REMat
ISSN 2177-5095
nº2 - 2010
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

Uma breve história da equação do 2º grau

Hermes Antônio Pedroso
Professor do Departamento de Matemática – Universidade Estadual Paulista
UNESP – Campus de São José do Rio Preto
hermes@ibilce.unesp.br

Resumo

Problemas que recaem numa equação do 2º grau já apareciam, há mais de quatro mil anos em textos escritos em placas de argila na Mesopotâmia, e em papiros no Egito. O objetivo principal deste trabalho é acompanhar o desenvolvimento dessa importante ferramenta matemática através dos diversos métodos de soluções, desde as receitas em prosa, que ensinavam como proceder para determinar as raízes, em exemplos concretos com coeficientes numéricos, até a famosa fórmula geral de resolução. Fórmula essa, que adquiriu o aspecto que tem hoje, somente quando se generalizou o uso de letras para representar os coeficientes de uma equação, a partir dos trabalhos de François Viète (1540-1603) e de René Descartes (1596-1650). Desse modo, o propósito é reconstituir pontos importantes do assunto desde os mesopotâmios e egípcios até os dias atuais. Para isso há que se destacar o procedimento de Euclides (300 a.C.) em "Os Elementos" que dedicou algumas proposições sobre construções de aplicações de áreas e sobre o segmento áureo, que se comportam como casos típicos de equações do 2º grau. A seguir tem-se a grande contribuição de hindus e árabes, que introduziram, por meio de receitas e de forma geométrica, o importante método de completar quadrados, fundamental para se chegar à fórmula clássica. Finalmente tem-se as resoluções de Viète e de Descartes que podem ser chamadas, respectivamente, de algébrica e de analítica. Nesses dois casos, especificamente, como se faz atualmente, já se usou letras para representar os coeficientes das equações.

Palavras chaves: História da Álgebra, Equação do segundo grau, Equações quadráticas.

A brief history of quadratic equation

Abstract

More than four thousand years ago, problems which yield a quadratic equation already appeared in texts written in clay tablets in Mesopotamia and in papyrus in Egypt. The main objective of the present work is to follow the development of this important mathematic tool through several solution methods, from prose-style recipes, which taught how to find the roots in concrete examples using numerical coefficients, to the famous general formula of solution. This formula only acquired today appearance when the use of letters to represent the coefficients of an equation was spread by the works of François Viète (1540-1603) and René Descartes (1596-1650). Therefore, the purpose is to rebuild important points of the subject from Mesopotamians and Egyptians to the present time. Remarkably, Euclid's Elements (300 B.C.) shows some propositions about the application of areas and about the golden section, which behave like typical cases of quadratic equations. It is also observed the great contribution of Hindus and Arabs, who introduced, through recipes and geometric forms, the important method of completing squares, which was fundamental to reach the classic formula. Finally, the solutions of Viète and Descartes can be called algebraic and analytic solutions respectively. Similarly to today formula, in both cases, specifically, letters were used to represent the coefficients of the equations.

Keywords: History of Algebra, quadratic equations.

"Só na foz do rio é que se ouvem os murmúrios de todas as fontes"
(João Guimarães Rosa)

EGITO

São conhecidos poucos registros do tratamento da equação do 2° grau pelos egípcios, mas os historiadores suspeitam que eles dominavam alguma técnica de resolução dessas equações. Um exemplo encontra-se no *Papiro de Berlim* e remonta aproximadamente ao ano 1950 a.C. Também foi encontrada no *Papiro de Kahun* uma resolução da equação, hoje escrita como $x^2+y^2=k$, k um número positivo, pelo método da falsa posição, desenvolvido pelos egípcios para resolver equações do 1° grau.

Exemplo: A soma das áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é o quádruplo do lado do outro. Encontre os lados desse quadrado.

Em simbologia atual o sistema de equações que representa o problema é

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ y=\frac{4}{3}x \end{cases}$$

A seguir o procedimento retórico dado pelo escriba para a resolução do problema:

1. Tome $x=3$, então, $y=4$
2. Assim, $3^2+4^2=25\cdot(25\neq 100)$
3. $\sqrt{25}=5,\ \ \sqrt{100}=10$
4. $10\div 5=2$

5. Os lados são $2 \times 3 = 6$ e $2 \times 4 = 8$. *(Papiro de Berlim)*

MESOPOTÂMIA

O primeiro registro conhecido da resolução de problemas envolvendo a equação do 2° grau data de 1700 a.C. aproximadamente, feito numa tábua de argila através de palavras. A solução era apresentada como uma "receita matemática" e fornecia somente uma raiz positiva. Os mesopotâmios enunciavam a equação e sua resolução em palavras, mais ou menos do seguinte modo:

Exemplo: Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870?

(O que hoje se escreve: $x^2 - x = 870$). E a "receita" era:

Tome a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplique por ela mesma, $(0,5 \times 0,5 = 0,25)$. Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém-se um quadrado $(870,25 = (29,5)^2)$ cujo lado somado à metade de 1 vai dar (30), o lado do quadrado procurado.

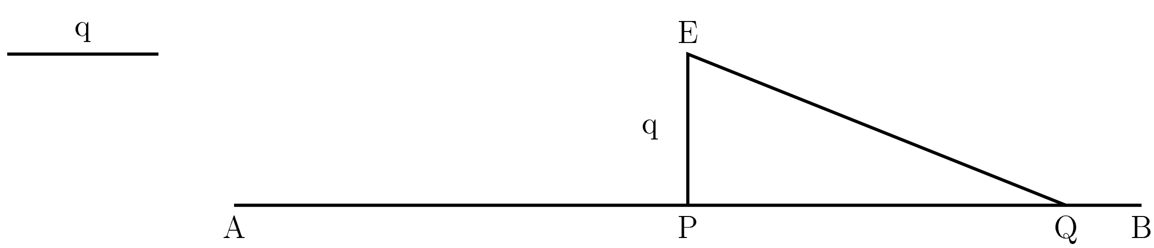
GRÉCIA

Euclides – detalhe de A Escola de Atenas de Rafael

Acredita-se que a dificuldade no tratamento com os números, racionais e irracionais, e a falta de praticidade do sistema de numeração grego, que era literal, além do gosto natural pela geometria, levou essa civilização (500 a 200 a.C.) a desenvolver um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos, dentre os quais, a solução de equações do 2° grau.

Em "Os Elementos" de Euclides particularmente encontra-se algumas proposições desse tipo de equação.

Proposição 28 – Livro VI: Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento de reta dada. Em linguagem atual, $x^2 - px + q^2 = 0$, em que p e q são segmentos dados.



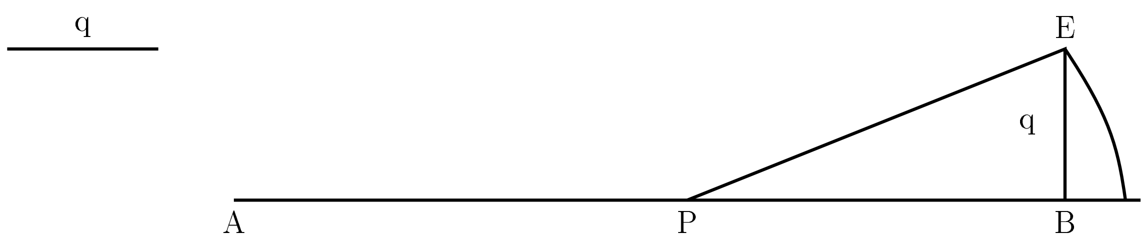
Sejam AB e PE dois segmentos de reta, em que $\overline{AB} = p$, $\overline{PE} = q$ e $q < \dfrac{p}{2}$. Dividindo AB com o ponto Q tal que $\overline{AQ} + \overline{QB} = p$ e $\overline{AQ} \cdot \overline{QB} = q^2$ tem-se a solução procurada. Para isso basta traçar uma circunferência de centro em E e raio $\dfrac{p}{2}$, que cortará segmento AB no ponto Q. Logo

$$q^2 = \overline{PB}^2 - \overline{PQ}^2 = (\overline{PB} - \overline{PQ}) \cdot (\overline{PB} + \overline{PQ}) = \overline{QB} \cdot \overline{AQ}.$$

Finalmente denotando por $r = \overline{AQ}$ e $s = \overline{BQ}$ as raízes da equação dada, conclui-se que $p = r + s$ e $q^2 = r \cdot s$.
Exemplo: $x^2 - 3x + 1 = 0$.

De acordo com as notações anteriores tem-se $p = 3$ e $q = 1$. Por construção, $\overline{EQ} = \overline{PB} = \dfrac{3}{2}$ e $\overline{PE} = q = 1$. Pelo Teorema de Pitágoras, seque que $\overline{PQ} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ e, assim, $s = \overline{AQ} = \overline{AP} + \overline{PQ} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Agora, $r = \overline{QB} = \overline{AB} - \overline{AQ} = 3 - \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$, ou seja, $r = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Proposição 29 – Livro VI : Prolongar um dado segmento de reta de modo que o retângulo contido pelo segmento estendido e a extensão seja igual a um quadrado dado. Em linguagem atual, $x^2 - px - q^2 = 0$.



Sejam AB e BE e dois segmentos de reta, em que $\overline{AB} = p$ e $\overline{BE} = q$. Determina-se o ponto Q tal que $\overline{AQ} + \overline{QB} = p$ e $\overline{AQ} \cdot \overline{QB} = q^2$. Pela construção tem-se $\overline{PE} = \overline{PQ}$, em que P é o ponto médio de AB. Nota-se que $q^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PE}^2 = \overline{PQ}^2$, ou seja,

$$q^2 = \overline{PQ}^2 - \overline{PB}^2 = (\overline{PQ} - \overline{PB}) \cdot (\overline{PQ} + \overline{PB}) = \overline{QB} \cdot (\overline{PQ} + \overline{PA}) = \overline{QB} \cdot \overline{AQ}.$$

Considerando $r = \overline{AQ}$ e $s = \overline{QB}$, então $p = r - s$ e $r \cdot (-s) = -rs = -\overline{QB} \cdot \overline{AQ} = -q^2$ e, assim, r e $-s$ são as raízes da equação dada.
Exemplo: $x^2 - 13x - 9 = 0$.

De acordo com as notações anteriores tem-se $p = 13$ e $q = 3$. Por construção, $\overline{AP} = \overline{PB} = \dfrac{13}{2}$ e $\overline{BE} = q = 3$. Pelo Teorema de Pitágoras, segue que $\overline{PE} = \dfrac{\sqrt{205}}{2}$. Como,

$\overline{PE} = \overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{BQ} = \overline{PB} - \overline{QB}$, então $s = \overline{QB} = \overline{PB} - \overline{PE} = \dfrac{13}{2} + \dfrac{\sqrt{205}}{2}$Logo, $s = \dfrac{13+\sqrt{205}}{2}$. Agora, $r = \overline{AQ} = \overline{AB} + \overline{BQ} = \overline{AB} - \overline{QB} = 13 - \dfrac{13+\sqrt{205}}{2}$, isto é, $r = \dfrac{13-\sqrt{205}}{2}$.

Proposição 11 –Livro II (Segmento Áureo): Dividir uma linha reta em duas partes tais que o retângulo contido pelo todo e uma das partes tenha área igual à do quadrado sobre a outra parte. De forma equivalente, dado um segmento de reta AB, deve-se determinar o ponto X desse segmento tal que o retângulo de lados AB e XB tenha a mesma área do quadrado de lado AX.

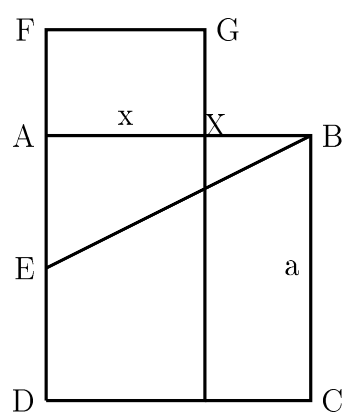
Indicando-se as medidas de AB e AX por a e x, respectivamente, mostra-se que a e x devem satisfazer a seguinte equação: $a(a-x) = x^2$.

Numa forma simplificada, e em notação atual, a solução de Euclides compõe-se dos seguintes passos:

1. Construir o quadrado $ABCD$ sobre o segmento dado AB;
2. Tomar o ponto médio, E, de DA;
3. Tomar F sobre o prolongamento de DA de maneira que $\overline{EF} = \overline{EB}$;
4. Construir o quadrado sobre o lado AF no mesmo semi-plano de BC.
5. O vértice X desse quadrado, pertencente ao segmento AB, é a solução do problema.

De fato:

$\overline{AE} = \dfrac{1}{2}\overline{AD} = \dfrac{1}{2}a$. Portanto, no triângulo ABE tem-se $EB = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. Daí, $x = \overline{AX} = \overline{AF} = \overline{EF} - \overline{EA} = \overline{EB} - \overline{EA} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a(-1+\sqrt{5})}{2}$ é a raiz positiva de $a(a-x) = x^2$, denominado número áureo, que é a medida do segmento AX.



REMat
ISSN 2177-5095
nº2 - 2010
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

ÍNDIA

A matemática hindu produziu até o renascimento grandes personagens, dentre os quais destacam-se Aryabhata (séc. VI d.C.), Brahamagupta (séc. VII d.C.), Sridhara (séc. XI d.C.) e Bhaskara (1114-1185), que muito contribuíram para a resolução da equação do 2º grau ao resolver problemas. Segundo o próprio Bhaskara a regra que usava e que originou a fórmula atual era devido a Sridhara e que curiosamente é chamada, somente no Brasil, de Fórmula de Bhaskara.

Notações hindus para as equações:

ya (abreviação de *yavattavat*) era a primeira incógnita;

ka (*kalaka* ou "negro") era a segunda incógnita;

v (*varga*) significava "quadrado";

$\cdot$ Um ponto sobre o número indicava que ele era negativo;

bha (*bhavita*) significava "produto";

k(a) representava *karana* ("irracional" ou "raiz");

ru representava *rupa* (número "puro" ou "comum").

O primeiro membro da equação era escrito em uma linha e o segundo membro na linha abaixo;

Incógnitas adicionais seriam expressas mediante o uso de abreviações para cores adicionais, assim: *ni* para *nilaca* ("azul"), *pi* para *pitaca* ("amarelo"), *pa* para *pandu* ("branco") e *lo* para *lohita* ("vermelho").

Exemplo 1: $\begin{array}{c} ya\ v\ 1\ ya\ \dot{1}0 \\ ru\ \dot{9} \end{array}$ traduz-se por $x^2 - 10x = -9$.

A seguir, os passos da solução de Brahamagupta, em notação atual:

- -9
- $(-9) \cdot 4 = -36$
- $-36 + (-10)^2 = 64$
- $\sqrt{64} = 8$
- $8 - (-10) = 18$
- $18 : (2 \times 1) = 9$

- A raiz é 9.

Exemplo 2: *ya ka 7 bha k(a) 12 ru* $\dot{8}$ *ya v 3 ya 10* traduz-se por $7xy+\sqrt{12}-8 = = 3x^2+10x$

Bhaskara (1114 – 1185), conhecido como "o sábio" floresceu cinco séculos depois de Brahmagupta. Matemático, professor, astrólogo e astrônomo, preencheu lacunas deixadas por seus antecessores, inclusive, dando a solução geral da equação $x^2 = 1+py^2$e de muitas outras equações diofantinas. Fez notáveis progressos na notação algébrica abreviada e isso pode ser confirmado na resolução do problema 2, a seguir.

Dos seus seis trabalhos conhecidos os mais importantes são *Lilavati* (nome de sua filha e que contém 278 versos) e *Vija-Ganita*, ambos com muitos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas (determinadas ou indeterminadas), mensuração, progressões aritméticas e geométricas, radicais, ternas pitagóricas, regra de três, etc.

Exemplos de problemas do *Lilavati*:

Problema 1: O quadrado da quinta parte do número de macacos de um bando, subtraída de 3 macacos, entra numa caverna; e um macaco fica fora pendurado numa árvore. Diga quantos são os macacos.

Em notação atual tem-se: $\left(\frac{1}{5}x-3\right)^2+1=x$ ou $x^2-55=-250$.

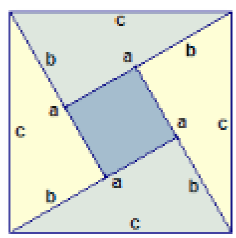
Problema 2: A raiz quadrada do número de abelhas de um enxame voou rumo a um jasmineiro, enquanto 8/9 do enxame permaneceu atrás; e uma abelha fêmea ficou voando em torno de um macho que se encontrava preso numa flor de lótus para a qual foi atraído à noite por seu doce odor. Diga-me adorável mulher, qual é o número de abelhas.

Na tabela que segue, na coluna da esquerda tem-se a solução de Bhaskara e na da direita a tradução atual.

Seja *ya v* 2 o número de abelhas do enxame	Seja $2x^2$o número de abelhas do enxame
A raiz quadrada da metade desse número é *ya* 1	$\sqrt{\frac{2x^2}{2}}=x$
Oito nonos de todo o enxame é *ya v* $\frac{16}{9}$	Oito nonos de todo o enxame é $\left(\frac{16}{9}\right)x^2$
A soma da raiz quadrada com a fração e o casal de abelhas é igual à quantidade de abelhas do enxame, isto é, *ya v* 2	$x+\left(\frac{16}{9}\right)x^2+2=2x^2$

Reduzindo-se ao mesmo denominador os dois membros da equação e eliminando o denominador, a equação transforma-se em *ya v* 18 *ya* 0 *ru* 0 *ya v* 16 *ya* 9 *ru* 18	$\frac{9x+16x^2+18}{9}=\frac{18x^2}{9} \iff$ $18x^2 = 16x^2+9x+18$
Após a subtração a equação torna-se *ya v* 2 *ya* 9 *ru* 0 *ya v* 0 *ya ru* 18	$18x^2-16x^2-9x = 16x^2+9x+18-16x^2-9x$ $2x^2-9x = 18$
Portanto *ya* é 6	Portanto $x=6$
Donde *ya v* 2 é 72	Donde $2x^2 = 2\cdot 6^2 = 72$

Merece destaque, a título de curiosidade, uma demonstração do Teorema de Pitágoras realizada por Bhaskara: esboçou a figura abaixo e escreveu simplesmente “Veja”.

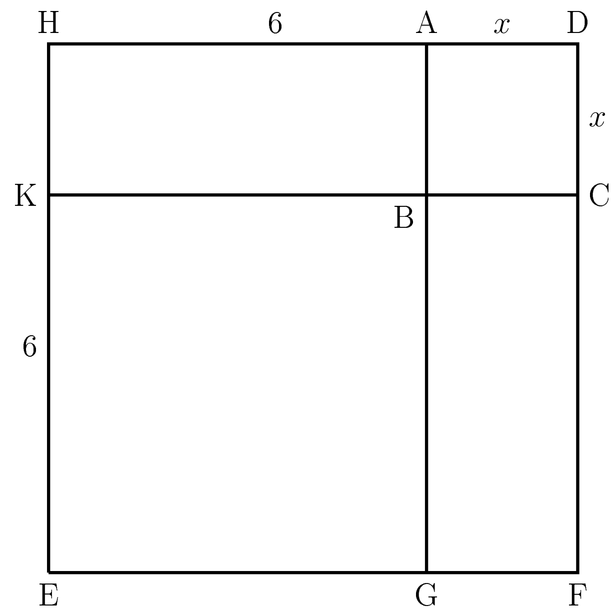


ARÁBIA

Se, por um lado, como diz a tradição, os árabes foram responsáveis pelo desaparecimento do saber ocidental, por outro contribuíram para sua preservação. Segundo consta, o extermínio se deu quando, em 641 d.C., o califa Omar mandou que fosse destruída a Biblioteca de Alexandria. E a preservação foi obra de três califas, considerados os grandes patronos da cultura abássida: al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamum, que durante seus reinados foram responsáveis pela tradução, do grego para o árabe, dos mais importantes escritos científicos conhecidos, entre eles, *O Almagesto* de Ptolomeu e *Os Elementos* de Euclides.

Al-Mamum fundou em Bagdá, no século IX, um centro científico similar à Biblioteca de Alexandria, denominado Casa da sabedoria (*Bait al-hikma*), para onde convergiram muitos matemáticos, dentre os quais Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi, que, além de outras obras, escreveu, em 825, *Hisab al-jabr wa'lmuqabalah* (*ciência da restauração e da redução ou ciência das equações*), obra de grande potencial didático. Nessa obra, al-Khowarizmi apresenta a equação do 2° grau, bem como sua resolução, de forma retórica, além de uma comprovação geométrica denominada *método de completar quadrados*, método geométrico distinto do utilizado pelos gregos. Em muitos casos apresentava, tal como seus predecessores somente uma raiz (positiva).

Exemplo: Encontrar a solução para $x^2 + 12x = 64$.



Na figura ao lado tem-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = x$ e que $\overline{AH} = \overline{CF} = 6$. Consequentemente a área do quadrado $ABCD$ é dada por $A_q = x^2$ e a área dos retângulos $HKBA$ e $BGFC$ é dada por $A_r = 6x$. A soma dessas áreas é $x^2 + 6x + 6x = x^2 + 12x$. Completa-se o quadrado $HEFD$ com o quadrado $KEGB$, cuja área é dada por $A'_q = 36$. A área do quadrado $HEFD$ é dada por $(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36 = 64 + 36 = 100$, o que resulta $x = 4$.

Al-Khowarizmi só considerava as raízes positivas, mas, ao contrário dos gregos, admitia a existência de duas raízes.

CHINA

Em 1303, o grande matemático chinês, Chu Shih-chieh, apresentou na obra *Ssu-yüan yá-chien* (Precioso espelho dos quatro elementos) uma técnica especial para a resolução da equação do 2° grau, baseada em aproximações sucessivas, de grande precisão, denominada método *fan-fan*, que foi apresentado de forma retórica e encontrava uma única raiz (positiva).

Em 1819, o matemático inglês William George Horner reivindicou a descoberta do método *fan-fan*, rebatizando-o de *método de Horner*.

O método *fan-fan* usado para encontrar, por exemplo, a solução da equação hoje escrita como $x^2 + 252x - 5292 = 0$, consistia no seguinte: partia-se de uma solução aproximada, no caso, $x = 19$ (a raiz positiva dessa equação está entre 19 e 20), e usava-se a transformação $y = x - 19$, para obter a equação $y^2 + 290y = 143$ em y, cuja solução está entre 0 e 1. Identificando y^2 com y, obtinha-se uma solução aproximada para essa equação: $y = \frac{143}{291}$, e assim o valor inicial de x era corrigido para: $x = 19 + \frac{143}{291} = 19,49$. A idéia era repetir o processo a partir desse novo resultado até chegar a um número que não mais se modificasse. No caso, fazendo $z = x - 19,49$, obtinha-se a equação em z, $z^2 + 290,98z = 0,66$ e, daí: $z = \frac{0,66}{291,98} = 0,0022$, o que já confirmava as 2 casas decimais do valor encontrado no passo anterior (com efeito, os primeiros dígitos dessa raiz são $19,49226$).

EUROPA OCIDENTAL

Viète - Coleção Irmãos Brown

Embora ainda não se usasse o formalismo atual, o processo para resolver problemas envolvendo as atuais equações do 2° grau resumia-se na receita usada por Bhaskara. Do século XV ao XVII, muitos foram os matemáticos que desenvolveram formas distintas de representar a resolução da equação do 2° grau.

Para resolver a equação $x^2 + 2ax = b$, François Viète (1540-1603) propôs uma mudança de variáveis, que transformava a equação inicial em uma equação incompleta. Os passos por ele utilizados, na notação atual, são:

1. Seja $x + a = u$
2. Então $u^2 = x^2 + 2ax + a^2$
3. Pela equação dada $x^2 + 2ax = b$, ou seja, $u^2 = b + a^2$
4. Logo $(x + a)^2 = u^2 = b + a^2$ e $x = \sqrt{b + a^2} - a$.

Para uma equação geral da forma $ax^2 + bx + c = 0$, o método de Viète seria:

1. Seja $x = u + z$
2. Então substituindo em $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se $a(u + z)^2 + b(u + z) + c = 0$, ou seja, $au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$.

3. Se $2az+b=0$, tem-se $z=\dfrac{-b}{2a}$.

4. Substituindo $z=\dfrac{-b}{2a}$ em $au^2+(2az+b)u+(az^2+bz+c)=0$, tem-se $au^2+\left(\dfrac{b^2}{4a}-\dfrac{b^2}{2a}+c\right)=0$, ou seja, $au^2=\dfrac{b^2}{2a}-\dfrac{b^2}{4a}-c=\dfrac{b^2-4ac}{4a}$, ou ainda, $u=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a}}$

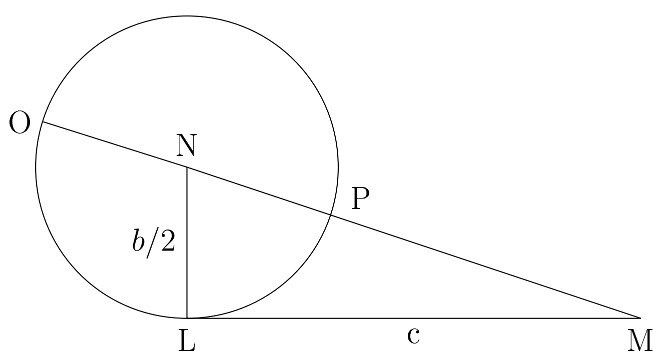
5. Finalmente substituindo os valores $z=\dfrac{-b}{2a}$ e $u=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a}}$ em $x=u+z$, tem-se $x=\dfrac{-b}{2a}\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a}}$, ou seja, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Método de Descartes

Descartes - Mansell Collection

Em 1637, René Descartes (1596-1650), além de possuir uma notação que diferia da atual somente pelo símbolo de igualdade, desenvolveu um método geométrico para obtenção da raiz positiva. No apêndice *La Géométrie* de sua obra *O Discurso do Método*, Descartes resolveu equações do tipo: $x^2=bx+c^2$, $x^2=c^2-bx$ e $x^2=bx-c^2$, sempre com b e c positivos. Por exemplo, para resolver equações do tipo $x^2=bx+c^2$, usou o seguinte método:

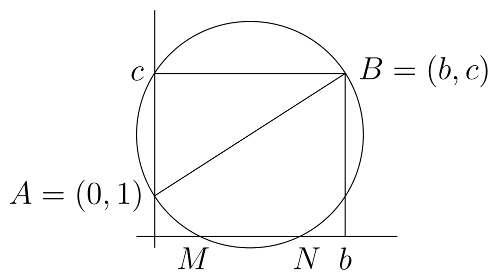
Traça-se um segmento LM, de comprimento c, e, em L, levanta-se um segmento NL igual a $\dfrac{b}{2}$e perpendicular a LM. Com centro em N, constrói-se um círculo de raio $\dfrac{b}{2}$ e traça-se a reta por M e N, que corta o círculo em O e P.



Então a raiz procurada é o segmento OM. Com efeito, no triângulo MLN, se $OM = x$, tem-se: $\left(x - \dfrac{b}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + c^2$ e daí: $x^2 - bx = c^2$. Hoje, sabe-se que a segunda raiz é $-OM$, mas Descartes não considerava a raiz negativa.

Método de Leslie:

No século XVIII o inglês Sir John Leslie, em sua obra *Elements of Geometry*, apresentou o seguinte procedimento: Dada uma equação quadrática $x^2 - bx + c = 0$, sobre um sistema de coordenadas cartesiano, marcam-se os pontos $A = (0, 1)$ e $B = (b, c)$. Traça-se o círculo de diâmetro AB. As abscissas dos pontos em que esse círculo cortar o eixo x, se cortar, são as raízes da equação quadrática dada.



Com efeito, a equação da circunferência traçada é

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2} - 1\right)^2$$

e, quando $y = 0$, tem-se $x^2 - bx = -c$.

Conclusão

Atualmente, ao se estudar a equação do 2° grau, usa-se a representação literária, herdada dos europeus, e a resolução fornecida pelos métodos dos hindus e dos árabes.

Por outro lado, além de estudos algébricos e geométricos, foram aprimorados métodos de cálculos aproximados, a exemplo do antepassado processo da "falsa posição", encontrado no Egito, principalmente. Tais métodos tornaram-se cada vez mais eficazes com o advento e popularização das calculadoras e dos computadores.

Referências

[BOYER-1996] BOYER, C.B., **História da Matemática,** 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996, 488p. Tradução: Elza F. Gomide.

[DOMINGUES-2000] DOMINGUES, H. H., Síntese da História das Equações Algébricas, In. Caderno: **Ensino Aprendizagem de Matemática,** Publicações da SBEM-SP, n°2, 2000.

[EVES-1995] EVES, H., **Introdução à História da Matemática,** Campinas: Editora da Unicamp, 1995, 843p. Tradução: Hygino H. Domingues.

[FRAGOSO-2000] FRAGOSO, W. C., Uma Abordagem Histórica da Equação do 2° grau, In. **Revista do Professor de Matemática,** n°43, 2000, p. 20-25.

[MIORIM-2001] MIORIM, M. A., CARVALHO, F., BARONE, J., MUNSIGNATTI JR. e BEGIATO, R. G., Por que Bhaskara?, In. **História e Educação Matemática,** v.2, n°2, 2001, p.123-171.