

IFT

**Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista**

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.001/99

**RPA Relativística para Ressonâncias Gigantes com
Troca de Carga**

Cláudio De Conti



Orientador

Prof. Dr. Alfredo Pio Noronha Rodrigues Galeão

23-4166

Janeiro de 1999

Agradecimentos

Agradeço a todos que contribuíram para a conclusão deste trabalho, em especial:
Ao meu orientador, professor Galdino, pela insuperável paciência, pelo flexível passaporte acadêmico, pelas correções feitas desta tese e por ter contribuído enormemente para o meu crescimento, desde a graduação.
Ao professor Francisco Nogueira por ter dado um passo além neste trabalho, pelas suas discussões e pela colaboração.
Ao professor Peter Hing por ter me ensinado o código FORTRAN que utilizei nos cálculos de energia total do sistema.
Aos meus familiares por todo o apoio que me proporcionaram.
E, por fim, ao meu amigo, pelo apoio financeiro.

Dedico esse trabalho a Andrea, minha amada esposa.

Agradecimentos

Agradeço a todos que contribuíram para a conclusão deste trabalho, em especial:

Ao meu orientador, professor Galeão, pela inesgotável paciência para discutir passagens matemáticas, pelas correções finais desta tese e por ter contribuído enormemente para a minha formação, desde a graduação.

Ao professor Francisco Krmpotić por ter dado um novo ritmo neste trabalho, pelas valiosas discussões e pela colaboração.

Ao professor Peter Ring por ceder o código FORTRAN que utilizei nos cálculos de campo médio relativístico.

Aos meus familiares por tudo que me ensinaram.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Estendemos a aproximação da fase aleatória relativística, baseada na hadrodinâmica quântica, para excitações com troca de carga. Realizamos um cálculo autoconsistente para o estado isobárico análogo e a ressonância de Gamow-Teller excitados a partir do ^{48}Ca , ^{90}Zr e ^{208}Pb . O estado fundamental e os estados de partícula-única são obtidos com a aproximação de campo médio relativística. Usamos o conjunto de parâmetros NL1 para os mésons σ , ω e ρ , e os valores experimentais para o pión com acoplamento pseudovetorial ao nucleon. Mostramos que a inclusão do acoplamento ρ -nucleon tensorial, desprezado no NL1, é importante para reproduzir a ressonância de Gamow-Teller. Mostramos, também, que é essencial extrair os termos de contato provenientes dos acoplamentos derivativos. A constante de acoplamento ρ -nucleon tensorial foi ajustada para reproduzir a energia da ressonância de Gamow-Teller do ^{208}Pb .

Palavras Chaves : *Hadrodinâmica Quântica; Teoria de Campo Médio Relativística; Aproximação da Fase Aleatória; Estado Isobárico Análogo; Ressonância de Gamow-Teller.*

Áreas do Conhecimento : *1.05.04.01-0*

Índice

Abstract

We generalize the relativistic random phase approximation, based on quantum hadrodynamics, for applications to charge-exchange excitations. We perform a self-consistent calculation for the isobaric analogue state and Gamow-Teller resonance excited from ^{48}Ca , ^{90}Zr and ^{208}Pb . The ground and single-particle states are obtained in the relativistic mean field theory. We use the parameter set NL1 for the σ , ω and ρ mesons, and experimental values for the pion with pseudovector coupling to the nucleon. We show that the inclusion of the ρ -nucleon tensor coupling, neglected in NL1, is important to reproduce the Gamow-Teller resonance. We also show that it is essential to eliminate the contact terms which come from the derivative couplings. The ρ -nucleon tensor coupling constant is adjusted to reproduce the energy of the Gamow-Teller resonance of ^{208}Pb .

Key Words: *Quantum Hadrodynamics; Relativistic Mean Field Theory; Random Phase Approximation; Isobaric Analogue State; Gamow-Teller Resonance.*

Índice

1	Introdução	6
2	Ressonâncias Gigantes com Troca de Carga	10
2.1	Ressonâncias Gigantes	10
2.2	O Estado Isobárico Análogo e a Ressonância de Gamow-Teller	12
3	Hadrodinâmica Quântica e Aproximação do Campo Médio	14
3.1	Hadrodinâmica Quântica	14
3.2	Aproximação de Campo Médio	19
3.3	Simetrias na RMFT	22
3.4	Soluções da RMFT em Bases de Oscilador Harmônico	28
4	Aproximação de Hartree	32
4.1	Regras de Feynman para a QHD	32
4.2	Aproximação de Hartree Relativística	36
4.3	Equivalência entre a Aproximação de Hartree Relativística e a RMFT	39
5	Aproximação da Fase Aleatória Relativística	46
5.1	Equação de Dyson na Aproximação de Anéis	46
5.2	Forma Espectral da Equação de Dyson	51
5.3	Representação Espectral de Lehmann para o Propagador de Polarização	54
5.4	Equações da RPA na Forma Matricial	58
5.5	Função de Excitação e Regras de Soma	59
5.6	Equações da RPA com Bom Momento Angular	62
5.7	Amplitudes e Intensidades de Transição com Momento Angular Definido	67

6	Resultados Numéricos	70
6.1	Soluções da RMFT	70
6.2	Resultados da RPA	72
7	Conclusões	83
A	Propagadores Interagentes na Presença de Acoplamentos Derivativos	87
B	Reversão Temporal	93
C	Rotações	95
D	Oscilador Harmônico Isotrópico	96
E	Decomposição Multipolar do Kernel da RPA	98
	Referências Bibliográficas	109

Relação das Figuras

4.1	Propagadores Livres.	34
4.2	Vértices da QHD. As derivadas parciais agem nos propagadores dos mésons. . .	35
4.3	Rotulagem dos índices espinoriais nos vértices.	35
4.4	Contribuição de 6ª ordem para $iG_{\alpha\beta}(x, y)$	35
4.5	Diagrama com parte desconectada aos pontos externos.	36
4.6	Contribuições de "tadpoles" de segunda ordem para os propagadores do nucleon e dos mésons ou do fóton. Para simplificar, de agora em diante a linha ondulada estará representando, indistintamente, os propagadores dos mésons σ , ω , π e ρ e do fóton.	37
4.7	Expansão diagramática do propagador do nucleon levando em conta apenas diagramas de "tadpoles".	37
4.8	Auto-energia do nucleon em segunda ordem na interação	38
4.9	Equação de Hartree para o propagador do nucleon. A linha grossa representa iG^H	39
5.1	Reagrupamento de diagramas com uma linha de férmion entre os vértices x_i e x_j	48
5.2	Diagrama proibido por dupla contagem de "tadpoles".	49
5.3	Estrutura Geral dos diagramas disjuntos.	49
5.4	Expansão em diagramas de anéis e equação de Dyson para Π	50
5.5	Diagramas de anéis que reproduzem as excitações com troca de carga.	51
5.6	Contribuição de um vértice envolvendo os propagadores do próton, do nêutron, e do bóson σ , ou ω ou do fóton. A matriz no vértice de interação, Γ^b , é igual a $1, \gamma_\mu, (1 + \tau_3)\gamma_\mu$ para o σ , o ω e o fóton, respectivamente.	51

6.1	Cálculo RPA1 da distribuição de intensidade de Gamow-Teller para o núcleo-alvo ^{208}Pb obtida com $g'_\pi = 0, 1/3$ e 0.7 . Os “spikes” dão os resultados para as intensidades parciais obtidas no cálculo RPA1, a curva contínua a função de excitação suavizada conforme explicamos no texto, e as linhas pontilhadas a função de excitação para o pico de ressonância extraída do experimento [25]. (Figura retirada de [4].)	80
6.2	Cálculo RPA2 da distribuição de intensidade de Gamow-Teller para o núcleo-alvo ^{208}Pb . As convenções são as mesmas da Fig. (6.1).	81

Relação das Tabelas

6.1	Parâmetros da lagrangeana de QHD usados nos cálculos.	72
6.2	Energia de ligação por nucleon E/A em (MeV) e raio quadrático médio para neutrons, r_n , e prótons, r_p , em (fm), para o ^{48}Ca , o ^{90}Zr e o ^{208}Pb calculados na RMFT com os parâmetros NL1 e com a inclusão do acoplamento ρN tensorial, $\rho N(t)$	73
6.3	Energias de partícula única, em MeV, para prótons e nêutrons, no ^{208}Pb	74
6.4	Regras de Soma na RPA.	78
6.5	Níveis de partícula-única, em MeV, utilizados para contruir o espaço modelo dos cálculos RPA1 e RPA2. O número entre parênteses indica a ocupação do nível.	79
6.6	Resultados dos cálculos RPA1 e RPA2 para a energia de excitação e a intensidade das ressonâncias com troca de carga. Os valores experimentais são dados para comparação	82

Capítulo 1

Introdução

As ressonâncias gigantes com troca de carga são modos vibracionais coletivos com diversas multipolaridades. Podem ser classificadas em estados sem “spin-flip” ($S = 0$), nos quais os nucleons com spin para cima e para baixo movem-se em fase, e em estados com “spin-flip” ($S = 1$), nos quais os nucleons com spin para cima e para baixo movem-se fora de fase. Sendo excitações com troca de carga, elas são isovetoriais ($T = 1$), com prótons e nêutrons movendo-se fora de fase. Os exemplos mais conhecidos dessa classe de ressonâncias são as que carregam momento angular orbital nulo, a saber, o estado isobárico análogo ($S = 0, T = 1, J^\pi = 0^+$) e a ressonância de Gamow-Teller ($S = 1, T = 1, J^\pi = 1^+$). A nível microscópico esses modos vibracionais são tratados como excitações de partícula-buraco coerentes, com a propriedade de exaurirem uma boa parte das regras de soma correspondentes. O modelo microscópico apropriado para o estudo destas ressonâncias é a aproximação de fase aleatória.

Descrever as propriedades do estado fundamental de um sistema nuclear é de fundamental importância no estudo da estrutura nuclear. Os modelos tradicionais não relativísticos, i.e., modelos que incluem somente graus de liberdade bariônicos, descrevem essas propriedades através da equação de Schrödinger com potenciais efetivos determinados fenomenologicamente como, por exemplo, as interações de Skyrme. Apesar dos bons resultados alcançados por estes modelos deparamos ainda com algumas discrepâncias ao compará-los com os dados experimentais. Além disso eles estão distantes das teorias fundamentais para a interação nuclear.

Recentemente, Walecka e colaboradores propuseram um modelo em teoria de campos

relativística para a descrição de sistemas nucleares, levando em conta, não apenas os graus de liberdade bariônicos, mas também alguns graus de liberdade mesônicos. Tal modelo, a *hadrodinâmica quântica*, pode ser dividido em duas versões. A primeira, a *hadrodinâmica quântica-I*, é baseada nos bárions (n, p) e nos mésons isoescalares escalar (σ) e vetorial (ω). A segunda versão, a *hadrodinâmica quântica-II*, mais realística, contém, além dos campos acima, os campos dos mésons isovetoriais pseudo-escalar (π) e vetorial (ρ), e também do fóton.

Historicamente, a *hadrodinâmica quântica* foi introduzida como uma teoria quântica de campos renormalizável, o que limitava drasticamente o número de termos admissíveis na sua densidade de lagrangeana [1]. No entanto, apesar do seu sucesso, ela enfrentou dificuldades no seu programa de renormalização. Nos últimos anos este modelo foi reformulado, passando a ser visto como uma teoria quântica de campos efetiva, não renormalizável [2], representando o limite de baixas energias da teoria fundamental das interações fortes, a saber, a *cromodinâmica quântica* (QCD). Consequentemente todos os termos compatíveis com as simetrias da QCD se fazem presentes agora, sendo necessário algum critério para selecionar os mais importantes. Mesmo assim, o número de termos aumenta significativamente. Como o nosso propósito aqui não é testar os fundamentos da *hadrodinâmica quântica*, mas sim sua capacidade em reproduzir mais algumas propriedades nucleares, restringiremos o número de parâmetros livres ao mínimo possível e incluiremos na sua densidade de lagrangeana somente os termos mais importantes. Nesta tese sempre que nos referirmos à *hadrodinâmica quântica* será neste sentido; uma teoria quântica de campos não renormalizável que contém o mínimo de termos necessários para reproduzir as propriedades nucleares em que estamos interessados.

Na *hadrodinâmica quântica* é observado que, para altas densidades bariônicas, os operadores dos campos mesônicos podem ser substituídos por seus respectivos valores esperados, os quais são, então, vistos como campos clássicos onde os bárions se movem. Esta aproximação é conhecida como *teoria do campo médio*, e equivale à *aproximação de Hartree relativística*. Embora a *hadrodinâmica quântica* tenha poucos parâmetros livres (massas dos mésons e constantes de acoplamento), ela consegue, na aproximação do campo médio, descrever com grande sucesso, não só as principais propriedades da matéria nuclear

(saturação, equação de estado, etc.), mas também propriedades do estado fundamental de núcleos finitos, incluindo núcleos instáveis [3]. Um aspecto favorável deste modelo é que o mesmo conjunto restrito de parâmetros pode ser usado para descrever todos estes sistemas.

Em virtude do sucesso da aproximação de campo médio relativística em descrever as propriedades do estado fundamental de sistemas finitos, é natural estendê-lo para o estudo de estados excitados. Muito embora alguns estados excitados nucleares, incluindo certas ressonâncias gigantes, tenham sido calculados com a *aproximação de fase aleatória relativística* baseada na aproximação de campo médio [16, 17, 28, 33, 34], isso nunca foi feito para as excitações com troca de carga. O objetivo desta tese é estender a aplicação deste modelo relativístico, cujos parâmetros são fixados com as propriedades do estado fundamental, para descrever os estados coletivos com troca de carga, tais como o *estado isobárico análogo* e a *ressonância de Gamow-Teller* [4].

O estado isobárico análogo e a ressonância de Gamow-Teller foram calculados extensivamente no contexto de modelos não relativísticos da estrutura nuclear, usualmente na aproximação de fase aleatória ou extensões dela e usando, não somente interações puramente fenomenológicas, mas também interações realísticas baseadas na troca de mésons. Enquanto o estado isobárico análogo é facilmente reproduzido, a ressonância de Gamow-Teller é mais problemática, especialmente em relação a sua intensidade, que apresenta o fenômeno de supressão (“quenching”); experimentalmente detecta-se apenas cerca de 60 % da intensidade prevista teoricamente pela regra de soma de Ikeda [5]. Dois mecanismos foram propostos para explicar a supressão dessa intensidade: i) a excitação da ressonância Δ , que tem os mesmos números quânticos da ressonância de Gamow-Teller, ou ii) a influência de configurações de $2p-2h$, ou mais complexas, que levariam essa intensidade para energias mais elevadas. Nós não incluímos tais mecanismos no nosso modelo, mesmo porque isto requeriria um tratamento mais sofisticado do que a versão simples da aproximação de fase aleatória relativística que iremos utilizar. Pretendemos concentrar nossa atenção em verificar até que ponto é possível reproduzir, com a mesma qualidade de cálculos não relativísticos similares, a energia de excitação e a distribuição de intensidade desses modos coletivos.

Esta tese está organizada em sete capítulos. O primeiro capítulo consite na introdução

da tese. No segundo capítulo abordamos resumidamente as ressonâncias gigantes com troca de carga que iremos calcular neste trabalho. Em seguida, no terceiro capítulo, introduzimos a hadrodinâmica quântica e a solução das equações deste modelo através da aproximação de campo médio. No quarto capítulo obtemos as regras de Feynman para a hadrodinâmica quântica e, através de expansões diagramáticas do propagador do nucleon, a aproximação de Hartree relativística. Nesse capítulo discutimos a equivalência da aproximação de Hartree e a aproximação de campo médio. No quinto capítulo derivamos as equações da aproximação de fase aleatória relativística apropriada para as ressonâncias com troca de carga. No sexto capítulo discutimos as soluções numéricas que obtivemos na aproximação de campo médio para núcleos com camadas fechadas e na aproximação da fase aleatória para o estado isobárico análogo e a ressonância de Gamow-Teller, excitados a partir desses núcleos. Para finalizar, no último capítulo estão a conclusão e as perspectivas futuras do tipo de cálculo realizado aqui.

2.1 Ressonâncias Gigantes

A GGR é a mais alta energia ressonância localizada no espectro de excitação dos núcleos. Ela é a mais alta ressonância localizada no espectro de excitação dos núcleos. Ela é a mais alta ressonância localizada no espectro de excitação dos núcleos.

A GGR é caracterizada pelas seguintes quantidades:

1. Energia de excitação E , onde E é a energia transferida ao núcleo em unidades de MeV.
2. Momento angular total J transferido para o núcleo.

Capítulo 2

Ressonâncias Gigantes com Troca de Carga

Ao se observar a função de excitação para diversos núcleos-alvo, ao longo de toda a tabela periódica, notamos certos picos largos centrados em energias da ordem de dezenas de MeV acima do estado fundamental. Esses picos correspondem a certos modos coletivos nucleares que recebem a denominação genérica de *ressonâncias gigantes* (GR), pois suas intensidades e larguras são maiores do que a dos picos correspondentes às transições de partícula-única entre os orbitais do modelo de camadas.

Neste capítulo pretendemos fazer uma breve introdução às GR, e em particular às GR com troca de carga. Na primeira seção discutiremos as características básicas das GR. E, para finalizar, na seção seguinte falaremos resumidamente sobre o estado isobárico análogo e a ressonância de Gamow-Teller.

2.1 Ressonâncias Gigantes

As GR são modos vibracionais produzidos pelo movimento coerente dos diversos nucleons dentro do núcleo. As reações nucleares mais utilizadas para excitar esses modos são as reações fotonucleares, o espalhamento inelástico de elétrons e íons leves e reações com troca de carga com íons leves.

As GR são caracterizadas pelas seguintes quantidades

1. Multipolaridade 2^J , onde J é o momento angular transferido ao núcleo no processo de excitação .
2. Momento angular orbital L transferido pela excitação .

3. Spin S , que é o momento angular de spin transferido na excitação ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$). Os modos com $S = 0$ são denominados elétricos e com $S = 1$, magnéticos.
4. Isospin T , que é o isospin transferido ao núcleo no processo de excitação. Para $T = 0$, temos os modos isoescalares e para $T = 1$, os isovetoriais.
5. Seção de choque integrada em energia, também denominada intensidade. Existem relações gerais envolvendo valores esperados de certos operadores e seções de choque integradas em energia, denominadas regras de soma. As regras de soma são obedecidas em maior ou menor grau pelas diversas GR. Um exemplo é a regra de soma ponderada em energia (EWSR). Essa quantidade expressa a energia média transferida ao núcleo quando excitado por um agente externo, e pode ser escrita como

$$S_1 = \sum_{\nu} (E_{\nu} - E) | \langle \Psi_{\nu} | \mathcal{O} | \Psi \rangle |^2 = \frac{1}{2} \langle \Psi | [\mathcal{O}, [H, \mathcal{O}]] | \Psi \rangle \quad (2.1)$$

onde H é a hamiltoniana que descreve o sistema nuclear, Ψ e Ψ_{ν} seus auto-estados e E e E_{ν} as energias correspondentes, com Ψ e E para o estado fundamental. $\mathcal{O}$ é o operador de excitação, caracterizando o agente externo que provoca as transições do sistema.

6. Energia de excitação E_x , que pode ser calculada como o centróide em energia do pico.
7. Largura Γ , que é a largura do pico à metade da altura máxima.

Verifica-se que, para cada $LSJT$, o centróide de energia e a largura variam suavemente com o número de massa A , indicando que as GR são propriedades gerais dos núcleos, ou mais precisamente são respostas características da matéria nuclear a influências externas.

Cerca de cinquenta anos atrás, Baldwin e Klaiber (1947/1948) observaram pela primeira vez uma GR, a ressonância dipolar elétrica, em reações fotonucleares. Nessa ressonância todos os prótons do núcleo se movem na mesma direção, sob a ação do vetor campo elétrico associado aos fótons de alta energia que irradiam o núcleo. Em contrapartida, os nêutrons se movem na direção oposta, já que o centro de massa do núcleo permanece em repouso. Como prótons e nêutrons estão em oposição de fase, trata-se de uma GR isovetorial ($T = 1$). Quando prótons e nêutrons se movem em fase a GR é chamada de

isoescalar ($T = 0$). Outro tipo de movimento coletivo é a GR quadrupolar, observada pela primeira vez por Pitthan e Walcher (1971). Neste modo vibracional, a própria forma do núcleo oscila. Para esta ressonância, tanto o modo isoescalar ($T = 0$), como o modo isovetorial ($T = 1$), são observados. A GR monopolar isoescalar é outro exemplo de modo vibracional, em que prótons e nêutrons se movem em fase, para dentro e para fora, fazendo com que o núcleo se expanda e contraia radialmente (modo de respiração). Essa ressonância foi prevista por Marty *et al.* (1975) e a sua existência foi confirmada posteriormente por Harakeh *et al.* (1977). Ela é importante por ser uma das poucas maneiras de avaliar-se experimentalmente a compressibilidade da matéria nuclear.

2.2 O Estado Isobárico Análogo e a Ressonância de Gamow-Teller

As GR's discutidas na seção anterior (dipolar, quadrupolar e monopolar) são todas deformações geométricas do núcleo, que ocorrem devido ao movimento espacial dos nucleons. Além desse tipo de oscilações, vibrações no espaço de spin também são possíveis. As vibrações de spin não alteram a distribuição espacial dos nucleons, enquanto que somente a orientação dos spins varia com o tempo. Quando não há movimento espacial, o princípio de Pauli é mais restritivo e somente uns poucos nucleons podem participar na vibração de spin. Por esse motivo os modos magnéticos ($S = 1$) são menos coletivos que os elétricos. Os modos magnéticos também são denominados excitações de spin ou transições com "spin-flip". As excitações de spin também estão divididas em isoescalares ($S = 1, T = 0$) e isovetoriais ($S = 1, T = 1$). Um dos aspectos interessantes dos modos coletivos de spin é que eles permitem obter informações sobre a parte dependente do spin e spin-isospin da interação efetiva no meio nuclear.

Uma das técnicas experimentais utilizadas para estudar vibrações de spin isoescalares é o espalhamento inelástico de prótons de alta energia. Já na reação (p, n) , o campo piônico do próton interage com os nucleons do alvo. Se o pión trocado fosse neutro, a carga elétrica do projétil e do alvo permaneceria a mesma e a colisão seria vista como um espalhamento inelástico comum. No entanto, quando o pión trocado é carregado há uma troca de carga entre o projétil e o alvo. O próton incidente se transformará em nêutron e um dos nêutrons

do alvo se transformará em próton. Se observarmos o espectro de excitação (p, n) de núcleos com excesso de nêutrons veremos que este é dominado por um pico largo. Esse pico é chamado de ressonância de Gamow-Teller (GT). Esse modo coletivo foi previsto teoricamente por Ikeda, Fujii e Fujita (1963) e suas primeiras indicações experimentais foram feitas por Doering *et al.* (1975) num experimento $^{90}\text{Zr}(p, n)^{90}\text{Nb}$ para energia do próton incidente de $E_p = 45$ MeV.

A ressonância de GT é uma oscilação coletiva de spin-isospin em que o excesso de nêutrons muda coerentemente as direções de seus spins e isospins sem mudar seus movimentos orbitais ($S = 1, T = 1$). O fato de que o movimento orbital dos nucleons não muda na excitação GT significa que nenhum momento angular orbital é transferido na reação ($L = 0$). Com isso, para o estado fundamental de um núcleo alvo com $J^\pi = 0^+$, o spin transferido $S = 1$ implica que a ressonância GT seja um estado com $J^\pi = 1^+$.

A ressonância de GT está, energeticamente, logo acima do estado isobárico análogo (IAS) do estado fundamental do núcleo alvo. Dois estados relacionados pelos operadores de abaixamento e levantamento de isospin, T_- e T_+ , são conhecidos como isobáricos análogos um do outro. Esses estados têm propriedades muito parecidas, já que suas funções de onda diferem apenas pela terceira componente do isospin total. Esse tipo de estado foi observado pela primeira vez por Anderson e Wong (1961) num experimento $^{51}\text{V}(p, n)^{51}\text{Cr}$ para $E_p = 14$ MeV. A reação (p, n) que excita o estado IAS não necessita de “spin-flip” ($S = 0$). Diferentemente da GT, o IAS é um pico pontiagudo no espectro de excitação (p, n) , porque ele tem o mesmo isospin do núcleo alvo enquanto que os estados vizinhos no núcleo residual têm isospins que diferem de uma unidade daquele do núcleo alvo; consequentemente, estes estados se acoplam fracamente com o IAS.

Existem na literatura diversos cálculos do IAS e da ressonância de GT no contexto da física nuclear não-relativística, baseados na aproximação da fase aleatória. Neste trabalho pretendemos estender a aproximação de fase aleatória relativística para excitações com troca de carga e, a partir dela, obter o estado isobárico análogo e a ressonância de Gamow-Teller para os núcleos alvo ^{48}Ca , ^{90}Zr e ^{208}Pb .

Capítulo 3

Hadrodinâmica Quântica e Aproximação do Campo Médio

3.1 Hadrodinâmica Quântica

Qualquer modelo de muitos corpos construído para descrever o núcleo atômico deve levar em conta as propriedades da interação nucleon-nucleon (NN). Apesar do sucesso dos modelos tradicionais baseados na equação de Schrödinger, eles são inadequados para um completo entendimento dos sistemas nucleares. O avanço da tecnologia de aceleradores tem permitido sondar a física que existe além da equação de Schrödinger, tal como experimentos envolvendo a troca de mésons dinâmicos, a modificação da estrutura de hádrons no interior do núcleo, etc. O desafio teórico, no entanto, é desenvolver técnicas que descrevam essa nova física, enquanto mantenham as propriedades gerais da mecânica quântica.

Como está estabelecido, a cromodinâmica quântica (QCD) de quarks e glúons é a teoria fundamental das interações fortes. Portanto seria natural procurarmos descrever essa nova física através dessa teoria. Embora isso seja desejável em princípio, existem muitas dificuldades na prática, porque os acoplamentos que aparecem na QCD são fortes para as escalas de distâncias envolvidas nos fenômenos nucleares. Embora significativo progresso tenha sido feito, previsões da QCD para escalas de energias relevantes para a estrutura nuclear não são possíveis ainda. Em contraposição, as descrições com graus de liberdade hadrônicos, tem desempenhado um importante papel para descrever o sistema nuclear.

Em 1974 Walecka e colaboradores [6] propuseram a Hadrodinâmica Quântica (QHD) para descrever o sistema nuclear, especificamente a matéria nuclear e de nêutrons. A QHD é um modelo quântico de campos relativísticos que descreve a interação entre o campo

bariônico ψ (prótons e nêutrons) através da troca de quanta de diversos campos mesônicos. Nesse modelo o ingrediente essencial é a simplicidade. O número de campos mesônicos incluídos é o menor possível e a natureza dos acoplamentos desses campos com o campo bariônico o mais simples possível permitido pela fenomenologia do sistema físico e das propriedades em que estamos interessados.

Como previsto por Yukawa, o méson π é a partícula mais apropriada para ser trocada numa interação entre dois nucleons. No entanto, veremos posteriormente que na aproximação de campo médio, utilizada para resolver o modelo, esse méson não contribui, porque tem $J = 0$ e uma paridade negativa. Embora um número par de píons tenha paridade positiva, incluir tais pares complicaria consideravelmente o modelo. Por outro lado, como uma aproximação, é introduzido o méson efetivo σ com números quânticos $J^\pi = 0^+$ e $T = 0$, que simula a contribuição do par de píons correlacionados. Esse méson é descrito pelo campo escalar iso-escalar $\sigma(x)$, e acopla-se ao campo bariônico através do termo $g_\sigma \bar{\psi}\psi\sigma$ para reproduzir a parte atrativa da interação NN . Embora tal méson não exista no espaço livre, isso não é essencial para a QHD, pois as propriedades dos diversos mésons incluídos nesse modelo, a saber, suas massas e constantes de acoplamento, são tratadas como parâmetros ajustáveis, fixados de modo a reproduzir certas propriedades nucleares criteriosamente escolhidas.

A parte repulsiva da força nuclear é obtida com a troca de mésons vetoriais. O mais importante é o méson ω com números quânticos $J^\pi = 1^-$ e $T = 0$ e descrito pelo campo vetorial iso-escalar $\omega^\mu(x)$. Esse méson é conhecido experimentalmente e tem massa $m_\omega \simeq 783 MeV$. Na aproximação de campo médio a componente temporal de um campo vetorial é fortemente repulsiva, como aliás acontece para o fóton, descrito pelo potencial vetorial $A^\mu(x)$. O méson ω acopla-se ao campo bariônico através do termo $g_\omega \bar{\psi}\gamma_\mu\psi\omega^\mu$ e o fóton através de $e\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1}{2}(1 + \tau_3)\psi A^\mu$.

A dependência de isospin da força nuclear é implementada através da troca de mésons ρ com números quânticos $J^\pi = 1^-$ e $T = 1$. Esse méson é descrito por um campo vetorial isovetorial $\vec{\rho}^\mu(x)$. A princípio o pión também deveria dar conta dessa dependência, mas como mencionamos anteriormente a contribuição desse méson na aproximação de campo médio é nula, devendo o méson ρ , nesse caso, cuidar dessa propriedade da interação NN .

A forma mais simples para o acoplamento do méson ρ ao campo bariônico seria através do termo $\frac{g_\rho}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \psi \cdot \vec{\rho}^\mu$.

Existem muitos outros mésons que poderiam ser incluídos para reproduzir quantitativamente a força nuclear mas, por simplicidade e para manter o menor número possível de parâmetros livres no modelo, iremos seguir a prática usual e omiti-los. De qualquer modo, eles são menos importante para descrever as propriedades do estado fundamental e das excitações que queremos estudar e o seu efeito nessas propriedades pode ser levado em conta através de um ajuste apropriado dos parâmetros do modelo. Em suma, as contribuições mais importantes para a interação NN e sua manifestação nos estados fundamentais e excitações nucleares em que estamos interessados aqui vem dos campos mesônicos $\sigma(x)$, $\omega^\mu(x)$, $\vec{\pi}(x)$ e $\vec{\rho}^\mu(x)$ e do campo do fóton $A^\mu(x)$ [7].

Nessa tese iremos, então, trabalhar com a seguinte densidade de lagrangeana para a QHD:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}. \quad (3.1)$$

A densidade de lagrangeana livre $\mathcal{L}_0$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - M)\psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3}g_2 \sigma^3 - \frac{1}{4}g_3 \sigma^4 \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \right) \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - m_\pi^2 \vec{\pi}^2) \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \vec{R}_{\mu\nu} \cdot \vec{R}^{\mu\nu} - m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu \right) \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

As massas do nucleon e dos mésons σ , ω , π e ρ são denotadas por M , m_σ , m_ω , m_π e m_ρ , respectivamente, e

$$\begin{aligned} \Omega^{\mu\nu} &= \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu \\ \vec{R}^{\mu\nu} &= \partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu - g_\rho (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu) \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \end{aligned} \quad (3.3)$$

são os tensores dos campos vetoriais. O caráter isovetorial de $\vec{\rho}_\mu$ e $\vec{\pi}$ está sendo indicado pelas setas. Os termos de auto-interação para o méson σ , proporcionais a σ^3 e σ^4 foram introduzido por Boguta e Bodmer [8] para reproduzir propriedades nucleares importantes como a incompressibilidade e a espessura da superfície de núcleos finitos. Eles são importantes, também, para dar conta da deformação nuclear [9]. Para o campo do fóton estamos usando o gauge de Feynman [10, Sec.3-2]. A densidade de lagrangeana de interação é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & -g_\sigma \bar{\psi} \psi \sigma - g_\omega \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \omega^\mu + \mathcal{L}_{\pi NN} \\ & - \frac{g_\rho}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \psi \cdot \vec{\rho}^\mu + \frac{f_\rho}{2M} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \vec{\rho}^\mu \cdot \vec{\tau} \psi \\ & - e \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \psi A^\mu \end{aligned} \quad (3.4)$$

numa notação padrão [1], com as constantes de acoplamento dadas por g_σ , g_ω , g_ρ , f_ω e f_ρ e a matriz de isospin de Pauli, por $\vec{\tau}$. É recomendável, no caso dos mésons vetoriais, acrescentar ao acoplamento direto o acoplamento derivativo, também conhecido como acoplamento tensorial [7]. Para o méson ω isso não é necessário porque a contribuição de um termo desse tipo é muito pequena [11]. Iremos mostrar que isso também acontece para o méson ρ no que se refere ao estado fundamental, mas não para excitações no canal spin-isospin como a de Gamow-Teller, que iremos tratar aqui. Por esse motivo tomamos, apenas para esse méson, um acoplamento misto (vetorial+tensorial) com os termos proporcionais a g_ρ e f_ρ em (3.4). Para a interação πN , dois tipos de acoplamento são possíveis: o pseudovetorial

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = -\frac{f_\pi}{m_\pi} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \vec{\tau} \psi \cdot \partial^\mu \vec{\pi}, \quad (3.5)$$

ou o pseudo-escalar

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = -ig_\pi \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \psi \cdot \vec{\pi}, \quad (3.6)$$

Para cálculos de reações (“on the energy shell”) os dois tipos são equivalentes desde que as constantes de acoplamento estejam relacionadas por

$$\frac{f_\pi}{m_\pi} = \frac{g_\pi}{2M} \quad (3.7)$$

Porém em cálculos de estrutura nuclear (“off the energy shell”) isso não ocorre e o acoplamento pseudovetorial leva a resultados melhores. Por esse motivo escolheremos o acoplamento pseudovetorial dado em (3.5). É verdade que essa escolha torna a densidade de lagrangeana não renormalizável. Contudo, adotaremos o ponto de vista de que essa é uma densidade de lagrangeana efetiva, no sentido que a usamos somente para gerar termos de troca de um bóson, com parâmetros ajustados para reproduzir os dados experimentais. Um tratamento rigoroso em teoria quântica de campos relativística exigiria a inclusão de termos de *polarização do vácuo* que são muito complicados e de difícil tratamento, especialmente para núcleos finitos [1]. Apesar da contribuição do pion ser nula na aproximação de campo médio ele foi incluído aqui porque pretendemos utilizar essa mesma densidade de lagrangeana no cálculo RPA onde sua contribuição é relevante. Notemos que, não se deve esperar que as constantes de acoplamento do modelo, ajustadas na aproximação de campo médio, tenham o mesmo valor que as respectivas constantes de acoplamento no espaço livre, pois vários efeitos de polarização da matéria nuclear irão afetar os seus valores. O mesmo vale para as suas massas. No entanto, para o pión, que não contribui, como veremos, na aproximação de campo médio, tomaremos os valores experimentais.

Podemos obter as equações de movimento para os diversos campos exigindo que a ação correspondente à densidade de lagrangeana (3.1) seja estacionária por variações arbitrárias de qualquer um dos campos $q_i = \psi, \sigma, \omega^\mu, \vec{\pi}, \vec{\rho}^\mu, A^\mu$, ou seja,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(x, t) = 0. \quad (3.8)$$

Isso nos leva às conhecidas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q_i)} = 0 \quad (3.9)$$

e, consequentemente, às equações de movimento para esta versão da QHD

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu (-i\partial^\mu + V^\mu) + V_d + M^*] \psi &= 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \sigma &= -g_\sigma \bar{\psi} \psi - g_2 \sigma^2 - g_3 \sigma^3 \\ \partial_\mu \Omega^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu &= g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m_\pi^2) \vec{\pi} &= \frac{f_\pi}{m_\pi} \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \vec{\tau} \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu \vec{R}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{\rho}^\nu &= \frac{g_\rho}{2} \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi - g_\rho (\vec{\rho}_\mu \times \vec{R}^{\nu\mu}) + \frac{f_\rho}{2M} \partial_\mu (\bar{\psi} \sigma^{\nu\mu} \vec{\tau} \psi) \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu &= e \bar{\psi} \gamma^\nu \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \psi\end{aligned}\quad (3.10)$$

onde

$$\begin{aligned}V^\mu &= g_\omega \omega^\mu + \frac{g_\rho}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu + e \frac{1}{2} (1 + \tau_3) A^\mu \\ V_d &= -\frac{f_\rho}{2M} \sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \vec{\rho}^\mu \cdot \vec{\tau} + \frac{f_\pi}{m_\pi} \gamma_5 \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} \\ M^* &= M + g_\sigma \sigma\end{aligned}\quad (3.11)$$

Com a invariância da densidade de lagrangeana (3.1)-(3.5) sob uma transformação de fase global e o teorema de Noether [1] obtemos a conservação da corrente bariônica, isto é,

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0. \quad (3.12)$$

Com esse resultado, aplicando o operador ∂_ν na equação para o méson ω em (3.10) levando em conta a anti-simetria de $\Omega^{\mu\nu}$ em (3.3) podemos simplificar aquela equação e então escrever

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\omega^2) \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \quad (3.13)$$

3.2 Aproximação de Campo Médio

Como as equações (3.10) são não lineares e estão acopladas, suas soluções exatas são extremamente complicadas. Embora as equações para os campos bosônicos livres possam ser resolvidas, não é possível levar em conta os termos de fonte perturbativamente pois as constantes de acoplamento são, em geral, grandes. No entanto, no interior do núcleo a densidade bariônica é suficientemente elevada para que possamos substituir esses termos de fonte pelos seus valores esperados no estado nuclear de interesse. Os campos bosônicos passam então a ser tratados como campos clássicos satisfazendo as equações assim obtidas. O campo bariônico permanece quantizado e satisfaz a primeira equação em (3.10) com os campos bosônicos substituídos por esses campos clássicos. Todo o sistema de equações deve ser resolvido de modo autoconsistente. Esse esquema é conhecido como *aproximação de campo médio* (RMFT) e será empregado aqui para resolvermos as equações de campo (3.10).

Como o estado fundamental de um núcleo finito estável é um estado estacionário, podemos admitir que existe um referencial (o referencial de repouso) onde os valores esperados das diversas densidades e correntes nos termos de fonte em (3.10) sejam independentes do tempo. As equações para os campos bosônicos na RMFT admitirão, portanto, soluções também independentes do tempo. A equação para o campo bariônico terá então, na RMFT, a forma de uma equação de Dirac com potenciais locais e estáticos e o operador de campo $\psi(x)$ pode ser expandido em termos das auto funções dessa equação como

$$\psi(x) = \sum_{\alpha} \left(a_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}(x) e^{-iE_{\alpha}^{(+)}t} + b_{\alpha}^{\dagger} \mathcal{V}_{\alpha}(x) e^{-iE_{\alpha}^{(-)}t} \right), \quad (3.14)$$

onde lembramos que o conjunto completo de soluções inclui, tanto auto funções de energia positiva ($E_{\alpha}^{(+)}$), como de energia negativa ($-E_{\alpha}^{(-)}$). Os coeficientes a_{α} e $b_{\alpha}^{\dagger}$ são interpretados, respectivamente, como operadores de aniquilação de partículas e criação de antipartículas no estado α .

Como já dissemos, na RMFT os operadores de campo bosônicos e suas fontes são substituídos por seus valores esperados no estado fundamental $|F\rangle$. Esse estado é construído com estados bariônicos de partícula-única α , com energia positiva, preenchidos até o nível de Fermi α_F , e não contém antibárions, ou seja

$$|F\rangle : \begin{cases} b_{\alpha}|F\rangle = 0 & , \text{ para qualquer estado } \alpha \\ a_{\alpha}^{\dagger}|F\rangle = 0 & , \text{ para } \alpha < \alpha_F \\ a_{\alpha}|F\rangle = 0 & , \text{ para } \alpha > \alpha_F \end{cases} \quad (3.15)$$

No cálculo dos valores esperados adotamos, para o produto dos operadores de campo, o ordenamento normal em relação ao vácuo (estado sem nucleons, mésons ou suas antipartículas) para eliminar os estados com energia negativa. Isso corresponde a dizer que iremos trabalhar na aproximação “no sea”, isto é, sem o mar de Dirac. As tentativas feitas para incluir os estados com energia negativa na aproximação de “1-loop” para a matéria nuclear, núcleos esféricos e deformados mostram que, com um apropriado reajuste dos parâmetros da densidade de lagrangeana, obtém-se resultados próximos aos da aproximação “no sea”. Na aproximação de “2-loops”, no entanto, sérios problemas são encontrados e nenhum resultado satisfatório é obtido [2, 3, e referências aí incluídas]. De qualquer forma nesse trabalho consideramos a RMFT como uma ferramenta fenomenológica que, por

definição, despreza os estados com energias negativas. Sendo assim, na RMFT o operador de campo do nucleon é expandido em termos apenas dos estados de partícula-única com energia positiva, isto é,

$$\psi(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}(x) e^{-iE_{\alpha}t} \quad (3.16)$$

onde, para simplificar a notação e por não ser mais necessária a distinção, escrevemos E_{α} em lugar de $E_{\alpha}^{(+)}$.

Implementando essa aproximação nas equações de campo (3.10) e eliminando os estados com energias negativas obtemos as equações da RMFT

$$\begin{aligned} [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta(\gamma_{\mu} V^{\mu} + V_d + M^*)] \mathcal{U}_{\alpha} &= E_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}(x) \\ (-\nabla^2 + m_{\sigma}^2) \sigma &= -g_{\sigma} \rho_s(x) - g_2 \sigma^2 - g_3 \sigma^3 \\ (-\nabla^2 + m_{\omega}^2) \omega^{\nu} &= g_{\omega} j^{\nu}(x) \\ (-\nabla^2 + m_{\pi}^2) \vec{\pi} &= \frac{f_{\pi}}{m_{\pi}} \vec{\rho}_{pv}(x) \\ (-\nabla^2 + m_{\rho}^2) \vec{\rho}^{\nu} - \partial_{\mu} \partial^{\nu} \vec{\rho}^{\mu} &= \frac{g_{\rho}}{2} \vec{j}_v^{\nu}(x) + \frac{f_{\rho}}{2M} \vec{j}_t^{\nu}(x) \\ &\quad + g_{\rho} [-(\vec{\rho}_{\mu} \times \vec{R}^{\nu\mu}) + \partial_{\mu} (\vec{\rho}^{\mu} \times \vec{\rho}^{\nu})] \\ -\nabla^2 A^{\nu} &= e j_p^{\nu}(x) \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho_s(x) &= \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \sum_{\alpha} \bar{\mathcal{U}}_{\alpha}(x) \mathcal{U}_{\alpha}(x) \\ j^{\nu}(x) &= \langle \bar{\psi} \gamma^{\nu} \psi \rangle = \sum_{\alpha} \bar{\mathcal{U}}_{\alpha}(x) \gamma^{\nu} \mathcal{U}_{\alpha}(x), \\ \vec{\rho}_{pv}(x) &= \langle \partial_i (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^i \vec{\tau} \psi) \rangle = \sum_{\alpha} \partial_i [\bar{\mathcal{U}}_{\alpha}(x) \gamma_5 \gamma^i \vec{\tau} \mathcal{U}_{\alpha}(x)], \\ \vec{j}_v^{\nu}(x) &= \langle \bar{\psi} \gamma^{\nu} \vec{\tau} \psi \rangle = \sum_{\alpha} \bar{\mathcal{U}}_{\alpha}(x) \gamma^{\nu} \vec{\tau} \mathcal{U}_{\alpha}(x), \\ \vec{j}_t^{\nu}(x) &= \langle \partial_i (\bar{\psi} \sigma^{\nu i} \vec{\tau} \psi) \rangle = \sum_{\alpha} \partial_i [\bar{\mathcal{U}}_{\alpha}(x) \sigma^{\nu i} \vec{\tau} \mathcal{U}_{\alpha}(x)], \\ j_p^{\nu}(x) &= \langle \bar{\psi} \gamma^{\nu} \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \psi \rangle = \sum_{\alpha} \bar{\mathcal{U}}_{\alpha}(x) \gamma^{\nu} \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \mathcal{U}_{\alpha}(x). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Os valores esperados são calculados no estado fundamental $|F\rangle$ definido em (3.15) e usando-se (3.16).

3.3 Simetrias na RMFT

Simetrias simplificam consideravelmente as equações de campo médio (3.17). Ao longo desse trabalho assumiremos que o estado fundamental nuclear $|F\rangle$ tem carga e paridade bem definidas além de simetrias por reversão temporal e por rotações. Esse é o exemplo do estado fundamental de um núcleo par-par, e especificamente o caso dos núcleos alvo que iremos estudar.

Com o estado $|F\rangle$ tendo carga bem definida podemos eliminar todos os objetos carregados, tais como $\pi^\pm$ e $\rho^\pm$, pois $\langle F|\pi^\pm|F\rangle = \langle F|\rho^\pm|F\rangle = 0$. Da mesma forma $\langle F|\tau^\pm|F\rangle = 0$. Consequentemente, restarão apenas as componentes π_3 , ρ_3 e τ_3 nas equações de movimento (3.17)-(3.18). Os termos não lineares em $\vec{\rho}$ também se anulam porque envolvem produtos vetoriais no espaço de isospin. Por outro lado se multiplicarmos a equação de Dirac em (3.17) por $\bar{\mathcal{U}}_\alpha\tau_3$, seu conjugado hermitiano por $\tau_3\mathcal{U}_\alpha$ e subtrairmos uma da outra, teremos

$$-i\partial_i(\bar{\mathcal{U}}_\alpha\gamma^i\tau_3\mathcal{U}_\alpha) + \bar{\mathcal{U}}_\alpha\gamma_\mu[\tau_3, V^\mu]\mathcal{U}_\alpha + \bar{\mathcal{U}}_\alpha[\tau_3, V_d]\mathcal{U}_\alpha = 0 \quad (3.19)$$

Como os mésons carregados não contribuem nessa aproximação, é óbvio que os comutadores acima se anulam, implicando em

$$\partial_i(\bar{\mathcal{U}}_\alpha\gamma^i\tau_3\mathcal{U}_\alpha) = 0 \quad (3.20)$$

e, portanto, na conservação de corrente

$$\partial_\nu j_{v3}^\nu(x) = 0 \quad (3.21)$$

Derivando a equação de movimento do ρ em relação a x_ν , levando em conta sua independência no tempo, a anti-simetria de $\sigma^{\nu\mu}$ e (3.21) obtemos que $\partial_\nu\rho_3^\nu = 0$, simplificando a equação desse méson. Com tudo isso, obtemos

$$\begin{aligned} [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta(\gamma_\mu V^\mu + V_d + M^*)]\mathcal{U}_\alpha &= E_\alpha\mathcal{U}_\alpha(x) \\ (-\nabla^2 + m_\sigma^2)\sigma &= -g_\sigma\rho_s(x) - g_2\sigma^2 - g_3\sigma^3 \\ (-\nabla^2 + m_\omega^2)\omega^\nu &= g_\omega j^\nu(x) \\ (-\nabla^2 + m_\pi^2)\pi_3 &= \frac{f_\pi}{m_\pi}\rho_{pv3}(x) \\ (-\nabla^2 + m_\rho^2)\rho_3^\nu &= \frac{g_\rho}{2}j_{v3}^\nu(x) + \frac{f_\rho}{2M}j_{t3}^\nu(x) \\ -\nabla^2 A^\nu &= ej_p^\nu(x) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Na seção 3.1 mencionamos que a contribuição do méson π na RMFT é nula. Sendo o pión uma partícula pseudo-escalar, o seu campo transforma-se por inversão espacial, $\mathcal{P}$, como segue

$$\mathcal{P}\vec{\pi}(\mathbf{x}, t)\mathcal{P}^\dagger = -\vec{\pi}(-\mathbf{x}, t) \quad (3.23)$$

Se admitirmos que o estado $|F\rangle$ tenha paridade definida, isto é

$$\mathcal{P}|F\rangle = \pm|F\rangle, \quad (3.24)$$

e, como $\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P} = 1$, também,

$$\mathcal{P}^\dagger|F\rangle = \pm|F\rangle, \quad (3.25)$$

temos

$$\langle F|\mathcal{P}\vec{\pi}(\mathbf{x}, t)\mathcal{P}^\dagger|F\rangle = \langle F|\vec{\pi}(\mathbf{x}, t)|F\rangle \quad (3.26)$$

e devido a (3.23),

$$\langle F|\mathcal{P}\vec{\pi}(\mathbf{x}, t)\mathcal{P}^\dagger|F\rangle = -\langle F|\vec{\pi}(-\mathbf{x}, t)|F\rangle. \quad (3.27)$$

Logo, comparando (3.26) com (3.27), obtemos a seguinte relação para o campo clássico do pión (valor esperado)

$$\vec{\pi}(\mathbf{x}, t) = -\vec{\pi}(-\mathbf{x}, t). \quad (3.28)$$

Com esse último resultado verificamos que a parte dependente do pión para o potencial clássico V_d em (3.11), isto é, $V_d^\pi(\mathbf{x}) = \frac{f_\pi}{m_\pi}\gamma_5\gamma_\mu\vec{\tau} \cdot \partial^\mu\vec{\pi}(\mathbf{x})$, se transforma por paridade como

$$PV_d^\pi(\mathbf{x})P^\dagger = V_d^\pi(\mathbf{x}). \quad (3.29)$$

Isso garante que as soluções de partícula-única $\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})$ tenham paridade definida,

$$P\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}) \doteq \gamma_0\mathcal{U}_\alpha(-\mathbf{x}) = \pm\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}). \quad (3.30)$$

Com (3.30) podemos mostrar que o termo de fonte para o pión em (3.18) é nulo, pois,

$$\begin{aligned} \partial_i[\bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})\gamma_5\gamma^i\tau_3\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})] &= [\partial_i\bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})]\gamma_5\gamma^i\tau_3\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}) + \bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})\gamma_5\gamma^i\tau_3[\partial_i\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})] \\ &= [\partial_i\bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})]P^\dagger P\gamma_5\gamma^i\tau_3\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}) + \bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})\gamma_5\gamma^i\tau_3P^\dagger P[\partial_i\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})] \\ &= -\partial_i[\bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})P^\dagger]\gamma_5\gamma^i\tau_3P\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}) - \bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})P^\dagger\gamma_5\gamma^i\tau_3\partial_i[P\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})] \\ &= -\partial_i[\bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})\gamma_5\gamma^i\tau_3\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Portanto, esse resultado demonstra que o pión não contribui na RMFT, bastando para isso que o estado fundamental nuclear $|F\rangle$ tenha paridade definida.

No apêndice B mostramos que as densidades bilineares $\bar{U}_\alpha(x)\gamma^\mu U_\alpha(x)$ e $\bar{U}_\alpha(x)\sigma^{\nu i}U_\alpha(x)$ se transformam por reversão temporal como

$$\bar{U}_{T\alpha}(x)\gamma^\mu U_{T\alpha}(x) = \begin{cases} \bar{U}_\alpha(x)\gamma^\mu U_\alpha(x) & , \quad \mu = 0 \\ -\bar{U}_\alpha(x)\gamma^\mu U_\alpha(x) & , \quad \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.32)$$

e

$$\bar{U}_{T\alpha}(x)\sigma^{\nu i}U_{T\alpha}(x) = \begin{cases} \bar{U}_\alpha(x)\sigma^{\nu i}U_\alpha(x) & , \quad \nu = 0 \\ -\bar{U}_\alpha(x)\sigma^{\nu i}U_\alpha(x) & , \quad \nu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.33)$$

onde $\bar{U}_{T\alpha}(x)$ denota o espinor transformado por reversão temporal. Lembramos ainda que, sendo a matriz de Pauli τ_3 real, as densidades $\bar{U}_\alpha(x)\gamma^\mu\tau_3 U_\alpha(x)$ e $\bar{U}_\alpha(x)\sigma^{\nu i}\tau_3 U_\alpha(x)$ se transformam da mesma forma que as densidades acima. Por outro lado a simetria por reversão temporal do estado $|F\rangle$ significa que, se o estado U_α estiver ocupado, o estado $U_{T\alpha}$ também o estará. Sendo assim todas as componentes espaciais ($\mu = 1, 2, 3$) das correntes em (3.18) são nulas. Isso permite eliminar essas componentes para o ω , o ρ e o fóton, em (3.17), obtendo-se

$$\begin{aligned} [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta(\gamma_0 V^0 + V_d + M^*)]U_\alpha &= E_\alpha U_\alpha(x) \\ (-\nabla^2 + m_\sigma^2)\sigma &= -g_\sigma \rho_s(x) - g_2 \sigma^2 - g_3 \sigma^3 \\ (-\nabla^2 + m_\omega^2)\omega^0 &= g_\omega j^0(x) \\ (-\nabla^2 + m_\rho^2)\rho_3^0 &= \frac{g_\rho}{2} j_{\nu 3}^0(x) + \frac{f_\rho}{2M} j_{t 3}^0(x) \\ -\nabla^2 A^0 &= e j_p^0(x) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Com a simetria esférica de $|F\rangle$ temos

$$\mathcal{R}|F\rangle = |F\rangle \quad (3.35)$$

onde $\mathcal{R}$ é um operador unitário que representa a rotação R em segunda quantização. Além disso, no apêndice C mostramos que as densidade escalar, vetorial e tensorial se transformam por rotações como

$$\mathcal{R}^\dagger(R)\bar{\psi}(x)\psi(x)\mathcal{R}(R) = \bar{\psi}(Rx)\psi(Rx),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^\dagger(R)\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)\mathcal{R}(R) &= \bar{\psi}(Rx)\gamma^0\psi(Rx), \text{ e} \\ \mathcal{R}^\dagger(R)\bar{\psi}(x)\sigma^{0i}\psi(x)\mathcal{R}(R) &= \bar{\psi}(Rx)\sigma^{0j}\psi(Rx)R_j^i,\end{aligned}\quad (3.36)$$

Substituindo (3.35) em (3.36) obtemos

$$\begin{aligned}\langle F|\bar{\psi}(x)\psi(x)|F\rangle &= \langle F|\bar{\psi}(Rx)\psi(Rx)|F\rangle, \\ \langle F|\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)|F\rangle &= \langle F|\bar{\psi}(Rx)\gamma^0\psi(Rx)|F\rangle, \text{ e} \\ \langle F|\bar{\psi}(x)\sigma^{0i}\psi(x)|F\rangle &= \langle F|\bar{\psi}(Rx)\sigma^{0j}\psi(Rx)|F\rangle R_j^i,\end{aligned}\quad (3.37)$$

As duas primeiras expressões mostram que, em cada caso, a correspondente densidade no ponto rodado tem o mesmo valor daquela no ponto não rodado. Isso será possível somente se a dependência espacial dessas densidades for puramente radial. A terceira expressão mostra, por sua vez, que, se aplicarmos ao vetor $\langle F|\bar{\psi}(Rx)\sigma^{0j}\psi(Rx)|F\rangle$ a rotação inversa a R , obteremos o vetor original $\langle F|\bar{\psi}(x)\sigma^{0i}\psi(x)|F\rangle$. Isso só é possível (com R arbitrário) se esse vetor depender apenas de $r = |\mathbf{x}|$ e só tiver componente na direção $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$.

Implementando esses últimos resultados nas densidades restantes em (3.34), obtemos

$$\begin{aligned}[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta(\gamma_0 V^0 + V_d + M^*)]\mathcal{U}_\alpha &= E_\alpha \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}) \\ (-\nabla^2 + m_\sigma^2)\sigma &= -g_\sigma \rho_s(r) - g_2 \sigma^2 - g_3 \sigma^3 \\ (-\nabla^2 + m_\omega^2)\omega^0 &= g_\omega \rho_v(r) \\ (-\nabla^2 + m_\rho^2)\rho_3^0 &= \frac{g_\rho}{2} \rho_3(r) + \frac{f_\rho}{2M} \rho_t(r) \\ -\nabla^2 A^0 &= e \rho_p(r)\end{aligned}\quad (3.38)$$

onde

$$\begin{aligned}\rho_v(r) &\equiv j^0(r) \\ \rho_3(r) &\equiv j_{v3}^0(r) \\ \rho_t(r) &\equiv j_{t3}^0(r) \\ \rho_p(r) &\equiv j_p^0(r)\end{aligned}\quad (3.39)$$

com

$$V^0 = g_\omega \omega^0 + \frac{g_\rho}{2} \tau_3 \rho_3^0 + e \frac{1}{2} (1 + \tau_3) A^0,$$

$$\begin{aligned} V_d &= -\frac{f_\rho}{2M} \sigma_{0i} \partial^i \rho_3^0 \tau_3 \quad \text{e} \\ M^* &= M + g_\sigma \sigma \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como podemos ver, a dependência radial das densidades faz com que os campos mesônicos e do fóton também tenham a mesma dependência. Nesse caso a equação para o espinor $\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})$ é uma equação de Dirac com potenciais centrais que, além disso, conserva a paridade. Suas soluções têm portanto a forma [1]

$$\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathcal{U}_{n\kappa m t}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} i[G_a(r)/r]\Phi_{\kappa m} \\ -[F_a(r)/r]\Phi_{-\kappa m} \end{pmatrix} \zeta_t \quad (3.41)$$

Os números quânticos são definidos por $\{\alpha\} = \{a; m\} = \{n, \kappa, t; m\}$ onde n é o número quântico principal, $\kappa = \pm(j + 1/2)$ para $j = l \pm 1/2$, m é a projeção do momento angular total j e t é a projeção do isospin ($t = 1/2$ para prótons e $t = -1/2$ para neutrons). $G_a(r)$ e $F_a(r)$ são as funções de onda radiais, ζ_t é o iso-espinor de duas componetes e $\Phi_{\kappa m}$ são os harmônicos esféricos espinoriais

$$\Phi_{\kappa m} = \sum_{m_l m_s} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{lm_l} \chi_{m_s} \quad (3.42)$$

$$j = |\kappa| - \frac{1}{2}, \quad l_\kappa = \begin{cases} \kappa, & \kappa > 0 \\ -(\kappa + 1), & \kappa < 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Y_{lm_l} são os harmônicos esféricos usuais e χ_{m_s} o espinor de duas componentes de Pauli.

Substituindo o espinor (3.41) na equação de Dirac em (3.38) obtemos as equações para as funções de ondas radiais $G_a(r)$ e $F_a(r)$, dadas por

$$\begin{aligned} (M^* + V^0)G_a - \left(\partial_r - \frac{\kappa}{r}\right)F_a - V_1 F_a &= E_a G_a \\ \left(\partial_r + \frac{\kappa}{r}\right)G_a - V_1 G_a + (V^0 - M^*)F_a &= E_a F_a \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde V^0 e M^* estão definidos em (3.40) e

$$V_1(r) = \frac{f_\rho}{2M} 2t \partial_r \rho_3^0(r). \quad (3.45)$$

As densidades ρ_s , ρ_v , ρ_3 , ρ_t e ρ_p ficam

$$\begin{aligned}\rho_s(r) &= \sum_a^{occ} \frac{2j_a + 1}{4\pi r^2} [|G_a(r)|^2 - |F_a(r)|^2], \\ \rho_v(r) &= \sum_a^{occ} \frac{2j_a + 1}{4\pi r^2} [|G_a(r)|^2 + |F_a(r)|^2], \\ \rho_3(r) &= \sum_a^{occ} \frac{2j_a + 1}{4\pi r^2} 2t [|G_a(r)|^2 + |F_a(r)|^2], \\ \rho_t(r) &= \sum_a^{occ} \frac{2j_a + 1}{4\pi} 2t \, 2\partial_r \left[\frac{1}{r^2} G_a(r) F_a(r) \right], \\ \rho_p(r) &= \sum_a^{occ} \frac{2j_a + 1}{4\pi r^2} (t + \frac{1}{2}) [|G_a(r)|^2 + |F_a(r)|^2],\end{aligned}\tag{3.46}$$

Nas somas acima o limite superior *occ* indica que devemos somar sobre todos os estados ocupados.

As equações para os campos mesônicos e para o fóton podem ser escritas na forma compacta

$$\left(-\partial_r^2 - \frac{2}{r} \partial_r + m_\phi^2 \right) \phi(r) = s_\phi(r),\tag{3.47}$$

onde m_ϕ é a massa dos mésons para $\phi = \sigma, \omega, \rho$ e nula para o fóton. Os termos de fonte $s_\phi(r)$ são,

$$s_\phi(r) = \begin{cases} -g_\sigma \rho_s(r) - g_2 \sigma^2 - g_3 \sigma^3 & \text{para o méson } \sigma \\ g_\omega \rho_v(r) & \text{para o méson } \omega \\ \frac{g_\rho}{2} \rho_3(r) + \frac{f_\rho}{2M} \rho_t(r) & \text{para o méson } \rho \\ e \rho_p(r) & \text{para o fóton} \end{cases}\tag{3.48}$$

As equações de Klein-Gordon (3.47) podem ser resolvidas usando o método de funções de Green,

$$\phi(r) = \int_0^\infty r'^2 G_\phi(r, r') s_\phi(r') dr'\tag{3.49}$$

Para os campos massivos,

$$G_\phi(r, r') = \frac{1}{2m_\phi} \frac{1}{rr'} \left(e^{-m_\phi|r-r'|} - e^{-m_\phi|r+r'|} \right),\tag{3.50}$$

e, para o fóton,

$$G_p(r, r') = \begin{cases} 1/r & \text{para } r > r' \\ 1/r' & \text{para } r < r' \end{cases}\tag{3.51}$$

Neste trabalho, procederemos assim para o fóton. Porém para os mésons usaremos o método descrito na seção seguinte.

3.4 Soluções da RMFT em Bases de Oscilador Harmônico

Para as aplicações que pretendemos fazer, é interessante trabalharmos com soluções de partícula única da RMFT discretizadas. Uma das maneiras de discretizar estas soluções é expandir os diversos campos que aparecem nesse modelo numa base discreta. Nesse trabalho resolveremos as equações de Dirac radiais para o nucleon (3.44) e as equações de Klein-Gordon para os campos mesônicos (3.47) expandindo as funções de onda radiais em (3.41) e os campos $\phi(r)$ em (3.47) num conjunto completo de autofunções de oscilador harmônico, seguindo o método de P. Ring e colaboradores [9] que passamos a descrever.

Ao resolvermos as equações da RMFT nessa nova base é impraticável incluímos todos os auto-estados de oscilador, por isso truncamos a base até um certo valor finito de camadas de oscilador $N_{\max}$. Para as funções de onda de férmions esse valor máximo é dado por N_F e para os campos mesônicos por N_B . Os valores de N_F e N_B são determinados de modo que a convergência seja alcançada para os orbitais mais baixos, que estarão ocupados em $|F\rangle$.

Iniciaremos por expandir as funções de onda radiais $G_a(r)$ e $F_a(r)$, separadamente, através das funções radiais $R_{nl}(r)$ de um potencial de oscilador harmônico esférico com frequência $\hbar\omega_0$ e comprimento de oscilador $b_0 = \sqrt{\hbar/M\omega_0}$,

$$\begin{aligned} G_a(r) &= \sum_{n=1}^{n_{\max}} G_n^{(a)} R_{nl_a}(r) \\ F_a(r) &= \sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{n}_{\max}} F_{\tilde{n}}^{(a)} R_{\tilde{n}\tilde{l}_a}(r) \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde $l_a = l_\kappa$ e $\tilde{l}_a = l_{-\kappa}$ com l_κ definido em (3.43). $n_{\max}$ e $\tilde{n}_{\max}$ são os números quânticos radiais máximos que os estados da base do oscilador podem assumir, e são determinados pelo número máximo de camadas $N_F = 2(n_{\max} - 1) + l_a$ e $\tilde{N}_F = 2(\tilde{n}_{\max} - 1) + \tilde{l}_a$. As funções de onda $R_{nl}(r)$ e suas propriedades estão definidas no apêndice D. Conforme é discutido em [9] é importante que o número máximo de camadas $\tilde{N}_{\max}$, com que as componentes pequenas são expandidas, seja maior que o número máximo $N_{\max}$ com que as componentes

grandes são expandidas. Isso pode ser visto se eliminarmos as componentes pequenas na equação de Dirac (3.44). Então teremos a seguinte equação para os coeficientes das componentes grandes,

$$\sum_{n'}^{n_{\max}} \left\{ - \sum_{\tilde{n}}^{\tilde{n}_{\max}} \sum_{\tilde{n}'}^{\tilde{n}'_{\max}} \langle n | (\partial_r - \frac{\kappa}{r} + V_1) | \tilde{n} \rangle \langle \tilde{n} | \frac{1}{E_s + M^* - V^0} | \tilde{n}' \rangle \langle \tilde{n}' | (\partial_r + \frac{\kappa}{r} - V_1) | n' \rangle + \langle n | M^* + V^0 | n' \rangle \right\} G_{n'}^{(a)} = E_a G_n^{(a)}. \quad (3.53)$$

Evidentemente não podemos truncar a soma das pequenas componentes em $\tilde{n}$ e $\tilde{n}'$ para $\tilde{n}$ ou $\tilde{n}' < n_{\max}$ porque isso faria com que uma contribuição não nula do termo de energia cinética, que acopla n com $\tilde{n}$, fosse perdida. Esse problema pode ser contornado se escolhermos para a soma em n o valor máximo $N_{\max}$ e para a soma em $\tilde{n}$ o valor máximo $\tilde{N}_{\max} = N_{\max} + 1$.

Inserindo as expansões (3.52) nas equações radiais (3.44), usando as relações de ortogonalidade das funções de onda $R_{nl_a}(r)$ e a propriedade

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n,\tilde{n}'} &\doteq - \int_0^\infty dr R_{nl_a} \left(\partial_r - \frac{\kappa}{r} + V_1 \right) R_{\tilde{n}'l_a} \\ &= - \int_0^\infty dr \left[\partial_r (R_{nl_a} R_{\tilde{n}'l_a}) \right. \\ &\quad \left. - R_{\tilde{n}'l_a} (\partial_r R_{nl_a}) + \left(-\frac{\kappa}{r} + V_1 \right) R_{nl_a} R_{\tilde{n}'l_a} \right] \\ &= \int_0^\infty dr R_{\tilde{n}'l_a} \left(\partial_r + \frac{\kappa}{r} - V_1 \right) R_{nl_a} \doteq \mathcal{B}_{\tilde{n}',n} \end{aligned} \quad (3.54)$$

obtemos o seguinte problema de autovalores para uma matriz real e simétrica :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{n,n'} & \mathcal{B}_{n,\tilde{n}'} \\ \mathcal{B}_{\tilde{n}',n} & \mathcal{C}_{\tilde{n},\tilde{n}'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n'}^{(a)} \\ F_{\tilde{n}'}^{(a)} \end{pmatrix} = E_a \begin{pmatrix} G_n^{(a)} \\ F_{\tilde{n}}^{(a)} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,n'} &= \int_0^\infty dr R_{nl_a} (M^* + V^0) R_{n'l_a} \\ \mathcal{B}_{n,\tilde{n}'} &= - \int_0^\infty dr R_{nl_a} \left[\partial_r - \frac{\kappa}{r} + V_1 \right] R_{\tilde{n}'l_a} \\ \mathcal{C}_{\tilde{n},\tilde{n}'} &= - \int_0^\infty dr R_{\tilde{n}l_a} (M^* - V_0) R_{\tilde{n}'l_a} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Note que a resolução das equações radiais (3.44) se transforma na diagonalização da matriz em (3.55).

As densidades ρ_s , ρ_v , ρ_3 , ρ_t e ρ_p nessa base são dadas por

$$\begin{aligned}\rho_s(r) &= \sum_a^{\text{occ}} \frac{2j_a + 1}{4\pi r^2} \rho_{aa}^{(s)}(r), \\ \rho_v(r) &= \sum_a^{\text{occ}} \frac{2j_a + 1}{4\pi r^2} \rho_{aa}^{(v)}(r), \\ \rho_3(r) &= \sum_a^{\text{occ}} \frac{2j_a + 1}{4\pi r^2} 2t \rho_{aa}^{(v)}(r), \\ \rho_t(r) &= 2 \sum_a^{\text{occ}} \frac{2j_a + 1}{4\pi r^2} 2t \rho_{aa}^{(t)}(r), \\ \rho_p(r) &= \sum_a^{\text{occ}} \frac{2j_a + 1}{4\pi r^2} (t + \frac{1}{2}) \rho_{aa}^{(v)}(r).\end{aligned}\quad (3.57)$$

onde

$$\begin{aligned}\rho_{aa}^{(s)}(r) &= \sum_{nn'}^{n_{\max}} G_n^{(a)} G_{n'}^{(a)} R_{nl_a} R_{n'l'_a} - \sum_{\tilde{n}\tilde{n}'}^{\tilde{n}_{\max}} F_{\tilde{n}}^{(a)} F_{\tilde{n}'}^{(a)} R_{\tilde{n}\tilde{l}_a} R_{\tilde{n}'\tilde{l}'_a}, \\ \rho_{aa}^{(v)}(r) &= \sum_{nn'}^{n_{\max}} G_n^{(a)} G_{n'}^{(a)} R_{nl_a} R_{n'l'_a} + \sum_{\tilde{n}\tilde{n}'}^{\tilde{n}_{\max}} F_{\tilde{n}}^{(a)} F_{\tilde{n}'}^{(a)} R_{\tilde{n}\tilde{l}_a} R_{\tilde{n}'\tilde{l}'_a}, \\ \rho_{aa}^{(t)}(r) &= \sum_n^{n_{\max}} \sum_{\tilde{n}}^{\tilde{n}_{\max}} G_n^{(a)} F_{\tilde{n}}^{(a)} \left\{ -\frac{2}{r} R_{nl_a} R_{\tilde{n}\tilde{l}_a} + (\partial_r R_{nl_a}) R_{\tilde{n}\tilde{l}_a} + R_{nl_a} (\partial_r R_{\tilde{n}\tilde{l}_a}) \right\}.\end{aligned}\quad (3.58)$$

Para os campos de mésons usaremos as funções de onda do oscilador em (D.5) com momento angular nulo e, para que esses campos e seus respectivos termos de fonte tenham a mesma dependência assintótica em r , a saber, $\sim \exp[-(r/b_0)^2]$, usaremos para os mésons o comprimento de oscilador $b_B = b_0/\sqrt{2}$. Escrevemos, então,

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{n_B} \phi_n R_n(r) \\ s_\phi(r) &= \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{n_B} s_n^\phi R_n(r)\end{aligned}\quad (3.59)$$

De maneira análoga ao que foi feito para as soluções radiais para o campo do nucleon, iremos inserir (3.59) nas equações de Klein-Gordon (3.47) obtendo um conjunto de equações lineares não homogêneas

$$\sum_{n'=1}^{n_B} \mathcal{H}_{nn'} \phi_{n'} = s_n^\phi \quad (3.60)$$

com a matriz

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{nn'} &= \delta_{nn'} \left\{ b_B^{-2} [2(n-1) + 3/2] + m_\phi^2 \right\} + \delta_{n+1n'} b_B^{-2} \sqrt{n(n+1/2)} \\ &\quad + \delta_{nn'+1} b_B^{-2} \sqrt{n'(n'+1/2)}\end{aligned}\quad (3.61)$$

Vemos que a equação de Klein-Gordon (3.47) se reduz à equação matricial (3.60), que pode ser resolvida por inversão. Essa maneira de resolver as equações de Klein-Gordon não é muito eficiente para o campo coulombiano; por tratar-se de um campo com um alcance infinito, a convergência para o parâmetro de truncamento n_B é muito lenta. Para esse caso é preferível empregar o método de funções de Green discutido na seção anterior.

As equações da RMFT, (3.55), (3.60) e, para o fóton, (3.49) são resolvidas iterativamente até obter-se auto-consistência. Os valores de N_F e N_B são escolhidos como os menores possíveis que permitam alcançar essa autoconsistência. Isso é testado numericamente através da convergência dos campos bosônicos. Utilizamos o código FORTRAN elaborado por P. Ring e colaboradores [24] para realizar os cálculos da RMFT para o ^{48}Ca , ^{90}Zr e ^{208}Pb nesses moldes.

Capítulo 4

Aproximação de Hartree

Vimos no capítulo anterior que a dificuldade para resolver as equações (3.10) pode ser contornada com a RMFT. Por outro lado, existe um formalismo empregado para descrever sistemas quânticos de muitos corpos não relativísticos, conhecido como método de funções de Green [12], que pode ser estendido para o caso relativístico da QHD [1]. Nesse formalismo os observáveis de interesse do sistema são obtidos de quantidades conhecidas como funções de Green ou propagadores das partículas envolvidas no sistema. Além disso, a grande vantagem desse método é que os propagadores interagentes podem ser expandidos em termos dos propagadores não-interagentes.

Este capítulo está dividido em três seções. Na primeira seção, iremos introduzir as regras de Feynman para a QHD. Na segunda, a aproximação de Hartree relativística. Na última discutiremos a equivalência dessa aproximação com a RMFT.

4.1 Regras de Feynman para a QHD

Como a QHD é um modelo com acoplamentos fortes, sabemos que, ao expandir os propagadores interagentes, os termos de ordem mais baixa não podem descrever adequadamente o sistema. Por esse motivo necessitamos recorrer a um método sistemático para obter o n -ésimo termo na expansão dos propagadores interagentes. Isso pode ser feito com expansões diagramáticas dos propagadores do modelo através das regras de Feynman, que exibiremos a seguir. Os ingredientes básicos dessas regras são os propagadores livres ou não-interagentes do nucleon $G_{\alpha\beta}^0(x-y)$ e dos mésons σ , ω , π e ρ , $D_{\sigma}^0(x-y)$, $D_{\omega}^{0\mu\nu}(x-y)$, $D_{\pi}^{0a,b}(x-y)$ e $D_{\rho}^{0\mu\nu a,b}(x-y)$, respectivamente, além daquele do fóton $D_{\gamma}^{0\mu\nu}(x-y)$. Esses

propagadores são definidos abaixo :

$$\begin{aligned}
 iG_{\alpha\beta}^0(x-y) &\equiv \langle \Psi_0 | T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] | \Psi_0 \rangle = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G_{\alpha\beta}^0(k) \\
 iD_\sigma^0(x-y) &\equiv \langle \Psi_0 | T[\sigma(x)\sigma(y)] | \Psi_0 \rangle \\
 iD_\omega^{\mu\nu}(x-y) &\equiv \langle \Psi_0 | T[\omega^\mu(x)\omega^\nu(y)] | \Psi_0 \rangle = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} D_\omega^{\mu\nu}(k) \\
 iD_{\pi\,a,b}^0(x-y) &\equiv \langle \Psi_0 | T[\pi_a(x)\pi_b(y)] | \Psi_0 \rangle = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} D_{\pi\,a,b}^0(k) \\
 iD_{\rho\,a,b}^{0\,\mu\nu}(x-y) &\equiv \langle \Psi_0 | T[\rho_a^\mu(x)\rho_b^\nu(y)] | \Psi_0 \rangle = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} D_{\rho\,a,b}^{0\,\mu\nu}(k) \\
 iD_\gamma^{0\,\mu\nu}(x-y) &\equiv \langle \Psi_0 | T[A^\mu(x)A^\nu(y)] | \Psi_0 \rangle = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} D_\gamma^{0\,\mu\nu}(k) \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

onde $|\Psi_0\rangle$ representa o estado fundamental não interagente, com os estados de nucleons livres ocupados até o nível de Fermi e sem nenhum méson. Os operadores de campo estão na representação de interação e $T[\dots]$ denota o produto ordenado no tempo ou produto cronológico. Os índices romanos, a e b , referem-se às componentes do isospin.

Os propagadores livres no espaço dos momentos que aparecem em (4.1) são, para o nucleon [1, Sec. 5.1]

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta}^0(k) &= (\gamma_\mu k^\mu + M)_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{k_\lambda^2 - M^2 + i\epsilon} + \frac{i\pi}{E^0(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |k|) \right] \\
 &\equiv G_F^0(k)_{\alpha\beta} + G_D^0(k)_{\alpha\beta} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

e para os mésons [1, Secs. 5.1, 7.4 e 7.6] e o fóton [10, Sec. 3.2.2]

$$\begin{aligned}
 D_\omega^{\mu\nu}(k) &= \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m_\omega^2} \right) \frac{1}{k_\lambda^2 - m_\omega^2 + i\epsilon} \\
 D_{\pi\,a,b}^0(k) &= \frac{\delta_{ab}}{k_\lambda^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \\
 D_{\rho\,a,b}^{0\,\mu\nu}(k) &= \delta_{ab} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m_\rho^2} \right) \frac{1}{k_\lambda^2 - m_\rho^2 + i\epsilon} \\
 D_\gamma^{0\,\mu\nu}(k) &= \frac{-g^{\mu\nu}}{k_\lambda^2 + i\epsilon} \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

com $E^0(k) = (\mathbf{k}^2 + M^2)^{\frac{1}{2}}$. Esses propagadores são obtidos com as equações homogêneas associadas a (3.10). Alguns desses propagadores estão calculados detalhadamente em [13]; os demais são obtidos analogamente. Podemos notar que o propagador do méson σ no espaço dos momentos não aparece em (4.3). Isso acontece porque foram introduzidos termos de

auto-interação para este méson na densidade de lagrangeana livre (3.2) e, consequentemente, a forma do seu propagador não é mais tão simples como para os demais mésons, como veremos na seção 4.3.

Os propagadores interagentes são definidos em termos de produtos cronológicos de forma semelhante às expressões (4.1) mas, agora, o estado fundamental não interagente $|\Psi_0\rangle$ é substituído pelo estado fundamental interagente $|\Psi\rangle$ e os operadores de campo passam para a descrição de Heisenberg. Os propagadores interagentes podem ser expandidos em série de propagadores livres através dos teoremas de Wick* e de Gell-Mann e Low [12, Cap. 3]) cuja expressão diagramática nos permite introduzir as regras de Feynman para esse modelo. Para essa expansão precisamos da densidade de hamiltoniana de interação. Na ausência de acoplamentos derivativos, essa pode ser simplesmente substituída pela densidade de lagrangeana de interação com o sinal trocado. No nosso caso (Ver (3.4) e (3.5)) usamos acoplamentos derivativos para o π e o ρ . As complicações adicionais decorrentes disso podem ser contornadas conforme mostramos no apêndice A.

Abaixo seguem as regras de Feynman que obtemos para o termo de ordem n na expansão do propagador interagente do nucleon $G_{\alpha\beta}(x, y)$ na QHD:

1. Os propagadores livres $G_{\alpha\beta}^0$, D_σ^0 , $D_\omega^{\mu\nu}$, $D_{\pi a,b}^0$, $D_{\rho a,b}^{0\mu\nu}$ e $D_\gamma^{0\mu\nu}$ são representados por linhas como mostra a Fig. (4.1)

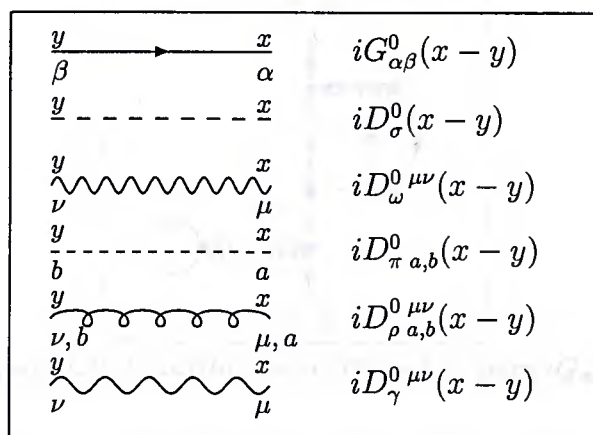


Figura 4.1: Propagadores Livres.

*É bom lembrar que o ordenamento normal que aparece na expansão de Wick é feito em relação a $|\Psi_0\rangle$.

2. Os vértices de interação estão representados na Fig. (4.2) e a rotulagem dos índices espinoriais na Fig. (4.3)

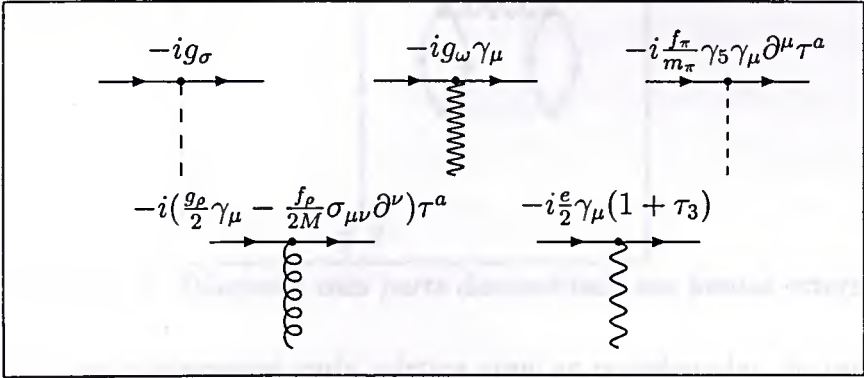


Figura 4.2: Vértices da QHD. As derivadas parciais agem nos propagadores dos mésons.

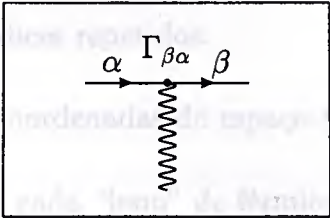


Figura 4.3: Rotulagem dos índices espinoriais nos vértices.

3. Desenhemos todos diagramas topologicamente distintos com n vértices ($n = 0, 2, 4, \dots$) e $n + 1$ linhas de nucleon orientadas e contínuas, com uma delas ligando os pontos externos y e x , como na Fig. (4.4).

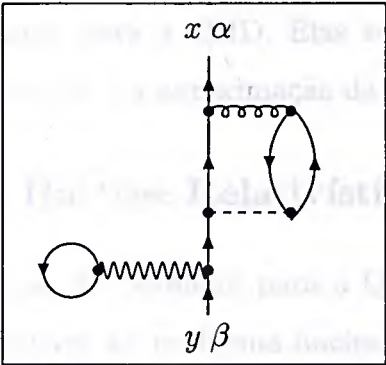


Figura 4.4: Contribuição de 6ª ordem para $iG_{\alpha\beta}(x, y)$.

- 4. Completamos os vértices ligando-os com linhas de mésons e fótons.
- 5. Não incluímos diagramas com partes desconectadas aos pontos externos, como o representado na Fig. (4.5).

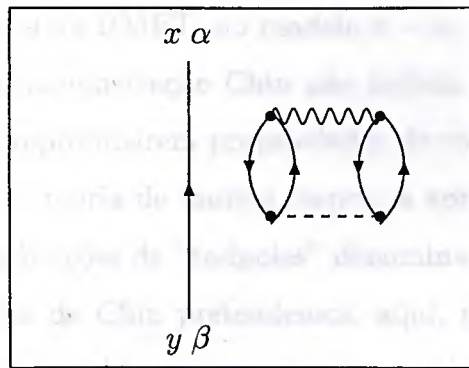


Figura 4.5: Diagrama com parte desconectada aos pontos externos.

6. Rotulamos completamente cada vértice com as coordenadas de espaço-tempo e os índices espinoriais[†] ($\alpha, \beta, \dots$), de Lorentz ($\mu, \nu, \dots$) e de isospin ($a, b, \dots$).
7. Somamos sobre todos os índices repetidos.
8. Integramos sobre todas as coordenadas do espaço-tempo nos vértices internos.
9. Incluímos o fator (-1) para cada “loop” de férmions.
10. Os propagadores de nucleon com tempos iguais, são interpretados como:

$$G_{\alpha\beta}^0(xt, xt^+). \quad (4.4)$$

onde t^+ indica um instante infinitesimalmente posterior a t .

Estas são as regras de Feynman para a QHD. Elas serão de grande importância para obtermos a aproximação de Hartree e a aproximação da fase aleatória relativísticas.

4.2 Aproximação de Hartree Relativística

Agora que conhecemos as regras de Feynman para a QHD, podemos aplicar as técnicas padrões de expansões perturbativas ao problema nuclear. Quando expandimos os propagadores interagentes em série de propagadores livres é muito complicado somarmos todas as contribuições que aparecem. Daí surge a necessidade de encontrarmos um método sistemático que selecione uma classe de diagramas relevantes e torne possível fazermos a soma de todos estes termos. Em 1976, Chin [14, 15] mostrou que os diagramas necessários para

[†]Note que no presente caso esses índices referem-se, tanto ao espinor de Dirac, como ao de isospin.

obter os mesmos resultados da RMFT, no modelo $\sigma - \omega$, são os diagramas de “tadpoles” (Veja Fig. (4.6)). Nesta demonstração Chin não incluiu os termos de auto-interação do méson σ , essenciais para reproduzirem propriedades de superfície do núcleo atômico. Por outro lado, no contexto de teoria de muitos corpos, a aproximação que consiste em levar em conta apenas as contribuições de “tadpoles” denomina-se aproximação de Hartree.

Baseado nos resultados de Chin pretendemos, aqui, manter apenas os diagramas de “tadpoles” para o propagador do nucleon, ou seja, o primeiro da Fig. (4.6). Usando as

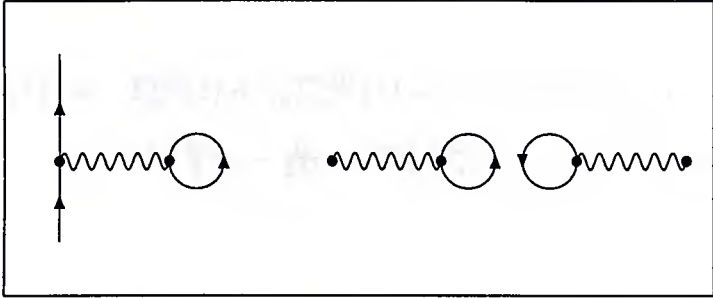


Figura 4.6: Contribuições de “tadpoles” de segunda ordem para os propagadores do nucleon e dos mésons ou do fóton. Para simplificar, de agora em diante a linha ondulada estará representando, indistintamente, os propagadores dos mésons σ , ω , π e ρ e do fóton.

regras de Feynman da QHD e nos limitando apenas a diagramas de “tadpoles” obtemos a equação diagramática mostrada na Fig. (4.7) e a seguinte expressão analítica para o propagador do nucleon

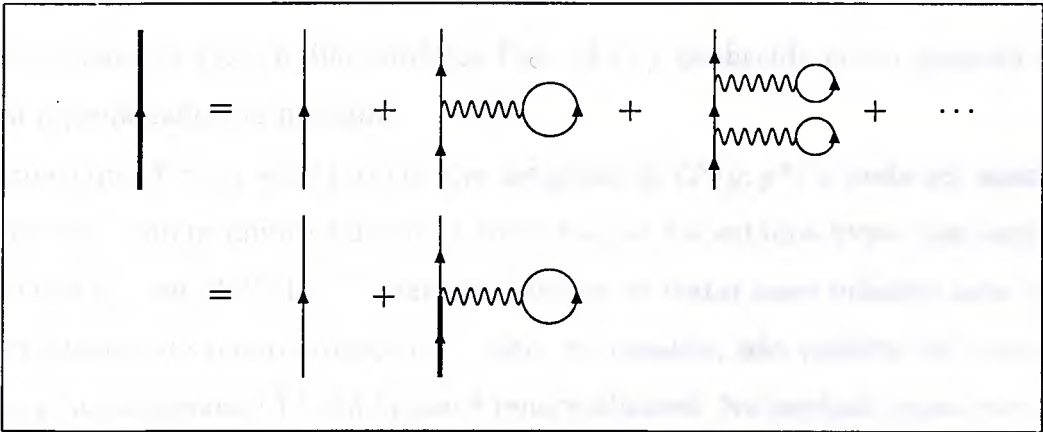


Figura 4.7: Expansão diagramática do propagador do nucleon levando em conta apenas diagramas de “tadpoles”.

$$\tilde{G}(x, y) = G^0(x - y) + \int d^4z G^0(x - z) \Sigma^{(2)}(z) \tilde{G}(z, y) \tag{4.5}$$

O til em $\tilde{G}(x, y)$ é colocado para lembrar que essa não é a expressão completa do propagador. A auto-energia do nucleon, em segunda ordem na interação, $\Sigma^{(2)}(z)$, está representada diagramaticamente na Fig. (4.8). Explicitamente, temos

$$\frac{1}{i}\Sigma^{(2)}(z) = \text{diagrama}$$

Figura 4.8: Auto-energia do nucleon em segunda ordem na interação .

$$\begin{aligned}\Sigma^{(2)}(z) &= \Sigma_{\sigma}^{(2)}(z) + \gamma_{\mu}\Sigma_{\omega}^{(2)\mu}(z) + \gamma_5\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\tau^a\Sigma_{\pi a}^{(2)}(z) \\ &+ \tau^a\left(\frac{g_{\rho}}{2}\gamma_{\mu} - \frac{f_{\rho}}{2M}\sigma_{\mu\nu}\partial^{\nu}\right)\Sigma_{\rho a}^{(2)\mu}(z) + \gamma_{\mu}(1 + \tau_3)\Sigma_{\gamma}^{(2)\mu}(z)\end{aligned}\quad (4.6)$$

com

$$\begin{aligned}\Sigma_{\sigma}^{(2)}(z) &= -ig_{\sigma}^2 \int d^4y D_{\sigma}^0(z-y) Tr[G^0(y, y^+)] \\ \Sigma_{\omega}^{(2)\mu}(z) &= -ig_{\omega}^2 \int d^4y D_{\omega}^{0\mu\nu}(z-y) Tr[\gamma_{\nu}G^0(y, y^+)] \\ \Sigma_{\pi a}^{(2)}(z) &= -i\left(\frac{f_{\pi}}{m_{\pi}}\right)^2 \int d^4y [\partial_y^{\mu} D_{\pi}^{0ab}(z-y)] Tr[\gamma_5\gamma_{\mu}\tau^b G^0(y, y^+)] \\ \Sigma_{\rho a}^{(2)\mu}(z) &= -i \int d^4y D_{\rho}^{0\mu\nu}(z-y) Tr\left[\left(\frac{g_{\rho}}{2}\gamma_{\nu} + \frac{f_{\rho}}{2M}\sigma_{\nu\lambda}\overleftrightarrow{\partial}_z^{\lambda}\right)\tau^b G^0(y, y^+)\right] \\ \Sigma_{\gamma}^{(2)\mu}(z) &= -i\left(\frac{e}{2}\right)^2 \int d^4y D_{\gamma}^{0\mu\nu}(z-y) Tr[\gamma_{\nu}(1 + \tau_3)G^0(y, y^+)]\end{aligned}\quad (4.7)$$

A equação analítica (4.5) e diagramática Fig. (4.7) é conhecida como *equação de Dyson* [12] para o propagador do nucleon.

Acontece que $\Sigma^{(2)}(z)$ em (4.5) envolve integrais de $G^0(y, y^+)$ e pode ser mostrado que essa expressão contém infinitos devido à contribuição dos estados livres com energia negativa vinda de G_F^0 em (4.2) [13]. A maneira rigorosa de tratar esses infinitos seria através de um procedimento de renormalização [1]. Isso, no entanto, não poderia ser implementado aqui pois a lagrangiana (3.1)-(3.5) não é renormalizável. Na verdade, como mencionamos na introdução, a QHD deve ser vista como uma teoria efetiva e, portanto, adotaremos aqui como uma regra simples incluir apenas G_D^0 no cálculo de $\Sigma^{(2)}$, o que corresponde a ignorar a contribuição do vácuo. Isto equivale a ordenar normalmente em relação ao vácuo os produtos de operadores de campo na densidade de lagrangeana.

Apesar de contornarmos as divergências que aparecem em $\Sigma^{(2)}(z)$, a soma em (4.5) não é autoconsistente, porque nesta expressão $\Sigma^{(2)}(z)$ é calculada a partir de propagadores não interagentes. A autoconsistência pode ser implementada se usarmos os propagadores interagentes, ao invés dos não interagentes, no cálculo de $\Sigma^{(2)}(z)$. Isso pode ser visto diagramaticamente na figura Fig. (4.9). Esse procedimento define a *aproximação de Hartree*

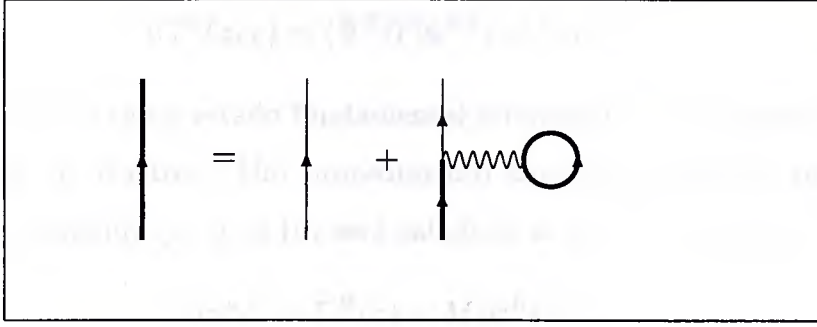


Figura 4.9: Equação de Hartree para o propagador do nucleon. A linha grossa representa iG^H .

relativística, com o propagador do nucleon dado por:

$$G^H(x, y) = G^0(x - y) + \int d^4z G^0(x - z) \Sigma^H(z) G^H(z, y) \quad (4.8)$$

onde agora, $\Sigma^H(z)$ é calculado com o propagador de Hartree G^H .

Para finalizar esta seção queremos fazer um comentário sobre o termo $k^\mu k^\nu$ que aparece nos propagadores dos mésons vetoriais massivos ω e ρ em (4.3). Com as regras de Feynman podemos mostrar que este termo não contribui para os diagramas de “tadpoles”. Para isso basta fazer o cálculo no espaço dos momentos e notar que nesses diagramas o momento transferido pelo méson é necessariamente nulo.

4.3 Equivalência entre a Aproximação de Hartree Relativística e a RMFT

Agora pretendemos mostrar como as equações da RMFT, (3.17) e (3.18), podem ser obtidas com a aproximação de Hartree para o propagador do nucleon em (4.8), e assim mostrar a equivalência das duas aproximações, como feito por Chin, só que agora incluindo a auto-interação do méson σ .

Aplicando o operador $(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)$ ao propagador do nucleon livre em (4.1), obtemos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)G^0(x, y) = \delta^{(4)}(x - y), \quad (4.9)$$

Por outro lado se aplicarmos este mesmo operador em (4.8) e usarmos (4.9) teremos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \Sigma^H(x) - M)G^H(x, y) = \delta^{(4)}(x - y). \quad (4.10)$$

Porém, $G^H(x, y)$ é a aproximação de Hartree para o propagador interagente o que permite escrevê-lo na forma

$$iG^H(x, y) = \langle \Psi^H | T[\psi^H(x) \bar{\psi}^H(y)] | \Psi^H \rangle \quad (4.11)$$

onde $|\Psi^H\rangle$ e $\psi^H(x)$ são o estado fundamental interagente e o operador de campo, ambos na aproximação de Hartree. Um procedimento análogo ao seguido para chegar a (4.9) permite, então, concluir que a (4.10) será satisfeita se $\psi^H(x)$ satisfizer,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \Sigma^H(x) - M)\psi^H(x) = 0. \quad (4.12)$$

Como queremos que o estado $|\Psi^H\rangle$ represente o estado fundamental de um núcleo finito, esse estado deve ser localizado no espaço e estacionário, isto é, homogêneo no tempo. Portanto $iG_{\delta\delta}^H(y, y^+) = \langle \Psi^H | T[\psi_\delta^H(\mathbf{y}, y^0) \bar{\psi}_\delta^H(\mathbf{y}, y^{0+})] | \Psi^H \rangle$ deve depender de $\mathbf{y}$ mas não de y^0 . Considerando esse resultado, temos, por exemplo, para Σ_σ^H

$$\Sigma_\sigma^H(x) = -ig_\sigma^2 \int d^3y \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy^0 D_\sigma^0(x - y) G_{\delta\delta}^H(\mathbf{y}, \mathbf{y}^+) \right\} \quad (4.13)$$

Pelo simples fato de D_σ^0 depender apenas da diferença $x - y$ resulta que, $\int_{-\infty}^{\infty} dy^0 D_\sigma^0(x - y)$ é independente de x^0 . Um resultado análogo vale obviamente também para os outros mésons e para o fóton. Isto permite concluir que a auto-energia do nucleon para núcleos finitos é independente do tempo. Com isso podemos separar a variável temporal na equação (4.12) e procurar por soluções da forma dada em (3.14), onde os espinores de energia positiva, $\mathcal{U}_\alpha$, e negativa, $\mathcal{V}_\alpha$, satisfazem

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta M + \beta \Sigma^H(\mathbf{x})] \mathcal{U}_\alpha = E_\alpha^{(+)} \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta M + \beta \Sigma^H(\mathbf{x})] \mathcal{V}_\alpha = -E_\alpha^{(-)} \mathcal{V}_\alpha(\mathbf{x}) \quad (4.15)$$

Na RMFT expandimos o operador de campo do nucleon na forma (3.16), eliminando as contribuições dos estados com energia negativa, o que denominamos de aproximação “no sea”. Em nível de aproximação de Hartree isto equivale a ordenar normalmente a densidade de lagrangeana (3.1)-(3.5) em relação ao vácuo de Hartree [13].

Para mostrar a equivalência entre a aproximação de Hartree e a RMFT devemos comparar (4.14) com a equação de Dirac em (3.17). A equivalência será encontrada somente se a auto-energia for identificada com os campos bosônicos clássicos, e as equações destes campos forem as mesmas que aparecem em (3.17).

Começemos por analisar o méson σ , deduzindo a equação satisfeita pelo seu propagador livre. Para isso vamos separar o seu operador de campo, na forma

$$\sigma = \langle \sigma \rangle + \hat{\sigma} \quad (4.16)$$

onde $\langle \sigma \rangle$ é o campo clássico e $\hat{\sigma}$ a flutuação quântica, definida de modo que $\langle \hat{\sigma} \rangle = 0$. O propagador é, agora, dado por

$$iD_\sigma^0(x-y) = \langle \Psi_0 | T[\hat{\sigma}(x)\hat{\sigma}(y)] | \Psi_0 \rangle \quad (4.17)$$

pois a contração, que aparece no teorema de Wick [12, Cap. 3], é definida em termos dos produtos cronológico e normal por

$$\begin{aligned} \sigma^\bullet(x)\sigma^\bullet(y) &\doteq T[\sigma(x)\sigma(y)] - N[\sigma(x)\sigma(y)] \\ &= T\{[\langle \sigma(x) \rangle + \hat{\sigma}(x)][\langle \sigma(y) \rangle + \hat{\sigma}(y)]\} \\ &\quad - N\{[\langle \sigma(x) \rangle + \hat{\sigma}(x)][\langle \sigma(y) \rangle + \hat{\sigma}(y)]\} \\ &= T[\hat{\sigma}(x)\hat{\sigma}(y)] - N[\hat{\sigma}(x)\hat{\sigma}(y)] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Logo

$$\begin{aligned} iD_\sigma^0(x-y) &\doteq \sigma^\bullet(x)\sigma^\bullet(y) = \hat{\sigma}^\bullet(x)\hat{\sigma}^\bullet(y) \\ &= \langle \Psi_0 | T[\hat{\sigma}(x)\hat{\sigma}(y)] | \Psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Se introduzirmos (4.16) na equação de movimento para o méson σ em (3.10), obteremos

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2)(\langle \sigma \rangle + \hat{\sigma}) + g_2(\langle \sigma \rangle + \hat{\sigma})^2 + g_3(\langle \sigma \rangle + \hat{\sigma})^3 = -g_\sigma \bar{\psi}\psi \quad (4.20)$$

Fazendo a aproximação de linearização em $\hat{\sigma}$, ou seja, $\hat{\sigma}^2 \simeq 0$ e $\hat{\sigma}^3 \simeq 0$, (4.20) leva a

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2 + g_2 \langle \sigma \rangle + g_3 \langle \sigma \rangle^2) \langle \sigma \rangle = -g_\sigma \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (4.21)$$

e

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2 + 2g_2 \langle \sigma \rangle + 3g_3 \langle \sigma \rangle^2) \hat{\sigma} = -g_\sigma (\bar{\psi} \psi - \langle \bar{\psi} \psi \rangle) \quad (4.22)$$

Aplicando o operador $(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2 + 2g_2 \langle \sigma \rangle + 3g_3 \langle \sigma \rangle^2)$ em (4.17) obtemos,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2 + 2g_2 \langle \sigma \rangle + 3g_3 \langle \sigma \rangle^2) D_\sigma^0(x - y) = -\delta^{(4)}(x - y) \quad (4.23)$$

e fazendo o mesmo para a auto-energia do méson σ em (4.7) teremos[†]

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2 + 2g_2 \langle \sigma \rangle + 3g_3 \langle \sigma \rangle^2) \Sigma_\sigma^H(x) &= -ig_\sigma^2 \text{Tr}[G^H(y, y^+)] \\ &= g_\sigma^2 \langle \bar{\psi} \psi \rangle_H \end{aligned} \quad (4.24)$$

Embora este seja o procedimento mais natural, sendo adotado, por exemplo, por Serot e Walecka [1] e Ma *et al.* [16, 17] para obter o propagador livre quando há termos não lineares, ele não é capaz de reproduzir os resultados da RMFT, porque, como podemos ver comparando (4.24) e (4.21) a auto-energia $\Sigma_\sigma^H(x)$ não pode ser identificada com o campo clássico $\langle \sigma \rangle$. Consequentemente a Eq. (4.14) não é a mesma equação de Dirac que aparece em (3.17), com os potenciais obtidos de (3.11) e, neste caso, a aproximação de Hartree não é equivalente à RMFT.

Por outro lado, se ao invés da aproximação da linearização em $\hat{\sigma}$, introduzirmos a aproximação de campo médio

$$\begin{aligned} (\langle \sigma \rangle + \hat{\sigma})^2 &\simeq \langle \sigma \rangle (\langle \sigma \rangle + \hat{\sigma}), \\ (\langle \sigma \rangle + \hat{\sigma})^3 &\simeq \langle \sigma \rangle^2 (\langle \sigma \rangle + \hat{\sigma}), \end{aligned} \quad (4.25)$$

obteremos a mesma equação de movimento (4.21) para o campo clássico σ mas, ao invés de (4.22), teremos para a flutuação quântica

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2 + g_2 \langle \sigma \rangle + g_3 \langle \sigma \rangle^2) \hat{\sigma} = -g_\sigma (\bar{\psi} \psi - \langle \bar{\psi} \psi \rangle) \quad (4.26)$$

Se aplicarmos o operador $(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2 + g_2 \langle \sigma \rangle + g_3 \langle \sigma \rangle^2)$ ao propagador definido em (4.17), obteremos[‡], agora

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2 + g_2 \langle \sigma \rangle + g_3 \langle \sigma \rangle^2) \tilde{D}_\sigma^0(x - y) = -\delta^{(4)}(x - y), \quad (4.27)$$

[†]Lembremos que Σ^H é obtido de $\Sigma^{(2)}$ com a substituição $G^0 \rightarrow G^H$.

[‡]O til está sendo usado aqui para indicar que foi feita a aproximação de campo médio (4.25) e não a de linearização.

e, fazendo o mesmo com a auto-energia em (4.7),

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2 + g_2 \langle \sigma \rangle + g_3 \langle \sigma \rangle^2) \Sigma_\sigma^{\tilde{H}}(x) = -g_\sigma^2 \langle \bar{\psi} \psi(x) \rangle_{\tilde{H}} \quad (4.28)$$

Agora a auto-energia pode ser identificada com o campo clássico $\langle \sigma \rangle$, porque satisfazem a mesma equação, isto é,

$$\Sigma_\sigma^{\tilde{H}}(x) = g_\sigma \langle \sigma(x) \rangle \quad (4.29)$$

Para os demais campos bosônicos deve-se também fazer uma separação análoga a (4.16). Pelo mesmo procedimento adotado para o méson σ , é claro que resultarão para os campos clássicos equações com as mesmas formas daquelas correspondentes a (3.10) com os termos de fonte substituídos pelos valores esperados. Portanto as mesmas equações usadas na RMFT. Já para as flutuações, uma vez que não há termos de auto-interação, resultarão, na representação de interação, equações de movimento obtidas de (3.10) com as constantes de acoplamento igualadas a zero. Portanto os propagadores livres, que como mostramos no caso do méson σ devem ser definidos em termos dessas flutuações, têm efetivamente as expressões dadas em (4.1)-(4.3).

Passando ao méson ω , obtemos a equação para o seu propagador aplicando o operador $(\partial_\mu \partial^\mu + m_\omega^2)$ em (4.1) e calculando, com (4.3), a transformada de Fourier desse operador, isto é

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\omega^2) D_\omega^{0\nu\lambda}(x-y) = \left(g^{\nu\lambda} + \frac{\partial_x^\nu \partial_x^\lambda}{m_\omega^2} \right) \delta^{(4)}(x-y) \quad (4.30)$$

Aplicando o mesmo operador à auto-energia em (4.7), temos

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\omega^2) \Sigma_\omega^{\tilde{H}\nu}(x) = -g_\omega^2 \langle \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x) \rangle_{\tilde{H}} - g_\omega^2 \frac{\partial_x^\nu \partial_x^\lambda}{m_\omega^2} \langle \bar{\psi}(x) \gamma_\lambda \psi(x) \rangle_{\tilde{H}} \quad (4.31)$$

O segundo termo do lado direito da equação acima é nulo por causa da conservação da corrente bariônica, $\partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) = 0$, discutida no capítulo 3. Então obtemos

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\omega^2) \Sigma_\omega^{\tilde{H}\nu}(x) = -g_\omega^2 \langle \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x) \rangle_{\tilde{H}} \quad (4.32)$$

Repetindo esse mesmo caminho, obtemos para o méson ρ

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m_\rho^2) \Sigma_\rho^{\tilde{H}\nu}(x) &= -\delta_{a3} \left(g^{\nu\lambda} + \frac{\partial_x^\nu \partial_x^\lambda}{m_\rho^2} \right) \left[\frac{g_\rho}{2} \langle \bar{\psi}(x) \gamma_\lambda \tau_3 \psi(x) \rangle_{\tilde{H}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_\rho}{2M} \partial^\mu \langle \bar{\psi}(x) \sigma_{\lambda\mu} \tau_3 \psi(x) \rangle_{\tilde{H}} \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde levamos em conta a forma (3.16) para o campo do nucleon na aproximação de Hartree para escrever, sendo Γ independente de isospin,

$$\begin{aligned}\langle \bar{\psi}(x) \Gamma \tau_a \psi(x) \rangle &= \sum_{\alpha} \bar{\mathcal{U}}_{\alpha}(x) \Gamma \tau_a \mathcal{U}_{\alpha}(x) \\ &= \delta_{a3} \sum_{\alpha} \bar{\mathcal{U}}_{\alpha}(x) \Gamma \tau_3 \mathcal{U}_{\alpha}(x),\end{aligned}\quad (4.34)$$

pois as únicas contribuições para o somatório são da forma $\langle \text{próton} | \tau_a | \text{próton} \rangle$ e $\langle \text{nêutron} | \tau_a | \text{nêutron} \rangle$. Por outro lado, se multiplicarmos (4.14) por $\bar{\psi} \tau_3$, seu conjugado hermitiano por $\tau_3 \psi$ e subtrairmos essas duas equações, obteremos

$$i[\bar{\psi} \gamma^{\mu} \tau_3 \partial_{\mu} \psi + (\partial_{\mu} \bar{\psi}) \gamma^{\mu} \tau_3 \psi] - \bar{\psi} [\tau_3, \Sigma^{\tilde{H}}] \psi = 0 \quad (4.35)$$

De (4.6) e (4.7) vemos que, pelo mesmo motivo que levou a (4.34), o comutador $[\tau_3, \Sigma^{\tilde{H}}]$ é nulo. Isso implica que

$$\partial_{\mu} (\bar{\psi} \gamma^{\mu} \tau_3 \psi)_{\tilde{H}} = 0 \quad (4.36)$$

Com esse resultado e da anti-simetria de $\sigma_{\lambda\mu}$ vemos que o termo $\frac{\partial^{\nu} \partial^{\lambda}}{m_{\rho}^2}$ em (4.33) não contribui. Portanto

$$\begin{aligned}(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m_{\rho}^2) \Sigma_{\rho a}^{\tilde{H}\nu}(x) &= -\delta_{a3} \left[\frac{g_{\rho}}{2} \langle \bar{\psi}(x) \gamma^{\nu} \tau_3 \psi(x) \rangle_{\tilde{H}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_{\rho}}{2M} \partial_{\mu} \langle \bar{\psi}(x) \sigma^{\nu\mu} \tau_3 \psi(x) \rangle_{\tilde{H}} \right]\end{aligned}\quad (4.37)$$

Procedimentos análogos a esses levam a

$$(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m_{\pi}^2) \Sigma_{\pi a}^{\tilde{H}}(x) = -\delta_{a3} \left(\frac{f_{\pi}}{m_{\pi}} \right)^2 \partial_{\nu} \langle \bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma^{\nu} \tau_3 \psi(x) \rangle_{\tilde{H}} \quad (4.38)$$

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \Sigma_{\gamma}^{\tilde{H}\nu}(x) = -\left(\frac{e}{2} \right)^2 \langle \bar{\psi}(x) \gamma^{\nu} (1 + \tau_3) \psi(x) \rangle_{\tilde{H}} \quad (4.39)$$

Comparando-se as equações (4.32), (4.37), (4.38) e (4.39) com (3.22), e lembrando que essas auto-energias são independentes do tempo podemos fazer as indentificações

$$\begin{aligned}\Sigma_{\omega}^{\tilde{H}\nu}(x) &= -g_{\omega} \langle \omega^{\nu}(x) \rangle \\ \Sigma_{\pi a}^{\tilde{H}}(x) &= -\frac{f_{\pi}}{m_{\pi}} \langle \pi_a(x) \rangle \\ \Sigma_{\rho a}^{\tilde{H}\nu}(x) &= -\langle \rho_a^{\nu}(x) \rangle \\ \Sigma_{\gamma}^{\tilde{H}\nu}(x) &= -\frac{e}{2} \langle A^{\nu}(x) \rangle\end{aligned}\quad (4.40)$$

Concluimos, portanto, que na presença de termos não-lineares a aproximação de campo médio não é estritamente equivalente à aproximação de Hartree. No entanto, se, em lugar do procedimento natural de linearização, for adotada a aproximação (4.25), obtém-se uma aproximação de Hartree modificada $\tilde{H}$ que é, esta sim, equivalente à RMFT. Notemos, no entanto, que nessa aproximação o propagador livre do méson σ satisfaz a equação (4.27) e não a (4.23).

No que segue, embora não o mencionemos explicitamente, sempre que falarmos na aproximação de Hartree será a essa aproximação modificada que estaremos nos referindo. Para simplificar a notação passaremos, também, a indicá-la por H em lugar de $\tilde{H}$. Pelo mesmo motivo, deixaremos que o contexto indique, no caso dos campos bosônicos, se estamos nos referindo ao campo clássico ou à flutuação quântica.

Capítulo 5

Aproximação da Fase Aleatória Relativística

A aproximação da fase aleatória (RPA) é o modelo mais simples utilizado para descrever os estados excitados de um núcleo atômico que admite que o estado fundamental nuclear não tem apenas um caráter de partículas independentes, mas contém correlações. Essas correlações estão associadas com as vibrações coletivas nucleares que podem ser excitadas por um agente perturbador externo adequado. Por isso essa aproximação é o modelo mais apropriado para descrever as excitações nucleares coletivas e, em particular, as ressonâncias gigantes com troca de carga que queremos estudar.

Este capítulo está dividido em sete seções. Na primeira seção pretendemos derivar as equações da RPA relativística na forma da equação de Dyson para o propagador de polarização, através da aproximação de anéis. Na segunda e terceira seções escreveremos essa equação e o propagador de polarização na forma espectral, respectivamente. Na quarta seção exibiremos as equações da RPA na forma matricial. Na quinta seção obteremos as funções de excitação e as regras de soma para as ressonâncias com troca de carga. Nas demais seções iremos escrever as equações da RPA, as amplitudes e as intensidades de transições com acoplamento do momento angular, J .

5.1 Equação de Dyson na Aproximação de Anéis

Existem diversas maneiras de derivar as equações da RPA, por exemplo, pelo método de equações de movimento de Rowe [4, 18, 19]. Nesta seção pretendemos derivá-las através da equação de Dyson para o propagador de polarização.

Imaginemos um núcleo descrito pela hamiltoniana H que num certo instante do tempo

$t = t_0$ é perturbado por

$$\begin{aligned} H^{ex}(t) &= \int d^3x \bar{\psi}(x) \Gamma_B \psi(x) \Phi^{ex}(x) \\ &\equiv \int d^3x B(x) \Phi^{ex}(x), \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $\Phi^{ex}(x)$, $\psi(x)$ e Γ_B representam, respectivamente, o campo externo que perturba o sistema nuclear, o operador de campo do nucleon na descrição de Heisenberg e alguma matriz nos índices espinoriais de Dirac e isospin. A resposta do sistema para o observável

$$A(x) = \bar{\psi}(x) \Gamma_A \psi(x), \quad (5.2)$$

é dada pela diferença entre os valores esperados de $A(x)$ no sistema perturbado e não perturbado. Se essa diferença for truncada na primeira ordem em H^{ex} , a resposta linear do sistema pode ser obtida do propagador de polarização, definido por

$$i\Pi[A(x), B(y)] = \langle \Psi | T[A(x)B(y)] | \Psi \rangle. \quad (5.3)$$

Para maiores detalhes veja as Refs. [12, 13]. Portanto, o espectro de excitação do sistema nuclear pode ser obtido da análise de Fourier temporal desse propagador.

Para obter a equação de Dyson iniciamos por aplicar os teoremas de Wick e Gell-Man e Low ao segundo membro de (5.3),

$$\begin{aligned} i\Pi[A(x), B(y)] &= \langle \Psi | T[A(x)B(y)] | \Psi \rangle \\ &= \frac{\langle \Psi_0 | \hat{T}[S^I A^I(x) B^I(y)] | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | S^I | \Psi_0 \rangle} \\ &= \langle \Psi_0 | \hat{T}[S^I A^I(x) B^I(y)] | \Psi_0 \rangle_{con} \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde o índice superior I indica que os operadores de campo estão na descrição de interação e o índice *con*, que todos os diagramas desconectados são eliminados da expansão. O operador da matriz S covariante é dado na descrição de interação por

$$S^I = \hat{T} \exp \left\{ i \int d^4x N_0 [\mathcal{L}_{int}^I] \right\} \quad (5.5)$$

onde N_0 indica o produto normal em relação ao vácuo não interagente. Devido aos acoplamentos derivativos que aparecem na densidade de lagrangeana de interação (3.4)-(3.5), a matriz S , em princípio, não poderia ser escrita como em (5.5), porque a densidade de

hamiltoniana de interação não é mais dada por $-\mathcal{L}_{int}$. Porém podemos ver no apêndice A que se usarmos o produto cronológico covariante $\hat{T}$, que coincide com o produto cronológico usual exceto pela propriedade

$$\langle \Psi_0 | \hat{T}[\partial_\mu^x \phi_i(x) \partial_\nu^y \phi_j(y)] | \Psi_0 \rangle = \partial_\mu^x \partial_\nu^y \langle \Psi_0 | \hat{T}[\phi_i(x) \phi_j(y)] | \Psi_0 \rangle \quad (5.6)$$

com ϕ_i e ϕ_j representando campos bosônicos com acoplamentos derivativos, a matriz S usual pode ser substituída pela matriz S covariante definida em (5.5) para ser usada em (5.4).

Lembremos que a expansão diagramática para (5.4) é uma soma infinita sobre todos os diagramas possíveis conectados aos pontos externos x e y por meio de linhas de férmions e bósons ligadas em vértices obedecendo as regras de Feynman discutidas na Seção 4.1. Imaginemos qualquer um desses diagramas que não contenha inserções de “tadpole” e nele consideremos dois vértices x_i e x_j diretamente ligados por uma linha de férmion conforme mostrado no lado esquerdo da Fig. (5.1). É claro que aparecerá também na série perturbativa o diagrama obtido substituindo-se essa linha por qualquer dos propagadores indicados na parte do meio da Fig. (5.1). Se reagruparmos a série somando todos esses diagramas, obteremos o diagrama construído substituindo-se a linha de férmion livre (fina) pela linha de férmion de Hartree (grossa). Repetindo esse processo sucessivamente é claro que acabaremos por obter uma série perturbativa em que todas as linhas de férmion serão linhas de Hartree.

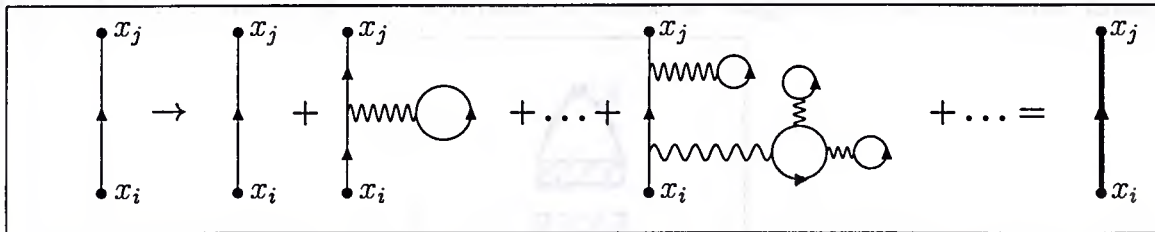


Figura 5.1: Reagrupamento de diagramas com uma linha de férmion entre os vértices x_i e x_j .

Analicamente isso corresponde a reescrever a Eq. (5.4) como

$$\begin{aligned} i\Pi[A(x), B(y)] &= \langle \Psi | T[A(x)B(y)] | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi^H | \hat{T}[S^H A^H(x) B^H(y)] | \Psi^H \rangle_{con} \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde $|\Psi^H\rangle$ é o estado fundamental não correlacionado de Hartree e

$$S^H = \hat{T} \exp\{i \int d^4x N^H [\mathcal{L}_{int}^H]\} \quad (5.8)$$

O índice superior em $\mathcal{L}_{int}^H$, A^H e B^H indica que os operadores de campo de férmion devem ser substituídos pelos correspondentes operadores na aproximação de Hartree.

Há um cuidado a tomar na expansão diagramática de (5.7) para impedir dupla contagem de diagramas de “tadpole”, o que aconteceria, por exemplo, em diagramas contendo partes como indicada na Fig. (5.2). É fácil convencer-se [13] de que conseguimos isso fazendo o ordenamento normal de $\mathcal{L}_{int}^H$ em relação ao estado fundamental de Hartree, $|\Psi^H\rangle$. Isso está indicado pelo símbolo N^H em (5.8).

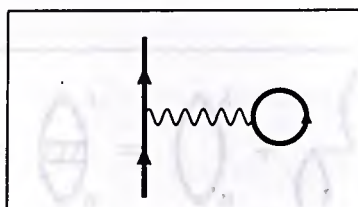


Figura 5.2: Diagrama proibido por dupla contagem de “tadpoles”.

Na expansão de (5.7) aparecem alguns diagramas com a estrutura mostrada na Fig. (5.3), que chamaremos de diagramas disjuntos. As contribuições desses diagramas são independentes de $x_0 - y_0$ e, portanto, suas transformadas de Fourier nessa variável são nulas para frequências diferentes de zero. Como queremos estudar as excitações do sistema nuclear e estamos interessados nas frequências não nulas, podemos omitir esses gráficos na expansão de Π . Se, além disso, retivermos somente os diagrams de anéis*, como mostra a

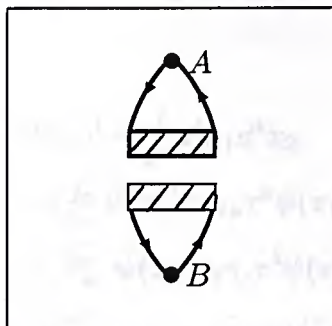


Figura 5.3: Estrutura Geral dos diagramas disjuntos.

*Não incluímos os diagramas de troca correspondentes por consistência com a aproximação de Hartree.

Fig. (5.4), obteremos a aproximação RPA para o propagador de polarização, que satisfaz portanto a seguinte equação de Dyson

$$i\Pi^{RPA}[A(x), B(y)] = i\Pi^H[A(x), B(y)] + \sum_b \int d^4x_1 d^4x_2 i\Pi^H[A(x), b(x_1)] iD_b^0(x_1 - x_2) i\Pi^{RPA}[b(x_2), B(y)] \quad (5.9)$$

onde b denota os diversos bósons no modelo, $b(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma_b\psi(x)$ representa seu vértice de interação com o nucleon, D_b^0 seu propagador livre e Π^H é o propagador de polarização de Hartree definido analiticamente por

$$i\Pi^H[A(x), B(y)] = \langle \Psi^H | T \{ N^H[A^H(x)] N^H[B^H(y)] \} | \Psi^H \rangle. \quad (5.10)$$

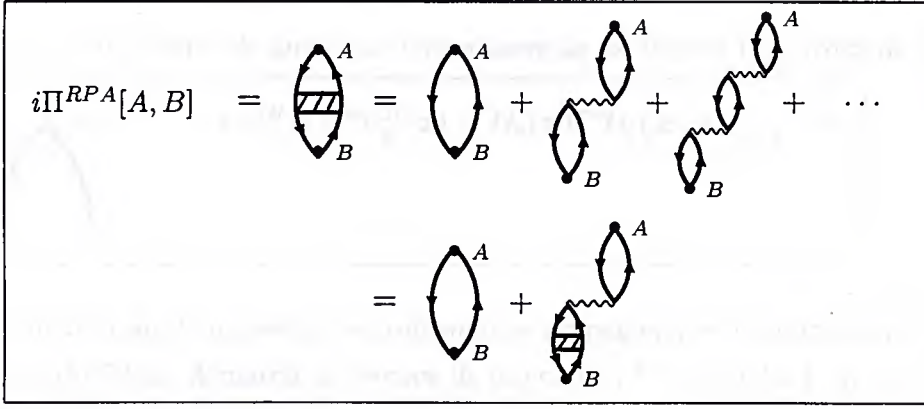


Figura 5.4: Expansão em diagramas de anéis e equação de Dyson para Π .

Nos limitando ao propagador de polarização com troca de carga, a equação de Dyson fica

$$\begin{aligned} i\Pi^{RPA}[A(x), B(y)] &= i\Pi^H[A(x), B(y)] + \int d^4x_1 d^4x_2 \\ &\left\{ i\Pi^H[A(x), -i\frac{f_\pi}{m_\pi}\bar{\psi}(x_1)\gamma_5\gamma_\mu\tau^a\psi(x_1)\partial_{x_1}^\mu] iD_{\pi ab}^0(x_1 - x_2) \right. \\ &\quad i\Pi^{RPA}[-i\frac{f_\pi}{m_\pi}\overleftarrow{\partial}_{x_2}^\nu\bar{\psi}(x_2)\gamma_5\gamma_\nu\tau^b\psi(x_2), B(y)] \\ &\quad + \lim_{x'_1 \rightarrow x_1} \lim_{x'_2 \rightarrow x_2} i\Pi^H[A(x), -i\bar{\psi}(x_1)(\frac{g_\rho}{2}\gamma_\mu - \frac{f_\rho}{2M}\sigma_{\mu\kappa}\partial_{x_1}^\kappa)\tau^a\psi(x_1)] \\ &\quad \left. iD_{\rho ab}^{0\mu\nu}(x'_1 - x'_2) i\Pi^{RPA}[-i\bar{\psi}(x_2)(\frac{g_\rho}{2}\gamma_\nu - \frac{f_\rho}{2M}\sigma_{\nu\lambda}\overleftarrow{\partial}_{x_2}^\lambda)\tau^b\psi(x_2), B(y)] \right\} \quad (5.11) \end{aligned}$$

Para obter as excitações com troca de carga, devemos introduzir os operadores τ_+ e τ_- nas densidades $A(x)$, em (5.2), e $B(x)$, em (5.1). Isso fará com que os diagramas de anéis que aparecem na expansão para Π^{RPA} sejam construídos somente com um propagador de nucleons no estado de próton p e o outro no estado de nêutron n , como mostra a Fig. (5.5). Para esse tipo de anel a contribuição dos vértices envolvendo os bósons não carregados é nula, como mostra a Fig. (5.6). Por esse motivo, somente os bósons carregados π e ρ

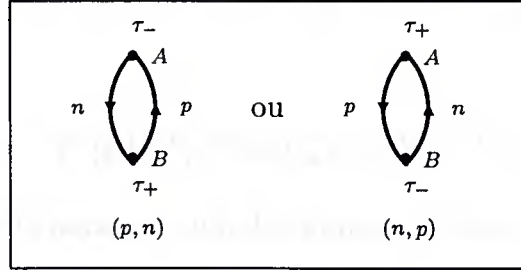


Figura 5.5: Diagramas de anéis que reproduzem as excitações com troca de carga.

Figura 5.6: Contribuição de um vértice envolvendo os propagadores do próton, do nêutron, e do bóson σ , ou ω ou do fóton. A matriz no vértice de interação, Γ^b , é igual a 1, γ_μ , $(1 + \tau_3)\gamma_\mu$ para o σ , o ω e o fóton, respectivamente.

aparecem na equação de Dyson (5.11), que, conforme já mencionamos, é específica para excitações com troca de carga. Para excitações sem troca de carga a equação de Dyson (5.9) envolveria todos os bósons, mas deixaremos de escrever sua forma explícita uma vez que ela não é necessária para o tema desta tese. É importante, no entanto, notar que na aproximação de anéis as excitações com troca de carga $+1$, -1 e 0 estão desacopladas.

5.2 Forma Espectral da Equação de Dyson

Resolvendo-se iterativamente a equação de Dyson (5.9) obtém-se, como fica claro da Fig. (5.4), a seguinte série

$$i\Pi^{RPA}[A(x), B(y)] = i\Pi^H[A(x), B(y)]$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_b \int d^4x_1 d^4x_2 i\Pi^H[A(x), b(x_1)] iD_b^0(x_1 - x_2) i\Pi^H[b(x_2), B(y)] \\
 & + \sum_b \sum_{b'} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 i\Pi^H[A(x), b(x_1)] iD_b^0(x_1 - x_2) \\
 & i\Pi^H[b(x_2), b'(x_3)] iD_{b'}^0(x_3 - x_4) i\Pi^H[b'(x_4), B(y)] + \dots \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

Introduzindo (3.16) em (5.10), obtemos

$$i\Pi^H[A(x), B(y)] = \sum_{pn p'n'} \bar{\mathcal{U}}_n(x) \Gamma_A \mathcal{U}_p(x) i\Pi_{pn p'n'}^H(x_0 - y_0) \bar{\mathcal{U}}_{p'}(y) \Gamma_B \mathcal{U}_{n'}(y) \quad (5.13)$$

onde

$$i\Pi_{pn p'n'}^H(x_0 - y_0) = \langle \Psi^H | T \{ N^H[a_n^H(x_0) a_p^H(x_0)] N^H[a_{p'}^H(y_0) a_{n'}^H(y_0)] \} | \Psi^H \rangle \quad (5.14)$$

Procedendo-se analogamente para cada um dos propagadores de polarização de Hartree em (5.12), obtém-se

$$\begin{aligned}
 i\Pi^{RPA}[A(x), B(y)] & = \sum_{pn p'n'} \bar{\mathcal{U}}_n(x) \Gamma_A \mathcal{U}_p(x) \left\{ i\Pi_{pn p'n'}^H(x^0 - y^0) \right. \\
 & + \sum_{p_1 n_1 p_2 n_2} \int dx_1^0 dx_2^0 i\Pi_{pn p_1 n_1}^H(x^0 - x_1^0) \frac{1}{i} K_{p_1 n_1 p_2 n_2}(x_1^0 - x_2^0) \\
 & i\Pi_{p_2 n_2 p'n'}^H(x_2^0 - y^0) \\
 & + \sum_{\substack{p_1 n_1 p_2 n_2 \\ p_3 n_3 p_4 n_4}} \int dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0 dx_4^0 i\Pi_{pn p_1 n_1}^H(x^0 - x_1^0) \frac{1}{i} K_{p_1 n_1 p_2 n_2}(x_1^0 - x_2^0) \\
 & i\Pi_{p_2 n_2 p_3 n_3}^H(x_2^0 - x_3^0) \frac{1}{i} K_{p_3 n_3 p_4 n_4}(x_3^0 - x_4^0) i\Pi_{p_4 n_4 p'n'}^H(x_4^0 - y^0) \\
 & + \dots \left. \right\} \bar{\mathcal{U}}_{p'}(y) \Gamma_B \mathcal{U}_{n'}(y) \\
 & \doteq \sum_{pn p'n'} \bar{\mathcal{U}}_n(x) \Gamma_A \mathcal{U}_p(x) i\Pi_{pn p'n'}^{RPA}(x^0 - y^0) \bar{\mathcal{U}}_{p'}(y) \Gamma_B \mathcal{U}_{n'}(y) \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

onde o kernel K é dado por

$$K_{p_1 n_1 p_2 n_2}(x_1^0 - x_2^0) = - \sum_b \int d^3x_1 d^3x_2 \bar{\mathcal{U}}_{p_1}(x_1) \Gamma_b \mathcal{U}_{n_1}(x_1) iD_b^0(x_1 - x_2) \bar{\mathcal{U}}_{n_2}(x_2) \Gamma_b \mathcal{U}_{p_2}(x_2) \quad (5.16)$$

Na seção 5.3 está mostrado que a dependência temporal de Π^H é apenas através do intervalo $x_0 - y_0$. Para Π^{RPA} isso decorre da equação de Dyson.

Reagrupando-se a série entre chaves em (5.15) é fácil ver que o propagador de polarização da RPA aí definido satisfaz também uma equação de Dyson, a saber,

$$\Pi_{pn p'n'}^{RPA}(x^0 - y^0) = \Pi_{pn p'n'}^H(x^0 - y^0)$$

$$+ \sum_{p_1 n_1 p_2 n_2} \int d^3 x_1 d^3 x_2 \Pi_{pn}^H(x_1^0 - x_2^0) K_{p_1 n_1 p_2 n_2}(x_1^0 - x_2^0) \Pi_{p_2 n_2 p' n'}^{RPA}(x_2^0 - y^0) \quad (5.17)$$

A forma espectral da equação de Dyson é obtida fazendo-se a transformada de Fourier temporal de (5.17), resultando

$$\Pi_{pn}^{RPA}(\omega) = \Pi_{pn}^H(\omega) + \sum_{p_1 n_1 p_2 n_2} \Pi_{pn}^H(\omega) K_{p_1 n_1 p_2 n_2}(\omega) \Pi_{p_2 n_2 p' n'}^{RPA}(\omega) \quad (5.18)$$

A forma explícita de $\Pi^H(\omega)$ será obtida na seção 5.3

Para o caso específico de excitações com troca de carga, $p, p', p_1, p_2, p_3, p_4$ denotam estados de próton e n, n', n_1, n_2, n_3 e n_4 denotam estados de nêutron. Já o kernel definido em (5.16) pode ser extraído de (5.11), obtendo-se

$$K_{p_1 n_1 p_2 n_2}(x_1^0 - x_2^0) = \frac{\int d^3 x_1 d^3 x_2 \mathcal{U}_{p_1}^\dagger(\mathbf{x}_1) \mathcal{U}_{n_2}^\dagger(\mathbf{x}_2) [V_\pi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + V_\rho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)]}{\mathcal{U}_{n_1}(\mathbf{x}_1) \mathcal{U}_{p_2}(\mathbf{x}_2)} \quad (5.19)$$

onde

$$\begin{aligned} V_\pi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) &= \gamma_0(1) \gamma_0(2) \frac{f_\pi}{m_\pi} \gamma_5(1) \gamma_\mu(1) \partial^\mu(1) \tau^a(1) D_{\pi ab}^0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &\quad \frac{f_\pi}{m_\pi} \gamma_5(2) \gamma_\nu(2) \overleftarrow{\partial}^\nu(2) \tau^b(2) \\ V_\rho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) &= \gamma_0(1) \gamma_0(2) \left(\frac{g_\rho}{2} \gamma_\mu(1) - \frac{f_\rho}{2M} \sigma_{\mu\kappa}(1) \partial^\kappa(1) \right) \tau^a(1) D_{\rho ab}^{0\mu\nu}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &\quad \left(\frac{g_\rho}{2} \gamma_\nu(2) - \frac{f_\rho}{2M} \sigma_{\nu\lambda}(2) \overleftarrow{\partial}^\lambda(2) \right) \tau^b(2) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Quanto à sua transformada de Fourier, temos

$$K_{p_1 n_1 p_2 n_2}(\omega) = \frac{\int d^3 x_1 d^3 x_2 \mathcal{U}_{p_1}^\dagger(\mathbf{x}_1) \mathcal{U}_{n_2}^\dagger(\mathbf{x}_2) [V_\pi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \omega) + V_\rho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \omega)]}{\mathcal{U}_{n_1}(\mathbf{x}_1) \mathcal{U}_{p_2}(\mathbf{x}_2)} \quad (5.21)$$

sendo

$$V_\pi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \omega) = \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 \left[\gamma_0 (-i\omega \gamma_5 \gamma_0 + \gamma_5 \gamma_i \partial^i) \tau^a \right]_1 \left[\gamma_0 (-i\omega \gamma_5 \gamma_0 + \gamma_5 \gamma_j \partial^j) \tau^b \right]_2 D_{\pi ab}^0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \omega) \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} V_\rho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \omega) &= \left\{ \gamma_0 \left[\frac{g_\rho}{2} \gamma_\mu - \frac{f_\rho}{2M} (-i\omega \sigma_{\mu 0} + \sigma_{\mu i} \partial^i) \right] \tau^a \right\}_1 \\ &\quad \left\{ \gamma_0 \left[\frac{g_\rho}{2} \gamma_\nu - \frac{f_\rho}{2M} (-i\omega \sigma_{\nu 0} + \sigma_{\nu j} \partial^j) \right] \tau^b \right\}_2 D_{\rho ab}^{0\mu\nu}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \omega) \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde

$$\begin{aligned} D_{\pi ab}^0(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} D_{\pi ab}^0(\mathbf{k}, \omega) \\ D_{\rho ab}^{0\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} D_{\rho ab}^{0\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) \end{aligned} \quad (5.24)$$

com os propagadores no espaço dos momentos dados em (4.3).

5.3 Representação Espectral de Lehmann para o Propagador de Polarização

O propagador de polarização definido em (5.3) pode ser escrito na forma,

$$i\Pi[A(x), B(y)] = \theta(x_0 - y_0) \langle \Psi | A(x) B(y) | \Psi \rangle + \theta(y_0 - x_0) \langle \Psi | B(y) A(x) | \Psi \rangle. \quad (5.25)$$

As densidades $A(x)$ e $B(x)$ que aparecem nessa expressão estão na descrição de Heisenberg, isto é

$$\begin{aligned} A(x) &= e^{iHx_0} A_S(x) e^{-iHx_0}, \\ B(y) &= e^{iHy_0} B_S(y) e^{-iHy_0}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

com os índices S denotando operadores na descrição de Schrödinger. Se substituirmos (5.26) em (5.25) e introduzirmos um conjunto completo de auto-estados $|\Psi_\nu\rangle$ de H entre $A(x)$ e $B(x)$ obteremos

$$\begin{aligned} i\Pi[A(x), B(y)] &= \sum_\nu \left[\theta(x_0 - y_0) e^{-i(E_\nu - E)(x_0 - y_0)} \langle \Psi | A_S(x) | \Psi_\nu \rangle \langle \Psi_\nu | B_S(y) | \Psi \rangle \right. \\ &\quad \left. + \theta(y_0 - x_0) e^{i(E_\nu - E)(x_0 - y_0)} \langle \Psi | B_S(y) | \Psi_\nu \rangle \langle \Psi_\nu | A_S(x) | \Psi \rangle \right], \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde E e E_ν são as energias exatas de $|\Psi\rangle$ e $|\Psi_\nu\rangle$. A expressão (5.27) mostra que Π depende somente de $x_0 - y_0$. Usando-se a forma espectral da função degrau de Heaviside

$$\theta(x) = i \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega x}}{\omega + i\eta} \quad (5.28)$$

chegamos facilmente a

$$\Pi[A(x), B(y)] = \int \frac{d\omega}{2\pi} \Pi[A(x), B(y), \omega] e^{-i\omega(x_0 - y_0)} \quad (5.29)$$

onde a transformada de Fourier é dada por

$$\Pi[A(\mathbf{x}), B(\mathbf{y}), \omega] = \sum_{\nu} \left[\frac{\langle \Psi | A_S(\mathbf{x}) | \Psi_{\nu} \rangle \langle \Psi_{\nu} | B_S(\mathbf{y}) | \Psi \rangle}{\omega - (E_{\nu} - E) + i\eta} - \frac{\langle \Psi | B_S(\mathbf{y}) | \Psi_{\nu} \rangle \langle \Psi_{\nu} | A_S(\mathbf{x}) | \Psi \rangle}{\omega + (E_{\nu} - E) - i\eta} \right] \quad (5.30)$$

Essa é a conhecida representação espectral de Lehmann para Π . Convém notar que para excitações com troca de carga os estados $|\Psi_{\nu}\rangle$ nas duas frações em (5.30) se referem a isóbaros distintos.

O propagador de polarização de Hartree definido em (5.14) é equivalente a

$$\begin{aligned} i\Pi_{pn\,p'n'}^H(x_0 - y_0) &= \langle \Psi^H | T[a_n^H(x_0)a_{n'}^H(y_0)] | \Psi^H \rangle \langle \Psi^H | T[a_p^H(x_0)a_{p'}^H(y_0)] | \Psi^H \rangle \\ &= \delta_{pp'}\delta_{nn'}[\theta(x_0 - y_0)\theta(F - n)\theta(p - F) \\ &\quad + \theta(y_0 - x_0)\theta(n - F)\theta(F - p)]e^{-i(E_p - E_n)(x_0 - y_0)} \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde F está indicando o nível de Fermi. Essa última forma mostra explicitamente que sua dependência temporal é apenas através do intervalo $x_0 - y_0$, conforme usamos na seção 5.2.

Procedendo-se analogamente ao que fizemos para o propagador exato, obtém-se

$$\Pi_{pn\,p'n'}^H(\omega) = \delta_{pp'}\delta_{nn'} \left[\frac{\theta(p - F)\theta(F - n)}{\omega - \omega_{pn} + i\eta} - \frac{\theta(n - F)\theta(F - p)}{\omega + \omega_{np} - i\eta} \right] \quad (5.32)$$

com $\omega_{rs} = E_r - E_s$.

Para obtermos a representação de Lehmann de Π^{RPA} partiremos da equação matricial (5.18), cuja inversa pode ser escrita como

$$\Pi^{RPA}(\omega)^{-1} = \Pi^H(\omega)^{-1} - K(\omega) \quad (5.33)$$

De (5.32) é fácil ver que os elementos de matriz de $\Pi_{pn\,p'n'}^H$ são nulos a menos que

$$\begin{aligned} p, p' > F \quad \text{e} \quad n, n' \leq F \\ \text{ou} \\ p, p' \leq F \quad \text{e} \quad n, n' > F. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Analisando a Eq. (5.18), vemos imediatamente que os elementos da matriz $\Pi_{pn\,p'n'}^{RPA}$ são nulos a menos que ou $p > F$ e $n \leq F$ ou $p \leq F$ e $n > F$. Esse resultado, juntamente com

(5.34), permite, concluir que só contribuem em (5.18) os elementos da matriz $K_{pn\ p'n'}(\omega)$ com os índices satisfazendo, independentemente, as seguintes condições

$$\begin{aligned} p > F \text{ e } n \leq F \quad \text{ou} \quad p \leq F \text{ e } n > F \\ \text{e} \\ p' > F \text{ e } n' \leq F \quad \text{ou} \quad p' \leq F \text{ e } n' > F \end{aligned} \quad (5.35)$$

Além disso os índices p' e n' em $\Pi_{pn\ p'n'}^{RPA}$ satisfazem também a essa mesma restrição, como deixa claro a expansão iterativa (5.18) (Ver Fig. (5.4)). É nesse mesmo espaço que devemos entender a Eq. (5.33).

Por outro lado, de (5.32) temos

$$\begin{aligned} \Pi_{pn\ p'n'}^H(\omega)^{-1} &= \delta_{pp'}\delta_{nn'}[(\omega - \omega_{pn})\theta(p - F)\theta(F - n) \\ &\quad - (\omega + \omega_{np})\theta(n - F)\theta(F - p)] \end{aligned} \quad (5.36)$$

Denotando por p , n e $\bar{p}$, $\bar{n}$ os estados acima e abaixo do nível de Fermi, e introduzindo a matriz métrica

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} p\bar{n} \\ \} n\bar{p} \end{matrix} \quad (5.37)$$

podemos reescrever (5.36) como

$$\Pi^H(\omega)^{-1} = \omega\mathcal{N} - \begin{bmatrix} \omega_{p\bar{n}} & 0 \\ 0 & \omega_{n\bar{p}} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

De modo semelhante, (5.33) toma a forma

$$\Pi^{RPA}(\omega)^{-1} = \omega\mathcal{N} - \begin{bmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ B^\dagger(\omega) & D(\omega) \end{bmatrix} \doteq \omega\mathcal{N} - \mathcal{M}(\omega) \quad (5.39)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{p\bar{n}\ p'\bar{n}'}(\omega) &= \omega_{p\bar{n}}\delta_{pp'}\delta_{\bar{n}\bar{n}'} + K_{p\bar{n}\ p'\bar{n}'}(\omega), \\ B_{p\bar{n}\ n'\bar{p}'}(\omega) &= K_{p\bar{n}\ \bar{p}'n'}(\omega), \\ D_{n\bar{p}\ n'\bar{p}'}(\omega) &= \omega_{n\bar{p}}\delta_{nn'}\delta_{\bar{p}\bar{p}'} + K_{\bar{p}n\ \bar{p}'n'}(\omega), \end{aligned} \quad (5.40)$$

As equações (5.39) e (5.40) são semelhantes às suas análogas não-relativísticas. Uma complicação adicional, no entanto, é que agora o kernel depende da frequência, o que está ligado aos efeitos de retardamento. Para prosseguirmos é importante fazer a *aproximação instantânea*. Esta aproximação consiste em desprezarmos ω em relação a $|\mathbf{k}|$ e às massas m_π e m_ρ , nos propagadores livres desses mésons em (4.3). Isso é justificável porque as contribuições mais importantes do quadrimomento transferido k^μ correspondem a valores de ω nas vizinhanças das energias de excitação envolvidas, que, para ressonâncias gigantes, não ultrapassam 10-20 MeV. Essas energias são, portanto, desprezíveis em relação às massas dos mésons $m_\rho \simeq 750 - 770$ MeV e também, em menor extensão, a $m_\pi \simeq 140$ MeV. Da mesma maneira podemos desprezar ω em relação a $|\mathbf{k}|$, pois os momentos dominantes, aqueles que apresentam maiores contribuições no interior do núcleo, estão na faixa do momento de Fermi, $k_F \simeq 1.4 fm^{-1} \simeq 280$ MeV.

Os pólos de $\Pi^{RPA}(\omega)$ (que aparecerão na sua representação espectral) são obtidos dos zeros de $\Pi^{RPA}(\omega)^{-1}$ [20], dados pela equação de autovalores

$$(\mathcal{M} - \omega_\nu \mathcal{N})C^\nu = 0 \quad (5.41)$$

onde, devido a aproximação instantânea, a matriz $\mathcal{M}$ é independente de ω .

Esse problema é bem conhecido [20]. Impondo-se condições adequadas para a matriz $\mathcal{M}$ os autovalores são todos reais e os autovetores satisfazem as relações de ortonormalidade

$$C^{\lambda\dagger} \mathcal{N} C^\nu = sgn(\omega_\nu) \delta_{\lambda\nu} \quad (5.42)$$

e completiza

$$\sum_\nu sgn(\omega_\nu) C^\nu C^{\nu\dagger} = \mathcal{N} \quad (5.43)$$

De (5.39) e (5.43) obtemos

$$\Pi^{RPA}(\omega)^{-1} = \sum_\lambda (\omega - \omega_\lambda) sgn(\omega_\lambda) \mathcal{N} C^\lambda C^{\lambda\dagger} \mathcal{N} \quad (5.44)$$

Fazendo-se uma extensão analítica para ω complexo, podemos mostrar, usando (5.42), que

$$\Pi^{RPA}(\omega)^{-1} \sum_\nu sgn(\omega_\nu) \frac{C^\nu C^{\nu\dagger}}{\omega - \omega_\nu} = 1 \quad (5.45)$$

ou seja,

$$\Pi^{RPA}(\omega) = \sum_{\nu} \text{sgn}(\omega_{\nu}) \frac{C^{\nu} C^{\nu\dagger}}{\omega - \omega_{\nu} + i\eta_{\nu}} \quad (\omega \text{ complexo}). \quad (5.46)$$

onde os infinitésimos foram colocados para evitar as singularidades no eixo real.

Recolocando os índices em (5.46) e usando (5.15) temos

$$\Pi^{RPA}[A(\mathbf{x}), B(\mathbf{y}), \omega] = \sum_{\nu} \text{sgn}(\omega_{\nu}) \frac{\sum_{pn} C_{pn}^{\nu} \bar{U}_n(\mathbf{x}) \Gamma_A \mathcal{U}_p(\mathbf{x}) \sum_{p'n'} C_{p'n'}^{\nu*} \bar{U}_{p'}(\mathbf{y}) \Gamma_B \mathcal{U}_{n'}(\mathbf{y})}{\omega - \omega_{\nu} + i\eta_{\nu}} \quad (5.47)$$

Comparando essa equação com o propagador exato em (5.30), podemos fazer as identificações

$$\omega_{\nu} > 0 : \begin{cases} \eta_{\nu} = \eta & (\eta > 0) \\ (E_{\nu} - E)_{RPA} = \omega_{\nu} \\ \langle \Psi | A_S(\mathbf{x}) | \Psi_{\nu} \rangle_{RPA} = \sum_{pn} C_{pn}^{\nu} \bar{U}_n(\mathbf{x}) \Gamma_A \mathcal{U}_p(\mathbf{x}) \\ \langle \Psi_{\nu} | B_S(\mathbf{y}) | \Psi \rangle_{RPA} = \sum_{p'n'} C_{p'n'}^{\nu*} \bar{U}_{p'}(\mathbf{y}) \Gamma_B \mathcal{U}_{n'}(\mathbf{y}) \end{cases} \quad (5.48)$$

$$\omega_{\nu} < 0 : \begin{cases} \eta_{\nu} = -\eta & (\eta > 0) \\ (E_{\nu} - E)_{RPA} = -\omega_{\nu} \\ \langle \Psi_{\nu} | A_S(\mathbf{x}) | \Psi \rangle_{RPA} = \sum_{pn} C_{pn}^{\nu} \bar{U}_n(\mathbf{x}) \Gamma_A \mathcal{U}_p(\mathbf{x}) \\ \langle \Psi | B_S(\mathbf{y}) | \Psi_{\nu} \rangle_{RPA} = \sum_{p'n'} C_{p'n'}^{\nu*} \bar{U}_{p'}(\mathbf{y}) \Gamma_B \mathcal{U}_{n'}(\mathbf{y}) \end{cases} \quad (5.49)$$

5.4 Equações da RPA na Forma Matricial

Como vimos na seção anterior, para determinarmos Π^{RPA} basta resolver a equação de autovalores (5.41). Relembremos que os índices nessas equações matriciais varrem apenas o espaço indicado em (5.37), isto é, pn é da forma $p\bar{n}$ ou $\bar{p}n$. É conveniente introduzir a notação

$$\begin{aligned} C_{p\bar{n}}^{\nu} &= X_{p\bar{n}}^{\nu} \\ C_{\bar{p}n}^{\nu} &= Y_{\bar{p}n}^{\nu} \end{aligned} \quad (5.50)$$

e reescrever (5.41) na forma

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^{\dagger} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{\nu} \\ Y^{\nu} \end{bmatrix} = \omega_{\nu} \begin{bmatrix} X^{\nu} \\ -Y^{\nu} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Essa é a equação da RPA na forma matricial. Mais explicitamente

$$\begin{aligned} \sum_{p'\bar{n}'} A_{p\bar{n} p'\bar{n}'} X_{p'\bar{n}'}^\nu + \sum_{n'\bar{p}'} B_{p\bar{n} n'\bar{p}'} Y_{n'\bar{p}'}^\nu &= \omega_\nu X_{p\bar{n}}^\nu \\ \sum_{p'\bar{n}'} B_{p'\bar{n} n\bar{p}}^* X_{p'\bar{n}'}^\nu + \sum_{n'\bar{p}'} D_{n\bar{p} n'\bar{p}'} Y_{n'\bar{p}'}^\nu &= -\omega_\nu Y_{n\bar{p}}^\nu \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde A , B e D estão dadas em (5.40), com $\omega = 0$.

5.5 Função de Excitação e Regras de Soma

Supondo que o sistema nuclear seja excitado com frequência ω pelo operador de 1 corpo

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}e^{-i\omega t} + \mathcal{F}^\dagger e^{i\omega t} \quad (5.53)$$

onde

$$\mathcal{F} = \int d^3x F(x) = \int d^3x \bar{\psi}(x) \Gamma_F \psi(x) \quad (5.54)$$

sabemos pela regra de ouro de Fermi [21, (2.114)] que as **probabilidades de transição** por unidade de tempo para cada uma das duas partes de (5.53) são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[\Psi \xrightarrow{\mathcal{F}} \Psi_\nu, \omega] &= 2\pi |\langle \Psi_\nu | \mathcal{F} | \Psi \rangle|^2 \delta[\omega - (E_\nu - E)] \\ \mathcal{W}[\Psi \xrightarrow{\mathcal{F}^\dagger} \Psi_\nu, \omega] &= 2\pi |\langle \Psi_\nu | \mathcal{F}^\dagger | \Psi \rangle|^2 \delta[\omega + (E_\nu - E)] \end{aligned} \quad (5.55)$$

Define-se, então, a **função de excitação** (“strength function”)

$$S_F(\omega) = \sum_\nu \left\{ |\langle \Psi_\nu | \mathcal{F} | \Psi \rangle|^2 \delta[\omega - (E_\nu - E)] - |\langle \Psi_\nu | \mathcal{F}^\dagger | \Psi \rangle|^2 \delta[\omega + (E_\nu - E)] \right\} \quad (5.56)$$

Dessa forma a **intensidade de transição** total direta (“forward”) é dada por

$$S_F^{(+)} = \int_0^\infty d\omega S_F(\omega) = \sum_\nu |\langle \Psi_\nu | \mathcal{F} | \Psi \rangle|^2 \quad (5.57)$$

e a inversa (“backward”) por

$$S_F^{(-)} = \int_0^\infty d\omega S_F(-\omega) = \sum_\nu |\langle \Psi_\nu | \mathcal{F}^\dagger | \Psi \rangle|^2 \quad (5.58)$$

onde assumiremos que as energias de excitação $E_\nu - E$ são todas positivas. Dessas expressões é fácil, usando as relações de completeza, obter a regra de soma

$$S_F^{(+)} - S_F^{(-)} = \langle \Psi | [\mathcal{F}^\dagger, \mathcal{F}] | \Psi \rangle \quad (5.59)$$

O nosso interesse específico nessa tese são as excitações com troca de carga, em particular o estado isobárico análogo (IAS) e a ressonância de Gamow-Teller (GT).

Para o IAS devemos tomar em (5.54)

$$\Gamma_{IAS} = \frac{1}{2}\gamma_0\tau_+ \quad (5.60)$$

portanto

$$\mathcal{F}_{IAS} = \frac{1}{2} \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma_0 \tau_+ \psi(x) = \frac{1}{2} \int d^3x \psi^\dagger(x) \tau_+ \psi(x) = T_+ \quad (5.61)$$

e a regra de soma (5.59) neste caso dá

$$S_{IAS}^{(+)} - S_{IAS}^{(-)} = N - Z \quad (5.62)$$

onde usamos $[T_+, T_-] = 2T_3$

Para a GT,

$$\Gamma_{GT}^i = \frac{1}{2}\gamma_0 \Sigma^i \tau_+ \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.63)$$

e

$$\mathcal{F}_{GT}^i = \frac{1}{2} \int d^3x \psi^\dagger(x) \Sigma^i \tau_+ \psi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Sigma^i(n) \tau_+(n) \quad (5.64)$$

Então

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}_{GT}^{i\dagger}, \mathcal{F}_{GT}^i] &= \frac{1}{4} \sum_{n,n'}^A [\Sigma^i(n) \tau_-(n), \Sigma^i(n') \tau_+(n')] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^A \Sigma^i(n) \Sigma^i(n) [\tau_-(n), \tau_+(n)] \\ &= - \sum_{n=1}^A \Sigma^i(n) \Sigma^i(n) \tau_3 \end{aligned} \quad (5.65)$$

Nesse caso define-se

$$S_{GT}^{(\pm)} = \sum_{i=1}^3 S_{GT}^{i(\pm)} \quad (5.66)$$

e, como $\sum_{i=1}^3 \Sigma^i(n) \Sigma^i(n) = 3$, obtém-se

$$S_{GT}^{(+)} - S_{GT}^{(-)} = 3(N - Z) \quad (5.67)$$

Por outro lado na teoria da resposta linear mostra-se que a **função resposta** do sistema à perturbação (5.53) é dada por

$$R_F(\omega) = \int d^3x d^3y \Pi_{ret}[F^\dagger(\mathbf{x}), F(\mathbf{y}), \omega] \quad (5.68)$$

onde Π_{ret} é a versão causal ou retardada do propagador de polarização, cuja decomposição espectral difere daquela da versão cronológica (5.30) apenas pelo sinal do infinitésimo na segunda parcela, ou seja

$$\Pi_{ret}[F^\dagger(\mathbf{x}), F(\mathbf{y}), \omega] = \sum_\nu \left[\frac{\langle \Psi | F^\dagger(\mathbf{x}) | \Psi_\nu \rangle \langle \Psi_\nu | F(\mathbf{y}) | \Psi \rangle}{\omega - (E_\nu - E) + i\eta} - \frac{\langle \Psi | F(\mathbf{y}) | \Psi_\nu \rangle \langle \Psi_\nu | F^\dagger(\mathbf{x}) | \Psi \rangle}{\omega + (E_\nu - E) + i\eta} \right] \quad (5.69)$$

Usando-se

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = P \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x) \quad (5.70)$$

é fácil demonstrar a relação

$$S_F(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} R_F(\omega). \quad (5.71)$$

Como mencionamos acima, a resposta linear do sistema devido a uma perturbação externa é obtida do propagador de polarização retardado. No entanto a derivação da equação da RPA que obtivemos nas seções anteriores foi baseada no propagador de polarização cronológico definido em (5.3). Isso acontece porque os teoremas de Gell-Mann e Low e Wick empregados para obter essa equação só se aplicam a um produto de operadores ordenado cronologicamente. Comparando (5.69) com (5.30) temos que esses propagadores estão relacionados por

$$\begin{aligned} \text{Re} \Pi[F^\dagger(\mathbf{x}), F(\mathbf{y}), \omega] &= \text{Re} \Pi_{ret}[F^\dagger(\mathbf{x}), F(\mathbf{y}), \omega] \\ \text{Im} \Pi[F^\dagger(\mathbf{x}), F(\mathbf{y}), \omega] \text{sgn}(\omega) &= \text{Im} \Pi_{ret}[F^\dagger(\mathbf{x}), F(\mathbf{y}), \omega] \end{aligned} \quad (5.72)$$

Essas relações são muito importantes, porque através delas obtemos Π_{ret} , que está associado com a resposta linear do sistema, a partir de Π .

De (5.48)-(5.49) a expressão para a função de excitação (5.56) na RPA é dada por

$$S_F^{RPA}(\omega) = \sum_{(\omega_\nu > 0)} |\langle \Psi_\nu | \mathcal{F} | \Psi \rangle_{RPA}|^2 \delta(\omega - \omega_\nu) - \sum_{(\omega_\nu < 0)} |\langle \Psi_\nu | \mathcal{F}^\dagger | \Psi \rangle_{RPA}|^2 \delta(\omega - \omega_\nu) \quad (5.73)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} S_F^{(+)\text{RPA}} &= \int_0^\infty d\omega S_F^{\text{RPA}}(\omega) = \sum_{(\omega_\nu > 0)} |\langle \Psi_\nu | \mathcal{F} | \Psi \rangle_{\text{RPA}}|^2 \\ S_F^{(-)\text{RPA}} &= \int_0^\infty d\omega S_F^{\text{RPA}}(-\omega) = \sum_{(\omega_\nu < 0)} |\langle \Psi_\nu | \mathcal{F}^\dagger | \Psi \rangle_{\text{RPA}}|^2 \end{aligned} \quad (5.74)$$

onde, agora,

$$\sum_{p\bar{n}} X_{p\bar{n}}^{\nu*} \langle p | \gamma_0 \Gamma_F | \bar{n} \rangle + \sum_{n\bar{p}} Y_{n\bar{p}}^{\nu*} \langle \bar{p} | \gamma_0 \Gamma_F | n \rangle = \begin{cases} \langle \Psi_\nu | \mathcal{F} | \Psi \rangle_{\text{RPA}} & (\omega_\nu > 0) \\ \langle \Psi | \mathcal{F} | \Psi_\nu \rangle_{\text{RPA}} & (\omega_\nu < 0) \end{cases} \quad (5.75)$$

com $\langle r | \Omega | s \rangle \doteq \int d^3x \mathcal{U}_r^\dagger(x) \Omega \mathcal{U}_s(x)$.

5.6 Equações da RPA com Bom Momento Angular

Nas seções anteriores deduzimos as equações da RPA para as ressonâncias com troca de carga na representação de partícula-buraco. Queremos agora escrever as equações em (5.51) na forma acoplada de Racah, correspondente ao momento angular total J . Iniciaremos por obter o kernel da RPA em (5.21) na forma acoplada. Para esse propósito, e como estamos interessados aqui somente em núcleos esféricos, os espinores de Hartree em (5.21) têm a forma (3.41).

Além disso, o propagador livre do pión é dado, na aproximação instantânea, por

$$D_{\pi ab}^0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{-k^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \delta_{ab} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m_\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta_{ab} \quad (5.76)$$

No entanto, o propagador do ρ , dado por

$$D_{\rho ab}^{0\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \frac{\delta_{ab}}{-k^2 - m_\rho^2 + i\epsilon} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m_\rho^2} \right) \quad (5.77)$$

contém a matriz da métrica de Lorentz $g^{\mu\nu}$ e o termo $k^\mu k^\nu / m_\rho^2$. Esse último inclui complicações adicionais tanto algébricas como numéricas. Por outro lado vamos avaliar a contribuição desse termo para as seguintes situações :

$$\frac{k^\mu k^\nu}{m_\rho^2} \sim \begin{cases} \left(\frac{\omega}{m_\rho} \right)^2 \sim 1.7 \cdot 10^{-4} & (\mu = 0, \nu = 0) \\ \frac{\omega k_F}{m_\rho^2} \sim 0.47 \cdot 10^{-2} & (\mu = 0, \nu = i) \\ \left(\frac{k_F}{m_\rho} \right)^2 \sim 0.13 & (\mu = i, \nu = j) \end{cases} \quad (5.78)$$

Para as duas primeiras situações, podemos ver que é razoável desprezar as contribuições correspondentes, o que justifica, também para esse termo, a aproximação instantânea ($\omega \rightarrow 0$). Já para a terceira, essa simplificação parece ser menos aceitável. Apesar das complicações algébricas e numéricas serem contornáveis, para o nível de aproximações que pretendemos fazer neste trabalho e como um ponto de partida do cálculo relativístico de excitações com troca de carga adotaremos aqui a simplificação de eliminar esse termo.

Isso permite, no que segue, tratar os propagadores do π e ρ da mesma forma. Para isso os termos δ_{ab} no pión e $-\delta_{ab}g^{\mu\nu}$ no ρ estarão contraídos no kernel da RPA em (5.21)-(5.23). Assim passaremos a escrever a parte restante dos propagadores desses mésons na forma

$$\begin{aligned} D_{\pi,\rho}^0(x-y) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{-\mathbf{k}^2 - m_{\pi,\rho}^2 + i\epsilon} \\ &= m_{\pi,\rho} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^J j_J(im_{\pi,\rho}x_{<}) h_J^{(1)}(im_{\pi,\rho}x_{>}) Y_{JM}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{JM}^*(\hat{\mathbf{y}}) \\ &= m_{\pi,\rho} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^J f_J(x,y;m_{\pi,\rho}) Y_{JM}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{JM}^*(\hat{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (5.79)$$

A decomposição multipolar acima está explicada no apêndice E.

Com esses resultados, como podemos ver no apêndice E, o kernel da RPA em (5.21), pode ser escrito como

$$\begin{aligned} K_{rs\,nm} &= \sum_{i=\pi,\rho} \sum_{JM} (-)^{j_s-m_s} (-)^{j_m-m_m} \langle j_r m_r j_s -m_s | JM \rangle \\ &\quad \times \langle j_n m_n j_m -m_m | JM \rangle K_{a_r a_s a_n a_m}^{(J)i} \end{aligned} \quad (5.80)$$

onde

$$\begin{aligned} K_{a_r a_s a_n a_m}^{(J)\pi} &= \left(\frac{g_\pi}{2M} \right)^2 m_\pi \int dx dy \hat{J}^{-2} \langle \kappa_r \| Y_J \| -\kappa_s \rangle \langle \kappa_m \| Y_J \| -\kappa_n \rangle^* \\ &\quad \times \left[(G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y \partial_x \partial_y f_J(x,y;m_\pi) \right. \\ &\quad - (G_{a_r} G_{a_s} - F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y \frac{\kappa_r + \kappa_s}{x} \partial_y f_J(x,y;m_\pi) \\ &\quad - (G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} - F_{a_m} F_{a_n})_y \frac{\kappa_m + \kappa_n}{y} \partial_x f_J(x,y;m_\pi) \\ &\quad \left. + (G_{a_r} G_{a_s} - F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} - F_{a_m} F_{a_n})_y \frac{\kappa_r + \kappa_s}{x} \frac{\kappa_m + \kappa_n}{y} f_J(x,y;m_\pi) \right] \\ &\quad \times \sum_{k=-1,0,1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n} \end{aligned} \quad (5.81)$$

e, usando as identidades

$$\begin{aligned} \langle \kappa_r \| Y_J \| \kappa_s \rangle^* &= (-)^{j_r - j_s} \langle \kappa_s \| Y_J \| \kappa_r \rangle \\ \langle \kappa_r \| T_{JJ'} \| \kappa_s \rangle^* &= (-)^{J' + 1 - J} (-)^{j_r - j_s} \langle \kappa_s \| T_{JJ'} \| \kappa_r \rangle \end{aligned} \quad (5.82)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} K_{a_r a_s a_n a_m}^{(J)\rho} &= K_{a_r a_s a_n a_m}^{(V,J)\rho} + K_{(1)a_r a_s a_n a_m}^{(VT,J)\rho} + K_{(2)a_r a_s a_n a_m}^{(VT,J)\rho} + (-)^{j_r - j_s} K_{(2)a_s a_r a_n a_m}^{(VT,J)\rho} \\ &+ K_{(2)a_n a_m a_r a_s}^{(VT,J)\rho} + (-)^{j_n - j_m} K_{(2)a_n a_m a_r a_s}^{(VT,J)\rho} + K_{a_r a_s a_n a_m}^{(T,J)\rho} \end{aligned} \quad (5.83)$$

com

$$\begin{aligned} K_{a_r a_s a_n a_m}^{(V,J)\rho} &= -\frac{g_\rho^2}{4} m_\rho \int dxdy \hat{J}^{-2} \left[\langle \kappa_r \| Y_J \| \kappa_s \rangle \langle \kappa_n \| Y_J \| \kappa_m \rangle^* \right. \\ &\times (G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y f_J(x, y; m_\rho) \\ &+ \sum_{J'} (G_{a_r} F_{a_s} \langle \kappa_r \| T_{JJ'} \| \kappa_s \rangle - F_{a_r} G_{a_s} \langle -\kappa_r \| T_{JJ'} \| \kappa_s \rangle)_x \\ &\times (G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m \rangle^* - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m \rangle^*)_y \\ &\left. \times f_{J'}(x, y; m_\rho) \right] \sum_{k=-1,0,1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} K_{(1)a_r a_s a_n a_m}^{(VT,J)\rho} &= \frac{g_\rho f_\rho}{4M} m_\rho \int dxdy \hat{J}^{-2} \langle \kappa_r \| Y_J \| \kappa_s \rangle \langle \kappa_n \| Y_J \| \kappa_m \rangle^* \\ &\times \left[(G_{a_r} F_{a_s} + F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y \partial_x f_J(x, y; m_\rho) \right. \\ &- (G_{a_r} F_{a_s} - F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y \frac{\kappa_r - \kappa_s}{x} \partial_y f_J(x, y; m_\rho) \\ &+ (G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_n} F_{a_m} + F_{a_n} G_{a_m})_y \partial_y f_J(x, y; m_\rho) \\ &\left. - (G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_n} F_{a_m} - F_{a_n} G_{a_m})_y \frac{\kappa_n - \kappa_m}{y} f_J(x, y; m_\rho) \right] \\ &\times \sum_{k=-1,0,1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}, \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned} K_{(2)a_r a_s a_n a_m}^{(VT,J)\rho} &= -\frac{1}{2} \sum_{J'} \frac{g_\rho f_\rho}{4M} m_\rho \int dxdy \left\{ \left[\frac{2}{x} (-)^{j_r + j_s + J' - 1} \hat{J}^{-1} \sqrt{j_r(j_r + 1)(2j_r + 1)} \right. \right. \\ &\times \langle \kappa_r \| Y_J' \| \kappa_s \rangle \left. \begin{Bmatrix} j_r & j_s & J \\ J' & 1 & j_r \end{Bmatrix} (G_{a_r} G_{a_s} - F_{a_r} F_{a_s})_x \right. \\ &\left. \left. \times (G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m \rangle^* - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m \rangle^*)_y \right] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \hat{J}^{-2} (G_{a_r} G_{a_s} \frac{\kappa_r - \kappa_s + 1}{x} < \kappa_r \|T_{JJ'}\| - \kappa_s > + F_{a_r} F_{a_s} \frac{\kappa_r - \kappa_s - 1}{x} < -\kappa_r \|T_{JJ'}\| \kappa_s >)_x \\
& \times (G_{a_m} F_{a_n} < -\kappa_n \|T_{JJ'}\| \kappa_m >^* - F_{a_m} G_{a_n} < \kappa_n \|T_{JJ'}\| - \kappa_m >^*)_y \Big] \\
& \times f_{J'}(x, y; m_\rho) \\
& + \hat{J}^{-2} (G_{a_r} G_{a_s} < \kappa_r \|T_{JJ'}\| - \kappa_s > - F_{a_r} F_{a_s} < -\kappa_r \|T_{JJ'}\| \kappa_s >)_x \\
& \times (G_{a_m} F_{a_n} < -\kappa_n \|T_{JJ'}\| \kappa_m >^* - F_{a_m} G_{a_n} < \kappa_n \|T_{JJ'}\| - \kappa_m >^*)_y \\
& \times \partial_x f_{J'}(x, y; m_\rho) \Big\} \sum_{k=-1,0,1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}, \tag{5.86}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{a_r a_s a_n a_m}^{(T,J)\rho} & = (-) \left(\frac{f_\rho}{2M} \right)^2 m_\rho \int dx dy \hat{J}^2 \Big\{ < \kappa_r \|Y_J\| \kappa_s > < \kappa_n \|Y_J\| \kappa_m >^* \\
& \left[(G_{a_r} F_{a_s} + F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} F_{a_n} + F_{a_m} G_{a_n})_y \partial_x \partial_y f_J(x, y; m_\rho) \right. \\
& - \frac{\kappa_r - \kappa_s}{x} (G_{a_r} F_{a_s} - F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} F_{a_n} + F_{a_m} G_{a_n})_y \partial_y f_J(x, y; m_\rho) \\
& - \frac{\kappa_m - \kappa_n}{y} (G_{a_r} F_{a_s} + F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} F_{a_n} - F_{a_m} G_{a_n})_y \partial_x f_J(x, y; m_\rho) \\
& \left. + \frac{(\kappa_r - \kappa_s)(\kappa_m - \kappa_n)}{xy} (G_{a_r} F_{a_s} - F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} F_{a_n} - F_{a_m} G_{a_n})_y f_J(x, y; m_\rho) \right] \\
& + < \kappa_r \|Y_J\| - \kappa_s > < \kappa_n \|Y_J\| - \kappa_m >^* \\
& \left[(G_{a_r} G_{a_s} - F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} - F_{a_m} F_{a_n})_y \partial_x \partial_y f_J(x, y; m_\rho) \right. \\
& - \frac{\kappa_r + \kappa_s}{x} (G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} - F_{a_m} F_{a_n})_y \partial_y f_J(x, y; m_\rho) \\
& - \frac{\kappa_m + \kappa_n}{y} (G_{a_r} G_{a_s} - F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y \partial_x f_J(x, y; m_\rho) \\
& \left. + \frac{(\kappa_r + \kappa_s)(\kappa_m + \kappa_n)}{xy} (G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y f_J(x, y; m_\rho) \right] \\
& + \sum_{J'} \left[\nabla_x^2 f_{J'}(x, y; m_\rho) - \frac{J'(J'+1)}{x^2} f_{J'}(x, y; m_\rho) \right] \\
& (G_{a_r} G_{a_s} < \kappa_r \|T_{JJ'}\| \kappa_s > - F_{a_r} F_{a_s} < -\kappa_r \|T_{JJ'}\| - \kappa_s >)_x \\
& (G_{a_m} G_{a_n} < \kappa_n \|T_{JJ'}\| \kappa_m >^* - F_{a_m} F_{a_n} < -\kappa_n \|T_{JJ'}\| - \kappa_m >^*)_y \Big\} \\
& \sum_{k=0,\pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n} \tag{5.87}
\end{aligned}$$

O tensor $T_{JJ'}^M(\hat{x})$ é definido como

$$T_{JJ'}^M(\hat{x}) = \sum_{M'k} < J' M' 1 k | J M > \sigma_k^1 Y_{J' M'}(\hat{x}) \tag{5.88}$$

Como as energias de partícula-única, num potencial esférico, não dependem da projeção

do momento angular total j , podemos escrever

$$\begin{aligned} \omega_{rs}\delta_{rn}\delta_{sm} &= \sum_{JM} (-)^{j_s-m_s} (-)^{j_m-m_m} \langle j_r m_r j_s -m_s | JM \rangle \\ &\times \langle j_n m_n j_m -m_m | JM \rangle \omega_{a_r a_s; a_n a_m}^{(J)} \end{aligned} \quad (5.89)$$

onde

$$\omega_{a_r a_s; a_n a_m}^{(J)} = \omega_{a_r a_s} \delta_{a_r a_n} \delta_{a_s a_m} \quad (5.90)$$

Com esses resultados obtemos

$$\begin{aligned} A_{p\bar{n}; p' \bar{n}'} &= \sum_{JM} (-)^{j_{\bar{n}}-m_{\bar{n}}} (-)^{j_{\bar{n}'}-m_{\bar{n}'}} \langle j_p m_p j_{\bar{n}} -m_{\bar{n}} | JM \rangle \\ &\times \langle j_{p'} m_{p'} j_{\bar{n}'} -m_{\bar{n}'} | JM \rangle A_{a_p a_{\bar{n}}; a_{p'} a_{\bar{n}'}}^{(J)} \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} B_{p\bar{n}; n' \bar{p}'} &= \sum_{JM} (-)^{j_{\bar{n}}-m_{\bar{n}}} (-)^{j_{n'}-m_{n'}} \langle j_p m_p j_{\bar{n}} -m_{\bar{n}} | JM \rangle \\ &\times \langle j_{\bar{p}'} m_{\bar{p}'} j_{n'} -m_{n'} | JM \rangle B_{a_p a_{\bar{n}}; a_{n'} a_{\bar{p}'}}^{(J)} \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} D_{n\bar{p}; n' \bar{p}'} &= \sum_{JM} (-)^{j_n-m_n} (-)^{j_{n'}-m_{n'}} \langle j_{\bar{p}} m_{\bar{p}} j_n -m_n | JM \rangle \\ &\times \langle j_{\bar{p}'} m_{\bar{p}'} j_{n'} -m_{n'} | JM \rangle D_{a_n a_{\bar{p}}; a_{n'} a_{\bar{p}'}}^{(J)} \end{aligned} \quad (5.93)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{a_p a_{\bar{n}}; a_{p'} a_{\bar{n}'}}^{(J)} &= \omega_{a_p a_{\bar{n}}; a_{p'} a_{\bar{n}'}}^{(J)} + \sum_{i=\pi, \rho} K_{a_p a_{\bar{n}}; a_{p'} a_{\bar{n}'}}^{(J)i} \\ B_{a_p a_{\bar{n}}; a_{n'} a_{\bar{p}'}}^{(J)} &= \sum_{i=\pi, \rho} K_{a_p a_{\bar{n}}; a_{n'} a_{\bar{p}'}}^{(J)i} \\ D_{a_n a_{\bar{p}}; a_{n'} a_{\bar{p}'}}^{(J)} &= \omega_{a_n a_{\bar{p}}; a_{n'} a_{\bar{p}'}}^{(J)} + \sum_{i=\pi, \rho} K_{a_n a_{\bar{p}}; a_{n'} a_{\bar{p}'}}^{(J)i} \end{aligned} \quad (5.94)$$

Se adotarmos agora o seguinte ansatz para os autovetores em (5.51)

$$\begin{aligned} X_{p\bar{n}}^\nu &= (-)^{j_{\bar{n}}m_{\bar{n}}} \langle j_p m_p j_{\bar{n}} -m_{\bar{n}} | JM \rangle X_{a_p a_{\bar{n}}}^{\nu(J)} \\ Y_{n\bar{p}}^\nu &= (-)^{j_n-m_n} \langle j_{\bar{p}} m_{\bar{p}} j_n -m_n | JM \rangle Y_{a_n a_{\bar{p}}}^{\nu(J)} \end{aligned} \quad (5.95)$$

o introduzirmos em (5.52) e usarmos (5.91)-(5.93) e a ortogonalidade dos coeficientes de Clebsch-Gordan, obteremos

$$\begin{aligned} \omega_\nu^{(J)} X_{a_p a_{\bar{n}}}^{\nu(J)} &= \sum_{a_{p'} a_{\bar{n}'}} A_{a_p a_{\bar{n}}; a_{p'} a_{\bar{n}'}}^{(J)} X_{a_{p'} a_{\bar{n}'}}^{\nu(J)} + \sum_{a_{p'} a_{n'}} B_{a_p a_{\bar{n}}; a_{n'} a_{\bar{p}'}}^{(J)} Y_{a_{n'} a_{\bar{p}'}}^{\nu(J)} \\ -\omega_\nu^{(J)} Y_{a_n a_{\bar{p}}}^{\nu(J)} &= \sum_{a_{p'} a_{\bar{n}'}} B_{a_n a_{\bar{p}}; a_{p'} a_{\bar{n}'}}^{(J)} X_{a_{p'} a_{\bar{n}'}}^{\nu(J)} + \sum_{a_{p'} a_{n'}} D_{a_n a_{\bar{p}}; a_{n'} a_{\bar{p}'}}^{(J)} Y_{a_{n'} a_{\bar{p}'}}^{\nu(J)} \end{aligned} \quad (5.96)$$

que pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} A^{(J)} & B^{(J)} \\ B^{\dagger(J)} & D^{(J)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{\nu(J)} \\ Y^{\nu(J)} \end{bmatrix} = \omega_{\nu}^{(J)} \begin{bmatrix} X^{\nu(J)} \\ -Y^{\nu(J)} \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

Essa é a forma acoplada das equações da RPA.

5.7 Amplitudes e Intensidades de Transição com Momento Angular Definido

Suponhamos que o operador de excitação seja um tensor esférico de posto J , isto é, que a eq. (5.54) tenha a forma

$$\mathcal{F}_M^J = \int d^3x F_M^J(x) = \int d^3x \bar{\psi}(x) \Gamma_{F_M}^J \psi(x) \quad (5.98)$$

Suponhamos também que os estados nucleares tenham momento angular bem definido, isto é

$$|\Psi_{\nu}\rangle \rightarrow |\Psi_{\nu M'}^{J'}\rangle \quad (5.99)$$

e, que o núcleo alvo tenha simetria esférica e, portanto, momento angular nulo. Em lugar de (5.57), a intensidade de transição total direta é agora definida por

$$\begin{aligned} S_{F^J}^{(+)} &= \sum_M S_{F_M^J}^{(+)} = \sum_M \int_0^{\infty} d\omega S_{F_M^J}(\omega) = \sum_{M\nu J' M'} |\langle \Psi_{\nu M'}^{J'} | \mathcal{F}_M^J | \Psi \rangle|^2 \\ &= \sum_{\nu} |\langle \Psi_{\nu}^J | \mathcal{F}^J | \Psi \rangle|^2 \end{aligned} \quad (5.100)$$

e a inversa por

$$\begin{aligned} S_{F^J}^{(-)} &= \sum_M S_{F_M^J}^{(-)} = \sum_M \int_0^{\infty} d\omega S_{F_M^J}(-\omega) = \sum_{M\nu J' M'} |\langle \Psi | \mathcal{F}_M^J | \Psi_{\nu M'}^{J'} \rangle|^2 \\ &= \sum_{\nu} |\langle \Psi | \mathcal{F}^J | \Psi_{\nu}^J \rangle|^2 \end{aligned} \quad (5.101)$$

Usando o teorema de Wigner-Eckart [22],

$$\langle j_1 m_1 | T_q^k | j_2 m_2 \rangle = \frac{(-)^{j_2 - m_2}}{\sqrt{2k + 1}} \langle j_1 m_1 j_2 - m_2 | k q \rangle \langle j_1 || T^k || j_2 \rangle, \quad (5.102)$$

e (5.95) obtemos para o primeiro membro de (5.75)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p\bar{n}} X_{p\bar{n}}^{\nu*} \langle p | \gamma_0 \Gamma_F | \bar{n} \rangle + \sum_{n\bar{p}} Y_{n\bar{p}}^{\nu*} \langle \bar{p} | \gamma_0 \Gamma_F | n \rangle \rightarrow \\
 & \sum_{a_p a_{\bar{n}}} \sum_{m_p m_{\bar{n}}} (-)^{j_{\bar{n}} - m_{\bar{n}}} \langle j_p m_p j_{\bar{n}} - m_{\bar{n}} | J' M' \rangle X_{a_p a_{\bar{n}}}^{\nu(J')*} \\
 & (-)^{j_{\bar{n}} - m_{\bar{n}}} \langle j_p m_p j_{\bar{n}} - m_{\bar{n}} | J M \rangle \frac{\langle p || \gamma_0 \Gamma_F^J || \bar{n} \rangle}{\sqrt{2J+1}} \\
 & + \sum_{a_n a_{\bar{p}}} \sum_{m_n m_{\bar{p}}} (-)^{j_n - m_n} \langle j_{\bar{p}} m_{\bar{p}} j_n - m_n | J' M' \rangle Y_{a_n a_{\bar{p}}}^{\nu(J')*} \\
 & (-)^{j_n - m_n} \langle j_{\bar{p}} m_{\bar{p}} j_n - m_n | J M \rangle \frac{\langle \bar{p} || \gamma_0 \Gamma_F^J || n \rangle}{\sqrt{2J+1}} \\
 & = \frac{\delta_{JJ'} \delta_{MM'}}{\sqrt{2J+1}} \left(\sum_{a_p a_{\bar{n}}} X_{a_p a_{\bar{n}}}^{\nu(J)*} \langle p || \gamma_0 \Gamma_F^J || \bar{n} \rangle + \sum_{a_n a_{\bar{p}}} Y_{a_n a_{\bar{p}}}^{\nu(J)*} \langle \bar{p} || \gamma_0 \Gamma_F^J || n \rangle \right) \\
 & = \begin{cases} \langle \Psi_{\nu M'}^{J'} | \mathcal{F}_M^J | \Psi \rangle_{RPA} & (\omega_{\nu}^{(J)} > 0) \\ (-)^{J'+M'} \langle \Psi | \mathcal{F}_M^J | \Psi_{\nu - M'}^{J'} \rangle_{RPA} & (\omega_{\nu}^{(J)} < 0) \end{cases} \quad (5.103)
 \end{aligned}$$

As identificações acima foram feitas do mesmo modo que em (5.75), sendo que o sinal de M' para $\omega_{\nu}^{(J)} < 0$ decorre do teorema de Wigner-Eckart, isto é,

$$\langle \Psi_{\nu M'}^{J'} | \mathcal{F}_M^J | \Psi \rangle = \frac{\delta_{JJ'} \delta_{MM'}}{\sqrt{2J+1}} \langle \Psi_{\nu}^J || \mathcal{F}^J || \Psi \rangle \quad (5.104)$$

e

$$(-)^{J'+M'} \langle \Psi | \mathcal{F}_M^J | \Psi_{\nu - M'}^{J'} \rangle = \frac{\delta_{JJ'} \delta_{MM'}}{\sqrt{2J+1}} \langle \Psi || \mathcal{F}^J || \Psi_{\nu}^J \rangle \quad (5.105)$$

Quanto à fase $(-)^{J'+M'}$ em (5.103), ela foi colocada por conveniência. Vemos, portanto, que as amplitudes em (5.95) estão relacionadas aos estados físicos $|\Psi_{\nu M'}^J\rangle$ para $\omega_{\nu}^{(J)} > 0$ e $(-)^{J+M} |\Psi_{\nu - M}^J\rangle$ para $\omega_{\nu}^{(J)} < 0$. Lembremos, mais uma vez, que para excitações com troca de carga esses dois estados estão em isóbaros distintos.

Esses resultados permitem definir as amplitudes de transição reduzidas na RPA:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{a_p a_{\bar{n}}} X_{a_p a_{\bar{n}}}^{\nu(J')*} \langle p || \gamma_0 \Gamma_F^J || \bar{n} \rangle + \sum_{a_n a_{\bar{p}}} Y_{a_n a_{\bar{p}}}^{\nu(J')*} \langle \bar{p} || \gamma_0 \Gamma_F^J || n \rangle \\
 & = \begin{cases} \langle \Psi_{\nu}^J || \mathcal{F}^J || \Psi \rangle_{RPA} & (\omega_{\nu}^{(J)} > 0) \\ \langle \Psi || \mathcal{F}^J || \Psi_{\nu}^J \rangle_{RPA} & (\omega_{\nu}^{(J)} < 0) \end{cases} \quad (5.106)
 \end{aligned}$$

Em termos delas as intensidades de transição totais em (5.100) e (5.101) são dadas por

$$S_{FJ}^{(+RPA)} = \sum_{(\omega_{\nu}^{(J)} > 0)} |\langle \Psi_{\nu}^J || \mathcal{F}^J || \Psi \rangle_{RPA}|^2 \quad (5.107)$$

e

$$S_{FJ}^{(-)RPA} = \sum_{\substack{\nu \\ (\omega_\nu^{(J)} \leq 0)}} |\langle \Psi \| \mathcal{F}^J \| \Psi_\nu^J \rangle_{RPA}|^2 \quad (5.108)$$

Capítulo 6

Resultados Numéricos

Na RMFT não é usual incluir o acoplamento tensorial entre o méson ρ e o nucleon (ρN). No entanto, esse tipo de acoplamento desempenha um importante papel para obter as ressonâncias de Gamow-Teller, como veremos na segunda seção deste capítulo. Logo, se desejamos autoconsistência, precisamos incluí-lo também na RMFT.

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira iremos apresentar os resultados numéricos da RMFT com acoplamento ρN misto e compará-los aos obtidos, usando-se apenas acoplamento ρN vetorial. Na segunda seção iremos apresentar os resultados numéricos obtidos na RPA para os estados $J^\pi = 0^+$ (IAS) e $J^\pi = 1^+$ (GTR), excitados por troca de carga a partir dos núcleos alvos ^{48}Ca , ^{90}Zr e ^{208}Pb , e compará-los com aqueles obtidos em cálculos não relativísticos da mesma espécie, e com os respectivos valores experimentais.

6.1 Soluções da RMFT

No que se refere à RMFT, onde o pión não contribui, a densidade de lagrangeana (3.1-3.5) fica determinada uma vez que as massas do nucleon e dos mésons σ , ω e ρ , as constantes de acoplamento destes mésons ao nucleon e as constantes de auto-interação do méson σ , g_2 e g_3 , sejam dadas. Na literatura são conhecidos diversos conjuntos para esses parâmetros. Dentre esses, um dos mais utilizados por ter sido testado com sucesso para uma ampla gama de núcleos, tanto esféricos como deformados, em toda a tabela periódica é o conjunto NL1 [23]. Esse é basicamente o conjunto de parâmetros que adotamos em todos os cálculos realizados neste trabalho. Seus valores estão na primeira coluna da tabela Tabela (6.1).

Na RMFT não é usual incluir o acoplamento tensorial dos mésons vetoriais ω e ρ ao

nucleon. Isso porque esse acoplamento adicional tem pouco efeito sobre os observáveis do estado fundamental. No entanto, para a GTR o acoplamento ρN tensorial desempenha um papel importante, como veremos a seguir. Assim, se desejamos um cálculo autoconsistente, precisamos incluí-lo também na RMFT. Num cálculo relativístico na aproximação de Hartree-Fock, Bouyssy e colaboradores [11] incluíram esses acoplamentos. Há razões teóricas (modelo de dominância vetorial) que permitem ligar a razão entre as constantes de acoplamento tensorial (f_ρ) e vetorial (g_ρ) do méson ρ ao momento magnético anômalo isove-torial do nucleon, isto é, $2f_\rho/g_\rho = \kappa_v = \mu_p - \mu_n - 1 = 3.7$. (O fator 2 se deve a convenções distintas para g_ρ aqui e em [11].) No entanto, há outras razões de natureza fenomenológica (espalhamento πN) que levam a um valor maior para essa razão, a saber $2f_\rho/g_\rho = 6.6$. Para a aproximação de Hartree-Fock relativística a primeria destas estimativas leva aos resultados melhores, correspondendo $f_\rho = 9.73$.

Por outro lado, os valores ajustados das constantes de acoplamentos diferem um bocado conforme se incluam ou não os termos de Fock [11]. Por esse motivo, decidimos por fixar o valor de f_ρ de modo a reproduzir a energia da GTR excitada a partir do ^{208}Pb , o que levou a $f_\rho = 9.95$, ou seja, $2f_\rho/g_\rho = 2.0$. Esse é o valor que adotamos nos cálculos RMFT com acoplamento ρN misto, mantendo os valores do NL1 para os demais parâmetros.

Para resolver as equações da RMFT para o nucleon e os mésons utilizamos o método de expansão em bases de oscilador harmônico discutido no capítulo 3, com a frequência do oscilador para férmions dada por $\hbar\omega_0 = 41A^{-1/3}$ MeV e o número máximo de camadas de oscilador para os férmions e bósons dado por $N_F = N_B = 20$. Ring e colaboradores [9] obtiveram que esses são os valores otimizados de N_F e N_B . Para resolver a equação do fóton, foi utilizado o método de funções de Green. Os cálculos de RMFT foram feitos usando-se o código FORTRAN para núcleos esféricos desenvolvido por P. Ring e colaboradores [24]

Na Tabela (6.2) estão os resultados numéricos obtidos para a energia de ligação por nucleon E/A e o raio quadrático médio para nêutrons, r_n , e prótons, r_p , no ^{48}Ca , ^{90}Zr e ^{208}Pb . Na Tabela (6.3) estão as energias de partícula única, próximas à energia de Fermi, para prótons e nêutrons, no ^{208}Pb . Pode-se ver, principalmente na Tabela (6.2), que a inclusão do acoplamento ρN tensorial afeta muito pouco os resultados. Isso justifica não termos reajustado as demais constantes de acoplamento.

	NL1	$\rho N(t)$	píon
M (MeV)	938.0		m_π (MeV) 138
m_σ (MeV)	492.25		f_π 1.00
m_ω (MeV)	795.36		
m_ρ (MeV)	763.0		
g_2 (fm ⁻¹)	-12.172		
g_3	-36.265		
g_σ	10.138		
g_ω	13.285		
g_ρ	9.9510	f_ρ 9.95	

Tabela 6.1: Parâmetros da lagrangeana de QHD usados nos cálculos.

Rigorosamente, e como ficará claro na seção seguinte, deveríamos descontar, também na RMFT, o termo de contato que naturalmente surge quando se usa acoplamento do tipo derivativo, como é o caso do acoplamento ρN tensorial. No entanto, como a inclusão desse acoplamento alterou muito pouco os resultados da RMFT, deixamos de fazê-lo nesse caso, apesar de o fazermos no cálculo RPA correspondente.

6.2 Resultados da RPA

Resolvemos as equações da RPA (5.97) para duas situações diferentes. Na primeira delas, RPA1, o acoplamento ρN tensorial é eliminado, fazendo-se $f_\rho = 0$ na densidade de lagrangeana de interação (3.4). Na segunda situação , RPA2, incluiremos esse acoplamento. Os cálculos RMFT correspondentes acompanham essa duas escolhas.

Para os cálculos RPA utilizaremos a base discreta de estados de partícula-única da RMFT, discutida no capítulo 3. Os parâmetros da lagrangeana da QHD utilizados estão listados na tabela 6.1. Como a troca de um píon não contribui na RMFT e, portanto, não existe um ajuste de parâmetros para esse méson, utilizamos valores experimentais, ou seja, $m_\pi = 138.0$ MeV e $f_\pi = 1.00$. Além disso, no cálculo RPA2 o valor de f_ρ foi ajustado para reproduzir o valor experimental da energia de excitação da GTR para o ²⁰⁸Pb.

O espaço modelo utilizado nos cálculos RPA1 e RPA2 para o IAS e a GTR inclui somente

	E/A	r_n	r_p
^{48}Ca			
NL1	-8.598	3.650	3.399
NL1+ $\rho N(t)$	-8.598	3.658	3.397
^{90}Zr			
NL1	-8.721	4.337	4.206
NL1+ $\rho N(t)$	-8.722	4.332	4.208
^{208}Pb			
NL1	-7.884	5.795	5.474
NL1+ $\rho N(t)$	-7.885	5.786	5.478

Tabela 6.2: Energia de ligação por nucleon E/A em (MeV) e raio quadrático médio para neutrons, r_n , e prótons, r_p , em (fm), para o ^{48}Ca , o ^{90}Zr e o ^{208}Pb calculados na RMFT com os parâmetros NL1 e com a inclusão do acoplamento ρN tensorial, $\rho N(t)$.

excitações $0\hbar\Omega$ e $2\hbar\Omega$ e, como os estados do contínuo não ficam bem representados por uma expansão em base de oscilador harmônico, tentamos evitá-los tanto quanto possível. Porisso incluímos somente os estados de partícula-única da RMFT que são ligados pelo menos para nêutrons e, por consistência, os correspondentes estados para prótons mesmo quando são não ligados. Esse espaço modelo não é excessivamente restrito, pois, em todos os casos considerados aqui, as regras de soma (5.62) e (5.67) foram obedecidas ao nível de pelo menos 99.5% para o IAS e 92.8% para a GTR como se pode ver na tabela Tabela (6.4). Na Tabela (6.5) estão os estados de partícula-única utilizados para construir os espaços modelo dos cálculos RPA1 e RPA2, para os núcleos alvo ^{48}Ca , ^{90}Zr e ^{208}Pb .

• Cálculo RPA1

O cálculo RPA1 para o IAS do ^{208}Pb dá uma energia de excitação (sempre medida a partir do estado fundamental do núcleo alvo) de 18.6 MeV e uma intensidade de 99% da regra de soma, $(N - Z)$, em acordo com os respectivos valores experimentais de 18.8 MeV e $\sim 100\%$, obtido em [25]. Esses resultados são da mesma qualidade daqueles obtidos por Colò et al. [26], que fizeram um cálculo não relativístico também autoconsistente, como o

	Nêutrons		Prótons	
	NL1	NL1+ $\rho N(t)$	NL1	NL1+ $\rho N(t)$
^{208}Pb				
1g7/2	-22.721	-22.839	-15.700	-15.602
2d5/2	-19.864	-19.899	-12.235	-12.195
2d3/2	-18.206	-18.242	-10.589	-10.542
1h11/2	-17.707	-17.786	-11.028	-10.978
3s1/2	-17.614	-17.580	-9.596	-9.602
1h9/2	-12.055	-12.110	-5.217	-5.132
2f7/2	-10.690	-10.683	-2.937	-2.903
2f5/2	-8.679	-8.654	-.906	-.876
1i13/2	-8.543	-8.563	-1.884	-1.862
3p3/2	-8.181	-8.118	.244	.241
3p1/2	-7.444	-7.385	.993	.986
2g9/2	-2.423	-2.390	5.615	5.638
1i11/2	-1.880	-1.869	5.020	5.084
3d5/2	-.790	-.771	4.778	4.781
4s1/2	-.557	-.543	4.048	4.050
2g7/2	-.501	-.461	6.471	6.479

Tabela 6.3: Energias de partícula única, em MeV, para prótons e nêutrons, no ^{208}Pb .

nosso, pois utilizaram a mesma interação (força de Skyrme) para obter as excitações e o estado fundamental do núcleo alvo.

É importante ressaltar que o pión não contribui para o IAS . Isso acontece porque os elementos de matriz reduzidos que aparecem no kernel da RPA para o pión em (5.81), são sempre nulos para o IAS. Com efeito

$$< \kappa || Y_J || \kappa' > = 0 \quad \text{se} \quad l + l' + J \text{ é ímpar}$$

(6.1)

e os elementos de matriz reduzidos para o pión em (5.81) têm a forma geral, $< \kappa_r || Y_J || -\kappa_s >$.

Para o IAS, $J = 0$ e $\kappa_r = \kappa_s$. Logo l_{κ_r} e $l_{-\kappa_s}$ têm paridades opostas e, portanto,

$$\langle \kappa_r || Y_0 || -\kappa_s \rangle = 0. \quad (\text{IAS}) \quad (6.2)$$

Como as GTR's têm larguras da ordem de ~ 4 MeV, os resultados que iremos mostrar aqui para a distribuição de intensidade dessas ressonâncias correspondem a uma função de excitação suavizada, que foi construída substituindo-se cada "spike" na distribuição de intensidade da RPA por uma lorentziana de mesma intensidade e com largura escolhida de modo a reproduzir a largura experimental da GTR. A energia de excitação e a intensidade da GTR são obtidas pelo ajuste de uma lorentziana ao pico principal desta função de excitação.

Com o cálculo RPA1 como descrito até aqui obteríamos que a energia de excitação e a intensidade da GTR para o ^{208}Pb seriam, respectivamente, ~ 6 MeV e 56% da regra de soma, $3(N-Z)$, enquanto os correspondentes valores experimentais são 19.2 MeV e 60-70% [25]. Isso demonstra que esse cálculo relativístico subestimaria a energia de excitação da GTR em mais do que 10 MeV, colocando essa ressonância bem abaixo do IAS, em clara contradição com a experiência. O cálculo não relativístico de Colò *et al.* tem resultados muito melhores, embora superestime a energia de excitação da GTR em cerca de 2-3 MeV.

Entretanto é ainda possível melhorar os resultados para a GTR sem perder a auto-consistência entre as partes de campo médio e de excitação. Quando tratamos com a contribuição do pión, podemos seguir a prática geral e eliminar o termo de contato, proveniente do acoplamento derivativo (pseudovetorial). Eliminar o termo de contato simula o efeito das correlações de curto alcance que mantêm os nucleons separados e, naturalmente, anulam esse termo. Além disso, Krewald *et al.* [27] num cálculo não relativístico baseado na troca de mésons π e ρ , precisaram adicionar uma interação de Landau-Migdal de alcance zero de intensidade ajustável, para reproduzir as energias da GTR. Em nosso caso isso corresponderia a ajustar o termo de contato na interação pión-nucleon, dada em (5.21)-(5.22), adicionando-lhe o termo

$$\delta K_{pn\ p'n'}^\pi = g'_\pi \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 \int d^3x d^3y [\bar{\mathcal{U}}_p(x) \gamma \gamma^5 \tau_b \mathcal{U}_n(x)] \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\bar{\mathcal{U}}_{n'}(y) \gamma \gamma^5 \tau^b \mathcal{U}_{p'}(y)] \quad (6.3)$$

ou na forma acoplada*

$$\begin{aligned} \delta K_{a_p a_n, a_{p'} a_{n'}}^{(J)\pi} = & \sum_{k=-1,0,1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n} \sum_{J'} \hat{j}^2 g'_\pi \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 \int \frac{dx}{x^2} \\ & (G_{a_p} G_{a_n} < \kappa_p \| T_{JJ'} \| \kappa_n > + F_{a_p} F_{a_n} < -\kappa_p \| T_{JJ'} \| -\kappa_n >)_x \\ & (G_{a_{p'}} G_{a_{n'}} < \kappa_{p'} \| T_{JJ'} \| \kappa_{n'} >^* + F_{a_{p'}} F_{a_{n'}} < -\kappa_{p'} \| T_{JJ'} \| -\kappa_{n'} >^*)_y \end{aligned} \quad (6.4)$$

o que, para $g'_\pi = 1/3$ cancelaria completamente a parte de contato em (5.21). Esse termo mostrou-se de grande importância num cálculo RPA relativístico de estados com paridade não natural no ^{16}O , feito por Blunden e McCorquodale [28], que usaram o valor puramente fenomenológico $g'_\pi = 0.7$, em analogia com cálculos não relativísticos. Assim como K^π em (5.81), $\delta K^{(J)\pi}$ em (6.4) tampouco contribui para o IAS, porque

$$< \kappa \| T_{JJ'} \| \kappa' > = 0 \quad \text{se } l + l' + J' \text{ é ímpar,} \quad (6.5)$$

e os elementos de matriz reduzidos em (6.4) são da forma $< \kappa_p \| T_{JJ'} \| \kappa_n >$ e $< -\kappa_p \| T_{JJ'} \| -\kappa_n >$. Para o IAS, l_{κ_p} e l_{κ_n} , e $l_{-\kappa_p}$ e $l_{-\kappa_n}$ têm a mesma paridade e $J' = 1$. Com esses resultados e (6.5) podemos concluir que o termo $\delta K_{a_p a_n, a_{p'} a_{n'}}^{(J)\pi}$ não tem nenhum efeito sobre o IAS. Porém ele é essencial para a GTR, como está ilustrado na Fig. (6.1) para o caso do ^{208}Pb . Vemos que a escolha $g'_\pi = 1/3$, justificada teoricamente, leva a resultados melhores do que a interação nua ($g'_\pi = 0$). No entanto o acordo com o experimento é encontrado somente com $g'_\pi \cong 0.7$. Portanto encontramos que no cálculo RPA1 é necessário incorporar δK^π , com $g'_\pi = 0.7$, ao kernel da RPA (5.21) para o pión.

Os resultados com essa escolha, para o IAS e a GTR, excitados a partir dos núcleos ^{48}Ca , ^{90}Zr e ^{208}Pb , estão listados na tabela Tabela (6.6). Os resultados são da mesma qualidade que aqueles obtidos em cálculos não relativísticos [26]. O acordo com o experimento é muito bom para as energias de excitação de ambas as ressonâncias, mas não completamente satisfatório para as intensidades, especialmente para a GTR. Isso já era esperado porque, como mencionamos anteriormente, nosso modelo não inclui excitações do tipo $2p - 2h$ ou $\Delta - h$ e, portanto, é incapaz de reproduzir a supressão (“quenching”) na intensidade da GTR.

*O cálculo feito para obter (6.4) é semelhante àquele do apêndice E.

• Cálculo RPA2

Outra maneira de reproduzir o IAS e a GTR para esses núcleos, sem introduzir o parâmetro fenomenológico $g'_\pi = 0.7$, é acrescentar ao acoplamento vetorial, o acoplamento tensorial entre o méson ρ e o núcleon. Para isso, como discutimos anteriormente, é necessário eliminar completamente o termo de contato para o pión, fazendo $g'_\pi = 1/3$, e o termo de contato para o ρ , que aparece agora devido à inclusão do acoplamento tensorial para esse méson. O cancelamento do termo de contato para o ρ pode ser feito através da adição de

$$\delta K_{pn\ p'n'}^\rho = g'_\rho \left(\frac{f_\rho}{2M} \right)^2 \int d^3x d^3y [\bar{\mathcal{U}}_p(\mathbf{x}) \sigma_{\mu i} \tau_b \mathcal{U}_n(\mathbf{x})] \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\bar{\mathcal{U}}_{n'}(\mathbf{y}) \sigma^{\mu i} \tau^b \mathcal{U}_{p'}(\mathbf{y})] \quad (6.6)$$

ou, na forma acoplada,

$$\begin{aligned} \delta K_{a_p a_n\ a_{p'} a_{n'}}^{(J)\rho} = & - \sum_{k=-1,0,1} (\zeta_{t_n}^\dagger \tau^k \zeta_{t_p})^* \zeta_{t_{n'}}^\dagger \tau^k \zeta_{t_{p'}} \sum_{J'} \hat{J}^2 g'_\rho \left(\frac{g_\rho}{2M} \right)^2 \int \frac{dx}{x^2} \\ & \left[(G_{a_p} F_{a_n} < \kappa_p \| T_{JJ'} \| -\kappa_n > + F_{a_p} G_{a_n} < -\kappa_p \| T_{JJ'} \| \kappa_n >)_x \right. \\ & (G_{a_{n'}} F_{a_{p'}} < -\kappa_{p'} \| T_{JJ'} \| \kappa_{n'} >^* + F_{a_{n'}} G_{a_{p'}} < \kappa_{p'} \| T_{JJ'} \| -\kappa_{n'} >^*)_y \\ & - 2(G_{a_p} G_{a_n} < \kappa_p \| T_{JJ'} \| \kappa_n > - F_{a_p} F_{a_n} < -\kappa_p \| T_{JJ'} \| -\kappa_n >)_x \\ & \left. (G_{a_{p'}} G_{a_{n'}} < \kappa_{p'} \| T_{JJ'} \| \kappa_{n'} >^* - F_{a_{p'}} F_{a_{n'}} < -\kappa_{p'} \| T_{JJ'} \| -\kappa_{n'} >^*)_y \right] \quad (6.7) \end{aligned}$$

com $g'_\rho = 1/3$. Resta ainda fixar um único parâmetro livre, f_ρ . Isso foi feito de modo a reproduzir a energia de excitação experimental e da GTR para o ^{208}Pb . O valor encontrado com esse ajuste é $f_\rho = 9.95$.

Os resultados obtidos no cálculo RPA2, para o IAS e a GTR, para os núcleos alvos ^{48}Ca , ^{90}Zr e ^{208}Pb , estão listados na tabela Tabela (6.6). Na figura Fig. (6.2) mostramos a suavização dos “spikes” obtidos no cálculo RPA2 para o ^{208}Pb . Podemos ver que os resultados são da mesma qualidade do cálculo RPA1. A vantagem do cálculo RPA2 é que a extração dos termos de contato é feita de modo teoricamente mais claro, dispensando ajustes “ad hoc” como no cálculo RPA1.

	$S^{(+)}RPA$	$S^{(-)}RPA$	$\frac{(S^{(+)}-S^{(-)})RPA}{(S^{(+)}-S^{(-)})_{exato}}(\%)$
^{208}Pb			
IAS			
RPA1	43.91	0.07	99.6
RPA2	43.92	0.07	99.6
GTR			
RPA1	123.13	0.59	92.8
RPA2	123.12	0.65	92.8
^{90}Zr			
IAS			
RPA1	10.14	0.15	99.9
RPA2	10.11	0.12	99.9
GTR			
RPA1	28.21	0.24	93.2
RPA2	28.18	0.23	93.2
^{48}Ca			
IAS			
RPA1	8.03	0.07	99.5
RPA2	8.04	0.08	99.5
GTR			
RPA1	22.62	0.07	94.0
RPA2	22.63	0.07	94.0

Tabela 6.4: Regras de Soma na RPA.

⁴⁸ Ca			⁹⁰ Zr			²⁰⁸ Pb		
	nêutrons	prótons		nêutrons	prótons		nêutrons	prótons
1p3/2	-38.1(1)	-38.7(1)	1d5/2	-36.1(1)	-29.9(1)	1g9/2	-27.1(1)	-20.0(1)
1p1/2	-34.4(1)	-34.8(1)	1d3/2	-31.8(1)	-25.4(1)	1g7/2	-22.8(1)	-15.6(1)
1d5/2	-22.9(1)	-24.1(1)	2s1/2	-30.3(1)	-23.2(1)	2d5/2	-19.9(1)	-12.2(1)
1d3/2	-16.5(1)	-17.5(1)	1f7/2	-23.5(1)	-18.0(1)	2d3/2	-18.2(1)	-10.5(1)
2s1/2	-17.7(1)	-16.9(1)	2p3/2	-17.5(1)	-10.4(1)	1h11/2	-17.8(1)	-11.0(1)
1f7/2	-9.03(1)	-9.92(0)	2p1/2	-15.7(1)	-8.67(1)	3s1/2	-17.6(1)	-9.60(1)
1f5/2	-1.83(0)	-1.98(0)	1g9/2	-11.5(1)	-6.20(0)	1h9/2	-12.1(1)	-5.13(0)
2p3/2	-5.18(0)	-3.41(0)	2d5/2	-6.22(0)	0.83(0)	2f7/2	-10.7(1)	-2.90(0)
2p1/2	-3.64(0)	-1.69(0)	3s1/2	-4.39(0)	2.59(0)	2f5/2	-8.65(1)	-0.88(0)
			1g7/2	-4.06(0)	1.48(0)	3p3/2	-8.12(1)	-0.24(0)
						1i13/2	-8.56(1)	-1.86(0)
						3p3/2	-7.38(1)	0.99(0)
						2g9/2	-2.39(0)	5.64(0)
						1i11/2	-1.87(0)	5.08(0)
						3d5/2	-0.77(0)	4.78(0)
						4s1/2	-0.54(0)	4.05(0)
						2g7/2	-0.46(0)	6.48(0)
						3d3/2	-0.16(0)	4.82(0)

Tabela 6.5: Níveis de partícula-única, em MeV, utilizados para contruir o espaço modelo dos cálculos RPA1 e RPA2. O número entre parênteses indica a ocupação do nível.

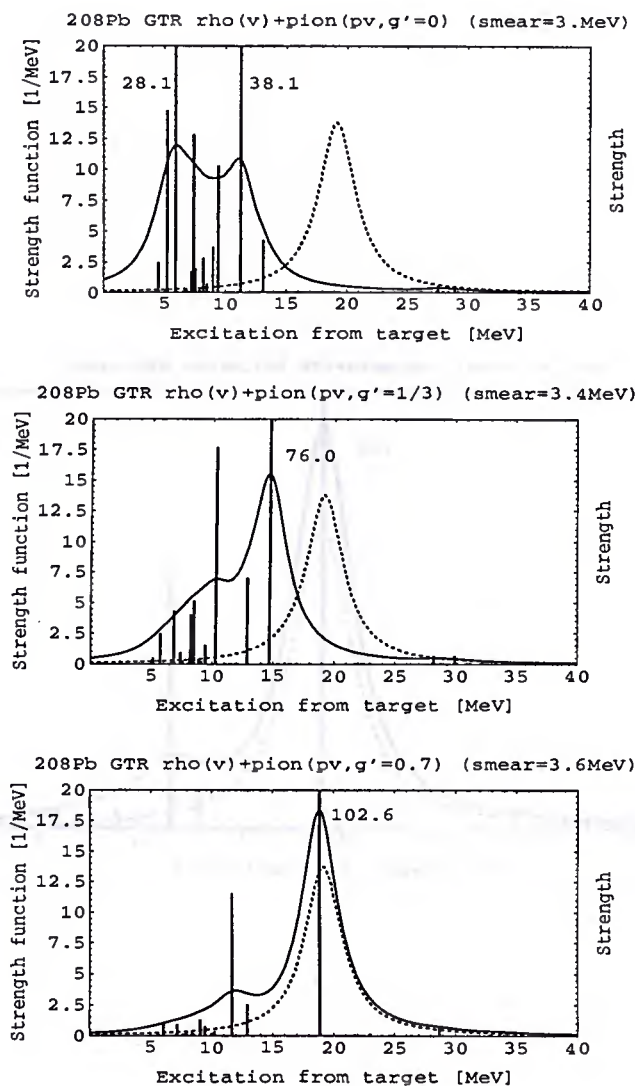


Figura 6.1: Cálculo RPA1 da distribuição de intensidade de Gamow-Teller para o núcleo-alvo ^{208}Pb obtida com $g'_\pi = 0, 1/3$ e 0.7 . Os “spikes” dão os resultados para as intensidades parciais obtidas no cálculo RPA1, a curva contínua a função de excitação suavizada conforme explicamos no texto, e as linhas pontilhadas a função de excitação para o pico de ressonância extraída do experimento [25]. (Figura retirada de [4].)

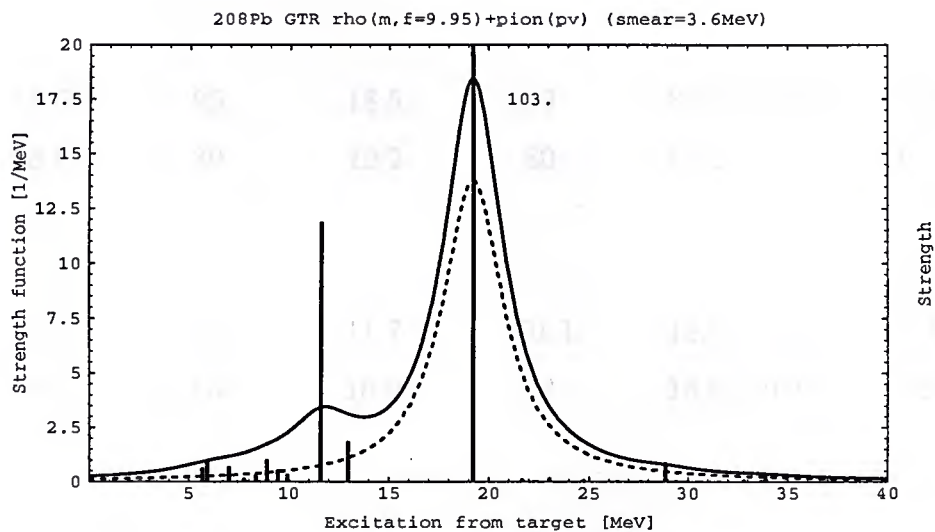


Figura 6.2: Cálculo RPA2 da distribuição de intensidade de Gamow-Teller para o núcleo-alvo ^{208}Pb . As convenções são as mesmas da Fig. (6.1).

Alvo	RPA1		RPA2		Experimento	
e	Energia	Intensidade	Energia	Intensidade	Energia	Intensidade
resson.	[MeV]	[% da r. s.]	[MeV]	[% da r. s.]	[MeV]	[% da r. s.]
$^{208}\text{Pb}^a$						
IAS	18.6	99	18.5	99	18.83 ± 0.02	~ 100
GTR	18.9	80	19.2	80	19.2 ± 0.2	60 – 70
$^{90}\text{Zr}^b$						
IAS	11.9	101.3	11.7	101.1	12.0 ± 0.2	~ 100
GTR	16.0	80	16.2	82	15.6 ± 0.3	28
$^{48}\text{Ca}^c$						
IAS	7.48	100.4	7.51	100.5	7.17	~ 100
GTR	11.0	82	10.5	78	~ 10.5	35

^aValores experimentais tomado das Refs. [29, 25].

^bValores experimentais tomado das Refs. [30, 31].

^cValores experimentais tomado da Ref. [32].

Tabela 6.6: Resultados dos cálculos RPA1 e RPA2 para a energia de excitação e a intensidade das ressonâncias com troca de carga. Os valores experimentais são dados para comparação .

Capítulo 7

Conclusões

Generalizamos, nesta tese, o formalismo da RPA relativística, baseada na hadrodinâmica quântica, para aplicações a excitações com troca de carga. O tipo de tratamento desenvolvido aqui tem um alto grau de autoconsistência. Analogamente ao caso não relativístico, a RPA relativística pode ser vista como o limite de pequenas amplitudes da RMFT dependente do tempo e, portanto, a mesma densidade de lagrangeana deve ser empregada para descrever, tanto as propriedades do estado fundamental, como as excitações, conforme fizemos aqui.

Mostramos que o IAS e a ressonância de GT para os núcleos-alvo ^{48}Ca , ^{90}Zr e ^{208}Pb , são bem reproduzidos nesse contexto. Para isso realizamos dois cálculos diferentes:

a) Com o acoplamento πN pseudovetorial e o acoplamento ρN vetorial [4]. Nesse caso foi necessário tratar fenomenologicamente a intensidade do termo de contato na interação πN . Os melhores resultados foram obtidos com valores, para essa intensidade, próximos àqueles utilizados em cálculos não relativísticos.

b) Com acoplamento πN pseudovetorial e acoplamento ρN misto (vetorial + tensorial). Nesse caso adotamos o procedimento de eliminar completamente os termos de contato, seguindo a regra usual. Os resultados são da mesma qualidade do caso anterior, com a vantagem de que o tratamento dos termos de contato é mais limpo, não envolvendo um parâmetro fenomenológico adicional a ser fitado.

Por uma questão de autoconsistência, no cálculo b) acima estendemos a RMFT usual, incluindo o acoplamento ρN tensorial. Para isso deveríamos, em princípio, ter reajustado todos os parâmetros do modelo. No entanto, como a contribuição desse acoplamento

na RMFT é muito pequena, não o fizemos, mas simplesmente adotamos o conjunto de parâmetros NL1 e, para a constante de acoplamento ρN tensorial, fixamos seu valor de modo a reproduzir a energia de excitação da ressonância de Gamow-Teller do ^{208}Pb . Além disso deveríamos, como fizemos no cálculo RPA, ter extraído, também na RMFT, o termo de contato que aparece devido a esse acoplamento. Novamente, deixamos de fazê-lo com o argumento de que sua importância na RMFT é pequena. Esse é um ponto que mereceria um tratamento melhor num cálculo futuro.

Para calcular os propagadores relevantes para as ressonâncias com troca de carga, fizemos a aproximação instantânea, isto é, fizemos $k^0 = \omega = 0$. Essa aproximação é bem justificada para essas ressonâncias. Para o propagador do méson ρ , no entanto, além dessa aproximação, eliminamos completamente o termo proporcional a $k^\mu k^\nu / m_\rho^2$. Vimos que, embora esse termo seja pequeno, ele não é desprezível. Um cálculo mais sofisticado deveria levá-lo em conta.

Ao deduzir a forma espectral da equação de Dyson na seção 5.2, eliminamos completamente os estados com energia negativa, ou seja, fizemos a seguinte aproximação para o propagador de polarização de Hartree: $\Pi^H \propto (G_D + G_F)(G_D + G_F) \simeq G_D G_D$, com a notação utilizada na Eq. (4.2). Sabe-se, no entanto [33, 34] que uma prescrição melhor seria considerar em parte os estados com energia negativa, eliminando apenas a contribuição infinita, isto é, tomar $\Pi^H \propto (G_D + G_F)(G_D + G_F) \simeq G_D G_D + G_D G_F + G_F G_D$. Essa prescrição tem a vantagem de que a RPA resultante conserva as simetrias do modelo e isola o estado espúrio com $J^\pi = 1^-$, correspondente ao movimento do centro de massa [33, 34]. Como aqui estamos interessados nas excitações com $J^\pi = 0^+$ e 1^+ , esse ponto não foi crucial. No entanto, se desejássemos um tratamento mais rigoroso das regras de soma seria melhor incluir essas contribuições, muito embora, a tabela Tabela (6.4) mostre que, na aproximação que fizemos, as regras de soma foram satisfeitas ao nível de 99.5% para o IAS e 92.8% para a ressonância de GT.

Para finalizar, indiquemos algumas possíveis extensões dos cálculos realizados aqui. Usamos uma base discreta de estados de partícula-única fortemente truncada. Isso foi suficiente para determinarmos a posição das ressonâncias. Uma possível extensão seria calcular com mais detalhes suas funções de excitação, para determinarmos, por exemplo, as larguras

das ressonâncias. Precisaríamos, para isso, incluir os estados do contínuo [26]. Seria nesse caso, mais apropriado usar uma versão não espectral das equações da RPA semelhante à de Shepard e colaboradores [33]; caso contrário teríamos que lidar com espaços-modelos excessivamente grandes. Outra possível extensão seria abordar o interessante problema da supressão (“quenching”) de intensidade de GT. Para isso seria necessário acrescentar ao nosso modelo outros graus de liberdade, tais como a ressonância Δ e as configurações de $2p - 2h$.

(3.10) $\{H_0, \dots, H_n\}$.

Os operadores Interagentes na Presença de
Termos Derivativos

Apêndices

Consideramos operadores interagentes em termos das propriedades e da
relação de comutação de Hamiltonianos de interação. Os operadores interagentes
são definidos em termos das propriedades e da relação de comutação de
Hamiltonianos de interação. Os operadores interagentes são definidos em
termos das propriedades e da relação de comutação de Hamiltonianos de
interação. Os operadores interagentes são definidos em termos das
propriedades e da relação de comutação de Hamiltonianos de interação.
Os operadores interagentes são definidos em termos das propriedades e
da relação de comutação de Hamiltonianos de interação. Os operadores
interagentes são definidos em termos das propriedades e da relação de
comutação de Hamiltonianos de interação. Os operadores interagentes
são definidos em termos das propriedades e da relação de comutação de
Hamiltonianos de interação. Os operadores interagentes são definidos em
termos das propriedades e da relação de comutação de Hamiltonianos de
interação. Os operadores interagentes são definidos em termos das
propriedades e da relação de comutação de Hamiltonianos de interação.

Os operadores interagentes são definidos em termos das propriedades e da
relação de comutação de Hamiltonianos de interação. Os operadores
interagentes são definidos em termos das propriedades e da relação de
comutação de Hamiltonianos de interação. Os operadores interagentes
são definidos em termos das propriedades e da relação de comutação de
Hamiltonianos de interação. Os operadores interagentes são definidos em
termos das propriedades e da relação de comutação de Hamiltonianos de
interação. Os operadores interagentes são definidos em termos das
propriedades e da relação de comutação de Hamiltonianos de interação.

$$H_{int} = \sum_{i,j} g_{ij} \phi_i \phi_j \quad (A.1)$$

$$H_{int} = \sum_{i,j} g_{ij} \phi_i \phi_j \quad (A.2)$$

$$H_{int} = \sum_{i,j} g_{ij} \phi_i \phi_j \quad (A.3)$$

Os operadores interagentes são definidos em termos das propriedades e da
relação de comutação de Hamiltonianos de interação. Os operadores
interagentes são definidos em termos das propriedades e da relação de
comutação de Hamiltonianos de interação. Os operadores interagentes
são definidos em termos das propriedades e da relação de comutação de
Hamiltonianos de interação. Os operadores interagentes são definidos em
termos das propriedades e da relação de comutação de Hamiltonianos de
interação. Os operadores interagentes são definidos em termos das
propriedades e da relação de comutação de Hamiltonianos de interação.

Apêndice A

Propagadores Interagentes na Presença de Acoplamentos Derivativos

A expansão dos propagadores interagentes em termos dos propagadores livres deve ser feita com a densidade de **hamiltoniana** de interação. No entanto, quando a densidade de lagrangeana de interação não contém acoplamentos derivativos, a expansão pode ser feita diretamente com essa última densidade (com o sinal trocado). Neste apêndice queremos mostrar que, mesmo quando a densidade de lagrangeana de interação contém primeiras derivadas dos campos bosônicos, podemos fazer a expansão dos propagadores interagentes em termos dessa densidade desde que as derivadas temporais apareçam apenas linearmente. O desenvolvimento deste apêndice está baseado no desenvolvimento análogo feito para a eletrodinâmica escalar na referência [10].

Nosso ponto de partida é uma densidade de lagrangeana da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\mathcal{L}_0 = \sum_i \frac{1}{2} \partial_0 \phi_i \partial_0 \phi_i + \mathcal{F}_0(\bar{\psi}, \psi, \partial_\mu \psi, \phi, \partial_k \phi) \quad (\text{A.2})$$

e

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{F}_{int}(\bar{\psi}, \psi, \phi, \partial_k \phi) + \sum_i \mathcal{C}_i^0(\bar{\psi}, \psi, \phi, \partial_k \phi) \partial_0 \phi_i \quad (\text{A.3})$$

$\bar{\psi}$ e ψ representam os campos fermiônicos e ϕ_i os campos bosônicos. $\mathcal{F}_0$ é uma função dos campos fermiônicos e bosônicos desacoplados e $\mathcal{F}_{int}$ e $\mathcal{C}_i^0$ funções envolvendo acoplamentos

entre esses campos. É importante ressaltar que $\mathcal{F}_{int}$ e $\mathcal{C}_i^0$ não envolvem derivadas temporais dos campos. Os momentos conjugados canônicos são

$$\begin{aligned}\pi_{\bar{\psi}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \bar{\psi}} = 0 \\ \pi_{\psi} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi} = \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \partial_0 \psi} \\ \pi_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi_i} = \partial_0 \phi_i + \mathcal{C}_i^0(\bar{\psi}, \psi, \phi, \partial_k \phi)\end{aligned}\tag{A.4}$$

A densidade de hamiltoniana fica

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi_{\bar{\psi}} \partial_0 \bar{\psi} + \pi_{\psi} \partial_0 \psi + \sum_i \pi_i \partial_0 \phi_i - \mathcal{L} \\ &= \pi_{\psi} \partial_0 \psi + \sum_i (\partial_0 \phi_i + \mathcal{C}_i^0) \partial_0 \phi_i - \sum_i \frac{1}{2} \partial_0 \phi_i \partial_0 \phi_i - \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_{int} - \sum_i \mathcal{C}_i^0 \partial_0 \phi_i \\ &= \pi_{\psi} \partial_0 \psi + \sum_i \frac{1}{2} \partial_0 \phi_i \partial_0 \phi_i - \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_{int} \\ &= \pi_{\psi} \partial_0 \psi + \sum_i \frac{1}{2} [\pi_i^2 - \pi_i \mathcal{C}_i^0 - \mathcal{C}_i^0 \pi_i + (\mathcal{C}_i^0)^2] - \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_{int} \\ &= \underbrace{\pi_{\psi} \partial_0 \psi + \sum_i \frac{1}{2} \pi_i^2 - \mathcal{F}_0}_{\mathcal{H}_0} - \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} [\pi_i \mathcal{C}_i^0 + \mathcal{C}_i^0 \pi_i - (\mathcal{C}_i^0)^2] - \mathcal{F}_{int}}_{\mathcal{H}_{int}},\end{aligned}\tag{A.5}$$

e as hamiltonianas livre e de interação são

$$\begin{aligned}H_0 &= \int d^3x \mathcal{H}_0 = \int d^3x \left(\pi_{\psi} \partial_0 \psi + \sum_i \frac{1}{2} \pi_i^2 - \mathcal{F}_0 \right) \\ H_{int} &= \int d^3x \mathcal{H}_{int} = \int d^3x \left[- \sum_i \frac{1}{2} [\pi_i \mathcal{C}_i^0 + \mathcal{C}_i^0 \pi_i - (\mathcal{C}_i^0)^2] - \mathcal{F}_{int} \right]\end{aligned}\tag{A.6}$$

Os campos e momentos conjugados que aparecem nas expressões (A.5) e (A.6) estão na descrição de Heisenberg. Para a expansão do propagador interagente em termos dos propagadores livres precisamos colocar $\mathcal{H}_{int}$ em (A.5) na descrição de interação, ou seja,

$$(\mathcal{H}_{int})_{in} = - \sum_i \frac{1}{2} \left[(\pi_i)_{in} (\mathcal{C}_i^0)_{in} + (\mathcal{C}_i^0)_{in} (\pi_i)_{in} - (\mathcal{C}_i^0)_{in}^2 \right] - (\mathcal{F}_{int})_{in}\tag{A.7}$$

Para transformar um operador na descrição de Heisenberg $O(t)$ para a descrição de interação $O_{in}(t)$ devemos calcular [12]

$$O_{in}(t) = U(t, 0) O(t) U(0, t)\tag{A.8}$$

onde $U(t, 0)$ e $U(0, t)$ são operadores de evolução temporal satisfazendo

$$\begin{aligned} i\partial_0 U(t, 0) &= H_{int}(t)_{in} U(t, 0) \\ i\partial_0 U(0, t) &= -U(0, t) H_{int}(t)_{in} \end{aligned} \quad (A.9)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} i\partial_0 U(t, 0) &= U(t, 0) H_{int}(t) \\ i\partial_0 U(0, t) &= -H_{int}(t) U(0, t) \end{aligned} \quad (A.10)$$

onde usamos $U(t, 0)U(0, t) = 1 = U(0, t)U(t, 0)$ para reescrevermos (A.9) com a hamiltoniana de interação na descrição de Heisenberg. De (A.8) e (A.10) obtemos

$$i\partial_0 O_{in}(t) = U(t, 0)[O(t), H_0]U(0, t) \quad (A.11)$$

e, usando as relações de comutação canônicas, a saber,

$$[\phi_i(\mathbf{x}, t), \phi_j(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (A.12)$$

$$[\phi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = i\delta_{ij}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (A.13)$$

$$[\pi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (A.14)$$

resulta que

$$\begin{aligned} i\partial_0 \phi_i(\mathbf{x}, t)_{in} &= U(t, 0)[\phi_i(\mathbf{x}, t), H_0(\phi, \pi)]U(0, t) \\ &= U(t, 0) \int d^3x' [\phi_i(\mathbf{x}, t), (\pi_\psi \partial_0 \psi + \sum_j \frac{1}{2} \pi_j^2 - \mathcal{F}_0) |_{(\mathbf{x}', t)}] U(0, t) \\ &= U(t, 0) \int d^3x' \sum_j \frac{1}{2} \left([\phi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] \pi_j(\mathbf{x}', t) \right. \\ &\quad \left. + \pi_j(\mathbf{x}', t) [\phi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] \right) U(0, t) \\ &= U(t, 0) \int d^3x' \sum_j \delta_{ij} i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \pi_j(\mathbf{x}', t) U(0, t) \\ &= iU(t, 0) \pi_i(\mathbf{x}, t) U(0, t) = i\pi_i(\mathbf{x}, t)_{in} \end{aligned} \quad (A.15)$$

Substituindo (A.15) em (A.7) temos *

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{int})_{in} &= - \sum_i \frac{1}{2} \left[\partial_0(\phi_i)_{in} (C_i^0)_{in} + (C_i^0)_{in} \partial_0(\phi_i)_{in} - (C_i^0)_{in}^2 \right] - (\mathcal{F}_{int})_{in} \\ &= \sum_i \frac{1}{2} (C_i^0)_{in}^2 - (\mathcal{L}_{int})_{in} \end{aligned} \quad (A.16)$$

Vemos que a densidade de hamiltoniana de interação na descrição de interação difere da lagrangeana pelo termo não covariante $\sum_i \frac{1}{2} (C_i^0)_{in}^2$.

A expansão de um propagador interagente em termos de propagadores livres baseia-se na aplicação do teorema de Wick ao seguinte resultado obtido a partir do teorema de Gell-Mann e Low [12]:

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p) &\equiv \langle \Psi | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \dots \bar{\psi}(y_p) \psi(y_1) \dots \psi(y_p) | \Psi \rangle \\ &= \frac{\langle \Psi_0 | T \phi_{in}(x_1) \dots \psi_{in}(y_p) \exp[-i \int d^4 z \mathcal{H}_{int}(z)_{in}] | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | T \exp[-i \int d^4 z \mathcal{H}_{int}(z)_{in}] | \Psi_0 \rangle} \end{aligned} \quad (A.17)$$

De agora em diante iremos omitir o índice “in” e adotar que todos operadores de campo estão na descrição de interação .

Para as contrações que aparecerão em (A.17) envolvendo os campos mesônicos e suas derivadas usaremos os seguintes resultados.

$$\langle \Psi_0 | T \phi_i(x) \phi_j(y) | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | T \phi_j(y) \phi_i(x) | \Psi_0 \rangle \quad (A.18)$$

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \langle \Psi_0 | T \phi_i(x) \phi_j(y) | \Psi_0 \rangle &= \partial_x^\alpha \langle \Psi_0 | \phi_i(x) \phi_j(y) \theta(t_x - t_y) + \phi_j(y) \phi_i(x) \theta(t_y - t_x) | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0 | [\partial_x^\alpha \phi_i(x) \phi_j(y)] \theta(t_x - t_y) + [\phi_j(y) \partial_x^\alpha \phi_i(x)] \theta(t_y - t_x) \\ &\quad + [\phi_i(x), \phi_j(y)] \delta(t_x - t_y) | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0 | T \partial_x^\alpha \phi_i(x) \phi_j(y) | \Psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (A.19)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_0^\alpha \partial_0^\beta \langle \Psi_0 | T \phi_i(x) \phi_j(y) | \Psi_0 \rangle &= \langle \Psi_0 | [\partial_0^\alpha \phi_i(x)] [\partial_0^\beta \phi_j(y)] \theta(t_x - t_y) + \phi_i(x) [\partial_0^\alpha \phi_j(y)] \partial_0^\beta \theta(t_x - t_y) \\ &\quad + [\partial_0^\alpha \phi_j(y)] [\partial_0^\beta \phi_i(x)] \theta(t_y - t_x) + [\partial_0^\alpha \phi_j(y)] \phi_i(x) \partial_0^\beta \theta(t_y - t_x) | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0 | T \partial_0^\alpha \phi_i(x) \partial_0^\beta \phi_j(y) + [\phi_i(x), \partial_0^\beta \phi_j(y)] \delta(t_x - t_y) | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0 | T \partial_0^\alpha \phi_i(x) \partial_0^\beta \phi_j(y) + [\phi_i(x), \partial_0^\beta \phi_j(y)] \delta(t_x - t_y) | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0 | T \partial_0^\alpha \phi_i(x) \partial_0^\beta \phi_j(y) | \Psi_0 \rangle + i \delta_{ij} \delta^{(4)}(x - y) \end{aligned} \quad (A.20)$$

*Estamos levando em conta que, após a quantização , o mesmo ordenamento dos operadores de campo em $\mathcal{H}_{int}$ deve ser feito em $\mathcal{L}_{int}$

onde usamos que

$$\begin{aligned}\delta(t_x - t_y)[\phi_i(x), \phi_j(y)] &= 0 \quad \text{e} \\ \delta(t_x - t_y)[\phi_i(x), \partial_y^0 \phi_j(y)] &= i\delta_{ij}\delta^{(4)}(x-y)\end{aligned}\tag{A.21}$$

Conforme resulta de (A.12)-(A.14) e de (A.15).

Contudo, podemos ver em (A.20) que nos produtos cronológicos dos termos derivativos existe uma segunda fonte de termos não covariantes. Iremos mostrar, a seguir, que esses termos cancelam $\sum_i \frac{1}{2}(C_i^0)^2$ em (A.16).

Usando (A.16) temos para o numerador em (A.17)

$$\begin{aligned}& \langle \Psi_0 | T \phi(x_1) \dots \psi(y_p) \exp -i \int d^4 z \left[-\sum_i C_i^0 \partial_0 \phi_i - \mathcal{F}_{int} + \sum_i \frac{1}{2} (C_i^0)^2 \right] | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0 | T \phi(x_1) \dots \psi(y_p) \sum_r \frac{i^r}{r!} \int d^4 z_1 \dots d^4 z_r \left(\sum_{i_1} C_{i_1}^0 \partial_0 \phi_{i_1} \right)_1 \dots \left(\sum_{i_r} C_{i_r}^0 \partial_0 \phi_{i_r} \right)_r \\ &\times \exp \left\{ -i \int d^4 z [-\mathcal{F}_{int} + \sum_i \frac{1}{2} (C_i^0)^2] \right\} | \Psi_0 \rangle\end{aligned}\tag{A.22}$$

Na expressão acima, somente a parte da exponencial cronológica contendo derivadas temporais foi expandida em série de potências, porque são esses termos que introduzem as contrações não covariantes (A.20). Para o r -ésimo termo da expansão existem $\frac{r!}{(2s)!(r-2s)!}$ escolhas de $2s$ vértices, e $\frac{(2s)!}{2^s s!}$ maneiras distintas de contraí-los em s pares. Além disso, se definirmos o produto cronológico covariante $\hat{T}$ [10] de modo que ele coincida com o produto cronológico usual T exceto pela propriedade

$$\langle \Psi_0 | \hat{T} \partial_0 \phi(x) \partial_0 \phi(y) | \Psi_0 \rangle \equiv \partial_0^x \partial_0^y \langle \Psi_0 | T \phi(x) \phi(y) | \Psi_0 \rangle,\tag{A.23}$$

cada contração usual (feita com T) de dois desses vértices dá, além das contribuições covariantes (feitas com $\hat{T}$), a seguinte contribuição extra não covariante

$$\begin{aligned}& \sum_{ij} C_i^0(x) [\langle \Psi_0 | T \partial_0^x \phi_i(x) \partial_0^y \phi_j(y) | 0 \rangle - \langle \Psi_0 | \hat{T} \partial_0^x \phi_i(x) \partial_0^y \phi_j(y) | \Psi_0 \rangle] C_j^0(y) \\ &= -i \sum_{ij} \delta_{ij} \delta^{(4)}(x-y) C_i^0(x) C_j^0(y) \\ &= -i \sum_i \delta^{(4)}(x-y) [C_i^0(x)]^2.\end{aligned}\tag{A.24}$$

Portanto, notando que as variáveis de integração $z_1, z_2, \dots, z_r$ são mudas e agrupando cada termo de ordem r em (A.22) segundo as potências $s = 0, 1, \dots, [r/2]$ da contribuição não

covariante, podemos reescrever o segundo membro daquela equação em termos do produto cronológico covariante como

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi_0 | \hat{T} \phi(x_1) \dots \psi(y_p) \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[r/2]} \frac{i^r}{r!} \left\{ \int d^4 z'' \sum_i C_i^0 \partial_0 \phi_i \right\}^{r-2s} \frac{r!}{(2s)!(r-2s)!} \frac{(2s)!}{2^s s!} \left\{ -i \int d^4 z' \sum_i [C_i^0]^2 \right\}^s \\
 & \times \exp -i \int d^4 z [-\mathcal{F}_{int} + \sum_i \frac{1}{2} (C_i^0)^2] | \Psi_0 \rangle \\
 & = \langle \Psi_0 | \hat{T} \phi(x_1) \dots \psi(y_p) \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[r/2]} \frac{i^{r-2s}}{(r-2s)!} \left\{ \int d^4 z'' \sum_i C_i^0 \partial_0 \phi_i \right\}^{r-2s} \frac{1}{s!} \left\{ i \int d^4 z' \sum_i \frac{1}{2} [C_i^0]^2 \right\}^s \\
 & \times \exp \left\{ -i \int d^4 z [-\mathcal{F}_{int} + \sum_i \frac{1}{2} (C_i^0)^2] \right\} | \Psi_0 \rangle \\
 & = \langle \Psi_0 | \hat{T} \phi(x_1) \dots \psi(y_p) \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{r,n+2s} \frac{i^{r-2s}}{(r-2s)!} \left\{ \int d^4 z'' \sum_i C_i^0 \partial_0 \phi_i \right\}^{r-2s} \\
 & \times \frac{1}{s!} \left\{ i \int d^4 z' \sum_i \frac{1}{2} [C_i^0]^2 \right\}^s \exp -i \int d^4 z [-\mathcal{F}_{int} + \sum_i \frac{1}{2} (C_i^0)^2] | \Psi_0 \rangle \\
 & = \langle \Psi_0 | \hat{T} \phi(x_1) \dots \psi(y_p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left\{ \int d^4 z'' \sum_i C_i^0 \partial_0 \phi_i \right\}^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left\{ i \int d^4 z' \sum_i \frac{1}{2} [C_i^0]^2 \right\}^s \\
 & \times \exp \left\{ -i \int d^4 z [-\mathcal{F}_{int} + \sum_i \frac{1}{2} (C_i^0)^2] \right\} | \Psi_0 \rangle \\
 & = \langle \Psi_0 | \hat{T} \phi(x_1) \dots \psi(y_p) \exp[i \int d^4 z \mathcal{L}_{int}] | \Psi_0 \rangle
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Podemos ver que as contrações não covariantes podem ser exponenciadas e suas contribuições cancelam o vértice não covariante $\sum_i \frac{1}{2} (C_i^0)^2$.

Um desenvolvimento análogo pode ser feito para o denominador em (A.17). Portanto, podemos reescrever o propagador (A.17) em termos da densidade de lagrangeana de interação como

$$G(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p) = \frac{\langle \Psi_0 | \hat{T} \phi_{in}(x_1) \dots \psi_{in}(y_p) \exp[i \int d^4 z \mathcal{L}_{int}(z)_{in}] | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \hat{T} \exp[i \int d^4 z \mathcal{L}_{int}(z)_{in}] | \Psi_0 \rangle} \tag{A.26}$$

Ressaltamos que nessa forma é necessário usar o produto cronológico covariante $\hat{T}$, definido conforme (A.23).

Apêndice B

Reversão Temporal

Neste apêndice queremos mostrar como os tensores bilineares, $\bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})$, $\bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})\gamma^\mu\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})$ e $\bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})\sigma^{\nu i}\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})$, se transformam por reversão temporal, onde $\mathcal{U}_\alpha$ é o espinor que representa a função de onda de partícula-única do nucleon no estado α .

Generalizando o que foi feito na referência [35], é possível mostrar que a equação de Dirac em (3.17) para $\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})$, é invariante na forma por reversão temporal. Começemos por introduzir um operador antiunitário K que transforme $\mathbf{p}$ em $-\mathbf{p}$ e conserve $\mathbf{x}$ e γ^μ ,

$$\begin{aligned} K\mathbf{x}K^\dagger &= \mathbf{x} \quad , \quad K\mathbf{p}K^\dagger = -\mathbf{p}, \\ K\gamma^\mu K^\dagger &= \gamma^\mu, \end{aligned} \tag{B.1}$$

Esse operador existe e na representação de Dirac-Pauli é dado por

$$K = i\gamma^2\gamma^5 K_D \tag{B.2}$$

onde K_D é o operador de conjugação complexa associado a essa representação . O operador de reversão temporal é $\gamma^0 K$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{T\alpha}(\mathbf{x}) &= \gamma^0 K \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}) \\ &= i\Sigma_y K_D \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{B.3}$$

onde $\mathcal{U}_{T\alpha}(\mathbf{x})$ denota o espinor transformado por reversão temporal.

Desses resultados podemos obter como a densidade escalar $\bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})$, e as correntes $\bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})\gamma^\mu\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})$ e $\bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})\sigma^{\nu i}\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x})$ se transformam por reversão temporal,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{U}}_{T\alpha}(\mathbf{x})\mathcal{U}_{T\alpha}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})K^\dagger\gamma^0\gamma^0 K\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}) \\ &= \bar{\mathcal{U}}_\alpha(\mathbf{x})\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{B.4}$$

Para a corrente vetorial $\bar{U}_\alpha(\mathbf{x})\gamma^\mu U_\alpha(\mathbf{x})$ temos

$$\begin{aligned}\bar{U}_{T\alpha}(\mathbf{x})\gamma^\mu U_{T\alpha}(\mathbf{x}) &= \bar{U}_\alpha(\mathbf{x})K^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0KU_\alpha(\mathbf{x}) \\ &= \bar{U}_\alpha(\mathbf{x})\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0U_\alpha(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{B.5}$$

ou seja

$$\bar{U}_{T\alpha}(\mathbf{x})\gamma^\mu U_{T\alpha}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{U}_\alpha(\mathbf{x})\gamma^\mu U_\alpha(\mathbf{x}) & , \quad \mu = 0 \\ -\bar{U}_\alpha(\mathbf{x})\gamma^\mu U_\alpha(\mathbf{x}) & , \quad \mu = 1, 2 \text{ e } 3 \end{cases}\tag{B.6}$$

Analogamente obtemos

$$\bar{U}_{T\alpha}(\mathbf{x})\sigma^{\nu i}U_{T\alpha}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{U}_\alpha(\mathbf{x})\sigma^{\nu i}U_\alpha(\mathbf{x}) & , \quad \nu = 0 \\ -\bar{U}_\alpha(\mathbf{x})\sigma^{\nu i}U_\alpha(\mathbf{x}) & , \quad \nu = 1, 2 \text{ e } 3 \end{cases}\tag{B.7}$$

Apêndice C

Rotações

Neste apêndice queremos mostrar como os tensores bilineares, $\bar{\psi}(x)\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)\sigma^{0i}\psi(x)$, em segunda quantização, se transformam por rotações, onde o operador de campo $\psi(x)$ é dado pela expansão (3.16).

Analizando a invariância da densidade de lagrangeana (3.1)-(3.5) obtemos que as formas bilineares acima têm propriedades definidas por transformações de Lorentz. Assim $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ se transforma como um campo escalar, $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ como um campo vetorial e $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ como um campo tensorial de segunda ordem.

Introduzindo, então, o operador unitário $\mathcal{R}(R)$ que representa a rotação R no espaço de Fock, devemos ter

$$\mathcal{R}^\dagger(R)\bar{\psi}(x)\psi(x)\mathcal{R}(R) = \bar{\psi}(Rx)\psi(Rx), \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{R}^\dagger(R)\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)\mathcal{R}(R) = \bar{\psi}(Rx)\gamma^0\psi(Rx), \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\dagger(R)\bar{\psi}(x)\sigma^{0i}\psi(x)\mathcal{R}(R) &= \bar{\psi}(Rx)\sigma^{\mu\nu}\psi(Rx)R_\mu^0 R_\nu^i \\ &= \bar{\psi}(Rx)\sigma^{0j}\psi(Rx)R_j^i. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

onde Rx são as coordenadas do ponto original vistas no referencial rotacionado por R . Lembremos que para rotações, $R^0_0 = 1$, $R^i_0 = R^0_i = 0$ e R^i_j é uma matriz ortogonal.

Apêndice D

Oscilador Harmônico Isotrópico

Neste apêndice iremos listar as soluções (e suas propriedades) da equação de Schrödinger para um potencial de oscilador harmônico isotrópico dado por

$$V(r) = \frac{1}{2}M\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}M\omega^2r^2 \quad (\text{D.1})$$

onde M é a massa do nucleon e ω a frequência angular do oscilador.

Como o potencial (D.1) é esfericamente simétrico é usual resolver-se a equação de Schrödinger para esse potencial em coordenadas polares (r, θ, ϕ) . A dependência angular das autofunções $\Phi(\mathbf{r})$ é dada pelos harmônicos esféricos e podemos escrever

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{R(r)}{r} Y_{lm_l}(\theta, \phi). \quad (\text{D.2})$$

A função radial $R(r)$ satisfaz a equação de Schrödinger radial

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} + 2\mathcal{E} - x^2 \right] R = 0 \quad (\text{D.3})$$

onde

$$\begin{aligned} b_0 &= \left(\frac{\hbar}{M\omega} \right)^{1/2}, \\ x &= r/b_0 \quad \text{e} \\ \mathcal{E} &= \frac{E}{\hbar\omega}, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

com as soluções [36]

$$\begin{aligned} E_{nl} &= \hbar\omega\mathcal{E} = \hbar\omega \left[2(n-1) + l + \frac{3}{2} \right] \\ R_{nl}(r) &= \frac{N_{nl}}{\sqrt{b_0}} x^{l+1} L_{n-1}^{l+1/2}(x^2) e^{-x^2/2} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

com $n = 1, 2, 3 \dots$. A constante de normalização N_{nl} pode ser obtida da relação de ortonormalidade

$$\int_0^\infty dr R_{nl} R_{ml} = \delta_{nm}, \quad (\text{D.6})$$

e assim

$$N_{nl} = \sqrt{2(n-1)!/(l+n-1/2)!} \quad (\text{D.7})$$

As funções $L_n^a(x)$ que aparecem nas soluções radiais R_{nl} em (D.5) são os polinômios de Laguerre generalizados e satisfazem a seguinte equação diferencial [36],

$$x \frac{d^2}{dx^2} L_n^a(x) + (a+1-x) \frac{d}{dx} L_n^a(x) + n L_n^a(x) = 0 \quad (\text{D.8})$$

com as propriedades [36]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx e^{-x} x^a L_n^a(x) L_m^a(x) &= \delta_{nm} \frac{(n+a)!}{n!} \\ x \frac{d}{dx} L_n^a(x) &= n L_n^a(x) - (n+a) L_{n-1}^a(x) \\ (n+1) L_{n+1}^a(x) &= (2n+a+1-x) L_n^a(x) - (n+a) L_{n-1}^a(x). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Usamos a notação $z! = \Gamma(z+1)$.

Apêndice E

Decomposição Multipolar do Kernel da RPA

Aqui queremos obter (5.81) e (5.83)-(5.87) a partir de (5.21). A expressão (5.21) é simplificada pelo uso da aproximação instantânea, explicada na seção 5.2, para

$$\begin{aligned}
 K_{rs\,nm} = & \int d^3x d^3y \bar{\mathcal{U}}_r(\mathbf{x}) \bar{\mathcal{U}}_m(\mathbf{y}) \left\{ \frac{f_\pi^2}{m_\pi^2} \gamma^5(1) \gamma_i(1) \gamma^5(2) \gamma_j(2) \partial_x^i \partial_y^j D_\pi^0(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \right. \\
 & + \left(-\frac{g_\rho^2}{4} [\gamma_0(1) \gamma_0(2) + \gamma^i(1) \gamma_i(2)] - \frac{ig_\rho f_\rho}{4M} [\sigma_{\mu i}(1) \gamma^\mu(2) i \partial_x^i - \gamma_\mu(1) \sigma^{\mu i}(2) i \partial_i^x] \right. \\
 & \left. \left. - \frac{f_\rho^2}{4M^2} [\sigma_{\mu i}(1) \sigma^{\mu j}(2) i \partial_x^i i \partial_j^x] \right) D_\rho^0(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \right\} \tau_a(1) \tau^a(2) \mathcal{U}_s(\mathbf{x}) \mathcal{U}_n(\mathbf{y}) \quad (E.1)
 \end{aligned}$$

Se substituirmos

$$\begin{aligned}
 \sigma^{ij} &= \epsilon_{ijk} \Sigma^k \\
 \sigma_{0j} &= i \gamma_0 \gamma_j \quad (E.2)
 \end{aligned}$$

em (E.1), podemos eliminar os produtos vetoriais entre as matrizes de Dirac que surgirão na contribuição do méson ρ , através das identidades,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\mu i}(1) \gamma^\mu(2) i \partial_x^i &= -\gamma_0(1) \gamma_0(2) \boldsymbol{\gamma}(1) \cdot \nabla_x - \frac{1}{2} [(\boldsymbol{\Sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\gamma}(2)) (\boldsymbol{\Sigma}(1) \cdot \nabla_x) \\
 &\quad - (\boldsymbol{\Sigma}(1) \cdot \nabla_x) (\boldsymbol{\Sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\gamma}(2))], \\
 \sigma_{\mu i}(1) \sigma^{\mu j}(2) i \partial_x^i i \partial_j^x &= -\gamma_0(1) \gamma_0(2) (\nabla_x \cdot \boldsymbol{\gamma}(1)) (\nabla_y \cdot \boldsymbol{\gamma}(2)) + (\nabla_x \cdot \boldsymbol{\Sigma}(2)) (\boldsymbol{\Sigma}(1) \cdot \nabla_y) \\
 &\quad - (\boldsymbol{\Sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\Sigma}(2)) (\nabla_x \cdot \nabla_y), \quad (E.3)
 \end{aligned}$$

obtidas com

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Sigma} &= -\frac{i}{2} (\boldsymbol{\Sigma} \times \boldsymbol{\Sigma}), \\
 \nabla_x D_{\pi,\rho}^0(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &= -\nabla_y D_{\pi,\rho}^0(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (E.4)
 \end{aligned}$$

Os argumentos (1) e (2) nas matrizes de Dirac nas expressões acima indicam que elas estão correlacionadas às coordenadas x e y , respectivamente.

Substituindo (E.3) em (E.1) obtemos

$$\begin{aligned}
 K_{rs\ nm} = & \underbrace{\int d^3x d^3y P_{rs}(\gamma^5 \gamma_i \tau_a)_x \frac{g_\pi^2}{4M^2} \nabla_x^i \nabla_y^j D_\pi^0(x-y) P_{mn}(\gamma^5 \gamma_j \tau^a)_y}_{T_1} \\
 & - \underbrace{\int d^3x d^3y P_{rs}(\gamma_0 \tau_a)_x \frac{g_\rho^2}{4} D_\rho^0(x-y) P_{mn}(\gamma_0 \tau^a)_y}_{T_2} \\
 & - \underbrace{\int d^3x d^3y P_{rs}(\gamma_i \tau_a)_x \frac{g_\rho^2}{4} D_\rho^0(x-y) P_{mn}(\gamma^i \tau^a)_y}_{T_3} \\
 & + \underbrace{\int d^3x d^3y P_{rs}(\gamma_0 \gamma^i \tau_a)_x \frac{ig_\rho f_\rho}{4M} \nabla_x^i D_\rho^0(x-y) P_{mn}(\gamma_0 \tau^a)_y}_{T_4} \\
 & + \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3x d^3y P_{rs}(\Sigma^i \Sigma^j \tau_a)_x \frac{ig_\rho f_\rho}{4M} \nabla_x^j D_\rho^0(x-y) P_{mn}(\gamma^i \tau^a)_y}_{T_5} \\
 & - \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3x d^3y P_{rs}(\Sigma^i \Sigma^j \tau_a)_x \frac{ig_\rho f_\rho}{4M} \nabla_x^i D_\rho^0(x-y) P_{mn}(\gamma^j \tau^a)_y}_{T_6} \\
 & - \underbrace{\int d^3x d^3y P_{rs}(\gamma_0 \tau_a)_x \frac{ig_\rho f_\rho}{4M} \nabla_x^i D_\rho^0(x-y) P_{mn}(\gamma_0 \gamma^i \tau^a)_y}_{T_7} \\
 & - \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3x d^3y P_{rs}(\gamma^i \tau_a)_x \frac{ig_\rho f_\rho}{4M} \nabla_x^j D_\rho^0(x-y) P_{mn}(\Sigma^i \Sigma^j \tau^a)_y}_{T_8} \\
 & + \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3x d^3y P_{rs}(\gamma^i \tau_a)_x \frac{ig_\rho f_\rho}{4M} \nabla_x^j D_\rho^0(x-y) P_{mn}(\Sigma^j \Sigma^i \tau^a)_y}_{T_9} \\
 & + \underbrace{\int d^3x d^3y P_{rs}(\gamma_0 \gamma^i \tau_a)_x \frac{f_\rho^2}{4M^2} \nabla_x^i \nabla_x^j D_\rho^0(x-y) P_{mn}(\gamma_0 \gamma^j \tau^a)_y}_{T_{10}} \\
 & - \underbrace{\int d^3x d^3y P_{rs}(\Sigma^i \tau_a)_x \frac{f_\rho^2}{4M^2} \nabla_x^i \nabla_x^j D_\rho^0(x-y) P_{mn}(\Sigma^j \tau^a)_y}_{T_{11}} \\
 & + \underbrace{\int d^3x d^3y P_{rs}(\Sigma^i \tau_a)_x \frac{f_\rho^2}{4M^2} \nabla_x^j \nabla_y^j D_\rho^0(x-y) P_{mn}(\Sigma^i \tau^a)_y}_{T_{12}}
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

onde $\nabla^i = -\partial^i$ e $P_{rs}(\Gamma \tau_a)_x = \bar{\mathcal{U}}_r(x) \Gamma \tau_a \mathcal{U}_s(x)$, com Γ representando os diversos produtos das matrizes de Dirac que aparecem no argumento de P em (E.5).

Para o propagador livre dos mésons π e ρ temos

$$\begin{aligned} D_{\pi,\rho}^0(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2 + m_{\pi,\rho}^2 - i\epsilon} \\ &\simeq - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2 + m_{\pi,\rho}^2} \\ &= - \frac{e^{-m_{\pi,\rho}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \equiv - \frac{1}{4\pi} Y(\mathbf{x}-\mathbf{y}, m_{\pi,\rho}) \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Por outro lado a função de Yukawa $Y(\mathbf{x}-\mathbf{y}, m_{\pi,\rho})$ pode ser expandida como [37]

$$Y(\mathbf{x}-\mathbf{y}, m) = -4\pi m \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^L j_L(imx_{<}) h_L^{(1)}(imx_{>}) Y_{LM}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{y}}) \quad (\text{E.7})$$

onde j_L e $h_L^{(1)}$ são, respectivamente, as funções esféricas de Bessel e Hankel de primeira espécie e ordem L e $x_{<}$ e $x_{>}$ representam a variável que tem o menor e maior valor entre $x = |\mathbf{x}|$ e $y = |\mathbf{y}|$. Y_{LM} são os harmônicos esféricos. E portanto

$$\begin{aligned} D_{\pi,\rho}^0(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &= m_{\pi,\rho} \sum_{LM} j_L(im_{\pi,\rho}x_{<}) h_L^{(1)}(im_{\pi,\rho}x_{>}) Y_{LM}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{y}}) \\ &= m_{\pi,\rho} \sum_{LM} f_L(x, y; m_{\pi,\rho}) Y_{LM}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Como $f_L(x, y; m_{\pi,\rho})$ depende somente dos módulos de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, temos

$$\nabla_{\mathbf{x}}^i f_L(x, y; m_{\pi,\rho}) = \frac{x^i}{|\mathbf{x}|} \partial_x f_L(x, y; m_{\pi,\rho}) \quad (\text{E.9})$$

e então

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}}^i D_{\pi,\rho}^0(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &= m_{\pi,\rho} \sum_{LM} \left\{ \frac{x^i}{x} [\partial_x f_L(x, y; m_{\pi,\rho})] Y_{LM}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{y}}) \right. \\ &\quad \left. + f_L(x, y; m_{\pi,\rho}) [\nabla_{\mathbf{x}}^i Y_{LM}(\hat{\mathbf{x}})] Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{y}}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}}^i \nabla_{\mathbf{y}}^j D_{\pi,\rho}^0(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &= m_{\pi,\rho} \sum_{LM} \left\{ \frac{x^i}{x} \frac{y^j}{y} [\partial_x \partial_y f_L(x, y; m_{\pi,\rho})] Y_{LM}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{y}}) \right. \\ &\quad + \frac{y^j}{y} [\partial_y f_L(x, y; m_{\pi,\rho})] [\nabla_{\mathbf{x}}^i Y_{LM}(\hat{\mathbf{x}})] Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{y}}) \\ &\quad + \frac{x^i}{x} [\partial_x f_L(x, y; m_{\pi,\rho})] Y_{LM}(\hat{\mathbf{x}}) [\nabla_{\mathbf{y}}^j Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{y}})] \\ &\quad \left. + f_L(x, y; m_{\pi,\rho}) [\nabla_{\mathbf{x}}^i Y_{LM}(\hat{\mathbf{x}})] [\nabla_{\mathbf{y}}^j Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{y}})] \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^j \nabla_{\mathbf{y}}^j D_{\pi,\rho}^0(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -m_{\pi,\rho} \sum_{LM} \left\{ \left[\nabla_{\mathbf{x}}^2 - \frac{L(L+1)}{x^2} \right] f_L(x, y; m_{\pi,\rho}) \right\} Y_{LM}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{y}}) \quad (\text{E.12})$$

Substituindo a expansão (3.41) para o espinor de Dirac $\mathcal{U}$, a expansão (E.8) para o propagador livre dos méson π e ρ e as identidades (E.10)–(E.12), em (E.5), podemos obter o kernel da RPA na forma acoplada. Para ilustrar isso iremos fazer essas substituições e calcular, detalhadamente, o quinto termo de (E.5),

$$T_5 = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y P_{rs} (\Sigma^i \Sigma^j \tau_a)_x \frac{ig_\rho f_\rho}{4M} \nabla_x^j D_\rho^0(x-y) P_{mn} (\gamma^i \tau^a)_y \quad (\text{E.13})$$

pois para os demais termos os cálculos são análogos a esse.

Antes de prosseguirmos é conveniente listar aqui algumas identidades envolvendo a função angular $\Phi_{\kappa m}$ que aparece em (3.41), e serão utilizadas adiante. As propriedades são

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{x} \Phi_{\kappa m} = -\Phi_{-\kappa m}, \quad (\text{E.14})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \frac{f(r)}{r} \Phi_{\kappa m} = -\frac{1}{r} \left(\partial_r + \frac{\kappa}{r} \right) f(r) \Phi_{-\kappa m}, \quad (\text{E.15})$$

$$\sum_m \Phi_{\kappa m}^\dagger \Phi_{\kappa' m'} = \frac{2j+1}{4\pi} \delta_{\kappa\kappa'} (\kappa' = \pm\kappa), \quad (\text{E.16})$$

$$\sum_m \Phi_{\kappa m}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Phi_{-\kappa m} = \sum_m \Phi_{-\kappa m}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Phi_{\kappa m} = 0, \quad (\text{E.17})$$

$$\int d\Omega \Phi_{-\kappa m}^\dagger Y_{LM} \Phi_{\kappa' m'} = \langle -\kappa m | Y_{LM} | \kappa' m' \rangle = \langle \kappa m | Y_{LM} | -\kappa' m' \rangle \quad (\text{E.18})$$

$$\langle \kappa m | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla Y_{LM}) | \kappa' m' \rangle = \frac{\kappa + \kappa'}{r} \langle -\kappa m | Y_{LM} | \kappa' m' \rangle \quad (\text{E.19})$$

As relações (E.14) e (E.15) podem ser encontradas nas referências [21, 38] e (E.16) em [1]. As outras relações são obtidas com o auxílio das primeiras.

Retornando a (E.13) iremos calcular agora $P_{rs}(\Sigma^i \Sigma^j \tau_a)_x$ e $P_{mn}(\gamma^i \tau^a)_y$. Isso pode ser feito substituindo a expressão (3.41) para $\mathcal{U}$ nesses termos, e assim teremos

$$\begin{aligned} P_{rs}(\Sigma^i \Sigma^j \tau_a)_x &= \mathcal{U}_r^\dagger(x) \gamma_0 \Sigma^i \Sigma^j \tau_a \mathcal{U}_s(x) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{iG_{a_r}}{x} \Phi_{\kappa_r m_r}^\dagger & -\frac{F_{a_r}}{x} \Phi_{-\kappa_r m_r}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i \sigma^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{iG_{a_s}}{x} \Phi_{\kappa_s m_s} \\ -\frac{F_{a_s}}{x} \Phi_{-\kappa_s m_s} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \zeta_{t_r}^\dagger \tau_a \zeta_{t_s} \\ &= \frac{1}{x^2} [G_{a_r} G_{a_s} \Phi_{\kappa_r m_r}^\dagger \sigma^i \sigma^j \Phi_{\kappa_s m_s} - F_{a_r} F_{a_s} \Phi_{-\kappa_r m_r}^\dagger \sigma^i \sigma^j \Phi_{-\kappa_s m_s}]_x \zeta_{t_r}^\dagger \tau_a \zeta_{t_s} \quad (\text{E.20}) \end{aligned}$$

Para $P_{mn}(\gamma^i \tau^a)_y$, temos

$$\begin{aligned}
 P_{mn}(\gamma^i \tau^a)_y &= \mathcal{U}_m^\dagger(\mathbf{y}) \gamma_0 \gamma^i \tau^a \mathcal{U}_n(\mathbf{y}) \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{iG_{am}}{y} \Phi_{\kappa_m m_m}^\dagger & -\frac{F_{am}}{y} \Phi_{-\kappa_m m_m}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{iG_{an}}{y} \Phi_{\kappa_n m_n} \\ -\frac{F_{an}}{y} \Phi_{-\kappa_n m_n} \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \zeta_{t_m}^\dagger \tau^a \zeta_{t_n} \\
 &= \frac{i}{y^2} [G_{am} F_{an} \Phi_{\kappa_m m_m}^\dagger \sigma^i \Phi_{-\kappa_n m_n} - F_{am} G_{an} \Phi_{-\kappa_m m_m}^\dagger \sigma^i \Phi_{\kappa_n m_n}]_y \zeta_{t_m}^\dagger \tau^a \zeta_{t_n}. \quad (\text{E.21})
 \end{aligned}$$

Substituindo (E.20), (E.21) e (E.10) em (E.13) e utilizando (E.19) obtemos

$$\begin{aligned}
 T_5 &= \frac{1}{2} \sum_{J'M'} \frac{g_\rho f_\rho}{4M} m_\rho \int dx dy \\
 &\left\{ [-G_{ar} G_{as} \langle \kappa_r m_r | \sigma^i Y_{J'M'} | -\kappa_s m_s \rangle + F_{ar} F_{as} \langle -\kappa_r m_r | \sigma^i Y_{J'M'} | \kappa_s m_s \rangle]_x \right. \\
 &\quad [G_{am} F_{an} \langle \kappa_m m_m | \sigma^i Y_{J'M'}^* | -\kappa_n m_n \rangle - F_{am} G_{an} \langle -\kappa_m m_m | \sigma^i Y_{J'M'}^* | \kappa_n m_n \rangle]_y \\
 &\quad \partial_x f_{j'}(x, y; m_\rho) \\
 &+ [G_{ar} G_{as} \langle \kappa_r m_r | \sigma^i \sigma^j \nabla^j Y_{J'M'} | \kappa_s m_s \rangle - F_{ar} F_{as} \langle -\kappa_r m_r | \sigma^i \sigma^j \nabla^j Y_{J'M'} | -\kappa_s m_s \rangle]_x \\
 &\quad [G_{am} F_{an} \langle \kappa_m m_m | \sigma^i Y_{J'M'}^* | -\kappa_n m_n \rangle - F_{am} G_{an} \langle -\kappa_m m_m | \sigma^i Y_{J'M'}^* | \kappa_n m_n \rangle]_y \\
 &\quad \left. f_{j'}(x, y; m_\rho) \right\} (\zeta_{t_r}^\dagger \tau^a \zeta_{t_s})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^a \zeta_{t_n} \quad (\text{E.22})
 \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
 \langle \kappa_r m_r | \sigma^i \sigma^j \nabla^j Y_{J'M'} | \kappa_s m_s \rangle &= \sum_{\kappa m} \langle \kappa_r m_r | \sigma^i | \kappa m \rangle \frac{\kappa + \kappa_s}{x} \langle -\kappa m | Y_{J'M'} | \kappa_s m_s \rangle \\
 &= \sum_{\kappa m} \left[-\frac{1}{x} \langle \kappa_r m_r | \sigma^i | \kappa m \rangle (\langle \kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + 1) Y_{J'M'} | -\kappa_s m_s \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\kappa_s}{x} \langle \kappa_r m_r | \sigma^i | \kappa m \rangle \langle \kappa m | Y_{J'M'} | -\kappa_s m_s \rangle \right] \\
 &= -\frac{1}{x} \langle \kappa_r m_r | \sigma^i (\sigma^j L^j + 1) Y_{J'M'} | -\kappa_s m_s \rangle \\
 &\quad + \frac{\kappa_s}{x} \langle \kappa_r m_r | \sigma^i Y_{J'M'} | -\kappa_s m_s \rangle \\
 &= -\frac{1}{x} \langle \kappa_r m_r | [2L^i + (\kappa_r + 2) \sigma^i] Y_{J'm \in M'} | -\kappa_s m_s \rangle \\
 &\quad + \frac{\kappa_s}{x} \langle \kappa_r m_r | \sigma^i Y_{J'M'} | -\kappa_s m_s \rangle \quad (\text{E.23})
 \end{aligned}$$

onde utilizamos (E.18) e (E.19), $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + 1)|\kappa m\rangle = -\kappa|\kappa m\rangle$ [1] e $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$. Agora iremos introduzir na Eq. (E.23) a identidade,

$$\sum_{i=1}^3 \sigma^i(1) \sigma^i(2) = \sum_{k=0, \pm 1} \sigma_k^1(1) [\sigma_k^1(2)]^\dagger, \quad (\text{E.24})$$

Relações análogas a essa valem para qualquer operador vetorial. De agora em diante quando lidarmos com componentes esféricas iremos denotá-las pelo índice k , enquanto para componentes cartesianas reservamos os índices i e j (para isospin a e b). Com (E.24) podemos reescrever (E.23) em componentes esféricas, como

$$\begin{aligned}
 \langle \kappa_r m_r | \sigma^i \sigma^j \nabla^j Y_{J' M'} | \kappa_s m_s \rangle &= -\frac{1}{x} [\langle \kappa_r m_r | 2L_k^1 Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle \\
 &\quad - \frac{1}{x} \langle \kappa_r m_r | (\kappa_r + 2) \sigma_k^1 Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle] \\
 &\quad + \frac{\kappa_s}{x} \langle \kappa_r m_r | \sigma_k^1 Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle \\
 &= -\frac{2}{x} \langle \kappa_r m_r | J_k^1 Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{x} \langle \kappa_r m_r | \sigma_k^1 Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle \\
 &\quad - \frac{1}{x} \langle \kappa_r m_r | (\kappa_r + 2) \sigma_k^1 Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle \\
 &\quad + \frac{\kappa_s}{x} \langle \kappa_r m_r | \sigma_k^1 Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle \\
 &= -\frac{2}{x} \sum_{\kappa m} \langle \kappa_r m_r | J_k^1 | \kappa m \rangle \langle \kappa m | Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle \\
 &\quad - \frac{\kappa_r - \kappa_s + 1}{x} \langle \kappa_r m_r | \sigma_k^1 Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle \quad (E.25)
 \end{aligned}$$

Mas [22]

$$\langle \kappa_r m_r | J_k^1 | \kappa m \rangle = (-)^{j_r - m} \frac{\langle j_r m_r j_r - m | 1k \rangle}{\sqrt{3}} \sqrt{j_r(j_r + 1)(2j_r + 1)} \delta_{\kappa \kappa_r} \quad (E.26)$$

e então

$$\begin{aligned}
 \langle \kappa_r m_r | \sigma^i \sigma^j \nabla^j Y_{J' M'} | \kappa_s m_s \rangle &= -\frac{2}{x} \sum_m (-)^{j_r - m} \langle j_r m_r j_r - m | 1k \rangle \sqrt{\frac{j_r(j_r + 1)(2j_r + 1)}{3}} \\
 &\quad \times \langle \kappa_r m | Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle \\
 &\quad - \frac{\kappa_r - \kappa_s + 1}{x} \langle \kappa_r m_r | \sigma_k^1 Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle \quad (E.27)
 \end{aligned}$$

Analogamente obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle -\kappa_r m_r | \sigma^i \sigma^j \nabla^j Y_{J' M'} | -\kappa_s m_s \rangle &= -\frac{2}{x} \sum_m (-)^{j_r - m} \langle j_r m_r j_r - m | 1k \rangle \sqrt{\frac{j_r(j_r + 1)(2j_r + 1)}{3}} \\
 &\quad \times \langle -\kappa_r m | Y_{J' M'} | \kappa_s m_s \rangle \\
 &\quad + \frac{\kappa_r - \kappa_s - 1}{x} \langle -\kappa_r m_r | \sigma_k^1 Y_{J' M'} | \kappa_s m_s \rangle \quad (E.28)
 \end{aligned}$$

Introduzindo o tensor

$$T_{J' k}^M(\hat{x}) = \sum_{M' k} \langle J' M' 1k | JM \rangle \sigma_k^1 Y_{J' M'}(\hat{x}) \quad (E.29)$$

verificamos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{JM} T_{JJ'}^M(\hat{y})^\dagger T_{JJ'}^M(\hat{x}) &= \sum_{JM} \sum_{M'k} \sum_{M''k'} \langle J'M'1k|JM \rangle \langle J'M''1k'|JM \rangle \\
 &\quad (\sigma_k^1)^\dagger Y_{J'M''}^*(\hat{y}) \sigma_k^1 Y_{J'M'}(\hat{x}) \\
 &= \sum_{M'k} (\sigma_k^1)^\dagger Y_{J'M'}^*(\hat{y}) \sigma_k^1 Y_{J'M'}(\hat{x})
 \end{aligned} \tag{E.30}$$

Assim se substituirmos (E.27) e (E.28) em (E.22), obtemos com (E.30) que

$$\begin{aligned}
 T_5 &= \frac{1}{2} \sum_{J'} \frac{g_\rho f_\rho}{4M} m_\rho \int dx dy \sum_{JM} \\
 &- \left\{ [G_{a_r} G_{a_s} \langle \kappa_r m_r | T_{JJ'}^M | -\kappa_s m_s \rangle - F_{a_r} F_{a_s} \langle -\kappa_r m_r | T_{JJ'}^M | \kappa_s m_s \rangle]_x \right. \\
 &\quad [G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n m_n | T_{JJ'}^M | \kappa_m m_m \rangle^* - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n m_n | T_{JJ'}^M | -\kappa_m m_m \rangle^*]_y \\
 &\quad \partial_x f_{j'}(x, y; m_\rho) \\
 &+ \left(\sum_{kmM'} [G_{a_r} G_{a_s} - \frac{2}{x} (-)^{j_r-m} \langle j_r m_r j_r-m | 1k \rangle \sqrt{\frac{j_r(j_r+1)(2j_r+1)}{3}} \right. \\
 &\quad \langle \kappa_r m | Y_{J'M'} | -\kappa_s m_s \rangle - F_{a_r} F_{a_s} - \frac{2}{x} (-)^{j_r-m} \langle j_r m_r j_r-m | 1k \rangle \sqrt{\frac{j_r(j_r+1)(2j_r+1)}{3}} \\
 &\quad \langle -\kappa_r m | Y_{J'M'} | \kappa_s m_s \rangle]_x \langle J'M'1k|JM \rangle [G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n m_n | T_{JJ'}^M | \kappa_m m_m \rangle^* \\
 &\quad - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n m_n | T_{JJ'}^M | -\kappa_m m_m \rangle^*]_y \\
 &+ [G_{a_r} G_{a_s} \frac{\kappa_r - \kappa_s + 1}{x} \langle \kappa_r m_r | T_{JJ'}^M | -\kappa_s m_s \rangle - F_{a_r} F_{a_s} \frac{-\kappa_r + \kappa_s + 1}{x} \langle -\kappa_r m_r | T_{JJ'}^M | \kappa_s m_s \rangle]_x \\
 &\quad [G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n m_n | T_{JJ'}^M | \kappa_m m_m \rangle^* - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n m_n | T_{JJ'}^M | -\kappa_m m_m \rangle^*]_y \Big) \\
 &\quad \left. f_{j'}(x, y; m_\rho) \right\} (\zeta_{t_r}^\dagger \tau^k \zeta_{t_s})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}
 \end{aligned} \tag{E.31}$$

Pelo teorema de Wigner-Eckart [22] temos

$$\begin{aligned}
 \langle \kappa_r m | Y_{J'M'} | \kappa_s m_s r \rangle &= (-)^{j_s-m_s} \langle j_r m_r j_s-m_s | J'M' \rangle \langle \kappa_r || Y_{J'} || \kappa_s \rangle, \\
 \langle \kappa_r m_r | T_{JJ'}^M | -\kappa_s m_s \rangle &= (-)^{j_s-m_s} \frac{\langle j_r m_r j_s-m_s | JM \rangle}{\sqrt{2J+1}} \langle \kappa_r || T_{JJ'}^M || -\kappa_s \rangle,
 \end{aligned} \tag{E.32}$$

e usando a seguinte relação envolvendo símbolos 3-j e 6-j [39],

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} j_r & j_s & J \\ m_r & -m_s & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_r & j_s & J \\ J' & 1 & j_r \end{Bmatrix} &= \sum_{kmM'} (-)^{J'+1+j_r+M'+k+m} \\
 \begin{pmatrix} j_r & 1 & j_r \\ m_r & k & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & j_s & j_r \\ -M' & -m_s & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & -k & -M \end{pmatrix} &
 \end{aligned} \tag{E.33}$$

finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
 T_5 = & - \sum_{JM} (-)^{j_s - m_s} (-)^{j_m - m_m} \langle j_r m_r j_s - m_s | JM \rangle \langle j_n m_n j_m - m_m | JM \rangle \\
 & \frac{1}{2} \sum_{J'} \frac{g_\rho f_\rho}{4M} m_\rho \int dxdy \left\{ \hat{J}^{-2} [G_{a_r} G_{a_s} \langle \kappa_r \| T_{JJ'} \| -\kappa_s \rangle - F_{a_r} F_{a_s} \langle -\kappa_r \| T_{JJ'} \| \kappa_s \rangle]_x \right. \\
 & [G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m \rangle^* - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n \| T_{JJ'} \| -\kappa_m \rangle^*]_y \partial_x f_{J'}(x, y; m_\rho) \\
 & + \left(\frac{2}{x} (-)^{j_r + j_s + J' - 1} \hat{J}^{-1} \sqrt{j_r(j_r + 1)(2j_r + 1)} \langle \kappa_r \| Y_{J'} \| -\kappa_s \rangle \begin{Bmatrix} j_r & j_s & J \\ J' & 1 & j_r \end{Bmatrix} \right. \\
 & [G_{a_r} G_{a_s} - F_{a_r} F_{a_s}]_x [G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m \rangle^* - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n \| T_{JJ'} \| -\kappa_m \rangle^*]_y \\
 & + \hat{J}^{-2} [G_{a_r} G_{a_s} \frac{\kappa_r - \kappa_s + 1}{x} \langle \kappa_r \| T_{JJ'} \| -\kappa_s \rangle + F_{a_r} F_{a_s} \frac{\kappa_r - \kappa_s - 1}{x} \langle -\kappa_r \| T_{JJ'} \| \kappa_s \rangle]_x \\
 & \left. [G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m \rangle^* - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n \| T_{JJ'} \| -\kappa_m \rangle^*]_y \right) \\
 & \left. f_{J'}(x, y; m_\rho) \right\} \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}, \tag{E.34}
 \end{aligned}$$

Cálculos análogos a esse nos levam a

$$\begin{aligned}
 T_1 = & \sum_{JM} (-)^{j_s - m_s} (-)^{j_m - m_m} \langle j_r m_r j_s - m_s | JM \rangle \langle j_n m_n j_m - m_m | JM \rangle \\
 & \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 m_\pi \int dxdy \hat{J}^{-2} \langle \kappa_r \| Y_J \| -\kappa_s \rangle \langle \kappa_m \| Y_J \| -\kappa_n \rangle^* \\
 & \left[(G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y \partial_x \partial_y f_J(x, y; m_\pi) \right. \\
 & - (G_{a_r} G_{a_s} - F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y \frac{\kappa_r + \kappa_s}{x} \partial_y f_J(x, y; m_\pi) \\
 & - (G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} - F_{a_m} F_{a_n})_y \frac{\kappa_m + \kappa_n}{y} \partial_x f_J(x, y; m_\pi) \\
 & \left. + (G_{a_r} G_{a_s} - F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} - F_{a_m} F_{a_n})_y \frac{\kappa_r + \kappa_s}{x} \frac{\kappa_m + \kappa_n}{y} f_J(x, y; m_\pi) \right] \\
 & \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n} \tag{E.35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_2 = & \sum_{JM} (-)^{j_s - m_s} (-)^{j_m - m_m} \langle j_r m_r j_s - m_s | JM \rangle \langle j_n m_n j_m - m_m | JM \rangle \\
 & (-)^{\frac{g_\rho^2}{4}} m_\rho \int dxdy \hat{J}^{-2} \langle \kappa_r \| Y_J \| \kappa_s \rangle \langle \kappa_n \| Y_J \| \kappa_m \rangle^* (G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x \\
 & (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y f_J(x, y; m_\rho) \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n} \tag{E.36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_3 = & \sum_{JM} (-)^{j_s - m_s} (-)^{j_m - m_m} \langle j_r m_r j_s - m_s | JM \rangle \langle j_n m_n j_m - m_m | JM \rangle \\
 & (-)^{\frac{g_\rho^2}{4}} m_\rho \sum_{J'} \int dxdy \hat{J}^{-2} (G_{a_r} F_{a_s} \langle \kappa_r \| T_{JJ'} \| -\kappa_s \rangle - F_{a_r} G_{a_s} \langle -\kappa_r \| T_{JJ'} \| \kappa_s \rangle)_x \\
 & (G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m \rangle^* - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n \| T_{JJ'} \| -\kappa_m \rangle^*)_y \\
 & f_{J'}(x, y; m_\rho) \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}, \tag{E.37}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_4 = & \sum_{JM} (-)^{j_s-m_s} (-)^{j_m-m_m} \langle j_r m_r j_s - m_s | JM \rangle \langle j_n m_n j_m - m_m | JM \rangle \\
 & \frac{g_\rho f_\rho}{4M} m_\rho \int dx dy \hat{J}^{-2} \langle \kappa_r \| Y_J \| \kappa_s \rangle \langle \kappa_n \| Y_J \| \kappa_m \rangle^* \\
 & \left[(G_{a_r} F_{a_s} + F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y \partial_x f_J(x, y; m_\rho) \right. \\
 & \left. - (G_{a_r} F_{a_s} - F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} G_{a_n} + F_{a_m} F_{a_n})_y \frac{\kappa_r - \kappa_s}{x} f_J(x, y; m_\rho) \right] \\
 & \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}, \tag{E.38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_6 = & \sum_{JM} (-)^{j_s-m_s} (-)^{j_m-m_m} \langle j_r m_r j_s - m_s | JM \rangle \langle j_n m_n j_m - m_m | JM \rangle \\
 & \frac{1}{2} \sum_{J'} \frac{g_\rho f_\rho}{4M} m_\rho \int dx dy \left\{ \hat{J}^{-2} [G_{a_r} G_{a_s} \langle -\kappa_r \| T_{JJ'} \| \kappa_s \rangle - F_{a_r} F_{a_s} \langle \kappa_r \| T_{JJ'} \| -\kappa_s \rangle]_x \right. \\
 & [G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m \rangle^* - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n \| T_{JJ'} \| -\kappa_m \rangle^*]_y \partial_x f_{J'}(x, y; m_\rho) \\
 & + \left(\frac{2}{x} (-)^{j_r+j_s+J} \hat{J}^{-1} \sqrt{j_s(j_s+1)(2j_s+1)} \langle \kappa_r \| Y_{J'}' \| -\kappa_s \rangle \begin{Bmatrix} j_s & j_r & J \\ J' & 1 & j_s \end{Bmatrix} \right. \\
 & [G_{a_r} G_{a_s} - F_{a_r} F_{a_s}]_x [G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m \rangle^* - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n \| T_{JJ'} \| -\kappa_m \rangle^*]_y \\
 & - \hat{J}^{-2} [G_{a_r} G_{a_s} \frac{\kappa_r - \kappa_s - 1}{x} \langle -\kappa_r \| T_{JJ'} \| \kappa_s \rangle + F_{a_r} F_{a_s} \frac{\kappa_r - \kappa_s + 1}{x} \langle \kappa_r \| T_{JJ'} \| -\kappa_s \rangle]_x \\
 & \left. [G_{a_m} F_{a_n} \langle -\kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m \rangle^* - F_{a_m} G_{a_n} \langle \kappa_n \| T_{JJ'} \| -\kappa_m \rangle^*]_y \right) \\
 & \left. f_{J'}(x, y; m_\rho) \right\} \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}, \tag{E.39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_7 = & \sum_{JM} (-)^{j_s-m_s} (-)^{j_m-m_m} \langle j_r m_r j_s - m_s | JM \rangle \langle j_n m_n j_m - m_m | JM \rangle \\
 & \frac{g_\rho f_\rho}{4M} m_\rho \int dx dy \hat{J}^{-2} \langle \kappa_r \| Y_J \| \kappa_s \rangle \langle \kappa_n \| Y_J \| \kappa_m \rangle^* \\
 & \left[(G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_n} F_{a_m} + F_{a_n} G_{a_m})_y \partial_y f_J(x, y; m_\rho) \right. \\
 & \left. - (G_{a_r} G_{a_s} + F_{a_r} F_{a_s})_x (G_{a_n} F_{a_m} - F_{a_n} G_{a_m})_y \frac{\kappa_n - \kappa_m}{y} f_J(x, y; m_\rho) \right] \\
 & \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}, \tag{E.40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_8 = & \sum_{JM} (-)^{j_s-m_s} (-)^{j_m-m_m} \langle j_r m_r j_s - m_s | JM \rangle \langle j_n m_n j_m - m_m | JM \rangle \\
 & \frac{1}{2} \sum_{J'} -\frac{g_\rho f_\rho}{4M} m_\rho \int dx dy \left\{ \hat{J}^{-2} [G_{a_s} F_{a_r} \langle -\kappa_r \| T_{JJ'} \| \kappa_s \rangle - F_{a_s} G_{a_r} \langle \kappa_r \| T_{JJ'} \| -\kappa_s \rangle]_x \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [G_{a_m} G_{a_n} < -\kappa_n \|T_{JJ'}\| \kappa_m >^* - F_{a_m} F_{a_n} < \kappa_n \|T_{JJ'}\| -\kappa_m >^*]_y \partial_y f_{J'}(x, y; m_\rho) \\
 & + \left(\frac{2}{y} (-)^{j_n+j_m+J} \hat{J}^{-1} \sqrt{j_m(j_m+1)(2j_m+1)} < \kappa_n \|Y_J'\| -\kappa_m >^* \begin{Bmatrix} j_m & j_n & J \\ J' & 1 & j_m \end{Bmatrix} \right. \\
 & [G_{a_n} G_{a_m} - F_{a_n} F_{a_m}]_y [G_{a_s} F_{a_r} < -\kappa_r \|T_{JJ'}\| \kappa_s > - F_{a_s} G_{a_r} < \kappa_r \|T_{JJ'}\| -\kappa_s >]_x \\
 & - \hat{J}^{-2} [G_{a_n} G_{a_m} \frac{\kappa_n - \kappa_m - 1}{y} < -\kappa_n \|T_{JJ'}\| \kappa_m >^* + F_{a_n} F_{a_m} \frac{\kappa_n - \kappa_m + 1}{y} < \kappa_n \|T_{JJ'}\| -\kappa_m >^*]_y \\
 & \left. [G_{a_s} F_{a_r} < -\kappa_r \|T_{JJ'}\| \kappa_s > - F_{a_s} G_{a_r} < \kappa_r \|T_{JJ'}\| -\kappa_s >]_x \right) \\
 & f_{J'}(x, y; m_\rho) \left. \right\} \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}, \tag{E.41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_9 &= \sum_{JM} (-)^{j_s-m_s} (-)^{j_m-m_m} < j_r m_r j_s - m_s | JM > < j_n m_n j_m - m_m | JM > \\
 & \frac{1}{2} \sum_{J'} -\frac{g_\rho f_\rho}{4M} m_\rho \int dxdy \left\{ \hat{J}^{-2} [G_{a_s} F_{a_r} < -\kappa_r \|T_{JJ'}\| \kappa_s > - F_{a_s} G_{a_r} < \kappa_r \|T_{JJ'}\| -\kappa_s >]_x \right. \\
 & [G_{a_m} G_{a_n} < \kappa_n \|T_{JJ'}\| -\kappa_m >^* - F_{a_m} F_{a_n} < -\kappa_n \|T_{JJ'}\| \kappa_m >^*]_y \partial_y f_{J'}(x, y; m_\rho) \\
 & + \left(\frac{2}{y} (-)^{j_n+j_m+J-1} \hat{J}^{-1} \sqrt{j_n(j_n+1)(2j_n+1)} < \kappa_n \|Y_J'\| -\kappa_m >^* \begin{Bmatrix} j_n & j_m & J \\ J' & 1 & j_n \end{Bmatrix} \right. \\
 & [G_{a_n} G_{a_m} - F_{a_n} F_{a_m}]_y [G_{a_s} F_{a_r} < -\kappa_r \|T_{JJ'}\| \kappa_s > - F_{a_s} G_{a_r} < \kappa_r \|T_{JJ'}\| -\kappa_s >]_x \\
 & + \hat{J}^{-2} [G_{a_n} G_{a_m} \frac{\kappa_n - \kappa_m + 1}{y} < \kappa_n \|T_{JJ'}\| -\kappa_m >^* + F_{a_n} F_{a_m} \frac{\kappa_n - \kappa_m - 1}{y} < -\kappa_n \|T_{JJ'}\| \kappa_m >^*]_y \\
 & \left. [G_{a_s} F_{a_r} < -\kappa_r \|T_{JJ'}\| \kappa_s > - F_{a_s} G_{a_r} < \kappa_r \|T_{JJ'}\| -\kappa_s >]_x \right) \\
 & f_{J'}(x, y; m_\rho) \left. \right\} \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}, \tag{E.42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{10} &= \sum_{JM} (-)^{j_s-m_s} (-)^{j_m-m_m} < j_r m_r j_s - m_s | JM > < j_n m_n j_m - m_m | JM > \\
 & (-) \left(\frac{f_\rho}{2M} \right)^2 m_\rho \int dxdy \hat{J}^2 < \kappa_r \|Y_J\| \kappa_s > < \kappa_n \|Y_J\| \kappa_m >^* \\
 & \left[(G_{a_r} F_{a_s} + F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} F_{a_n} + F_{a_m} G_{a_n})_y \partial_x \partial_y f_J(x, y; m_\rho) \right. \\
 & - \frac{\kappa_r - \kappa_s}{x} (G_{a_r} F_{a_s} - F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} F_{a_n} + F_{a_m} G_{a_n})_y \partial_y f_J(x, y; m_\rho) \\
 & - \frac{\kappa_m - \kappa_n}{y} (G_{a_r} F_{a_s} + F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} F_{a_n} - F_{a_m} G_{a_n})_y \partial_x f_J(x, y; m_\rho) \\
 & \left. + \frac{(\kappa_r - \kappa_s)(\kappa_m - \kappa_n)}{xy} (G_{a_r} F_{a_s} - F_{a_r} G_{a_s})_x (G_{a_m} F_{a_n} - F_{a_m} G_{a_n})_y f_J(x, y; m_\rho) \right] \\
 & \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}, \tag{E.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \sum_{JM} (-)^{j_s-m_s} (-)^{j_m-m_m} < j_r m_r j_s - m_s | JM > < j_n m_n j_m - m_m | JM > \\
 & (-) \left(\frac{f_\rho}{2M} \right)^2 m_\rho \int dxdy \hat{J}^2 < \kappa_r \|Y_J\| -\kappa_s > < \kappa_n \|Y_J\| -\kappa_m >^*
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[(G_{ar}G_{as} - F_{ar}F_{as})_x (G_{am}G_{an} - F_{am}F_{an})_y \partial_x \partial_y f_J(x, y; m_\rho) \right. \\
 & - \frac{\kappa_r + \kappa_s}{x} (G_{ar}G_{as} + F_{ar}F_{as})_x (G_{am}G_{an} - F_{am}F_{an})_y \partial_y f_J(x, y; m_\rho) \\
 & - \frac{\kappa_m + \kappa_n}{y} (G_{ar}G_{as} - F_{ar}F_{as})_x (G_{am}G_{an} + F_{am}F_{an})_y \partial_x f_J(x, y; m_\rho) \\
 & \left. + \frac{(\kappa_r + \kappa_s)(\kappa_m + \kappa_n)}{xy} (G_{ar}G_{as} + F_{ar}F_{as})_x (G_{am}G_{an} + F_{am}F_{an})_y f_J(x, y; m_\rho) \right] \\
 & \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n},
 \end{aligned} \tag{E.44}$$

$$\begin{aligned}
 T_{12} &= \sum_{JM} (-)^{j_s - m_s} (-)^{j_m - m_m} \langle j_r m_r j_s - m_s | JM \rangle \langle j_n m_n j_m - m_m | JM \rangle \\
 & \sum_{J'} (-) \left(\frac{f_\rho}{2M} \right)^2 m_\rho \int dx dy \hat{j}^2 \left[\nabla_x^2 f_{J'}(x, y; m_\rho) - \frac{J'(J'+1)}{x^2} f_{J'}(x, y; m_\rho) \right] \\
 & (G_{ar}G_{as} < \kappa_r \| T_{JJ'} \| \kappa_s > - F_{ar}F_{as} < -\kappa_r \| T_{JJ'} \| -\kappa_s >)_x \\
 & (G_{am}G_{an} < \kappa_n \| T_{JJ'} \| \kappa_m >^* - F_{am}F_{an} < -\kappa_n \| T_{JJ'} \| -\kappa_m >^*)_y \\
 & \sum_{k=0, \pm 1} (\zeta_{t_s}^\dagger \tau^k \zeta_{t_r})^* \zeta_{t_m}^\dagger \tau^k \zeta_{t_n}
 \end{aligned} \tag{E.45}$$

Referências Bibliográficas

- [1] B.D. Serot e J.D. Walecka, *Adv. Nucl. Phys.* **16**(1986)1.
- [2] B.D. Serot e J.D. Walecka, *Int. J. Mod. Phys. E* **6**(1997)515.
- [3] P. Ring, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **37**(1996)193.
- [4] C. De Conti, A. P. Galeão e F. Krmpotić, *nucl-th/9807052*. Aceito para publicação na *Phys. Lett. B*.
- [5] F. Osterfeld, *Rev. Mod. Phys.* **64**(1992)491.
- [6] J.D. Walecka, *Ann.Phys.* , (N.Y.) **83**(1974)491.
- [7] R. Machleidt, *Adv. Nucl. Phys.* **19**(1989)189.
- [8] J. Boguta e A. R. Bodmer, *Nucl. Phys. A* **292** (1977)413.
- [9] Y. K. Gambhir, P. Ring e A. Thimet, *Ann. Phys.*, (N.Y.) **198** (1990)132.
- [10] C. Itzykson e J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, Singapore 1985).
- [11] A. Bouyssy, J. F. Mathiot, e Nguyen Van Giai, *Phys. Rev. C* **36**(1987)380.
- [12] A. L. Fetter e J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, (McGraw-Hill, N. Y., 1971).
- [13] Cláudio De Conti, *dissertação de mestrado, IFT-D.004/94* (1994)
- [14] S.A. Chin, *Phys. Lett.* **62B**(1976)263.
- [15] S.A. Chin, *Ann. Phys.* (N.Y.) **108**(1977)301.

- [16] Z. Ma, N. Van Giai, H. Toki, *Phys. Rev. C* **55**(1997)2385.
- [17] Z. Ma, H. Toki, N. Van Giai, *Nucl. Phys. A* **627**(1997)1.
- [18] D. J. Rowe, *Nuclear Collective Motion* (Methuen, London, 1970)
- [19] Otávio Socolowski Junior, *dissertação de mestrado, IFT-D.003/94* (1994).
- [20] J. P. Blaizot e G. Ripka, *Quantum Theory of Finite Systems*, (MIT Press, Cambridge, Mass., 1986).
- [21] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967).
- [22] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, 1957).
- [23] P. G. Reinhard, M. Rufa, J. Maruhn, W. Greiner e J. Friedrich, *Z.Phys. A* **323**(1986)13.
- [24] P. Ring e colaboradores, *Código FORTRAN para RMFT em núcleos esféricos*. Utilizado com autorização .
- [25] H. Akimune *et al.*, *Phys. Lett. C* **52**(1995)604.
- [26] G. Colò, N. Van Giai, P. F. Bortignon e R. A. Broglia, *Phys. Rev. C* **50**(1994)1496.
- [27] S. Krewald, F. Osterfeld, J. Speth e G. E. Brown, *Phys. Rev. Lett.* **46**(1981)103.
- [28] P. G. Blunden e P. McCorquodale, *Phys. Rev. C* **38** (1988)1861.
- [29] D. J. Horen *et al.*, *Phys. Lett. B* **95**(1980)27.
- [30] D. E. Bainum *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **44**(1980)1751.
- [31] T. Wakasa *et al.*, *Phys. Rev. C* **55**(1997)2909.
- [32] B. D. Anderson *et al.*, *Phys. Rev. C* **31**(1985)1161.
- [33] J. R. Shepard, E. Rost e J. A. McNeil, *Phys. Rev. C* **40**(1989)2320.

- [34] J. F. Dawson e R. J. Furnstahl, *Phys. Rev. C* **42**(1990)2009.
- [35] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, (John Wiley, New York, 1966). Vol II.
- [36] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York 1970).
- [37] J. D. Jackson, *Classical Eletrodynamics*, (John Wiley, New York, 1975).
- [38] J. D. Bjorken e S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, (McGraw-Hill, New York, 1964).
- [39] M. Rotenberg, R. Bivins, N. Metropolis e J. K. Wooten Jr., *The 3-j and 6-j symbols*, (The Technology Press, Cambridge, Mass. 1959).

