



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Sobre um problema do tipo côncavo-convexo, envolvendo termos não-lineares na fronteira.

João Paulo da Silva Sapia

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Setembro de 2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Sobre um problema do tipo côncavo-convexo,
envolvendo termos não-lineares na fronteira.**

João Paulo da Silva Sapia

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Setembro de 2025

S241u	Sapia, João Paulo da Silva Sobre um problema do tipo côncavo-convexo, envolvendo termos não-lineares na fronteira. / João Paulo da Silva Sapia. -- Presidente Prudente, 2025 45 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta 1. Equações Diferenciais Parciais Elípticas. 2. Problema Côncavo-Convexo. 3. Fronteira não-linear. I. Título.
-------	---

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE JOÃO PAULO DA SILVA SAPIA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CÂMPUS DE PRESIDENTE PRUDENTE.

Aos 19 de setembro de 2025, às 9h, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de JOÃO PAULO DA SILVA SAPIA, intitulada **Sobre um problema do tipo côncavo-convexo, envolvendo termos não lineares na fronteira..** A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA (Orientador(a) - Participação Presencial) do(a) Departamento de Matemática e Computação / UNESP/Câmpus de Presidente Prudente, Prof. Dr. MARCELO MESSIAS (Participação Presencial) do(a) Departamento de Matemática e Computação / UNESP/Câmpus de Presidente Prudente, Prof. Dr. GELSON CONCEIÇÃO GONÇALVES DOS SANTOS (Participação Virtual) do(a) Matemática / Universidade Federal do Pará, Após a exposição pelo mestrando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: **APROVADO** . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

Documento assinado digitalmente
 **MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA**
Data: 20/10/2025 13:49:59-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA

*A meus pais, familiares e amigos, cujo apoio
e carinho me permitiram chegar até aqui.*

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Helton e Lucimari, por todo o amor, apoio e carinho oferecidos ao longo da minha vida. Nada disso seria possível sem vocês ao meu lado. Agradeço também ao meu irmão, João Miguel, e às minhas irmãs, Maria Victoria e Maria Clara, pelo amor e amizade de sempre. Aos demais familiares, que sempre me apoiaram e me motivaram a seguir uma área que eu gostasse, sou grato pelos momentos de incentivo que me permitiram levantar e seguir adiante, mesmo diante das dificuldades no caminho.

Meus agradecimentos ao professor Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta, pelos anos de orientação desde a graduação e pelo apoio oferecido nos momentos em que me encontrava perdido e desanimado para continuar a estudar. Sem sua ajuda e orientação, eu não teria chegado até aqui.

Agradeço ao meu grande amigo Alan Miguel, que não apenas ouvia minhas dores, mas também as acolhia e cuidava delas como se fossem suas. Sem você em minha vida, eu não seria a pessoa que sou hoje.

Ao amigo Pedro Henrique Takahashi, que, mesmo que hoje conversemos pouco, teve um papel essencial em meu amadurecimento e evolução como pessoa, estando sempre ao meu lado nos momentos de maior necessidade.

À minha grande amiga Wendy Fernanda, meus agradecimentos pelas noites de conversas e debates filosóficos sobre a vida, pelos momentos de estudo, pelas risadas ecoadas e pelas lágrimas derramadas. Sua amizade sempre esteve presente, mesmo nos piores momentos.

Meus agradecimentos também aos amigos da computação – Fábio, Giovana, Gustavo e Foltran – pelos momentos de companhia, jogatinas e karaokê. A amizade de vocês tornou essa caminhada muito mais leve.

À minha amiga Taíne, por todo o carinho e cuidado oferecidos quando eu estava na pior. Você foi um ponto de luz em meio à névoa da depressão em que eu me encontrava. Para sempre carregarei você com muito carinho em meu coração.

Ao meu amigo geógrafo Aline Teixeira, pelos cafês servidos com afeto nos meus dias mais difíceis e por todo o carinho, cuidado e amizade que me foram oferecidos. Sua amizade se mostrou uma das mais verdadeiras nos momentos em que achei que não poderia confiar em mais ninguém.

Aos amigos que, mesmo não citados aqui, saibam que tenho um grande amor e carinho por todos. Cada pessoa que passou pela minha vida deixou sua marca gravada em minha alma por meio de ótimas risadas, cantorias e momentos repletos de felicidade. Sou eternamente grato pela presença de todos em minha vida.

“I am quite convinced; and, believe me, if I were again beginning my studies, I should follow the advice of Plato and start with mathematics, a science which proceeds very cautiously and admits nothing as established until it has been rigidly demonstrated.”

Galileo Galilei

“Hello There!”

General Kenobi

Resumo

Nesse trabalho, foi estudado acerca da existência de duas soluções fracas $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ para o problema elíptico quasilinear do tipo côncavo-convexo, envolvendo o operador p -Laplaciano, com condição de fronteira de Neumann não-linear. Mais especificamente, é mostrado que existe $\bar{\lambda} > 0$ tal que, para $0 < \lambda < \bar{\lambda}$, existem $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que são soluções fracas com energias distintas para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{r-2}u & \text{em } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda |u|^{q-2}u & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.0.1)$$

com $1 < q < p < p^*$, $p < r < p^*$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ é um domínio limitado suave, $\lambda > 0$ e η é um vetor unitário normal à $\partial\Omega$. Para este estudo, foi utilizado o Método da variedade de Nehari, que consiste em restringir o funcional energia a um subconjunto $\mathcal{N}$, chamada variedade de Nehari, a qual se mostra um vínculo natural para o problema.

Palavras-Chave: Equações Diferenciais Parciais Elípticas, Problema Côncavo-Convexo, Fronteira não-linear

Abstract

In this work, we studied the existence of two weak solutions $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ for a quasilinear elliptic problem of concave-convex type, involving the p -Laplacian operator with a nonlinear Neumann boundary condition. More specifically, it is shown that there exists $\bar{\lambda} > 0$ such that, for $0 < \lambda < \bar{\lambda}$, there exist $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ which are weak solutions with distinct energy levels for the problem:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{r-2}u & \text{in } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda |u|^{q-2}u & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.0.2)$$

with $1 < q < p < p^*$, $p < r < p^*$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ a smooth bounded domain, $\lambda > 0$ and η a unit outward normal vector to $\partial\Omega$. For this study, we employed the Nehari manifold method, which consists in restricting the energy functional to a subset $\mathcal{N}$, called the Nehari manifold, which provides a natural constraint for the problem.

Keywords: Elliptic Partial Differential Equations, Concave-convex problem, Nonlinear boundary condition.

Lista de Figuras

3.2.1 Raízes para $J'_u(t)$ quando $Q(u) \neq 0$	30
3.2.2 Comportamento do funcional $J_u(t)$	34

Índice de Notações

- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é continuamente } k \text{ vezes diferenciável}\};$
- $C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); \text{supp}(u) \text{ é compacto}\};$
- $C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); u \text{ é Hölder-contínua de expoente } \alpha\};$
- $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\};$
- $W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : |\nabla u| \in L^p(\Omega)\}.$
- $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^1(\Omega)$ na norma do espaço $W^{1,p}(\Omega)$;
- $u_n \rightarrow u$ denota a convergência forte (em norma);
- $u_n \rightharpoonup u$ denota a convergência fraca;
- ∇u denota o gradiente de uma função diferenciável u :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right);$$

- $\Delta_p u$ denota o operador p -Laplaciano de u , ou seja,

$$\Delta_p = \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u);$$

- p^* denota o expoente crítico da imersão de Sobolev de $W^{1,p}(\Omega)$, ou seja,

$$p^* = \frac{pN}{N-p} \text{ se } N \geq 3 \text{ e } p^* = +\infty \text{ se } N = 1, 2;$$

- $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ denota a norma em $W^{1,p}(\Omega)$.
- $|u|_r = |u|_{L^r(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}$ denota a norma em $L^r(\Omega)$, $1 \leq r < \infty$.
- $|u|_{q,\partial\Omega} = |u|_{L^q(\partial\Omega)} := \left(\int_{\partial\Omega} |u|^q ds \right)^{\frac{1}{q}}$ denota a norma em $L^q(\partial\Omega)$, $1 < q < \infty$.

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	9
Índice de Notações	11
Sumário	13
1 Introdução	15
2 Preliminares	19
2.1 Espaços L^p	19
2.2 Espaços de Sobolev	23
2.3 Teoria dos pontos críticos	24
3 Um problema do tipo côncavo-convexo com condição de fronteira não-linear	27
3.1 Regularidade das soluções	28
3.2 Demonstração do Teorema 3.0.1	28
4 Conclusão	43
Referências	45

Introdução

Recentemente, problemas do tipo côncavo-convexo tem ganhado bastante destaque na literatura de Equações Diferenciais Parciais. Em 1994, foi publicado o trabalho [2], onde foi apresentado a existência de soluções positivas com energias opostas para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda|u|^{q-2}u + |u|^{r-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.0.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado suave, com $\lambda > 0$ e $1 < q < 2 < r \leq 2^*$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

A característica principal do problema proposto é a presença da soma de dois termos com crescimentos distintos: um termo com crescimento sublinear $|u|^{q-2}u$, com $1 < q < 2$, e um termo com crescimento super-linear $|u|^{r-2}u$, com $2 < r \leq 2^*$. Assim, a combinação destes dois termos gera um crescimento do tipo côncavo-convexo para o problema (1.0.1).

Nas condições anteriormente citadas, é demonstrado a existência de um $\lambda^* > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda < \lambda^*$, o problema (1.0.1) apresenta infinitas soluções com energia negativa. Além disso, se retirado o caso crítico $r = 2^*$, é mostrado que para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o problema (1.0.1) apresenta a existência de um segundo grupo com infinitas soluções que possuem energia positiva.

A existência de soluções de energia negativa para um problema do tipo côncavo-convexo já havia sido discutida anteriormente em 1991 no trabalho [6], onde é apresentado o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda|u|^{q-2}u + |u|^{p^*-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.0.2)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado suave, $\lambda > 0$ e $1 < p < N$, com $1 < q < p^*$, onde $p^* = \frac{pN}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev. O trabalho apresentou três casos de crescimento distintos:

- $p < q < p^*$, onde (1.0.2) apresenta um crescimento subcrítico;
- $\max(p, p^* - \frac{p}{(p-1)}) < q < p^*$;
- $1 < q < p$, onde (1.0.2) apresenta o crescimento do tipo côncavo-convexo.

Enquanto os dois primeiros casos mostram a existência de $\lambda_1 > 0$, tal que para $\lambda > \lambda_1$, o problema (1.0.2) apresenta a existência de uma solução não-trivial, no terceiro caso, é mostrado que existe $\lambda_1 > 0$ tal que, para $0 < \lambda < \lambda_1$, existe uma solução u_0 positiva que é ponto de mínimo local do funcional energia. Além disso, mostram que existem infinitas soluções para o problema (1.0.2) com energia negativa, porém deixando em aberto quanto a existência das soluções com energia positiva.

Assim, no trabalho [7] é retomado o estudo do problema (1.0.2), com $1 < q < p < N$. Foram apresentados três casos para a existência das soluções:

- $2 \leq p < 3$ e $1 < q < p$;
- $p \geq 3$, se $p > q > p^* - \frac{2}{p-1}$;
- $\frac{2N}{N+2} < p < 2$ e $1 < q < p$.

Assim para essas condições, é mostrado a existência de $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda < \lambda_0$, o problema (1.0.2) apresenta a existência de pelo menos duas soluções positivas. Foi mostrado também que qualquer solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (1.0.2) é regular (ou seja, $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$).

O seguinte problema de difusão não-linear:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{r-2}u & \text{em } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda |u|^{q-2}u & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.0.3)$$

com $1 < q < p < r$, $p < r \leq p^*$ e $\lambda > 0$ foi estudado em [10], [11], [12] e [13]. No primeiro texto, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave. Assim, nas condições impostas sobre o problema e o domínio, o resultado principal apresenta a existência de uma constante $\Lambda > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, o problema (1.0.3) apresenta uma solução minimal positiva $u_\lambda \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$, onde $\beta \in (0, 1)$. Além disso, essa solução é limitada, tende a zero quando $\lambda \rightarrow 0$, possui energia negativa e $u_\lambda \rightarrow u^* \in W^{1,p}(\Omega)$ quando $\lambda \rightarrow \Lambda$, onde u^* define uma solução positiva quando $\lambda = \Lambda$.

No trabalho [11] foi realizado o estudo do caso radial onde $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$ é a bola unitária do $\mathbb{R}^N$. A partir de estudos realizados anteriormente em [10], foi possível mostrar um resultado de multiplicidade no caso radial, além de que, para o caso $r < p^*$, para cada $0 < \lambda < \Lambda$, o problema (1.0.3) apresenta uma segunda solução positiva $v_\lambda \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$, onde $\beta \in (0, 1)$. Finalizando, no texto [12], é apresentada a extensão dos resultados obtidos em [11] agora onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave qualquer.

Para este trabalho, foi estudado o artigo [13], onde o autor retoma o estudo do problema (1.0.3), dessa vez com $1 < q < p < r < p^*$, na busca de caracterização das energia das soluções. Através da utilização do método de fibração, foi mostrado a existência de $\bar{\lambda} > 0$ tal que, para $0 < \lambda < \bar{\lambda}$, o problema (1.0.3) apresenta a existência de dois conjuntos de infinitas soluções não triviais com energias opostas.

Assim, inspirado nos resultados apresentados em [13] e na teoria presente no texto [14], este trabalho teve como foco enunciar e demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 1.0.1. *Existe $\bar{\lambda}$ de tal forma que, se $0 < \lambda < \bar{\lambda}$, então existem duas soluções fracas $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ para (1.0.3), uma com energia positiva e outra com energia negativa.*

No Capítulo 2 são apresentados definições e resultados que serão essenciais para o desenvolvimento do trabalho. No Capítulo 3 são apresentados alguns resultados presentes

em [13], bem como resultados desenvolvidos inspirados pelo texto [14]. Também apresentamos a forma fraca das soluções do problema (1.0.3), o funcional energia, a regularidade das soluções e a aplicação do método de Nehari para obtermos soluções de (1.0.3) e provarmos o Teorema 1.0.1.

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados definições e resultados presentes em [1], [3], [4], [5], [8] e [9] que posteriormente serão utilizados em nosso texto.

2.1 Espaços L^p .

Definição 2.1.1. *Seja $p, q \in \mathbb{R}$, com $1 < q < p < \infty$. Denotamos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

*munido da norma $\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$,
e*

$$L^q(\partial\Omega) = \{f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } |f|^q \in L^1(\partial\Omega)\},$$

com $\|f\|_{q,\partial\Omega} = \left[\int_{\partial\Omega} |f|^q ds \right]^{\frac{1}{q}}$.

Temos definido também

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e existe uma constante } c \text{ tal que } |f(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

com $\|f\|_\infty = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\}$.

Definição 2.1.2. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotaremos por p' o **expoente conjugado** tal que*

- $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, se $1 < p < \infty$;
- $p = 1$ se $p' = \infty$ e $p = \infty$ se $p' = 1$.

Lema 2.1.1 (Desigualdade de Young). *Sejam $1 < p < \infty$ e $a, b \in \mathbb{R}$, segue que vale:*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}, \forall a, b \geq 0. \quad (2.1.1)$$

A igualdade só ocorre se $a^p = b^{p'}$.

Demonstração. *Ver Teorema 4.6 de [3].*

Teorema 2.1.1 (Desigualdade de Hölder). *Seja $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1$ e $\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.*

Demonstração. *Iremos dividir a demonstração em dois casos: para $p = 1$ (ocorrendo assim de forma análoga para $p = \infty$) e para $1 < p < \infty$.*

• $p = 1 \Rightarrow p' = \infty$:

Seja $f \in L^p, g \in L^\infty$. Uma vez que $g \in L^\infty$, temos então que $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ q.s. em Ω . Segue então que:

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty \text{ q.s. em } \Omega.$$

Integrando em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx &\leq \int_{\Omega} \|g\|_\infty |f(x)| dx \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{\Omega} |f(x)| dx \\ &\leq \|g\|_\infty \|f\|_1. \end{aligned}$$

• $1 < p < \infty$:

Sejam $f \in L^p, g \in L^{p'}$. Da desigualdade de Young, segue que:

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{p'} |g(x)|^{p'} \text{ q.s. em } \Omega.$$

Integrando em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx + \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx.$$

Note que $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$ e $\int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx < \infty$, pois $|f|^p \in L^1$ e $|g|^{p'} \in L^1$, e portanto, segue que $\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx < \infty$, mostrando que $fg \in L^1$.

Agora, substitua f por λf , onde $\lambda > 0$ e note que:

$$\int_{\Omega} |\lambda f|^p dx = \int_{\Omega} |\lambda|^p |f|^p dx = |\lambda|^p \int_{\Omega} |f|^p dx,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\lambda f g| dx &\leq \frac{|\lambda|^p}{p} \int_{\Omega} |f|^p dx + \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |g|^{p'} dx \implies \\ \int_{\Omega} |f g| dx &\leq \frac{|\lambda|^{p-1}}{p} \int_{\Omega} |f|^p dx + \frac{1}{\lambda p'} \int_{\Omega} |g|^{p'} dx. \end{aligned}$$

Agora, note que $\int_{\Omega} |f|^p dx = \|f\|_p^p$ e fazendo $\lambda = \frac{\|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}}{\|f\|}$ temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |fg| dx &\leq \frac{1}{p} \left(\frac{\|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}}{\|f\|_p} \right)^{p-1} \|f\|_p^p + \frac{1}{p'} \left(\frac{\|f\|_p}{\|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}} \right) \|g\|_{p'}^{p'} \\ &\leq \frac{1}{p} \left(\frac{\|g\|_{p'}^{\frac{p'(p-1)}{p}}}{\|f\|_p^{p-1}} \right) \|f\|_p^p + \frac{1}{p'} \left(\frac{\|f\|_p}{\|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}} \right) \|g\|_{p'}^{p'}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Note também que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 &\implies \frac{p' + p}{pp'} = 1 \\
 &\implies p + p' = pp' \\
 &\implies p + p' - pp' = 0 \\
 &\implies p'(1 - p) = -p \\
 &\implies \frac{p'(p - 1)}{p} = 1.
 \end{aligned}$$

Substituindo em (2.1.2), temos:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |fg| dx &\leq \frac{1}{p} \|g\|_{p'} \|f\|_p^p \|f\|_p^{1-p} + \frac{1}{p'} \|f\|_p \|g\|_{p'}^{p'} \|g\|_{p'}^{-\frac{p'}{p}} \Rightarrow \\
 &\leq \frac{1}{p} \|g\|_{p'} \|f\|_p + \frac{1}{p'} \|f\|_p \|g\|_{p'} \\
 &\leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \right) \\
 &\leq \|f\|_p \|g\|_{p'},
 \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

finalizando assim, nossa demonstração. $\square$

Teorema 2.1.2 (Desigualdade de Minkowski). *Se $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p$, então $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Demonstração.

• $p = 1$:

Se $f, g \in L^1$, então segue que:

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|_1 &= \int_{\Omega} |f + g| dx \\
 &\leq \int_{\Omega} |f| dx + \int_{\Omega} |g| dx \\
 &\leq \|f\|_1 + \|g\|_1.
 \end{aligned}$$

• $1 < p < \infty$:

Sejam $f, g \in L^p$, com $1 < p < \infty$. Note que:

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|_p^p &= \int_{\Omega} |f + g|^p dx \\
 &= \int_{\Omega} |f + g| |f + g|^{p-1} dx \\
 &\leq \int_{\Omega} (|f| + |g|) (|f + g|^{p-1}) dx \\
 &\leq \int_{\Omega} |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1} dx \\
 &\leq \int_{\Omega} |f| |f + g|^{p-1} dx + \int_{\Omega} |g| |f + g|^{p-1} dx.
 \end{aligned}$$

Utilizando-se da *Desigualdade de Hölder*, teremos $\int_{\Omega} |f| |f+g|^{p-1} dx \leq \|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_{p'}$.

Como $\|(f+g)^{p-1}\|_{p'} = \left(\int_{\Omega} |(f+g)^{p-1}|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$, $(p-1)p' = p$ e $\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$, então

$$\begin{aligned} \|(f+g)^{p-1}\|_{p'} &= \left(\int_{\Omega} |(f+g)^{p-1}|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |f+g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \|f+g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &\leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1} \\ &\leq (\|f\|_p \|g\|_p) (\|f+g\|_p^{p-1}). \end{aligned}$$

Dividindo a desigualdade por $\|f+g\|_p^{p-1}$, temos

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

Teorema 2.1.3. L^p é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_p$ é uma norma para qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. Os casos $p = 1$ e $p = \infty$ são triviais. Consideremos $1 < p < \infty$.

Note que, dados, $f, g \in L^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) + \lambda g(x)|^p \leq (|f(x)| + |\lambda g(x)|)^p \text{ q.s. em } \Omega,$$

Fazendo $c = \max\{|f(x)|, |\lambda g(x)|\}$, perceba que

$$\begin{aligned} |f(x) + \lambda g(x)| &\leq |f(x)| + |\lambda g(x)| \leq 2c \implies \\ |f(x) + \lambda g(x)|^p &\leq (2c)^p = 2^p c^p \end{aligned}$$

Uma vez que c representa o máximo entre $|f(x)|$ e $|\lambda g(x)|$ (podemos supor que $c = |f(x)|$) e portanto, $2^p c^p = 2^p |f(x)|^p$ segue que $2^p c^p \leq 2^p (|f(x)|^p + \lambda^p |g(x)|^p)$, chegando que

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)|^p + \lambda^p |g(x)|^p$$

mostrando assim que $f + \lambda g \in L^p$ e portanto, concluímos que L^p é um espaço vetorial.

Agora iremos mostrar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma. De fato, se $1 \leq p < \infty$, então,

- $\|f\|_p = 0 \implies \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \implies \int_{\Omega} |f|^p dx = 0 \implies f = 0$, q.s. em Ω ;
- $\|\lambda f\|_p = \left(\int_{\Omega} |\lambda f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\Omega} |\lambda|^p |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$;
- $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ segue da Desigualdade de Minkowski.

Assim, $\|\cdot\|_p$ é uma norma sobre o espaço $L^p(\Omega)$.

□

Teorema 2.1.4 (Fischer-Riesz). $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. Ver Teorema 4.8 de [3].

Para evitar confusões entre as notações durante a leitura, a partir daqui as normas $\|f\|_{L^p}$ e $\|f\|_{L^q}$ serão denotadas por $|f|_p = |f|_{L^p(\Omega)}$ e $|f|_{q,\partial\Omega} = |f|_{L^q(\partial\Omega)}$, respectivamente.

Definição 2.1.3 (Derivada Fraca). Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$. Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e considere $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$. Diremos que v é a derivada parcial fraca de u na direção i se

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (2.1.4)$$

denotada por $\frac{\partial u}{\partial x_i} := v$.

2.2 Espaços de Sobolev

Definição 2.2.1. Seja Ω um domínio limitado e suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : |\nabla u| \in L^p(\Omega)\}, \quad (2.2.1)$$

onde $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ denotam as derivadas fracas de primeira ordem de u .

Lema 2.2.1. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. O funcional $\|\cdot\|: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver Teorema 2 do Capítulo 5, Seção 5.2 de [4].

Definição 2.2.2. Seja $W^{1,p}(\Omega)$ munido da norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Definimos o subespaço fechado $W^{1,p}_0(\Omega) = \overline{C_0^1(\Omega)}$.

Teorema 2.2.1. Seja Ω um domínio limitado e suave. Então:

- (i) $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$;
- (ii) $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$.

Demonstração. Ver Proposição 9.1 em [3].

Teorema 2.2.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave de classe C^1 . Se $1 \leq p < \infty$ e $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^s(\Omega)$, para todo $p \leq s \leq p^*$, onde $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

Demonstração. Ver Teorema 5.4 de [1], parte I, caso A(4) com $m = 1$.

Teorema 2.2.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave de classe C^1 . Se $1 < p < N$ e $p \leq s \leq \frac{(N-1)p}{(N-p)}$, então $W^{1,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^s(\partial\Omega)$.

Demonstração. Ver Teorema 5.22 de [1].

Como consequência das imersões contínuas, existem constantes $A, B > 0$ tais que

$$|u|_{s,\partial\Omega} \leq A\|u\| \quad \text{e} \quad |u|_r \leq B\|u\|, \quad (2.2.2)$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $s \in \left[p, \frac{(N-1)p}{N-p}\right]$ e $r \in \left[p, \frac{Np}{N-p}\right]$.

Teorema 2.2.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave de classe C^1 . Se $1 \leq p < \infty$, então $W^{1,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^s(\Omega)$, $1 \leq s < p^*$.*

Demonstração. Ver Teorema 9.16 de [3].

Teorema 2.2.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave de classe C^1 . Se $1 < p < N$ e $1 \leq s < \frac{(N-1)p}{(N-p)}$, então $W^{1,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^s(\partial\Omega)$.*

Demonstração. Ver Teorema 6.2 de [9].

Como consequência das imersões compactas, para toda sequência limitada $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$, existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que $u_{n_j} \rightharpoonup u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_{n_j} \rightarrow u \in L^s(\Omega)$, para todo $1 \leq s < p^*$ e $u_{n_j} \rightarrow u \in L^r(\partial\Omega)$ para todo $1 \leq r < \frac{(N-1)p}{(N-p)}$.

2.3 Teoria dos pontos críticos

Definição 2.3.1. *Seja X um espaço de Banach e $U \subset X$ aberto. Dizemos que o funcional $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada de Gateaux $F \in X^*$ no ponto $u \in U$ se, para todo $h \in X$,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u+th) - J(u) - \langle F, th \rangle}{t} = 0. \quad (2.3.1)$$

A derivada de Gateaux no ponto u , quando existir é única.

Dizemos que o funcional $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada de Fréchet $F \in X^$ no ponto $u \in U$ se*

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{J(u+h) - J(u) - \langle F, h \rangle}{\|h\|} = 0. \quad (2.3.2)$$

A derivada de Fréchet no ponto u , quando existir é única. Iremos denotá-la por $DJ(u)$. O funcional J pertence a $C^1(U)$ se a derivada de Fréchet F existir e for contínua em U .

Definição 2.3.2. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $J : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $u \in X$ é um ponto crítico de J se $DJ(u) = 0$.*

Teorema 2.3.1 (Teorema de Green). *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave e η o vetor unitário normal exterior à fronteira de Ω . Para qualquer campo vetorial F de classe $C^1(\bar{\Omega})$, vale a seguinte identidade:*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \eta ds, \quad (2.3.3)$$

onde ds indica o elemento de área $(N-1)$ -dimensional de $\partial\Omega$.

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x, u) & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3.4)$$

onde $1 < p < N$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ é o operador p -Laplaciano e η é um vetor normal à $\partial\Omega$.

Consideremos o campo vetorial $F = (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \varphi$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$. Aplicando o Teorema 2.3.1, e supondo que é solução de (2.3.4),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \varphi dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx &= \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi ds \implies \\ \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \varphi dx - \int_{\Omega} f(x, u) \varphi dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx &= \int_{\partial\Omega} g(x, u) \varphi ds \implies \\ \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \varphi dx &= \int_{\Omega} f(x, u) \varphi dx + \int_{\partial\Omega} g(x, u) \varphi ds, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

para todo $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$.

Desde que cada função de $W^{1,p}(\Omega)$ por ser aproximada por uma sequência de funções em $C^1(\overline{\Omega})$, a relação acima motiva a definir o conceito de solução fraca para (2.3.4).

Definição 2.3.3 (Solução Fraca). *Dizemos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca de (2.3.4), se*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \varphi dx = \int_{\Omega} f(x, u) \varphi dx + \int_{\partial\Omega} g(x, u) \varphi ds, \quad (2.3.6)$$

para todo $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$.

Definição 2.3.4. *Seja X um espaço de Banach e $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Dizemos que J satisfaz a condição de Palais-Smale (PS) no nível $c \in \mathbb{R}$, se para toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que*

1. $J(u_n) \rightarrow c$,
2. $DJ(u_n) \rightarrow 0$,

existir uma subsequência que converge forte em X .

Teorema 2.3.2 (dos Multiplicadores de Lagrange). *Sejam X um Espaço de Banach, $J, F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $x_0 \in X$ um extremo local de J restrito ao conjunto*

$$M = \{x \in X : F(x) = F(x_0)\}.$$

Se $F'(x_0) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(x_0)v = \lambda F'(x_0)v \quad \text{para qualquer } v \in X.$$

O número real λ é chamado Multiplicador de Lagrange.

Demonstração. *Ver Teorema 3.1 de [5].*

Teorema 2.3.3. (Teorema da Função Implícita): *Sejam E, F e X espaços vetoriais normados e suponha que X seja uma espaço de Banach. Seja $A \subset E \times F$ um conjunto aberto e $f : A \rightarrow X$ uma função tal que*

(i) f é contínua;

(ii) Para todo $(x, y) \in A$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe e é contínua em A ;

(iii) $\Phi(a, b) = 0$ e $T = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é invertível com inversa contínua.

Então, existem vizinhanças U de $a \in E$ e V de $b \in F$ e uma função contínua $\varphi : U \rightarrow V$ tal que $\varphi(a) = b$ e as únicas soluções em $U \times V$ da equação

$$f(x, y) = 0$$

são da forma $(x, \varphi(x))$. Além disso, se f é diferenciável em (a, b) , então φ é diferenciável em a e

$$\varphi'(a) = - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right]^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right].$$

Demonstração. Ver Teorema 1.31 de [8].

Um problema do tipo côncavo-convexo com condição de fronteira não-linear

Neste capítulo, apresentaremos o estudo de resultados inspirados nos artigos [13] e [14]. O primeiro trabalho motivou o estudo do problema (3.0.1) apresentado abaixo, enquanto o artigo [14] apresentou a abordagem teórica necessária para a demonstração do Teorema 3.0.1.

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{r-2}u & \text{em } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda |u|^{q-2}u & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.0.1)$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ é o operador p -Laplaciano, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ é um domínio limitado suave, λ é um parâmetro positivo e η é um vetor unitário normal à $\partial\Omega$. Os expoentes q, r satisfazem $1 < q < p < r$ e $1 < p < N$, com r subcrítico, isto é, $p < r < p^*$, com $p^* = \frac{pN}{N-p}$.

Diremos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca de (3.0.1) se u satisfaz

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \varphi dx = \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^{q-2} u \varphi ds + \int_{\Omega} |u|^{r-2} u \varphi dx, \forall \varphi \in W^{1,p}(\Omega), \quad (3.0.2)$$

ou equivalentemente, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é ponto crítico do funcional de classe C^1

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q ds - \frac{1}{r} \int_{\Omega} |u|^r dx, \quad (3.0.3)$$

chamado de Funcional Energia de Euler-Lagrange.

Diferente do trabalho [13], onde foi apresentado e demonstrado dois teoremas sobre a multiplicidade das soluções de (3.0.1), este trabalho teve como foco enunciar e demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.0.1. *Existe $\bar{\lambda}$ de tal forma que, se $0 < \lambda < \bar{\lambda}$, então existem duas soluções fracas $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ para (3.0.1), uma com energia positiva e outra com energia negativa.*

Assim, para a demonstração do Teorema 3.0.1, procedemos da seguinte maneira: foi estudado o Lema 3.2.2 e Lema 3.2.4, presentes no texto [13]; o estudo da Proposição 3.2.1 e do Corolário 3.2.1 presentes em [14], e por fim, a minimização do funcional em $\mathcal{N}_-$ e $\overline{B_\rho(0)}$.

3.1 Regularidade das soluções

Lema 3.1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe $C^{0,1}$ com $1 < p < N$ e $1 < q < p < r \leq p^*$. Então, toda solução fraca u do problema (3.0.1) satisfaz $u \in L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Ver Lema 2.2 em [10]. $\square$

3.2 Demonstração do Teorema 3.0.1

Definição 3.2.1. *Seja $J_* : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^2 , X um espaço de Banach e $\mathcal{N} = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u \neq 0 \text{ e } \langle DJ_*(u), u \rangle = 0\}$ sua variedade de Nehari.*

Definimos as seguintes subvariedades

$$\mathcal{N}_\pm = \{u \in \mathcal{N} : \pm \langle D^2 J_*(u)u, u \rangle > 0\}. \quad (3.2.1)$$

Definição 3.2.2. *Seja $J_* : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 , X um espaço de Banach e $\mathcal{N}$ sua variedade de Nehari. Dado $u \in \mathcal{N}$, definimos o espaço tangente $T_u \mathcal{N}$ como sendo*

$$T_u \mathcal{N} = \{w \in X : \langle DJ_*(u), w \rangle = 0\}. \quad (3.2.2)$$

Lema 3.2.1. *Seja $J_* : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^2 , X um espaço de Banach e $\mathcal{N}$ sua variedade de Nehari. Se $u \in \mathcal{N}_\pm$ é um ponto crítico da restrição $J_*|_{\mathcal{N}}$ de J_* em $\mathcal{N}$, ou seja, $\langle DJ_*(u), v \rangle = 0$ para todo $v \in T_u \mathcal{N}$, então u é um ponto crítico do funcional J_* em X .*

Demonstração. Defina $g(x) = \langle DJ_*(x), x \rangle$ para $x \in X$. Temos

$$\begin{aligned} \langle Dg(x), y \rangle &= \langle D \langle DJ_*(x), x \rangle, y \rangle \\ &= \langle \langle D^2 J_*(x), x \rangle, y \rangle + \langle DJ_*(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Seja $u \in \mathcal{N}_\pm$ e note que

$$\langle Dg(u), u \rangle = \langle \langle D^2 J_*(u), u \rangle, u \rangle + \langle DJ_*(u), u \rangle.$$

Como $\langle DJ_*(u), u \rangle = 0$, pois $u \in \mathcal{N}$, e $\pm \langle D^2 J_*(u)u, u \rangle > 0$, pois $u \in \mathcal{N}_\pm$, temos $\langle Dg(u), u \rangle \neq 0$.

Assim, do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma que

$$\langle DJ_*(u), v \rangle = \lambda \langle Dg(u), v \rangle, \quad (3.2.3)$$

para todo $v \in X$. Tomando $u \in \mathcal{N}$,

$$\langle DJ_*(u), u \rangle = \lambda \langle Dg(u), u \rangle \implies 0 = \lambda \langle Dg(u), u \rangle.$$

Como $\langle Dg(u), u \rangle \neq 0$, temos então que $\lambda = 0$.

Assim, por (3.2.3) segue que $\langle DJ_*(u), v \rangle = 0$, para todo $v \in X$. $\square$

Observe que o funcional J definido em (3.0.3) não é de classe C^2 quando $1 < p < 2$. Dessa forma, a definição de $\mathcal{N}_\pm$ apresentada anteriormente, não se aplica a esse funcional.

A variedade de Nehari associada a (3.0.3) é dada por

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } u \neq 0 : \int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |u|^p dx = \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^q ds + \int_\Omega |u|^r dx \right\}. \quad (3.2.4)$$

Dessa forma, definimos $\mathcal{N}_\pm$ por

$$\mathcal{N}_\pm = \left\{ u \in \mathcal{N} : \pm \left[(p-1) \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p + |u|^p dx \right) > \lambda(q-1) \int_{\partial\Omega} |u|^q ds + (r-1) \int_{\Omega} |u|^r dx \right] \right\}. \quad (3.2.5)$$

Em [13], foi utilizado o método de fibração para mostrar a existência dos pontos críticos. Este método consiste em fixar um elemento $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ e mostrar que existe $t > 0$ de tal forma que $tu \in \mathcal{N}$, ou seja, u pode ser projetado na variedade de Nehari. Através desse método, foi mostrado a existência de $\bar{\lambda} > 0$ de tal forma que, para $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus W_0^{1,p}(\Omega)$, existem $t_\pm(u) > 0$, tal que $t_\pm(u)u \in \mathcal{N}_\pm$, para todo $0 < \lambda < \bar{\lambda}$, demonstrado a seguir no Lema 3.2.2.

Para isso, considere o funcional $J_u(t) = J(tu)$, $t > 0$, dado por

$$\begin{aligned} J_u(t) &= \frac{t^p}{p} \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx - \frac{\lambda t^q}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q ds - \frac{t^r}{r} \int_{\Omega} |u|^r dx \\ &= \frac{t^p}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda t^q}{q} |u|_{q,\partial\Omega}^q - \frac{t^r}{r} |u|_r^r, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

com $J_u \in C^\infty$.

Lema 3.2.2. *Existe $\bar{\lambda}$ positivo tal que para todo $0 < \lambda < \bar{\lambda}$, as seguintes propriedades são válidas:*

- (a) *Para todo $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, J'_u admite um único zero $t_- = t_-(u) > 0$ satisfazendo $J_u(t_-) > 0$ e $J''_u(t_-) < 0$.*
- (b) *Para todo $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus W_0^{1,p}(\Omega)$, J'_u admite um único zero $t_+ = t_+(u) > 0$ satisfazendo $J_u(t_+) < 0$ e $J''_u(t_+) > 0$. Além disso, $0 < t_+ < t_-$.*
- (c) *As funções $u \mapsto t_\pm(u)$ são de classe C^1 .*

Demonstração. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $J_u(t) = \frac{t^p}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda t^q}{q} |u|_{q,\partial\Omega}^q - \frac{t^r}{r} |u|_r^r$ com, $1 < q < p < r$. Consideremos $N(u) = \|u\|^p$, $Q(u) = |u|_{q,\partial\Omega}^q$ e $R(u) = |u|_r^r$ e suponha que $Q(u) \neq 0$, isto é, $u \notin W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Procuramos $t \in \mathbb{R}^+$ de tal forma que $J'_u(t) = 0$. Calculando $J'_u(t)$ temos:

$$\begin{aligned} J'_u(t) &= N(u)t^{p-1} - R(u)t^{r-1} - \lambda Q(u)t^{q-1} \\ &= [N(u)t^{p-q} - R(u)t^{r-q} - \lambda Q(u)]t^{q-1} \\ &= [(N(u) - R(u)t^{r-p})t^{p-q} - \lambda Q(u)]t^{q-1}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Denotando $h(t) = (N(u) - R(u)t^{r-p})t^{p-q}$, temos

$$J'_u(t) = [h(t) - \lambda Q(u)]t^{q-1}, \quad (3.2.8)$$

e portanto, $J'_u(t) = 0 \iff [h(t) - \lambda Q(u)]t^{q-1} = 0$. Uma vez que $\lambda Q(u)$ é constante, então será estudado o comportamento da função $h(t)$.

Note que $h(t)$ é de classe C^∞ , com $h(0) = 0$. Buscando os pontos críticos de $h(t)$, temos

$$h'(t) = (p-q)N(u)t^{p-q-1} - (r-q)R(u)t^{r-q-1}. \quad (3.2.9)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 h'(t) = 0 &\iff (p-q)N(u)t^{p-q-1} - (r-q)R(u)t^{r-q-1} = 0 \\
 &\iff -(r-q)R(u)t^{r-q-1} = -(p-q)N(u)t^{p-q-1} \\
 &\iff \frac{t^{r-q-1}}{t^{p-q-1}} = \frac{(p-q)N(u)}{(r-q)R(u)} \\
 &\iff t = \left[\frac{(p-q)N(u)}{(r-q)R(u)} \right]^{\frac{1}{r-p}}.
 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Portanto, $t_1 = \left[\frac{(p-q)N(u)}{(r-q)R(u)} \right]^{\frac{1}{r-p}}$ é um ponto crítico de $h(t)$.

Temos também que $h''(t) = [(p-q-1)(p-q)N(u) - (r-q-1)(r-q)R(u)t^{r-p}]t^{p-q-2}$

Aplicando em $t_1 = \left[\frac{(p-q)N(u)}{(r-q)R(u)} \right]^{\frac{1}{r-p}}$, temos

$$\begin{aligned}
 h''(t_1) &= \left[(p-q-1)(p-q)N(u) - (r-q-1)(r-q)R(u) \left[\left(\frac{(p-q)N(u)}{(r-q)R(u)} \right)^{\frac{1}{r-p}} \right]^{r-p} \right] t_1^{p-q-2}, \\
 &= [(p-q-1)(p-q)N(u) - (r-q-1)(p-q)N(u)] \left[\frac{(p-q)N(u)}{(r-q)R(u)} \right]^{\frac{p-q-2}{r-p}}, \\
 &= [(p-q)N(u) [(p-q-1) - (r-q-1)]] \left[\frac{(p-q)N(u)}{(r-q)R(u)} \right]^{\frac{p-q-2}{r-p}}, \\
 &= [(p-q)N(u) (p-r)] \left[\frac{(p-q)N(u)}{(r-q)R(u)} \right]^{\frac{p-q-2}{r-p}}.
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Uma vez que $1 < q < p < r$, temos então que $h''(t_1) < 0$, e assim, segue que t_1 é ponto de máximo de $h(t)$. Assim, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então existe $t_-(u)$ tal que $J'_u(t_-) = 0$. Por outro lado, se $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus W_0^{1,p}(\Omega)$, quando $h(t_1) > \lambda Q(u)$, temos a existência de duas raízes $0 < t_+ < t_-$ para $J'_u(t)$, com $t_+ < t_1 < t_-$. (figura 3.2.1)

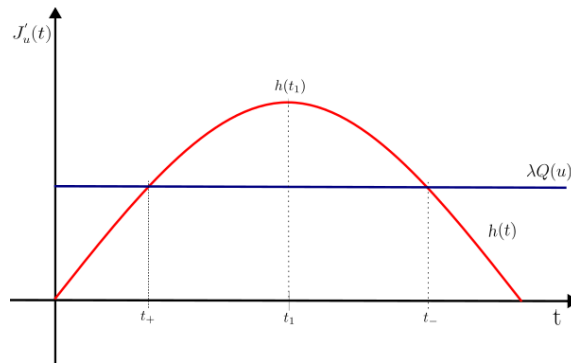


Figura 3.2.1: Raízes para $J'_u(t)$ quando $Q(u) \neq 0$.

Note ainda que,

$$\begin{aligned}
h(t_1) &= \left[N(u) - R(u) \left(\frac{(p-q)N(u)^{\frac{1}{r-p}}}{(r-q)R(u)} \right)^{r-p} \right] \left(\left[\frac{(p-q)N(u)}{(r-q)R(u)} \right]^{\frac{1}{r-p}} \right)^{p-q} \\
&= \left[N(u) - R(u) \left(\frac{(p-q)N(u)^{\frac{1}{r-p}}}{(r-q)R(u)} \right)^{r-p} \right] \left[\frac{(p-q)N(u)}{(r-q)R(u)} \right]^{\frac{p-q}{r-p}} \\
&= \left[\frac{(r-q)N(u) - (p-q)N(u)}{(r-q)} \right] \left[\frac{(r-p) - (p-q)}{(r-q)} \right] N(u) \left[\frac{(p-q)^\alpha N(u)^\alpha}{(r-q)^\alpha R(u)^\alpha} \right], \\
&= \frac{(r-p)(p-q)^\alpha N(u)^{\alpha+1}}{(r-q)^{\alpha+1} R(u)^\alpha},
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

onde $\alpha = \frac{p-q}{r-p}$.

Além disso, das imersões contínuas de Sobolev, existem $A, B > 0$ tais que $|u|_{q, \partial\Omega} \leq A\|u\|$, $|u|_r \leq B\|u\|$, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Como $N(u)^{\frac{1}{p}} = \|u\|$, $Q(u)^{\frac{1}{q}} = |u|_{q, \partial\Omega}$ e $R(u)^{\frac{1}{r}} = |u|_r$, segue então que $Q(u) \leq AN(u)^{\frac{q}{p}}$ e $R(u) \leq BN(u)^{\frac{r}{p}}$ e assim,

$$\begin{aligned}
\frac{h(t_1)}{Q(u)} &\geq \frac{(r-p)(p-q)^\alpha}{(r-q)^{\alpha+1}} \frac{N(u)^{\alpha+1}}{Q(u)R(u)^\alpha} \\
&\geq \frac{(r-p)(p-q)^\alpha}{(r-q)^{\alpha+1}} \frac{N(u)^{\alpha+1}}{AN(u)^{\frac{q}{p}} [BN(u)^{\frac{r}{p}}]^\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Ainda

$$\begin{aligned}
\frac{N(u)^{\alpha+1}}{AN(u)^{\frac{q}{p}} [BN(u)^{\frac{r}{p}}]^\alpha} &= \frac{N(u)^{\frac{p-q+r-p}{r-p}}}{AB^\alpha N(u)^{\frac{q}{p} - \frac{r(p-q)}{p(r-p)}}} \\
&= \frac{N(u)^{\frac{r-q}{r-p}}}{AB^\alpha N(u)^{\frac{q(r-p)+r(p-q)}{p(r-p)}}} \\
&= \frac{N(u)^{\frac{r-q}{r-p}}}{AB^\alpha N(u)^{\frac{qr-qp+rp-rq}{p(r-p)}}} \\
&= \frac{N(u)^{\frac{r-q}{r-p}}}{AB^\alpha N(u)^{\frac{r-q}{r-p}}} \\
&= \frac{1}{AB^\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Assim, denotando $C_1 = \frac{1}{AB^\alpha}$, temos que, se $0 < \lambda < C$, onde $\frac{(r-p)(p-q)^\alpha}{(r-q)^{\alpha+1}} C_1 := C > 0$, temos assegurado a existência de $t_\pm > 0$ para todo $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus W_0^{1,p}(\Omega)$.

Notemos também que $\pm J_u''(t_\pm) > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
J_u''(t) &= h'(t)t^{q-1} + (q-1)h(t)t^{q-2} - (q-1)\lambda Q(u)t^{q-2} \\
&= h'(t)t^{q-1} + [h(t) - \lambda Q(u)](q-1)t^{q-2} \\
&= h'(t)t^{q-1} + [h(t) - \lambda Q(u)]t^{q-1}(q-1)t^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Como $t_\pm$ são raízes de $[h(t) - \lambda Q(u)]t^{q-1}$, logo $[h(t_\pm) - \lambda Q(u)]t_\pm^{q-1} = 0$. Portanto, temos que

$$J_u''(t_+) = h'(t_+)t_+^{q-1}, \tag{3.2.16}$$

e

$$J_u''(t_-) = h'(t_-)t_-^{q-1}. \quad (3.2.17)$$

Assim, como $t_+ < t_1 < t_-$, onde t_1 é ponto máximo de $h(t)$, segue que $h'(t_+) > 0$ e $h'(t_-) < 0$.

Portanto, temos $\pm J_u''(t_{\pm}) > 0$.

Também temos $\mp J_u(t_{\pm}(u)) > 0$ desde que $0 < \lambda < \bar{\lambda}$, com $\bar{\lambda}$ suficientemente pequeno. De fato, note que

$$\begin{aligned} J_u(t) = 0 &\iff N(u)\frac{t^p}{p} - \lambda Q(u)\frac{t^q}{q} - R(u)\frac{t^r}{r} = 0, \\ &\iff N(u)\frac{t^p}{p} - R(u)\frac{t^r}{r} = \lambda Q(u)\frac{t^q}{q}, \\ &\iff q \left[N(u)\frac{t^{p-q}}{p} - R(u)\frac{t^{r-q}}{r} \right] = \lambda Q(u). \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Consideremos então $\varphi_u(t) = q \left[N(u)\frac{t^{p-q}}{p} - R(u)\frac{t^{r-q}}{r} \right]$. Analisando a função $\varphi_u(t)$ temos:

$$\varphi_u'(t) = q \left[\frac{(p-q)N(u)t^{p-q-1}}{p} - \frac{(r-q)R(u)t^{r-q-1}}{r} \right]. \quad (3.2.19)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_u'(t) = 0 &\iff q \left[\frac{(p-q)N(u)t^{p-q-1}}{p} - \frac{(r-q)R(u)t^{r-q-1}}{r} \right] = 0 \\ &\iff r(p-q)N(u)t^{p-q-1} - p(r-q)R(u)t^{r-q-1} = 0 \\ &\iff r(p-q)N(u)t^{p-q-1} = p(r-q)R(u)t^{r-q-1} \\ &\iff t^{r-p} = \frac{r(p-q)N(u)}{p(r-q)R(u)}. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Seja então $t_* = \left[\frac{r(p-q)N(u)}{p(r-q)R(u)} \right]^{\frac{1}{r-p}}$ e note que t_* é um ponto crítico de $\varphi_u(t)$. Segue também que t_* é um valor de máximo de $\varphi_u(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi_u''(t) &= q \left[\frac{(p-q-1)(p-q)N(u)t^{p-q-2}}{p} - \frac{(r-q-1)(r-q)R(u)t^{r-q-2}}{r} \right] \\ &= q \left[\frac{r(p-q-1)(p-q)N(u) - p(r-q-1)(r-q)R(u)t^{r-p}}{pr} \right] t^{p-q-2} \\ &= q \left[\frac{r(p-q-1)(p-q)N(u) - p(r-q-1)(r-q)R(u)t^{r-p}}{pr} \right] t^{p-q-2}. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi_u''(t_*) &= q \left[\frac{r(p-q-1)(p-q)N(u) - p(r-q-1)(r-q)R(u) \left(\left[\frac{r(p-q)N(u)}{p(r-q)R(u)} \right]^{\frac{1}{r-p}} \right)^{r-p}}{pr} \right] t_*^{p-q-2} \\
&= q \left[\frac{r(p-q-1)(p-q)N(u) - r(r-q-1)(p-q)N(u)}{pr} \right] t_*^{p-q-2} \\
&= qr(p-q)N(u) \frac{(p-r)}{pr} t_*^{p-q-2}.
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Como $1 < q < p < r$, segue que $\varphi_u''(t_*) < 0$. Portanto, t_* é um ponto de máximo para $\varphi_u(t)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q(u)} \varphi_u(t_*) &= \frac{q}{Q(u)} \left[\frac{rN(u) - pR(u) \left(\left[\frac{r(p-q)N(u)}{p(r-q)R(u)} \right]^{\frac{1}{r-p}} \right)^{r-p}}{pr} \right] \left[\frac{r(r-p)N(u)}{p(r-q)R(u)} \right]^{\frac{p-q}{r-p}} \\
&= qN(u) \frac{\left[1 - \frac{(p-q)}{(r-q)} \right]}{p} \frac{r^\alpha}{p^\alpha} \left[\frac{(p-q)}{(r-q)} \right]^\alpha \frac{N(u)^\alpha}{Q(u)R(u)^\alpha}, \\
&= \frac{qr^\alpha}{p^{\alpha+1}} K(1-K)^\alpha \frac{N(u)^{\alpha+1}}{Q(u)R(u)^\alpha}, \text{ onde } K = \frac{r-p}{r-q} \text{ e } \alpha = \frac{p-q}{r-p}.
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Das imersões contínuas de Sobolev, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q(u)} \varphi_u(t_*) &\geq \frac{qr^\alpha}{p^{\alpha+1}} K(1-K)^\alpha \frac{N(u)^{\alpha+1}}{AN(u)^{\frac{q}{p}} [BN(u)^{\frac{r}{p}}]^\alpha} \\
&\geq \frac{qr^\alpha}{p^{\alpha+1}} K(1-K)^\alpha \frac{1}{AB} \\
&\geq \frac{qr^\alpha}{p^{\alpha+1}} K(1-K)^\alpha C_1 \\
&\geq \frac{qr^\alpha}{p^{\alpha+1}} \left[\frac{r-p}{r-q} \left(1 - \frac{r-p}{r-q} \right)^\alpha C_1 \right] \\
&\geq \frac{qr^\alpha}{p^{\alpha+1}} \left(\frac{r-p}{r-q} \right) \left(\frac{p-q}{r-q} \right)^\alpha C_1 \\
&\geq \frac{qr^\alpha}{p^{\alpha+1}} \frac{(r-p)(p-q)^\alpha}{(r-q)^{\alpha+1}} C_1 \\
&\geq \frac{qr^\alpha}{p^{\alpha+1}} C := \overline{C} > 0.
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Tomando $\bar{\lambda} < \min\{C, \overline{C}\}$, segue que $\mp J_u(t_\pm(u)) > 0$, com $t_+ < t_* < t_-$, pois, uma vez que t_- é ponto crítico de $J_u(t)$, temos então:

$$\begin{aligned}
J_u'(t_-) = 0 &\iff N(u)t_-^{p-1} - R(u)t_-^{r-1} - \lambda Q(u)t_-^{q-1} = 0 \\
&\iff N(u)t_-^{p-q} - R(u)t_-^{r-q} = \lambda Q(u).
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

Como $J_u(t_-(u)) > 0$ temos

$$\begin{aligned}
N(u) \frac{t_-^p}{p} - \lambda Q(u) \frac{t_-^q}{q} - R(u) \frac{t_-^r}{r} > 0 &\iff N(u) \frac{t_-^p}{p} - R(u) \frac{t_-^r}{r} > \lambda Q(u) \frac{t_-^q}{q} \\
&\iff q \left(N(u) \frac{t_-^{p-q}}{p} - R(u) \frac{t_-^{r-q}}{r} \right) > \lambda Q(u) \\
&\iff q \left(N(u) \frac{t_-^{p-q}}{p} - R(u) \frac{t_-^{r-q}}{r} \right) > N(u) t_-^{p-q} - R(u) t_-^{r-q} \\
&\iff \frac{rqN(u)t_-^{p-q} - pqR(u)t_-^{r-q}}{pr} > N(u) t_-^{p-q} - R(u) t_-^{r-q} \\
&\iff rqN(u)t_-^{p-q} - pqR(u)t_-^{r-q} > prN(u)t_-^{p-q} - prR(u)t_-^{r-q} \\
&\iff prR(u)t_-^{r-q} - pqR(u)t_-^{r-q} > prN(u)t_-^{p-q} - rqN(u)t_-^{p-q} \\
&\iff (pr - pq) R(u) t_-^{r-q} > (pr - rq) N(u) t_-^{p-q} \\
&\iff \frac{t_-^{r-q}}{t_-^{p-q}} > r \frac{(p-q) N(u)}{p(r-q) R(u)} \\
&\iff t_-^{r-p} > \frac{r(p-q) N(u)}{p(r-q) R(u)} \\
&\iff t_- > \left[\frac{r(p-q) N(u)}{p(r-q) R(u)} \right]^{\frac{1}{r-p}} \\
&\iff t_- > t_*.
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

De forma análoga, mostramos também que $t_+ < t_*$. (figura 3.2.2)

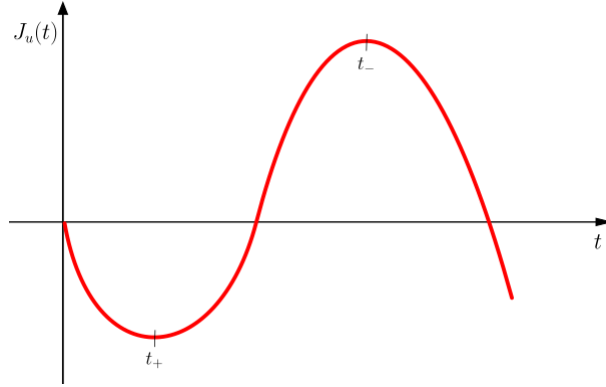


Figura 3.2.2: Comportamento do funcional $J_u(t)$.

Seja agora $\Phi : W^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Phi(u, t) = J'(tu)tu = tJ'_u(t)$. Como $1 < q < p < r$, temos $\Phi \in C^1$ e além, disso,

$$\begin{aligned}
\Phi(u, t_+) &= \Phi(u, t_-) = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial t}(u, t_+) &= J'_u(t_+) + t_+ J''_u(t_+) \\
&= t_+ J''_u(t_+) > 0. \\
\frac{\partial \Phi}{\partial t}(u, t_-) &= J'_u(t_-) + t_- J''_u(t_-) \\
&= t_- J''_u(t_-) < 0.
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existe $B_\delta(u) \subset W^{1,p}(\Omega)$ e $J_1 = (t_- - \epsilon_1, t_- + \epsilon_1), J_2 = (t_+ - \epsilon_2, t_+ + \epsilon_2)$ tal que para todo $v \in B_\delta(u)$, existe um único $t_+(v), t_-(v) \in C^1$ tal que $\Phi(v, t_+(v)) = J'(t_+(v)) = J'(t_-(v)) = \Phi(v, t_-(v)) = 0$. Logo, temos $t_\pm(v) \in \mathcal{N}$, para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Lema 3.2.3. Existe $\delta > 0$ tal que $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq \delta$, para todo $u \in \mathcal{N}_-$.

Demonstração. Primeiramente, note que

$$J(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda}{q}|u|_{q,\partial\Omega}^q - \frac{1}{r}|u|_r^r. \quad (3.2.28)$$

Das imersões contínuas de Sobolev, temos:

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda C_1}{q}\|u\|^q - \frac{C_2}{r}\|u\|^r \\ &\geq \|u\|^p \left[\frac{1}{p} - \frac{\lambda C_1}{q}\|u\|^{q-p} - \frac{C_2}{r}\|u\|^{r-p} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Logo, como

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda C_1}{q}s^{q-p} - \frac{C_2}{r}s^{r-p} \right) = \frac{1}{p} > 0, \quad (3.2.30)$$

então existem $\alpha, \rho > 0$ tais que

$$J(u) \geq \alpha, \text{ se } \|u\| = \rho. \quad (3.2.31)$$

Suponha por contradição que exista $(u_n) \subset \mathcal{N}_-$ tal que $u_n \rightarrow 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} o_n(1) &= J(u_n) = \max_{s>0} J(su_n) \\ &\geq J\left(\frac{\rho}{\|u_n\|}u_n\right) \\ &\geq \alpha, \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

o que é uma contradição. $\square$

Note que a função

$$\begin{aligned} t_- : W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} &\rightarrow \mathcal{N}_- \\ u &\mapsto t_-(u)u \end{aligned}$$

é, pelo Lema 3.2.2, uma função de classe C^1 . Além disso, por esse mesmo resultado,

$$\begin{aligned} t_- : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{N}_- \\ u &\mapsto t_-(u)u \end{aligned},$$

onde $\mathcal{M} = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\| = 1\}$, é um homeomorfismo, com inversa dada por $(t_-(u))^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|}$.

Definição 3.2.3. Seja $\psi : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\psi(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p$. Seja ainda $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow (W^{1,p}(\Omega))^*$ dado por

$$T(u)v = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v dx, \quad (3.2.33)$$

para $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Dado $u \in \mathcal{M}$, definimos o espaço tangente $T_u \mathcal{M}$ como sendo

$$T_u \mathcal{M} = \{w \in W^{1,p}(\Omega) : T(u)w = 0\}. \quad (3.2.34)$$

Definição 3.2.4. *Sejam $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $t_-(u)u \in \mathcal{N}_-$ e $J : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos o funcional $J_- : W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por $J_-(u) = J(t_-(u)u)$ e o funcional $\tilde{J}_- = J_-|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo a restrição de J_- a $\mathcal{M}$.*

Definição 3.2.5. *Seja $u \in \mathcal{M}$ e seja $\tilde{J}_- : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que u é ponto crítico do funcional $\tilde{J}_-$ se $\langle D\tilde{J}_-(u), v \rangle = 0$, para todo $v \in T_u\mathcal{M}$.*

Proposição 3.2.1. *Sejam $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ e $J_- : W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como dado na Definição 3.2.4. Então, $J_- \in C^1(W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ e ainda,*

$$\langle DJ_-(u), v \rangle = t_-(u) \langle DJ(t_-(u)u), v \rangle, \quad (3.2.35)$$

para todo $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u \neq 0$.

Demonstração. *Sejam $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Uma vez que $J(t_-(u)u) \geq J(t_-(u + \alpha v)u)$, temos que*

$$\begin{aligned} J_-(u + \alpha v) - J_-(u) &= J(t_-(u + \alpha v)(u + \alpha v)) - J(t_-(u)u) \\ &\leq J(t_-(u + \alpha v)(u + \alpha v)) - J(t_-(u + \alpha v)u). \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Do Teorema do Valor Médio, temos então que

$$J_-(u + \alpha v) - J_-(u) \leq DJ(t_-(u + \alpha v)(u + \tau_\alpha \alpha v)) t_-(u + \alpha v) \alpha v, \quad (3.2.37)$$

onde $\tau_\alpha \in (0, 1)$.

De forma similar, como $J(t_-(u + \alpha v)(u + \alpha v)) \geq J(t_-(u)(u + \alpha v))$, temos então que

$$J_-(u + \alpha v) - J_-(u) \geq J(t_-(u)(u + \alpha v)) - J(t_-(u)u). \quad (3.2.38)$$

Novamente, pelo Teorema do Valor Médio, temos então

$$J_-(u + \alpha v) - J_-(u) \geq DJ(t_-(u)(u + \eta_\alpha \alpha v)) t_-(u) \alpha v, \quad (3.2.39)$$

onde $\eta_\alpha \in (0, 1)$. Uma vez que a aplicação $t_-(u)u$ é contínua, através de (3.2.37) e (3.2.38), temos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J_-(u + \alpha v) - J_-(u)}{\alpha} = t_-(u) DJ(t_-(u)u) v. \quad (3.2.40)$$

Logo, a derivada de Gâteaux de J_- é limitada em v e contínua em u . Logo, segue que J_- é de classe C^1 . $\square$

Corolário 3.2.1. *Sejam $u \in \mathcal{M}$, $\tilde{J}_- : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Então, $\tilde{J}_- \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ e ainda,*

$$\langle D\tilde{J}_-(u), v \rangle = t_-(u) \langle DJ(t_-(u)u), v \rangle, \quad (3.2.41)$$

para todo $v \in T_u\mathcal{M}$. Se $(u_n) \subset \mathcal{N}_-$ for uma sequência (PS) limitada para J , então $\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)$ será uma sequência (PS) para $\tilde{J}_-$. Além disso, se $(u_n) \subset \mathcal{M}$ for uma sequência (PS) para $\tilde{J}_-$, então $(t_-(u_n)u_n) \subset \mathcal{N}_-$ é uma sequência (PS) para J .

Demonstração. *Notemos que $\tilde{J}_- \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, pois é a composta de funções de classe C^1 . Uma vez que $u \in \mathcal{M}$, temos então que $\langle D\tilde{J}_-(u), v \rangle = t_-(u) \langle DJ(t_-(u)u), v \rangle$, para todo $v \in T_u\mathcal{M}$, pela Proposição 3.2.1.*

Temos que $W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} = T_u \mathcal{M} \oplus \mathbb{R}u$, para todo $u \in \mathcal{M}$, e a projeção $W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow T_u \mathcal{M}$ dada por $v + \alpha u \mapsto v$ é uniformemente limitada em norma com respeito a $u \in \mathcal{M}$. Seja T dada por (3.2.3), e portanto, T é limitado em conjuntos limitados, e portanto, T é limitado em $\mathcal{M}$. Assim, existe $C > 0$ tal que $\|T(w)\|_{(W^{1,p}(\Omega))^*} \leq C$, para todo $w \in \mathcal{M}$. Como $T(u)(v + \alpha u) = \alpha$, para todo $v \in T_u \mathcal{M}$, portanto, se $\|v + \alpha u\| = 1$, segue que $|\alpha| \leq C$.

Portanto

$$\|v\| \leq |\alpha| + \|v + \alpha u\| \leq (C + 1)\|v + \alpha u\|, \quad (3.2.42)$$

para todo $u \in \mathcal{M}, v \in T_u \mathcal{M}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Além disso, pela Proposição 3.2.1,

$$\begin{aligned} \|D\tilde{J}_-(u)\| &= \sup_{\substack{v \in T_u \mathcal{M}, \\ \|v\|=1}} |\tilde{J}_-(u)v| \\ &= t_-(u) \sup_{\substack{v \in T_u \mathcal{M}, \\ \|v\|=1}} |DJ(t_-(u)u)v|. \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

Por outro lado,

$$\langle DJ(t_-(u)u), u \rangle = \frac{1}{t_-(u)} \langle DJ(t_-(u)u), t_-(u)u \rangle = 0. \quad (3.2.44)$$

Assim, por (3.2.42), (3.2.44) e pela Proposição 3.2.1

$$\begin{aligned} \|D\tilde{J}_-(u)\| &\leq t_-(u) \|DJ(t_-(u)u)\|_{(W^{1,p}(\Omega))^*} \\ &\leq t_-(u) \sup_{\substack{v \in T_u \mathcal{M}, \alpha \in \mathbb{R}, \\ v + \alpha u \neq 0}} \frac{|DJ(t_-(u)u)(v + \alpha u)|}{\|v + \alpha u\|} \\ &\leq t_-(u)(C + 1) \sup_{v \in T_u \mathcal{M} \setminus \{0\}} \frac{|DJ(t_-(u)u)v|}{\|v\|} \\ &\leq (C + 1) \|D\tilde{J}_-(u)\|_{(W^{1,p}(\Omega))^*}. \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

Por (3.2.45) e pelo Lema 3.2.3, segue o resultado. $\square$

Observação 3.2.1. Note que, pelo resultado anterior, $u \in \mathcal{M}$ é um ponto crítico de $\tilde{J}_-$ se, e somente se, $t_-(u)u$ é um ponto crítico de J em $W^{1,p}(\Omega)$.

Lema 3.2.4. Existe $\lambda_0 > 0$ e $C > 0$ tal que $\tilde{J}_-(u) \geq C$ para todo $u \in \mathcal{M}$ e para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Demonstração. Do Lema 3.2.2, temos que $0 < t_1(u) < t_-(u), \forall u \in \mathcal{M}$. Também temos que pelas imersões de Sobolev, $R(u) \leq C_1$, $C_1 > 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} J_u(t) &= t^q \left[\frac{N(u)t^{p-q}}{p} - \frac{\lambda Q(u)}{q} - \frac{R(u)t^{r-q}}{r} \right] \\ &= t^q \left[t^{p-q} \left(\frac{N(u)}{p} - \frac{R(u)t^{r-p}}{r} \right) - \frac{\lambda Q(u)}{q} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

Temos que, como $t_1 = \left[\frac{N(u)(p-q)}{R(u)(r-q)} \right]^{\frac{1}{r-p}}$,

$$\begin{aligned}
\frac{N(u)}{p} - \frac{R(u)t_1^{r-p}}{r} &= \frac{N(u)}{p} - \frac{R(u)}{r} \left[\frac{N(u)(p-q)}{R(u)(r-q)} \right] \\
&= \frac{N(u)}{p} - \frac{N(u)(p-q)}{r(r-q)} \\
&= \frac{r(r-q)N(u) - p(p-q)N(u)}{rp(r-q)} \\
&= \frac{N(u)(r(r-q) - p(p-q))}{rp(r-q)} \\
&= \frac{N(u)(r^2 - rq - p^2 + pq)}{rp(r-p)} \\
&= \frac{N(u)((r-p)(r+p) - q(r-p))}{rp(r-q)} \\
&= \frac{N(u)(r-p)(r+p-q)}{rp(r-q)}.
\end{aligned} \tag{3.2.47}$$

Como $u \in \mathcal{M}$, temos então que $N(u) = 1$ e assim, $\frac{N(u)}{p} - \frac{R(u)t_1^{r-p}}{r} = \frac{(r-p)(r+p-q)}{rp(r-q)}$. Assim, tomando $B = \frac{(r-p)(r+p-q)}{rp(r-q)}$, temos que $\tilde{J}_-(u) > J_u(t_1) = qt_1^q (Bt_1^{p-q} - \lambda Q(u)) \geq t_1^q (qBt_1^{p-q} - \lambda C_2)$, onde $Q(u) \leq C_2$, para todo $u \in \mathcal{M}$.

Logo, tomando $\lambda_0 < \frac{qBt_1^{p-q}}{C_2^q}$, temos que $\tilde{J}_-(u) \geq C := t_1^q (qBt_1^{p-q} - \lambda_0 C_2)$. $\square$

Observação 3.2.2. Pelo resultado anterior e como $t_-(u)$ é um homeomorfismo entre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}_-$, segue que

$$c = \inf_{\mathcal{N}_-} J = \inf_{\mathcal{M}} \tilde{J}_-. \tag{3.2.48}$$

Lema 3.2.5. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_-$ uma sequência minimizante para J . Então, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}_-$ tal que $J(u_n) \rightarrow c = \inf_{\mathcal{N}_-} J$. Suponhamos por contradição que $\|u_n\| \rightarrow +\infty$.

Seja $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Então, $v_n \rightharpoonup v$ em $W^{1,p}(\Omega)$, $v_n \rightarrow v$ em $L^r(\Omega)$ e em $L^q(\partial\Omega)$. Dividiremos a demonstração em dois casos:

- Se $v = 0$, então, para todo $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) &= J(u_n) \\
&= J(\|u_n\|v_n) \\
&= \max_{s>0} J(sv_n) \\
&\geq J(tv_n) \\
&\geq \frac{t^p}{p} - \frac{\lambda}{q} t^q \int_{\partial\Omega} |v_n|^q ds - \frac{t^r}{r} \int_{\Omega} |v_n|^r dx.
\end{aligned} \tag{3.2.49}$$

Uma vez que $\int_{\partial\Omega} |v_n|^q ds \rightarrow 0$ e $\int_{\Omega} |v_n|^r dx \rightarrow 0$, temos $c + o_n(1) = \frac{t^p}{p}$ para todo $t > 0$, o que é um absurdo.

- Se $v \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{\|u_n\|^p} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J(u_n)}{\|u_n\|^p} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{q} \frac{|u_n|_q^q}{\|u_n\|} - \frac{1}{r} \frac{|u_n|_r^r}{\|u_n\|^p} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{q} \|u_n\|^{q-p} |v_n|^q - \frac{1}{r} \|u_n\|^{r-p} |v_n|^r \right) \\
&= -\infty,
\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

o que é uma contradição.

Portanto, $(u_n) \subset \mathcal{N}_-$ é limitada. □

Pelo resultado anterior, existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,p}(\Omega). \tag{3.2.51}$$

Das imersões compactas de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned}
u_n &\rightarrow u \text{ em } L^r(\Omega), \\
u_n &\rightarrow u \text{ em } L^q(\partial\Omega).
\end{aligned} \tag{3.2.52}$$

Lema 3.2.6. A função u dada em (3.2.51) é tal que $u \neq 0$.

Demonstração. Suponha por contradição que $u = 0$. Então, para $t \geq 0$ temos,

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) &= J(u_n) \\
&\geq J(tu_n) \\
&\geq \frac{t^p}{p} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx + \int_{\Omega} |u_n|^p dx \right) - \frac{\lambda}{q} t^q \int_{\partial\Omega} |u_n|^q ds - \frac{t^r}{r} \int_{\Omega} |u_n|^r dx.
\end{aligned} \tag{3.2.53}$$

Uma vez que $\int_{\partial\Omega} |u_n|^q ds = o_n(1)$ e $\int_{\Omega} |u_n|^r dx = o_n(1)$, temos

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) &\geq \frac{t^p}{p} + o_n(1) \\
&\geq \frac{t^p}{p} \delta^p,
\end{aligned} \tag{3.2.54}$$

o que é uma contradição. □

Lema 3.2.7. $t_-(u)u \in \mathcal{N}_-$ é ponto crítico do funcional J em $W^{1,p}(\Omega)$, e ainda $c = J(t_-(u)u)$.

Demonstração. Seja $t_-(u) > 0$ tal que $t_-(u)u \in \mathcal{N}_-$. Então,

$$\begin{aligned}
c &\leq J(t_-(u)u) \\
&\leq \frac{t_-(u)^p}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda t_-(u)^q}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q ds - \frac{t_-(u)^r}{r} \int_{\Omega} |u|^r dx \\
&\leq \frac{t_-(u)^p}{p} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^p - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\lambda t_-(u)^q}{q} \int_{\partial\Omega} |u_n|^q ds + \frac{t_-(u)^r}{r} \int_{\Omega} |u_n|^r dx \right] \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(t_-(u_n)u_n) \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n).
\end{aligned} \tag{3.2.55}$$

Uma vez que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = c$, temos

$$J(t_-(u)u) = \inf_{\mathcal{N}_-} J. \quad (3.2.56)$$

Portanto, segue que $t_-(u)u$ é um ponto crítico de J_- em $\mathcal{N}_-$. Dessa forma, pelo Corolário, temos $\frac{t_-(u)u}{\|t_-(u)u\|} = \frac{u}{\|u\|}$ é um ponto crítico de $\hat{J}_-$ em $\mathcal{M}$. Assim, pela Observação 3.2.1, $t_-(u)u$ é um ponto crítico de J em $W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Como consequência do Lema 3.2.7, temos $J(t_-(u)u) = c > 0$, mostrando que de fato, u é uma solução fraca não-trivial para o problema (3.0.1) com energia positiva.

Para obter a solução de energia negativa, vamos proceder minimizando o funcional J restrito a uma bola fechada em torno da origem, com $r > 0$ suficientemente pequeno. Inicialmente, temos pelo Lema 3.2.3, existem $\alpha, \rho > 0$ tais que

$$J(u) \geq \alpha, \text{ se } \|u\| = \rho.$$

Consideremos então J restrito a $\overline{B_\rho(0)}$.

Lema 3.2.8. *O funcional J é limitado inferiormente em $\overline{B_\rho(0)}$.*

Demonstração. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com $\|u\| \leq \rho$. Então*

$$\begin{aligned} |J(u)| &= \left| \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q ds - \frac{1}{r} \int_{\Omega} |u|^r dx \right| \\ &\leq \frac{1}{p} \rho^p + \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q ds + \frac{1}{r} \int_{\Omega} |u|^r dx \\ &\leq \frac{1}{p} \rho^p + \frac{\lambda}{q} C_1 \rho^q + \frac{1}{r} C_2 \rho^r \\ &:= C(\rho). \end{aligned} \quad (3.2.57)$$

Logo, temos $-C(\rho) \leq J(u) \leq C(\rho)$, para todo $u \in \overline{B_\rho(0)}$. $\square$

Como consequência desse resultado, está bem definido o número

$$\beta = \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J.$$

Lema 3.2.9. *Existe $v \in B_\rho(0)$ tal que $J(v) = \beta < 0$.*

Demonstração. *De fato, seja $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus W_0^{1,p}(\Omega)$. Então:*

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{t^p}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda t^q}{q} |u|_{q,\partial\Omega}^q - \frac{t^r}{r} |u|_r^r \\ &= t^q \left(\frac{t^{p-q}}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda}{q} |u|_{q,\partial\Omega}^q - \frac{t^{r-q}}{r} |u|_r^r \right) \\ &< 0, \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

se $t \approx 0$, pois $1 < q < p < r$. Logo, é possível escolher $t > 0$ tal que $\|tu\| < \rho$ e $J(tu) < 0$. Seja então $(v_n) \subset \overline{B_\rho(0)}$ uma sequência minimizante para J , ou seja,

$$J(v_n) \rightarrow \beta, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Por construção, (v_n) é limitada, e então existe $v \in \overline{B_\rho(0)}$ tal que

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v \text{ em } W^{1,p}(\Omega) \\ v_n &\rightarrow v \text{ em } L^q(\partial\Omega), \\ v_n &\rightarrow v \text{ em } L^r(\Omega). \end{aligned} \tag{3.2.59}$$

Então, por (3.2.59),

$$\begin{aligned} J(v) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(v_n) \\ &\leq \beta. \end{aligned} \tag{3.2.60}$$

Como por definição, $\beta = \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J$, logo temos também que $\beta \leq J(v)$. Portanto, temos

$$J(v) = \beta = \min_{\overline{B_\rho(0)}} J \tag{3.2.61}$$

Além disso, $v \notin \partial B_\rho(0)$, uma vez que, por (3.2.3),

$$\min_{\partial B_\rho(0)} J \geq \alpha > 0, \tag{3.2.62}$$

enquanto que, por (3.2.59), $J(v) = \beta < 0$. Dessa forma, $v \in B_\rho(0)$, e é portanto um minimizante local de J . Como $J \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, então $J'(v) = 0$, e portanto, segue que é solução fraca de (3.0.1), tal que

$$J(v) = \beta < 0. \tag{3.2.63}$$

□

Assim, fica demonstrado o Teorema (3.0.1).

Conclusão

Neste trabalho foi abordado acerca de um problema do tipo côncavo-convexo com condição de fronteira não linear. Uma vez que, para buscar as soluções nos espaços $\mathcal{N}_{\pm}$, necessitaríamos que J fosse de Classe C^2 , o que não ocorre com nosso funcional (3.0.3) quando $1 < p < 2$. Assim, buscamos estender e minimizar nosso funcional na bola unitária de $W^{1,p}(\Omega)$, uma vez que esta é homeomorfa ao espaço $\mathcal{N}_{-}$, e mostrando que de fato, se $u \in \mathcal{M}$ é um ponto crítico de $\mathcal{M}$, então $t_{-}(u)u \in \mathcal{N}_{-}$ vai ser um ponto crítico de J em $W^{1,p}(\Omega)$. Assim, pelo Lema 3.2.7, ficou então demonstrado a existência das solução fraca com energia positiva. Para a energia negativa, inicialmente minimizamos nosso funcional em cima de uma bola fechada centrada na origem e um raio $r > 0$ e assim, pelo Lema 3.2.9, mostramos que $v \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca com energia negativa.

Referências

- [1] ADAMS, R.A. *Sobolev Spaces*, Pure and applied mathematics series, First Edition, Academic Press, Inc., Cambridge, 1975.
- [2] AMBROSETTI, A., BREZIS, H., CERAMI, G.: *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*. J. Funct. Anal. 122(2), 519-543 (1994)
- [3] BREZIS, H. *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2010.
- [4] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 2nd ed; Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence RI, 19, 2010.
- [5] FIGUEIREDO, G. M. *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*. Notas de aula na UnB, 2016.
- [6] GARCÍA-AZOZERO, J., PERAL, I *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term*. Trans. Am. Math. Soc. 323(2), 877-895, (1991)
- [7] GARCÍA-AZORERO, J., PERAL, I.: *Some results about the existence of a second positive solution in a quasilinear critical problem*, Indiana Univ. Math. J. 43(3), 941-957 (1994)
- [8] KESAVAN, S. *Nonlinear Functional Analysis: A First Course*. Hindustan Book Agency, 2004.
- [9] NECAS, J. *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [10] SABINA DE LIS, J.C.: *A concave-convex quasilinear elliptic problem subject to a nonlinear boundary condition*, Differ. Equ. Appl. 3(4), 469-486 (2011)
- [11] SABINA DE LIS, J.C., SEGURA de LÉON, S.: *Multiplicity of solutions to a concave-convex problem*, Adv. Nonlinear Stud. 15(1), 61-90 (2015)
- [12] SABINA DE LIS, J.C., SEGURA de LÉON, S.: *Multiplicity of solutions to a nonlinear boundary value problem of concave-convex type*, Nonlinear Anal. 113, 283-297 (2015)
- [13] SABINA DE LIS, J.C.: *Nonlinear flux "concave-convex" problems: a fibering method approach*, Advances in Operator Theory 5, 1738-1753 (2020)
- [14] SZULKIN, A, WETH, T.: *The method of Nehari Manifold* Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, D.Y. Gao and D. Motreanu eds., International Press, Somerville, Massachusetts.