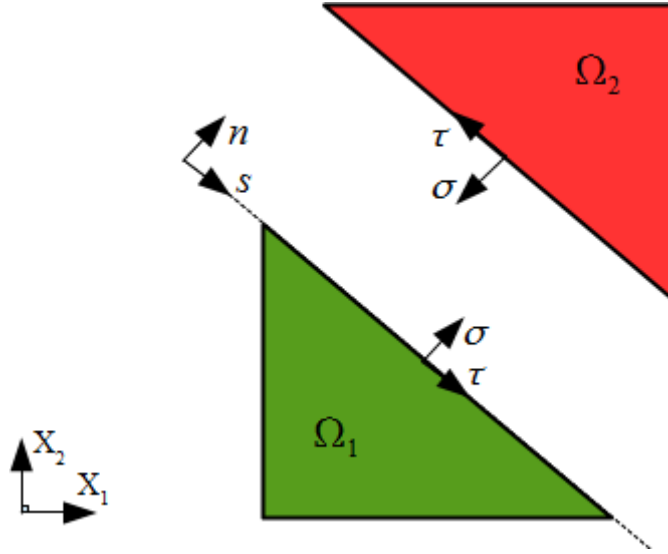


Figura 8 - Componentes de tensão normal e tangencial de contato segundo o sistema de coordenadas locais (n,s).

As componentes de tensão efetivas podem ser calculadas em função das componentes de deslocamento relativo, como:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{\sigma} \\ \bar{\tau} \end{Bmatrix}}_{\bar{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_n & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{Bmatrix} [u_n] \\ [u_s] \end{Bmatrix}}_{[u]} \quad (20)$$

onde $\mathbf{C}$ é uma matriz diagonal que armazena constantes elásticas nas direções n e s , e $[u]$ é um vetor que contém as componentes do deslocamento relativo entre os domínios, segundo o sistema de referência local (n, s) ilustrado na Figura 8.

Note que a componente elástica c_n pode assumir um valor elevado, desempenhando o papel de uma variável de penalização do deslocamento relativo normal, impondo $[u_n] \cong 0$, para o caso de contato entre os materiais (compressão). Entretanto, para representar uma superfície sem atrito, sem impor resistência ao deslizamento relativo, a componente elástica c_s deve assumir um valor nulo ($c_s = 0$).

3.2. MODELOS DE ATRITO DE COULOMB

Nesta seção descreve-se o modelo de dano com atrito, adotando o modelo de atrito de Coulomb. A equação de Coulomb é composta pelas parcelas de coesão e atrito, a qual define um limite de ruptura (reta de Coulomb), como ilustrado na Figura 9.

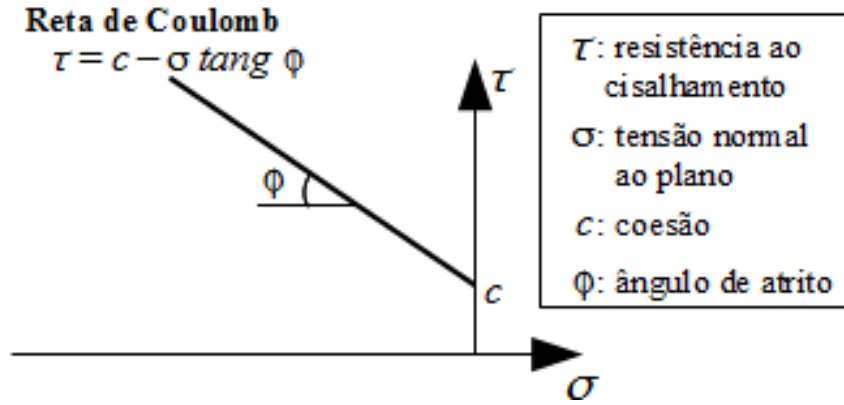


Figura 9 - Modelo de atrito de Coulomb.

No contexto do modelo de Coulomb, o modelo constitutivo de dano com atrito é representado pela seguinte relação constitutiva:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\tau} \end{Bmatrix} (1 - d_\tau) \quad (21)$$

onde $d_\tau \in [0,1]$ é uma variável de dano escalar aplicada somente na componente de tensão tangencial efetiva, $\bar{\tau}$. As tensões efetivas são obtidas de forma similar à descrita na equação 20, como:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{\sigma} \\ \bar{\tau} \end{Bmatrix}}_{\bar{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_n & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix}}_c \underbrace{\begin{Bmatrix} [u_n] \\ [u_s] \end{Bmatrix}}_{[u]} \quad (22)$$

porém, nesse caso, a componente elástica c_s assume um valor diferente de zero ($c_s \neq 0$).

O critério de degradação é expresso em termos das componentes de tensão tangencial e normal, como:

$$\varphi = |\tau| - \alpha \langle -\sigma \rangle = \Phi(\sigma) \leq 0 \quad (23)$$

onde $\Phi(\sigma) = |\tau| - \alpha \langle -\sigma \rangle$ é a tensão equivalente. O símbolo $\langle \cdot \rangle$ representa a função de Macaulay, retornando o valor da expressão quando positiva, e zero em caso contrário. Note que o segundo termo desta expressão está relacionado com a incorporação do atrito à modelagem, sendo α o coeficiente de atrito. Fazendo uma correspondência com o modelo de Coulomb, o coeficiente de atrito escrito na equação 23, α , corresponde a tangente do ângulo de atrito, ou seja, $\alpha = \tan \phi$. Neste caso, a coesão é considerada nula ($c = 0$). A Figura 10 apresenta o critério de dano no espaço de tensões, estabelecendo o domínio elástico, $\Phi(\sigma) < 0$, correspondendo à região sobre a reta $\Phi(\sigma) = 0$.

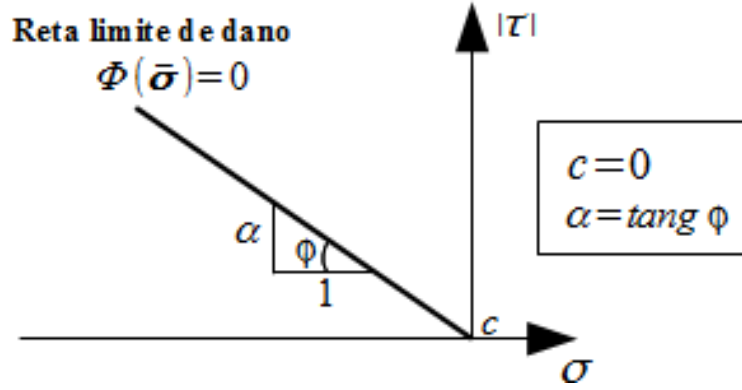


Figura 10 - Critério de dano com atrito de Coulomb.

Dividindo a equação 23 por $(1 - d_\tau)$, e sabendo que $\tau = (1 - d_\tau)\bar{\tau}$ e $\sigma = \bar{\sigma}$ (ver equação 21), o critério de degradação pode ser reescrito em termos das tensões efetivas da seguinte forma:

$$\bar{\varphi} = |\bar{\tau}| - \alpha \langle -\bar{\sigma} \rangle - r = \Phi(\bar{\sigma}) - r \leq 0 \quad (24)$$

onde r é uma variável interna do tipo deformação, a qual pode ser expressa como:

$$r = \frac{d_\tau \alpha \langle -\bar{\sigma} \rangle}{1 - d_\tau} \quad (25)$$

A partir da equação 25, a variável de dano pode ser escrita em termos da variável interna, r e de $\alpha \langle -\bar{\sigma} \rangle$, como:

$$d_\tau = \frac{r}{r + \alpha \langle -\bar{\sigma} \rangle}. \quad (26)$$

Para completar o modelo, escrevem-se as relações de Kuhn-Tucker, as quais definem as condições de carga e descarga, ou seja,

$$\bar{\varphi} \leq 0, \dot{r} \geq 0, \dot{r} \bar{\varphi} = 0 \quad (27)$$

e a condição de consistência,

$$\dot{r} \dot{\bar{\varphi}} = 0 \text{ caso } \bar{\varphi} = 0 \quad (28)$$

a qual, em conjunto com a equação 27, fornece a seguinte lei de evolução explícita para a variável interna do tipo deformação:

$$r = \max[\Phi(\bar{\sigma})] \quad (29)$$

De acordo com a equação 29, r assume o máximo valor atingido por $\Phi(\bar{\sigma})$ durante o processo de carregamento.

3.3. MODELO DE CONTATO COM ATRITO

A fim de representar o contato ou a perda de contato entre materiais levando em consideração os efeitos provenientes do atrito, pode-se utilizar em conjunto os dois modelos descritos anteriormente, nas subseções 3.1 e 3.2. Assim, a combinação desses dois modelos fica descrita pela seguinte relação constitutiva:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \left[(1 - d_\tau) \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\tau} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{\sigma} \\ 0 \end{Bmatrix} \right] (1 - \hat{d}) \quad (30)$$

Nesse caso, a variável d_τ é aplicada para degradar somente a componente de tensão tangencial, enquanto a variável $\hat{d}$ é utilizada para degradar todas as componentes do vetor de tensões efetivas.

É importante observar que no caso de contato entre os materiais (em solicitação de compressão) a variável de dano oriunda do primeiro modelo assume valor nulo ($\hat{d} = 0$). Assim, a relação constitutiva passa a ser governada pela variável de dano proveniente do segundo modelo, d_τ , que pode assumir valores diferentes de zero, de acordo com o critério de degradação e a lei evolução descritos nas Equações 26 e 29, respectivamente. No caso de uma separação entre os materiais (em solicitações de tração), a variável de dano $\hat{d}$ assume o valor unitário ($\hat{d} = 1$), reduzindo completamente as componentes de tensão efetivas, permitindo dessa forma uma separação sem restrições entre os materiais.

3.4. ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO (IMPL-EX)

Oliver et al. (2006, 2008) propuseram um algoritmo de integração de modelos constitutivos, denominado IMPL-EX, buscando obter a estabilidade oferecida pelos métodos explícitos com a precisão dos métodos implícitos.

O IMPL-EX consiste na utilização dos métodos de integração implícito e explícito em um mesmo passo de carregamento, compreendendo dois estágios de integração. No primeiro estágio, calculam-se as variáveis internas de maneira implícita (variável interna do tipo deformação $r_{n+1}(\epsilon_{n+1})$ e a variável interna do tipo tensão $q_{n+1}(\epsilon_{n+1})$). No segundo estágio, obtém-se a variável do tipo deformação ($\tilde{r}_{n+1}$) mediante uma extrapolação linear dessa variável calculada nos dois passos que antecedem o passo corrente (t_{n+1}), t_{n-1} e t_n .

As principais vantagens do IMPL-EX são a garantia de convergência do modelo com uma única iteração e o menor custo computacional quando comparado ao algoritmo implícito.

Contudo, o método viola a condição de consistência e, consequentemente, os resultados podem perder precisão ou apresentar oscilações. Oliver et al. (2008) afirmam que esses problemas podem ser contornados adotando-se incrementos de carga pequenos.

A Tabela 1 apresenta o algoritmo de integração implícito-explícito para o modelo de dano proposto, o qual pode ser obtido de forma fechada, para um procedimento incremental.

Tabela 1 - Algoritmo de integração implícito-explícito do modelo de contato proposto.

Parâmetros de Entrada: $\mathbf{C}$, ε_{n+1}, $r_{(n)}$, $\Delta r_{(n)}$, $\bar{\sigma}_{(n)}$	
Calcular as tensões efetivas	$\underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{(n+1)} \\ \bar{\tau}_{(n+1)} \end{Bmatrix}}_{\bar{\sigma}_{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_n 0 \\ 0 c_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \underbrace{\begin{Bmatrix} [u_{n(n+1)}] \\ [u_{s(n+1)}] \end{Bmatrix}}_{[ul]_{(n+1)}}$
Verificar o critério	$\bar{\phi}_{(n+1)} = \bar{\sigma}_{(n+1)} - \alpha \langle -\bar{\sigma}_{(n)} \rangle - r_{(n)} = \Phi(\bar{\sigma})_{(n+1)} - r_{(n)} \leq 0$ Verdadeiro: $r_{(n+1)} = r_{(n)}$ Falso: $r_{(n+1)} = \Phi_{(n+1)}$
Calcular a variação da variável interna, de forma implícita, para ser usada no próximo passo	$\Delta r_{(n+1)} = r_{(n+1)} - r_{(n)}$
Extrapolar a variável interna	$\tilde{r}_{(n+1)} = r_{(n)} + \frac{\Delta r_{(n)}}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1}$ $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}; \Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$
Atualizar as variáveis de dano	$\tilde{d}_{\tau(n+1)} = \frac{\tilde{r}_{(n+1)}}{\tilde{r}_{(n+1)} + \alpha \langle \bar{\sigma}_{(n+1)} \rangle}$ $\hat{d}_{(n+1)} = \begin{cases} 0 & \text{caso } \bar{\sigma}_{(n)} \leq 0 \\ 1 & \text{caso } \bar{\sigma}_{(n)} > 0 \end{cases}$

Calcular as tensões correntes	$\underbrace{\begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{(n+1)} \\ \tilde{\tau}_{(n+1)} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\sigma}_{(n+1)}} = \left[(1 - \tilde{d}_{\tau(n+1)}) \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{\tau}_{(n+1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{(n+1)} \\ 0 \end{Bmatrix} \right] (1 - \hat{d}_{(n+1)})$
Calcular a matriz constitutiva tangente	$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{(n+1)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}} = \left((1 - \tilde{d}_{\tau(n+1)}) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) (1 - \hat{d}_{(n+1)})$
Parâmetros de Saída: $r_{(n+1)}, \Delta r_{(n+1)}, \bar{\sigma}_{(n+1)}, \tilde{\sigma}_{(n+1)}, \frac{\partial \tilde{\sigma}_{(n+1)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}}$	

CAPÍTULO 4

4. ACOPLAMENTO DE MALHAS NÃO CONFORMES

4.1. VISÃO GERAL DA ESTRATÉGIA PARA ACOPLAMENTO DE MALHAS NÃO CONFORMES

Neste capítulo, apresenta-se a metodologia da técnica de acoplamento proposta recentemente por Bitencourt Jr. et al. (2015).

Considera-se inicialmente um problema de domínio Ω e contorno Γ no plano XY. Esse domínio é subdividido em dois subdomínios, denominados Ω^1 e Ω^2 que foram discretizados de forma independente (Figura 11(a)). No caso mais geral, devido a possíveis diferenças nas dimensões e natureza dos subdomínios, as posições dos nós na interface de duas malhas adjacentes podem não ser coincidentes. Assim, o contorno comum aos subdomínios $\Gamma^{12} = \Gamma^1 \cap \Gamma^2$ é denominado como interface não conforme, como mostra a Figura 11.

O procedimento geral adotado para acoplar estes subdomínios se baseia no uso dos elementos finitos de acoplamento (EFA), que têm a função de compatibilizar as malhas discretizadas independentemente, através da transmissão de forças de reação ao deslocamento relativo entre as malhas.

Pode-se resumir este procedimento com os seguintes passos:

- a) Identificação, na interface comum $\Gamma^{12} = \Gamma^1 \cap \Gamma^2$ dos subdomínios, dos nós “soltos” (aqui representados pelos nós vermelhos na Figura 11). Note que os nós considerados “soltos” pertencem aos elementos da malha fina em comparação a outra malha denominada grosseira. Vale lembrar que a denominação fina e grosseira atribuída às malhas se deve ao grau de refinamento de ambas, em comparação uma com a outra, ou seja, a malha com maior refinamento (mais discretizada) denomina-se fina e a outra denomina-se grosseira.

- b) Criação dos EFAs, simplificada apresentada na Figura 11. Este passo é detalhado posteriormente, ainda neste capítulo.
- c) Inserção dos EFAs criados no sistema de equações do problema, de acordo com a lei que rege a interação entre os subdomínios, ou seja, o tipo de acoplamento que se deseja, a partir da interpretação física do problema.

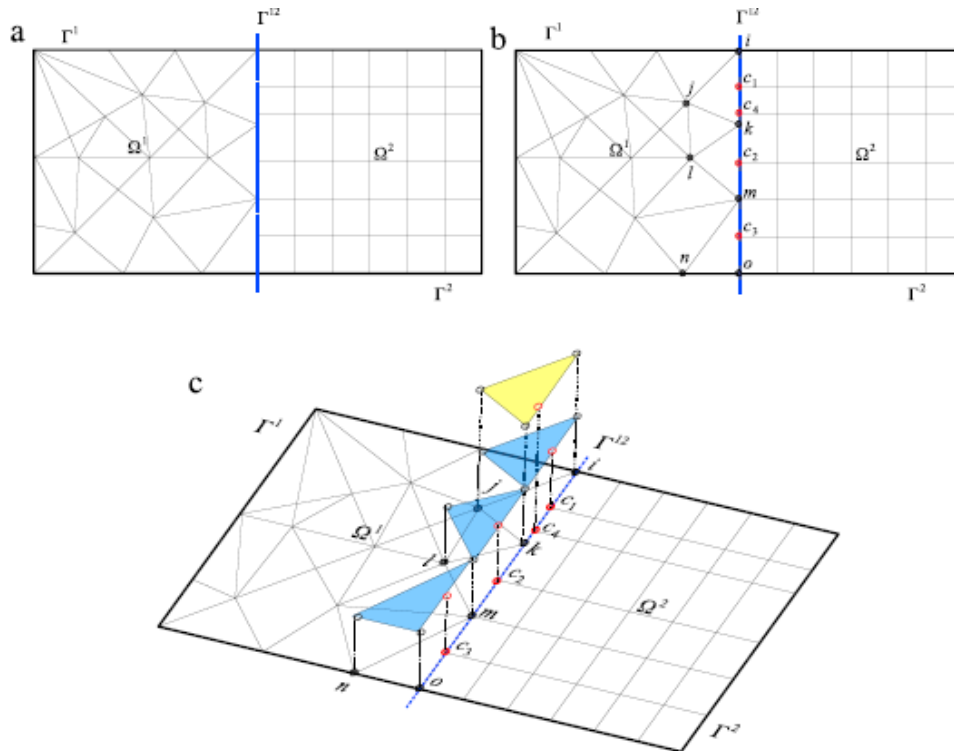


Figura 11 – Procedimento de acoplamento de malhas de elementos finitos não conformes: a) problema 2D com duas malhas não conformes; b) processo de identificação dos nós que irão compor os elementos de acoplamento; c) criação e inserção dos elementos de acoplamento (Bitencourt Jr. et al., 2015).

De acordo com a Figura 11(c), cada EFA tem o mesmo número de nós dos elementos finitos do subdomínio subjacente Ω^1 e mais um nó extra da malha do subdomínio Ω^2 e pertencente ao contorno Γ^{12} , ou seja, os nós “soltos” representados na cor vermelha na Figura 11. Denomina-se este nó extra como nó de acoplamento. Desta forma, os novos elementos sobrepõem a malha original do subdomínio Ω^1 ao redor da interface não conforme. Identifica-se facilmente na Figura 11(c) os elementos especiais criados utilizando-se os nós “soltos” da malha fina, ao redor da interface não conforme.

Vale a pena ressaltar que os nós de um mesmo elemento finito podem ser utilizados para acoplar mais de um nó “solto”, isto é, pode-se criar diversos EFAs utilizando os mesmos “nós base” pertencentes ao elemento finito original, acoplando diversos nós “soltos” pertencentes à interface não conforme. A Figura 11(c) mostra os quatro EFAs criados neste exemplo, $EFA_1 = \{i, j, k, c_1\}$, $EFA_2 = \{k, l, m, c_2\}$, $EFA_3 = \{m, n, o, c_3\}$ e $EFA_4 = \{i, j, k, c_4\}$, dos quais os nós c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são os nós de acoplamento. Note que o EFA_1 e o EFA_4 são elementos finitos de acoplamento sobrepostos tendo o mesmo elemento finito original base do subdomínio Ω^1 , mas com diferentes nós de acoplamento (c_1 e c_4) do subdomínio Ω^2 .

Por possuírem nós pertencentes aos dois subdomínios não conformes, os elementos de acoplamento garantem a compatibilidade de deslocamentos e a transferência das forças de interação entre os respectivos subdomínios. Note na Figura 11 que, por motivos de simplificação, o exemplo utilizado tem alguns nós da malha grosseira e refinada coincidentes para evitar a necessidade de muitos EFAs na região de interface. Isso tornaria a figura muito complexa. Entretanto, vale lembrar que as posições dos nós de ambas as malhas na interface são totalmente arbitrárias.

É importante notar que no método de acoplamento de malhas não conformes proposto, nenhum grau de liberdade é introduzido ao problema, uma vez que, cada elemento de acoplamento foi construído com base em um elemento pertencente ao domínio Ω^1 e um nó “solto” denominado “nó de acoplamento” que pertence a um elemento adjacente pertencente ao domínio Ω^2 .

Desta forma, após o procedimento de acoplamento descrito acima, o vetor de força interna e a matriz de rigidez, podem ser escritos como:

$$\mathbf{F}^{int} = A_{e=1}^{nel_{\Omega^1}}(\mathbf{F}_e^{int})\Omega^1 + A_{e=1}^{nel_{\Omega^2}}(\mathbf{F}_e^{int})\Omega^2 + A_{e=1}^{nel_c}(\mathbf{F}_e^{int})C \quad (31)$$

$$\mathbf{K} = A_{e=1}^{nel_{\Omega^1}}(\mathbf{K}_e)\Omega^1 + A_{e=1}^{nel_{\Omega^2}}(\mathbf{K}_e)\Omega^2 + A_{e=1}^{nel_c}(\mathbf{K}_e)C \quad (32)$$

onde A representa o operador de montagem do elemento finito; a primeira e segunda parcelas das equações 31 e 32 são as contribuições dos elementos finitos padrões pertencentes aos domínios Ω^1 e Ω^2 , respectivamente; e as terceiras parcelas dessas equações são as contribuições dos elementos de acoplamento. A formulação do EFA e suas funções são descritas a seguir.

4.2. ELEMENTO FINITO DE ACOPLAMENTO

4.2.1. FORMULAÇÃO GERAL DO EFA

Segundo Bitencourt Jr. et al. (2015), considere um elemento finito paramétrico padrão de domínio Ω^e com número de nós igual a nn e funções de forma $\tilde{N}_i(\mathbf{X}) (i = 1, nn)$, que são definidas para os pontos materiais $\mathbf{X} \in \Omega^e$, tal que, o deslocamento $\tilde{\mathbf{U}}$ de qualquer ponto pode ser interpolado pelos deslocamentos nodais $\mathbf{D}_i (i = 1, nn)$, como segue:

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{nn} \tilde{N}_i(\mathbf{X}) \mathbf{D}_i \quad (33)$$

onde $\tilde{N}_i$ são as funções de forma do elemento e $\mathbf{D}_i$ são os deslocamentos nodais.

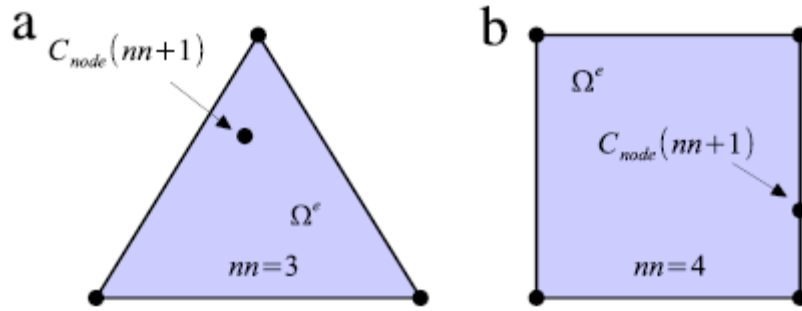


Figura 12 - Elementos finitos de acoplamento 2D: a) triangular e b) quadrilateral (Bitencourt Jr. et al., 2015).

O EFA é um elemento finito que contém os nós do elemento finito paramétrico padrão e mais um nó extra, $nn + 1$, chamado de nó de acoplamento (C_{node}), situado no ponto material $\mathbf{X}_c \in \Omega^e$, como ilustrado na Figura 12. O nó extra pode estar em qualquer posição no elemento, incluindo seu contorno, como é representado no elemento quadrilateral da Figura 12(b).

Define-se um deslocamento relativo $[[\mathbf{U}]]$, como a diferença entre o deslocamento do nó C_{node} e o deslocamento de um ponto material $\mathbf{X}_c$ com as suas coordenadas, calculadas utilizando as funções de forma do elemento base, no qual, o C_{node} pertence ao seu domínio, como segue:

$$[[\mathbf{U}]] = \mathbf{D}_{nn+1} - \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}_c) = \mathbf{D}_{nn+1} - \sum_{i=1}^{nn} \tilde{N}_i(\mathbf{X}_c) \mathbf{D}_i = \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e \quad (34)$$

na qual, $\mathbf{B}_e$ pode então ser definida como:

$$\mathbf{B}_e = [-\tilde{N}_1(\mathbf{X}_c) \quad -\tilde{N}_2(\mathbf{X}_c) \quad \dots \quad -\tilde{N}_{nn}(\mathbf{X}_c) \quad \mathbf{I}] \quad (35)$$

e $\bar{N}_i = \bar{N}_i \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem 1 ou 2, para exemplos 1D e 2D, respectivamente. Observe que a matriz $\mathbf{B}_e$ não é bem a conhecida matriz deslocamento/deformação $\mathbf{B}$, utilizada para os elementos finitos padrão. O vetor que armazena os componentes de deslocamento é dado por:

$$\mathbf{D}_e = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{nn+1} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

4.2.1.1.VETOR DE FORÇA INTERNA

Em Bitencourt Jr. et al. (2015), tem-se que o trabalho virtual interno do elemento de acoplamento é dado por:

$$\delta W_e^{int} = \delta [\mathbf{U}]^T \mathbf{F}([\mathbf{U}]) \quad (37)$$

onde $\mathbf{F}([\mathbf{U}])$ é a força de reação devido ao deslocamento relativo $[\mathbf{U}]$, e $\delta[\mathbf{U}]$ é um deslocamento relativo arbitrário, compatível com as condições de contorno do problema. Aplicando para o deslocamento relativo virtual a mesma aproximação usada para o deslocamento relativo, $\delta[\mathbf{U}] = \mathbf{B}_e \delta \mathbf{D}_e$, o vetor de força interna do elemento de acoplamento pode ser escrito como:

$$\mathbf{F}_e^{int} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{F}([\mathbf{U}]) \quad (38)$$

4.2.1.2.MATRIZ DE RIGIDEZ EFA

Assim, a matriz de rigidez do elemento finito de acoplamento é definida como:

$$\mathbf{K}_e = \frac{\delta \mathbf{F}_e^{int}}{\delta \mathbf{D}_e} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_{tg} \mathbf{B}_e \quad (39)$$

onde $\mathbf{C}_{tg} = \partial \mathbf{F}([\mathbf{U}]) / \partial ([\mathbf{U}])$ é o operador tangente da relação constitutiva entre a força de reação e o deslocamento relativo. Note que se pode dizer que o EFA não é um elemento finito padrão, e só é utilizado para restringir os nós acoplados usando as funções de forma do elemento base, ou seja, não há regra de integração específica para ele.

4.2.2. MODELO LINEAR ELÁSTICO

Bitencourt Jr. et al. (2015) apresenta o modelo linear elástico relacionando a força de reação e o deslocamento relativo do elemento finito de acoplamento da seguinte forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}[[\mathbf{U}]] \quad (40)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{B}_e\mathbf{D}_e \quad (41)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz de constantes elásticas.

Consequentemente, da equação 41, considerando as equações 38 e 39, o vetor de força interna e a matriz de rigidez do elemento EFA tornam-se:

$$\mathbf{F}_e^{int} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e \quad (42)$$

e

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e \quad (43)$$

4.3. ACOPLAMENTO RÍGIDO

O acoplamento rígido aplicado à compatibilidade de duas malhas não conformes, segundo Bitencourt Jr. et al. (2015), e como representado na Figura 11, pode ser imposto assumindo-se um altíssimo valor de rigidez elástica para os EFAs se comparado à rigidez dos elementos finitos isométricos padrão do modelo. A matriz de constantes elásticas é definida como:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{C}} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \quad (44)$$

onde $\tilde{\mathbf{C}}$ representa um alto valor de rigidez elástica, que desempenha o papel de um fator penalizante no deslocamento relativo. É importante notar que por conta das condições de equilíbrio, a força de interação na equação 43 deve ser limitada. Consequentemente, quando as constantes elásticas tendem a um valor muito alto, os componentes de deslocamento relativo $[[\mathbf{U}]]$ devem tender à zero.

Nota-se que para análises com acoplamentos rígidos, o terceiro termo da equação 32 corresponde aos termos de penalidade que impõem restrição entre os deslocamentos interpolados do elemento finito padrão e os deslocamentos dos nós acoplados. Note também

que o acoplamento rígido é obtido atribuindo-se $[[\mathbf{U}]] \cong 0$, assumindo um alto valor de rigidez elástica.

4.4. ACOPLAMENTO NÃO RÍGIDO ENTRE DOMÍNIOS NÃO CONFORMES VIA EFA

Para representar o contato entre subdomínios independentes e discretizados por malhas de elementos finitos não conformes, utiliza-se a técnica de acoplamento não rígido, mediante o emprego de EFA, como proposto por Bitencourt et al. (2015), e um modelo de dano robusto que seja capaz de representar de forma adequada a interação entre esses subdomínios.

Seja o esquema de acoplamento de malhas não conformes em um sistema de coordenadas globais (X_1, X_2) e locais (n, s) , conforme ilustra a Figura 13. Na interface de contato entre os subdomínios Ω_1 e Ω_2 , essa figura mostra com detalhes um nó do subdomínio Ω_2 (numerado como nó j) sendo acoplado ao subdomínio Ω_1 mediante a definição de um EFA (EFA_j). Assim, ainda de acordo com essa figura, as componentes do deslocamento relativo e da força de reação ao descolamento relativo do nó j , podem ser escritas segundo o sistema de coordenadas locais, (n, s) , como apresentadas na equações 45 e 46, $\mathbf{R}$ é a matriz ortogonal de rotação, $[[\mathbf{U}]]_j$ e $[[\mathbf{u}]]_j$ são os vetores em coordenadas globais e locais que armazenam as componentes do deslocamento relativo entre o nó acoplado j e seu ponto material, j' , respectivamente. $\mathbf{F}_j$ e $\mathbf{f}_j$ são os vetores das componentes de força de reação ao deslocamento relativo, segundo os sistemas global e local, respectivamente.

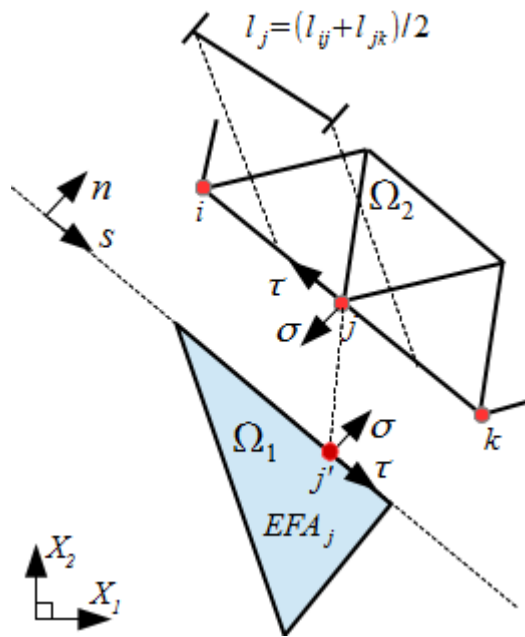


Figura 13 - Esquema de acoplamento em um sistema de coordenadas globais e locais.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} f_n \\ f_s \end{Bmatrix}}_{f_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 n_2 \\ s_1 s_2 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}}_{F_j} \quad (45)$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} [u_n]_j \\ [u_s]_j \end{Bmatrix}}_{[u]_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 n_2 \\ s_1 s_2 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{Bmatrix} [U_1]_j \\ [U_2]_j \end{Bmatrix}}_{[U]_j} \quad (46)$$

No âmbito de um sistema de coordenadas locais e de acordo com a Figura 13, pode-se escrever as componentes de força de reação ao deslocamento relativo em termos das componentes de tensões, como:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} f_n \\ f_s \end{Bmatrix}}_{f_j} = A_j \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix}}_{\sigma_j} \quad (47)$$

onde A_j corresponde à área de influência do nó acoplado j . Considerando que as tensões são constantes na vizinhança do nó j , a área de influência deste nó pode ser calculada da seguinte forma:

$$A_j = \frac{(l_{ij} + l_{jk})}{2} h = l_j h \quad (48)$$

onde l_j é o comprimento de influência, obtido da média aritmética entre as metades das distâncias dos dois nós adjacentes (i e k), e h é a espessura fora do plano de análise.

Assim, uma relação constitutiva discreta pode ser definida entre tensão e o deslocamento relativo no contato, como:

$$\sigma = \Sigma \left([u]_j \right) \quad (49)$$

onde Σ é a relação constitutiva empregada para representar o comportamento de interação no contato. Os modelos que serão empregados para esse propósito foram descritos nas subseções 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3. Entretanto, vale apenas mencionar que outros modelos poderiam ser utilizados para essa finalidade.

Nesse contexto e de forma generalizada, o vetor de força interna e a matriz de rigidez globais do elemento de acoplamento podem ser obtidos da seguinte forma (ver subseção 4.2.2.):

$$F_{int} = B_e^T [R^T f] = B_e^T [R^T A \sigma] \quad (50)$$

$$\mathbf{K}_{int} = \mathbf{B}_e^T \left[\mathbf{R}^T A \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial [\mathbf{D}]} \mathbf{R} \right] \mathbf{B}_e \quad (51)$$

onde $\mathbf{B}_e$ é a matriz que relaciona deformação e deslocamento modificada, escrita na equação 44. $\mathbf{C}_{tg}$ é a matriz constitutiva tangente, e $\partial \boldsymbol{\Sigma} / \partial [\mathbf{u}]$ é o operador constitutivo tangente do modelo constitutivo, consistente com o algoritmo de integração apresentado na Tabela 1.

CAPÍTULO 5

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os exemplos a seguir têm a intenção de demonstrar as características de acuracidade e robustez da técnica proposta de acoplamento de malhas de elementos finitos não conformes, aplicados à problemas mecânicos de contato. Do ponto de vista da classificação do contato, serão abordados exemplos em que as superfícies de contato já são conhecidas desde o início da análise, considerando a interação entre os sólidos como um contato conforme. Problemas com atrito e sem atrito serão abordados.

5.1. INTRODUÇÃO - EFA 1D

Em um primeiro momento, será utilizado o elemento de barra com um grau de liberdade por nó. Embora essa abordagem seja introduzida utilizando-se como “pano de fundo” o elemento de barra, constatar-se-á que ela será absolutamente geral. Desta forma, a partir de um exemplo simples, serão estabelecidos os procedimentos e generalizações cabíveis, fundamentais para o entendimento da técnica, de modo a tornar o estudo mais didático em um primeiro momento, facilitando posteriormente o entendimento da formulação geral.

Sabe-se, do estudo da Resistência dos Materiais, que uma barra consiste em um elemento estrutural reto, com seu comprimento muito maior que as dimensões de sua seção transversal. As forças externas atuantes em um elemento de barra são aplicadas nos nós. Excepcionalmente, uma barra pode estar sujeita a cargas atuando no interior do membro, ou seja, entre os nós. Para os fins desta abordagem, essas cargas podem ser substituídas por cargas estaticamente atuando nos nós, ou seja, cargas nodais equivalentes.

Adotando-se elementos de barra com 1 grau de liberdade por nó, têm-se que esses elementos transmitem apenas forças axiais de tração ou compressão, ou seja, transferem

esforços somente no sentido do seu eixo longitudinal. Para esse elemento não são contabilizados esforços decorrentes da ação de momentos flettores, torçores e forças cortantes. Assim, a barra contabiliza apenas a rigidez axial do membro estrutural. Para o propósito inicial de facilitar o entendimento da técnica, será utilizado então o elemento unidimensional de barra com dois nós e um grau de liberdade por nó.

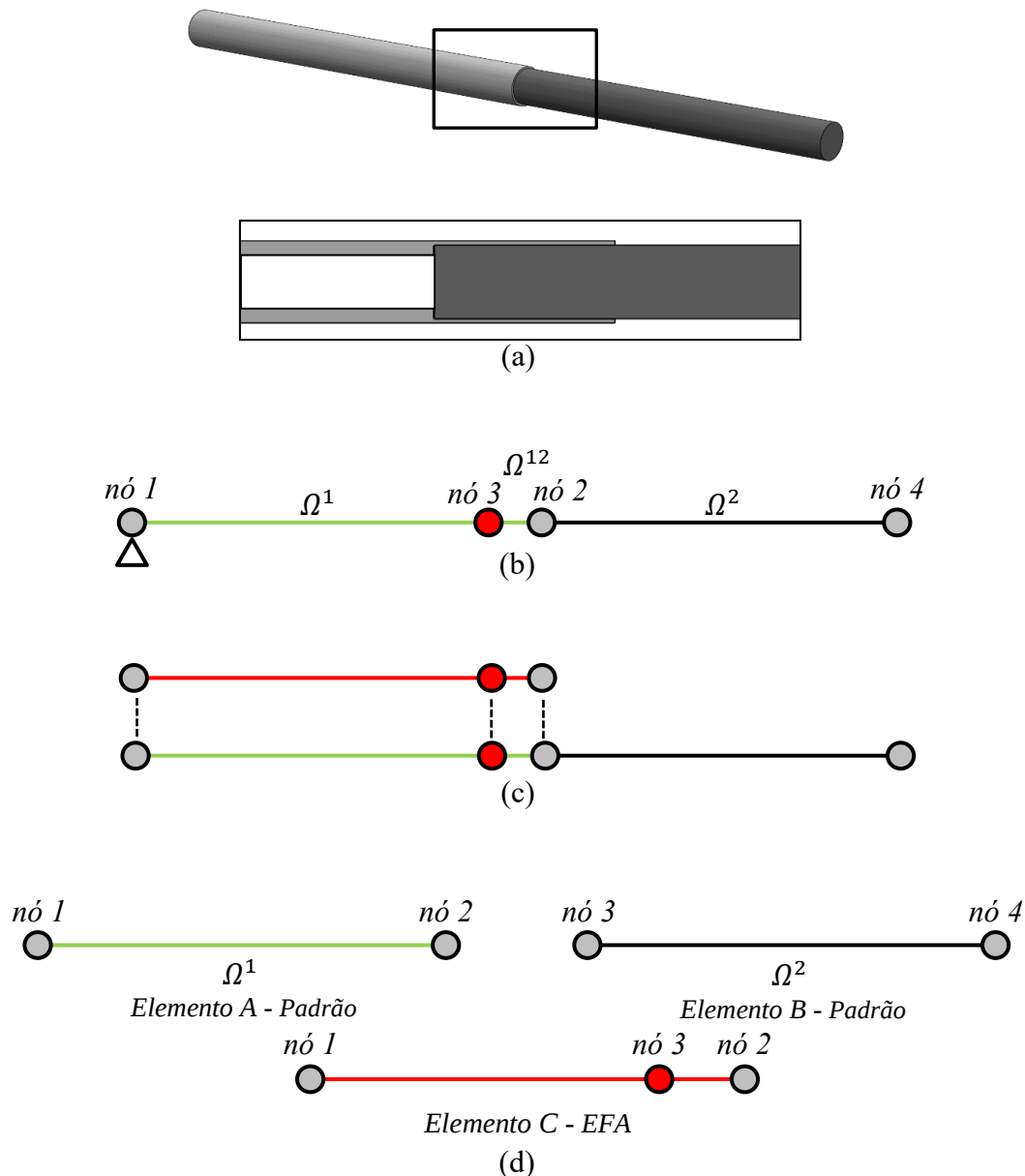


Figura 14 – Procedimento de acoplamento de malhas de elementos finitos não conformes aplicado ao exemplo unidimensional: (a) problema real - geometria e condição de contorno; (b) modelo de cálculo discretizado – processo de identificação dos nós que irão compor os elementos de acoplamento; (c) criação e inserção do EFA no modelo e (d) elementos finitos utilizados neste exemplo – dois elementos padrão e um elemento especial.

Utilizando-se os procedimentos para o acoplamento de malhas não conformes apresentados no capítulo 4, considera-se duas barras trabalhando em conjunto, onde a *barra A* de domínio Ω^1 tem seção circular vazada de área A e a *barra B*, de domínio Ω^2 , tem seção circular de área B , onde seus domínios se sobrepõem em $\Omega^{12} = \Omega^1 \cap \Omega^2$. Ambas as geometrias são apresentadas na Figura 14(a).

É possível observar na Figura 14(a) que a *barra A* tem seu diâmetro interno maior em uma de suas extremidades, possibilitando que a *barra B* seja inserida dentro da mesma. Esse rebaixo tem a função de limitar o deslocamento da *barra B* caso exista a tendência das barras se aproximarem, ou seja, esforços de compressão no conjunto. Do ponto de vista físico, considerando apenas o grau de liberdade unidimensional no eixo X , se as *barras A e B* se aproximarem, o modelo deve ser capaz de impedir a penetração dos corpos. Para tal condição, é adotado um acoplamento rígido. Na condição de tração das barras, considera-se que o atrito é a única força que restringe a *barra B* de se mover como corpo rígido. Para tal condição, é utilizado outra lei constitutiva para o acoplamento, com base na mecânica do dano. A formulação destes modelos se encontra na seção 3.

Após a análise cuidadosa do problema de engenharia em questão, discretizam-se os domínios Ω^1 e Ω^2 utilizando-se 1(um) elemento finito para cada domínio. Apresenta-se a montagem do modelo de cálculo na Figura 14(b) e os elementos utilizados na Figura 14(d). Observa-se que o procedimento e as considerações gerais do uso da técnica não se alteram pelo fato de apenas um elemento finito ser utilizado em cada domínio. A importância do exemplo discutido em seguida não reside nas expressões matemáticas ou dimensões das matrizes envolvidas, mas sim no conceito envolvido.

Definido o modelo de cálculo, iniciam-se os passos do procedimento geral da técnica. A primeira etapa é a identificação, no domínio sobreposto Ω^{12} , dos nós “soltos” (também se representou os nós “soltos” pelos nós vermelhos, como se pode ver na Figura 14(b)). Neste caso, o nó extra pertence à malha da *barra B*, chamada aqui de malha fina. O segundo passo é a criação dos EFAs. Como apenas um nó será acoplado, faz-se necessária a geração de somente um EFA, conforme a Figura 14 (b). Por fim, o novo elemento é inserido no sistema de equações do problema, possibilitando o acoplamento das malhas (Figura 14(c)).

Considerando uma abordagem linear, o procedimento para a resolução e as equações geradas ao longo do cálculo são apresentadas.

5.1.1. ANÁLISE LINEAR

Levando-se em consideração que o acoplamento entre as malhas é considerado idealmente rígido, onde a área de contato não varia durante a análise e as forças externas são aplicadas sempre no mesmo sentido, 1 (um) passo de carga seria o suficiente para se chegar à correta solução do sistema. Isso porque a rigidez do elemento finito de acoplamento, uma vez calculada, não seria alterada para qualquer direção de solicitação ou deslocamento dos nós, isto é, este elemento obedeceria a uma mesma lei constitutiva para qualquer situação de carregamento. Conclui-se, então, que tal problema poderia ser tratado como linear.

5.1.1.1. INTERPOLAÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS – FUNÇÕES DE FORMA

Para cada incremento de carga, tem-se que o campo de deslocamentos $\bar{\mathbf{U}}$ dos elementos finitos isoparamétricos padrão é definido pela interpolação dos dois nós de seus vértices, tal que, para um ponto material X no seu domínio, pode-se escrever:

$$\bar{\mathbf{U}}_A(X) = \bar{N}_1 D_1 + \bar{N}_2 D_2 = \sum_{i=1}^2 \bar{N}_i(X) \mathbf{D}_i \quad (52)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_B(X) = \bar{N}_3 D_3 + \bar{N}_4 D_4 = \sum_{j=3}^4 \bar{N}_j(X) \mathbf{D}_j \quad (53)$$

onde N_1 , N_2 , N_3 e N_4 são as funções de forma do elemento e D_1 , D_2 , D_3 e D_4 são os deslocamentos nodais.

Vale a pena notar que devido ao fato dos elementos A e B serem o mesmo tipo de elemento finito (barra de treliça ou simplesmente barra), as funções de forma são as mesmas para ambos os elementos, ou seja, $N_1 = N_3$ e $N_2 = N_4$.

5.1.1.2. CÁLCULO DAS DEFORMAÇÕES

Para se calcular as deformações em qualquer ponto dentro do elemento finito isoparamétrico padrão, parte-se dos conceitos da teoria de vigas, onde tem-se que as deformações estão ligadas à derivada dos deslocamentos, escrevendo-se então:

$$\varepsilon_A = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial X} = \frac{D_2 - D_1}{L} = \mathbf{B}_A \mathbf{D}_A \Rightarrow \{\varepsilon_A\} = \left[-\frac{1}{L} \quad +\frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

$$\varepsilon_B = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial X} = \frac{D_4 - D_3}{L} = \mathbf{B}_B \mathbf{D}_B \Rightarrow \{\varepsilon_B\} = \left[-\frac{1}{L} \quad +\frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

Para o EFA, define-se um deslocamento relativo, como a diferença entre o deslocamento do nó extra ($Cnode$) e o deslocamento de um ponto material X_C com as suas coordenadas, calculadas utilizando as funções de forma do elemento base (N_1 e N_2) cujo $Cnode$ pertence ao seu domínio, como segue:

$$\llbracket \mathbf{U} \rrbracket = D_3 - \bar{\mathbf{U}}(X_C) = D_3 - \sum_{i=1}^2 \bar{N}_i(X_C) \mathbf{D}_i = \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e \quad (56)$$

$$\llbracket \mathbf{U} \rrbracket = \begin{bmatrix} -N_1 & -N_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \quad (57)$$

5.1.1.3. CÁLCULO DAS TENSÕES

Como consequência do cálculo das deformações determinam-se as tensões dos elementos padrões, utilizando-se neste caso a lei de Hooke como relação constitutiva para materiais linearmente elásticos e isotrópicos, expressa por:

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_A = \mathbf{C} \mathbf{B}_A \mathbf{D}_A \quad (58)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_B = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_B = \mathbf{C} \mathbf{B}_B \mathbf{D}_B \quad (59)$$

onde $\mathbf{C}$, neste caso, é o módulo de elasticidade E , do material.

A partir do deslocamento relativo $\llbracket \mathbf{U} \rrbracket$ definido no âmbito do EFA, calcula-se a força de reação presente na interação das partes, $\mathbf{F}(\llbracket \mathbf{U} \rrbracket)$, que representa a força de contato entre os componentes. Distribuindo-se tal força na área superficial de contato A_C , obtém-se a tensão de contato entre as superfícies:

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \frac{\mathbf{F}(\llbracket \mathbf{U} \rrbracket)}{A_C} \quad (60)$$

5.1.1.4. DETERMINAÇÃO DOS VETORES DE FORÇA INTERNA

Os vetores de força interna dos elementos padrões são então determinados:

$$\mathbf{F}_A^{int} = \mathbf{B}_A^T \boldsymbol{\sigma}_A A_A L_A \quad (61)$$

$$\mathbf{F}_B^{int} = \mathbf{B}_B^T \boldsymbol{\sigma}_B A_B L_B \quad (62)$$

onde A_A e A_B são as áreas das seções transversais dos elementos A e B e L_A e L_B são seus respectivos comprimentos.

Da equação 42, sabe-se que o vetor de força interna do elemento de acoplamento pode ser escrito como:

$$\mathbf{F}_c^{int} = \mathbf{B}_c^T \mathbf{F}(\llbracket \mathbf{U} \rrbracket) = \mathbf{B}_c^T \mathbf{C} \mathbf{B}_c \mathbf{D}_c \quad (63)$$

5.1.1.5. DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA ACOPLADA

Da teoria apresentada no capítulo 2, item 2.1, tem-se que a rigidez K da estrutura é dada por:

$$\mathbf{K}_A = \int_{vol} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_A d_{vol} \quad (64)$$

$$\mathbf{K}_B = \int_{vol} \mathbf{B}_B^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B d_{vol} \quad (65)$$

onde $\mathbf{C}$ é matriz de constantes elásticas.

Considerando que o problema em questão é unidimensional, a matriz de constantes elásticas $\mathbf{C}$ se resume ao módulo de elasticidade, E . Substitui-se também $d_{vol} = A dx$.

Da formulação do elemento finito de acoplamento, tem-se:

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{B}_C^T \mathbf{C} \mathbf{B}_C \quad (66)$$

Decorre destas formulações, então:

$$\mathbf{K}_A = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & +\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\mathbf{K}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & +\frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} +CN_1N_1 & +CN_1N_2 & -CN_1 & 0 \\ +CN_1N_2 & +CN_2N_2 & -CN_2 & 0 \\ -CN_1 & -CN_2 & +C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Montando a matriz de rigidez da estrutura para se entender melhor qual a contribuição de cada elemento ao conjunto, tem-se:

$$\mathbf{K} = \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d_x \Rightarrow \mathbf{K} = \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & -N_1 \\ +\frac{1}{L} & 0 & -N_2 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ 0 & +\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & +\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & +\frac{1}{L} \\ -N_1 & -N_2 & 1 & 0 \end{bmatrix} d_x \quad (70)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} + CN_1N_1 & -\frac{EA}{L} + CN_1N_2 & -CN_1 & 0 \\ -\frac{EA}{L} + CN_1N_2 & +\frac{EA}{L} + CN_2N_2 & -CN_2 & 0 \\ -CN_1 & -CN_2 & +\frac{EA}{L} + C & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & +\frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Note que fica claro o papel do novo elemento inserido no modelo de cálculo para que as malhas possam ser acopladas. Em uma análise padrão sem o EFA, o determinante da matriz de rigidez $\mathbf{K}$ seria nula, mesmo após a aplicação das condições de contorno, tornando o sistema impossível de ser determinado, ou seja, o elemento $\mathbf{B}$ estaria “solto” no sistema e se deslocaria infinitamente.

Após a determinação da matriz de rigidez da estrutura objeto de cálculo, continua-se a rotina padrão de cálculo que consiste, basicamente, em:

- a) aplicação das condições de contorno naturais e essenciais, determinando-se o vetor de forças externas; e
- b) resolução das equações de equilíbrio geradas.

Com este exemplo teórico, pode-se visualizar de forma mais clara e direta como o elemento finito de acoplamento interage com as malhas padrão, possibilitando o acoplamento de malhas não conformes. Vale ressaltar o fato de que não há adição de novos graus de liberdade e não há necessidade do enriquecimento das funções de forma, ou seja, a criação de novos EFAs não exige maiores recursos computacionais.

5.1.2. ANÁLISE NÃO LINEAR

Como visto anteriormente, problemas que envolvem variação de rigidez ao longo da análise necessitam que os carregamentos sejam divididos em passos, de forma a possibilitar que tal variação seja corretamente contabilizada em cada incremento e que as matrizes sejam atualizadas. Portanto, adota-se o procedimento de cálculo não linear para a resolução de tais exemplos que envolvam os elementos finitos de acoplamento. Tais procedimentos são os

mesmos apresentados simplificadaamente no Capítulo 2 e no item 5.1.1. desse trabalho adicionando-se, agora, a consideração de variação da rigidez do EFA.

5.1.2.1. INCREMENTOS DE CARGA

Partindo-se do princípio de que a análise ocorrerá de forma incremental, define-se inicialmente o número de passos que serão necessários para a correta solução do problema.

Em problemas de contato, em que se considera o acoplamento como não rígido, o número de passos deve ser atribuído levando-se em consideração a complexidade das condições de contorno e da interação entre as partes. Em outras palavras, o número de divisões é diretamente proporcional à complexidade da função que rege o carregamento e das superfícies de contato. Levando-se em consideração também a necessidade do IMPL-EX de ter-se valores pequenos de incremento, foram adotados 100 incrementos de carga.

Como a rigidez está agora condicionada ao deslocamento, atribui-se um vetor arbitrário de deslocamento inicial (vetor nulo de deslocamentos) e resolve-se o problema, realizando-se ao final o cálculo do resíduo do equilíbrio entre o vetor de forças internas e externas, como rege a equação 11.

Com tal resíduo, estima-se um novo vetor de deslocamento utilizando-se o Método de Newton-Raphson, procedimento iterativo de solução de equações, amplamente utilizado nestas aplicações, que busca a convergência através da aproximação da trajetória de equilíbrio da estrutura por retas tangentes a ela, para satisfazer a equação 11 de equilíbrio global, segundo Souza Neto, *et al.* (2011).

Desta forma, procede-se com a iteração do vetor de deslocamentos, considerando novas estimativas $\mathbf{D}_{n+1}$, obtidas da equação 15, até o atendimento à tolerância de convergência de equilíbrio ε_{tol} .

No caso do elemento finito EFA, ainda há uma etapa extra nessa rotina que consiste em avaliar os resultados do deslocamento relativo de dois passos anteriores (utilizando-se o IMPL-EX) para se aplicar o modelo constitutivo condizente com o comportamento físico que se deseja e representar a perda de aderência ou o contato entre as partes.

Para demonstrar a robustez e simplicidade da técnica tem-se, a partir deste exemplo, abordagens onde serão apresentados casos do cotidiano da engenharia que envolvem contato.

5.2. BARRAS INTERFERENTES SOB COMPRESSÃO – EXEMPLO COM ELEMENTOS FINITOS PADRÕES CONSIDERANDO-SE O ACOPLAMENTO RÍGIDO

Em projetos mecânicos, é comum se encontrar uniões mecânicas realizadas por interferência. O processo de montagem pode ser realizado aquecendo-se o componente que irá receber o outro, ou resfriando o componente que será montado. Fisicamente, através do calor pode-se alterar a dimensão dos componentes (dilatação ou contração do corpo), possibilitando a montagem. Após o retorno dos componentes à temperatura de trabalho, surgirá uma força normal entre as superfícies de contato, dada pela interferência gerada entre as partes. Devido à tal força normal, tem-se então o aparecimento de forças de atrito entre os componentes, que serão responsáveis por resistir ao movimento relativo das partes.

Considere duas barras de material aço ASTM A36, módulo de elasticidade $E = 210.000 \text{ MPa}$, com dimensões geométricas segundo a Figura 15 e discretizadas, cada uma, com dois elementos lineares de barra padrão, Figura 16 (dois nós por elemento e um grau de liberdade por nó). Neste exemplo, assume-se a hipótese de que a união é idealmente rígida, ou seja, considera-se que a força de atrito é suficiente para garantir que não haja movimento relativo entre os componentes. As barras, engastadas na extremidade esquerda, são submetidas a uma carga axial de compressão de 4000N aplicada na extremidade oposta ao engaste, subdividida em 10 passos de carga, como apresentado na Figura 17.

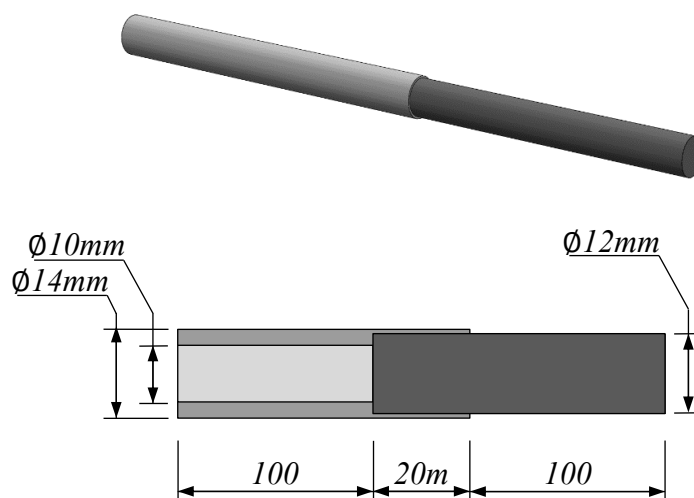


Figura 15 – Descrição do problema.

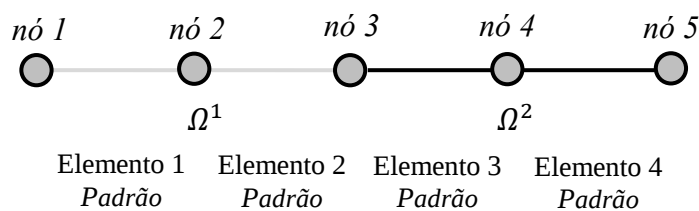


Figura 16 – Malha de Elementos Finitos.

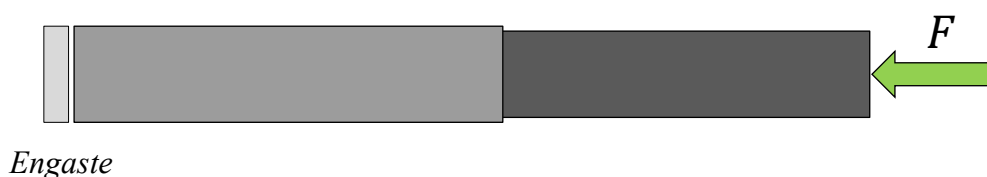


Figura 17 – Condições de Contorno.

Para o problema apresentado espera-se, devido ao caráter linear da análise, que a evolução dos deslocamentos por passo de carga seja linear, como pode-se observar na Tabela 2. O deslocamento nodal do nó 1 (um), decorrente da condição de contorno, é zero.

Tabela 2 – Deslocamentos nodais [mm] por passo de carga.

	DESLOCAMENTOS NODAIS - 10 PASSOS DE CARGA									
	PASSO 1	PASSO 2	PASSO 3	PASSO 4	PASSO 5	PASSO 6	PASSO 7	PASSO 8	PASSO 9	PASSO 10
NÓ	0,1 x F	0,2 x F	0,3 x F	0,4 x F	0,5 x F	0,6 x F	0,7 x F	0,8 x F	0,9 x F	F
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-0,000347	-0,00069	-0,00104	-0,00139	-0,00174	-0,00208	-0,00243	-0,00278	-0,00313	-0,00347
3	-0,000695	-0,00139	-0,00208	-0,00278	-0,00347	-0,00417	-0,00486	-0,00556	-0,00625	-0,00695
4	-0,000926	-0,00185	-0,00278	-0,00371	-0,00463	-0,00556	-0,00648	-0,00741	-0,00834	-0,00926
5	-0,001158	-0,00232	-0,00347	-0,00463	-0,00579	-0,00695	-0,0081	-0,00926	-0,01042	-0,01158

De forma simples, pode-se validar os resultados obtidos para cada elemento, baseando-se na formulação analítica para uma barra sob compressão:

$$\Delta d = \frac{FL}{EA} \quad (72)$$

Considerando o elemento 1 (um) para verificação no primeiro passo de carga, tem-se:

- $F = -400,0 \text{ N}$;
- $L = 55,00 \text{ mm}$;
- $E = 210.000 \text{ MPa}$;
- $A = 301,6 \text{ mm}^2$.

Com tais parâmetros de entrada para esta etapa de carregamento, calcula-se o deslocamento do nó 2 (dois), $d_2 = -0,000347mm$.

Da mesma forma, apresenta-se os resultados de tensão por elemento (Figura 18) e os verifica pela formulação analítica de barras sob compressão:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (73)$$

Para o elemento 4, considerando o último passo de carga, tem-se que $F = -4000 N$ e $A = 452,4 mm^2$, sendo então $\sigma = -8,8417MPa$.

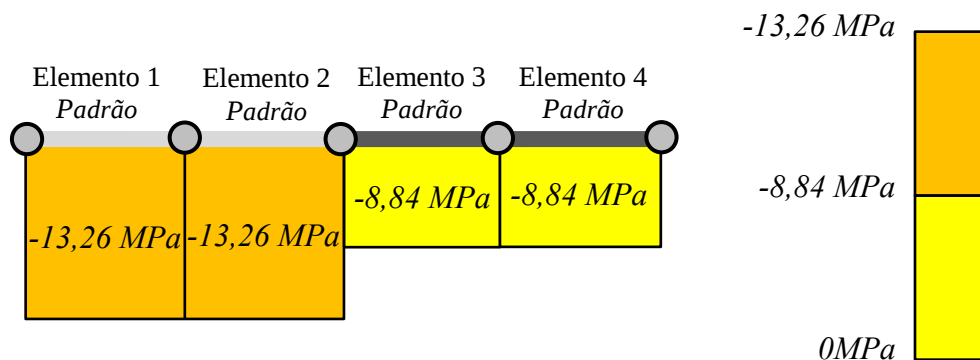


Figura 18 – Tensão de Compressão, para o último passo de carga.

5.3. BARRAS INTERFERENTES SOB COMPRESSÃO – EXEMPLO COM ELEMENTOS FINITOS DE ACOPLAMENTO CONSIDERANDO ACOPLAMENTO RÍGIDO

Utiliza-se o mesmo exemplo do item 5.2. A Figura 19 traz os elementos finitos considerados no modelo. São 4 elementos finitos padrão e um elemento finito de acoplamento. Neste caso, o EFA tem como base o elemento 2, de nós 2 e 3, acoplando o nó 4 do elemento 3. Observa-se que o nó 4 poderia estar em qualquer ponto do domínio do elemento 2, inclusive compartilhando a mesma posição material dos nós 2 ou 3.

Neste exemplo, também se assume a hipótese de que a união é idealmente rígida, ou seja, considera-se que a força de atrito é suficiente para garantir que não haja movimento relativo entre os componentes. Desta forma, tal situação requer que o elemento finito de acoplamento acople as malhas representando a união de forma rígida, permitindo a transmissão de deslocamentos e forças entre as partes sem que haja movimento relativo entre elas.

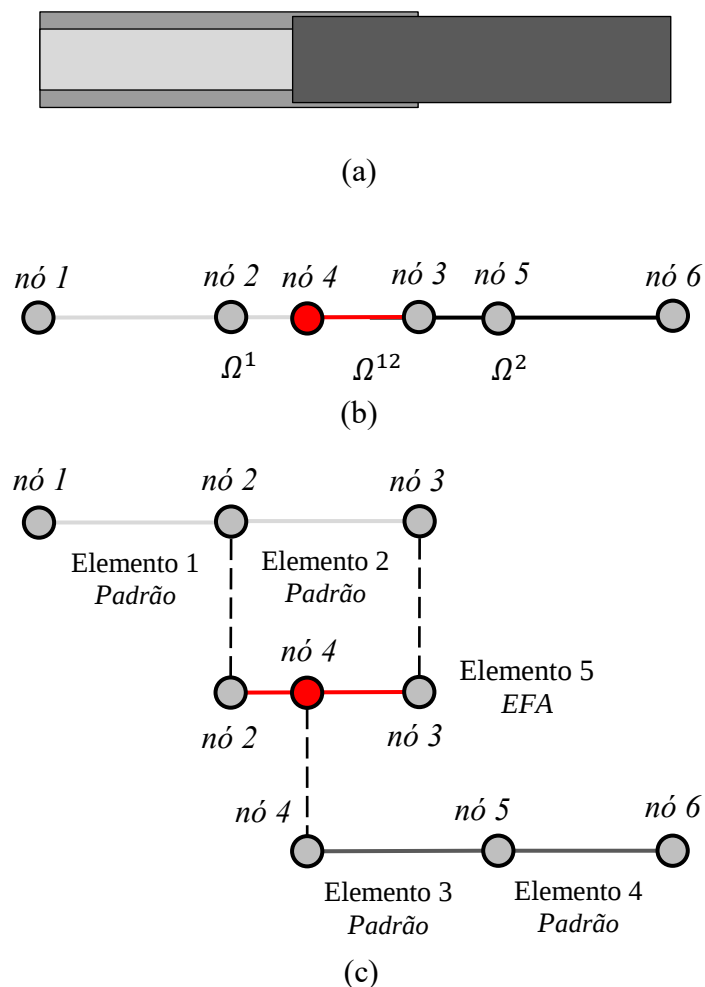


Figura 19 – Procedimento de acoplamento de malhas de elementos finitos não conformes aplicado ao exemplo unidimensional: (a) Problema real - geometria; (b) modelo de cálculo discretizado – processo de identificação dos nós que irão compor os elementos de acoplamento, criação e inserção do EFA no modelo; (c) elementos finitos utilizados neste exemplo – quatro elementos padrão e um elemento especial.

Considerando as duas barras de material aço ASTM A36, módulo de elasticidade $E = 210.000 \text{ MPa}$, com dimensões geométricas segundo a Figura 15, também utiliza-se do exemplo anterior as condições de contorno onde as barras, engastadas na extremidade esquerda, são submetidas a uma carga axial de compressão de 4000N aplicada na extremidade oposta ao engaste, subdividida em 10 passos de carga, como apresentado na Figura 17.

O exemplo 5.2, mesmo simples, fornece informações importantes para a validação dos EFA, como os deslocamentos nodais, deformações e tensões por elemento, que servirão de referência para os resultados aqui obtidos. Como foi inserido um novo elemento na malha, vale realizar uma comparação entre os elementos e nós dos dois exemplos, 5.2 e 5.3. Os elementos 1, 2, 3 e 4 das malhas 5.2 e 5.3, representadas na Figura 16 e Figura 19, são os mesmos

elementos para ambas. Os nós 1, 2, 4 e 5 da malha do exemplo anterior correspondem aos nós 1, 2, 5 e 6 da malha atual. Como o elemento de acoplamento é capaz de representar a união de malhas não conformes, pode-se realizar aqui uma representação mais próxima da realidade, modelando as barras e sua região de sobreposição. Tal região é representada entre os nós 3 e 4, pela sobreposição dos elementos 2 e 3 e acopladas pelo elemento 5, EFA.

Tabela 3 – Deslocamentos nodais [mm] por passo de carga.

	DESLOCAMENTOS NODAIS - 10 PASSOS DE CARGA									
	PASSO 1	PASSO 2	PASSO 3	PASSO 4	PASSO 5	PASSO 6	PASSO 7	PASSO 8	PASSO 9	PASSO 10
NÓ	0,1 x F	0,2 x F	0,3 x F	0,4 x F	0,5 x F	0,6 x F	0,7 x F	0,8 x F	0,9 x F	F
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-0,000347	-0,00069	-0,00104	-0,00139	-0,00174	-0,00208	-0,00243	-0,00278	-0,00313	-0,00347
3	-0,000553	-0,00111	-0,00166	-0,00221	-0,00276	-0,00332	-0,00387	-0,00442	-0,00497	-0,00553
4	-0,000450	-0,00090	-0,00135	-0,00180	-0,00225	-0,00270	-0,00315	-0,00360	-0,00405	-0,00450
5	-0,000724	-0,00145	-0,00217	-0,00289	-0,00362	-0,00434	-0,00507	-0,00579	-0,00651	-0,00724
6	-0,000955	-0,00191	-0,00287	-0,00382	-0,00478	-0,00573	-0,00669	-0,00764	-0,00860	-0,00955

Na Tabela 3, que apresenta os deslocamentos nodais por passo de carga, nota-se a semelhança do deslocamento nodal do nó 2 para os exemplos 5.2 e 5.3, pois o elemento 1 tem as mesmas propriedades em ambos os modelos, ou seja, mesmo comprimento, área e material. A partir do nó 3, os resultados apresentados são diferentes, devido à posição inicial dos nós que, agora, representam as barras até seu comprimento total.

O deslocamento máximo das barras para o exemplo 5.2 é de -0,01158mm, enquanto o deslocamento máximo para o exemplo com o elemento de acoplamento é de -0,00955mm. Isso decorre também do fato de que a união interferente, para o exemplo anterior, foi simplificada sendo representada apenas pela união dos elementos de propriedades diferentes em um nó intermediário. Com o EFA, pode-se representar a união entre as barras com um elemento específico e atribuir uma rigidez maior para tal região em relação à rigidez do conjunto (adotada uma rigidez 10^6 maior que a maior rigidez do sistema).

Representa-se, graficamente, o deslocamento dos nós para o último passo de carga, mostrado na Figura 20. Segundo a formulação do elemento finito de acoplamento, tem-se que o deslocamento relativo calculado para o EFA é referente ao deslocamento do ponto material do nó 4 internamente ao elemento 2 e o deslocamento do próprio nó 4, pertencente ao elemento 3 da malha não conforme sendo acoplada.

Tal deslocamento relativo gera uma força de reação presente na interação das partes, $F(\llbracket U \rrbracket)$, que representa a força de contato entre os componentes. Por sua vez, distribuindo-se tal força na área superficial de contato A_C , obtém-se a tensão de contato.

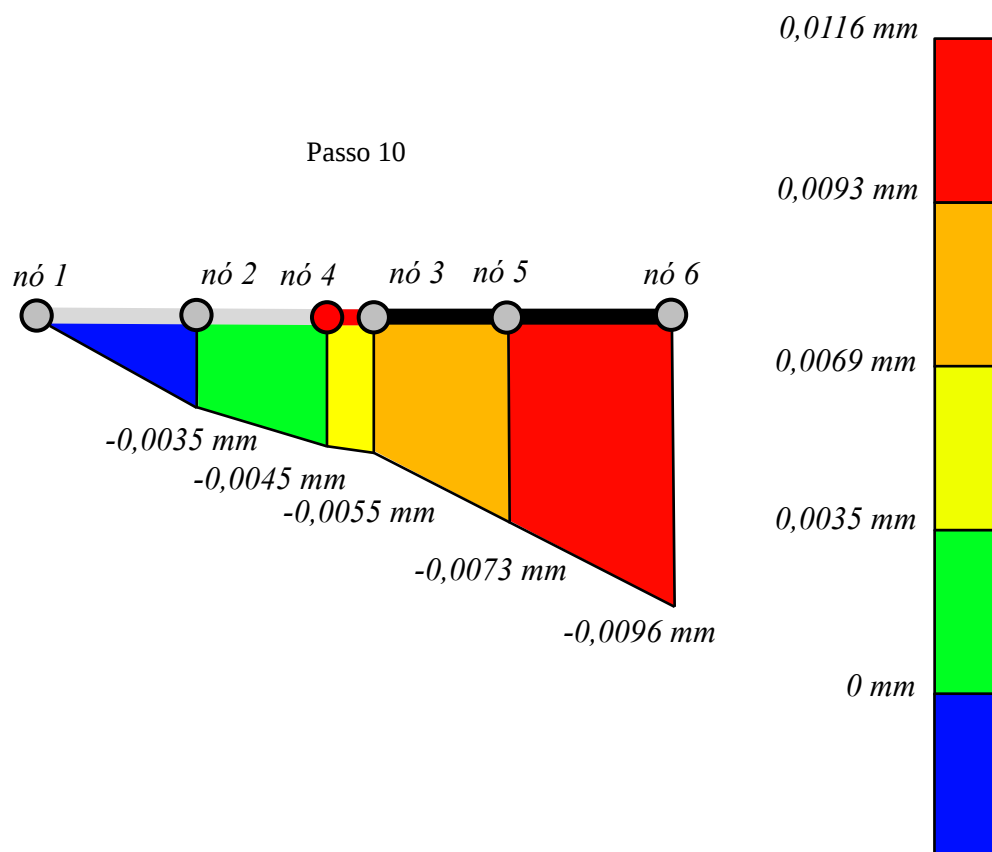


Figura 20 – Deslocamento nodal – Passo de carga 10.

No carregamento total das barras, espera-se que o cálculo da força de contato e tensão de contato para o elemento de acoplamento, no caso do acoplamento idealmente rígido, seja de igual ao carregamento máximo, -4000N, já que a carga é transmitida integralmente pela união. A tensão de contato, neste caso, é distribuída pela região resiste ao movimento. No caso da compressão, pode-se notar na Figura 19 que a barra maciça apoia em um rebaixo na geometria da barra vazada e dessa forma essa região é a que resiste ao movimento relativo. Assim, na região de área $A = 34,300\text{mm}^2$ atua uma tensão de contato de 116,618MPa.

5.4. BARRAS INTERFERENTES SOB CARGA CÍCLICA – EXEMPLO COM ELEMENTOS FINITOS PADRÕES CONSIDERANDO ACOPLAMENTO RÍGIDO

Neste novo exemplo, após a apresentação das barras trabalhando sob compressão, considera-se a mesma configuração de barras interferentes, só que submetidas a um carregamento cíclico, conforme o gráfico da Figura 21. Considere as duas barras de material aço ASTM A36, módulo de elasticidade $E = 210.000\text{ MPa}$, com dimensões geométricas ainda segundo a Figura 15 e discretizadas, cada uma, com dois elementos lineares de barra padrão, Figura 16 (dois nós por elemento e um grau de liberdade por nó). As condições de contorno

estão apresentadas na Figura 17, onde o carregamento foi subdividido em 32 partes, de forma a possibilitar que se avalie o deslocamento para carga máxima de compressão.

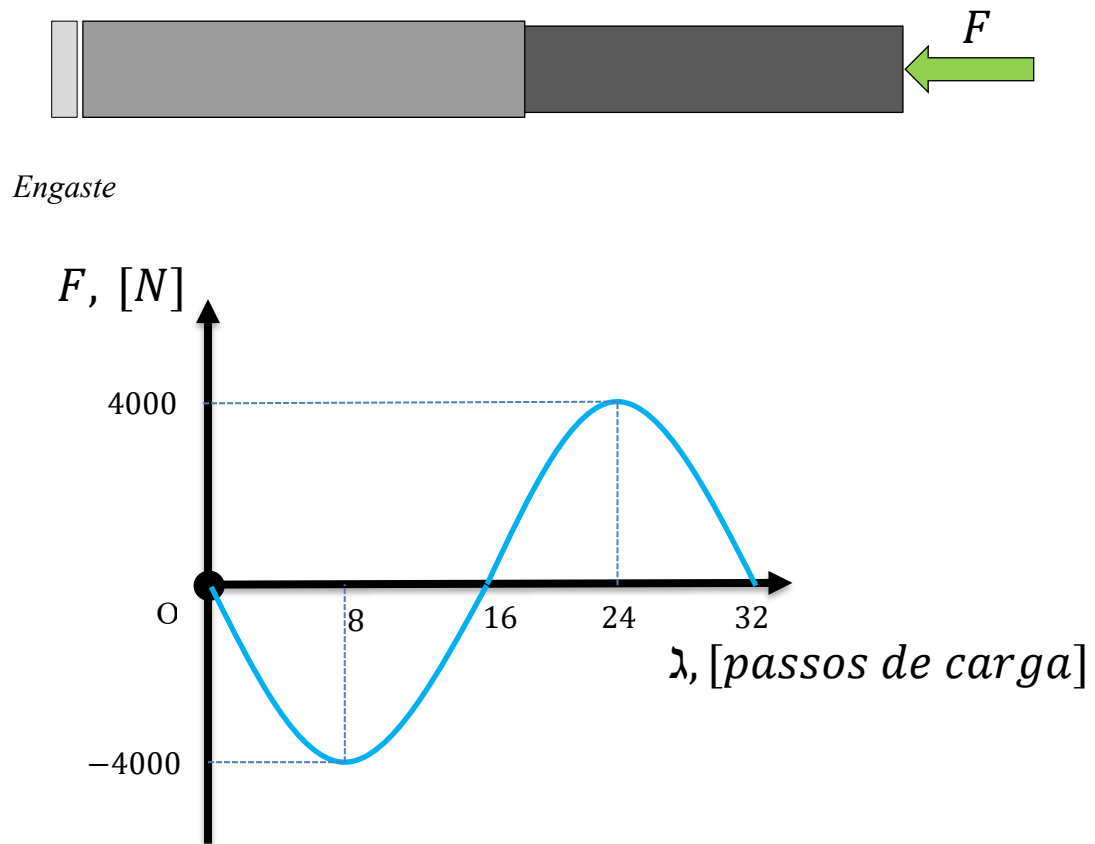


Figura 21 - Barra submetida a carregamento cíclico.

Assume-se neste item a hipótese de que a união é idealmente rígida. É importante notar que, neste caso, o modelo com elementos finitos padrão não seria capaz de representar todo o ciclo de carregamento se o acoplamento não fosse considerado rígido, ou seja, que houvesse a possibilidade de deslizamento entre as partes no carregamento de tração. Isso porque este modelo não seria capaz de permitir a perda de aderência se a força superficial de atrito não fosse suficiente para resistir ao movimento relativo.

Para as condições apresentadas, os valores de deslocamento nodal têm o mesmo módulo no semi-ciclos, alternando entre deslocamentos positivos e negativos, para cada sentido de carga. A Tabela 4 apresenta valores de deslocamento nodal para alguns passos de carga. A Figura 22 mostra a configuração gráfica dos deslocamentos para o passo de carga 8. Pode-se notar na tabela que no passo 16, os deslocamentos nodais são nulos, ou seja, é o incremento em que o carregamento se inverte. A partir deste passo, os corpos começam a ser tracionados até a

carga máxima de 4000N, sendo descarregados e finalizando a análise em sua condição inicial (pelo fato de que a análise é realizada dentro do regime elástico do material).

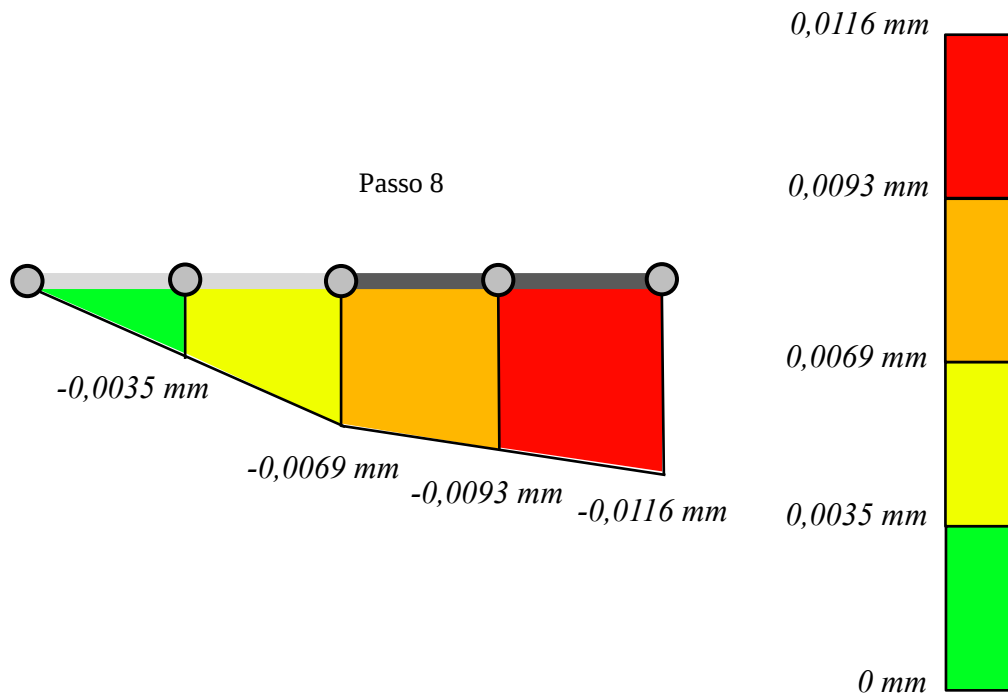


Figura 22 – Deslocamentos nodais – Passo de carga 8.

Relembrando que a matriz função de forma $[N]$ do elemento de barra é linear, isto é, a função que interpola o deslocamento no domínio do elemento a partir dos deslocamentos nodais calculados é um polinômio de primeiro grau, verifica-se que os dois primeiros elementos, que compartilham o mesmo material e seção geométrica, têm a mesma inclinação para a variação do deslocamento interno. Na transição entre os elementos dois e três, nota-se que a variação do deslocamento reduz, devido à área da seção da segunda barra ser maior e, consequentemente, sua rigidez também.

Decorrente disso, pode-se lembrar também que a matriz que relaciona o deslocamento nodal e a deformação no elemento, a matriz deslocamento-deformação $[B]$, é derivada da matriz função de forma $[N]$. Assim, sabe-se que a deformação no elemento é derivada do deslocamento nele e, neste caso, a deformação por elemento é constante. Pode-se estender tal observação para o comportamento da tensão calculada para cada elemento.

Tabela 4 – Deslocamentos nodais [mm] por passo de carga.

	DESLOCAMENTOS NODAIS - 32 PASSOS DE CARGA							
	PASSO 2	PASSO 4	PASSO 8	PASSO 16	PASSO 24	PASSO 28	PASSO 30	PASSO 32
NÓ	$-0,38 \times F$	$-0,71 \times F$	$-F$	$0 \times F$	F	$0,71 \times F$	$0,38 \times F$	$0 \times F$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-0,00133	-0,00246	-0,00347	0	0,00347	0,00246	0,00133	0
3	-0,00266	-0,00491	-0,00695	0	0,00695	0,00491	0,00266	0
4	-0,00354	-0,00655	-0,00926	0	0,00926	0,00655	0,00354	0
5	-0,00443	-0,00819	-0,01158	0	0,01158	0,00819	0,00443	0

A deformação dos elementos, assim como suas tensões para alguns passos de carga apresentados na Tabela 4, podem ser analisados nas figuras 23 e 24, respectivamente.

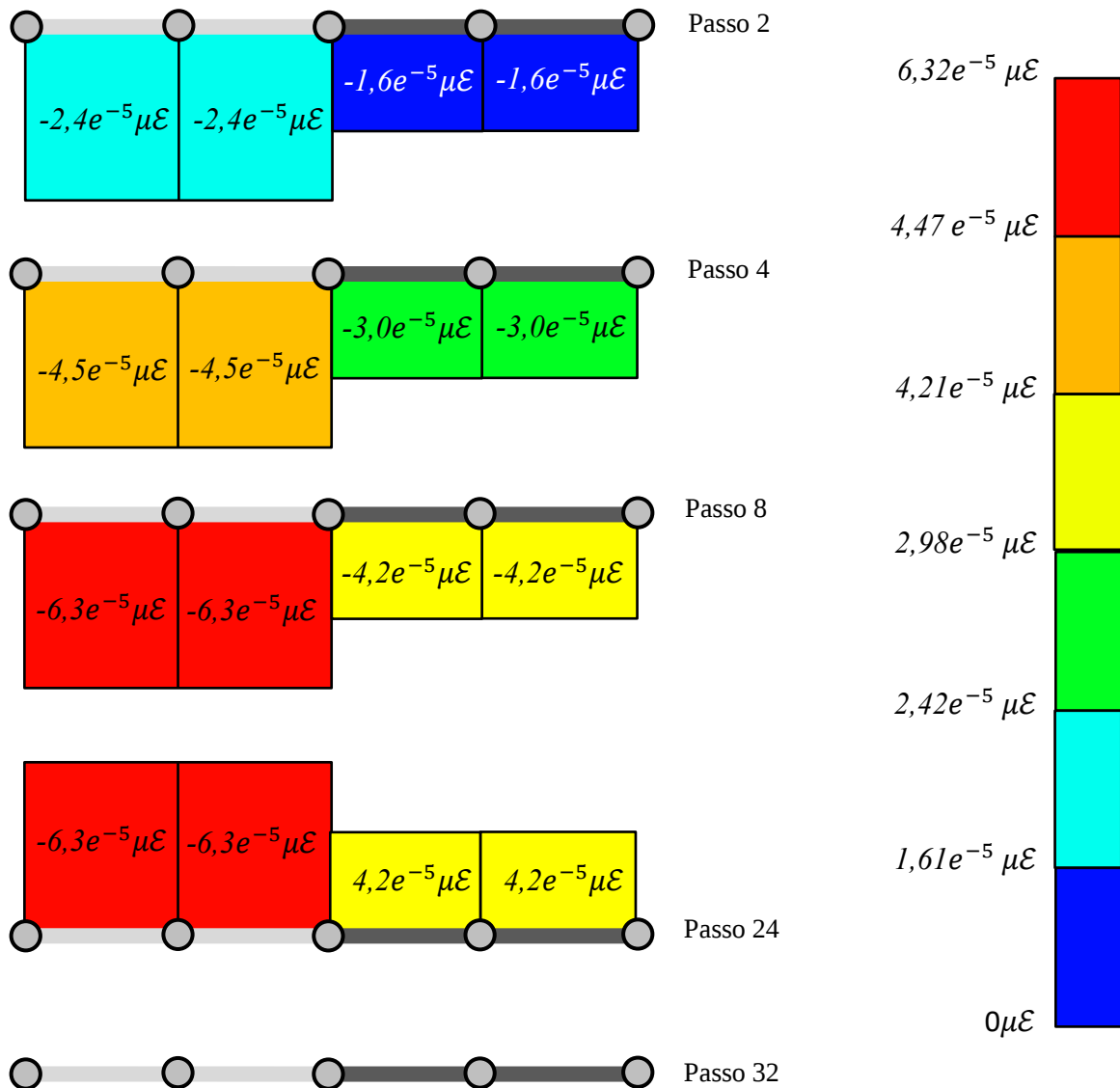


Figura 23 – Deformação por elemento (passos de carga 2, 4, 8, 24 e 32).

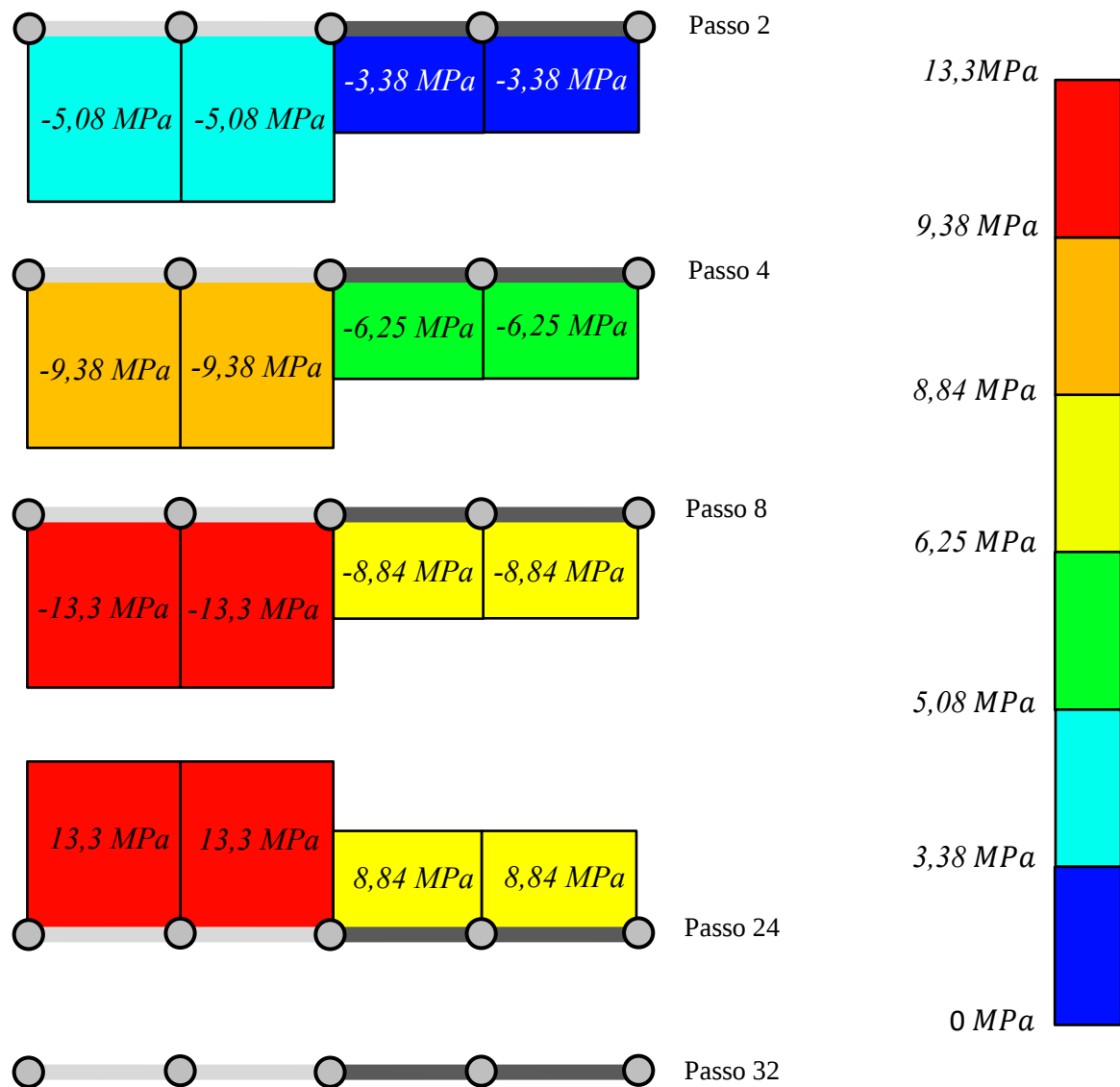


Figura 24 – Tensão por elemento (passos de carga 2, 4, 8, 24 e 32).

5.5. BARRAS INTERFERENTES SOB CARGA CÍCLICA – EXEMPLO COM ELEMENTOS FINITOS DE ACOPLAMENTO CONSIDERANDO ACOPLAMENTO NÃO-RÍGIDO

A partir dos parâmetros e condições de contorno do exemplo 5.4, ou seja, geometria conforme Figura 15, malha conforme Figura 19 e condições de contorno de acordo com a Figura 17, assume-se neste item a hipótese de que a união entre as barras é não-rígida. Neste caso, o comportamento do elemento de acoplamento fica condicionado aos parâmetros calculados durante a análise. Na compressão, a barra da direita transmite força para a barra vazada através do rebaixo já comentado. Na inversão do carregamento (a partir do passo 16), as barras passam

a interagir através de suas superfícies laterais, onde o movimento relativo fica condicionado ao desequilíbrio entre a força interna exercida pelo elemento 3 no EFA e a força de atrito estático, que varia e tem o mesmo módulo da tal força interna exercida, até o limite de seu coeficiente de atrito estático, sendo então $0 \leq F_{ate} \leq \mu_e \cdot N_n$. Após tal limite, a relação entre as partes passa a ser dinâmica, onde a força de atrito assume o módulo constante $F_{atd} = \mu_d \cdot N_n$, sendo μ_d o coeficiente de atrito dinâmico, μ_e o coeficiente de atrito estático e N_n a força normal às superfícies de contato.

Neste exemplo, considera-se o comportamento não-rígido ideal, ou seja, enquanto não há o equilíbrio das forças no elemento de acoplamento, o acoplamento é considerado idealmente rígido e, a partir do vencimento do limite de resistência estática da superfície de atrito, é considerado a plena perda de aderência, desconsiderando qualquer interação entre as partes após este cenário. Enquanto as barras estão sob compressão, a área resistente ao movimento relativo é o anel da barra vazada, de área $A = 34,300\text{mm}^2$. A partir do passo 16, quando as barras passam a ser tracionadas, tem-se que a área resistente ao deslizamento é a área da superfície lateral da barra vazada, em seu comprimento de 20mm conforme Figura 15, que totaliza $A_{contato} = 753,600\text{mm}^2$.

Faz-se necessário, neste momento, mais um parâmetro para se dar início à análise. O conhecimento da máxima tensão normal estática entre as superfícies de contato proveniente da montagem interferente das barras é essencial a partir de agora, para que seja possível a avaliação do escorregamento entre as partes. Desta forma, considera-se uma interferência entre as barras tal que a tensão normal máxima ($\sigma_{contato} = F_{ate}/A_{contato}$) gerada entre elas é de 10N/mm^2 e, adotando-se um coeficiente de atrito estático máximo entre as barras de aço $\mu_e = 0,74$, sabe-se que a máxima força de atrito estático atuante será de 7.536N e a força normal necessária entre as partes é de 10.184N .

Tabela 5 – Deslocamentos nodais [mm] por passo de carga.

	DESLOCAMENTOS NODAIS - 32 PASSOS DE CARGA							
	PASSO 2	PASSO 4	PASSO 8	PASSO 16	PASSO 24	PASSO 28	PASSO 30	PASSO 32
NÓ	$-0,38 \times F$	$-0,71 \times F$	$-F$	$0 \times F$	F	$0,71 \times F$	$0,38 \times F$	$0 \times F$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-0,00133	-0,00246	-0,00347	0	0,00347	0,00246	0,00133	0
3	-0,00211	-0,00391	-0,00553	0	0,00553	0,00391	0,00211	0
4	-0,00172	-0,00318	-0,00450	0	0,00450	0,00318	0,00172	0
5	-0,00277	-0,00512	-0,00724	0	0,00724	0,00512	0,00277	0
6	-0,00366	-0,00675	-0,00955	0	0,00955	0,00675	0,00366	0

A força de contato no elemento de acoplamento, para o passo 24 com carga de tração, é de 4.000N. Tal força, distribuída na área de contato, gera uma tensão de contato de 5,31N/mm². Aqui, a força externa não foi suficiente para vencer a força de atrito gerada pela interferência entre as partes e, desta forma, a união permanece sem movimento relativo.

Para as condições apresentadas, os valores de deslocamento nodal para cada sentido de carga têm o mesmo módulo, alternando entre deslocamentos positivos e negativos. A Tabela 5 apresenta valores de deslocamento nodal para alguns passos de carga, similar à Tabela 4. Dessa comparação, pode-se notar o mesmo comportamento explicitado entre os exemplos 5.2 e 5.3, onde o deslocamento total para a carga máxima foi reduzido usando-se o elemento de acoplamento, isto porque a região de interação entre as barras é melhor representada neste modelo.

Se a carga máxima do ciclo de carregamento, F , for aumentada para 10.000N, o atrito existente entre as superfícies não será suficiente para resistir ao movimento. Para essa condição, apresenta-se o deslocamento das partes na Tabela 6 onde nota-se que, a partir do passo onde a força interna exercida pelo elemento 3 é maior que a máxima força de atrito estática gerada, há a perda de aderência da região interferente, resultando em um movimento de corpo rígido da barra maciça. Entre os passos de carga 20 e 21, a tensão de contato existente é de, respectivamente, 9,38N/mm² e 11,03N/mm². A partir desse passo, então, a força externa exercida na extremidade direita da barra maciça não mais gera deformações nos componentes analisados, mas faz com que uma das barras seja acelerada de acordo com as equações cinemáticas da mecânica que regem o movimento de corpos rígidos. Não é o objetivo deste trabalho avaliar qual o comportamento da barra após tal separação, então atribui-se ao corpo rígido um deslocamento representativo de deslocamento relativamente alto em relação ao conjunto analisado, como observado para os passos 24, 28 e 30.

Tabela 6 – Deslocamentos nodais [mm] por passo de carga.

	DESLOCAMENTOS NODAIS - 32 PASSOS DE CARGA							
	PASSO 4	PASSO 8	PASSO 16	PASSO 20	PASSO 24	PASSO 28	PASSO 30	PASSO 32
NÓ	$-0,71 \times F$	$-F$	$0 \times F$	$0,71 \times F$	F	$0,71 \times F$	$0,38 \times F$	$0 \times F$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-0,00614	-0,00868	0	0,00614	0	0	0	0
3	-0,00977	-0,01382	0	0,00977	0	0	0	0
4	-0,00795	-0,01125	0	0,00795	5,2E+13	3,7E+13	2,0E+13	0
5	-0,01279	-0,01809	0	0,01279	5,2E+13	3,7E+13	2,0E+13	0
6	-0,01689	-0,02388	0	0,01689	5,2E+13	3,7E+13	2,0E+13	0

5.6. MANCAL DE APOIO (CONTATO SEM ATRITO)

Trata-se de uma barra com seção retangular e um mancal de apoio, conforme ilustra a Figura 25. A barra de aço é engastada em uma de suas extremidades, enquanto é aplicada uma carga distribuída com resultante de 100N vertical para cima na extremidade oposta, gerando um momento em sua fixação. Próximo ao centro da barra, o mancal de apoio de seção retangular em aço, limita o deslocamento vertical do conjunto, resultando em regiões de contato (quina do mancal) com elevada concentração de tensões.

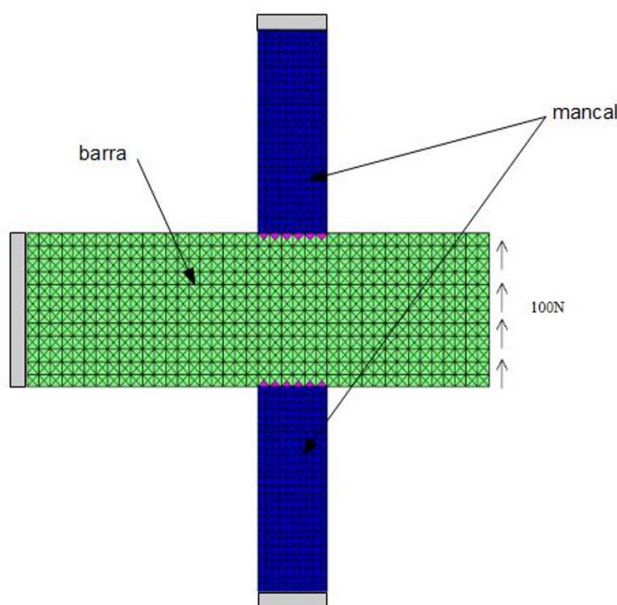


Figura 25 - Geometria, condições de contorno e discretização em elementos finitos.

Foi considerado material elástico linear para a barra e mancal com módulo de elasticidade de 210GPa e coeficiente de Poisson 0,31.

Para a construção do modelo numérico 2D, mancal e barra foram discretizados em elementos finitos de forma independente, com elementos finitos isoparamétricos 2D triangulares com 3 nós (T3). Além disso, como pode ser visto na Figura 25, a barra de aço foi discretizada com uma malha mais grosseira (1920 elementos) em relação à malha adotada para o mancal (540 elementos).

Para acoplar as malhas independentes e descrever a interação entre as partes do sólido, elementos finitos de acoplamento triangulares com 4 nós (T4) foram introduzidos nas interfaces barra/mancal (ver elementos cor rosa na Figura 25). Note que para cada nó solto na interface,

um elemento de acoplamento foi introduzido, composto por 3 nós do elemento triangular (T3) da malha grosseira e 1 nó (solto) extra da malha fina.

A Figura 26 e a Figura 27 ilustram o campo de tensões normais vertical e isocurvas de deslocamentos totais, respectivamente. Ao ser carregada verticalmente, a barra retangular se apoia na quina direita do mancal superior e a comprime. É importante notar que nessa região, a técnica foi capaz de impedir a penetração entre os componentes, representando fielmente a compressão e a deformação de ambos os componentes. Além disso, a esquerda da quina, e em toda a face inferior, a barra tem a tendência de se afastar do mancal, provocando uma perda de contato. Neste caso, o acoplamento não rígido que permite a perda de contato entre as regiões foi fundamental. Assim, a técnica utilizada foi capaz de retratar o comportamento mecânico, sobrecarregando a região comprimida do mancal e permitindo a perda de contato nas demais regiões.

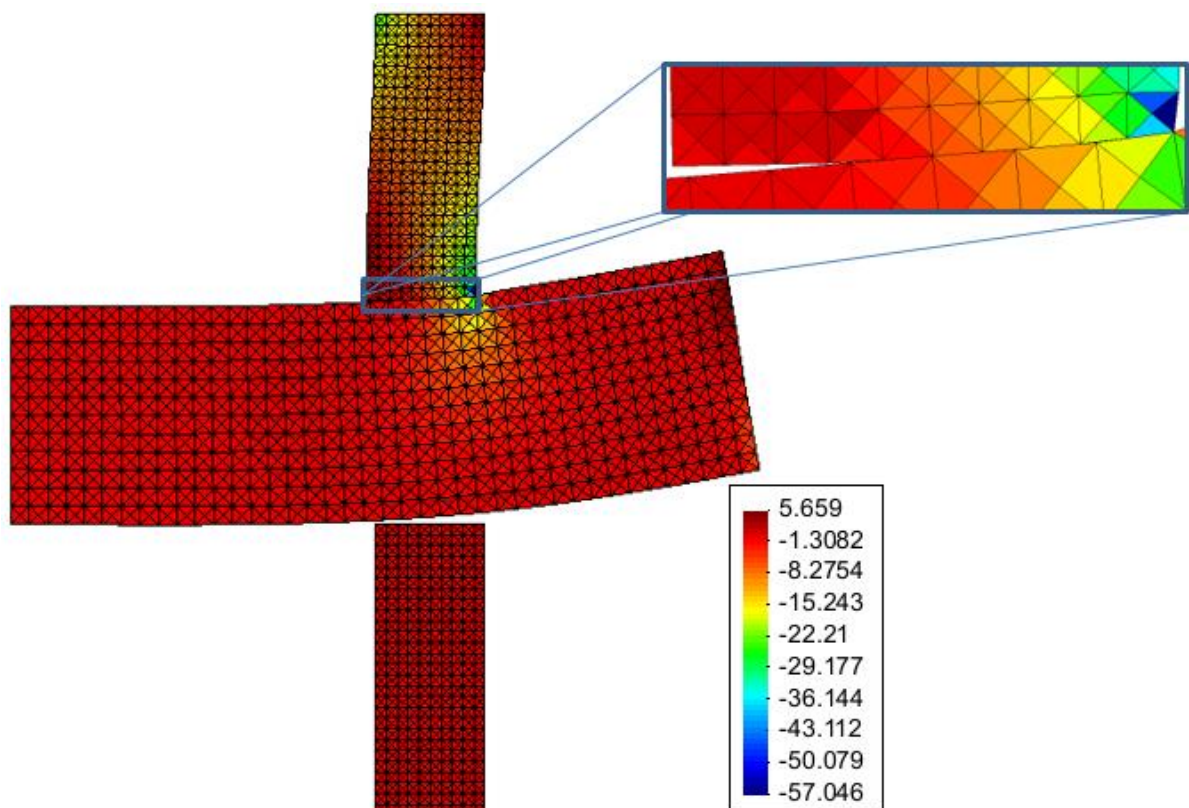


Figura 26 - Representação da interação de compressão e perda de aderência através do campo de tensões normais verticais (MPa).

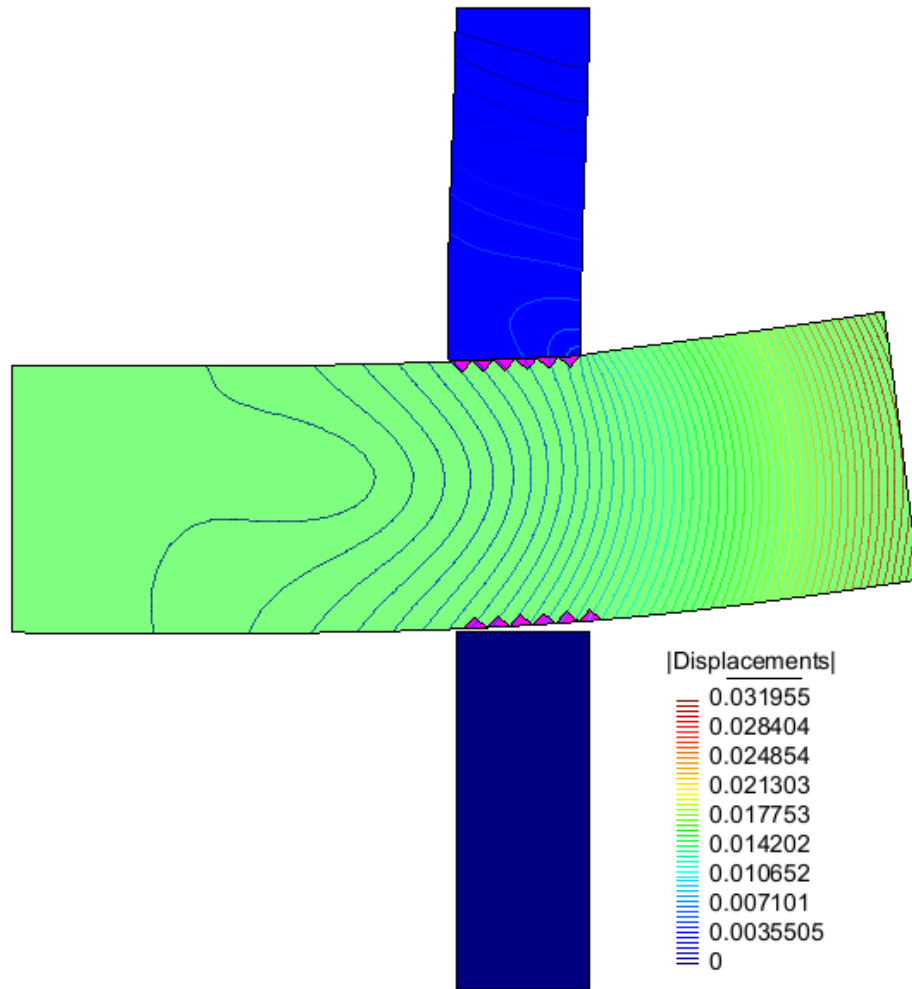


Figura 27 - Isocurvas de deslocamentos totais (mm)

5.7. PLACA SOBRE BASE NÃO RÍGIDA (CONTATO SEM ATRITO)

Neste segundo exemplo a aplicabilidade da estratégia desenvolvida para solucionar problemas de contato é demonstrada através da interação de uma placa apoiada sobre uma base não rígida engastada na sua extremidade inferior (ver Figura 28).

Como o foco é a representação da interação entre as regiões, ambas foram consideradas com comportamento elástico linear com módulo de elasticidade de 210GPa e coeficiente de Poisson 0,31. Desta forma, novamente é considerada que toda a não-linearidade do problema se concentra na região da interface.

Na Figura 28 são ilustradas as condições de contorno e carregamento aplicado. A placa é submetida à ação de um carregamento de intensidade 1500N vertical para baixo em seu centro, distribuído em 1/5 de seu contorno superior, produzindo um efeito de compressão sobre o bloco

não rígido nesta região, e devido à flexão, uma perda de aderência entre o bloco e a placa nas extremidades.

Placa e base foram discretizados com elementos finitos triangulares com 3 nós (T3) de forma totalmente independentes. Uma malha mais grosseira com 480 elementos finitos foi empregada na região da base, enquanto 336 elementos foram criados na discretização da placa. Os elementos da base possuem o dobro do tamanho dos elementos da região da placa.

Foram inseridos 29 elementos de acoplamento triangulares com 4 nós (T4) para acoplar as malhas não conformes (elementos rosas da Figura 28).

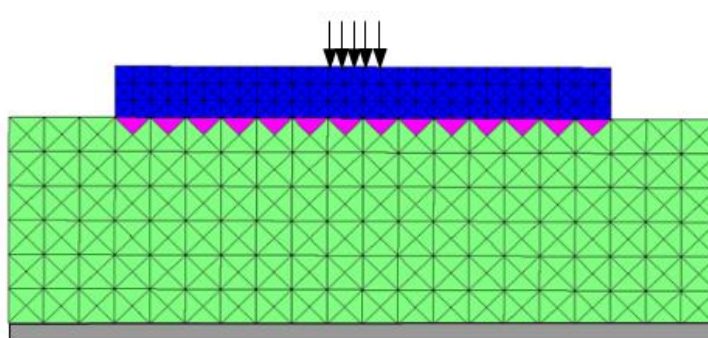


Figura 28 - Geometria e condições de contorno e discretização em elementos finitos.

A Figura 29 e a Figura 30 apresentam os resultados obtidos em termos de tensão normal vertical e isocurvas de deslocamentos totais, respectivamente. Pode-se observar que para movimentos verticais ascendentes da placa, a mesma se afasta da base rígida, representada através do modelo de acoplamento não rígido com perda de aderência completa. Em contrapartida, nas regiões em que as peças foram comprimidas uma contra a outra, não houve penetração, ou seja, os elementos finitos especiais de acoplamento evitaram a interpenetração das malhas, restringindo o deslocamento relativo entre os subdomínios.

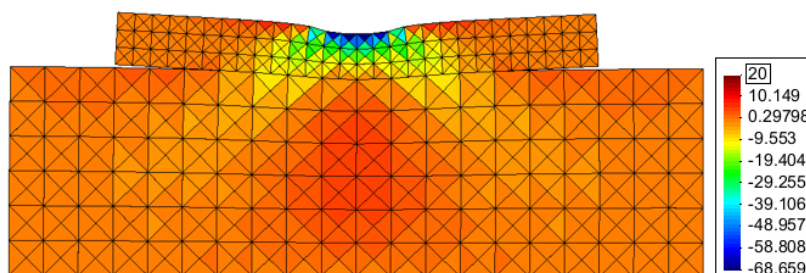


Figura 29 - Representação da interação de compressão e perda de aderência através do campo de tensões normais verticais (MPa).

As isocurvas de deslocamentos ilustradas na Figura 30 demonstram claramente que a interação entre os subdomínios ocorre de forma acentuada na região central.

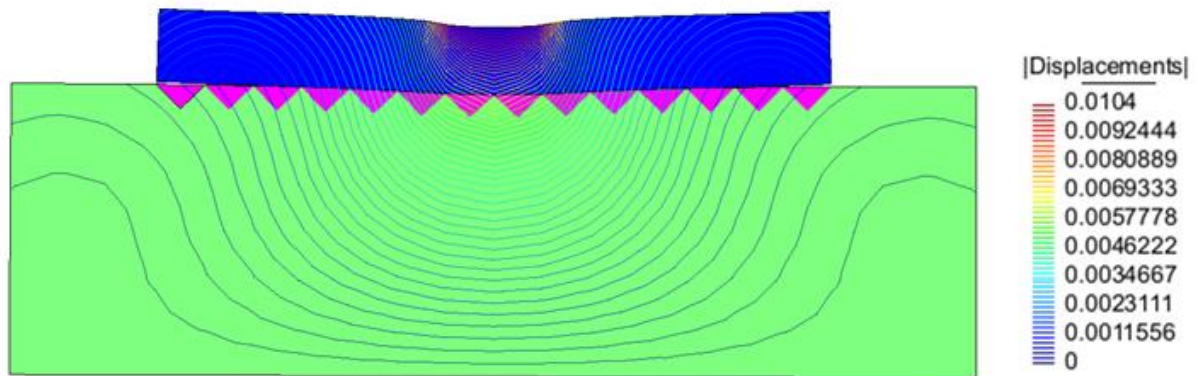


Figura 30 - Isocurvas de deslocamentos totais (mm).

5.8. LÂMINAS SOBREPOSTAS (FEIXE DE MOLTA)

Considere cinco lâminas de espessura constante 7mm de material aço ASTM A36, módulo de elasticidade $E = 200.000 \text{ MPa}$, com dimensões geométricas segundo a Figura 31, largura de 82mm e discretizadas, cada uma, com elementos triangulares lineares padrão (T3), Figura 33 (15.600 elementos na lâmina 1, 43.680 elementos na lâmina 2, 82.080 elementos na lâmina 3, 62.720 elementos na lâmina 4 e 110.080 elementos na lâmina 5), onde a lâmina 1 é a primeira superior, seguindo ordem numérica sequencial. A sua curvatura foi aproximada por um raio circular externo de 3030mm. Salienta-se que apenas metade da geometria foi modelada, visto que a estrutura é simétrica. Para o acoplamento entre lâminas, elementos finitos de acoplamento triangulares com 4 nós (T4) foram introduzidos nas interfaces, totalizando 5.102 elementos de acoplamento, Figura 32. Utilizando-se coeficiente de atrito de 0,6, tal conjunto é submetido a um carregamento F de 2.000N crescente e suas extremidades têm translação em Y bloqueadas, podendo deslizar lateralmente.

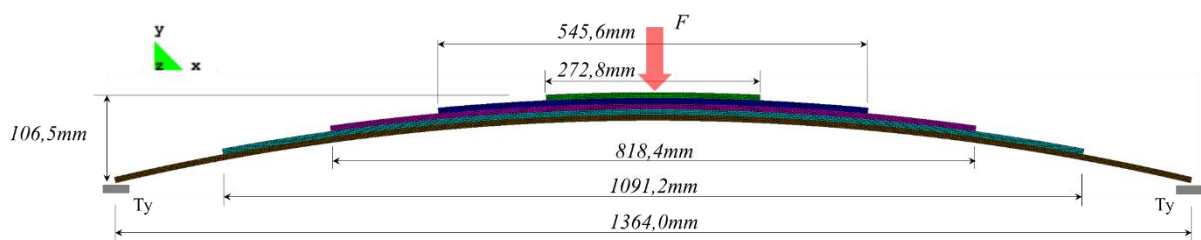


Figura 31 – Dimensões Geométricas.

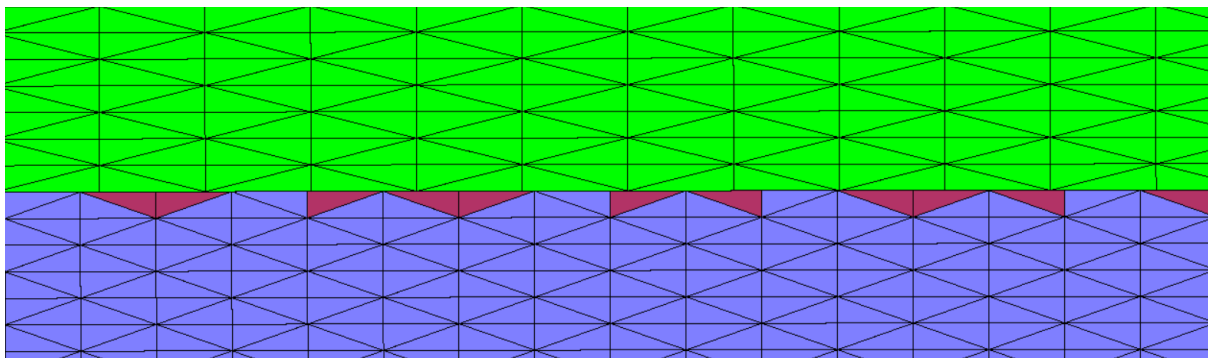


Figura 32 - Elementos de Acoplamento entre as lâminas 1 e 2.

Na prática, tais lâminas independentes constituem um feixe de lâminas semielípticas que formam uma mola flexional, comumente utilizada em veículos de carga. Segundo Juvinall (2016), as molas em lâminas se apresentam, usualmente, como arranjos de vigas em balanço e simplesmente apoiadas. Considerando uma viga em balanço genérica de largura w e espessura t , ambas variando com a coordenada x , tem-se que se as tensões de flexão forem consideradas uniformes ao longo do comprimento da viga de espessura constante, a largura deverá variar linearmente com x . Para uma viga em balanço de tensão uniforme com largura constante, a espessura deve variar de forma parabólica com x . Desta forma, as vigas em balanço de igual resistência podem ser fabricadas variando-se tanto w quanto t , de modo que a tensão, $6Fx/wt^2$, seja constante para todos os valores de x , sendo esse o conceito por trás do projeto das molas de suspensão do tipo “feixe de molas” que tem sido utilizado nos automóveis.

Assim, para qualquer viga em balanço de igual resistência, as tensões de flexão ao longo do seu comprimento são iguais àsquelas ocorrentes na extremidade fixa, ou seja,

$$\sigma = \frac{6FL}{bh^2} \quad (74)$$

e a correspondente rigidez vertical equivalente apresentada por Juvinall (2016), se dá por

$$k = \frac{Ebh^3}{6L^3} \quad (75)$$

O fato de as lâminas atuarem independentemente agrega ao sistema um amortecimento devido ao atrito entre componentes. Tal atrito não gera variação significativa de rigidez, contribuindo apenas para a dissipação de energia. Uma limitação deste conjunto é a impossibilidade de aplicação de carga em ambos os sentidos, uma vez que as lâminas tendem a se separar em condições de carregamento oposto, porém esta condição é parcialmente contornada com a utilização de grampos, por exemplo.

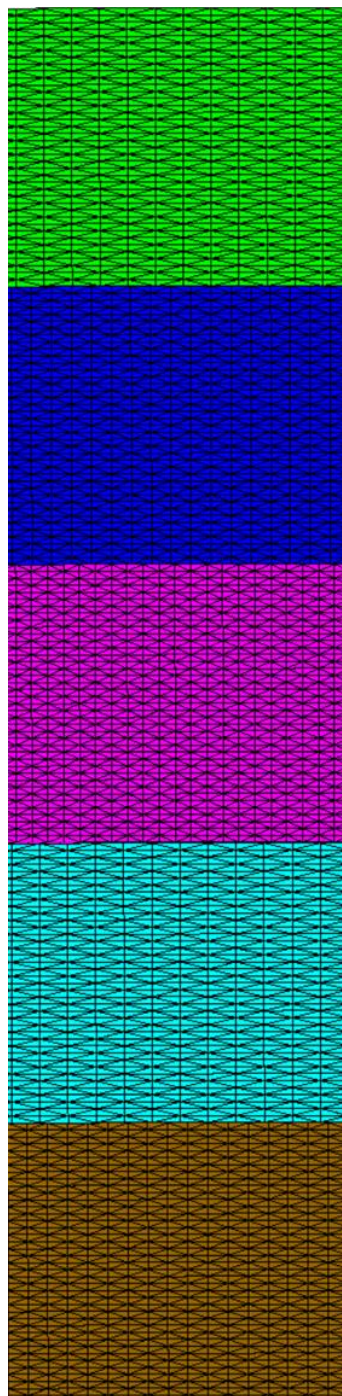


Figura 33 - Discretização por lâmina, 40 elementos.

Vale ressaltar a importância da correta atribuição da rigidez dos elementos de acoplamento, condicionados à constante elástica inserida, como apresentado por Bitencourt Jr. Et al. (2015). Para valores de rigidez relativamente altos em comparação à rigidez da estrutura, os resultados não convergem satisfatoriamente. Valores relativamente baixos, por sua vez, influenciam na rigidez do conjunto e geram variação em sua determinação.

A discretização dos componentes também é um fator que interfere diretamente no cálculo da rigidez do conjunto. O elemento triangular linear padrão, por se tratar de um elemento cuja relação deslocamento nodal e deformação dentro do elemento é limitada, restringe os resultados de deformação e tensão a valores constantes para quaisquer pontos materiais do domínio individual, ou seja, cada elemento tem deformação e tensão constante por todo seu domínio. Para flexão, onde há variação linear de tensão e deformação na direção da espessura, deve-se utilizar uma maior quantidade de triângulos de forma a se conseguir obter o resultado desejado. Na Tabela 7, tem-se os valores de rigidez flexional em função do número de elementos na espessura de cada lâmina, considerando as mesmas condições de contorno:

Tabela 7 – Rigidez e Tensão por número de elementos na espessura de cada lâmina.

Elementos/espessura	Rigidez	Tensão Máxima
4 elementos	44,8 N/mm	298,1N/mm ²
10 elementos	35,0 N/mm	395,9N/mm ²
20 elementos	32,9 N/mm	419,0N/mm ²
40 elementos	32,3 N/mm	434,7N/mm ²

Segundo o gráfico da Figura 34, pode-se verificar a convergência dos resultados conforme a discretização, tendendo a convergir de acordo com o aumento da discretização.

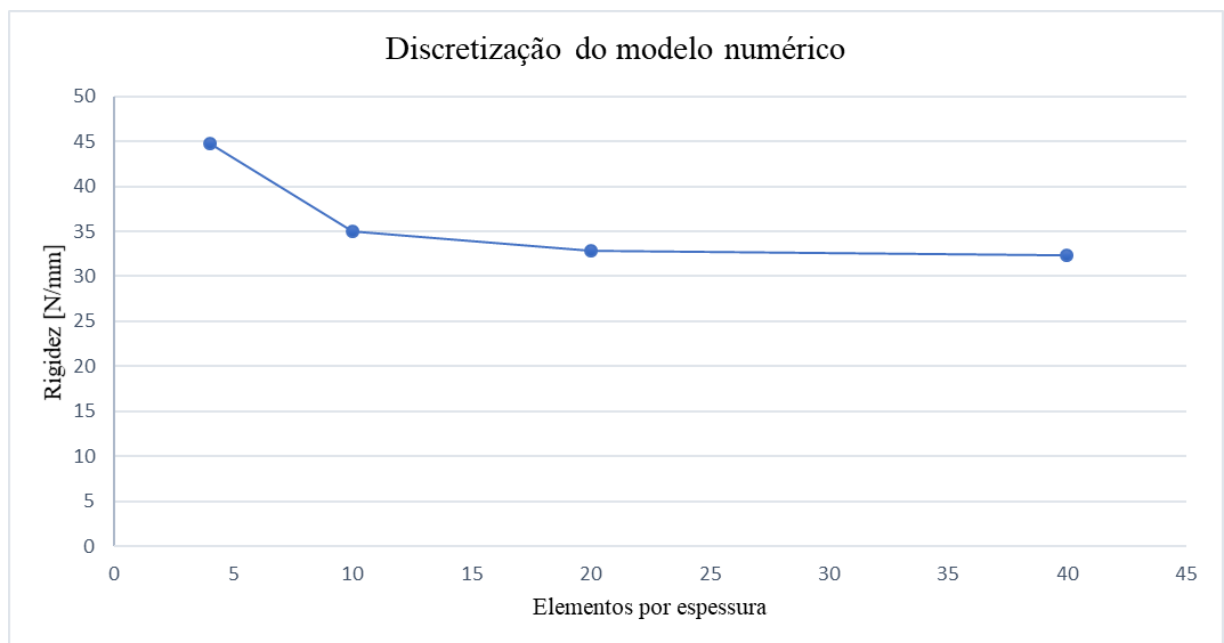


Figura 34 - Gráfico de rigidez em função da discretização do modelo.

Levando-se em consideração a correta atribuição da constante elástica que fornece aos elementos de acoplamento uma rigidez compatível à rigidez do problema, além da correta discretização dos componentes, tem-se uma aproximação condizente com a solução analítica

que, para os parâmetros deste problema, tem seu valor de rigidez flexional de 30N/mm^2 e tensão máxima de $407,37\text{N/mm}^2$.

Da Figura 35 e Figura 36, avaliam-se os valores de deslocamento vertical e tensão de flexão, respectivamente. O valor de tensão obtido foi $434,7\text{N/mm}^2$, resultando em 6,70% de erro comparado ao valor analítico. Tal desvio é justificado pela limitação do elemento triangular linear no cálculo da deformação e tensão dentro do elemento e pela aproximação de geometria utilizada na hipótese analítica e de simulação, como pode-se ver detalhes em Juvinall (2016).

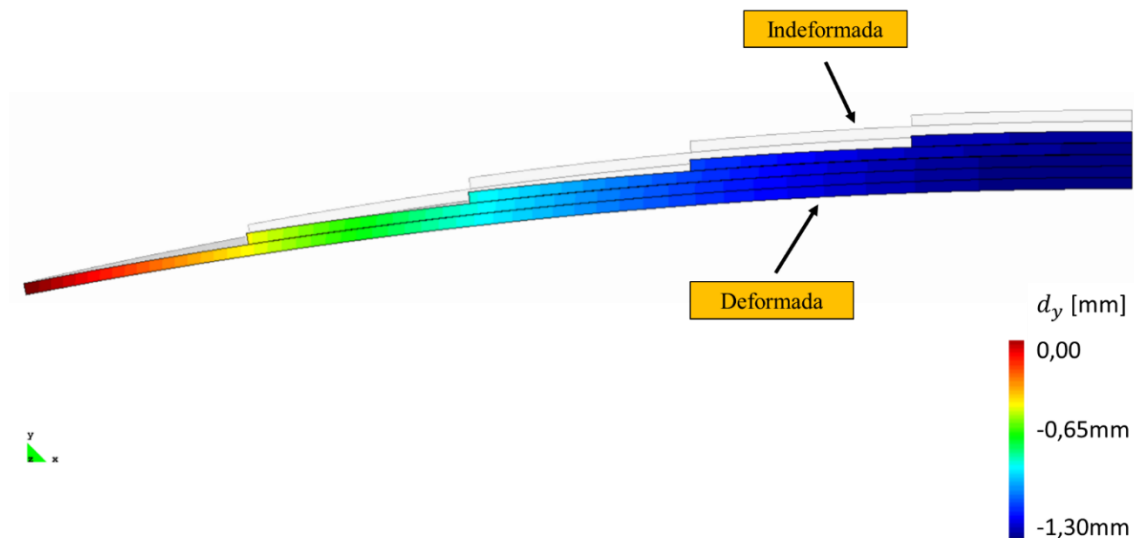


Figura 35 – Deslocamento vertical (fator de escala 10).

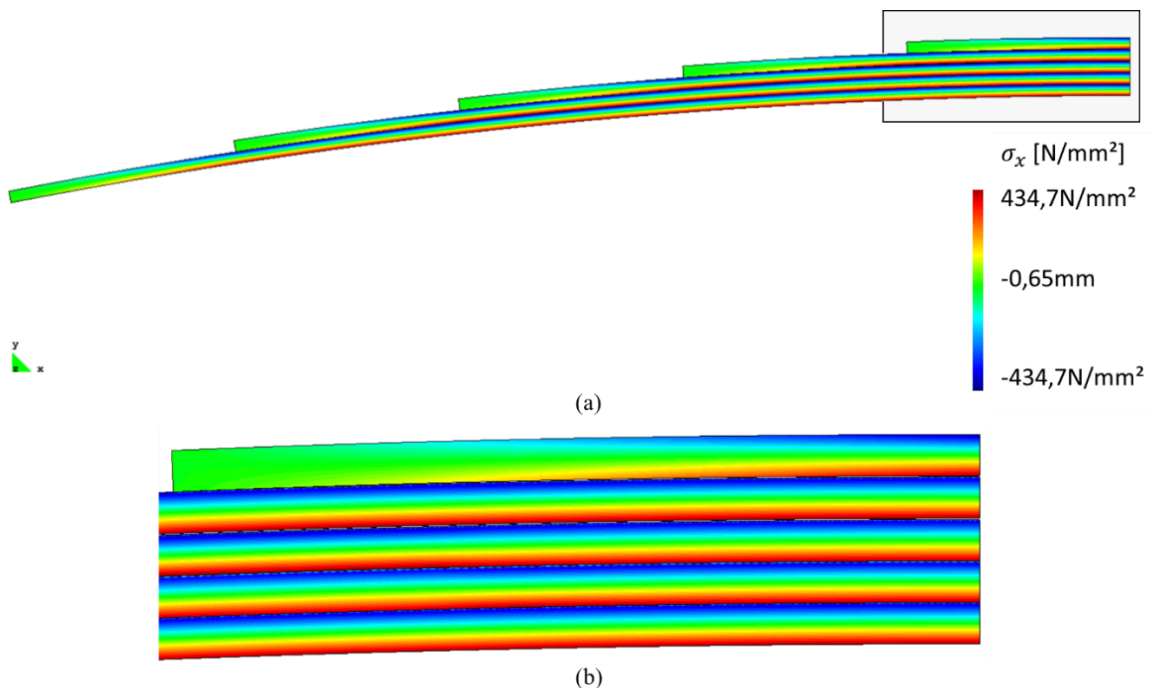


Figura 36 – (a) Tensão por lâmina, (b) detalhe das lâminas (fator de escala 10).

Nas figuras 37 e 38, apresentam-se os resultados de deslocamento e tensão para o mesmo problema, atribuindo-se coeficiente de atrito nulo. Nota-se que os valores obtidos são quase os mesmos, verificando-se a pequena influência do atrito entre as partes.

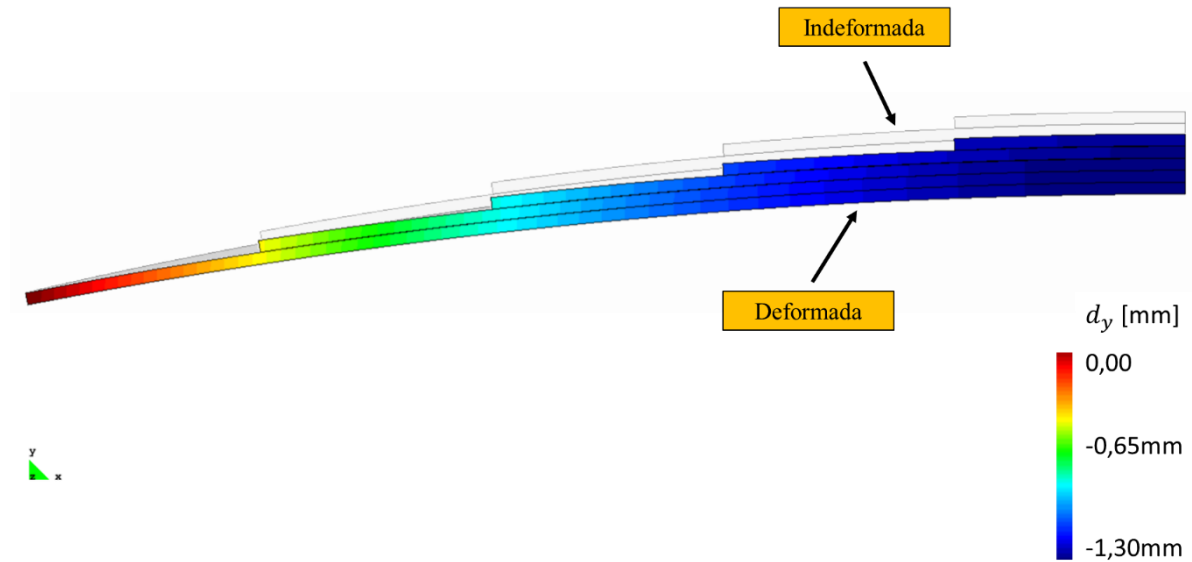


Figura 37 – Deslocamento vertical (fator de escala 10).

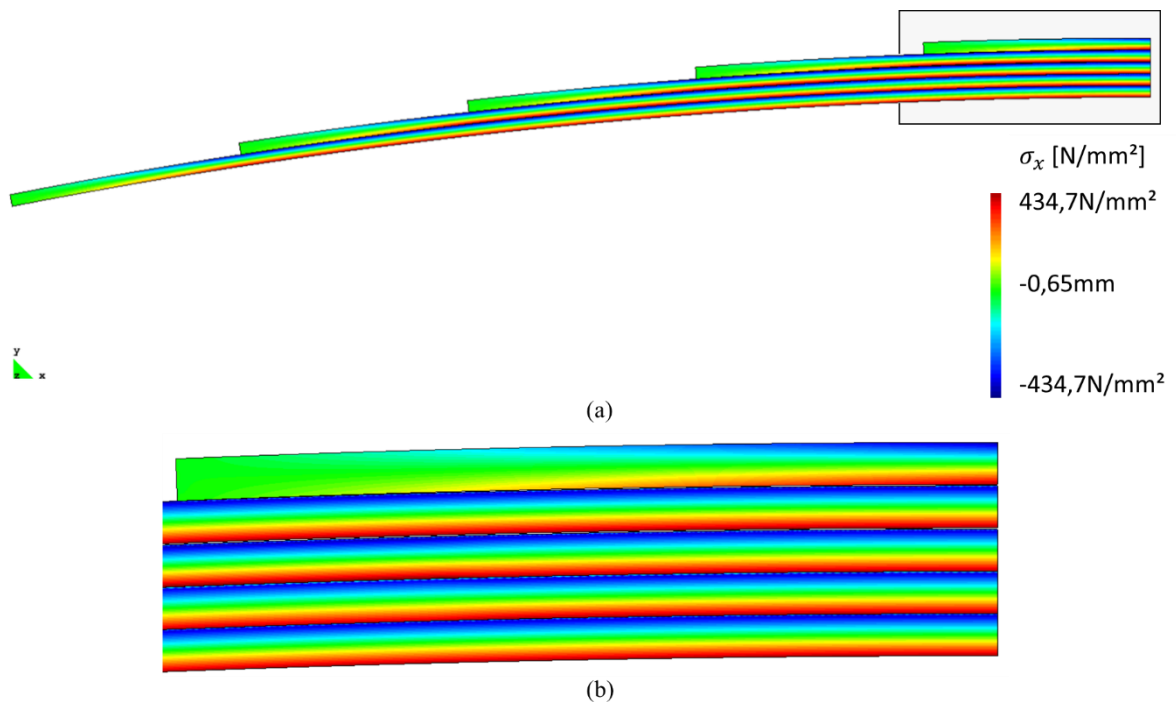


Figura 38 – (a) Tensão por lâmina, (b) detalhe das lâminas (fator de escala 10).

Uma importante constatação é o efeito de separação das lâminas, conforme a Figura 39, mesmo com a carga vertical descendente comprimindo uma lâmina contra a outra. O contato se dá apenas nas extremidades das lâminas, o que ocorre também na prática. Para tal

comportamento, verifica-se que os elementos de acoplamento representaram fielmente o comportamento físico esperado, liberando o movimento de distanciamento dos componentes e representando satisfatoriamente o contato entre partes, quando necessário.

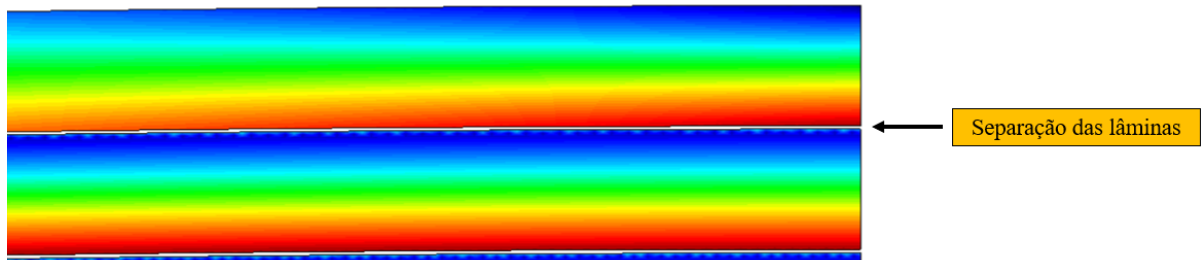


Figura 39 - Separação das lâminas (fator de escala 10).

Como citado anteriormente, as lâminas trabalham de independente entre si. Devido a isso, pode-se notar na Figura 40, que apresenta o deslocamento horizontal do conjunto, a descontinuidade do deslocamento entre lâminas, caracterizando os deslocamentos relativos entre as partes.

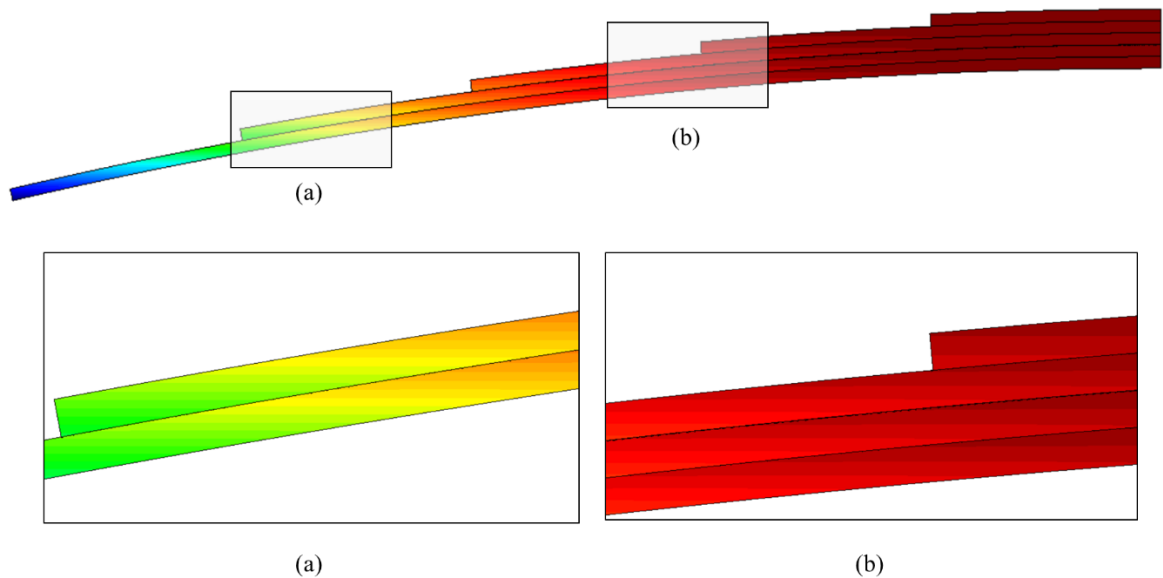


Figura 40 - Descontinuidade dos deslocamentos horizontais.

5.9. LÂMINAS SOBREPOSTAS (FEIXE DE MOLA)

Considere agora o exemplo de Daré Neto (1998), onde se tem cinco lâminas de material aço ABNT 5160, com módulo de elasticidade $E = 205.000 \text{ MPa}$, coeficiente de atrito 0,6 e curvatura aproximada por um raio circular externo de 2545mm. No feixe em estudo, conforme

a Figura 41 , as espessuras das lâminas são diferentes, tendo a primeira, a segunda e a terceira lâminas espessura de 18 mm e a quarta e quinta lâminas, espessura de 17 mm. Os comprimentos de cada lâmina, em ordem decrescente, são 1.718mm, 1.718mm, 1.230mm, 836mm e 449mm. Todas as lâminas do feixe possuem largura de 70 mm com raio de arredondamento lateral. As condições de contorno são apresentadas na Figura 42. Salienta-se que apenas metade da geometria foi modelada, visto que a estrutura é simétrica.

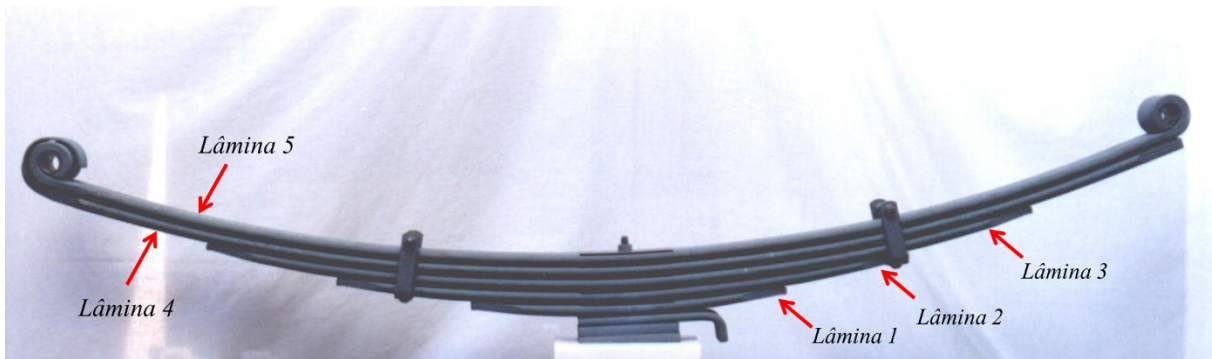


Figura 41 - Feixe de molas (Daré Neto, 1998).

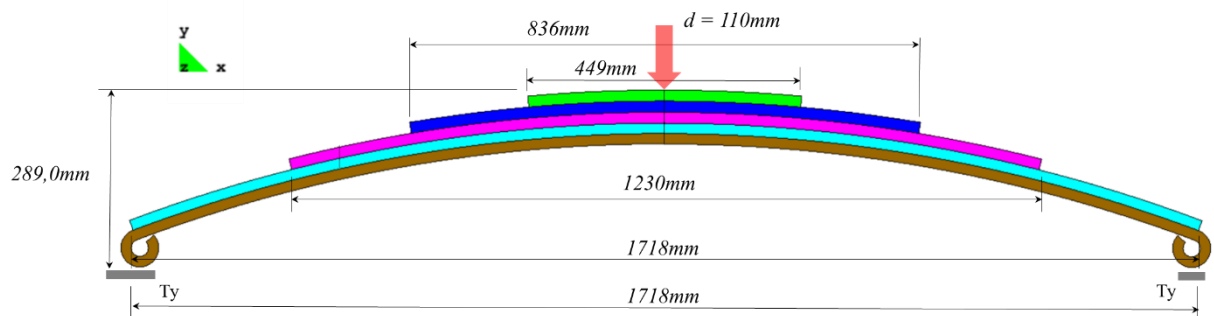


Figura 42 - Condições de contorno.

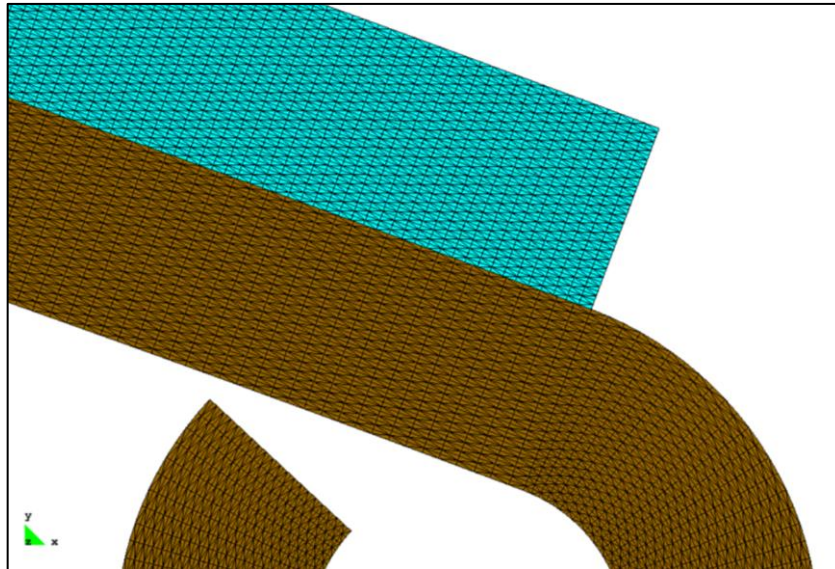


Figura 43 - Detalhe da discretização das lâminas 4 e 5.

As lâminas foram discretizadas com elementos triangulares lineares padrão, Figura 43 (18.000 elementos na lâmina 1, 28.000 elementos na lâmina 2, 35.520 elementos na lâmina 3, 59.680 elementos na lâmina 4, 52.400 elementos na lâmina 5 e 3.530 elementos de acoplamento).

Para a determinação das tensões nas lâminas intermediárias deste conjunto, Daré Neto (1998) propõe um teste de bancada em que a mola é posicionada em posição invertida à de trabalho e apoiada em uma plataforma, onde suas extremidades tocam a superfície e têm a liberdade de deslocamento lateral. Ela é submetida a uma carga vertical em seu centro de modo a deslocar o conjunto em 110mm, que gera um deslizamento entre as lâminas e um afastamento de suas extremidades. Pode-se avaliar então os esforços por lâmina através dos extensômetros inseridos em cada lâmina e comparar os resultados analítico, experimental e de simulação numérica, conforme Daré Neto (1998).

Foram analisados 24 pontos de tensão, sendo distribuídos da seguinte forma:

- 1ª, 2ª e 3ª lâminas - 3 pontos cada uma;
- 4ª lâmina - 5 pontos;
- 5ª lâmina - 10 pontos;

A denominação numérica sequencial dos extensômetros, foi adotada a partir da extremidade das lâminas, conforme Figura 44:

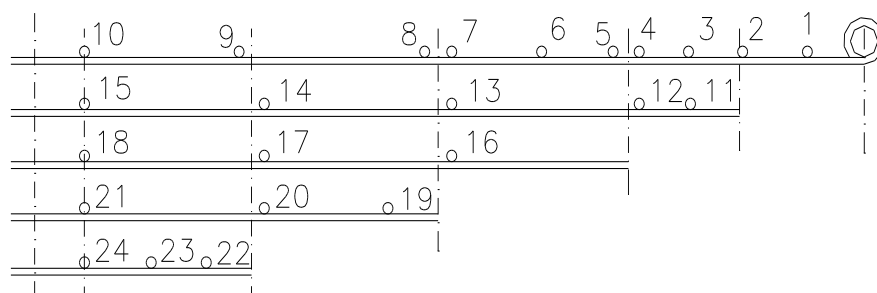


Figura 44 - Pontos em estudos do feixe de molas (Daré Neto, 1998).

Na quarta e quinta lâminas, a seção transversal é constante. Na extremidade das 1ª, 2ª e 3ª lâmina, as seções transversais são variáveis, porém tal condição é desconsiderada na simulação numérica. Levou-se em consideração os pontos de espessura constante para comparação de resultados.

Segundo Daré Neto (1998), pode-se calcular analiticamente as tensões por lâmina seguindo-se a norma NBR 8567 (1984). A rigidez do conjunto é calculada a partir da Figura 45 que apresenta o gráfico de força por deslocamento para o modelo em estudo.

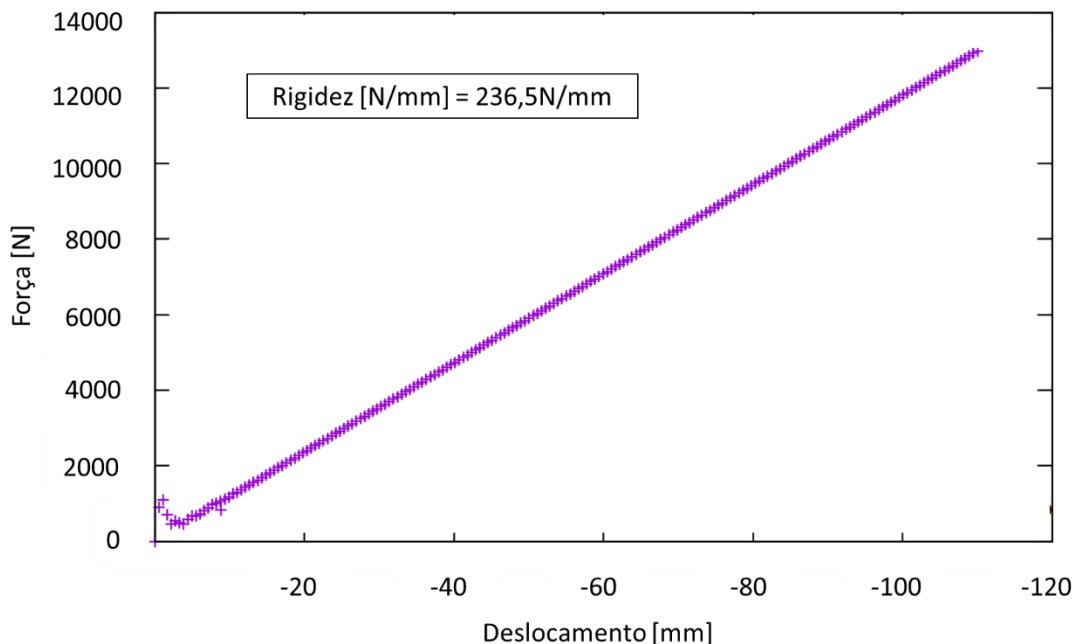


Figura 45 - Rigidez vertical do conjunto.

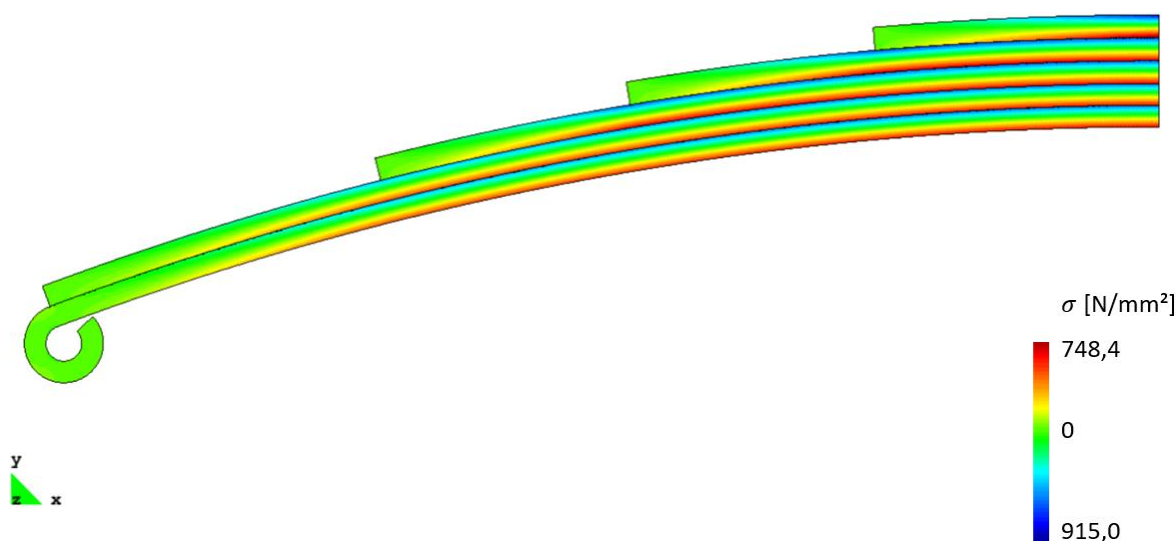


Figura 46 – Tensão normal XX [N/mm²].

Para comparação de tensões (Figura 46), serão levados em consideração os 10 pontos de medição de Daré Neto (1998) com maior precisão experimental, sendo esses os pontos 1, 2, 7, 10, 13, 14, 16, 17, 18 e 20. Como a lâmina 1 não tem pontos escolhidos entre os 10, levou-se em consideração o ponto 24. Apresentando os resultados obtidos na Tabela 8, tem-se:

Tabela 8 – Comparação de tensão normal entre modelo teórico, modelo de elementos finitos e ensaio de bancada

Ponto	Tensão Teórica, TT [Mpa]	Tensão Real, TR [Mpa]	Tensão Elementos Finitos, TEF [Mpa]	Erro TT e TEF [%]	Erro TR e TEF [%]
1	222,0	220,4	75,3	66,1%	65,8%
2	474,0	476,5	194,8	58,9%	59,1%
7	504,5	532,6	497,8	1,3%	6,5%
10	547,9	581,5	557,3	-1,7%	4,2%
13	505,1	493,8	491,6	2,7%	0,4%
14	535,7	553,0	534,6	0,2%	3,3%
16	534,8	553,0	491,1	8,2%	11,2%
17	567,3	585,6	577,4	-1,8%	1,4%
18	579,4	597,9	577,5	0,3%	3,4%
20	567,3	591,7	529,8	6,6%	10,5%
24	579,4	620,3	534,0	7,8%	13,9%

No geral, o modelo de elementos finitos se comportou adequadamente e foi capaz de prever com notável fidelidade aos resultados experimentais. Os elevados erros apresentados nos pontos 1 e 2 se dão pela geometria das lâminas em suas extremidades, que têm uma redução de largura que não foi considerada no modelo por dificuldades de representação em 2D.

5.10. BLOCO ENTRE BASES RÍGIDAS (VARIAÇÕES DE COEFICIENTE DE ATRITO)

Considere um bloco não rígido de largura unitária entre duas bases rígidas também de largura unitária, com dimensões geométricas segundo a Figura 47 e discretizadas, cada uma, com elementos triangulares lineares padrão (T3) e interface não conforme, onde a malha superior (verde) tem 800 elementos, a malha intermediária (azul) tem 2688 elementos, a malha inferior (violeta) tem 800 elementos e os componentes interagem entre si através do acoplamento não rígido dos 256 elementos especiais (T4). O bloco em questão tem módulo de elasticidade $E = 210.000 \text{ MPa}$ enquanto as bases, para que sejam rígidas em relação ao bloco, têm $E = 21.000.000 \text{ MPa}$. A base de baixo tem seu contorno inferior restringido em ambas as direções, enquanto a base de cima tem sua extremidade superior restrita na direção horizontal X.

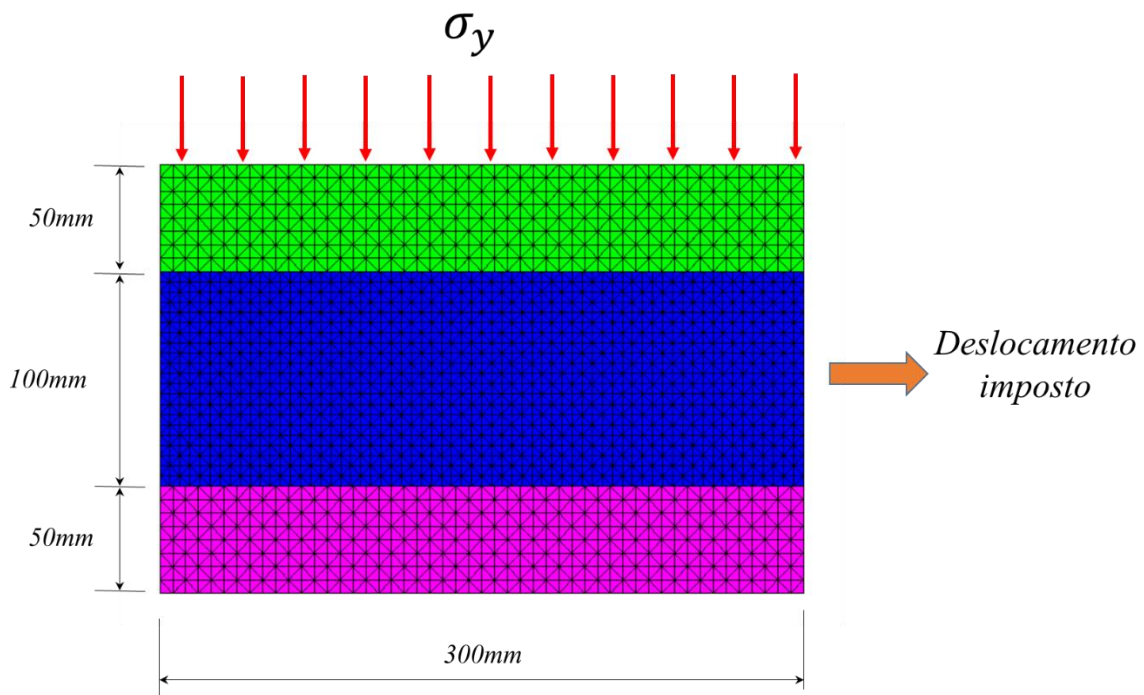


Figura 47 - Bloco entre bases rígidas

Devido ao fato de não se considerar coesão nesta abordagem, se $\sigma_y = 0$, então não há resistência ao deslocamento do bloco como pode-se ver na Figura 48. Para o exemplo em questão, aplica-se em um primeiro histórico de carregamento (1 passo de carga) uma tensão vertical de 100MPa que comprime o conjunto, como mostra a Figura 49. Vale ressaltar, na Figura 50, que após a aplicação da carga vertical, as bases superior e inferior não se deformam, comportamento condizente com a hipótese de bases rígidas assumida.

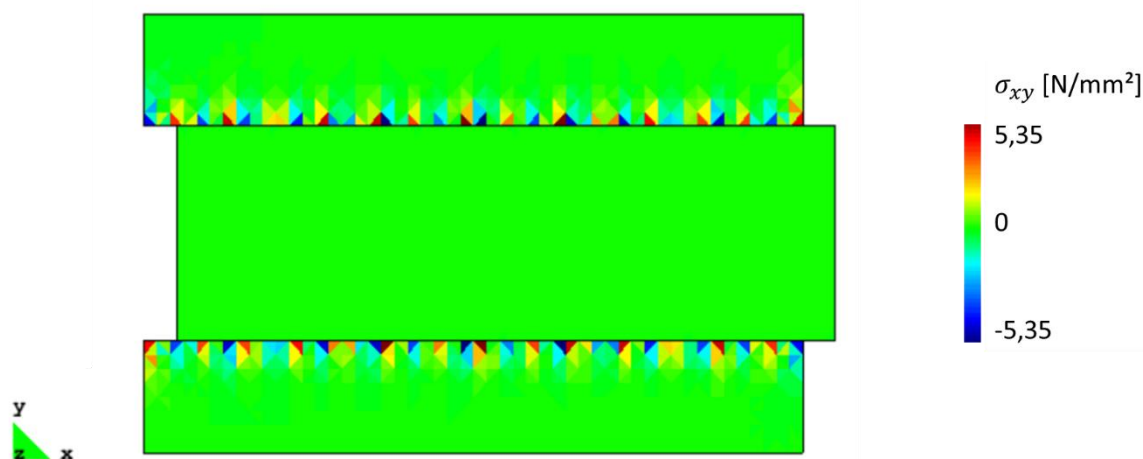


Figura 48 - Coeficiente de atrito nulo e tensão de cisalhamento nula.

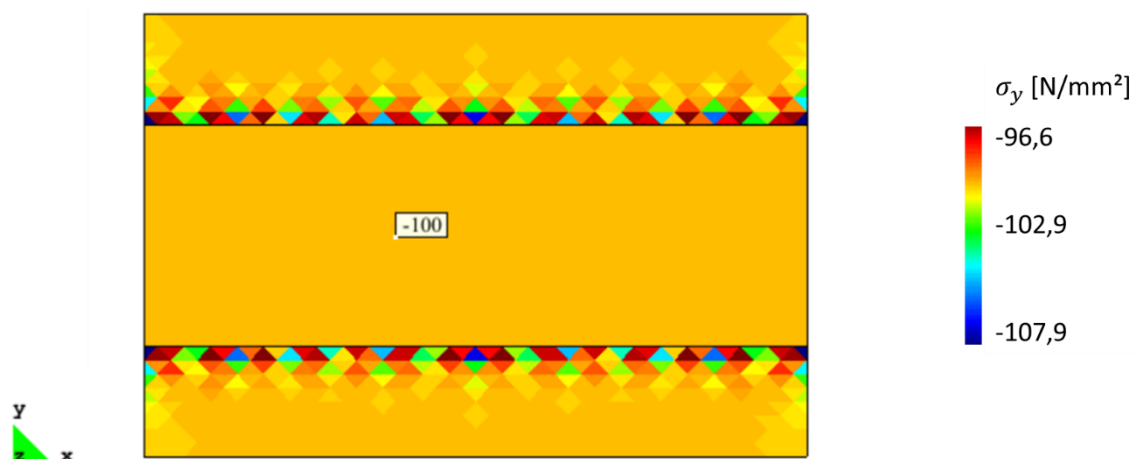


Figura 49 - Primeiro histórico de carregamento.

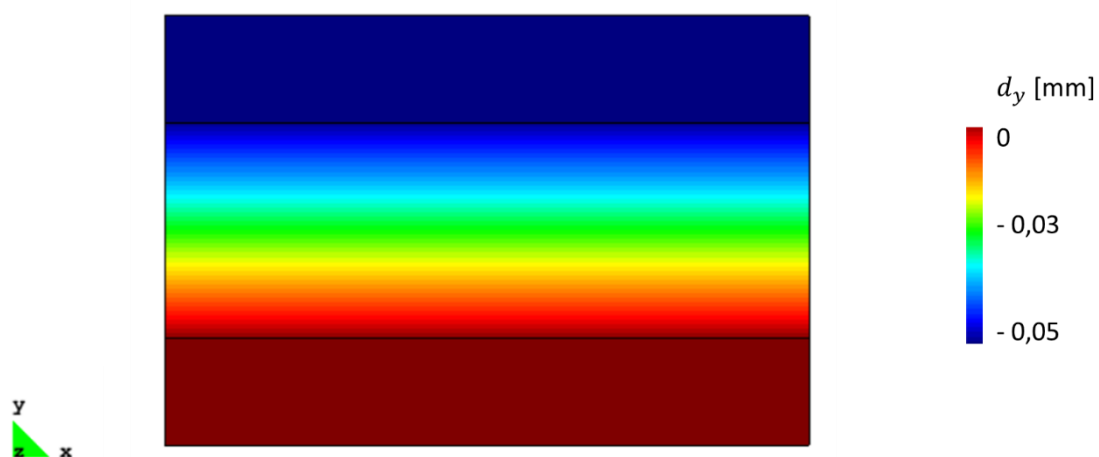


Figura 50 - Deslocamento vertical para o primeiro histórico de carregamento.

No segundo histórico de carregamento, impõe-se um deslocamento relativo de 20mm na direção +X, aplicado em 200 passos. Varia-se então o coeficiente de atrito entre o bloco e as bases rígidas, calculando-se a tensão de cisalhamento decorrente do deslizamento entre os componentes.

Na Tabela 9, compara-se o valor das tensões de cisalhamento calculadas analiticamente e as provenientes do modelo de elementos finitos. O erro calculado deve-se ao fato da falta de simetria para o problema em questão, pois as extremidades do bloco não rígido têm rigidez diferente da extensão do corpo, influenciando nos resultados (Figura 51).

Tabela 9 - Tensões de Cisalhamento variando-se o coeficiente de atrito.

Coeficiente de Atrito	Tensão de Cisalhamento Analítica [N/mm ²]	Tensão de Cisalhamento Elementos Finitos [N/mm ²]	Erro (%)
0	0	0	0,00%
0,1	10	9,52	4,80%
0,2	20	19,06	4,70%
0,3	30	28,58	4,73%
0,4	40	38,1	4,75%
0,5	50	47,64	4,72%
0,6	60	57,1	4,83%

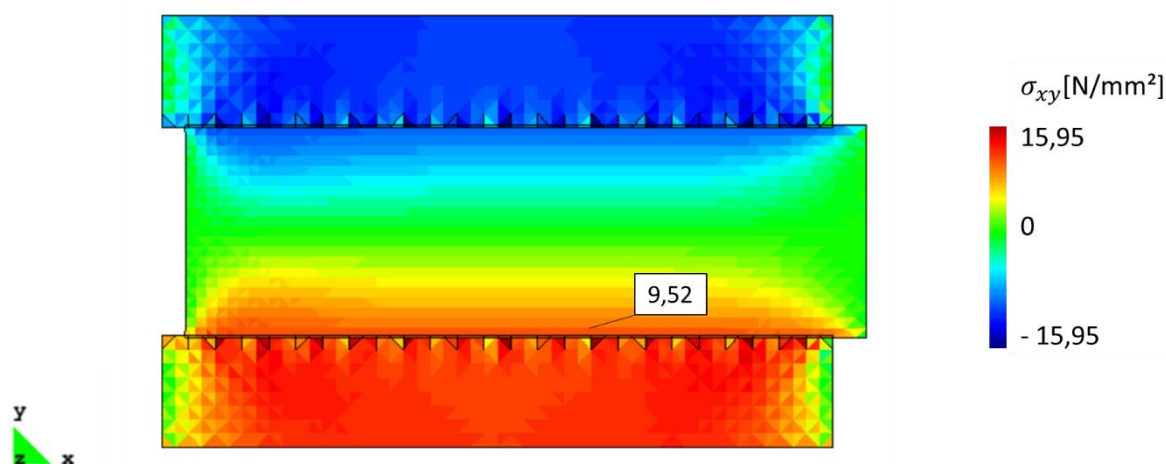


Figura 51 - Coeficiente de atrito 0,1 – Tensão de Cisalhamento = 9,52N/mm² .

5.11. BLOCO ENTRE BASES RÍGIDAS (VARIAÇÕES DE TENSÃO COMPRESSIVA)

Considere o mesmo exemplo do item 5.10. Para o exemplo em questão, mantém-se constante o coeficiente de atrito entre os componentes no valor de 0,6, variando-se a tensão vertical de compressão do conjunto antes da realização do deslocamento do bloco não rígido. Aplica-se então, em um primeiro histórico de carregamento (1 passo de carga), uma tensão vertical de 20MPa, 40MPa, 60MPa, 80MPa e 100MPa. Após a compressão, impõe-se um deslocamento relativo de 20mm na direção +X, aplicado em 200 passos, calculando-se a tensão de cisalhamento decorrente do deslizamento entre os componentes. Na Tabela 10, compara-se o valor das tensões de cisalhamento calculadas analiticamente e as provenientes do modelo de elementos finitos. O erro calculado deve-se ao fato da falta de simetria para o problema em questão, pois as extremidades do bloco não rígido têm rigidez diferente da extensão do corpo, influenciando nos resultados. O gráfico da Figura 52 representa a relação de tensão de compressão (tensão normal) e a tensão de cisalhamento. Para a condição ideal, a tangente do ângulo da curva é igual ao coeficiente de atrito assumido, 0,6. Para a curva calculada, a tangente do ângulo é 0,57 (erro de 5%).

Tabela 10 - Tensão de Cisalhamento Analítica e de Elementos Finitos, variando-se a tensão de compressão.

Coeficiente de Atrito = 0,6			
Tensão de Compressão [N/mm ²]	Tensão de Cisalhamento Analítica [N/mm ²]	Tensão de Cisalhamento Elementos Finitos [N/mm ²]	Erro (%)
0	0	0	0,00%
20	12	11,43	4,75%
40	24	22,87	4,71%
60	36	34,22	4,94%
80	48	45,61	4,98%
100	60	57,1	4,83%
	$y = 0,6 \cdot x$	$y = 0,57 \cdot x + 0,01$	

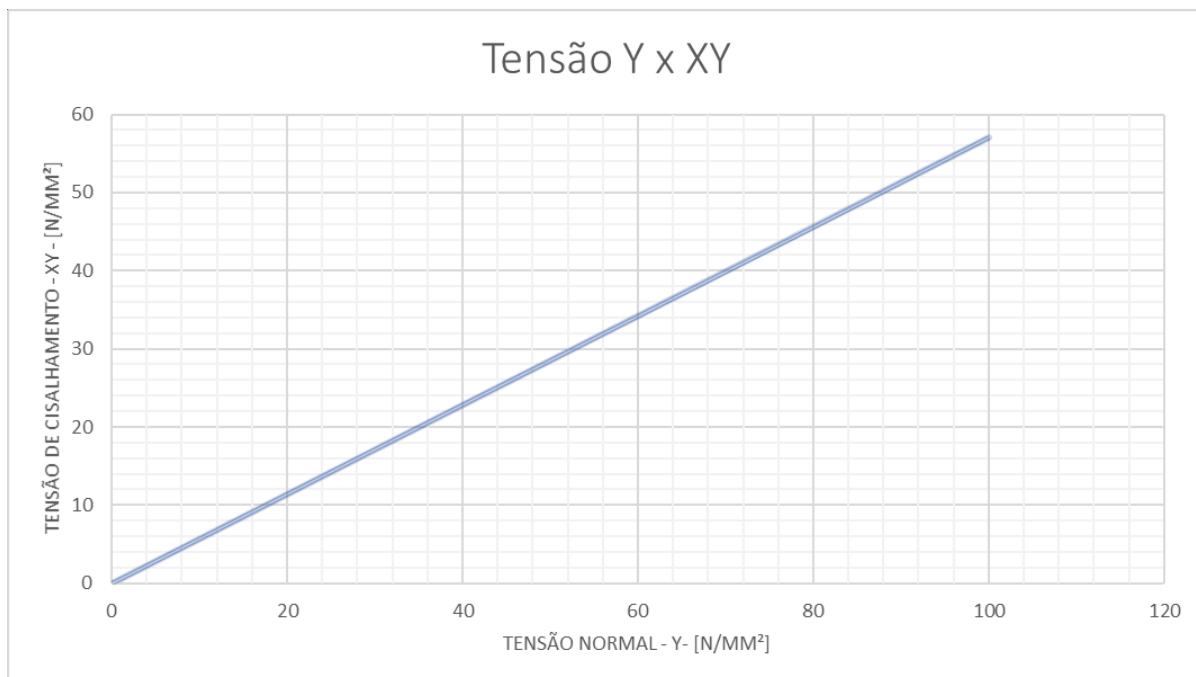


Figura 52 - Variação da tensão de cisalhamento devido à variação da tensão entre o bloco e as bases rígidas.

5.12. CISALHAMENTO À 45° GRAUS (COEFICIENTE DE ATRITO CONSTANTE)

Uma placa quadrada de espessura unitária e lado 100mm é subdividida em duas partes iguais em uma de suas diagonais e tem seus subdomínios discretizados independentemente com elementos finitos isoparamétricos 2D triangulares com 3 nós (T3), como mostra a Figura 53(a). Atribui-se ao conjunto um coeficiente de Poisson nulo e módulo de elasticidade $E = 210.000 \text{ MPa}$. Na Figura 53(a), a superfície diagonal superior (azul), denominada malha 1, é representada por 518 elementos enquanto que a superfície diagonal inferior (verde), denominada malha 2, é representada por 1170 elementos. Para acoplar as malhas independentes e descrever a interação entre as partes, elementos finitos de acoplamento triangulares com 4 nós (T4) foram introduzidos na interface. Note que para cada nó solto na interface, um elemento de acoplamento foi introduzido, composto por 3 nós do elemento triangular (T3) da malha 1 e 1 nó (solto) extra da malha 2. Podemos visualizar os elementos de acoplamento (rosa) na discretização do conjunto na Figura 53(b).

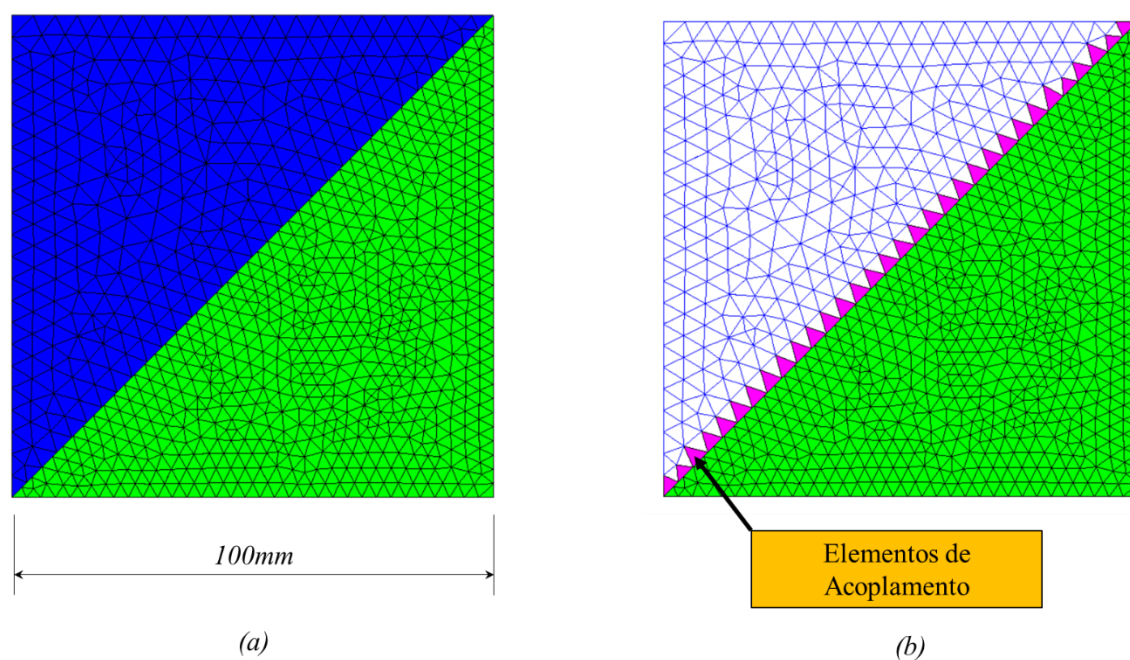


Figura 53 - Discretização e elementos de acoplamento.

Aplicam-se os carregamentos em duas etapas. Na primeira, é aplicado uma tensão compressiva distribuída linear normal aos contornos superior e esquerdo de valor unitário (unidade N/mm^2), imprimindo ao conjunto uma condição de sollicitação hidrostática de tensões, enquanto que as extremidades inferior e direita são restringidas utilizando-se condições de simetria, como apresentado na Figura 54.

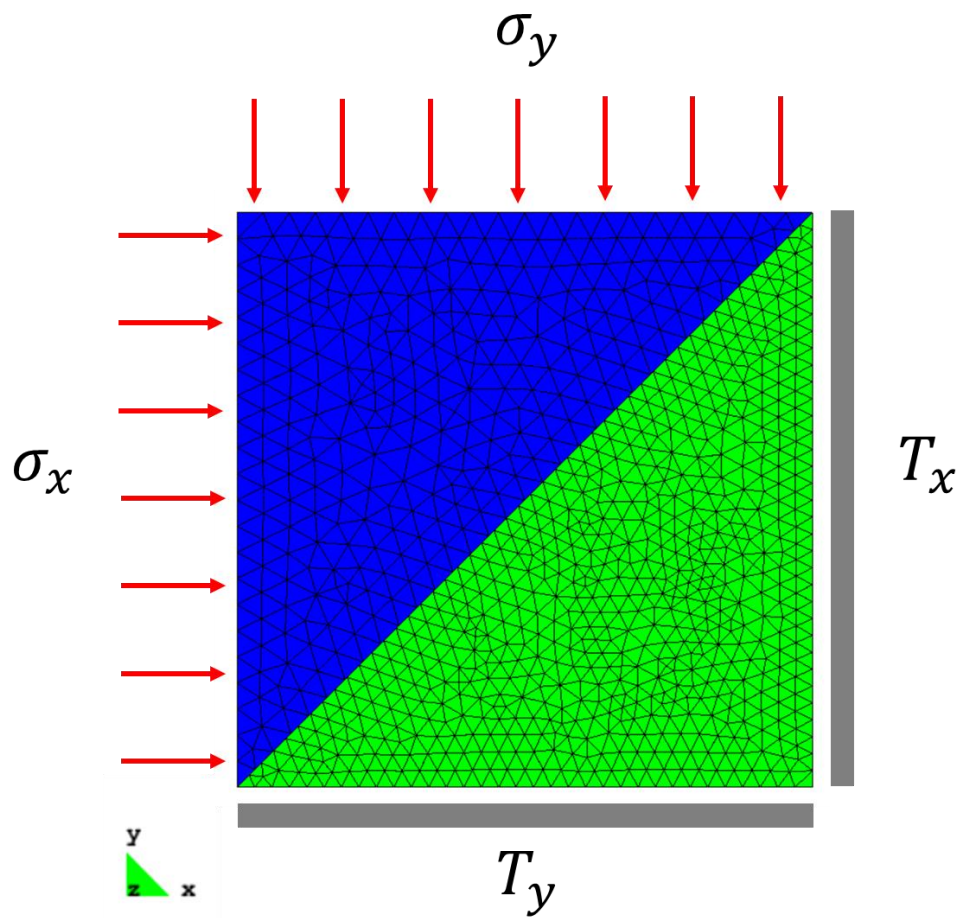


Figura 54 – Modelo numérico do problema de cisalhamento à 45°.

Mantendo-se os vínculos definidos na primeira etapa, aplica-se então um segundo histórico de carregamento, onde uma tensão compressiva distribuída linear normal ao contorno superior é aplicada linearmente em 100 passos de carga, sendo seu valor máximo de 5N/mm². Considerando-se o coeficiente de atrito constante entre as partes no valor de 0,6 e a condição hidrostática conferida ao conjunto na primeira etapa de carregamento, existe uma força resistiva na interface dos subdomínios proveniente do atrito gerado entre as partes (equação 23). Tendo que essa resistência é relacionada à tensão normal à interface e o coeficiente de atrito segundo a equação 23, pode-se calcular qual a mínima tensão compressiva normal ao contorno superior deve ser aplicada para que as partes deslizem entre si. Analiticamente, o valor de tensão máximo aplicado no contorno superior para que as partes não deslizem entre si é de 4N/mm². Nas figuras 55, 56 e 57, apresentam-se os deslocamentos do conjunto para os passos de carga 20, 60 e 70, onde constata-se o início do deslocamento relativo entre as partes no passo 60 do segundo histórico de carga, representando um acréscimo de tensão no contorno superior de 3N/mm², atingindo 4N/mm² ao todo (somado à carga aplicada na primeira etapa de carregamento). O

deslocamento inicial constatado anteriormente ao deslizamento é decorrente da hipótese de os corpos não serem considerados rígidos. Desta forma, verifica-se que a técnica proposta por Bitencourt et al. (2015), aplicada a problemas de contato com atrito, é consistente.

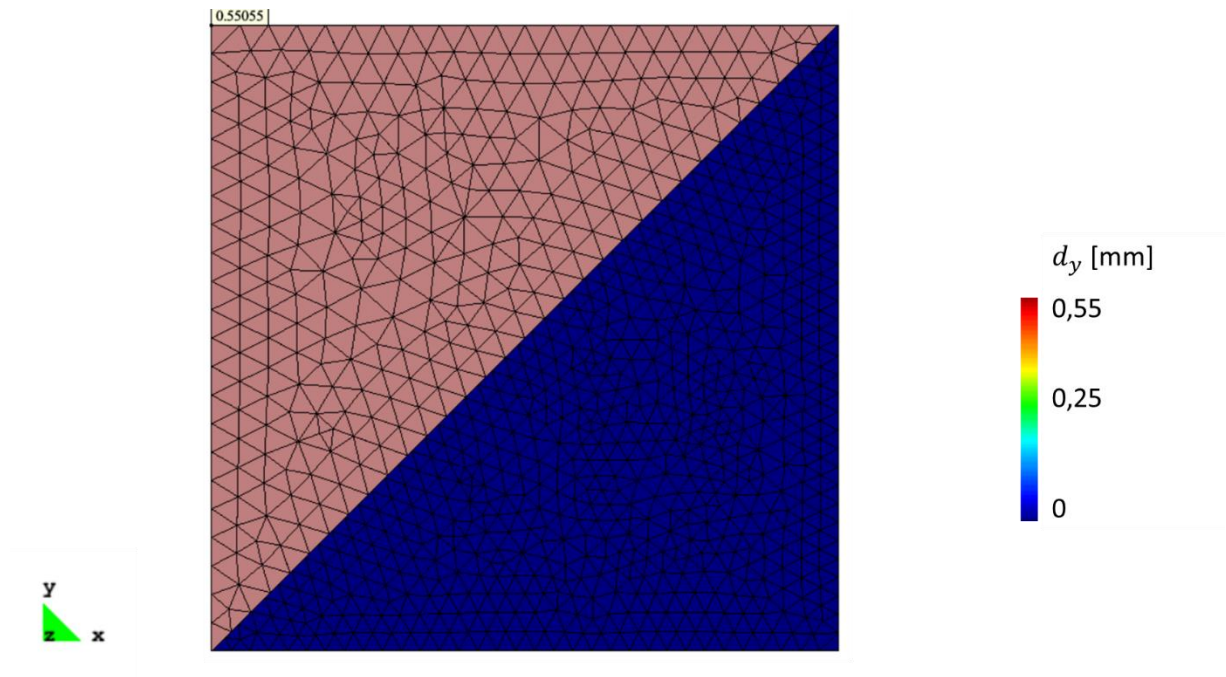


Figura 55 - Deslocamentos - passo de carga 20 (fator de escala 0,1).

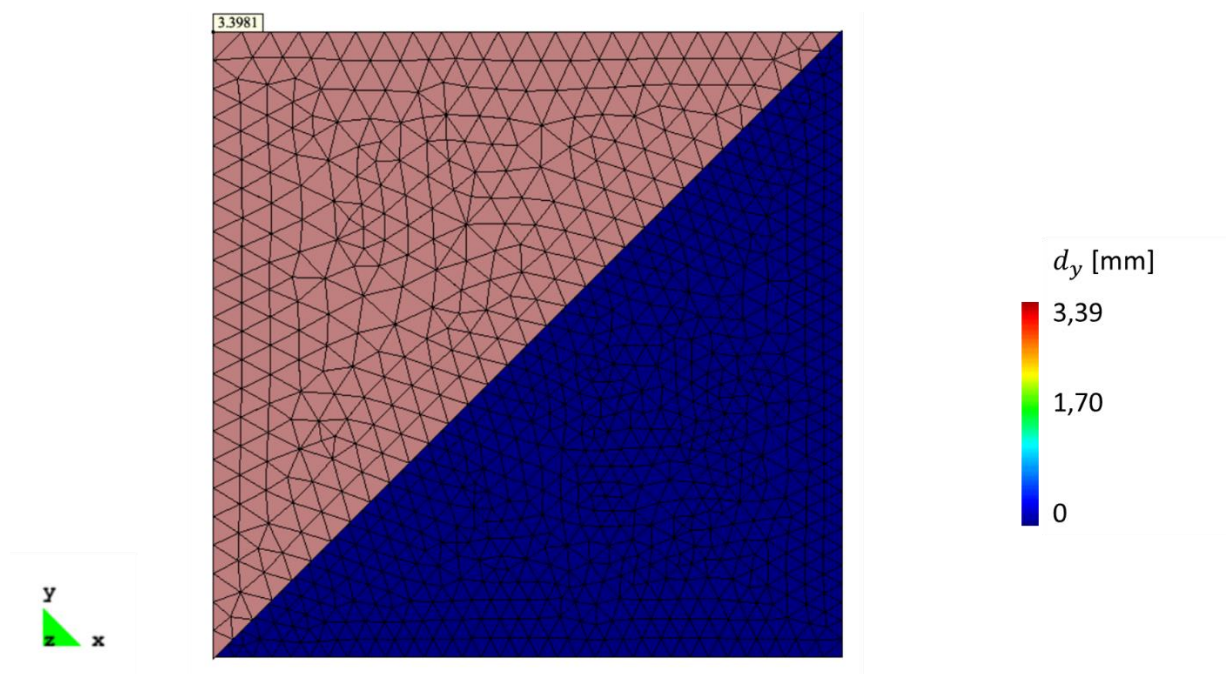


Figura 56 - Deslocamentos - passo de carga 60 (fator de escala 0,1).

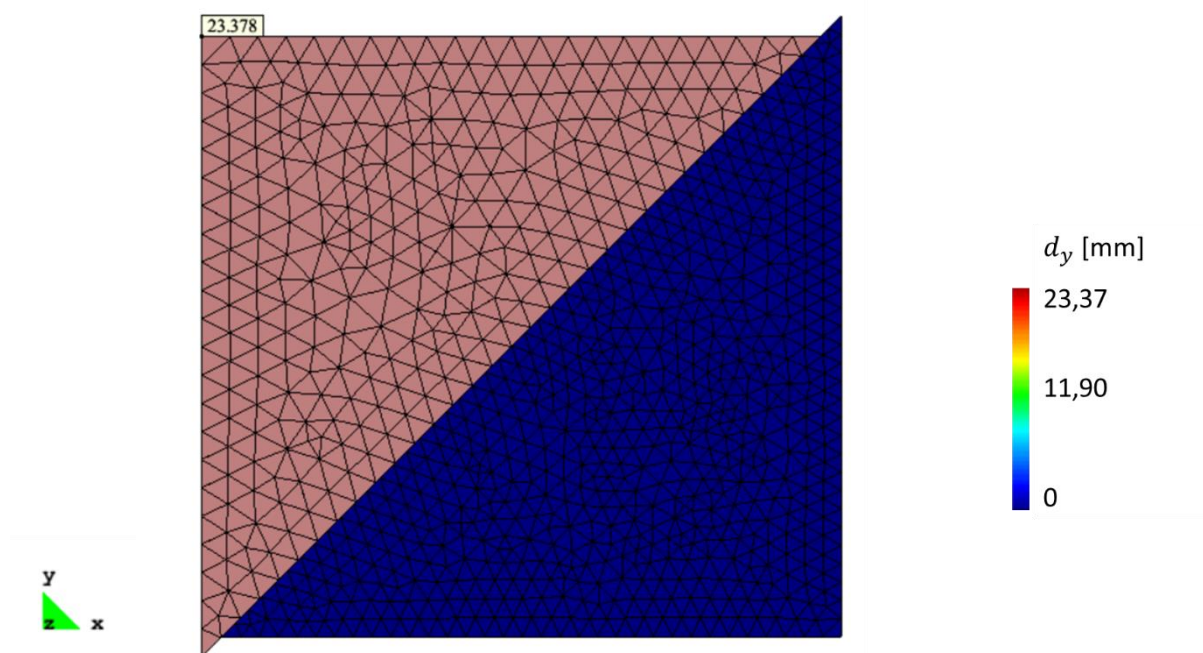


Figura 57 - Passo de carga 70 (fator de escala 0,2).

Em um gráfico que relaciona a tensão compressiva normal vertical aplicada ao modelo e a tensão de cisalhamento na interface das partes, tem-se as trajetórias de tensão para as condições hidrostáticas de 1N/mm^2 (trajetória 1) e 2N/mm^2 (trajetória 2), vide Figura 58.

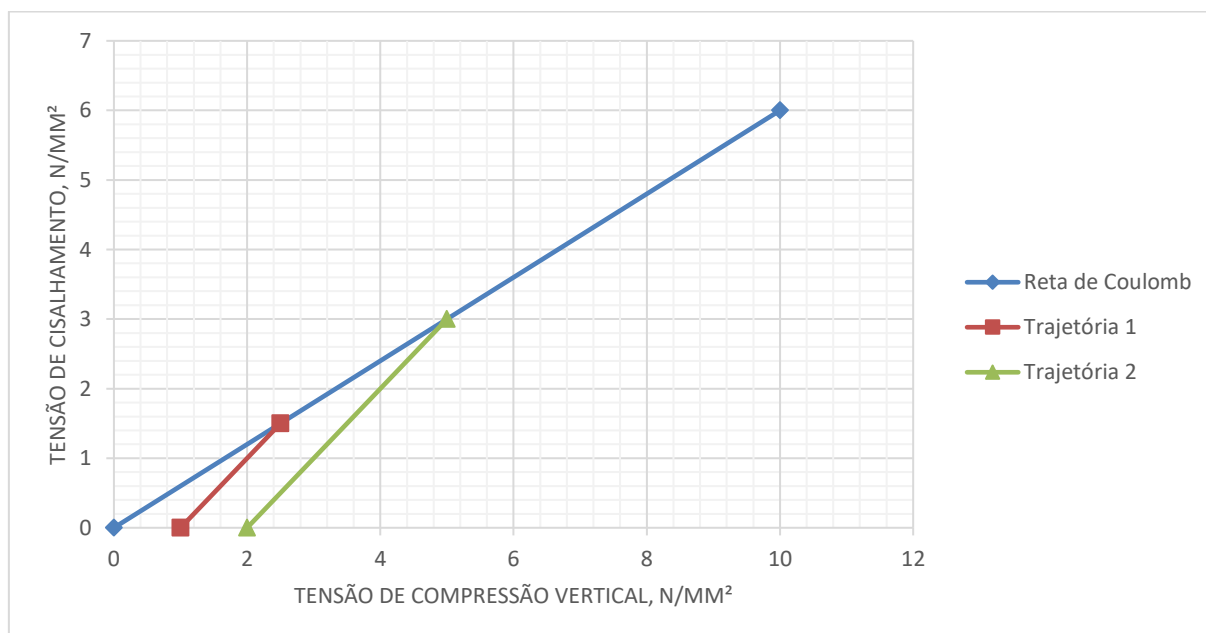


Figura 58 - Gráfico de trajetórias.

CAPÍTULO 6

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposta a utilização de uma nova técnica para representar o contato entre partes de um corpo através do método dos elementos finitos. A técnica consiste em discretizar regiões do corpo de forma independente e posteriormente adicionar elementos finitos de acoplamento para descrever o contato entre essas partes através de uma formulação não rígida.

Para ilustrar os resultados obtidos nesta pesquisa, foram escolhidos exemplos através dos quais é demonstrada a capacidade do modelo em permitir a separação das faces quando submetidas a forças de tração (forças perpendiculares e opostas as faces), ao mesmo tempo em que impede a interpenetração das malhas independentes quando submetidas a forças de compressão (forças perpendiculares que apontam para a face oposta), além da abordagem de problemas em que se considera as forças de atrito na interface.

Nos exemplos, a técnica demonstrou ser capaz de representar a interação entre as partes de um sólido através do tratamento dos casos de separação e interpenetração das malhas. A separação foi tratada como perda de contato, podendo oferecer, ou não, resistência de atrito entre os subdomínios, enquanto nas regiões que apresentavam tendência para sobreposição de malhas, um acoplamento rígido foi aplicado para garantir a transferência de esforços entre as faces.

Os exemplos apresentados foram importantes para a validação da técnica, uma vez que uma mesma interface apresenta tanto tendência de separação, quanto de sobreposição de malhas.

Por fim é importante destacar que através desta técnica nenhum grau de liberdade adicional foi introduzido ao problema, apesar da matriz de rigidez se tornar mais densa com a

introdução dos elementos de acoplamento, que podem ser adicionados facilmente em qualquer programa de análise estrutural por elementos finitos.

Como complemento deste trabalho, julga-se importante o desenvolvimento de um programa capaz de representar casos de contato não conforme, onde inicialmente não se conhece as regiões de contato. Como propostas para desenvolvimentos futuros, propõem-se a ampliação da técnica para a generalidade de comportamentos mecânicos existentes:

Modelos tridimensionais: após validado o método para problemas 1D e 2D, observou-se que a técnica oferece vantagens em relação ao método de elaboração de malhas tradicional empregado atualmente. Entretanto, devido à existência de outros comportamentos da mecânica estrutural, há a exigência e necessidade para que a técnica seja expandida para elementos 1D e 2D com mais graus de liberdade (deslocamento e momentos) e para elementos 3D, abrangendo desta forma o emprego da técnica à grande maioria dos problemas mecânicos existentes.

Contato não conforme: uma limitação da técnica proposta para representar o contato surge quando se impõe tratá-lo no regime linear, isto é, não há variações da área de contato entre os componentes pois todos os cálculos são realizados com base no modelo indeformado. Nesta hipótese, a criação dos elementos especiais está em uma etapa de pré-processamento, não havendo necessidade de geração de novos elementos durante a análise. Assim, uma extensão da aplicação da representação do contato para o método de acoplamento de malhas não conformes proposto por Bitencourt et al. (2015) é a inserção de análises para contato não conforme (que tem variação da área de contato). Por exemplo, domínios que a princípio não interagem e que, durante o processo de carregamento na análise objeto de estudo, possam se encontrar e interagirem entre si.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. 5. ed. São Paulo: Érica, 2000.

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE: Análise Não Linear**. 1. ed. São Paulo: Érica, 2012.

ARNOLD, D. *et al.* **Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems**. SIAM J. Numer. Anal. 39 (5) (2002) 1749 - 1779.
<http://dx.doi.org/10.1137/S0036142901384162>.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, ABNT - NBR 8567 - **Cálculo e Projetos de Feixes de Molas para Veículos Rodoviários**. São Paulo: ABNT, 1984.

BAZILEVS, Y.; HSU, M.C.; SCOTT, M. **Isogeometric fluid-structure interaction analysis with emphasis on non-matching discretizations, and with application to wind turbines**. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 249-252 (0) (2012) 28-41.

BERNARDI, C.; MADAY, Y.; PATERA, A. **A new nonconforming approach to domain decomposition: the Mortar element method**, in: H. Brezis, J. Lions (Eds.), **Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications**. Pitman/Wiley, London, New York, 1994, pp. 13 - 51.

BELGACEM, F. **The Mortar finite element method with Lagrange multipliers**. Numer. Math. 84 (2) (1999) 173 - 197.

BELGACEM, F.; HILD, P.; LABORDE, P. **The Mortar finite element method for contact problems**. Math. Comput. Modelling 28 (4 - 8) (1998) 263 - 271.

BITENCOURT JR., L.A.G. *et al.* **A coupling technique for non-matching finite element meshes**, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. (2015), <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2015.02.025>.

CIMNE. **GiD: The universal, adaptative and user friendly pre and post processing system for computer analysis in science and engineering - User Manual**. **GiD_R: The personal pre and post processor**, 2016. Disponível em: <<http://www.gidhome.com/>>.

DARÉ NETO, L. **The Stress Analysis in Semi-Elliptical Leaf Springs**. São Carlos, 1998, Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

DHIA, H. **Problèmes mécaniques multi-échelles: la methode Arlequin**. C. R. Acad. Sci. - Ser. IIB - Mech.-Phys.-Astron. 326 (12) (1998) 899 - 904. [http://dx.doi.org/10.1016/S1251-8069\(99\)80046-5](http://dx.doi.org/10.1016/S1251-8069(99)80046-5).

DHIA, H.; RATEAU, G. **The Arlequin method as a flexible engineering design tool**. Internat. J. Numer. Methods Engrg. 62 (11) (2005) 1442 - 1462. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1229>.

DUREISSEIX, D.; BAVESTRELLO, H. **Information transfer between incompatible finite element meshes: application to coupled thermo-viscoelasticity**. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (44-47) (2006) 6523-6541. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2006.02.003>.

HAIKAL, G.; HJELMSTAD, K. **An enriched discontinuous Galerkin formulation for the coupling of non-conforming meshes**. Finite Elem. Anal. Des. 46 (6) (2010) 496-503.

HUEBER, S.; WOHLMUTH, B. **Thermo-mechanical contact problems on non-matching meshes**. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 198 (15 - 16) (2009) 1338 - 1350. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2008.11.022>.

JUVINALL, R. C. **Fundamentos do projeto de componentes de máquinas**. Tradução Fernando Ribeiro da Silva, Paulo Pedro Kenedi. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

KACHANOV, L. **Time of the Rupture Process under Creep Conditions**. Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Teckhnicheskikh Nauk, 8, 26-31, 1958.

KIM, H. G. **Interface element method (IEM) for a partitioned system with non-matching interfaces.** Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 191 (29 – 30) (2002) 3165 – 3194. [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00255-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00255-4).

KIM, H.G. **Interface element method: treatment of non-matching nodes at the ends of interfaces between partitioned domains.** Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 192 (15) (2003) 1841 – 1858. [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(03\)00205-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00205-6).

LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional.** Estéfane George Macedo Lacerda. – Natal, RN, 2014.

LAMICHHANE, B.; WOHLMUTH, B. **Mortar finite elements for interface problem.,** Computing 72 (3-4) (2004) 333-348. <http://dx.doi.org/10.1007/s00607-003-0062-y>.

LEMAITRE, J. **A three-dimensional ductile damage model applied to deep-drawing forming limits.** Mechanical Behavior of Materials – IV, v. 2, p. 1059–1065, 1983.

LLOBERAS-VALLS, O. *et al.* **On micro-to-macro connections in domain decomposition multiscale methods.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 225-228 (0) (2012) 177-196. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2012.03.022>.

MANZOLI, O. *et al.* **Modeling of interfaces in two-dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio.** Comput. Struct. 94-95 (0) (2012) 70–82. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.12.001>.

MATHWORKS. **Matlab, version R2013a.** Disponível em <https://www.mathworks.com/products/matlab/>.

NITSCHKE, J. **Über ein variationsprinzip zur losung von dirichlet-problemen bei verwendung von teilraumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind.** Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 36 (1) (1971) 9-15. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02995904>.

PANTANO, A.; AVERILL, R. C. **A penalty-based finite element interface technology.** Comput. Struct. 80 (22) (2002) 1725-1748.

PANTANO, A.; AVERILL, R. C. **A penalty-based interface technology for coupling independently modeled 3D finite element meshes.** Finite Elem. Anal. Des. 43 (4) (2007) 271-286. <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2006.10.001>.

PETERS, H.; MARBURG, S.; KESSISSOGLU, N. **Structural-acoustic coupling on non-conforming meshes with quadratic shape functions**, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 91 (1) (2012) 27-38. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.4251>.

PRAZERES, P.G.C. **A modified implicit–explicit integration scheme: an application to elastoplasticity problems**. J Braz Soc Mech Sci Eng 2016;38(1):151–61. <http://dx.doi.org/10.1007/s40430-015-0343-3>.

RABOTNOV Y. N. **On the Equation of State of Creep**. Institute for Hydrodynamics, Novosibirsk, U.S.S.R., Volume: 178 issue: 1, page(s): 2-117-2-122, 1963.

RESNICK, R.; HALLIDAY, K. **Fundamentals of Physics, Volume 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC [S.I.], 2003.

RODRIGUES, E. A. **Um modelo constitutivo de dano composto para simular o comportamento de materiais quase-frágeis**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, 2011.

SAMPAIO, M. A. B., **Mecânica do contato com o método dos elementos de contorno para modelagem de máquinas tuneladoras**. São Paulo, SP, 2009.

SELLITTOA, A. *et al.* **Methodological approaches for kinematic coupling of non-matching finite element meshes**. Published by Elsevier Ltd. Selection and peer-review under responsibility of 11th International Conference on the Mechanical Behavior of Materials (ICM11) - (2011) 421-426. <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2011.04.071>.

SIEMENS PLM SOFTWARE. **Femap with NX Nastran, version 9**. Disponível em <https://www.plm.automation.siemens.com/pt_br/products/femap/nxNastran/>.

SITZMANN, S.; WILLNER, K.; WOHLMUTH, B. **A dual Lagrange Method for contact problems with regularized frictional contact conditions: Modelling Micro Slip**. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 285 (2015) 468-487. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2014.11.022>.

SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational methods for plasticity: theory and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.

TIMONSHENKO, S.P. **Resistência dos Materiais**. V. I, II. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos 1981.

TIMONSHENKO, S.P.; KRIEGER, S. W. **Theory of Plates and Shells**. Singapore: McGraw-Hill, 1970.

TIMONSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. **Theory of Elasticity**. Tokyo: McGraw-Hill/Kogakusha, 1951.

THIRUNAVUKKARASU, S.; GUDDATI, M. N. **A domain decomposition method for concurrent coupling of multiscale models**. Internat. J. Numer. Methods Eng. 92 (11) (2012) 918-939. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.4362>.

UNGER, J.F.; ECKARDT, S. **Multiscale modeling of concrete from mesoscale to macroscale**. Arch. Comput. Methods Eng. 18 (3) (2011) 341 - 393. <http://dx.doi.org/10.1007/s11831-011-9063-8>.

WRIGGERS, P. **Computational Contact Mechanics**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

WOHLMUTH, B. **A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier**. SIAM J. Numer. Anal. 38 (3) (2001) 989 - 1012. URL: <http://www.jstor.org/stable/3061996>.

WOHLMUTH, B. **Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems**. Acta Numer. 20 (2011) 569 - 734.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The Finite Element Method in Engineering Science**. London: McGraw-Hill, 1971.