

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

Órbitas Periódicas Retrógradas em Sistemas Binários

Maria Júlia Fassis

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Maria Júlia Fassis

Órbitas periódicas retrógradas em sistemas binários

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Fi-
lho", como parte dos requisitos para a ob-
tenção do título de Mestre em Física.

Orientadora: Prof. Dra. Maria Helena
Moreira Moraes

Rio Claro - SP
2025

F249o Fassis, Maria Júlia
Órbitas periódicas retrógradas em sistemas binários / Maria Júlia
Fassis. -- Rio Claro, 2025
130 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Maria Helena Moreira Moraes

1. Problema dos três corpos. 2. Órbitas. 3. Mecânica celeste. I.
Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Maria Júlia Fassis

Órbitas periódicas retrógradas em sistemas binários

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Maria Helena Moreira Moraes
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Alessandra Ferraz da Silva Ferreira
FEG/UNESP/Guaratinguetá (SP)

Prof. Dr. André Luis Prando Livorati
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 21 de maio de 2025.

Agradecimentos

Quero agradecer a toda minha família por sempre terem estado ao meu lado. Em especial, agradeço aos meu pais, Anaí e Marcos, e meus irmãos, Cauã e Fabiano, que me apoiaram a vida toda. Obrigada também aos meus avós, tios, tias e Aline.

Também quero agradecer aos meus amigos por todo carinho e suporte não só em questões acadêmicas como também em questões pessoais. Em especial, obrigada aos meus amigos: Duda, Heloisa, Kaio, Lara, Luisa, Luiz Ricardo, Lucas, Luana, Victor, Victória, Thayná, Xandy, Érika, Bruna, Natália, Alan, Lariele, Luis Renato e Mayla.

Também quero agradecer a todos os meus professores desde a educação infantil e, em especial, à Marta que me orientou como aluna de iniciação científica por anos e foi uma das primeiras pessoas a apoiar minha decisão em fazer o mestrado na física.

Agradeço à Helena primeiro por ter me aceitado como sua aluna e também por toda ajuda e excelente orientação durante esses anos de mestrado.

Obrigada às instituições de ensino que tiveram papel fundamental em minha vida: Colégio SOE, Cotel (Colégio Técnico de Limeira) e Unesp (Universidade Estadual Paulista).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil. Processo nº 2022/15410-9. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do(s) autor(es) e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

Resumo

Nesse trabalho, buscamos numericamente órbitas periódicas simétricas (OPSs) retrógradas dentro do problema gravitacional circular restrito de 3 corpos (PCR3C), onde temos dois corpos (chamados primário e secundário) com massas finitas e um terceiro corpo com massa desprezível. Estudamos as órbitas descritas pelo terceiro corpo, as quais pertencem a famílias e das quais analisamos a estabilidade e seus pontos de bifurcação. Exploramos também a existência ou não de ressonância entre o período dessas órbitas e o período da órbita do secundário em torno do primário; em especial, estudamos e detalhamos as ressonâncias coorbitais retrógradas (ressonância 1/-1) encontradas. Investigamos nove sistemas diferentes dentro do PCR3C planar, buscando entender como as diferentes razões de massa influenciam na existência das famílias de OPSs retrógradas e em suas características.

Palavras-chave: órbitas retrógradas, órbitas periódicas simétricas, problema circular restrito de 3 corpos, estabilidade, bifurcação, razão de massa, ressonância coorbital retrógrada.

Abstract

In this work, we numerically searched for retrograde symmetric periodic orbits (SPOs) within the circular restricted 3-body gravitational problem (CR3BP), where we have two bodies (called primary and secondary) with finite masses and a third body with negligible mass. We studied the orbits described by the third body, which belong to families and of which we analyzed the stability and their bifurcation points. We also explored the existence or not of resonance between the period of these orbits and the period of the secondary orbit around the primary; in particular, we studied and detailed the retrograde coorbital resonances (1/-1 resonances) found. We investigated nine different systems within the planar CR3BP, seeking to understand how the different mass ratios influence the existence of the families of retrograde SPOs and their characteristics.

Keywords: retrograde orbits, symmetric periodic orbits, circular restricted 3-body problem, stability, bifurcation, mass ratio, retrograde coorbital resonance.

Lista de Abreviações

Abreviação	Descrição
OP	Órbita Periódica
OPS	Órbita Periódica Simétrica
PCR3C	Problema Circular Restrito de 3 Corpos
P2C	Problema de 2 Corpos
PR3C	Problema Restrito de 3 Corpos
SoS	Superfícies de Poincaré (<i>Surfaces of Section</i>)

Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição
f	Anomalia verdadeira
ω	Argumento do pericentro
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais não negativos
C_J	Constante de Jacobi
G	Constante gravitacional universal: $G = 6,6726 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$
$\det A$	Determinante da matriz A
e	Excentricidade
I	Inclinação
$K2D$	Índice de estabilidade horizontal
$K3D$	Índice de estabilidade vertical
Ω	Longitude do nodo ascendente
ϖ	Longitude do pericentro: $\varpi = \Omega + \omega$
θ	Longitude verdadeira: $\theta = f + \varpi$
$\Delta(T)$	Matriz de monodromia
$\Delta(t)$	Matriz fundamental de soluções
I_4	Matriz identidade 4×4
A^T	Matriz transposta da matriz A
n	Movimento médio (<i>mean motion</i>)
k	Ordem de ressonância
T	Período
μ_2	Razão de massa (<i>mass ratio</i>): $\mu_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$
a	Semi-eixo maior
$tr(A)$	Traço da matriz A

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Revisão teórica	11
1.2	Trabalhos na área	28
1.3	Organização desse trabalho	29
2	Metodologia	30
3	Resultados	33
3.1	As famílias no sistema Sol-Netuno ($\mu_2 = 5.15463 \times 10^{-5}$)	36
3.2	As famílias no sistema Sol-Júpiter ($\mu_2 = 0.001$)	39
3.3	As famílias no sistema Terra-Lua ($\mu_2 = 0.0121506683$)	43
3.4	As famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.04$	46
3.5	As famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.1$	54
3.6	As famílias no sistema Plutão-Charonte ($\mu_2 = 0.1056338028$)	62
3.7	As famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.3$	70
3.8	As famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.4$	75
3.9	As famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.5$ - Problema de Copenhaga	79
4	Conclusão	83
	Referências	85
A	Cálculo das matrizes Jacobianas	88
B	Bifurcações com multiplicação de período	92
C	Diagramas característicos	94
D	Bifurcações em famílias 3D no sistema Sol-Netuno	99
E	Pontos onde ocorrem troca de estabilidade	102
E.1	Das famílias no sistema Sol-Netuno ($\mu_2 = 5.15463 \times 10^{-5}$)	102
E.2	Das famílias no sistema Sol-Júpiter ($\mu_2 = 0.001$)	104
E.3	Das famílias no sistema Terra-Lua ($\mu_2 = 0.0121506683$)	106

E.4	Das famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.04$	108
E.5	Das famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.1$	114
E.6	Das famílias no sistema Plutão-Caronte ($\mu_2 = 0.1056338028$)	119
E.7	Das famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.3$	124
E.8	Das famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.4$	129
E.9	Das famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.5$ - Problema de Copenhaga	130

Capítulo 1

Introdução

A importância do estudo de órbitas periódicas (OPs) quando se trata de sistemas dinâmicos vem sendo destacada por diversos pesquisadores desde o trabalho de Poincaré. Esse tipo de pesquisa é importante para entender a dinâmica de objetos no Sistema Solar e em sistemas extrassolares. Trabalhos recentes, como [1] e [2], foram essenciais para identificar objetos com órbitas retrógradas ressonantes por meio do desenvolvimento de modelos analíticos para sistemas com configurações de alta inclinação. Um exemplo particularmente interessante comentado em [3] é o asteroide (514107) Ka'epaoka'awela na ressonância retrógrada 1/1 (coorbital) com Júpiter. Os conceitos de órbitas retrógradas e ressonância serão explicados mais à frente no texto.

1.1 Revisão teórica

1.1.1 Problema gravitacional de 2 corpos e elementos orbitais

Conforme [4], o Universo é um sistema formado por N corpos, $N \in \mathbb{N}$, cuja força dominante é a força gravitacional Newtoniana. A evolução desse sistema depende, a longo prazo, da existência de regiões caóticas ou ordenadas do seu espaço de fase, o qual tem sua topologia determinada pela posição e estabilidade das órbitas periódicas do sistema.

Sistemas binários são sistemas constituídos por dois corpos massivos cujo movimento é determinado pela sua interação gravitacional ([5]).

Muitos sistemas do Sistema Solar podem ser abordados de uma forma simplificada como um problema de dois corpos (P2C) quando consideramos um corpo se movendo ao redor de outro corpo mais massivo. Nesses casos, tratamos o efeito dos demais corpos como perturbações ao sistema.

Segundo [6], o P2C corresponde a um sistema composto por dois corpos massivos (tratados como pontos de massa) que se movem segundo sua atração gravitacional, descrita pela Lei da Gravitação Universal de Newton:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (1.1)$$

onde $G = 6,6726 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ é a constante gravitacional universal, m_1 e m_2 são as massas dos corpos e d é a distância entre eles, ou melhor, a distância entre os centros de massa.

Consideremos, então, um sistema formado por dois corpos C_1 e C_2 com massas m_1 e m_2 e vetores de posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ em relação à origem O , respectivamente, assim como ilustrado na Figura 1.1. A origem O é um ponto fixado no espaço inercial.

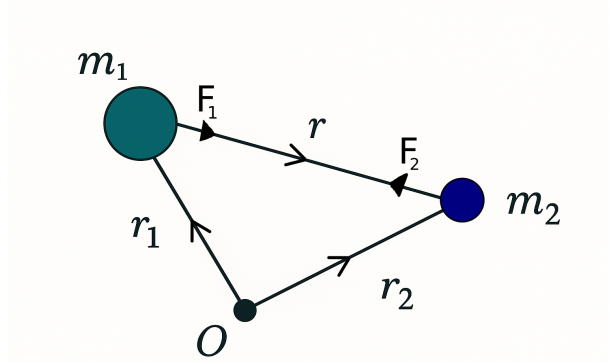


Figura 1.1: Esquema representando os vetores das forças agindo nos dois corpos de massa m_1 e m_2 com vetores de posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ em relação à origem O . [Fonte: Imagem baseada em [6]]

Denotando a posição relativa entre os corpos por $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, temos da Lei da Gravitação Universal de Newton - equação (1.1) - e da Segunda Lei de Newton as seguintes equações para as forças associadas ao sistema:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \\ \vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são as forças gravitacionais exercidas pelos corpos e G é a constante gravitacional universal.

Da equação de posição relativa segue que $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Assim, note que substituindo nela as equações (1.2) ¹ temos

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0. \quad (1.3)$$

Agora, olhando para esse sistema em coordenadas polares (r, θ) e definindo a origem em C_1 , denotaremos por $\hat{r}$ o versor ao longo do vetor raio e por $\hat{\theta}$ o versor perpendicular ao vetor raio. Assim, podemos escrever os vetores posição, velocidade e aceleração da seguinte forma:

$$\vec{r} = r \hat{r}; \quad (1.4)$$

¹De fato, das equações (1.2) temos $\ddot{\vec{r}}_1 = G \frac{m_2}{r^3} \vec{r}$ e $\ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r}$, logo $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r} - G \frac{m_2}{r^3} \vec{r} = -\frac{G \vec{r}}{r^3} (m_1 + m_2) \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} = -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$ definindo $\mu = G(m_1 + m_2)$.

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} ; \quad (1.5)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right]\hat{\theta} . \quad (1.6)$$

Daí, comparando os componentes associados a $\hat{r}$ nas equações que descrevem $\ddot{\vec{r}}$ em (1.3) e (1.6) e sabendo que $\frac{\vec{r}}{r^3} \equiv \frac{1}{r^2}\hat{r}$, segue que

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} . \quad (1.7)$$

Então, definindo $u = \frac{1}{r}$ e $h = r^2\dot{\theta}$ (isto é, $h = \frac{1}{u^2}\dot{\theta}$) podemos reescrever ² os vetores de velocidade e aceleração como

$$\dot{\vec{r}} = -\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta} \quad \text{e} \quad \ddot{\vec{r}} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} .$$

Assim, segue de (1.7) que $-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}h^2u^4 = -\frac{\mu}{(1/u)^2} \Rightarrow h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{1}{u}h^2u^4 = \mu u^2 \Rightarrow h^2\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{1}{u}h^2u^2 = \mu \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{1}{u}u^2 = \frac{\mu}{h^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad (1.8)$$

uma equação diferencial linear de segunda ordem com solução geral dada por $u = \frac{\mu}{h^2}[1 + e \cos(\theta - \varpi)]$, onde e (a amplitude) e ϖ (a fase) são constante de integração.

Substituindo de volta u por r e definindo $p = \frac{h^2}{\mu}$ (chamado semilatus rectum), obtemos

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)} . \quad (1.9)$$

Note que essa é uma equação geral para cônicas em coordenadas polares. Portanto, concluímos que o movimento no P2C é descrito por cônicas. Existem quatro possibilidades de cônicas: círculos, elipses, parábolas ou hipérboles; suas características estarão sendo expressas na Tabela 1.1. Por exemplo, no P2C com o Sol e um planeta o orbitando, o movimento desse planeta é descrito por uma elipse que tem o Sol em um dos focos. Apesar de cometas terem órbitas com $e \approx 1$, a maioria dos corpos permanentes do Sistema Solar tem órbitas com $e \ll 1$.

Características das cônicas		
Círculo	$e = 0$	$p = a$
Elipse	$0 < e < 1$	$p = a(1 - e^2)$
Parábola	$e = 1$	$p = 2q$
Hipérbole	$e > 1$	$p = a(e^2 - 1)$

Tabela 1.1: Classificação das cônicas quanto ao valor da excentricidade e e qual o valor de p para cada um dos casos; a é o semi-eixo maior da órbita e q é a distância até o centro de massa mais próximo.

²De fato, para reescrever (1.5), note que $\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{du}{d\theta}$. Assim, temos $r = \frac{1}{u} \Rightarrow \dot{r} = \frac{d(1/u)}{dt} = \frac{-\dot{u}}{u^2} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}$. Análogo para (1.6).

Assim, seguindo a Tabela 1.1 podemos reescrever a Eq. (1.9) para elipses como:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}. \quad (1.10)$$

Elementos orbitais

Ainda seguindo [6], considere dois corpos C_1 e C_2 com massas m_1 e m_2 , respectivamente. O corpo C_2 orbita C_1 em uma órbita elíptica, a qual tem C_1 um dos focos enquanto o outro foco permanece vazio. Seja o eixo x definido pelos dois focos dessa elipse e o eixo y perpendicular a ele. Considere ainda que assumimos uma direção de referência assim como ilustrado na Figura 1.2. Chamamos de *pericentro* o ponto da elipse onde C_2 tem a menor distância possível em relação a C_1 e de *apocentro* o ponto C_2 tem a maior distância possível em relação a C_1 . Os elementos orbitais são definidos a seguir:

- Denotamos por ϖ a *longitude do pericentro*, isto é, o ângulo entre a direção de referência e o vetor que liga C_1 ao pericentro. Esse valor é constante quando tratamos do P2C, mas pode variar com o tempo quando se introduz perturbações.
- Denotamos por f a *anomalia verdadeira*, isto é, o ângulo entre o vetor que liga C_1 ao pericentro e $\vec{r}$ (vetor que conecta C_1 à C_2). Essa é uma variável periódica com período 2π .
- Denotamos por θ a *longitude verdadeira*, isto é, o ângulo entre a direção de referência e o vetor $\vec{r}$ (vetor que conecta C_1 à C_2). Logo, $\theta = f + \varpi$. Essa também é uma variável periódica com período 2π . Perceba que podemos reescrever (1.10) como $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(f)}$.

Note que quando C_2 está no apocentro da órbita, $r_a = a + ae = a(1 + e)$ e $\theta_a = \varpi + \pi$. Quando C_2 está no pericentro da órbita, $r_p = a - ae = a(1 - e)$ e $\theta_p = \varpi$. Esses são os valores máximo e mínimo do raio orbital.

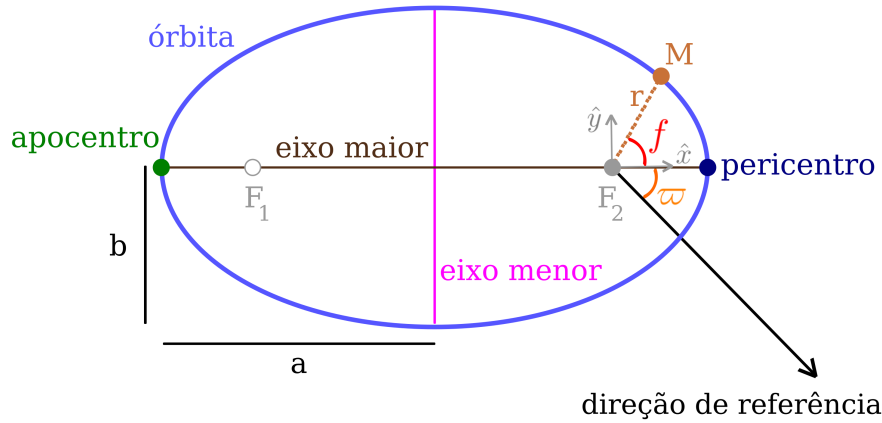


Figura 1.2: Elementos orbitais f (anomalia verdadeira), ϖ (longitude do pericentro) e θ (longitude verdadeira) em órbita elíptica que descreve o movimento de um corpo com massa m_2 (em M) ao redor de outro com massa m_1 , o qual está fixado no foco F_2 . O foco F_1 é vazio e as medidas representadas por a e b são, respectivamente, o semi-eixo maior e o semi-eixo menor. [Fonte: Imagem construída pela autora e baseada em [6]]

Já na Figura 1.3 temos uma ilustração da órbita quando consideramos uma trajetória inclinada em relação a um plano de referência. Nela podemos ver os seguintes elementos orbitais:

- Denotamos por I a *inclinação*, isto é, o ângulo entre o plano de referência e o plano que contém a órbita. A inclinação assume valores no intervalo $[0^\circ, 180^\circ]$.
- O ponto onde a órbita intersecciona o plano de referência com a trajetória do corpo C_2 na direção de baixo para cima é chamado de *nodo ascendente*. *Linha dos nodos* é o nome dado à reta que conecta o foco onde está C_1 ao nodo ascendente.
- Denotamos por Ω a *longitude do nodo ascendente*, isto é, o ângulo entre o vetor da direção de referência e a linha dos nodos (vetor que conecta o foco onde está C_1 ao nodo ascendente).
- Denotamos por ω o *argumento do pericentro*, isto é, o ângulo entre a linha dos nodos (vetor que conecta o foco onde está C_1 ao nodo ascendente) e o vetor que conecta o foco onde está C_1 ao pericentro. Logo, $\varpi = \Omega + \omega$.

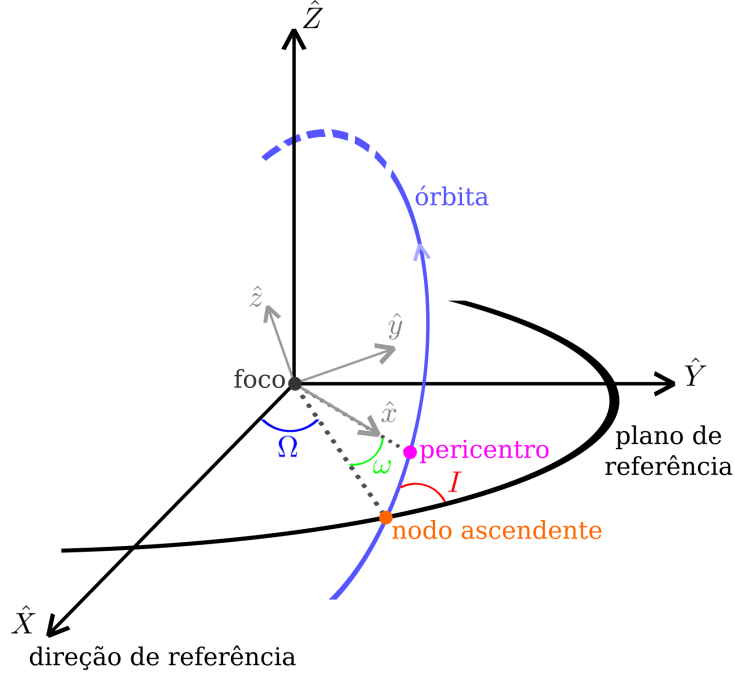


Figura 1.3: Elementos orbitais I (inclinação), nodo ascendente, Ω (longitude do nodo ascendente) e ω (argumento do pericentro) em órbita elíptica inclinada (tridimensional). [Fonte: Imagem construída pela autora e baseada em [6]]

Por outro lado, ainda conforme [6], podemos escrever o sistema de coordenadas em função de (r, f) definindo

$$\begin{cases} x = r \cos f \\ y = r \sin f \end{cases}$$

Considerando o movimento do corpo C_2 durante um intervalo de tempo δt , temos em coordenadas polares que $t = 0 \rightarrow (r, \theta)$ e $t = \delta t \rightarrow (r + \delta r, \theta + \delta \theta)$. Logo, a área varrida pelo vetor $\vec{r}$ no intervalo δ é $\delta A \approx \frac{r(r+\delta r)}{2} \sin(\delta \theta) \approx \frac{r^2}{2} \delta \theta$. Então, dividindo essa equação por δt e tomando o limite quando $t \rightarrow 0$, temos $\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2}$.

A área total de uma elipse é dada pela equação $A = \pi a' b'$ onde $a' = 2a$ é o comprimento do eixo maior e $b' = 2b$ o comprimento do eixo menor. Além disso, usando $p = \frac{h^2}{\mu}$ conforme definido após (1.9) temos para elipses

$$p = \frac{h^2}{\mu} \Rightarrow h^2 = p\mu = a(1 - e^2)\mu \quad (1.11)$$

e como da última equação temos $A = \frac{hT}{2}$, segue que ³

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3, \quad (1.12)$$

³De fato, $\pi a' b' = A = \frac{hT}{2} \Leftrightarrow \pi a' b' = \frac{hT}{2} \stackrel{(1.11)}{\Leftrightarrow} (\pi 2a 2b)^2 = \frac{a(1-e^2)\mu T^2}{2^2} \Leftrightarrow \pi^2 16a^2 b^2 = \frac{a(1-e^2)\mu T^2}{4} \Leftrightarrow \pi^2 16a^2 a^2 (1-e^2) = \frac{a(1-e^2)\mu T^2}{4} \Leftrightarrow \pi^2 16a^3 = \frac{\mu T^2}{4} \Leftrightarrow T^2 = \frac{\pi^2 16a^3}{\mu^4} \Leftrightarrow T^2 = \frac{\pi^2 4a^3}{\mu}$.

o que corresponde à terceira lei de Kepler.

Ainda, como θ cobre 2π *rad* durante um período orbital, podemos definir a *velocidade angular média* ou *movimento médio* (*mean motion*) por

$$n = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.13)$$

Assim, segue de (1.12) e (1.13) que $\mu = \frac{4\pi^2}{T^2}a^3 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3 \Rightarrow$

$$\mu = n^2 a^3$$

e segue dessa última equação e de (1.11) que $h^2 = a\mu(1 - e^2) = an^2 a^3(1 - e^2) \Rightarrow$

$$h = a^2 n \sqrt{1 - e^2}.$$

1.1.2 Problema gravitacional de 3 corpos

Segundo [4], quando tratamos de um sistema composto por três corpos, podemos classificá-lo quanto aos valores das massas:

- *Problema restrito de 3 corpos (PR3C)*: Nesse caso, consideramos inicialmente um sistema de dois corpos com massa finita m_1 e m_2 (os quais chamamos de primário e secundário) que se movem segundo sua interação gravitacional. A esse sistema, adicionamos um terceiro corpo com massa m_3 desprezível (isto é, m_3 tende a zero; [7]), o qual não afetará o movimento dos outros dois corpos, mas terá seu próprio movimento determinado pela atração gravitacional deles.
 - *Problema circular restrito de 3 corpos (PCR3C)*: Nesse caso, o primário e o secundário se movem em órbitas circulares ao redor de seu centro de massa comum.
- *Problema geral de 3 corpos*: Nesse caso, temos um sistema composto por três corpos com massa finita que se movem segundo sua interação gravitacional.

Enquanto o caso restrito do problema de três corpos pode ser usado para estudar os objetos transnetunianos (tomando Sol e Netuno como primário e secundário, respectivamente) ou asteróides (tomando Sol e Júpiter como primário e secundário, respectivamente), por exemplo, o caso geral é aplicado em sistemas estelares triplos ou dois planetas orbitando uma estrela ou ainda dois satélites orbitando um planeta. Em [8], por exemplo, o autor explora órbitas no problema geral de 3 corpos.

Problema gravitacional circular restrito de 3 corpos

Para trabalhar com o problema circular restrito de 3 corpos (PCR3C), considere um sistema com dois corpos C_1 (primário) e C_2 (secundário) com massas finitas m_1 e m_2 , respectivamente, e um terceiro corpo C_3 de massa desprezível m_3 posicionado em P . Nesse cenário, temos $m_1 \geq m_2$ e m_3 tende a zero. Veja a Figura 1.4. Apesar

de C_3 não afetar o movimento do primário e do secundário, ele tem sua trajetória definida pela interação gravitacional deles e é sua trajetória que iremos estudar.

Podemos estudar o movimento do corpo C_3 por dois sistemas de coordenadas diferentes: (x, y, z) segundo o referencial sinódico ou (ξ, η, ζ) segundo o referencial inercial em relação ao centro de massa do sistema.

O referencial sinódico, assim como explicado por [9], é um referencial que acompanha o movimento rotacional dos corpos primário e secundário. Basicamente, consideramos um plano G_{xy} com origem em G , o centro de massa entre os corpos de massa m_1 e m_2 . O eixo x desse plano é definido pela direção C_1 para C_2 e o eixo y é perpendicular ao eixo x . Perceba, então, que os corpos primário e secundário aparecem no referencial sinódico fixados no eixo x .

Segundo [6], em $t = 0$, o eixo ξ coincide com o segmento C_1C_2 . O eixo ζ é perpendicular ao plano $\xi\eta$, logo, coincide com o vetor momento angular. Em ambos os sistemas de coordenadas citados, a origem O está fixada no centro de massa comum entre C_1 e C_2 .

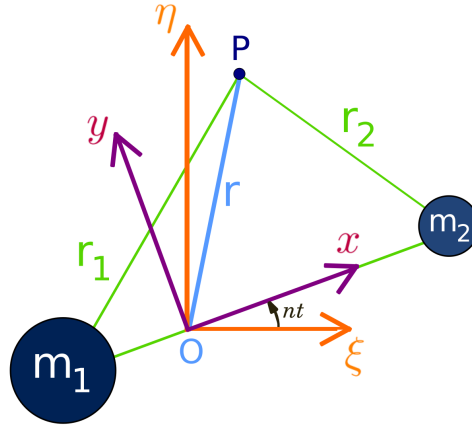


Figura 1.4: Ilustração do PR3C com corpos C_1 e C_2 de massa m_1 e m_2 e o terceiro corpo C_3 com massa desprezível em P . Sistemas de coordenadas (x, y, z) segundo o referencial sinódico e (ξ, η, ζ) segundo o referencial inercial em relação ao centro de massa do sistema (ponto O). [Fonte: Imagem construída pela autora e baseada em [6]]

Seja a posição de C_1 dada por (ξ_1, η_1, ζ_1) e a de C_2 por (ξ_2, η_2, ζ_2) . Vamos definir uma unidade de medida de comprimento nesse sistema onde $1un$ equivale à distância entre C_1 e C_2 , a qual é constante.

Além disso, C_1 e C_2 tem a mesma velocidade angular em relação a outra e seu centro de massa comum. Também, eles tem o mesmo valor de movimento médio, n .

Assumindo $m_1 > m_2$ e tomando $\mu = G(m_1 + m_2)$, podemos definir

$$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} < \frac{1}{2}$$

e, portanto,

$$\mu_1 = Gm_1 = 1 - \bar{\mu} \quad e \quad \mu_2 = Gm_2 = \bar{\mu} . \quad (1.14)$$

O valor $\mu_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ é chamado *razão de massa* (*mass ratio*) e tem um papel de destaque em nossa pesquisa.

Podemos, ainda, deduzir equações para as distâncias r_1 (entre os corpos C_1 e C_3) e r_2 (entre os corpos C_2 e C_3):

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2 \quad (1.15)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2 \quad (1.16)$$

e, assim, aplicando a forma vetorial da lei do inverso ao quadrado ([10]), as equações de movimento da partícula em P são dadas por

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\ \ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \\ \ddot{\zeta} = \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3} \end{cases} \quad (1.17)$$

Considerando que os corpos C_1 e C_2 estão em movimento circular no espaço (PCR3C), podemos supor um plano de rotação referencial em $\xi\eta$ rotacionando a uma taxa n na direção positiva (isto é, o referencial sinódico). Assim, no sistema (x, y, z) temos

$$\begin{cases} r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2 \\ r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \quad (1.18)$$

e a matriz de transição $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ com derivadas

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad e \\ \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Logo, segue de (1.17) as equações de movimento para o terceiro corpo C_3

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left[\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3} \right] \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \\ \ddot{z} = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z \end{cases} \quad (1.19)$$

Essas acelerações também podem ser escritas como o gradiente de uma função escalar $U = U(x, y, z) = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$, onde o termo $(x^2 + y^2)$ representa o

potencial centrífugo do sistema e os termos $\left(\frac{1}{r_1}\right)$ e $\left(\frac{1}{r_2}\right)$ o potencial gravitacional. Temos:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (1.20)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.21)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} . \quad (1.22)$$

Ainda conforme [6], veja que somando $(1.20) \cdot \dot{x}$ com $(1.21) \cdot \dot{y}$ e $(1.22) \cdot \dot{z}$, segue que

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{dU}{dt}$$

e integrando essa equação temos

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_J , \quad (1.23)$$

onde C_J é uma constante de integração. Como $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, segue que $v^2 = 2U - C_J$. Substituindo o valor de U , obtemos a equação da chamada **constante de Jacobi**, uma constante de movimento,

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 . \quad (1.24)$$

Ademais, existem no PR3C cinco pontos de equilíbrio chamados *pontos Lagrangianos*. Conforme [6], chamamos de pontos de equilíbrio do sistema os pontos onde a partícula possui velocidade e aceleração nulas no referencial sinódico.

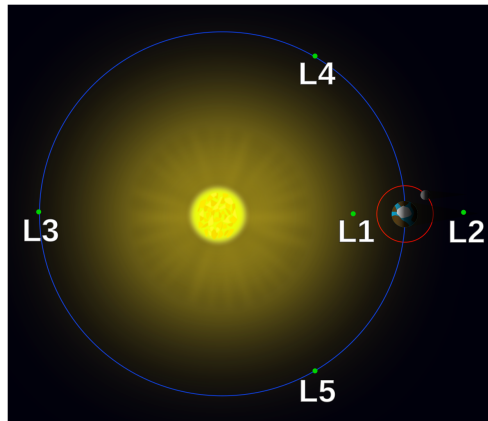


Figura 1.5: Ilustração da posição dos pontos de equilíbrio Lagrangianos. [Fonte: Imagem retirada do Google Images]

Os pontos Lagrangianos são distribuídos da seguinte forma: L_4 e L_5 são, separadamente, vértices de triângulos equiláteros cujo primário e secundário se encontram nos outros dois vértices; L_1 , L_2 e L_3 pertencem à mesma reta que o primário e o secundário, isto é, são colineares a eles. A posição dos pontos de equilíbrio Lagrangianos estão ilustrados na Figura 1.5.

1.1.3 Órbitas

Órbitas periódicas

Chamamos de órbitas as trajetórias descritas pelos corpos ao longo do tempo. Quando elas se repetem por inúmeras vezes a partir de um certo período de tempo T , dizemos que essas órbitas são periódicas com período T ou podemos chamá-las órbitas T -periódicas.

Conforme [4], podemos definir matematicamente uma condição Eq. (1.28) para que órbitas sejam periódicas. Para isso, considere o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem que descrevem um sistema dinâmico qualquer com dois graus de liberdade

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \\ \ddot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \end{cases} \quad (1.25)$$

Perceba que as equações de movimento do PR3C (apresentadas em (1.19)) em um contexto plano (bidimensional), isto é,

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left[\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3} \right] \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \end{cases}, \quad (1.26)$$

correspondem à descrição genérica apresentada em (1.25).

Assim, assumindo as condições iniciais

$$x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20} \quad (1.27)$$

para o sistema (1.25), temos soluções da forma $x_i(x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}; t)$ e a solução será periódica se

$$x_i(x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}; t + T) = x_i(x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}; t) \quad (1.28)$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Essa é a chamada *condição de periodicidade*.

Formas de representação e famílias

Existem algumas formas de representar órbitas periódicas em figuras como por meio de superfícies de Poincaré (SoS) ou *diagramas característicos*, por exemplo (como discutido em [11]). Nos diagramas característicos, cada ponto está associado a uma OP e para construí-los basta escolher dois elementos relacionados às órbitas, como C_J e x_0 por exemplo, e utilizá-los como eixos de um gráfico bidimensional.

No geral, órbitas periódicas não são isoladas no espaço, mas pertencem a famílias; as órbitas de uma mesma família possuem morfologia parecida e valores de período muito próximos. Essas famílias podem ser representadas em diagramas característicos por curvas contínuas chamadas *curvas características*.

Nessa pesquisa, optamos por apresentar nossos resultados por meio de diagramas característicos. Por outro lado, definição e mais informações sobre SoS são apresentadas em [6]. Vale comentar que nos SoS, segundo [12], as órbitas periódicas instáveis correspondem aos pontos de sela (X) e as órbitas periódicas estáveis aos pontos centrais (O).

Órbitas retrógradas

Para diferenciar as órbitas prógradas das retrógradas, seguiremos a classificação apresentada em [1].

As órbitas prógradas são caracterizadas por valores de inclinação I (entre o plano da órbita do terceiro corpo e o plano que contém o primário e o secundário) baixos, isto é, no intervalo $I \in (0^\circ, 90^\circ)$, sendo que $I \approx 0^\circ$ caracteriza o movimento prógrado coplanar. As órbitas retrógradas, por sua vez, possuem inclinações altas, isto é, no intervalo $I \in (90^\circ, 180^\circ)$, sendo o movimento retrógrado coplanar definido por $I \approx 180^\circ$.

Para que as órbitas sejam retrógradas no referencial sinódico, é preciso que elas satisfaçam a seguinte condição:

$$x_0 \cdot \dot{y}_0 < 0 \quad . \quad (1.29)$$

Vale notar que $x_0 \equiv x_{1_0}$ e $\dot{y}_0 \equiv \dot{x}_{2_0}$ quando comparamos as notações utilizadas em [1] e em [4]. Ainda, é definido por [1] uma condição para que a órbita seja retrógrada também no referencial do primário:

$$C_J < \frac{2\mu_1}{|x_0 + \mu_2|} + \frac{2\mu_2}{|x_0 - \mu_1|} - \mu_2(\mu_2 + 2x_0)$$

para $x_0 > -\mu_2$ e $\dot{y}_0 < 0$ ou $x_0 < -\mu_2$ e $\dot{y}_0 > 0$. Essa condição vem do fato de que o momento angular nesse referencial deve ser negativo para que o movimento da órbita no mesmo seja considerado retrógrado.

Órbitas simétricas

Conforme [4], assumindo que as equações variacionais em (1.25) são invariantes pela transformação $x_1 \rightarrow x_1$, $x_2 \rightarrow -x_2$ e $t \rightarrow -t$, temos que: se $x_1(t)$, $x_2(t)$ é solução do sistema, então $x_1(-t)$, $-x_2(-t)$ também é. Ainda, essa segunda solução é simétrica à primeira com respeito ao eixo x_1 .

Logo, se uma órbita tem seu movimento iniciado em um ponto no eixo x_1 (isto é, $x_{2_0} = 0$) e perpendicular a ele (isto é, com $\dot{x}_{1_0} = 0$) e se em outro momento ela cruza o eixo x_1 perpendicularmente de novo, então ela é uma órbita fechada, periódica e simétrica em relação ao eixo x_1 .

Para uma órbita periódica com período T , podemos escrever a *condição de simetria* para órbitas bidimensionais assim: em $t = 0$ e em $t = T/2$

$$x_2 = 0 = \dot{x}_1 . \quad (1.30)$$

É importante esclarecer que entre $t = 0$ e $t = T/2$, a órbita pode cruzar o eixo x_1 uma ou algumas vezes de forma não perpendicular (isto é, com $\dot{x}_1 \neq 0$).

Apesar do foco desse trabalho ser voltado para o caso planar do PCR3C, também estudamos algumas famílias de OPSs retrógradas tridimensionais e, portanto, vale entender a classificação de órbitas simétricas também para o caso 3D.

Segundo a classificação apresentada por [13], existem alguns tipos de simetria para órbitas tridimensionais a serem considerados. Nessa pesquisa, trabalhamos com dois tipos:

- Simetria 3D - tipo 1: órbitas 3D simétricas em relação ao eixo x . As condições iniciais $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ para esse tipo de órbita tem $x = z = \dot{y} = 0$.
- Simetria 3D - tipo 2: órbitas 3D simétricas em relação ao plano xz . As condições iniciais $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ para esse tipo de órbita tem $x = \dot{y} = \dot{z} = 0$.

1.1.4 Ressonância

Conforme [14], no caso do PCR3C onde o primário é mais massivo que o secundário, existem famílias de órbitas periódicas ressonantes e não ressonantes. Enquanto as primeiras são caracterizadas pela comensurabilidade entre as frequências orbitais (isto é, pela ressonância), as segundas correspondem às soluções circulares que permanecem do problema não perturbado.

Segundo [6], ressonâncias acontecem quando a divisão entre frequências ou períodos resultam em frações com numerador e denominador inteiros. No caso abordado nessa pesquisa, ressonâncias retrógradas acontecem quando a divisão entre o período das órbitas do secundário e do terceiro corpo em torno do primário resulta em uma fração p/q com $p, q \in \mathbb{Z}$.

Temos diversos exemplos de ressonância no Sistema Solar. Por exemplo, as luas de Júpiter Io, Europa e Ganymede estão em uma configuração onde Io tem ressonância 2/1 com Europa e Europa tem ressonância 2/1 com Ganymede, logo, enquanto Ganymede completa uma volta orbital ao redor de Júpiter, Europa repete sua órbita duas vezes e Io repete sua órbita quatro vezes.

Órbitas em ressonância retrógrada p/q (também denotadas por órbitas em ressonância $p/-q$), com $p, q \in \mathbb{Z}$, tem ordem de ressonância equivalente à quantidade de vezes que a órbita intersecta a seção de Poincaré (SoS), ou ainda, equivalente à quantidade de vezes que a condição $\dot{x} = 0$ com $\dot{y} \cdot \dot{y}_0 > 0$ é satisfeita por período. Devido a isso e denotando a ordem de ressonância em ressonâncias retrógradas por k , órbitas retrógradas circulares tem $k = 1$. Ainda, foi observado por [1] que, no geral,

$$k = p + q . \quad (1.31)$$

Em especial, chamamos a ressonância $1/-1$ de *ressonância coorbital* retrógrada. Ela foi descrita pela primeira vez em [1]. As órbitas em ressonância coorbital retrógrada, por exemplo, têm $k = 1 + 1 \Rightarrow k = 2$.

1.1.5 Estabilidade de órbitas periódicas

Estabilidade horizontal

Além da possibilidade de ressonâncias, outra característica que analisamos nas OPSs retrógradas encontradas foi a estabilidade.

Seguindo a discussão apresentada em [4], a estabilidade das OPs é determinada pelo que acontece na vizinhança das soluções (órbitas) periódicas $x(t)$ do sistema de equações de movimento. Classificaremos a estabilidade ou instabilidade dessas soluções ao definir um pequeno desvio inicial $\xi(0)$ e analisar como ele se comporta com o passar do tempo. Caso esse desvio se mantenha mínimo em $t = T$, a solução é considerada estável; caso contrário, instável.

A partir do pequeno desvio inicial $\xi(0)$, temos a solução perturbada $x'(t) = x(t) + \xi(t)$ e, daí, obtemos o *sistema de equações variacionais* $\dot{\xi}(t) = J\xi(t)$ onde J é a matriz jacobiana do sistema. O processo para obter o sistema de equações variacionais é descrito em [4] e os cálculos para obter J são descritos no Apêndice A. O sistema de equações variacionais é formado por 4 equações diferenciais lineares com coeficientes dependentes do tempo. Se a solução $x(t)$ for periódica com período T , então as derivadas parciais serão T -periódicas e, portanto, o sistema é linear com coeficientes periódicos.

Segue do teorema de existência e unicidade que o sistema de equações variacionais $\dot{\xi}(t) = J\xi(t)$ tem uma *matriz fundamental de soluções*, denotada por $\Delta(t)$ e definida por

$$\dot{\Delta}(t) = J \Delta(t) \text{ , } \forall t \in \mathbb{R} \text{ .} \quad (1.32)$$

A matriz fundamental de soluções, $\Delta(t)$, no PCR3C planar é uma matriz 4×4 cujas colunas são soluções linearmente independentes correspondentes à condição inicial $\Delta(0) = I_4$ (matriz identidade 4×4). Aplicada no período T , $\Delta(T)$, ela recebe o nome de **matriz de monodromia**.

Vale aqui uma definição (dada em [15]):

Definição 1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Se $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ com $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então λ é um **autovalor** de A e $\vec{v}$ um **autovetor** de A associado a λ .*

Temos em [4] três resultados importantes para esse trabalho:

Resultado 1. *O sistema de equações variacionais tem solução T -periódica se, e somente se, a matriz de monodromia, $\Delta(T)$, tem um autovalor unitário.*

Resultado 2. *A existência de uma integral de movimento não estacionária no sistema dinâmico implica que a matriz de monodromia, $\Delta(T)$, tem um autovalor unitário.*

Resultado 3. *O sistema de equações variacionais tem uma solução especial, com condição inicial $\xi(0)$, tal que*

$$\xi(t + T) = \lambda \xi(t) \quad (1.33)$$

se, e somente se, a matriz de monodromia, $\Delta(T)$, tem autovalor λ com autovetor $\xi(0)$ associado a ele.

As demonstrações dos três resultados citados acima são feitas em [4]. Segue desse último resultado que para todo autovalor λ da matriz de monodromia, existe solução da forma

$$\xi(t) = f(t) \lambda^{t/T} \quad (1.34)$$

onde $f(t)$ é T -periódica e cuja condição inicial é o autovetor $f(0)$ com autovalor λ associado.

Retomando, temos uma solução periódica $x_i(t)$ e uma solução perturbada $x'_i(t) = x_i(t) + \xi_i(t)$ onde $\xi_i(t)$ é solução do sistema de equações variacionais. Segue daí que $\xi_i(t)$ é expresso por $\xi(t) = \Delta(t) \xi(0)$ e, em $t = T$, temos

$$\xi(T) = \Delta(T) \xi(0) . \quad (1.35)$$

Logo, segue por indução que $\xi(nT) = [\Delta(T)]^n \xi(0)$. Esse é um mapa do desvio inicial $\xi(0)$ para diversos intervalos de tempo nT , então, note que o desvio $\xi(nT)$ da órbita depende de $\Delta(T)$ e quanto mais a órbita se afastar da solução periódica (isto é, quanto maior o desvio), menos estável ela é. Isto é, a estabilidade das OPs dependem de $\Delta(T)$.

Ainda segundo [4], os autovalores de $\Delta(T)$ são também necessariamente pares reais recíprocos ou complexos conjugados por estarmos trabalhando com um sistema Hamiltoniano, assim a matriz de monodromia associada ao sistema de equações variacionais, que possui solução periódica, tem um par de autovalores unitários; vamos dizer $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$.

O que vai determinar se as órbitas são estáveis ou não serão os dois autovalores não unitários da matriz de monodromia (no caso planar, a matriz de monodromia possui quatro autovalores).

Quando representamos os autovalores λ_3, λ_4 no plano complexo, as órbitas associadas a eles serão estáveis se eles estiverem no círculo unitário (isto é, quando eles tem módulo igual a 1) e instáveis se estiverem dentro ou fora do círculo unitário. Ainda, se λ_3, λ_4 estiverem nos pontos $(\pm 1, 0)$, então os autovalores estarão em pontos críticos onde bifurcações (trocas de estabilidade horizontal) podem acontecer. Por outro lado, se λ_3, λ_4 forem números reais diferentes de ± 1 , as órbitas associadas a eles serão instáveis. Veja na Figura 1.6 um esquema indicando a relação descrita.

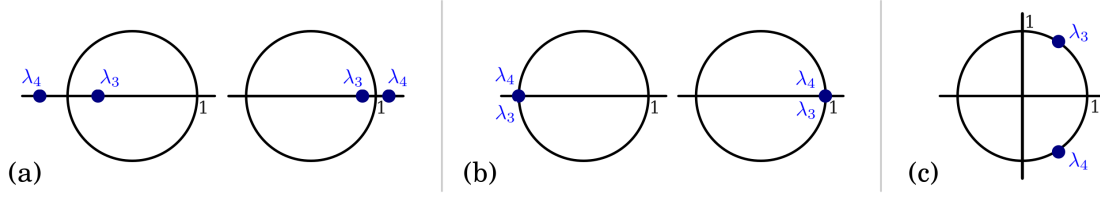


Figura 1.6: Quando λ_3, λ_4 são valores reais diferentes de 1 - como em (a), as órbitas são instáveis e quando λ_3, λ_4 são complexos com módulo igual a 1 - como em (c), as órbitas são estáveis. Quando $\lambda_3, \lambda_4 = \pm 1$, os autovalores estão em pontos críticos onde trocas de estabilidade horizontal podem acontecer - como em (b). [Fonte: Imagem construída pela autora e baseada em [4]]

Na prática, para classificar as OPSs retrógradas encontradas quanto a estabilidade, vamos utilizar os índices de estabilidade apresentados em [4].

Para estabilidade horizontal, temos um parâmetro $K2D$ que depende dos autovalores da matriz de monodromia e é denominado *índice de estabilidade horizontal*. Ele é definido por

$$K2D = \text{tr}(\Delta(T)) - 2 . \quad (1.36)$$

Quando $-2 < K2D < 2$, a órbita é considerada horizontalmente estável e quando $K2D > 2$ ou $K2D < -2$, a órbita é considerada horizontalmente instável. Perceba, então, que temos os pontos de troca de estabilidade horizontal em $K2D = \pm 2$.

Bifurcações com multiplicação de período

Esse índice, $K2D$, também indica pontos de bifurcação onde uma nova família surge com período $M \cdot T$, com $M \in \mathbb{N}$, a partir de uma família com período T . Chamamos essas bifurcações de *bifurcações com multiplicação de período* e dizemos que as famílias originadas por elas tem multiplicidade M . Segundo [11], quanto maior a multiplicidade de uma OP, mais loops ela terá e mais complexa será sua morfologia. Órbitas retrógradas ressonantes com esse tipo de bifurcação foram descritas em [16].

Segundo [4], quando $K2D = -2$, por exemplo, ocorrem bifurcações com duplicação de período. Isto é, a partir de uma órbita de uma família com período T surge uma nova família com período $2T$ (multiplicidade $M = 2$). Apresentamos no Apêndice B uma discussão de quando bifurcações com multiplicação de período ocorrem com base em [4].

Nesse trabalho, iremos investigar a existência dessas bifurcações a partir dos valores de período nas famílias encontradas cujas origens estão claramente em outras famílias nos diagramas característicos.

Mais especificamente, como utilizamos a contagem do número de vezes que a condição $\dot{x} = 0$ com $\dot{y} \cdot \dot{y}_0 > 0$ é satisfeita por período para determinar a ordem de ressonância das OPSs encontradas, quando analisamos órbitas com multiplicidade maior que 1 (isto é, órbitas originadas a partir de bifurcações com multiplicação de período) o valor de k calculado sofre uma multiplicação na mesma proporção que o

período. Assim identificamos possíveis bifurcações com multiplicação de período nos diagramas característicos gerados como resultados e confirmamos essas bifurcações a partir dos valores de período nessas famílias.

Estabilidade vertical

Voltando na questão da estabilidade, a discussão acima levava em consideração a questão da estabilidade horizontal das órbitas. Seguindo [17], podemos ainda discutir a questão da estabilidade vertical das mesmas, isto é, a estabilidade da órbita fora do plano.

Quando as posições e velocidades do terceiro corpo C_3 são dadas no mesmo plano que contém o primário e o secundário, é esperado que C_3 permaneça nesse plano sempre. Porém, é interessante analisar a estabilidade vertical dessas órbitas para entender as perturbações contra sua natureza planar que estão agindo nelas.

Para isso, temos no caso do PR3C tridimensional as equações de movimento (1.19) para o terceiro corpo, C_3 , que podem ser reescritas de forma compacta por $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Perceba que $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$, $x_4 \equiv \dot{x}$, $x_5 \equiv \dot{y}$ e $x_6 \equiv \dot{z}$; análogo para os valores de $\dot{x}_i$.

Associado a esse caso temos o sistema de equações variacionais dado por $\frac{d}{dt}(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0_j}}) = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{0_j}}$ para $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Nesse sistema, os elementos

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_{0_3}} ; \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_{0_6}} ; \quad \frac{\partial x_6}{\partial x_{0_3}} ; \quad \frac{\partial x_6}{\partial x_{0_6}}$$

são os que indicam a estabilidade vertical das órbitas e são chamados *parâmetros de estabilidade vertical*.

A equação que determina a evolução da matriz fundamental de soluções no tempo (1.32) associada ao sistema de equações variacionais para esse caso é dada por

$$\dot{\Delta}_z(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ U_{zz} & 0 \end{pmatrix} \Delta_z(t) \quad (1.37)$$

com U_{zz} sendo a derivada parcial dupla de $U = U(x, y, z) = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$, logo

$$U_{zz} = -\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{3z^2\mu_1}{r_1^5} - \frac{\mu_2}{r_2^3} + \frac{3z^2\mu_2}{r_2^5}.$$

Os cálculos para obtê-la estão descritos no Apêndice A.

A matriz de monodromia nesse caso, $\Delta_z(T)$, será da forma 2×2 , terá dois autovalores e o valor de seu traço irá definir a estabilidade fora do plano das órbitas 2D. Isto é, trabalhamos com o *índice de estabilidade vertical*

$$K3D = \text{tr}(\Delta_z(T)) \quad (1.38)$$

Esse índice equivale a $K3D = \frac{\partial x_3}{\partial x_{0_3}} + \frac{\partial x_6}{\partial x_{0_6}}$.

Ainda segundo [17], existem alguns valores críticos de $K3D$ que podem levar a bifurcações verticais (isto é, bifurcações em famílias de órbitas 3D):

- Quando $K3D = 2$, a família plana de órbitas periódicas bifurca em uma família tridimensional de órbitas periódicas mantendo a multiplicidade (isto é, mesmo período).
- Quando $K3D = -2$, a família plana de órbitas periódicas bifurca em uma família tridimensional de órbitas periódicas dobrando a multiplicidade (isto é, duplicação do período).
- E, no geral, quando $-2 < K3D < 2$ e $K3D/2 = \cos(2\pi m/n)$, $m < n$ inteiros, a família plana de órbitas periódicas com multiplicidade M pode bifurcar em uma família tridimensional de órbitas periódicas com multiplicidade nM .

Para esse trabalho, vamos considerar os pontos de bifurcação que originam famílias 3D nas famílias de órbitas planas com $K3D = \pm 2$.

Estabilidade em órbitas tridimensionais

Quando trabalhamos com órbitas tridimensionais e usamos as equações de movimento (1.19) com as seis coordenadas $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, podemos ainda obter a matriz de monodromia completa do sistema com tamanho 6×6 , $\Delta_{3D}(T)$. Ela terá três pares de autovalores em vez de dois (sendo um par de autovalores unitários) e a classificação de estabilidade a partir dos módulos dos autovalores apresentada acima é análoga, isto é, a estabilidade das órbitas 3D irá depender dos quatro autovalores não unitários da matriz $\Delta_{3D}(T)$ e as órbitas serão estáveis quando esses autovalores forem números complexos com módulo igual a um.

1.2 Trabalhos na área

É importante deixar claro que todo o exposto acima nesse capítulo vem do trabalho dos pesquisadores citados ao longo do texto, nenhum desses resultados ou conclusões foi feito pela autora (com exceção de algumas rápidas demonstrações pontuais).

Trabalhos como [18], [19] e [20] mostraram que em sistemas estelares binários, planetas em movimento retrógrado são mais estáveis que planetas em movimento prógrado.

Vários trabalhos abordam sistemas em configurações retrógradas. Por exemplo, em [14] os autores estudam famílias coorbitais retrógradas no PCR3C para Sol e Júpiter como primário e secundário, em [21] estudam famílias para outras ressonâncias retrógradas assumindo esses mesmos corpos porém no PR3C circular e no elíptico, em [22] os autores fazem um estudo análogo a esse último porém assumindo Netuno como secundário e em [23] é estudado o caso PR3C tridimensional para Sol e Júpiter como primário e secundário.

Além disso, o PR3C é abordado também de outras maneiras, como em [16] onde os autores buscam por órbitas retrógradas a partir de Superfícies de Poincaré (SoS)

e como em [24] onde os autores analisam mapas de estabilidade para certas ressonâncias retrógradas. Essas diferentes abordagens complementam nossos estudos.

1.3 Organização desse trabalho

Nessa pesquisa, obtivemos numericamente órbitas periódicas simétricas (OPSs) retrógradas no problema circular restrito de 3 corpos (PCR3C) quando analisamos o movimento do terceiro corpo (com massa desprezível) e analisamos características dessas OPSs tais como estabilidade e ressonância. Em particular, o caso da ressonância retrógrada 1/1 (coorbital) foi estudado com atenção especial.

Estudamos 9 sistemas diferentes dentro do PCR3C, cada um com seu valor de razão de massa. Assim, conseguimos também observar como o aumento da razão de massa influencia nas características das OPSs encontradas e na existência de famílias ressonantes.

No Capítulo 1 desse trabalho, fizemos uma discussão teórica dos conceitos necessários para realização dessa pesquisa, indicamos os objetivos da mesma e como esse trabalho está organizado. No Capítulo 2, indicamos como a busca por OPSs foi feita e a metodologia utilizada. No Capítulo 3, exibiremos e discutiremos os resultados obtidos nessa pesquisa. Por fim, concluímos o trabalho no Capítulo 4 retomando os pontos principais discutidos ao longo do texto.

Capítulo 2

Metodologia

Esse trabalho tem por objetivo encontrar numericamente OPSs retrógradas quando analisamos o movimento do corpo de massa desprezível no PCR3C. Para isso, desenvolvemos e utilizamos alguns algoritmos computacionais conforme vamos explicar a seguir.

De forma geral, a busca por OPSs retrógradas bidimensionais foi feita a partir de dois métodos: *método Grid-Search* (método explicado em [25]) e *método da continuação diferencial* (utilizado em [14]).

Além disso, escolhemos condições iniciais $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ que respeitem tanto a condição de simetria (1.30) quanto a condição para que a órbita seja retrógrada no referencial sinódico (1.29), isto é,

$$y_0 = 0 = \dot{x}_0 \quad \text{e} \quad x_0 \cdot \dot{y}_0 < 0 \quad .$$

Inicialmente usamos o método Grid-Search para varrer uma grade de condições iniciais composta por valores de x_0 e constante de Jacobi C_J . Neste método, o algoritmo escrito pela autora em *linguagem Julia* leva as condições iniciais dadas $x_0, C_J, y_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ e calcula o valor de $\dot{y}_0$ de acordo com a equação (1.24) para o caso planar $C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \Rightarrow$

$$\dot{y}_0 = \pm \sqrt{(x_0^2 + y_0^2) + 2(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}) - \dot{x}_0^2 - C_J} = \pm \sqrt{x_0^2 + 2(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}) - C_J}$$

de forma a garantir que $x_0 \cdot \dot{y}_0 < 0$. Com o conjunto de condições iniciais completo, o algoritmo integra numericamente as equações de movimento (1.26) usando *integrador Radau* ([26]) para descobrir a partir da condição apresentada na Eq. (1.30) se este conjunto de condições iniciais resulta em uma órbita periódica simétrica ou não. Esse procedimento é repetido para todos os pares de condições iniciais (x_0, C_J) dados na grade inicial.

Caso o algoritmo não encontre OPSs retrógradas a partir das condições iniciais dadas, ele ainda pode identificar se duas soluções $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ geradas por dois valores diferentes de x_0 (x_{0_1} e x_{0_2}) para o mesmo valor de C_J têm em algum momento $y_1 = 0 = y_2$ e $\dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2 < 0$. Quando isso acontece, significa que entre esses valores de x_0 , existe um terceiro que resultará em uma OP simétrica para este C_J , pois por questões

de continuidade $\dot{y}$ precisa ser zero em algum ponto entre ter um valor positivo e um valor negativo. Assim, o algoritmo calcula a média entre esses dois valores de x_0 , encontra $\dot{y}_0$ a partir das demais condições iniciais definidas para esta parte da busca e testa novamente se encontrou uma OP simétrica baseado na condição apresentada na Eq. (1.30). Esse trecho do algoritmo é baseado no *método da bissecção* e será repetido quantas vezes for necessário para encontrar a OPS retrógrada entre as soluções $\bar{x}_1, \bar{x}_2$. Um esquema ilustrando essa passagem é feito na Figura 2.1.

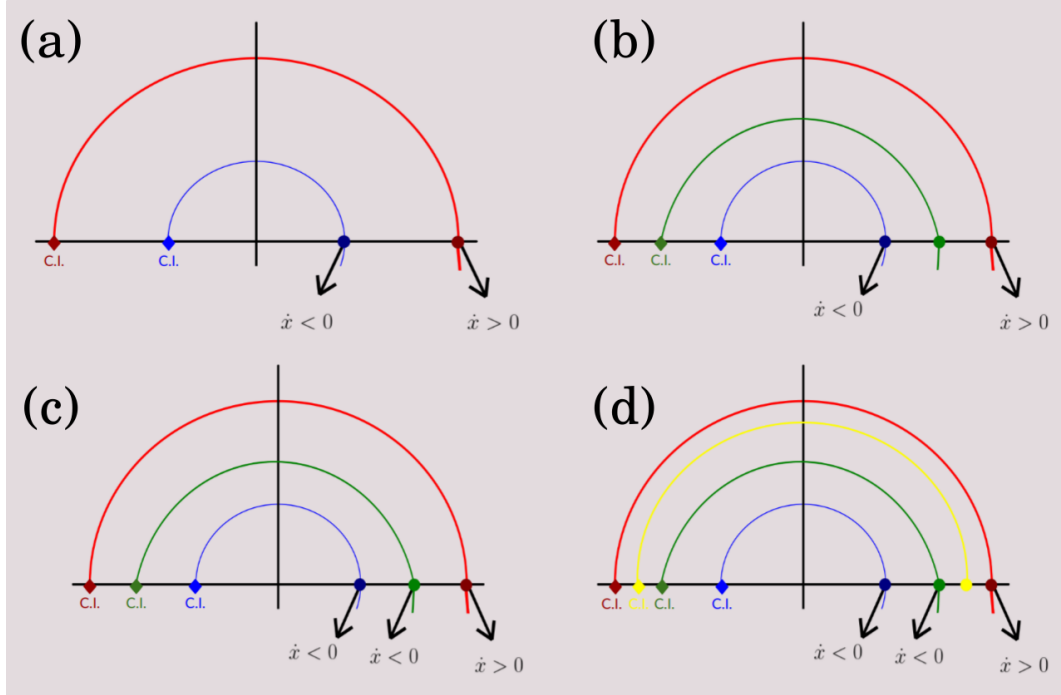


Figura 2.1: Caso o algoritmo não encontre SPOs retrógradas a partir das condições iniciais (C.I.s) dadas na grade inicial, o seguinte procedimento é feito: *olharemos para as órbitas geradas a partir de condições iniciais com mesmo valor de C_J de duas a duas. Caso elas cruzem o eixo x em outro ponto que não o inicial, comparamos o sinal de $\dot{x}$ nesses pontos; como em (a). Se os sinais forem opostos, fazemos uma média entre os x_0 que geraram essas duas órbitas e integramos para gerar uma nova órbita; como em (b). Caso ela ainda não cruze o eixo x em um ponto onde $\dot{x} = 0$ - como em (c), identificamos em qual dos intervalos $\dot{x}$ troca de sinal e geramos uma nova órbita nesse intervalo a partir do valor de x_0 médio; como em (d). Esse processo é repetido até encontrarmos uma OPS retrógrada.* [Fonte: Imagem construída pela autora]

Portanto, observe que o algoritmo pode testar todas as condições dadas na grade inicial e até mesmo valores de x_0 dentre os fornecidos inicialmente, tornando nossa busca dinâmica e assertiva.

Após esta etapa, obtemos diagramas característicos de $C_J \times x_0$ com os resultados da pesquisa fornecidos pelo método Grid-Search. Porém, devido ao longo tempo de execução do programa, os autores optaram por utilizar uma grade com intervalos

não tão pequenos entre seus valores. Porém, como a grade não é tão detalhada, acabamos não obtendo as famílias completas de OPSs, apenas pedaços delas e é aí que passamos também a utilizar o método de correção diferencial.

A partir dos resultados obtidos pelo método Grid-Search, sabemos exatamente qual conjunto de condições iniciais leva a OPSs para cada família presente nos diagramas característicos. Então, selecionamos a família que estamos interessados em encontrar, pegamos algumas das condições iniciais que levaram a ela e colocamos esses valores no algoritmo escrito pela orientadora da autora em *linguagem Fortran* usando o método de correção diferencial. Este algoritmo integra as equações de movimento (1.26) usando o *integrador Bulirsch-Stoer* ([27]) para a condição inicial dada. Com base em correção diferencial, o algoritmo varia x_0 ou $\dot{y}_0$ para encontrar outra OPS da mesma família na vizinhança de uma OPS já encontrada. Dessa forma, conseguimos encontrar a família completa.

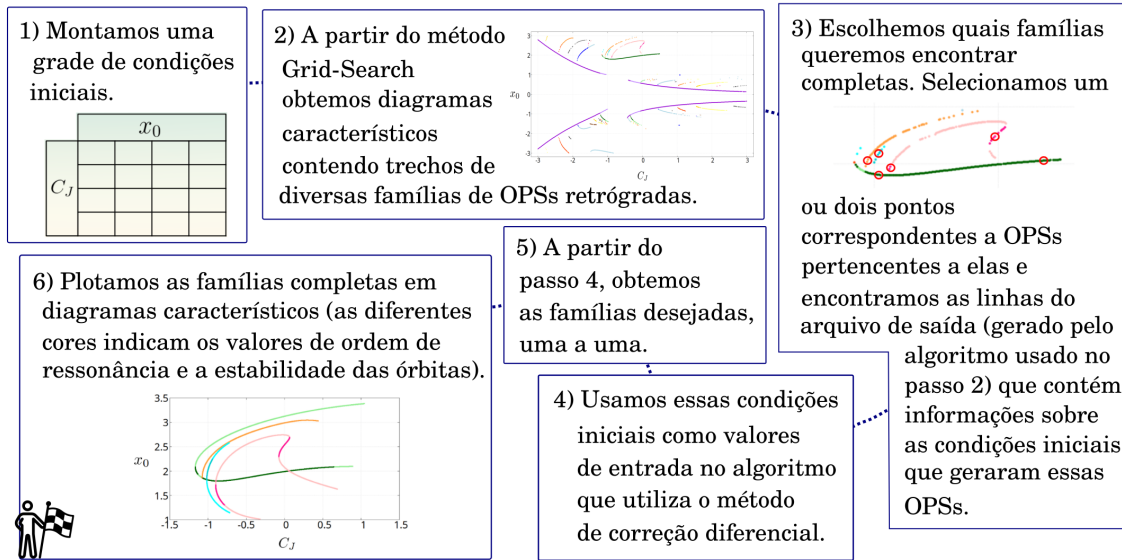


Figura 2.2: Fluxograma ilustrando a metodologia dessa pesquisa. [Fonte: Imagem construída pela autora]

Metodologia para o caso do PCR3C tridimensional

No caso das OPSs tridimensionais, o processo para encontrá-las foi o seguinte: Encontramos os pontos nas famílias de OPSs 2D onde $K3D = \pm 2$ (isto é, pontos onde ocorrem bifurcações em famílias de órbitas 3D) e utilizamos eles como condição inicial em um algoritmo escrito pela orientadora da autora em *linguagem Fortran* usando o método de correção diferencial e as equações de movimento (1.19) para o PCR3C tridimensional.

Para essas órbitas 3D, a análise de estabilidade foi feita baseada nos módulos dos seis autovalores da matriz de monodromia do sistema. Para que a órbita seja considerada estável, é preciso que $|\lambda_i| = 1$ para todos os $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Capítulo 3

Resultados

Nessa seção, vamos apresentar e discutir as características das famílias de OPSs retrógradas encontradas em 9 sistemas diferentes no contexto do PCR3C, variando o valor da razão de massa no conjunto

$$\mu_2 \in \{5.15463 \times 10^{-5} ; 0.001 ; 0.0121506683 ; 0.04 ; 0.1 ; 0.1056338028 ; 0.3 ; 0.4 ; 0.5\}.$$

Em um sistema com primário de massa m_1 e secundário de massa m_2 , a razão de massa é calculada por $\mu_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$; assim como indicado no Capítulo 1.

Veja, então, que estamos explorando quatro sistemas binários específicos, são eles: Sol-Netuno (cuja razão de massa é $\mu_2 = 5.15463 \times 10^{-5}$), Sol-Júpiter (cuja razão de massa aproximada é $\mu_2 = 0.001$), Terra-Lua (cuja razão de massa é $\mu_2 = 0.0121506683$) e Plutão-Charonte (cuja razão de massa é $\mu_2 = 0.1056338028$); além de outros cinco sistemas binários genéricos com certo valor de razão de massa ($\mu_2 = 0.04; 0.1; 0.3; 0.4; 0.5$).

Ainda, vamos analisar como essas famílias se comportam conforme aumentamos o valor da razão de massa, em especial as famílias coorbitais retrógradas (ressonância 1/-1). No geral, os sistemas no PCR3C possuem três famílias de OPSs retrógradas coorbitais: uma que bifurca da família retrógrada circular externa, outra que bifurca da família retrógrada circular interna (essas duas são denominadas *coorbitais retrógradas modo 23* em trabalhos como [14]) e uma terceira que chamamos de *coorbital excêntrica* e existe para valores de excentricidade um pouco mais altos (denominada *coorbital retrógrada modo 1* em trabalhos como [14]). Veja na Figura 3.1 um esquema ⁴ de onde cada uma dessas famílias aparece, no geral, nos diagramas característicos $C_J X x_0$.

⁴Para construir esse esquema, usamos o diagrama característico $C_J X x_0$ encontrado ao analisar o sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.1$, o qual será melhor discutido na subseção 3.5.1.

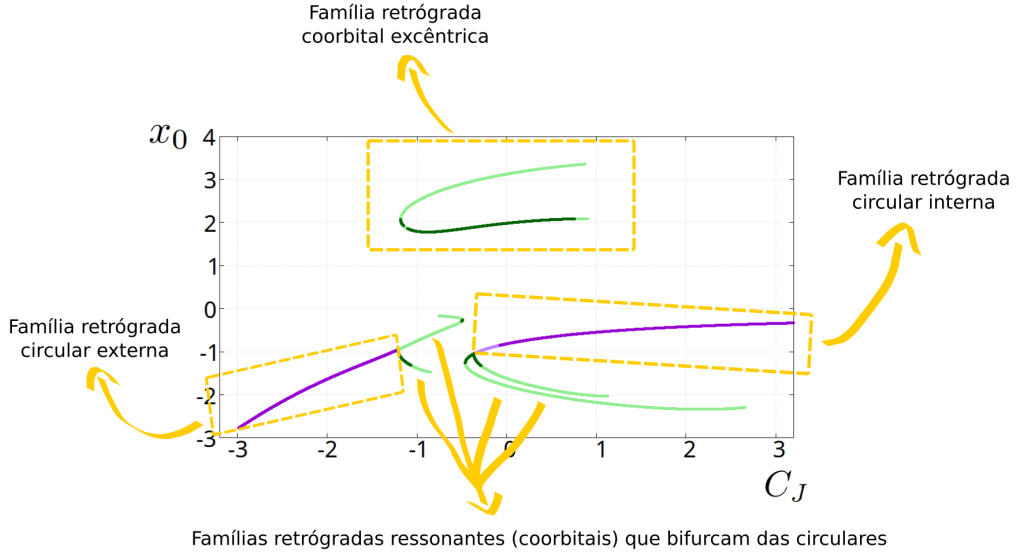


Figura 3.1: Esquema ilustrando onde as famílias coorbitais retrógradas aparecem, no geral, nos diagramas característicos $C_J X x_0$ que veremos a seguir nesse capítulo.

As OPSs retrógradas nessas famílias também mantêm uma morfologia semelhante independente do sistema em que estamos analisando. Nas Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 apresentaremos um exemplo de OPS retrógrada no referencial sinódico em cada uma das duas famílias circulares e três famílias coorbitais.

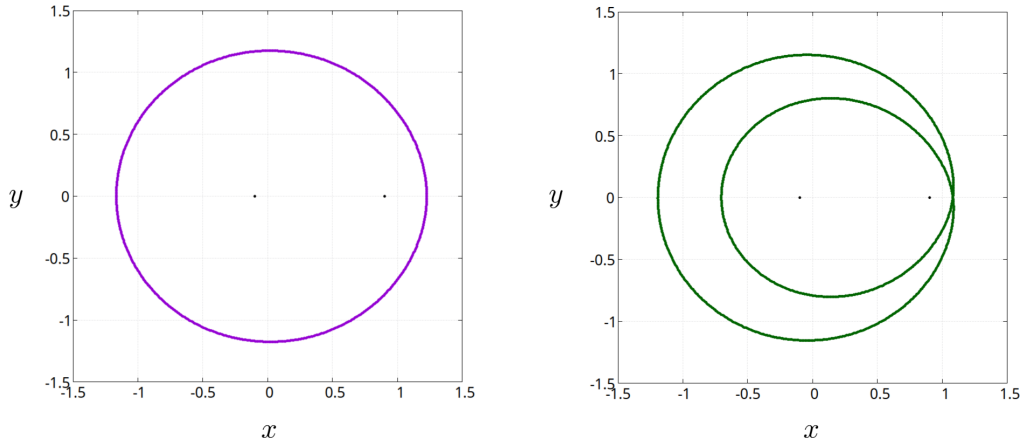


Figura 3.2: Exemplo (no referencial sinódico) de OPSs retrógradas da família circular externa (à esquerda) e da ressonante coorbital que bifurca dela (à direita); encontradas ao estudar o sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.1$. À esquerda: OPS com $x_0 = -1.1665$, $\dot{y}_0 = 2.1453$ e $C_J = -1.4572$. À direita: OPS com $x_0 = -1.1921$, $\dot{y}_0 = 2.0775$ e $C_J = -1.1509$. Primário em $(0; -0.1)$ e secundário em $(0; 0.9)$ representados por pontos pretos nas figuras.

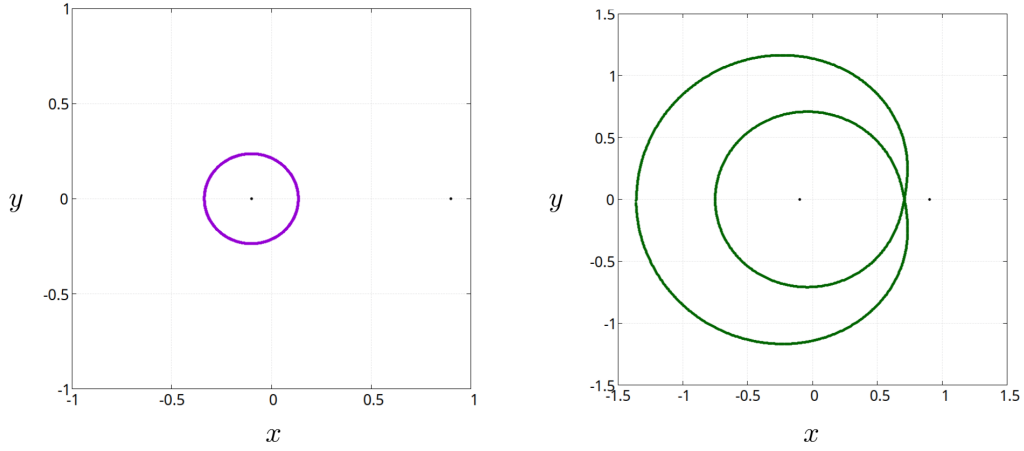


Figura 3.3: Exemplo (no referencial sinódico) de OPSs retrógradas da família circular interna (à esquerda) e da ressonante coorbital que bifurca dela (à direita); encontradas ao estudar o sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.1$. À esquerda: OPS com $x_0 = -0.33625$, $\dot{y}_0 = 2.1873$ e $C_J = 3.1095$. À direita: OPS com $x_0 = -1.3571$, $\dot{y}_0 = 1.9040$ e $C_J = -0.26299$. Primário em $(0; -0.1)$ e secundário em $(0; 0.9)$ representados por pontos pretos nas figuras.

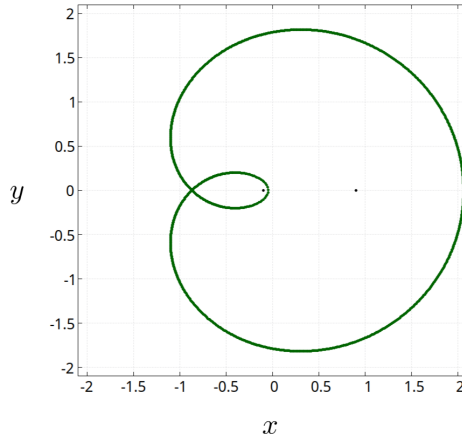


Figura 3.4: Exemplo (no referencial sinódico) de OPS retrógrada da família coorbital excêntrica; encontrada ao estudar o sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.1$. OPS com $x_0 = 2.0633$, $\dot{y}_0 = -2.1888$ e $C_J = 0.47008$. Primário em $(0; -0.1)$ e secundário em $(0; 0.9)$ representados por pontos pretos na figura.

Por outro lado, encontramos nos 9 sistemas estudados algumas famílias que são retrógradas no referencial sinódico, mas são prógradas no referencial inercial. Optamos por não analisar em detalhes as que são prógradas no referencial inercial e, por isso, elas não aparecem nos diagramas característicos presentes nas figuras desse capítulo. Porém, vamos apresentá-las em diagramas no Apêndice C.

NOTA: Todas as figuras desse capítulo foram construídas pela autora.

3.1 As famílias no sistema Sol-Netuno ($\mu_2 = 5.15463 \times 10^{-5}$)

Assumindo Sol ($M_1 = 1.98911 \times 10^{30}$ kg)⁵ como primário e Netuno ($M_2 = 1.0243 \times 10^{26}$ kg)⁶ como secundário, temos como razão de massa $\mu_2 = 5.15463 \times 10^{-5}$.

A partir de duas grades iniciais: $C_J \in [-2; 2]$ com $x_0 \in [0; 4]$ e $C_J \in [-2; 0]$ com $x_0 \in [-3; 0]$, conseguimos encontrar trechos de várias famílias de OPSs retrógradas, cujas ordem de ressonância variam de 1 a 11, utilizando o método GridSearch. Na Figura 3.5, temos um diagrama $C_J \times x_0$ com os resultados dessa busca, nele a ordem de ressonância das famílias e suas estabilidades horizontais estão sendo indicados por meio de diferentes cores.

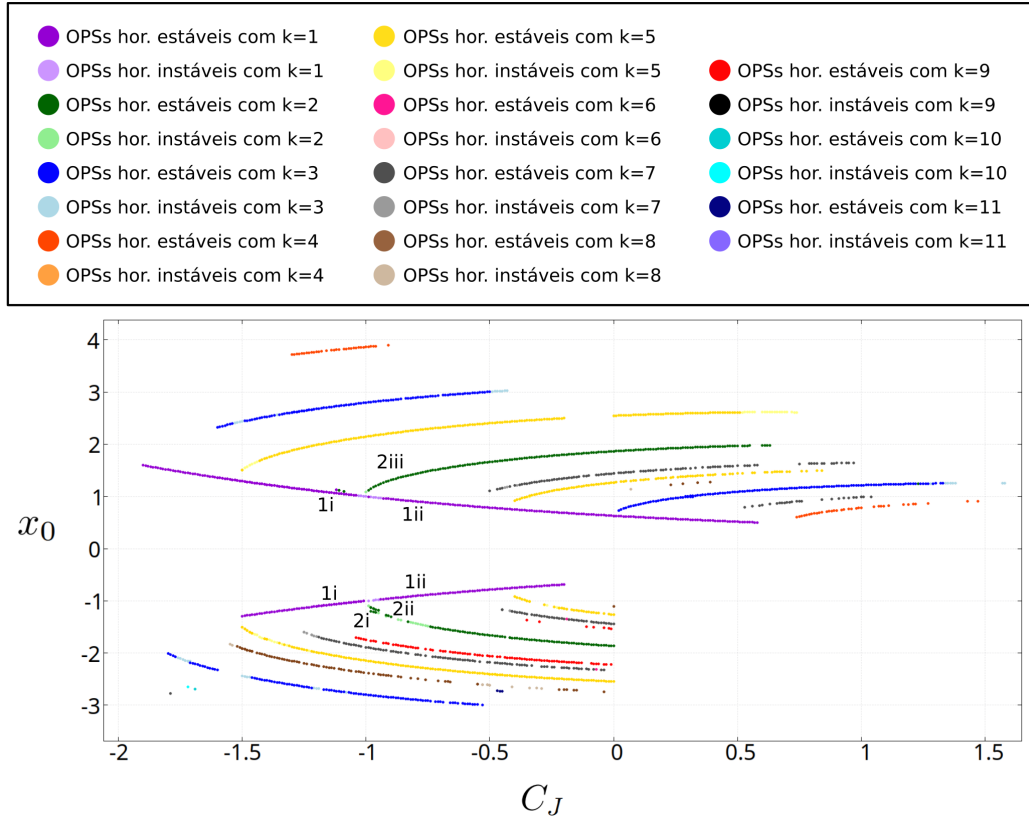


Figura 3.5: Diagrama $C_J \times x_0$ obtido inicialmente das famílias no sistema Sol-Netuno. A abreviação 'hor.' significa 'horizontalmente'.

Na Figura 3.5 temos apenas as famílias de OPSs retrógradas em ambos os referenciais sinódico e inercial. As famílias denotadas por $1i$, $1ii$, $2i$, $2ii$ e $2iii$ serão

⁵Dado em [6].

⁶Dado em [6].

melhor exploradas ao longo dessa seção e referenciadas com essa nomenclatura.

Para esse sistema especificamente, decidimos explorar também os pontos das famílias circulares e coorbitais retrógradas encontradas onde $K3D = \pm 2$, isto é, onde ocorrem bifurcações em famílias de órbitas tridimensionais. Tais famílias são exibidas no Apêndice D.

Vale comentar que esse sistema já foi estudado em trabalhos como [22] e [23]. Além disso, fizemos o artigo [28] sobre as famílias circulares e coorbitais retrógradas 2D no sistema Sol-Netuno, suas bifurcações em famílias 3D e o processo de captura de corpos em movimento retrógrado por esse sistema.

3.1.1 Famílias retrógradas coorbitais e circulares

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular externa retrógrada em $C_J \approx -1.0092$. Chamaremos de família *I* a família ressonante que bifurca da família circular inicialmente horizontalmente estável e de família *II* a que bifurca inicialmente horizontalmente instável. A família *I* termina em colisão com Netuno (secundário) próximo a $C_J \approx -0.67615$ com $x_0 \approx -0.43026$, já a família *II* termina colidindo também com Netuno (secundário) perto de $C_J \approx -0.99846$ com $x_0 \approx -0.95032$.

A família ressonante *I* é horizontalmente estável no intervalo $C_J < -0.93471$ e é verticalmente estável no intervalo $C_J \leq -0.90243$. Já a família ressonante *II* é inteira horizontalmente instável e é verticalmente estável no intervalo $-1.0092 \leq C_J < -1.0008$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.1 disponível no Apêndice E e na Figura 3.6 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular interna retrógrada em $C_J \approx -0.99051$. Chamaremos de família *III* a família ressonante que bifurca da família circular e existe para mais valores de C_J e de família *IV* a outra. Enquanto a família *III* termina por colisão com o Sol (primário) perto de $C_J \approx 0.80039$ com $x_0 \approx -1.9950$, a família *IV* termina por colisão com Netuno (secundário) perto de $C_J \approx -0.99639$ com $x_0 \approx -1.0498$.

A família ressonante *III* é horizontalmente e verticalmente estável durante toda sua existência. Já a família ressonante *IV* é horizontalmente estável no intervalo $-0.99733 \leq C_J \leq -0.99051$ onde $-1.0287 \leq x_0 \leq -1.0008$ e é inteira verticalmente instável. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.2 disponível no Apêndice E e na Figura 3.6 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

A família coorbital excêntrica retrógrada, por sua vez, existe para valores de excentricidade $e \geq 0.037233$. Ela é limitada por colisão com o Sol (primário) próximo a $C_J \approx 0.80023$ (onde $x_0 \approx 1.9951$) e por colisão com Netuno (secundário) próximo a $C_J \approx -1.2560$ (onde $x_0 \approx 1.3115$).

Esta família é horizontalmente estável para $C_J \geq -1.1351$ e verticalmente estável para $C_J \geq -1.0122$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessa

família estão descritos na Tabela E.3 disponível no Apêndice E e na Figura 3.6 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

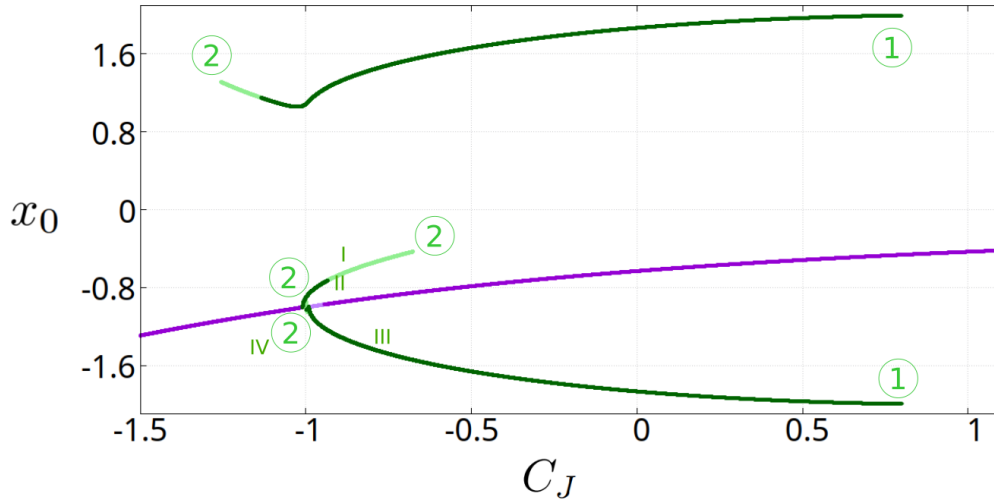


Figura 3.6: Diagrama característico C_J X x_0 no sistema Sol - Netuno da família retrógrada coorbital excêntrica (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) e das famílias retrógradas circulares (violeta para OPSs horizontalmente estáveis e lilás para horizontalmente instáveis) e das coorbitais retrógradadas (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) que bifurcam delas. Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o Sol (primário) ou com Netuno (secundário), respectivamente.

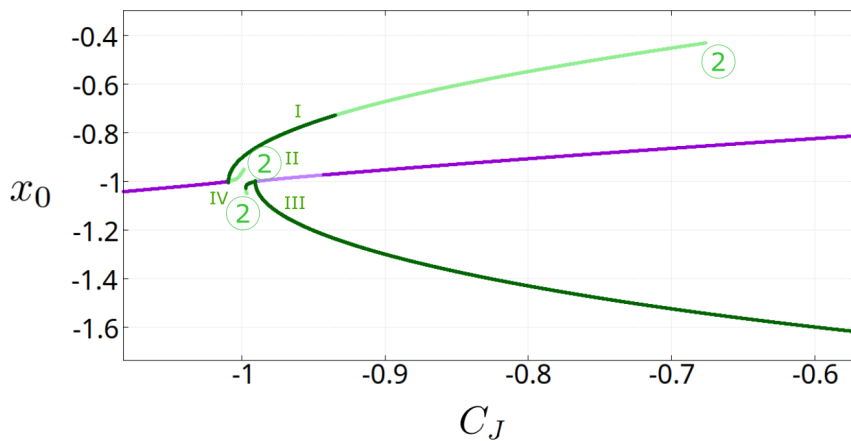


Figura 3.7: Zoom no diagrama característico da Figura 3.6.

3.1.2 Famílias horizontal e verticalmente estáveis

Veja na Figura 3.8 as famílias de OPSs que são horizontal e verticalmente estáveis nesse sistema.

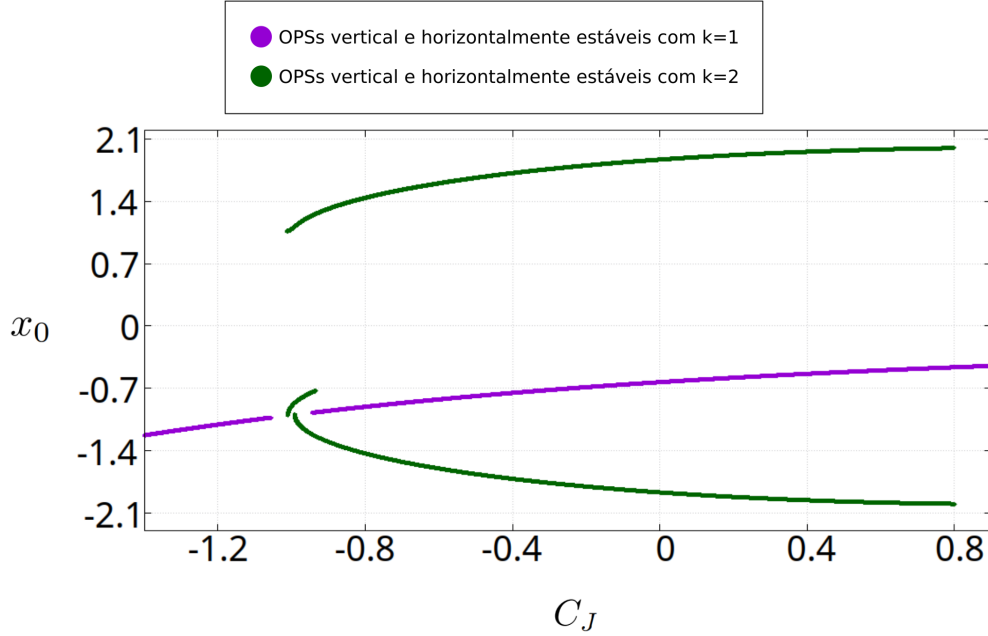


Figura 3.8: Diagrama característico C_J X x_0 dos trechos horizontal e verticalmente estáveis das famílias circulares ($k = 1$) e famílias coorbitais ($k = 2$) no sistema Sol - Netuno analisadas em detalhes nesse trabalho.

3.2 As famílias no sistema Sol-Júpiter ($\mu_2 = 0.001$)

Assumindo Sol ($M_1 = 1.98911 \times 10^{30}$ kg)⁷ como primário e Júpiter ($M_2 = 1.8986 \times 10^{27}$ kg)⁸ como secundário, decidimos utilizar a aproximação $\mu_2 = 0.001$ para analisar as famílias de OPSs retrógradas nesse sistema.

A partir de duas grades iniciais: $C_J \in [-3; 4]$ com $x_0 \in [0; 3]$ e $C_J \in [-2; 4]$ com $x_0 \in [-3; 0]$, conseguimos encontrar trechos de várias famílias de OPSs retrógradas, cujas ordem de ressonância variam de 1 a 11, utilizando o método GridSearch. Na Figura 3.9, temos um diagrama C_J X x_0 com os resultados dessa busca, nele a ordem de ressonância das famílias e suas estabilidades horizontais estão sendo indicados por meio de diferentes cores.

Na Figura 3.9 temos apenas as famílias de OPSs retrógradas em ambos os referenciais sinódico e inercial. As famílias denotadas por *1i*, *1ii*, *2i*, *2ii* e *2iii* serão melhor exploradas ao longo dessa seção e referenciadas com essa nomenclatura.

⁷Dado em [6].

⁸Dado em [6].

Nossa motivação inicial para estudar esse sistema veio do fato de o mesmo já ter sido analisado em trabalhos como [29], [14] e [21]. Assim, conseguimos a partir desse estudo validar nosso método de busca.

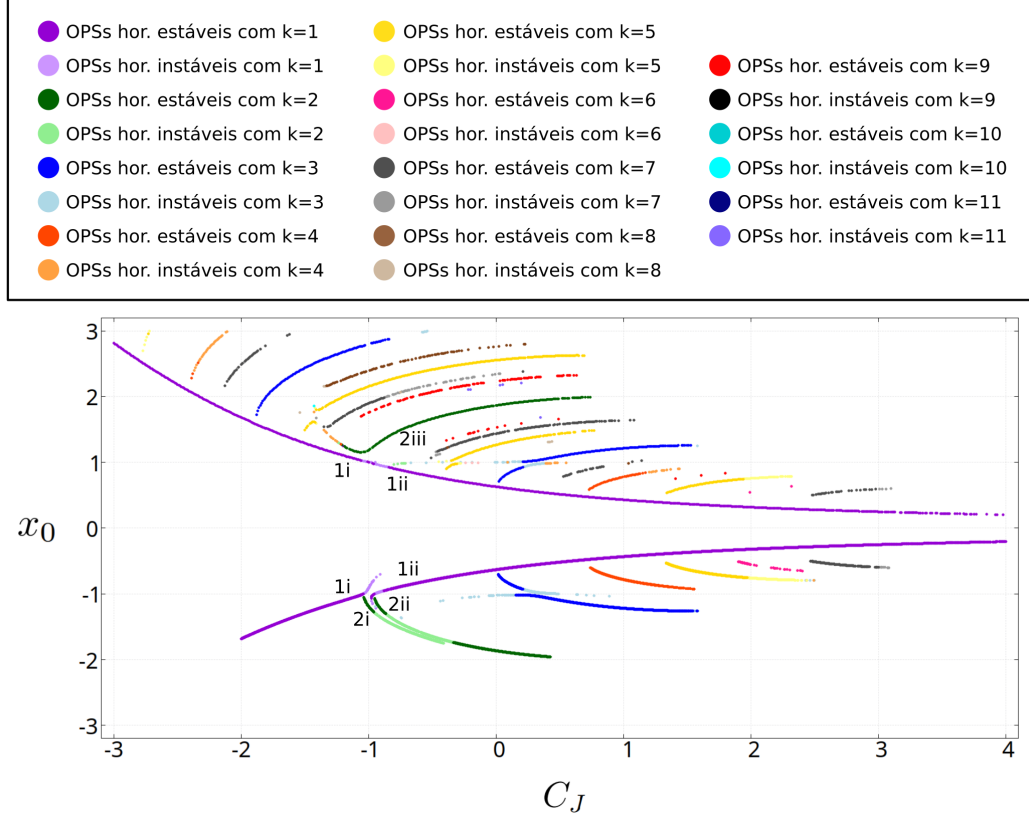


Figura 3.9: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente das famílias no sistema Sol - Júpiter. A abreviação 'hor.' significa 'horizontalmente'.

3.2.1 Famílias retrógradas coorbitais e circulares

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular externa retrógrada em $C_J \approx -1.0387$. Chamaremos de família *I* a família ressonante que bifurca da família circular inicialmente horizontalmente estável e de família *II* a que bifurca inicialmente horizontalmente instável. A família *I* termina em colisão com Júpiter (secundário) próximo a $C_J \approx -0.41813$ com $x_0 \approx -1.7449$, já a família *II* termina em colisão também com Júpiter (secundário) perto de $C_J \approx -0.66616$ onde $x_0 \approx -0.42494$.

A família ressonante *I* é horizontalmente estável no intervalo $-1.0387 \leq C_J \leq -0.95527$ onde $-1.2837 \leq x_0 \leq -0.99655$ e é verticalmente estável no intervalo $C_J \leq -0.90790$. Já a família ressonante *II* é inteira horizontalmente instável e é verticalmente estável no intervalo $C_J < -1.0047$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.4 disponível no Apêndice E e na Figura 3.10 temos um diagrama característico indicando os trechos

de estabilidade e de instabilidade horizontal.

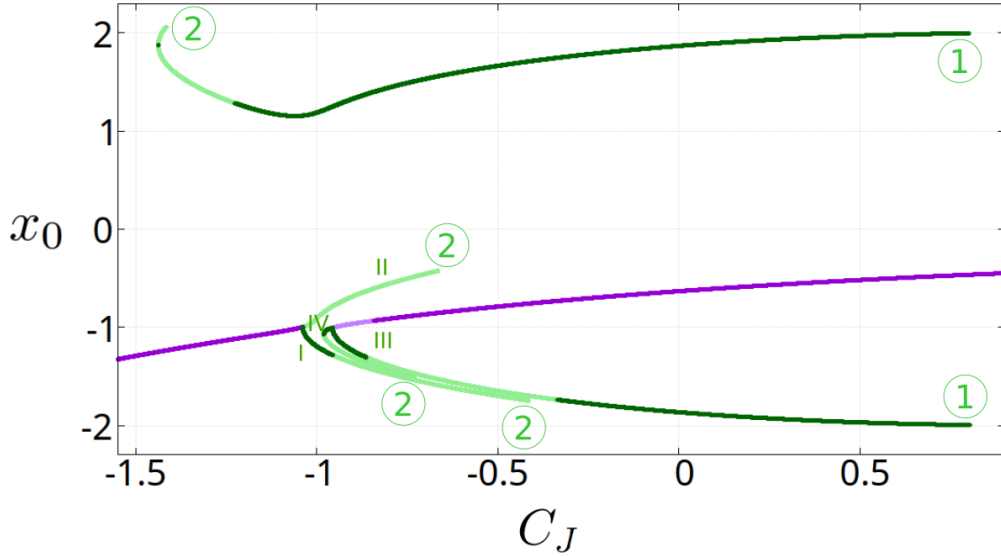


Figura 3.10: Diagrama característico C_J X x_0 no sistema Sol - Júpiter da família retrógrada coorbital excêntrica (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) e das famílias retrógradas circulares (violeta para OPSs horizontalmente estáveis e lilás para horizontalmente instáveis) e das coorbitais retrógradadas (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) que bifurcam delas. Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o Sol (primário) ou com Júpiter (secundário), respectivamente.

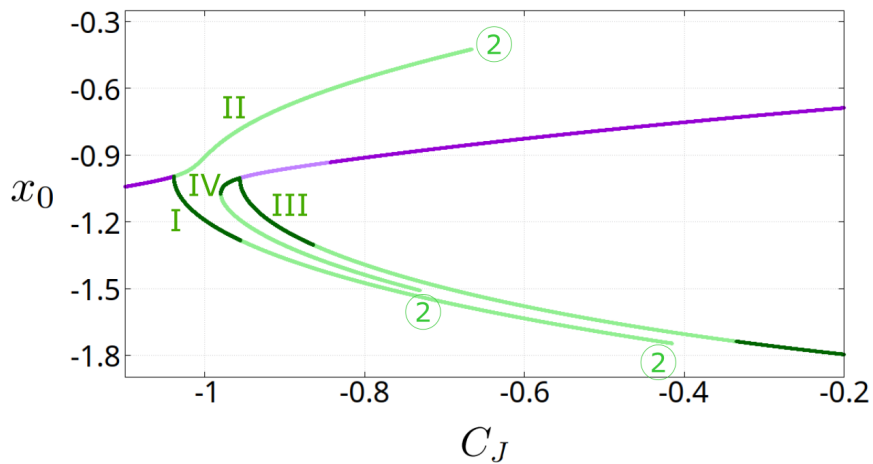


Figura 3.11: Zoom no diagrama característico da Figura 3.10.

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular interna retrógrada em $C_J \approx -0.95625$. Chamaremos de família *III* a família ressonante que bifurca

da família circular com os valores maiores de x_0 e de família *IV* a que bifurca com os valores menores de x_0 . Enquanto a família *III* termina por colisão com o Sol (primário) perto de $C_J \approx 0.80400$ com $x_0 \approx -1.9953$, a família *IV* termina por colisão com Júpiter (secundário) perto de $C_J \approx -0.73062$ com $x_0 \approx -1.5088$.

A família ressonante *III* é horizontalmente instável no intervalo $-0.86425 \leq C_J < -0.33487$ onde $-1.7378 < x_0 \leq -1.3039$ e é inteira verticalmente estável. Já a família ressonante *IV* é horizontalmente estável no intervalo $-0.97997 < C_J \leq -0.95625$ onde $-1.0737 < x_0 \leq -1.0037$ e é verticalmente estável no pequeno intervalo $-0.95698 \leq C_J \leq -0.95625$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.5 disponível no Apêndice E e na Figura 3.10 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

A família coorbital excêntrica retrógrada, por sua vez, existe para valores de excentricidade $e \geq 0.096607$. Ela é limitada por colisão com o Sol (primário) próximo a $C_J \approx 0.80116$ (onde $x_0 \approx 1.9961$) e por colisão com Júpiter (secundário) próximo a $C_J \approx -1.4157$ (onde $x_0 \approx 2.0605$); existindo nos intervalos $C_J \in [-1.4372; 0.80116]$ e $x_0 \in [1.1531; 2.0605]$.

Esta família possui um pequeno trecho de estabilidade horizontal em $C_J \approx -1.4372$ com $1.8717 < x_0 < 1.8742$ e outro trecho de estabilidade horizontal no intervalo $C_J > -1.2256$. Ainda, ela é verticalmente estável para valores $-1.0507 \leq C_J \leq 0.80116$ onde $1.1538 < x_0 < 1.9961$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessa família estão descritos na Tabela E.6 disponível no Apêndice E e na Figura 3.10 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

3.2.2 Famílias horizontal e verticalmente estáveis

Veja na Figura 3.12 as famílias de OPSs que são horizontal e verticalmente estáveis nesse sistema.

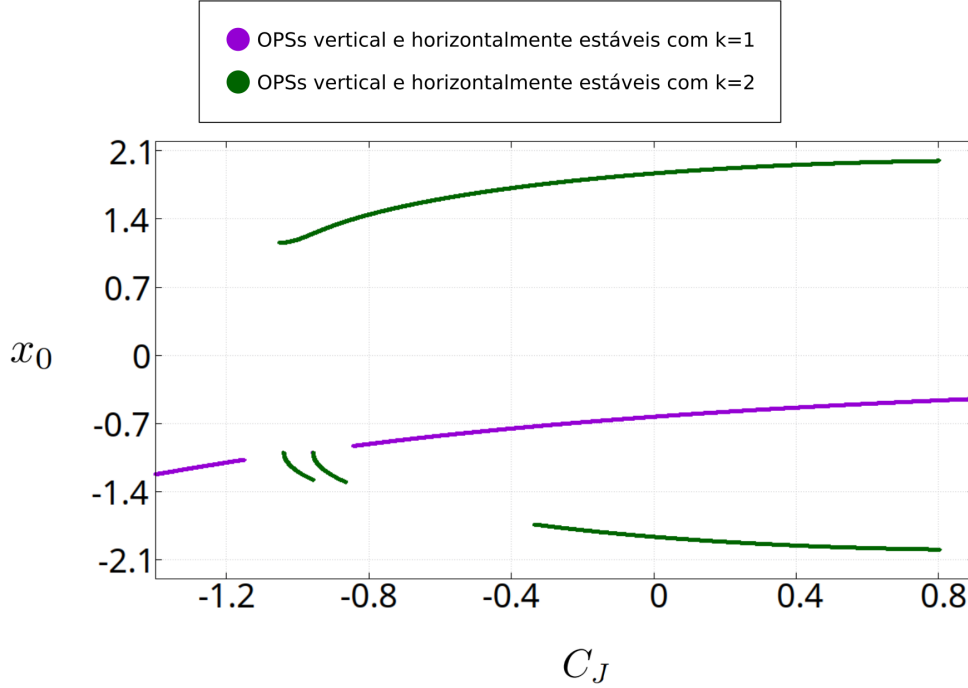


Figura 3.12: Diagrama característico C_J X x_0 dos trechos horizontal e verticalmente estáveis das famílias circulares ($k = 1$) e famílias coorbitais ($k = 2$) no sistema Sol - Júpiter analisadas em detalhes nesse trabalho.

3.3 As famílias no sistema Terra-Lua ($\mu_2 = 0.0121506683$)

Assumindo Terra ($M_1 = 5.9736 \times 10^{24}$ kg)⁹ como primário e Lua ($M_2 = 7.349 \times 10^{22}$ kg)¹⁰ como secundário, temos como razão de massa $\mu_2 = 0.0121506683$.

A partir de duas grades iniciais: $C_J \in [-3; 3]$ com $x_0 \in [0; 3]$ e $C_J \in [-2; 2]$ com $x_0 \in [-2; 0]$, conseguimos encontrar trechos de várias famílias de OPSs retrógradas, cujas ordem de ressonância variam de 1 a 12, utilizando o método GridSearch. Na Figura 3.13, temos um diagrama C_J X x_0 com os resultados dessa busca, nele a ordem de ressonância das famílias e suas estabilidades horizontais estão sendo indicados por meio de diferentes cores.

Na Figura 3.13 temos apenas as famílias de OPSs retrógradas em ambos os referenciais sinódico e inercial. As famílias denotadas por $1i$, $1ii$, $2i$, $2ii$ e $2iii$ serão melhor exploradas ao longo dessa seção e referenciadas com essa nomenclatura.

⁹Dado em [6].

¹⁰Dado em [6].

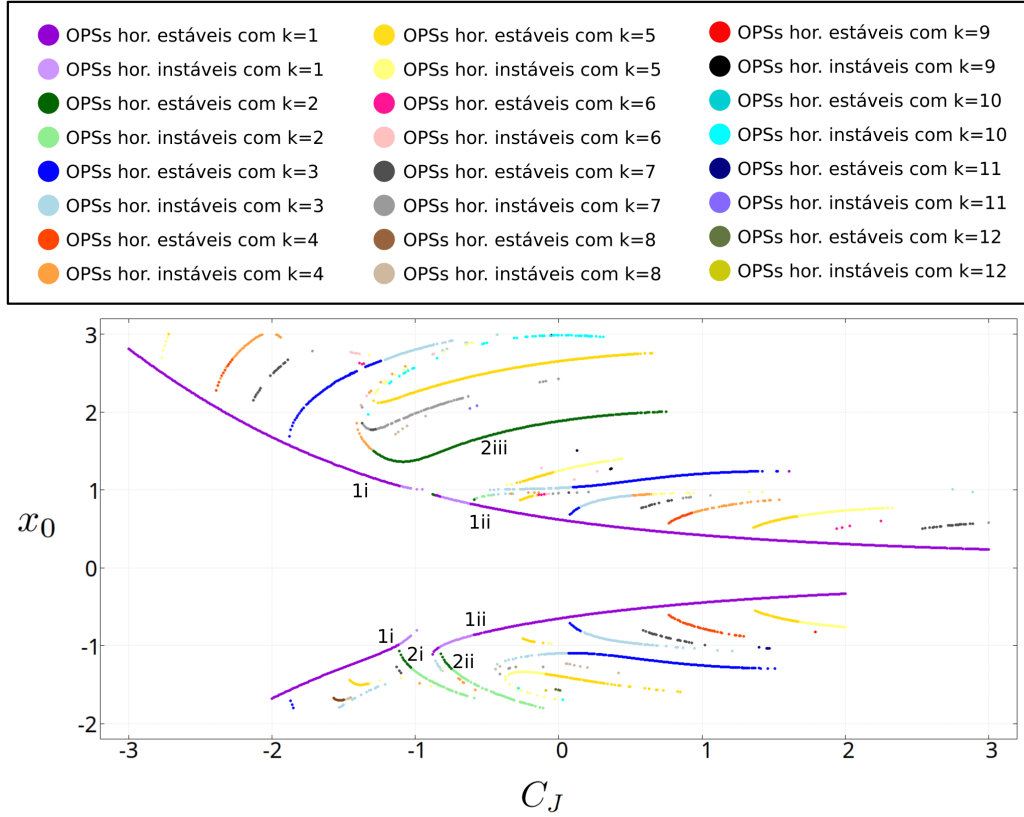


Figura 3.13: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente das famílias no sistema Terra - Lua. A abreviação 'hor.' significa 'horizontalmente'.

3.3.1 Famílias retrógradas coorbitais e circulares

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular externa retrógrada em $C_J \approx -1.1168$. Chamaremos de família *I* a família ressonante que bifurca da família circular inicialmente horizontalmente estável e de família *II* a que bifurca inicialmente horizontalmente instável. Enquanto a família *I* termina próximo a $C_J \approx -0.51899$ com $x_0 \approx -1.7019$, a família *II* termina em colisão também com a Lua (secundário) perto de $C_J \approx -0.44355$ onde $x_0 \approx -0.13352$.

A família ressonante *I* é horizontalmente estável no intervalo $-1.1168 \leq C_J \leq -1.0233$ onde $-1.2916 \leq x_0 \leq -0.98725$ e é verticalmente estável no intervalo $C_J < -0.99180$ onde $x_0 > -1.3379$. Já a família ressonante *II* é horizontalmente estável no intervalo $-0.41304 \leq C_J < -0.41292$ onde $-0.17814 \leq x_0 < -0.17508$ e é verticalmente estável nos intervalos $C_J < -1.0161$ onde $x_0 < -0.84578$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.7 disponível no Apêndice E e na Figura 3.14 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular interna retrógrada em $C_J \approx -0.828067$. Chamaremos de família *III* a família ressonante que bifurca da família circular com os valores maiores de x_0 e de família *IV* a que bifurca com

os valores menores de x_0 . Enquanto a família *III* termina por colisão com a Terra (primário) perto de $C_J \approx 0.84560$ com $x_0 \approx -1.9988$, a família *IV* termina por colisão com a Lua (secundário) próximo a $C_J \approx 0.65293$ com $x_0 \approx -2.1589$.

A família ressonante *III* é horizontalmente estável nos intervalos $-0.82807 \leq C_J \leq -0.74185$ e $C_J \geq 0.66626$ onde $-1.3022 \leq x_0 \leq -1.0138$ e $x_0 \leq -1.9882$, respectivamente, e é verticalmente estável nos intervalos $C_J \leq -0.62482$ e $C_J \geq -0.0099679$ onde $x_0 \geq -1.4529$ e $x_0 \leq -1.8396$, respectivamente. Já a família ressonante *IV* é horizontalmente estável no intervalo $-0.88523 \leq C_J \leq -0.82807$ onde $-1.1536 \leq x_0 \leq -1.0136$ e é verticalmente estável no intervalo $C_J \geq -0.83641$ onde $x_0 \geq -1.0231$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.8 disponível no Apêndice E e na Figura 3.14 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

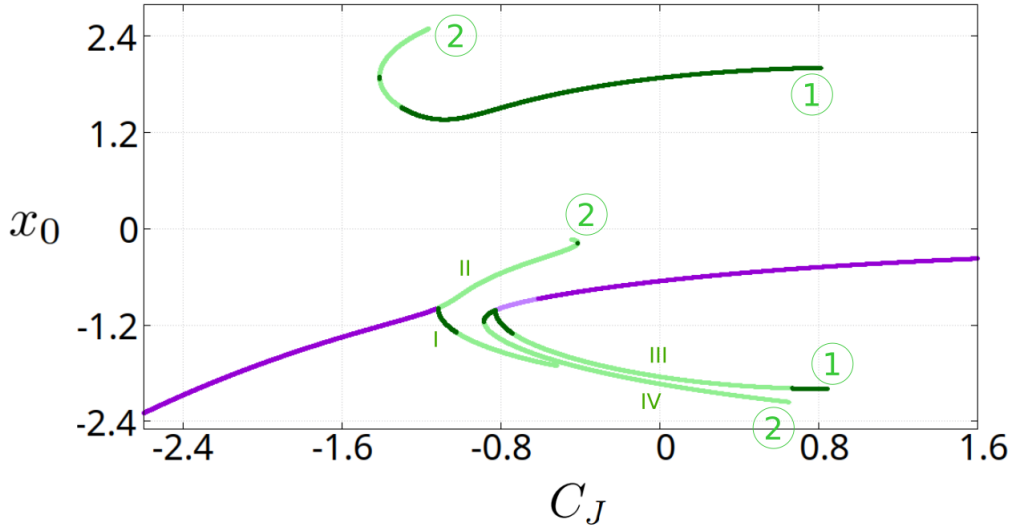


Figura 3.14: Diagrama característico C_J X x_0 no sistema Terra - Lua da família retrógrada coorbital excêntrica (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) e das famílias retrógradas circulares (violeta para OPSs horizontalmente estáveis e lilás para horizontalmente instáveis) e das coorbitais retrógradadas (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) que bifurcam delas. Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com a Terra (primário) ou com a Lua (secundário), respectivamente.

A família coorbital excêntrica retrógrada, por sua vez, existe para valores de excentricidade $e \geq 0.22587$. Ela é limitada por colisão com a Terra (primário) próximo a $C_J \approx 0.81146$ (onde $x_0 \approx 2.0076$) e por colisão com a Lua (secundário) próximo a $C_J \approx -1.1657$ (onde $x_0 \approx 2.4932$); existindo nos intervalos $C_J \in [-1.4109; 0.81146]$ e $x_0 \in [1.3626; 2.4932]$.

Esta família possui dois trechos de estabilidade horizontal nos intervalos

$-1.4109 < C_J < -1.4103$ e $C_J \geq -1.3010$ onde $1.8675 < x_0 < 1.8976$ e $x_0 \geq 1.5126$, respectivamente. Ainda, ela é verticalmente estável também em dois trechos: $-1.3001 < C_J < -1.2908$ e $C_J \geq -1.1498$ com $2.3192 < x_0 < 2.3028$ e $x_0 \geq 1.3752$, respectivamente. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessa família estão descritos na Tabela E.9 disponível na Apêndice E e na Figura 3.14 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

3.3.2 Famílias horizontal e verticalmente estáveis

Veja na Figura 3.15 as famílias de OPSs que são horizontal e verticalmente estáveis nesse sistema.

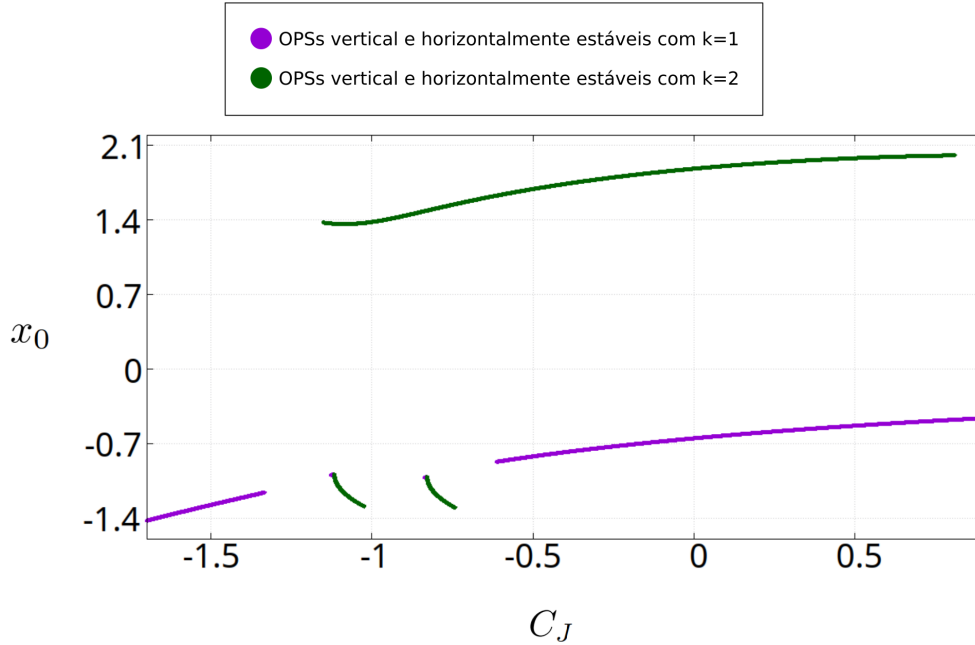


Figura 3.15: Diagrama característico C_J X x_0 dos trechos horizontal e verticalmente estáveis das famílias circulares ($k = 1$) e famílias coorbitais ($k = 2$) no sistema Terra - Lua analisadas em detalhes nesse trabalho.

3.4 As famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.04$

Aqui, vamos considerar um sistema genérico onde a razão de massa entre o primário e o secundário é $\mu_2 = 0.04$.

A partir de uma grade inicial: $C_J \in [-3; 3]$ com $x_0 \in [-3; 3]$, conseguimos encontrar trechos de várias famílias de OPSs retrógradas, cujas ordem de ressonância variam de 1 a 12, utilizando o método GridSearch. Na Figura 3.16, temos um diagrama C_J X x_0 com os resultados dessa busca, nele a ordem de ressonância das

famílias e suas estabilidades horizontais estão sendo indicados por meio de diferentes cores.

Na Figura 3.16 temos apenas as famílias de OPSs retrógradas em ambos os referenciais sinódico e inercial. As famílias denotadas por $1i$, $1ii$, $2i$, $2ii$, $2iii$, $3i$, $6i$, $6ii$, $8i$, $9i$, $10i$, $10ii$ e $12i$ serão melhor exploradas ao longo dessa seção e referenciadas com essa nomenclatura.

Nesse sistema, encontramos algumas bifurcações com multiplicação de período cujas famílias serão analisadas em detalhes na Subseção 3.4.2.

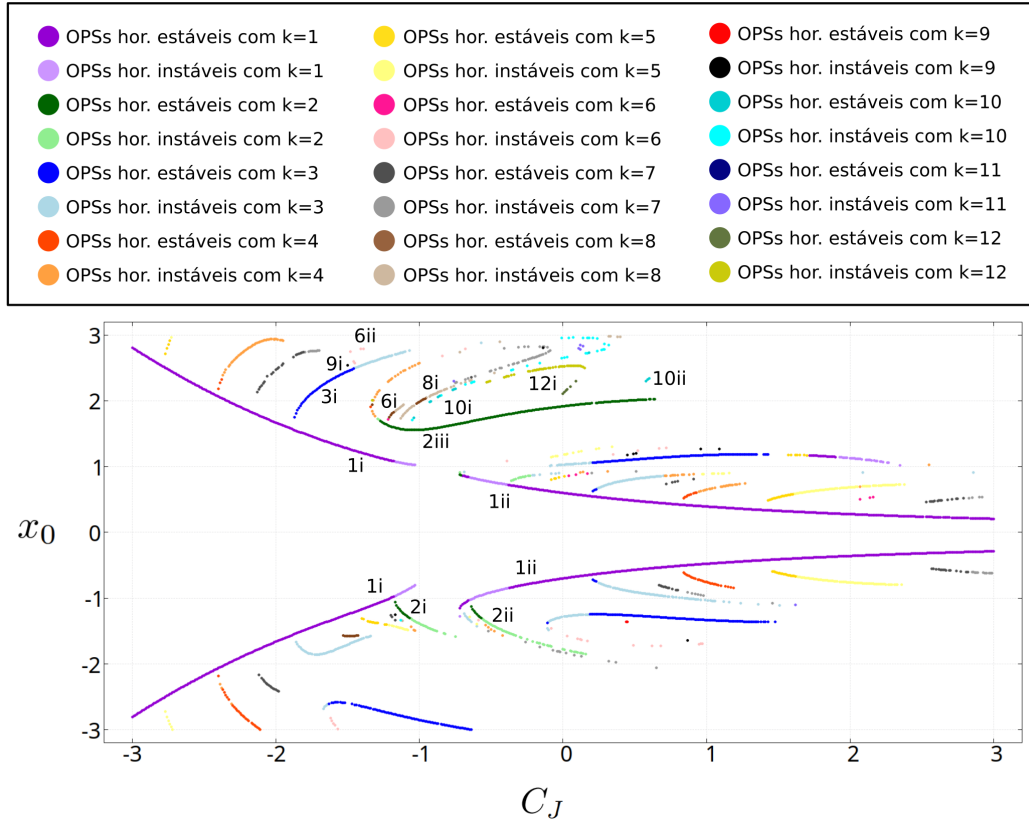


Figura 3.16: Diagrama $C_J X_0$ obtido inicialmente das famílias no sistema com $\mu_2 = 0.04$. A abreviação 'hor.' significa 'horizontalmente'.

3.4.1 Famílias retrógradas coorbitais e circulares

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular externa retrógrada em $C_J \approx -1.1774$. Chamaremos de família *I* a família ressonante que bifurca da família circular inicialmente horizontalmente estável e de família *II* a que bifurca inicialmente horizontalmente instável. Enquanto a família *I* termina em colisão com o secundário próximo a $C_J \approx -0.93381$ (com $x_0 \approx -1.1829$), a família *II* termina colidindo também com o secundário perto de $C_J \approx -0.57459$ (com $x_0 \approx -0.12850$).

A família ressonante *I* é horizontalmente estável nos intervalos $-1.1774 \leq C_J < -1.0681$ e $-0.65709 < C_J \leq -0.65697$ onde $-1.3019 < x_0 \leq -0.97496$ e $-1.6139 <$

$x_0 \leq -1.6125$, respectivamente, e é verticalmente estável no intervalo $C_J \leq -1.0748$. Já a família ressonante *II* é horizontalmente estável no intervalo $-0.44257 \leq C_J < -0.44133$ onde $-0.21314 \leq x_0 < -0.20287$ e é verticalmente estável nos intervalos $C_J < -1.0220$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.10 disponível no Apêndice E e na Figura 3.17 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

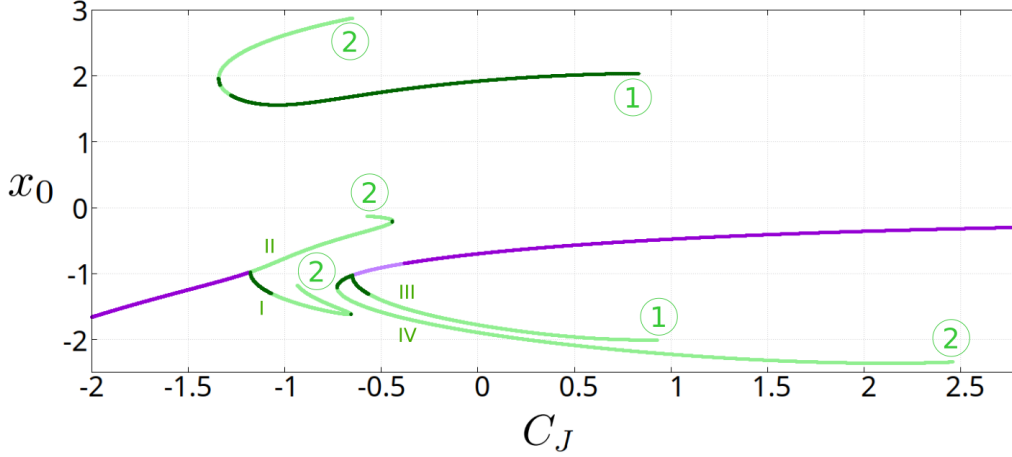


Figura 3.17: Diagrama característico $C_J \times x_0$ no sistema com $\mu_2 = 0.04$ da família retrógrada coorbital excêntrica (verde escuro para OPs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) e das famílias retrógradas circulares (violeta para OPs horizontalmente estáveis e lilás para horizontalmente instáveis) e das coorbitais retrógradas (verde escuro para OPs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) que bifurcam delas. Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o primário (corpo de massa M_1) ou com o secundário (corpo de massa M_2), respectivamente.

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular interna retrógrada em $C_J \approx -0.64954$. Chamaremos de família *III* a família ressonante que bifurca da família circular com os valores maiores de x_0 e de família *IV* a que bifurca com os valores menores de x_0 . Enquanto a família *III* termina por colisão com o primário perto de $C_J \approx 0.93017$ com $x_0 \approx -2.0067$, a família *IV* termina por colisão com o secundário perto de $C_J \approx 2.4592$ com $x_0 \approx -2.3389$.

A família ressonante *III* é horizontalmente estável no intervalo $-0.64955 \leq C_J \leq -0.56696$ onde $-1.3060 \leq x_0 \leq -1.0269$ e é verticalmente instável no intervalo $-0.45500 \leq C_J \leq 0.54254$ onde $-1.9693 \leq x_0 \leq -1.4525$. Já a família ressonante *IV* é horizontalmente estável no intervalo $-0.72801 < C_J \leq -0.64954$ onde $-1.2098 < x_0 \leq -1.0269$ e é verticalmente estável para $C_J \geq -0.67475$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.11 disponível no Apêndice E e na Figura 3.17 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

A família coorbital excêntrica retrógrada, por sua vez, existe para valores de excentricidade $e \geq 0.37418$. Ela é limitada por colisão com o primário próximo a $C_J \approx 0.83349$ (onde $x_0 \approx 2.0352$) e por colisão com o secundário próximo a $C_J \approx -0.64922$ (onde $x_0 \approx 2.8724$); existindo nos intervalos $C_J \in [-1.3418; 0.83349]$ e $x_0 \in [1.5553; 2.8724]$.

Esta família possui dois trechos de estabilidade horizontal nos intervalos $-1.3418 \leq C_J \leq -1.3337$ onde $1.8597 \leq x_0 \leq 1.9563$ e $C_J \geq -1.2787$ com $x_0 \leq 1.7039$ inicialmente (x_0 volta a ser maior que esse valor um pouco após $C_J \approx -0.8$). Ainda, ela é verticalmente estável também em dois trechos: $-1.2542 < C_J \leq -1.2210$ onde $2.3500 \leq x_0 < 2.2912$ e $C_J \geq -1.2111$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessa família estão descritos na Tabela E.12 disponível no Apêndice E e na Figura 3.17 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

3.4.2 Bifurcações com multiplicação de período no sistema com $\mu_2 = 0.04$

Dessa forma, analisaremos aqui 8 famílias de OPSs retrógradas no sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.004$: cinco delas bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada (famílias $6i$, $8i$, $10i$, $12i$ e $10ii$ na Figura 3.16) e duas bifurcam da família retrógrada com ressonância $1/-2$ (famílias $6ii$ e $9i$ bifurcam de $3i$ na Figura 3.16).

Sobre as famílias que bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada com multiplicação de período, temos:

- A família $6i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 3$ (isto é, ocorreu uma triplicação de período). Essa família bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada em $C_J \approx -1.2284$ (em um ponto na família $2iii$ onde $K2D \approx -1.0001$) e existe até $C_J \approx -0.87435$. Ela tem quatro pontos de troca de estabilidade horizontal e seis pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.13 disponível no Apêndice E.
- A família $8i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 4$ (isto é, ocorreu uma quadruplicação de período). Essa família bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada em $C_J \approx -1.1531$ (em um ponto na família $2iii$ onde $K2D \approx -3.0414 \times 10^{-6}$) e existe até $C_J \approx -0.59040$. Ela tem um ponto de troca de estabilidade horizontal e três pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.14 disponível no Apêndice E.
- A família $10i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 5$ (isto é, ocorreu uma quintuplicação de período). Essa família bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada em $C_J \approx -1.0685$ (em um ponto na família $2iii$ onde $K2D \approx 0.61800$) e existe até $C_J \approx 0.10266$. Ela tem quatro pontos de troca de estabilidade horizontal e cinco pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.15 disponível no Apêndice E.

- A família $12i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 6$ (isto é, ocorreu uma sextuplicação de período). Essa família bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada em $C_J \approx -0.9625$ (em um ponto na família $2iii$ onde $K2D \approx 0.99997$) e existe até $C_J \approx -0.041018$, onde volta a se encontrar com a família coorbital excêntrica retrógrada. Ela tem dois pontos de troca de estabilidade horizontal e quatro pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.16 disponível no Apêndice E. Além disso, essa família possui uma segunda interseção com a família coorbital excêntrica retrógrada próximo a $C_J \approx -0.041003$, onde $K2D \approx 2.0000$ no ponto da família $12i$ e $K2D \approx 0.99999$ no ponto da família $2iii$.
- A família $10ii$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 5$ (isto é, ocorreu uma quintuplicação de período). Essa família bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada em $C_J \approx 0.5002$ (em um ponto na família $2iii$ onde $K2D \approx 0.61800$) e existe até $C_J \approx 0.67650$. Ela tem um ponto de troca de estabilidade horizontal e dois pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.17 disponível no Apêndice E.

Veja na Figura 3.18 um diagrama característico com a família coorbital excêntrica retrógrada e das 5 famílias com multiplicação de período que bifurcam dela.

Sobre a família retrógrada com ressonância $1/-2$ e as que bifurcam dela com multiplicação de período:

- A família $3i$ é composta por OPSs de ressonância $1/-2$ com multiplicidade $M = 1$. Essa família existe a partir de $C_J \approx -1.8785338120251227$ até $C_J \approx -0.85846780417471$. Ela tem dois pontos de troca de estabilidade horizontal e quatro pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.18 disponível no Apêndice E.
- A família $6ii$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 2$ (isto é, ocorreu uma duplicação de período). Essa família bifurca da família retrógrada com ressonância $1/-2$ em $C_J \approx -1.4525$ (em um ponto na família $3i$ onde $K2D \approx -1.9999$) e existe até $C_J \approx -1.2985$. Ela tem três pontos de troca de estabilidade horizontal e três pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.19 disponível no Apêndice E.
- A família $9i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 3$ (isto é, ocorreu uma triplicação de período). Essa família bifurca da família retrógrada com ressonância $1/-2$ em $C_J \approx -1.5076$ (em um ponto na família $3i$ onde $K2D \approx -1.0000$) e existe até $C_J \approx -1.3717$. Ela tem cinco pontos de troca de estabilidade horizontal e oito pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.20 disponível no Apêndice E.

Veja na Figura 3.20 um diagrama característico com a família retrógrada com ressonância $1/-2$ e das famílias com multiplicação de período que bifurcam dela.

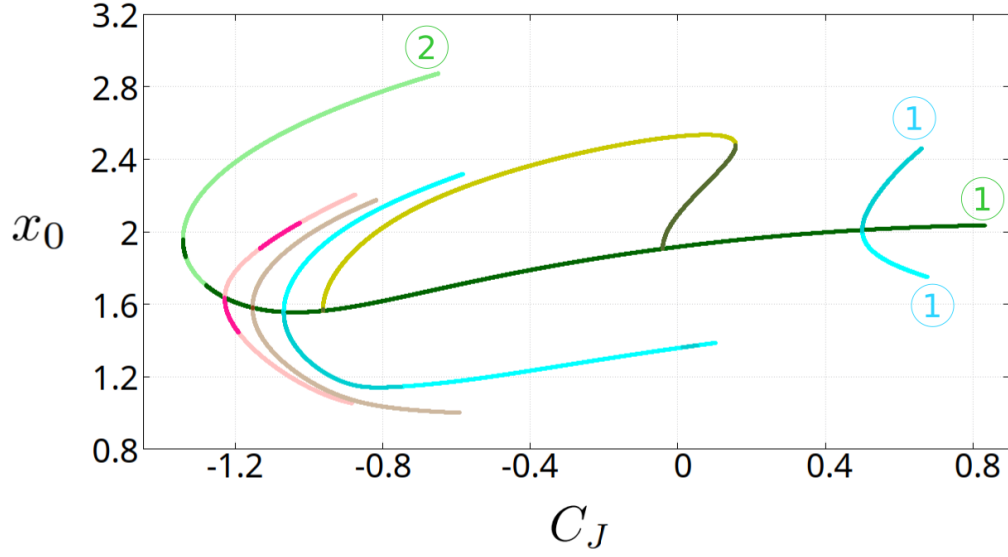


Figura 3.18: Diagrama $C_J X x_0$ no sistema com $\mu_2 = 0.04$ das famílias com multiplicação $M = 3$ (rosa escuro para OPSs horizontalmente estáveis e rosa claro para horizontalmente instáveis), $M = 4$ (marrom escuro para OPSs horizontalmente estáveis e marrom claro para horizontalmente instáveis), $M = 5$ (azul turquesa para OPSs horizontalmente estáveis e azul ciano para horizontalmente instáveis) e $M = 6$ (verde musgo para OPSs horizontalmente estáveis e verde oliva para horizontalmente instáveis) que bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis). Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o primário (corpo de massa M_1) ou com o secundário (corpo de massa M_2), respectivamente.

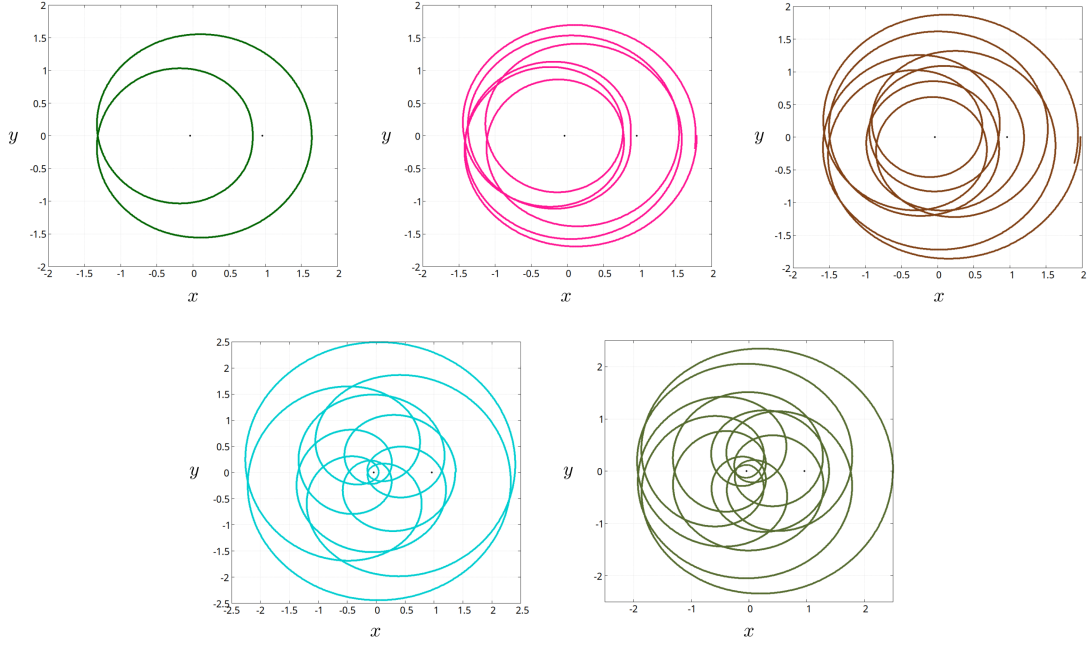


Figura 3.19: Exemplo (no referencial sinódico) de OPSs retrógradas da família retrógrada coorbital excêntrica (verde escuro) e das famílias com multiplicação $M = 3$ (rosa escuro), $M = 4$ (marrom escuro), $M = 5$ (azul turquesa) e $M = 6$ (verde musgo) que bifurcam dela. Em cima à esquerda em verde escuro: OPS com $x_0 = 1.6451$, $\dot{y}_0 = -2.2800$ e $C_J = -1.2361$. Em cima no meio em rosa escuro: OPS com $x_0 = 1.7898$, $\dot{y}_0 = -2.3548$ e $C_J = -1.1957$. Em cima à direita em marrom escuro: OPS com $x_0 = 1.9766$, $\dot{y}_0 = -2.4381$ e $C_J = -1.0063$. Embaixo à esquerda em azul turquesa: OPS com $x_0 = 1.3665$, $\dot{y}_0 = -1.8439$ e $C_J = 2.9129 \times 10^{-2}$. Embaixo à direita em verde musgo: OPS com $x_0 = 2.4933$, $\dot{y}_0 = -2.6727$ e $C_J = -0.11645$. Primário em $(0; -0.04)$ e secundário em $(0; 0.96)$ representados por pontos pretos nas figuras.

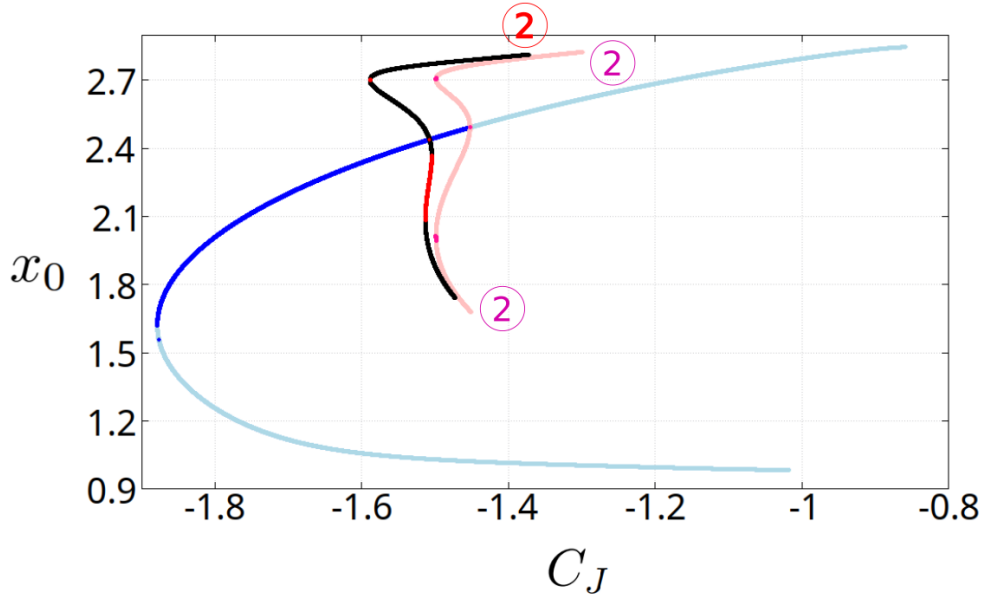


Figura 3.20: Diagrama $C_J X x_0$ no sistema com $\mu_2 = 0.04$ da família com multiplicação $M = 2$ (rosa escuro para OPSs horizontalmente estáveis e rosa claro para horizontalmente instáveis) e da família com multiplicação $M = 3$ (vermelho para OPSs horizontalmente estáveis e preto para horizontalmente instáveis) que bifurcam da família retrógrada com ressonância $1/-2$ (azul escuro para OPSs horizontalmente estáveis e azul claro para horizontalmente instáveis). Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o primário (corpo de massa M_1) ou com o secundário (corpo de massa M_2), respectivamente.

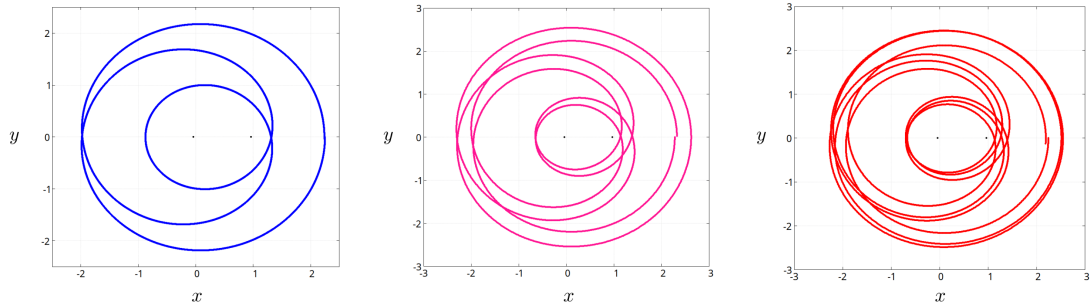


Figura 3.21: Exemplo (no referencial sinódico) de OPSs retrógradas da família retrógrada com ressonância $1/-2$ (azul escuro) e das famílias com multiplicação $M = 2$ (rosa escuro) e $M = 3$ (vermelho). À esquerda em azul escuro: OPS com $x_0 = 2.2495$, $\dot{y}_0 = -2.7619$ e $C_J = -1.6675$. No meio em rosa escuro: OPS com $x_0 = 2.2755$, $\dot{y}_0 = -2.7467$ e $C_J = -1.4766$. À direita em vermelho: OPS com $x_0 = 2.2417$, $\dot{y}_0 = -2.7272$ e $C_J = -1.5085$. Primário em $(0; -0.04)$ e secundário em $(0; 0.96)$ representados por pontos pretos nas figuras.

3.4.3 Famílias horizontal e verticalmente estáveis

Veja na Figura 3.22 as famílias de OPSs que são horizontal e verticalmente estáveis nesse sistema.

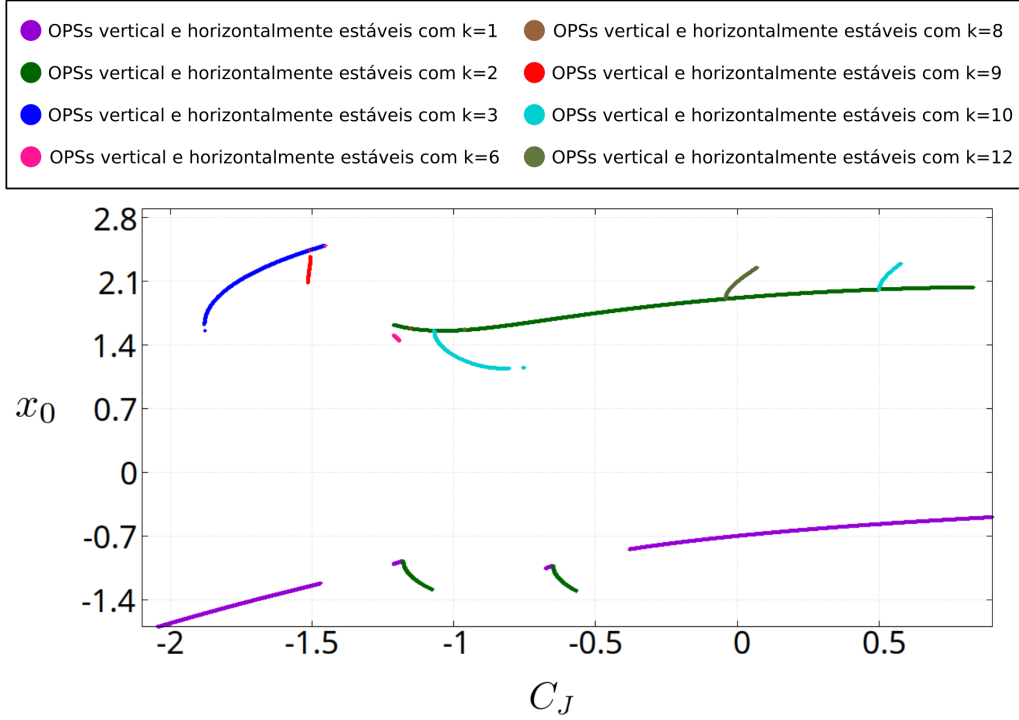


Figura 3.22: Diagrama característico $C_J \times x_0$ dos trechos horizontal e verticalmente estáveis das famílias circulares ($k = 1$), famílias coorbitais ($k = 2$), famílias com ordem de ressonância $k = 3$, famílias com $k = 6$, famílias com $k = 8$, famílias com $k = 9$, famílias com $k = 10$ e famílias com $k = 12$ no sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.04$ analisadas em detalhes nesse trabalho.

3.5 As famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.1$

Aqui, vamos considerar um sistema genérico onde a razão de massa entre o primário e o secundário é $\mu_2 = 0.1$.

A partir de duas grades iniciais: $C_J \in [-3; 3]$ com $x_0 \in [0; 4]$ e $C_J \in [-2; 1]$ com $x_0 \in [-2; 0]$, conseguimos encontrar trechos de várias famílias de OPSs retrógradas, cujas ordem de ressonância variam de 1 a 12, utilizando o método GridSearch. Na Figura 3.23, temos um diagrama $C_J \times x_0$ com os resultados dessa busca, nele a ordem de ressonância das famílias e suas estabilidades horizontais estão sendo indicados por meio de diferentes cores.

Na Figura 3.23 temos apenas as famílias de OPSs retrógradas em ambos os referenciais sinódico e inercial. As famílias denotadas por $1i$, $1ii$, $2i$, $2ii$, $2iii$, $3i$, $4i$,

6i, 6ii, 9i e 10i serão melhor exploradas ao longo dessa seção e referenciadas com essa nomenclatura.

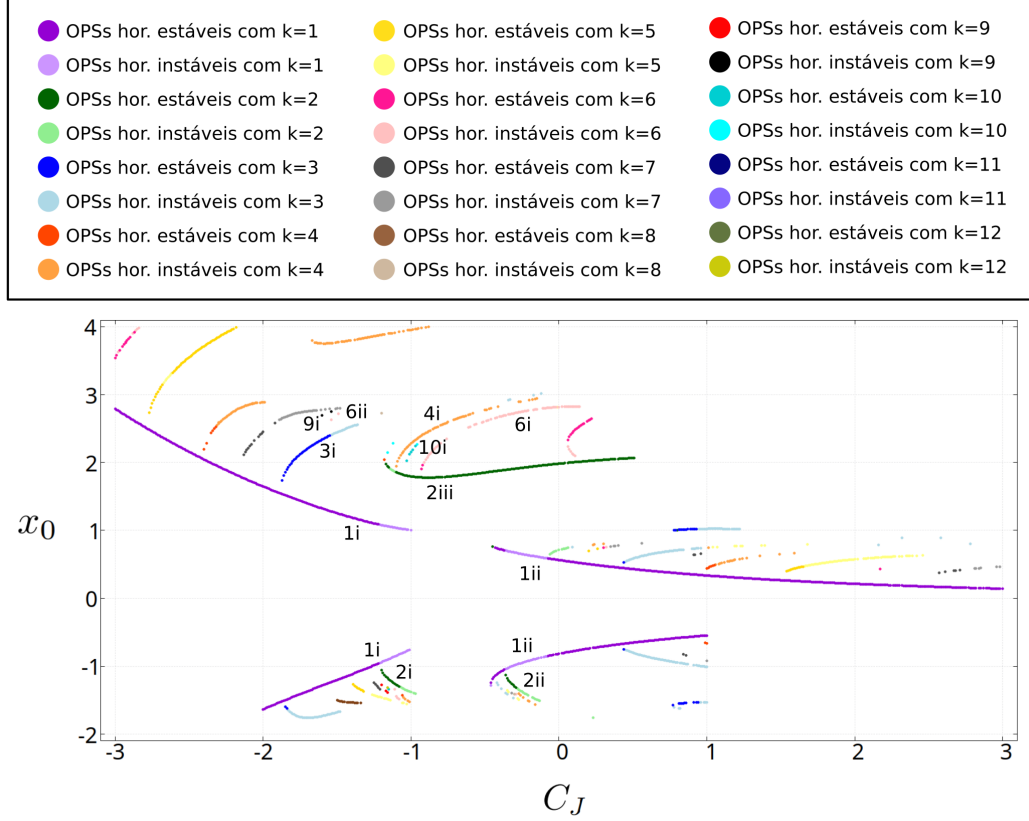


Figura 3.23: Diagrama $C_J x_0$ obtido inicialmente das famílias no sistema com $\mu_2 = 0.1$. A abreviação 'hor.' significa 'horizontalmente'.

Nesse sistema, encontramos algumas bifurcações com multiplicação de período cujas famílias serão analisadas em detalhes na Subseção 3.5.2.

3.5.1 Famílias retrógradas coorbitais e circulares

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular externa retrógrada em $C_J \approx -1.2112$. Chamaremos de família *I* a família ressonante que bifurca da família circular inicialmente horizontalmente estável e de família *II* a que bifurca inicialmente horizontalmente instável. Enquanto a família *I* termina perto de $C_J \approx -0.84522$ com $x_0 \approx -1.4698$, a família *II* termina colidindo com o secundário próximo a $C_J \approx -0.75646$ onde $x_0 \approx -0.16835$.

A família ressonante *I* é horizontalmente estável no intervalo $-1.2112 \leq C_J < -1.0701$ onde $-1.3107 < x_0 \leq -0.95262$ e é verticalmente estável no intervalo $C_J < -1.1485$ onde $x_0 > -1.1967$. Já a família ressonante *II* é horizontalmente estável no intervalo $-0.49976 \leq C_J \leq -0.49167$ onde $-0.29019 \leq x_0 \leq -0.26219$ e é verticalmente estável nos intervalos $C_J \leq -1.0197$ onde $x_0 \leq -0.76811$. Os pontos

de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas família estão descritos na Tabela E.21 disponível no Apêndice E e na Figura 3.24 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

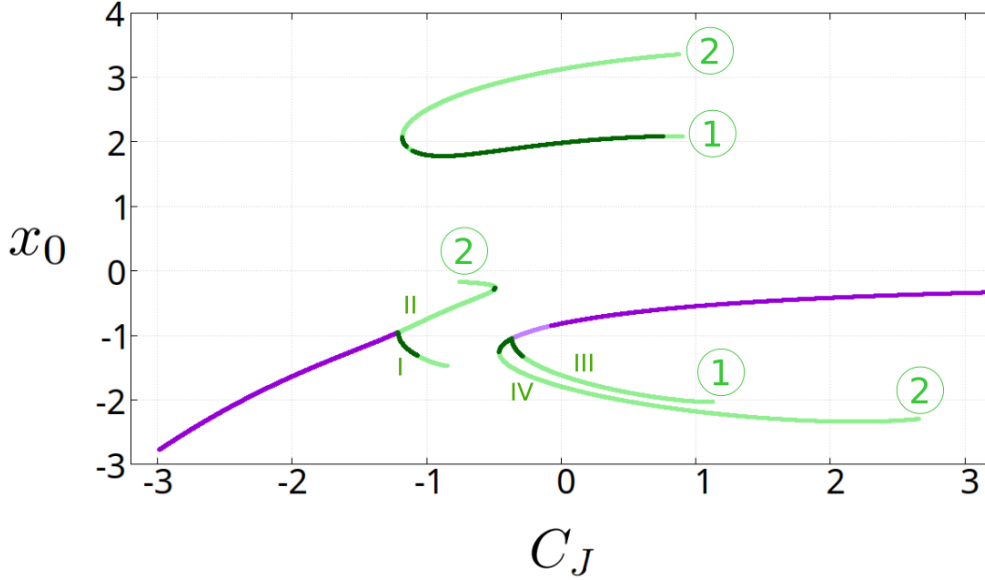


Figura 3.24: Diagrama característico C_J X x_0 no sistema com $\mu_2 = 0.1$ da família retrógrada coorbital excêntrica (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) e das famílias retrógradas circulares (violeta para OPSs horizontalmente estáveis e lilás para horizontalmente instáveis) e das coorbitais retrógradas (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) que bifurcam delas. Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o primário (corpo de massa M_1) ou com o secundário (corpo de massa M_2), respectivamente.

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular interna retrógrada em $C_J \approx -0.36756$. Chamaremos de família *III* a família ressonante que bifurca da família circular com os valores maiores de x_0 e de família *IV* a que bifurca com os valores menores de x_0 . Enquanto a família *III* termina por colisão com o primário perto de $C_J \approx 1.1281$ com $x_0 \approx -2.0233$, a família *IV* termina por colisão com o secundário perto de $C_J \approx 2.6559$ com $x_0 \approx -2.2936$.

A família ressonante *III* é horizontalmente estável no intervalo $-0.36756 \leq C_J \leq -0.28841$ onde $-1.3173 \leq x_0 \leq -1.0494$ e é verticalmente estável nos intervalos $C_J \leq -0.19681$ e $C_J \geq 1.0903$ onde $x_0 \geq -1.4415$ e $x_0 \leq -2.0254$, respectivamente. Já a família ressonante *IV* é horizontalmente estável no intervalo $-0.46076 \leq C_J \leq -0.36756$ onde $-1.2617 \leq x_0 \leq -1.0492$ e é verticalmente instável nos intervalos $-0.42226 < C_J < 2.3929$ e $C_J > 2.5920$ onde $-2.3286 < x_0 < -1.1227$ e $x_0 > -2.3052$, respectivamente. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.22 disponível no Apêndice E e na Figura

3.24 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

A família coorbital excêntrica retrógrada é limitada por colisão com o primário próximo a $C_J \approx 0.90547$ (onde $x_0 \approx 2.0909$) e por colisão com o secundário próximo a $C_J \approx 0.87812$ (onde $x_0 \approx 3.3567$); existindo nos intervalos $C_J \in [-1.1809; 0.90547]$ e $x_0 \in [1.7795; 3.3567]$.

Esta família possui dois trechos de estabilidade horizontal nos intervalos $-1.1809 \leq C_J \leq -1.1473$ e $-1.1044 \leq C_J \leq 0.75753$ onde $1.9216 \leq x_0 \leq 2.0724$ e $1.8609 \leq x_0 \leq 2.0867$, respectivamente. Ainda, ela é verticalmente estável também em dois trechos: $-1.1668 \leq C_J < -1.0641$ onde $2.1847 \leq x_0 < 2.4104$ e $C_J \geq -1.1787$ com $x_0 \leq 2.0307$ inicialmente (x_0 volta a ser maior que esse valor um pouco após $C_J = 0$). Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessa família estão descritos na Tabela E.23 disponível no Apêndice E e na Figura 3.24 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

3.5.2 Bifurcações com multiplicação de período no sistema com $\mu_2 = 0.1$

Dessa forma, analisaremos aqui 6 famílias de OPSs retrógradas no sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.1$: três delas bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada (famílias $4i$, $10i$ e $6i$ na Figura 3.23) e duas bifurcam da família retrógrada com ressonância $1/-2$ (famílias $6ii$ e $9i$ bifurcam de $3i$ na Figura 3.23, respectivamente).

Sobre as famílias que bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada com multiplicação de período, temos:

- A família $4i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 2$ (isto é, ocorreu uma duplicação de período). Essa família bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada em $C_J \approx -1.1044$ (em um ponto na família $2iii$ onde $K2D \approx -2.0$) e existe até $C_J \approx 0.44990$. Ela tem um ponto de troca de estabilidade horizontal e cinco pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.24 disponível no Apêndice E.
- A família $10i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 5$ (isto é, ocorreu uma quintuplicação de período). Essa família bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada em $C_J \approx -1.0481$ (em um ponto na família $2iii$ onde $K2D \approx -1.6181$) e existe até $C_J \approx -0.75216$. Ela tem dois pontos de troca de estabilidade horizontal e quatro pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.25 disponível no Apêndice E.
- A família $6i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 3$ (isto é, ocorreu uma triplicação de período). Essa família bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada em $C_J \approx -0.94453$ (em um ponto na família $2iii$ onde $K2D \approx -0.99998$) e existe até $C_J \approx 0.52133$. Ela tem cinco pontos de troca de estabilidade horizontal e sete pontos de troca de estabilidade vertical que

serão descritos na Tabela E.26 disponível no Apêndice E. Além disso, essa família possui uma segunda interseção com a família coorbital excêntrica retrógrada próximo a $C_J \approx 0.17859$, onde $K2D \approx 2.0$ no ponto da família *6i* e $K2D \approx -1.0000$ no ponto da família *2iii*.

Veja na Figura 3.25 um diagrama característico com a família coorbital excêntrica retrógrada e das 3 famílias com multiplicação de período que bifurcam dela.

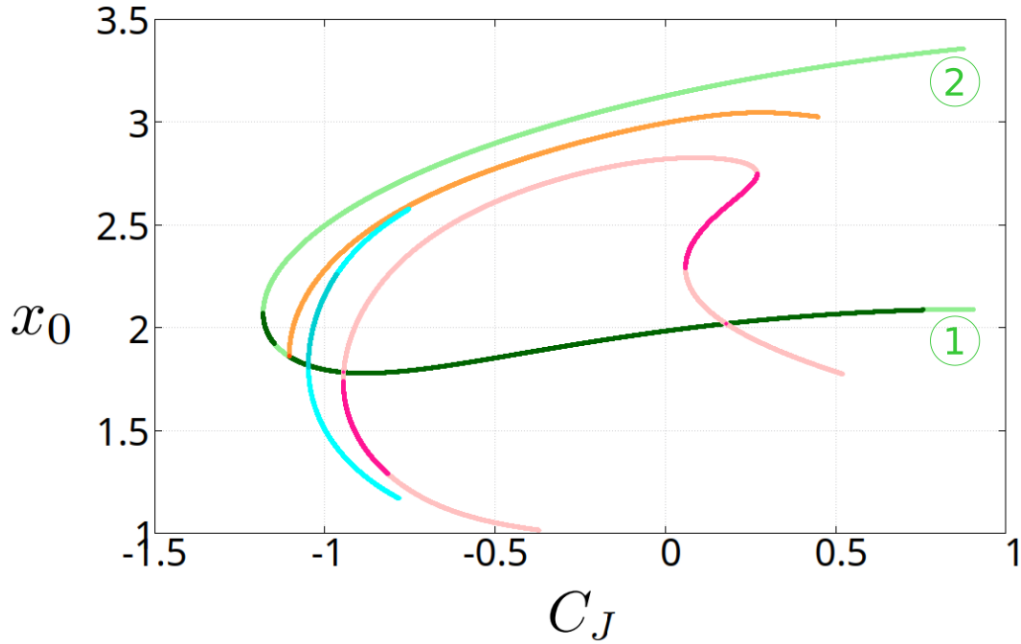


Figura 3.25: Diagrama $C_J X x_0$ no sistema com $\mu_2 = 0.1$ das famílias com multiplicação $M = 2$ (laranja escuro para OPSs horizontalmente estáveis e laranja claro para horizontalmente instáveis), $M = 5$ (azul turquesa para OPSs horizontalmente estáveis e azul ciano para horizontalmente instáveis) e $M = 3$ (rosa escuro para OPSs horizontalmente estáveis e rosa claro para horizontalmente instáveis) que bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis). Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o primário (corpo de massa M_1) ou com o secundário (corpo de massa M_2), respectivamente.

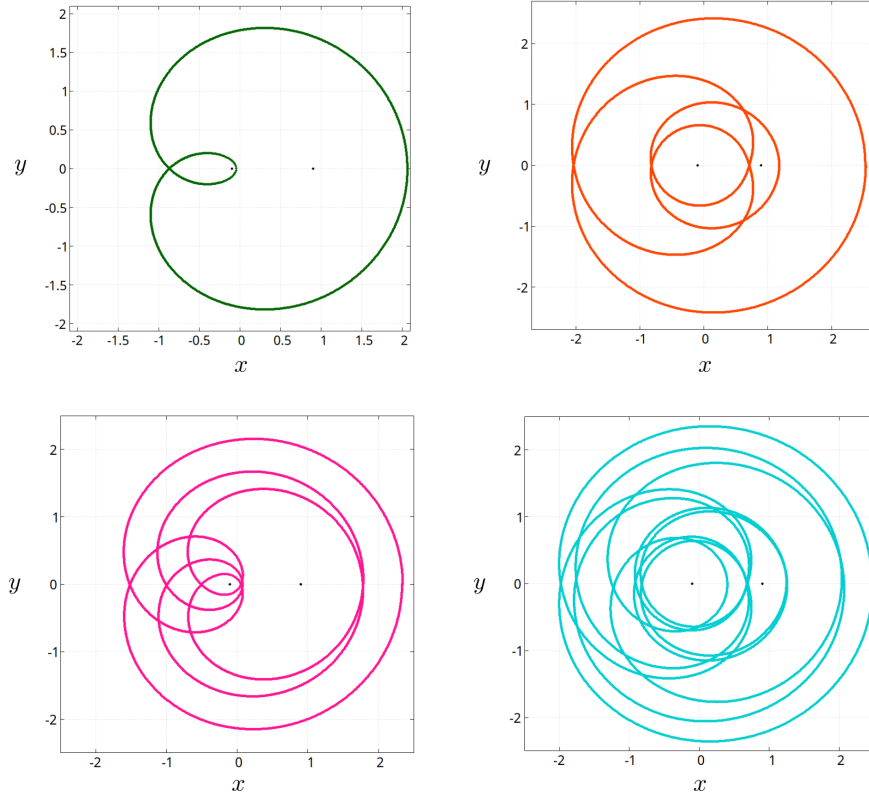


Figura 3.26: Exemplo (no referencial sinódico) de OPSs retrógradas da família retrógrada coorbital excêntrica (verde escuro) e das famílias com multiplicação $M = 2$ (laranja escuro), $M = 3$ (rosa escuro) e $M = 5$ (azul turquesa) que bifurcam dela. Em cima à esquerda em verde escuro: OPS com $x_0 = 2.0633$, $\dot{y}_0 = -2.1888$ e $C_J = 0.47008$. Em cima à direita em laranja escuro: OPS com $x_0 = 2.5379$, $\dot{y}_0 = -2.8383$ e $C_J = -0.81067$. Embaixo à esquerda em rosa escuro: OPS com $x_0 = 2.3319$, $\dot{y}_0 = -2.5012$ e $C_J = 6.1996 \times 10^{-2}$. Embaixo à direita em azul turquesa: OPS com $x_0 = 2.4798$, $\dot{y}_0 = -2.7952$ e $C_J = -0.83914$. Primário em $(0; -0.1)$ e secundário em $(0; 0.9)$ representados por pontos pretos nas figuras.

Sobre a família retrógrada com ressonância $1/-2$ e as que bifurcam dela com multiplicação de período:

- A família $3i$ é composta por OPSs de ressonância $1/-2$ com multiplicidade $M = 1$. Essa família existe a partir de $C_J \approx -1.8748$ até $C_J \approx -1.0230$. Ela tem dois pontos de troca de estabilidade horizontal e seis pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.27 disponível no Apêndice E.
- A família $6ii$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 2$ (isto é, ocorreu uma duplicação de período). Essa família bifurca da família retrógrada com ressonância $1/-2$ em $C_J \approx -1.5489$ (em um ponto na família $3i$ onde $K2D \approx$

-1.9999) e existe até $C_J \approx -1.0507$. Ela tem quatro pontos de troca de estabilidade horizontal e seis pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.28 disponível no Apêndice E.

- A família $9i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 3$ (isto é, ocorreu uma triplicação de período). Essa família bifurca da família retrógrada com ressonância $1/-2$ em $C_J \approx -1.5968$ (em um ponto na família $3i$ onde $K2D \approx -0.99997$) e existe até $C_J \approx -1.3081$. Ela tem três pontos de troca de estabilidade horizontal e oito pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.29 disponível no Apêndice E.

Veja na Figura 3.27 um diagrama característico com a família retrógrada com ressonância $1/-2$ e as famílias com multiplicação de período que bifurcam dela.

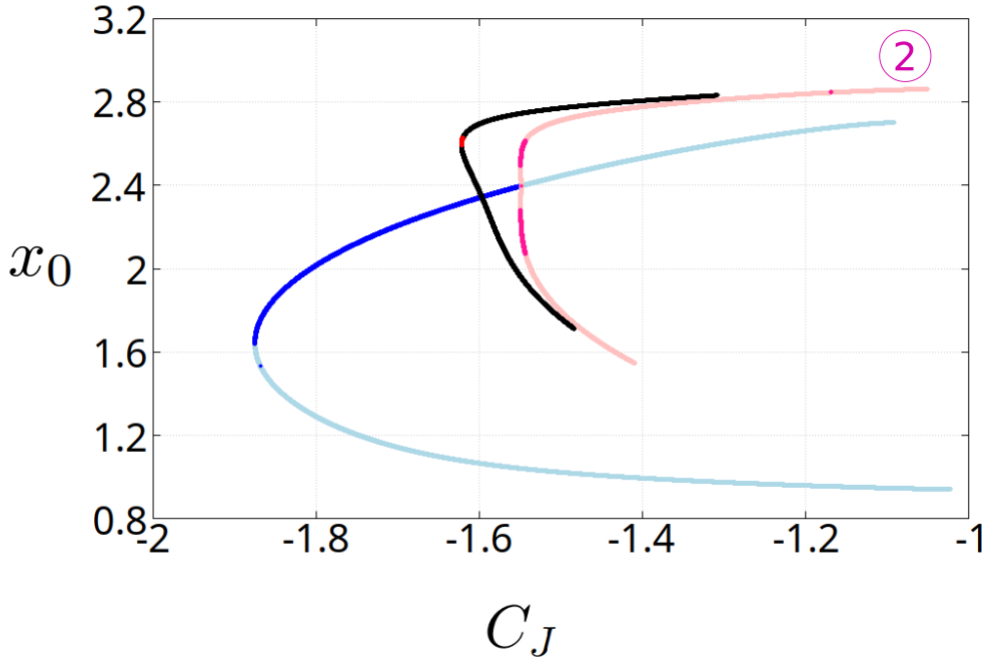


Figura 3.27: Diagrama $C_J X x_0$ no sistema com $\mu_2 = 0.1$ das famílias com multiplicação $M = 2$ (rosa escuro para OPSs horizontalmente estáveis e rosa claro para horizontalmente instáveis) e com multiplicação $M = 3$ (vermelho para OPSs horizontalmente estáveis e preto para horizontalmente instáveis) que bifurcam da família retrógrada com ressonância $1/-2$ (azul escuro para OPSs horizontalmente estáveis e azul claro para horizontalmente instáveis). Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o primário (corpo de massa M_1) ou com o secundário (corpo de massa M_2), respectivamente.

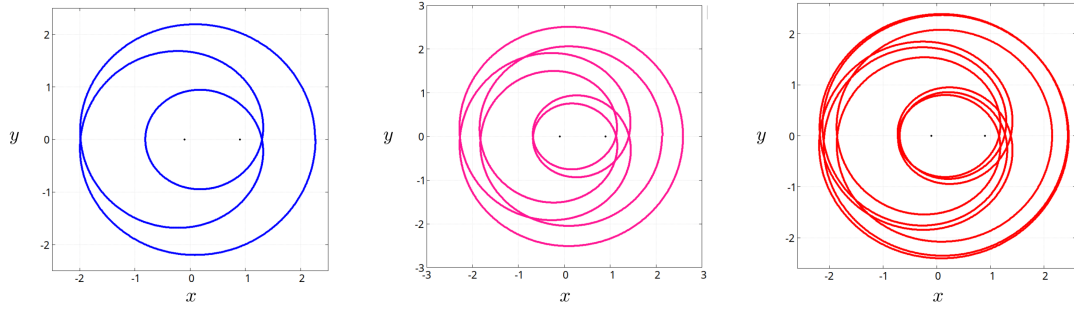


Figura 3.28: Exemplo (no referencial sinódico) de OPSs retrógradas da família retrógrada com ressonância $1/-2$ (azul escuro) e das famílias com multiplicação $M = 2$ (rosa escuro) e $M = 3$ (vermelho) que bifurcam dela. À esquerda em azul escuro: OPS com $x_0 = 2.2682$, $\dot{y}_0 = -2.7763$ e $C_J = -1.6569$. No meio em rosa escuro: OPS com $x_0 = 2.1256$, $\dot{y}_0 = -2.6527$ e $C_J = -1.5464$. À direita em vermelho: OPS com $x_0 = 2.1516$, $\dot{y}_0 = -2.6768$ e $C_J = -1.5767$. Primário em $(0; -0.1)$ e secundário em $(0; 0.9)$ representados por pontos pretos nas figuras.

3.5.3 Famílias horizontal e verticalmente estáveis

Veja na Figura 3.29 as famílias de OPSs que são horizontal e verticalmente estáveis nesse sistema.

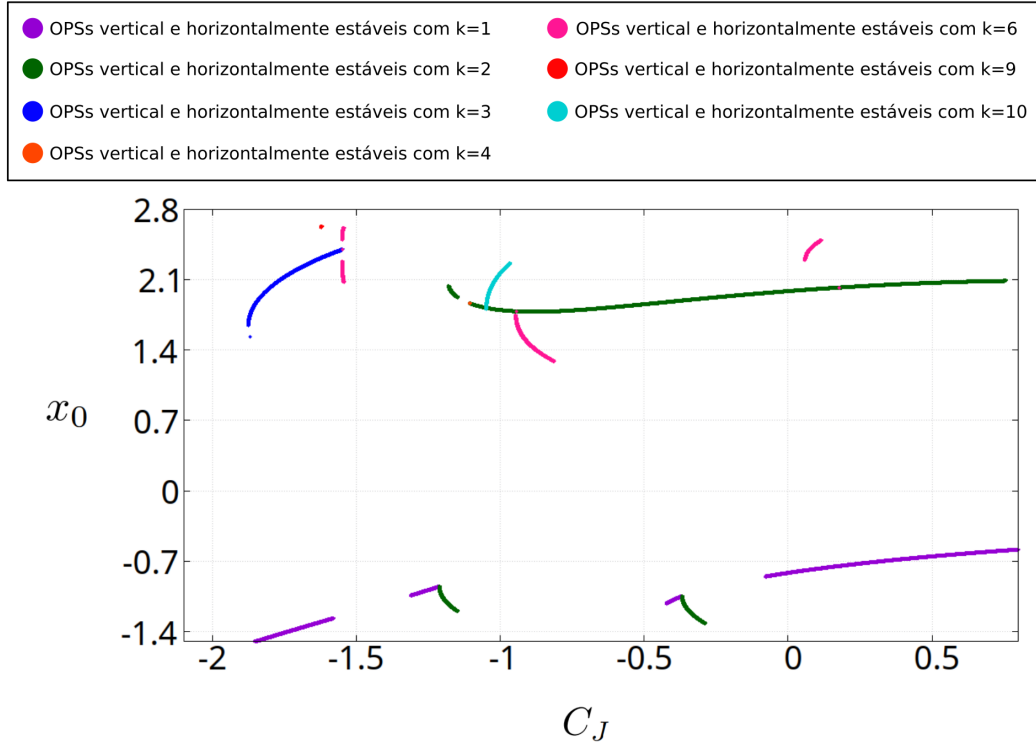


Figura 3.29: Diagrama característico C_J X x_0 dos trechos horizontal e verticalmente estáveis das famílias circulares ($k = 1$), famílias coorbitais ($k = 2$), famílias com ordem de ressonância $k = 3$, famílias com $k = 4$, famílias com $k = 6$, famílias com $k = 9$ e famílias com $k = 10$ no sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.1$ analisadas em detalhes nesse trabalho.

3.6 As famílias no sistema Plutão-Caronte ($\mu_2 = 0.1056338028$)

O sistema binário Plutão-Caronte é um sistema binário formado pelo planeta-anão Plutão e seu satélite natural Caronte. Assumindo Plutão ($M_1 = 1.27 \times 10^{22}$ kg)¹¹ como primário e Caronte ($M_2 = 1.5 \times 10^{21}$ kg)¹² como secundário, temos como razão de massa $\mu_2 = 0.1056338028$.

A partir de uma grade inicial: $C_J \in [-3; 3]$ com $x_0 \in [-3; 3]$, conseguimos encontrar trechos de várias famílias de OPSSs retrógradas, cujas ordem de ressonância variam de 1 a 12, utilizando o método GridSearch. Na Figura 3.30, temos um diagrama C_J X x_0 com os resultados dessa busca, nele a ordem de ressonância das famílias e suas estabilidades horizontais estão sendo indicados por meio de diferentes cores.

Na Figura 3.30 temos apenas as famílias de OPSSs retrógradas em ambos os referenciais sinódico e inercial. As famílias denotadas por $1i$, $1ii$, $2i$, $2ii$, $2iii$, $3i$, $4i$,

¹¹Dado em [6].

¹²Dado em [6].

$6i$, $6ii$ e $10i$ serão melhor exploradas ao longo dessa seção e referenciadas com essa nomenclatura.

Nesse sistema, encontramos algumas bifurcações com multiplicação de período cujas famílias serão analisadas em detalhes na Subseção 3.6.2.

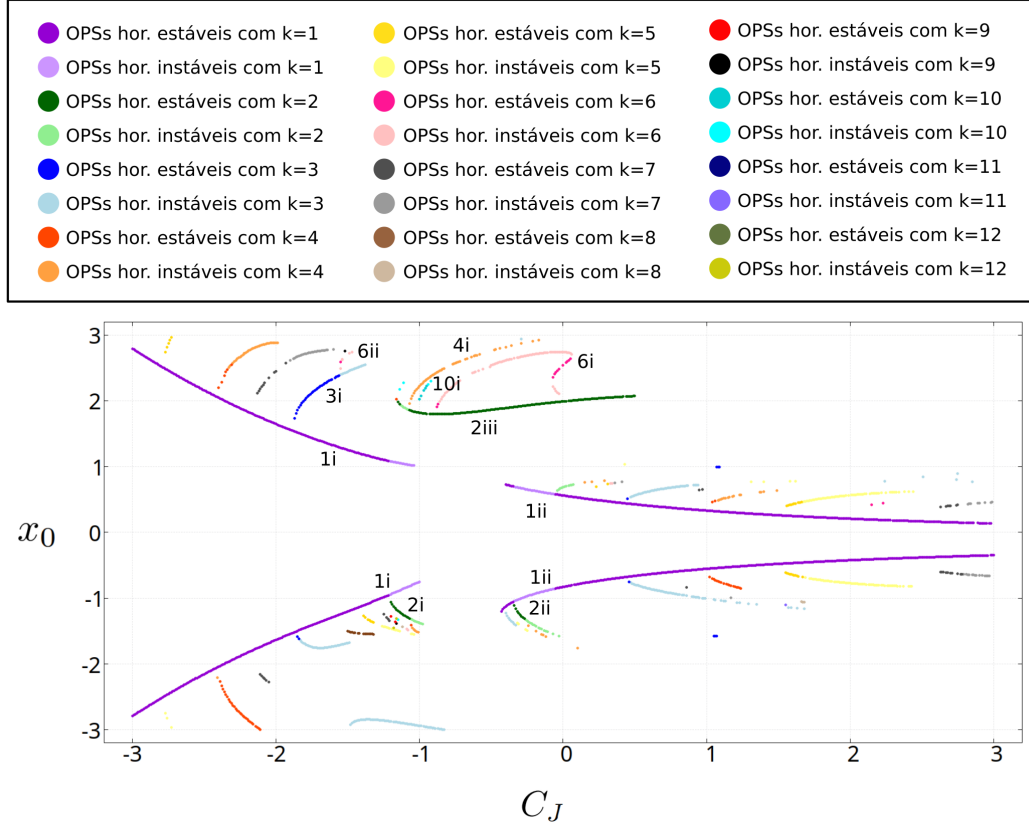


Figura 3.30: Diagrama $C_J x_0$ obtido inicialmente das famílias no sistema Plutão - Caronte. A abreviação 'hor.' significa 'horizontalmente'.

3.6.1 Famílias retrógradas coorbitais e circulares

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular externa retrógrada em $C_J \approx -1.2116$ e terminam em colisão com o secundário perto de $C_J \approx -0.73883$ ($x_0 \approx -0.17627$) após se juntarem em uma só família a partir de $C_J \approx -0.50486$. Chamaremos de família *I* a família ressonante que bifurca da família circular inicialmente horizontalmente estável e de família *II* a que bifurca inicialmente horizontalmente instável.

A família ressonante *I* é horizontalmente estável nos intervalos $-1.2116 \leq C_J \leq -1.0673$, $-0.90812 \leq C_J \leq -0.90809$, $-0.83014 \leq C_J \leq -0.82874$ e $-0.50764 \leq C_J \leq -0.50486$ onde $-1.3105 \leq x_0 \leq -0.95043$, $-1.0555 \leq x_0 \leq -1.0489$, $-1.4410 \leq x_0 \leq -1.4293$ e $-0.31636 \leq x_0 \leq -0.29763$, respectivamente, e é verticalmente estável no intervalo $C_J \leq -1.1522$ e $-0.90808 \leq C_J \leq -0.90806$ onde $x_0 \geq -1.1875$ e $-1.0485 \leq x_0 \leq -1.0471$, respectivamente. Já a família resso-

nante *II* é horizontalmente estável nos intervalos $-0.50486 \leq C_J \leq -0.49576$ onde $-0.29758 \leq x_0 \leq -0.26770$, respectivamente, e é verticalmente estável nos intervalos $C_J \leq -1.0191$ onde $x_0 \leq -0.76720$, respectivamente. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas família estão descritos na Tabela E.30 disponível no Apêndice E e na Figura 3.31 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

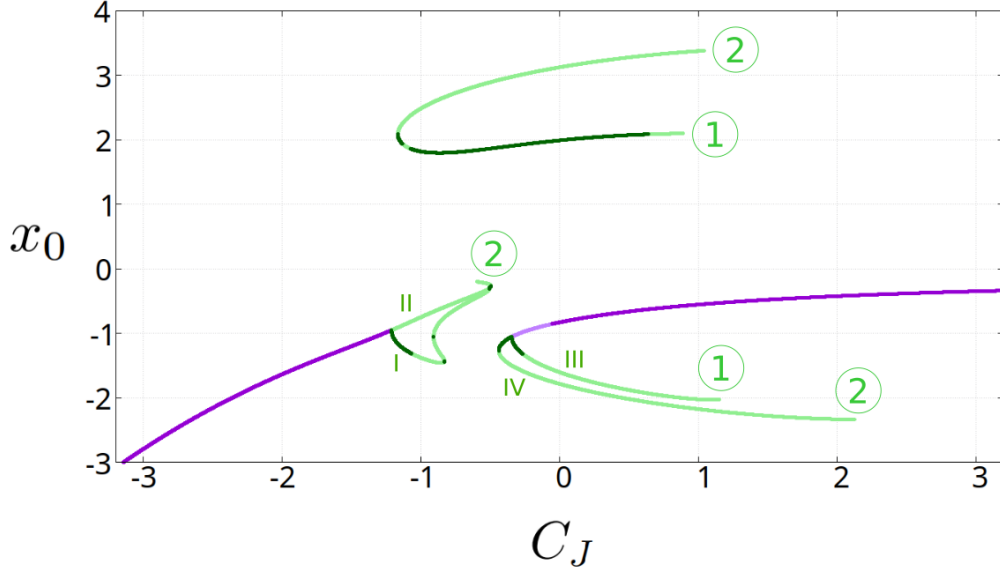


Figura 3.31: Diagrama característico C_J X x_0 no sistema Plutão - Caronte da família retrógrada coorbital excêntrica (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) e das famílias retrógradas circulares (violeta para OPSs horizontalmente estáveis e lilás para horizontalmente instáveis) e das coorbitais retrógradas (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) que bifurcam delas. Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o primário (Plutão) ou com o secundário (Caronte), respectivamente.

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular interna retrógrada em $C_J \approx -0.34386$. Chamaremos de família *III* a família ressonante que bifurca da família circular com os valores maiores de x_0 e de família *IV* a que bifurca com os valores menores de x_0 . Enquanto a família *III* termina por colisão com o primário perto de $C_J \approx 1.1477$ com $x_0 \approx -2.0246$, a outra termina por colisão com o secundário perto de $C_J \approx 2.1286$ com $x_0 \approx -2.3336$.

A família ressonante *III* é horizontalmente estável no intervalo $-0.34386 \leq C_J \leq -0.26492$ onde $-1.3186 \leq x_0 \leq -1.0514$ e é verticalmente estável nos intervalos $C_J \leq -0.17553$ e $C_J \geq 1.1246$ onde $x_0 \geq -1.4402$ e $x_0 \leq -2.0263$, respectivamente. Já a família ressonante *IV* é horizontalmente estável no intervalo $-0.43781 \leq C_J \leq -0.34386$ onde $-1.2651 \leq x_0 \leq -1.0513$, respectivamente, e é verticalmente estável nos intervalos $C_J \geq -0.40093$ onde $x_0 \geq -1.1286$, respectivamente. Os pontos de

troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.31 disponível no Apêndice E e na Figura 3.31 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

A família coorbital excêntrica retrógrada é limitada por colisão com o secundário próximo a $C_J \approx 1.0420$ (onde $x_0 \approx 3.3797$) e por colisão com o primário próximo a $C_J \approx 0.88861$ (onde $x_0 \approx 2.0956$); existindo nos intervalos $C_J \in [-1.1651; 1.0420]$ e $x_0 \in [1.7958; 3.3797]$. Esta família possui dois trechos de estabilidade horizontal nos intervalos $-1.1651 \leq C_J \leq -1.1330$ e $-1.0756 \leq C_J \leq 0.64165$ onde $1.9374 \leq x_0 \leq 2.0826$ e $1.8629 \leq x_0 \leq 2.0846$, respectivamente. Ainda, ela é verticalmente estável para valores $x_0 \leq 2.4158$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessa família estão descritos na Tabela E.32 disponível no Apêndice E e na Figura 3.31 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

3.6.2 Bifurcações com multiplicação de período no sistema Plutão-Caronte

Dessa forma, analisaremos aqui 5 famílias de OPSs retrógradas no sistema Plutão - Caronte: três delas bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada (famílias $4i$, $10i$ e $6i$ na Figura 3.30) e uma bifurca da família retrógrada com ressonância $1/-2$ (famílias $6ii$ e $3i$ na Figura 3.30, respectivamente).

Sobre as famílias que bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada com multiplicação de período, temos:

- A família $4i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 2$ (isto é, ocorreu uma duplicação de período). Essa família bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada em $C_J \approx -1.0756$ (em um ponto na família $2iii$ onde $K2D \approx -2.0000$) e existe até $C_J \approx 0.43809$. Ela tem um ponto de troca de estabilidade horizontal e cinco pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.33 disponível no Apêndice E.
- A família $10i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 5$ (isto é, ocorreu uma quintuplicação de período). Essa família bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada em $C_J \approx -1.0161$ (em um ponto na família $2iii$ onde $K2D \approx -1.6180$) e existe até $C_J \approx -0.71612$. Ela tem dois pontos de troca de estabilidade horizontal e quatro pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.34 disponível no Apêndice E.
- A família $6i$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 3$ (isto é, ocorreu uma triplicação de período). Essa família bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada em $C_J \approx -0.8963$ (em um ponto na família $2iii$ onde $K2D \approx -1.0000$) e existe até $C_J \approx 0.68976$. Ela tem quatro pontos de troca de estabilidade horizontal e seis pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.35 disponível no Apêndice E. Além disso, essa

família possui uma segunda interseção com a família coorbital excêntrica retrógrada próximo a $C_J \approx 0.05887$, onde $K2D \approx 2.0000$ no ponto da família $6i$ e $K2D \approx -0.99999$ no ponto da família $2iii$.

Veja na Figura 3.32 um diagrama característico com a família coorbital excêntrica retrógrada e das 3 famílias com multiplicação de período que bifurcam dela.

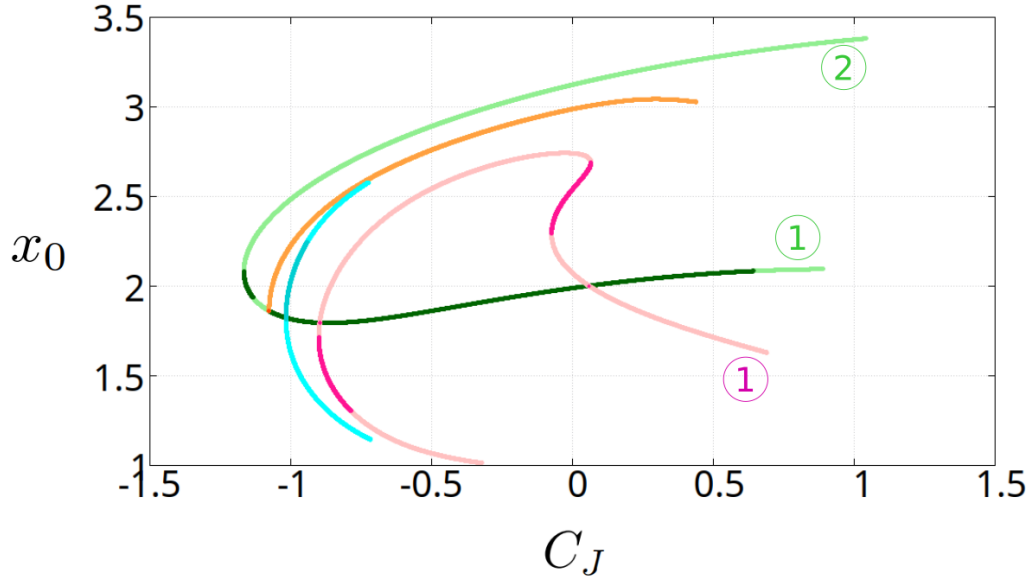


Figura 3.32: Diagrama $C_J X_0$ no sistema Plutão - Caronte das famílias com multiplicação $M = 2$ (laranja escuro para OPSs horizontalmente estáveis e laranja claro para horizontalmente instáveis), $M = 5$ (azul turquesa para OPSs horizontalmente estáveis e azul ciano para horizontalmente instáveis) e $M = 3$ (rosa escuro para OPSs horizontalmente estáveis e rosa claro para horizontalmente instáveis) que bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis). Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o primário (Plutão) ou o secundário (Caronte), respectivamente.

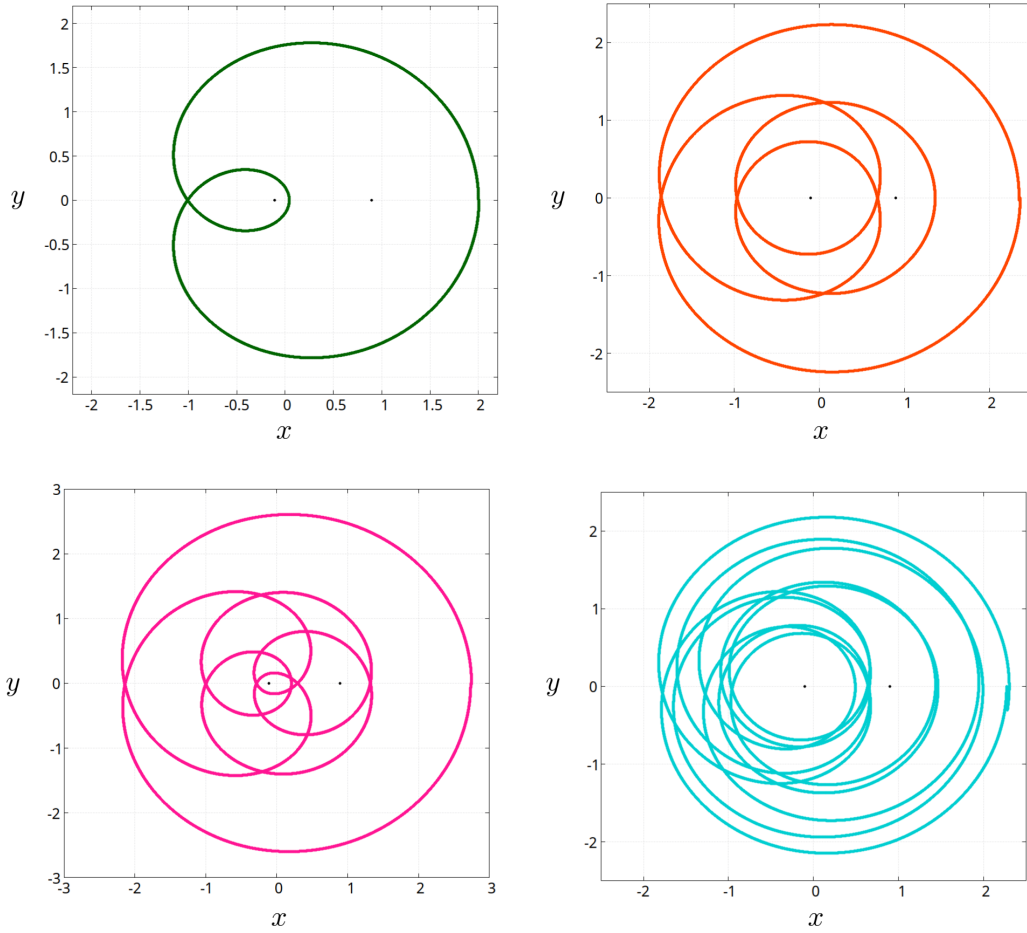


Figura 3.33: Exemplo (no referencial sinódico) de OPSs retrógradas da família retrógrada coorbital excêntrica (verde escuro) e das famílias com multiplicação $M = 2$ (laranja escuro), $M = 3$ (rosa escuro) e $M = 5$ (azul turquesa) que bifurcam dela. Em cima à esquerda em verde escuro: OPS com $x_0 = 2.0052$, $\dot{y}_0 = -2.2329$ e $C_J = 7.2730 \times 10^{-2}$. Em cima à direita em laranja escuro: OPS com $x_0 = 2.3597$, $\dot{y}_0 = -2.7140$ e $C_J = -0.92783$. Embaixo à esquerda em rosa escuro: OPS com $x_0 = 2.7368$, $\dot{y}_0 = -2.8847$ e $C_J = -8.7702 \times 10^{-2}$. Embaixo à direita em azul turquesa: OPS com $x_0 = 2.2688$, $\dot{y}_0 = -2.6432$ e $C_J = -0.93181$. Primário em $(0; -0.1056338028)$ e secundário em $(0; 0.894366197)$ representados por pontos pretos nas figuras.

Sobre a família retrógrada com ressonância $1/-2$ e a que bifurca dela com multiplicação de período:

- A família $3i$ é composta por OPSs de ressonância $1/-2$ com multiplicidade $M = 1$. Essa família existe a partir de $C_J \approx -1.8749$ até $C_J \approx -0.98648$. Ela tem quatro pontos de troca de estabilidade horizontal e seis pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.36 disponível no Apêndice E.

- A família $6ii$ é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 2$ (isto é, ocorreu uma duplicação de período). Essa família bifurca da família retrógrada com ressonância $1/-2$ em $C_J \approx -1.5522$ (em um ponto na família $3i$ onde $K2D \approx -1.9999$) e existe até $C_J \approx -1.0674$. Ela tem quatro pontos de troca de estabilidade horizontal e seis pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.37 disponível no Apêndice E.

Veja na Figura 3.34 um diagrama característico com a família retrógrada com ressonância $1/-2$ e da família com multiplicação de período que bifurca dela.

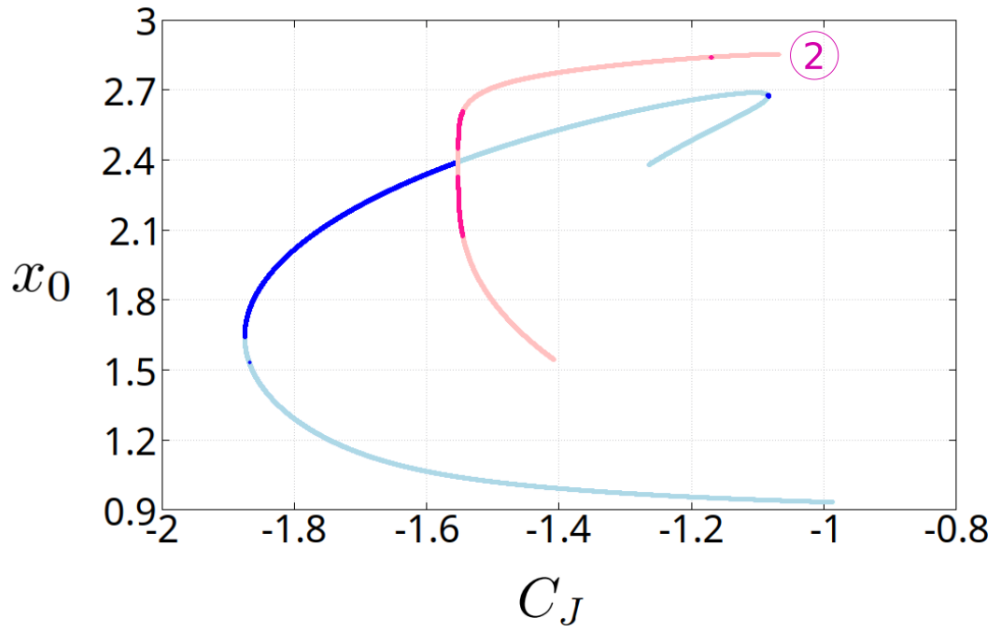


Figura 3.34: Diagrama $C_J X x_0$ no sistema Plutão - Caronte da família com multiplicação $M = 2$ (rosa escuro para OPSs horizontalmente estáveis e rosa claro para horizontalmente instáveis) que bifurca da família retrógrada com ressonância $1/-2$ (azul escuro para OPSs horizontalmente estáveis e azul claro para horizontalmente instáveis). Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o primário (Plutão) ou o secundário (Caronte), respectivamente.

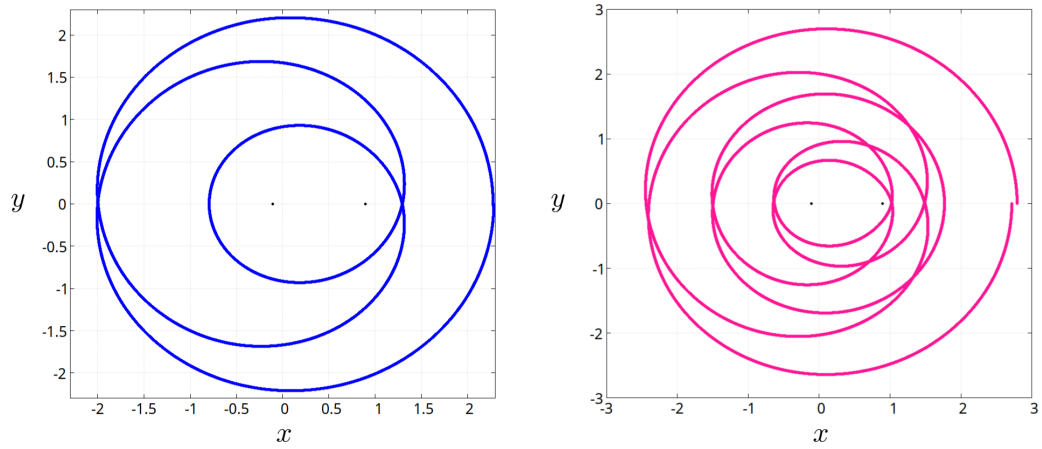


Figura 3.35: Exemplo (no referencial sinódico) de OPSs retrógradas da família retrógrada com ressonância 1/-2 (azul escuro) e da família com multiplicação $M = 2$ (rosa escuro) que bifurca dela. À esquerda em azul escuro: OPS com $x_0 = 2.2832$, $\dot{y}_0 = -2.7855$ e $C_J = -1.6453$. À direita em rosa escuro: OPS com $x_0 = 2.7170$, $\dot{y}_0 = -3.1023$ e $C_J = -1.4926$. Primário em $(0; -0.1056338028)$ e secundário em $(0; 0.894366197)$ representados por pontos pretos nas figuras.

3.6.3 Famílias horizontal e verticalmente estáveis

Veja na Figura 3.36 as famílias de OPSs que são horizontal e verticalmente estáveis nesse sistema.

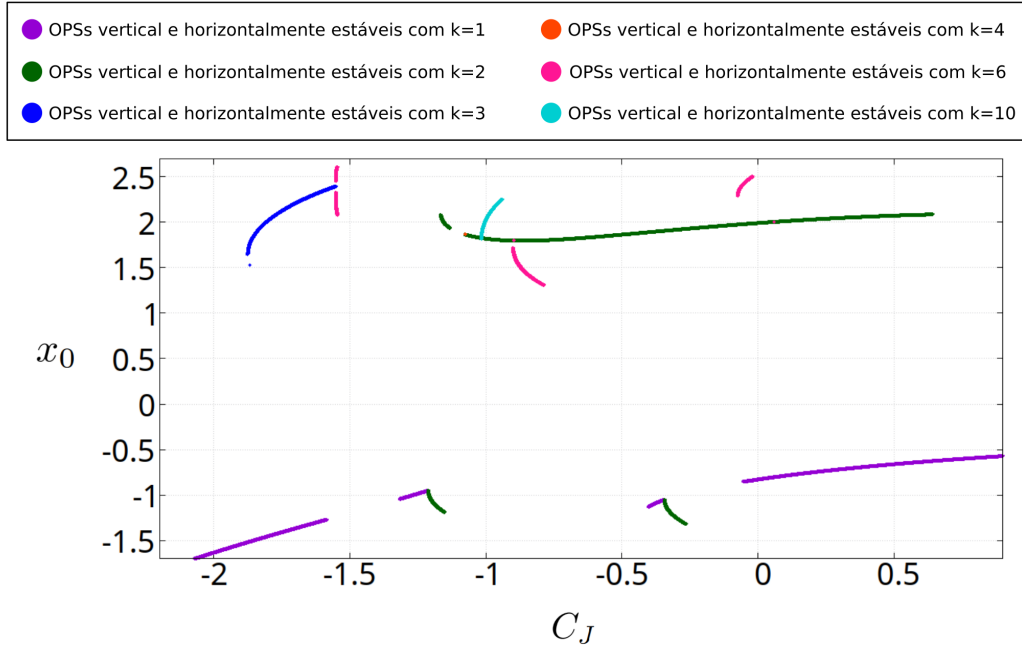


Figura 3.36: Diagrama característico C_J X x_0 dos trechos horizontal e verticalmente estáveis das famílias circulares ($k = 1$), famílias coorbitais ($k = 2$), famílias com ordem de ressonância $k = 3$, famílias com $k = 4$, famílias com $k = 6$ e famílias com $k = 10$ no sistema Plutão-Caronte, $\mu_2 = 0.1056338028$, analisadas em detalhes nesse trabalho.

3.7 As famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.3$

Aqui, vamos considerar um sistema genérico onde a razão de massa entre o primário e o secundário é $\mu_2 = 0.3$.

A partir de uma grade inicial: $C_J \in [-4; 3]$ com $x_0 \in [-2; 5]$, conseguimos encontrar trechos de várias famílias de OPSSs retrógradas, cujas ordem de ressonância variam de 1 a 11, utilizando o método GridSearch. Na Figura 3.37, temos um diagrama C_J X x_0 com os resultados dessa busca, nele a ordem de ressonância das famílias e suas estabilidades horizontais estão sendo indicados por meio de diferentes cores.

Na Figura 3.37 temos apenas as famílias de OPSSs retrógradas em ambos os referenciais sinódico e inercial. As famílias denotadas por $1i$, $1ii$, $2i$, $2ii$, $2iii$, $3i$, $6ii$ e $9i$ serão melhor exploradas ao longo dessa seção e referenciadas com essa nomenclatura.

Nesse sistema, encontramos algumas bifurcações com multiplicação de período cujas famílias serão analisadas em detalhes na Subseção 3.7.2.

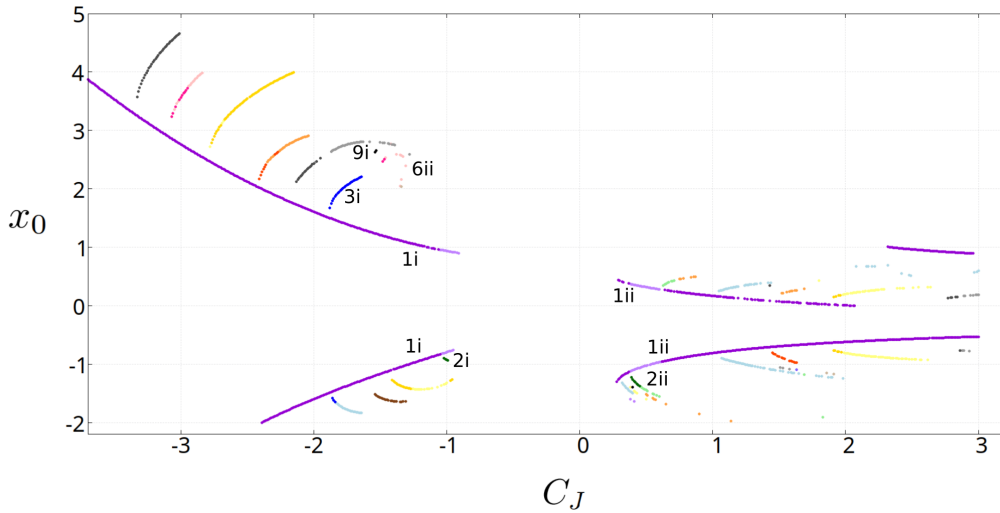


Figura 3.37: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente das famílias no sistema com $\mu_2 = 0.3$. A abreviação 'hor.' significa 'horizontalmente'.

3.7.1 Famílias retrógradas coorbitais e circulares

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular externa retrógrada em $C_J \approx -1.0388$ e terminam perto de $C_J \approx -0.88253$ ($x_0 \approx -0.35856$) após se juntarem em uma só família a partir de $C_J \approx -0.74080$. Chamaremos de família *I* a família ressonante que bifurca da família circular inicialmente horizontalmente estável e de família *II* a que bifurca inicialmente horizontalmente instável.

A família ressonante *I* é inteira horizontalmente estável tendo pequenos pontos de instabilidade horizontal em $C_J \approx -1.0388$ e $C_J \approx -0.74080$ onde bifurca da circular e se encontra com o outro ramo da ressonante, respectivamente, e é verticalmente estável no intervalo $C_J \leq -0.96520$. Já a família ressonante *II* é horizontalmente estável no intervalo $-0.74080 \leq C_J \leq -0.58923$ onde $-0.60723 \leq x_0 \leq -0.44961$ e é verticalmente estável no intervalo $C_J < -0.99889$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas família estão descritos na Tabela E.38 disponível no Apêndice E e na Figura 3.38 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular interna retrógrada em $C_J \approx 0.37784$. Chamaremos de família *III* a família ressonante que bifurca da família circular com os valores maiores de x_0 e de família *IV* a que bifurca com os valores

menores de x_0 . Enquanto a família *III* termina por colisão com o primário perto de $C_J \approx 1.7324$ com $x_0 \approx -2.0429$, a outra termina por colisão com o secundário perto de $C_J \approx 2.3130$ com $x_0 \approx -2.3140$.

A família ressonante *III* é horizontalmente estável no intervalo $0.37784 \leq C_J \leq 0.45370$ onde $-1.3754 \leq x_0 \leq -1.1249$ e é verticalmente estável nos intervalos $C_J \leq 0.46706$. Já a família ressonante *IV* é horizontalmente estável no intervalo $0.27486 \leq C_J \leq 0.37783$ onde $-1.3535 \leq x_0 \leq -1.1248$ e é verticalmente instável no intervalo $0.27529 \leq C_J \leq 1.8762$ onde $-2.2409 \leq x_0 \leq -1.3381$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.39 disponível no Apêndice E e na Figura 3.38 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

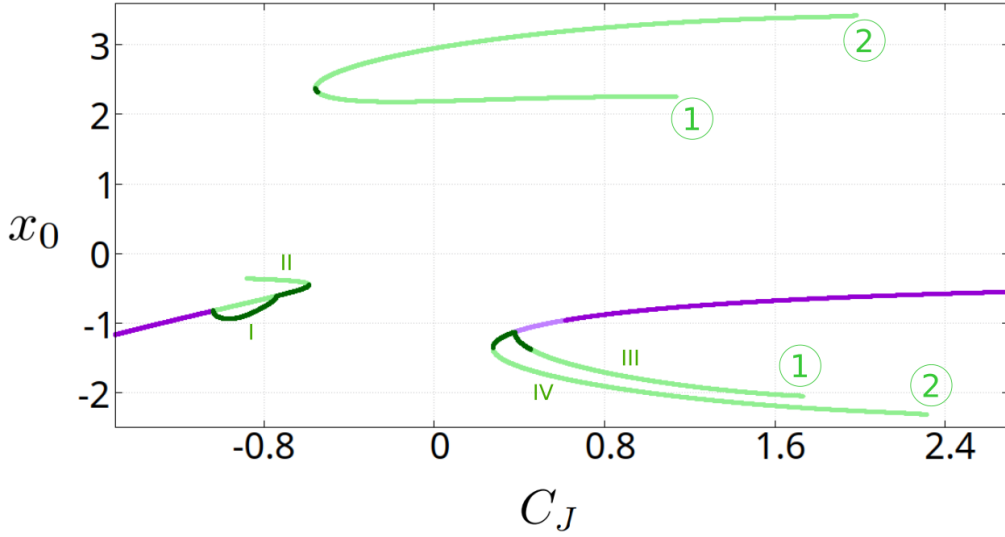


Figura 3.38: Diagrama característico $C_J \times x_0$ no sistema com $\mu_2 = 0.3$ da família retrógrada coorbital excêntrica (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) e das famílias retrógradas circulares (violeta para OPSs horizontalmente estáveis e lilás para horizontalmente instáveis) e das coorbitais retrógradadas (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) que bifurcam delas. Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o primário (corpo de massa M_1) ou com o secundário (corpo de massa M_2), respectivamente.

A família coorbital excêntrica retrógrada é limitada por colisão com o primário próximo a $C_J \approx 1.1372$ (onde $x_0 \approx 2.2506$) e por colisão com o secundário próximo a $C_J \approx 1.9829$ (onde $x_0 \approx 3.4204$); existindo nos intervalos $C_J \in [-0.55823; 1.9829]$ e $x_0 \in [2.1810; 3.4204]$.

Esta família possui um pequeno trecho de estabilidade horizontal no intervalo $-0.55823 \leq C_J \leq -0.54759$ onde $2.3188 \leq x_0 \leq 2.3784$. Ainda, ela é verticalmente instável no intervalo $-0.46745 < C_J < 1.6626$ onde $2.5914 < x_0 < 3.3880$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessa família estão descritos

na Tabela E.40 disponível no Apêndice E e na Figura 3.38 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

3.7.2 Bifurcações com multiplicação de período no sistema com $\mu_2 = 0.3$

Dessa forma, analisaremos aqui 3 famílias de OPSs retrógradas no sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.3$: duas delas bifurcam da família retrógrada com ressonância 1/-2 (famílias 6i e 9i bifurcam de 3i na Figura 3.37, respectivamente).

- A família 3i é composta por OPSs de ressonância 1/-2 com multiplicidade $M = 1$. Essa família existe a partir de $C_J \approx -1.8841$ até $C_J \approx -0.62775$. Ela tem nove pontos de troca de estabilidade horizontal e sete pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.41 disponível no Apêndice E.
- A família 6i é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 2$ (isto é, ocorreu uma duplicação de período). Essa família bifurca da família retrógrada com ressonância 1/-2 em $C_J \approx -1.4887$ (em um ponto na família 3i onde $K2D \approx -2.0002$) e existe até $C_J \approx -1.3073$. Ela tem oito pontos de troca de estabilidade horizontal e quatro pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.42 disponível no Apêndice E.
- A família 9i é composta por OPSs tem multiplicidade $M = 3$ (isto é, ocorreu uma triplicação de período). Essa família bifurca da família retrógrada com ressonância 1/-2 em $C_J \approx -1.5434$ (em um ponto na família 3i onde $K2D \approx -0.99997$) e existe até $C_J \approx -1.2848$. Ela tem nove pontos de troca de estabilidade horizontal e dez pontos de troca de estabilidade vertical que serão descritos na Tabela E.43 disponível no Apêndice E.

Veja na Figura 3.39 um diagrama característico com a família retrógrada com ressonância 1/-2 e as famílias com multiplicação de período que bifurcam dela.

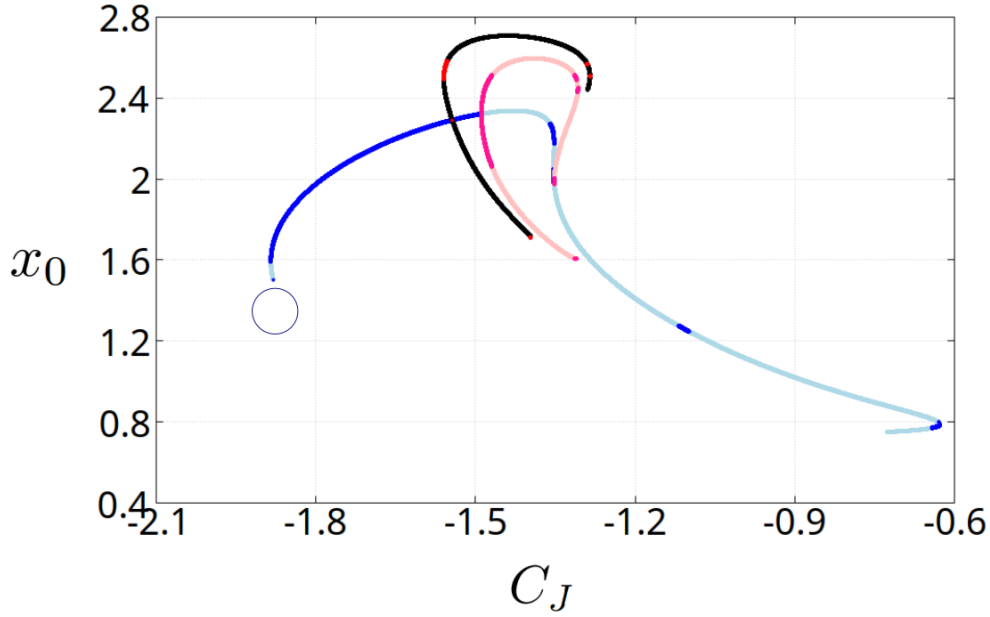


Figura 3.39: Diagrama $C_J X x_0$ no sistema com $\mu_2 = 0.3$ das famílias com multiplicação $M = 2$ (rosa escuro para OPSs horizontalmente estáveis e rosa claro para horizontalmente instáveis) e $M = 3$ (vermelho para OPSs horizontalmente estáveis e preto para horizontalmente instáveis) que bifurcam da família retrógrada com ressonância $1/-2$ (azul escuro para OPSs horizontalmente estáveis e azul claro para horizontalmente instáveis). O círculo simboliza que a família de ressonância $1/-2$ bifurcou da família circular externa retrógrada naquele ponto.

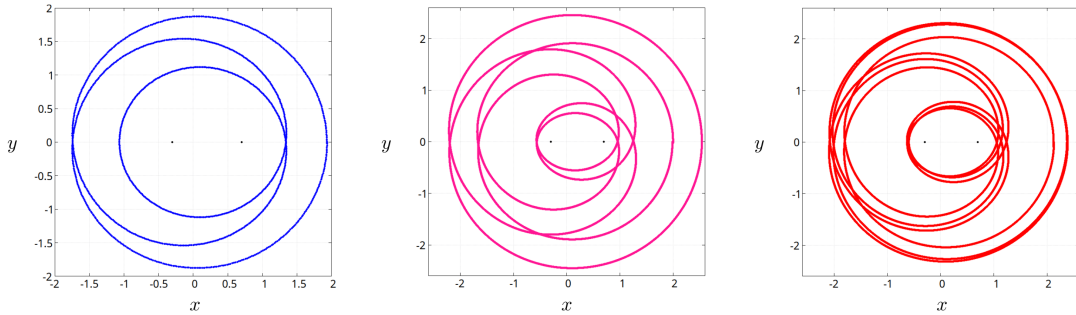


Figura 3.40: Exemplo (no referencial sinódico) de OPSs retrógradas da família retrógrada com ressonância $1/-2$ (azul escuro) e das famílias com multiplicação $M = 2$ (rosa escuro) e $M = 3$ (vermelho) que bifurcam dela. À esquerda em azul escuro: OPS com $x_0 = 1.9344$, $\dot{y}_0 = -2.5829$ e $C_J = -1.8170$. No meio em rosa escuro: OPS com $x_0 = 1.9874$, $\dot{y}_0 = -2.5463$ e $C_J = -1.4557$. À direita em vermelho: OPS com $x_0 = 2.1281$, $\dot{y}_0 = -2.6538$ e $C_J = -1.5174$. Primário em $(0; -0.3)$ e secundário em $(0; 0.7)$ representados por pontos pretos nas figuras.

3.7.3 Famílias horizontal e verticalmente estáveis

Veja na Figura 3.41 as famílias de OPSs que são horizontal e verticalmente estáveis nesse sistema.

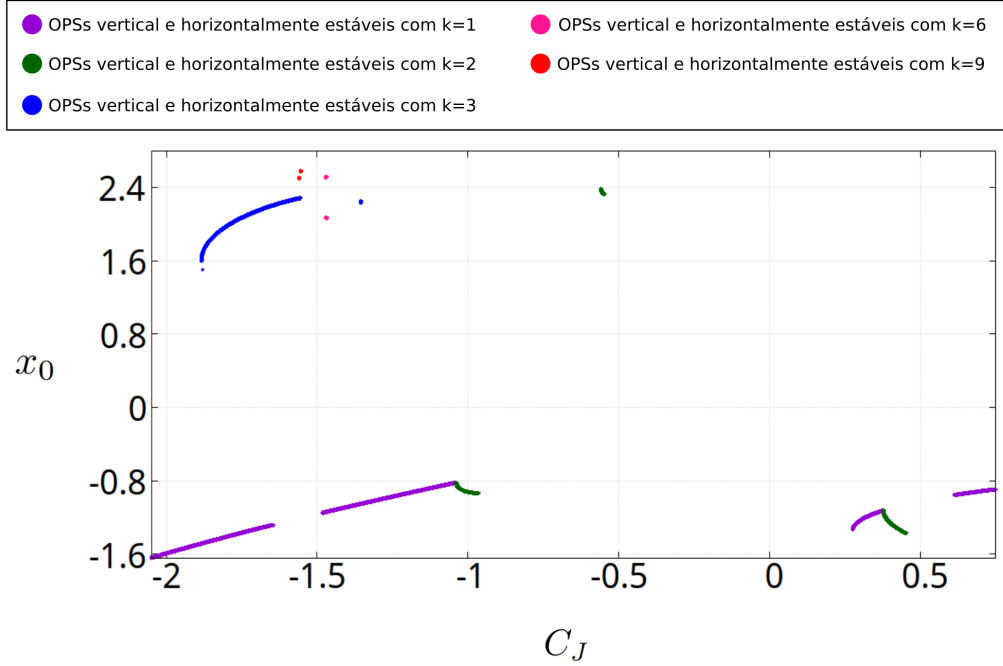


Figura 3.41: Diagrama característico $C_J \times x_0$ dos trechos horizontal e verticalmente estáveis das famílias circulares ($k = 1$), famílias coorbitais ($k = 2$), famílias com ordem de ressonância $k = 3$, famílias com $k = 6$ e famílias com $k = 9$ no sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.3$ analisadas em detalhes nesse trabalho.

3.8 As famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.4$

Aqui, vamos considerar um sistema genérico onde a razão de massa entre o primário e o secundário é $\mu_2 = 0.4$.

A partir de uma grade inicial: $C_J \in [-4; 4]$ com $x_0 \in [-2; 4]$, conseguimos encontrar trechos de várias famílias de OPSs retrógradas, cujas ordem de ressonância variam de 1 a 11, utilizando o método GridSearch. Na Figura 3.42, temos um diagrama $C_J \times x_0$ com os resultados dessa busca, nele a ordem de ressonância das famílias e suas estabilidades horizontais estão sendo indicados por meio de diferentes cores.

Na Figura 3.42 temos apenas as famílias de OPSs retrógradas em ambos os referenciais sinódico e inercial. As famílias denotadas por $1i$, $1ii$ e $2ii$ serão melhor exploradas ao longo dessa seção e referenciadas com essa nomenclatura.

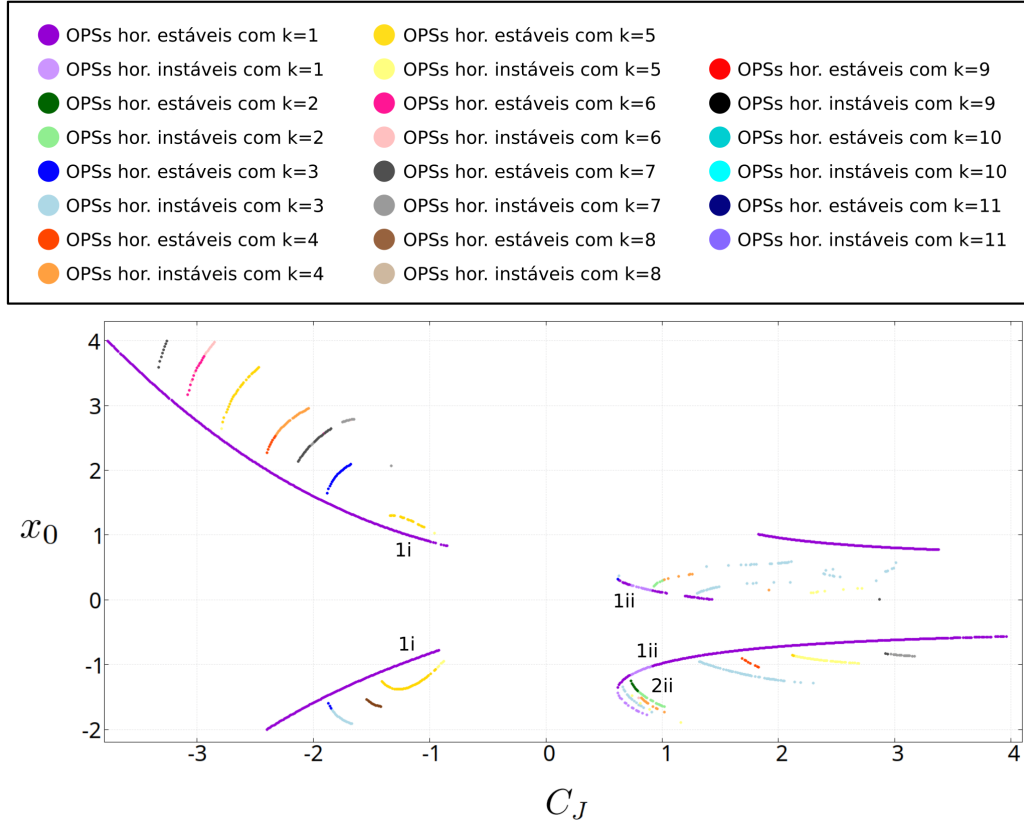


Figura 3.42: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente das famílias no sistema com $\mu_2 = 0.4$. A abreviação 'hor.' significa 'horizontalmente'.

3.8.1 Famílias retrógradas coorbitais e circulares

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular interna retrógrada em $C_J \approx 0.72057$. Chamaremos de família *I* a família ressonante que bifurca da família circular com os valores maiores de x_0 e de família *II* a que bifurca com os valores menores de x_0 . Enquanto a família *I* termina por colisão com o primário perto de $C_J \approx 2.0120$ com $x_0 \approx -2.0374$, a outra termina por colisão com o secundário próximo a $C_J \approx 2.1108$ com $x_0 \approx -2.2983$.

A família ressonante *I* é horizontalmente estável no intervalo $0.72057 \leq C_J \leq 0.79580$ onde $-1.4128 \leq x_0 \leq -1.1667$ e é verticalmente estável no intervalo $C_J \leq 0.77783$ onde $x_0 \geq -1.3813$. Já a família ressonante *II* é horizontalmente estável no intervalo $0.61697 \leq C_J \leq 0.72057$ onde $-1.3956 \leq x_0 \leq -1.1666$ e é verticalmente estável nos intervalos $C_J \leq 0.62532$ e $C_J \geq 1.6295$ onde $x_0 \geq -1.4639$ e $x_0 \leq -2.1349$, respectivamente. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.45 disponível no Apêndice E.

Na Figura 3.43 temos um diagrama característico $C_J X x_0$ indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal das famílias circulares interna e externa retrógradas e da família coorbital retrógrada que bifurca da circular interna.

Por outro lado, não foi possível encontrar famílias ressonantes coorbitais bifur-

cando da família circular externa retrógrada. Como comentamos no Capítulo 1, bifurcações com duplicação de período acontecem em pontos onde $K2D = -2$. As bifurcações das famílias circulares nas famílias ressonantes coorbitais nada mais é do que bifurcações de duplicação de período.

A família circular externa retrógrada não possui uma órbita onde $K2D = -2$ e, portanto, a família coorbital retrógrada que deveria bifurcar dela não existe. Veja na Figura 3.44 um diagrama $C_J \times K2D$ da família circular externa retrógrada.

Perceba, também com auxílio dos pontos descritos na Tabela E.44 disponível no Apêndice E, que a família circular externa retrógrada é horizontalmente estável para valores de $x_0 \geq -0.53570$ e termina próximo a $C_J \approx -0.95813$ com $x_0 \approx -0.44897$.

Nessa sistema, também não encontramos a família coorbital excêntrica retrógrada. Apesar de a vemos no diagrama da Figura 3.42, essa família é retrógrada no referencial sinódico, mas prógrada no referencial do primário e, portanto, optamos por não analisá-la em detalhes.

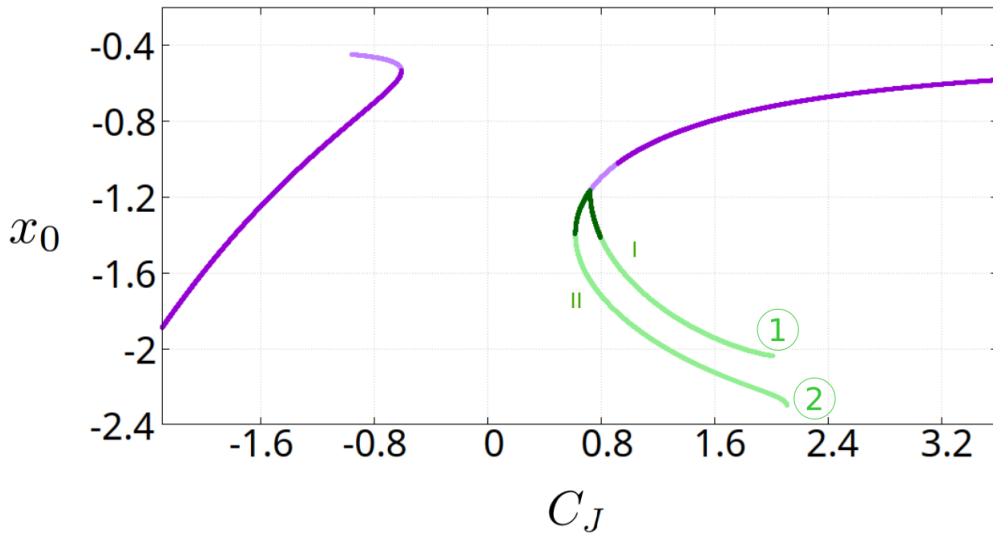


Figura 3.43: Diagrama característico $C_J \times x_0$ no sistema com $\mu_2 = 0.4$ das famílias retrógradas circulares (violeta para OPs horizontalmente estáveis e lilás para horizontalmente instáveis) e das coorbitais retrógradas (verde escuro para OPs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) que bifurcam delas. Os símbolos 1 e 2 na figura indicam os extremos onde as famílias terminam em colisão com o primário (corpo de massa M_1) ou com o secundário (corpo de massa M_2), respectivamente.

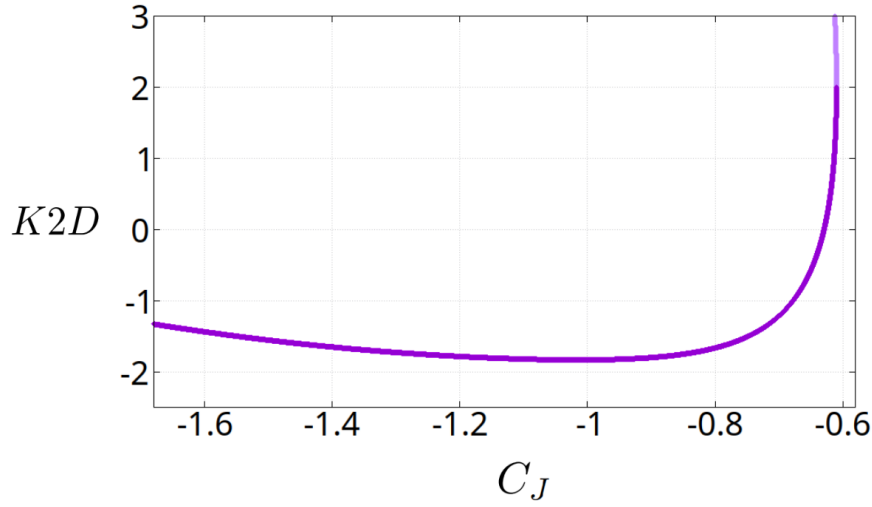


Figura 3.44: Diagrama característico $C_J \times K2D$ da família retrógrada circular externa (violeta para OPSs horizontalmente estáveis e lilás para horizontalmente instáveis) no sistema com $\mu_2 = 0.4$.

3.8.2 Famílias horizontal e verticalmente estáveis

Veja na Figura 3.45 as famílias de OPSs que são horizontal e verticalmente estáveis nesse sistema.

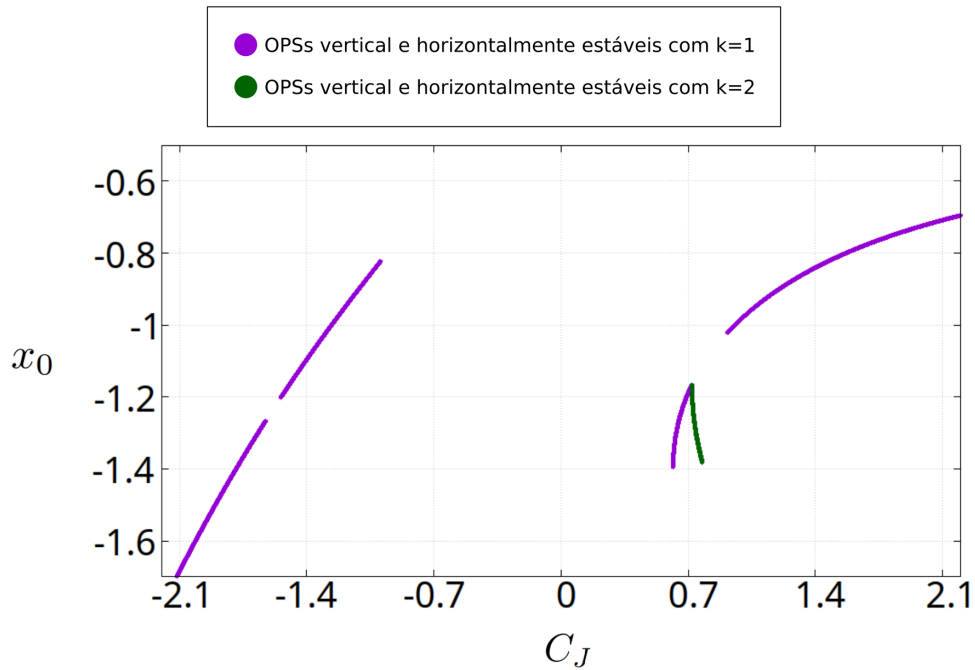


Figura 3.45: Diagrama característico $C_J \times x_0$ dos trechos horizontal e verticalmente estáveis das famílias circulares ($k = 1$) e famílias coorbitais ($k = 2$) no sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.4$ analisadas em detalhes nesse trabalho.

3.9 As famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.5$ - Problema de Copenhaga

Aqui, vamos considerar um sistema genérico onde o primário e o secundário são corpos de massas iguais $M_1 = M_2$, isto é, a razão de massa $\mu_2 = \frac{M_2}{M_1+M_2} = \frac{M_2}{2 \cdot M_2}$ entre o primário e o secundário é $\mu_2 = 0.5$. Esse caso particular é conhecido também como *Problema de Copenhaga* e é abordado em trabalhos como [30], [31] e [32].

A partir de uma grade inicial: $C_J \in [-4; 1.5]$ com $x_0 \in [-1; 6]$, conseguimos encontrar trechos de várias famílias de OPSs retrógradas, cujas ordem de ressonância variam de 1 a 11, utilizando o método GridSearch. Na Figura 3.46, temos um diagrama $C_J \times x_0$ com os resultados dessa busca, nele a ordem de ressonância das famílias e suas estabilidades horizontais estão sendo indicados por meio de diferentes cores.

Na Figura 3.46 temos apenas as famílias de OPSs retrógradas em ambos os referenciais sinódico e inercial. As famílias denotadas por *1i*, *1ii* e *2ii* serão melhor exploradas ao longo dessa seção e referenciadas com essa nomenclatura.

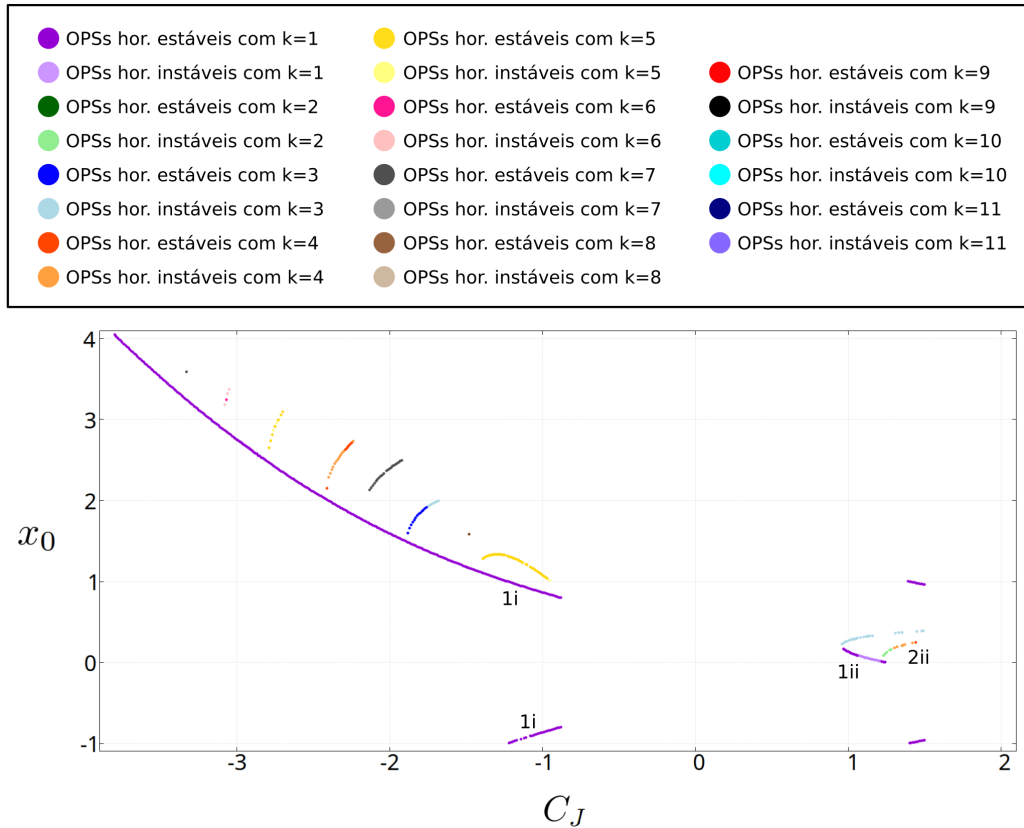


Figura 3.46: Diagrama $C_J \times x_0$ obtido inicialmente das famílias no sistema com $\mu_2 = 0.5$. A abreviação 'hor.' significa 'horizontalmente'.

3.9.1 Famílias retrógradas coorbitais e circulares

Duas famílias ressonantes retrógradas bifurcam da circular interna retrógrada em $C_J \approx 1.2169$. Chamaremos de família *I* a família ressonante que bifurca da família circular com os valores menores de x_0 e de família *II* a que bifurca com os valores maiores de x_0 . Enquanto a família *I* termina perto de $C_J \approx 1.9270$ com $x_0 \approx 0.34599$, a família *II* termina perto de $C_J \approx 1.9075$ com $x_0 \approx 0.45965$.

A família ressonante *I* é horizontalmente estável no intervalo $1.4206 \leq C_J \leq 1.5198$ onde $0.24142 \leq x_0 \leq 0.27293$ e é verticalmente estável no intervalo $C_J \leq 1.2216$. Já a família ressonante *II* é horizontalmente estável no intervalo $0.95555 \leq C_J \leq 1.0594$ onde $0.088475 \leq x_0 \leq 0.20564$ e é verticalmente instável no intervalo $1.0429 < C_J < 1.3449$ onde $0.29211 < x_0 < 0.36785$. Os pontos de troca de estabilidade horizontal e vertical dessas famílias estão descritos na Tabela E.47 disponível no Apêndice E e na Figura 3.47 temos um diagrama característico indicando os trechos de estabilidade e de instabilidade horizontal.

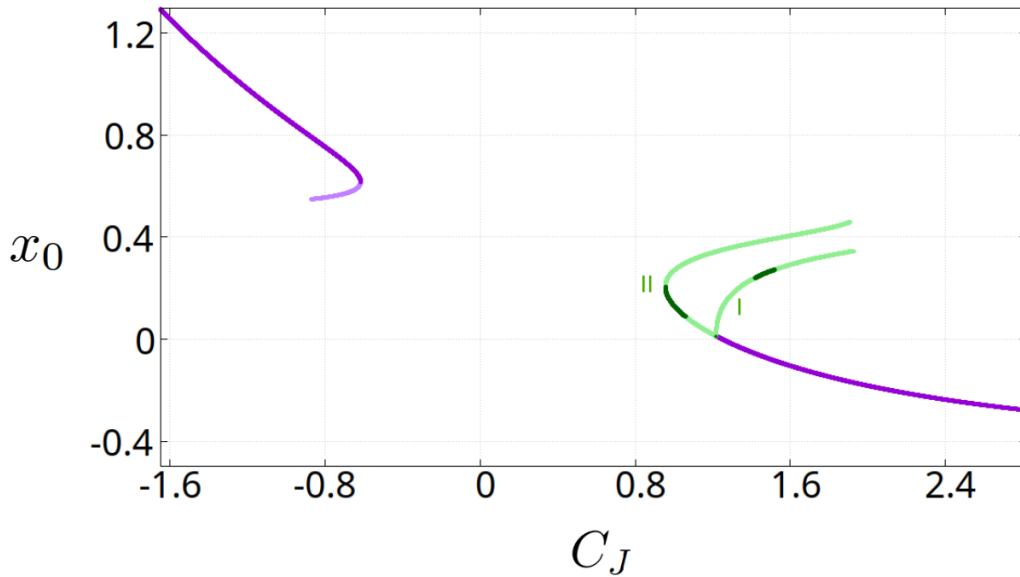


Figura 3.47: Diagrama característico $C_J \times x_0$ no sistema com $\mu_2 = 0.5$ das famílias retrógradas circulares (violeta para OPSs horizontalmente estáveis e lilás para horizontalmente instáveis) e das coorbitais retrógradas (verde escuro para OPSs horizontalmente estáveis e verde claro para horizontalmente instáveis) que bifurcam delas.

Por outro lado, a família circular externa retrógrada não possui uma órbita onde $K2D = -2$ e, portanto, a família coorbital retrógrada que deveria bifurcar dela não existe; assim como discutimos na Seção 3.8.1. Veja na Figura 3.48 um diagrama $C_J \times K2D$ da família circular externa retrógrada.

Perceba, também com auxílio dos pontos descritos na Tabela E.46 disponível no Apêndice E, que a família circular externa retrógrada é horizontalmente estável

para valores de $x_0 > 0.61701$ e conseguimos continuá-la até $C_J \approx -0.87207$ com $x_0 \approx 0.54909$.

Nessa sistema, não encontramos a família coorbital excêntrica retrógrada.

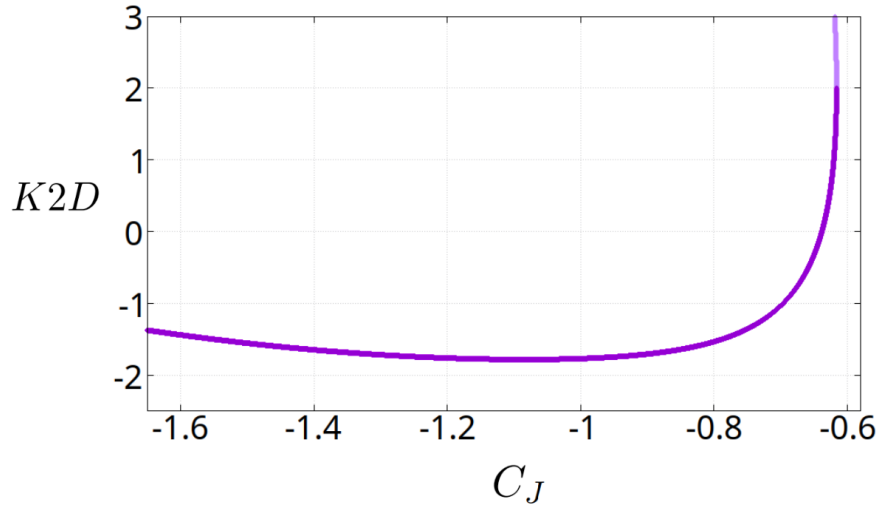


Figura 3.48: Diagrama característico $C_J \times K2D$ da família retrógrada circular externa (violeta para OPSs horizontalmente estáveis e lilás para horizontalmente instáveis) no sistema com $\mu_2 = 0.5$.

3.9.2 Famílias horizontal e verticalmente estáveis

Veja na Figura 3.49 as famílias de OPSs que são horizontal e verticalmente estáveis nesse sistema.

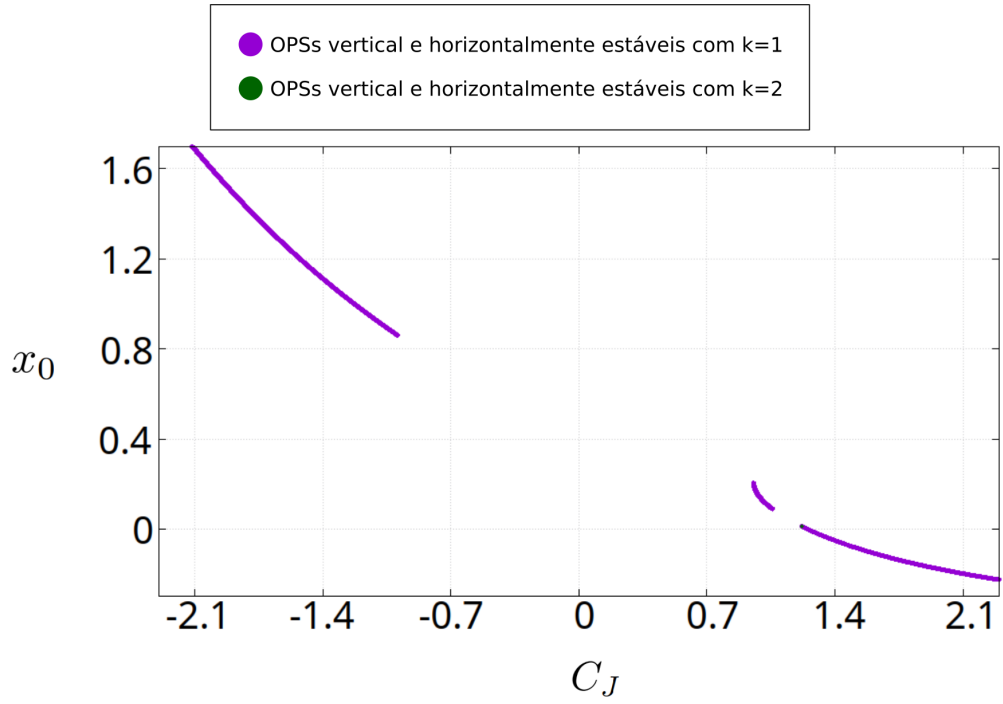


Figura 3.49: Diagrama característico C_J X x_0 dos trechos horizontal e verticalmente estáveis das famílias circulares ($k = 1$) e famílias coorbitais ($k = 2$) no sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.5$ analisadas em detalhes nesse trabalho.

Capítulo 4

Conclusão

Conseguimos encontrar diversas famílias de OPSs retrógradas ao analisar o movimento do terceiro corpo (com massa desprezível) em nove diferentes sistemas no PCR3C, encontrando diversas relações de ressonância retrógradas. Como citado anteriormente, exploramos quatro sistemas binários específicos (Sol-Netuno, cuja razão de massa é $\mu_2 = 5.15463 \times 10^{-5}$; Sol-Júpiter, cuja razão de massa aproximada é $\mu_2 = 0.001$; Terra-Lua, cuja razão de massa é $\mu_2 = 0.0121506683$ e Plutão-Caronte, cuja razão de massa é $\mu_2 = 0.1056338028$), além de outros cinco sistemas binários genéricos com certo valor de razão de massa ($\mu_2 = 0.04; 0.1; 0.3; 0.4; 0.5$).

As três famílias em ressonância coorbital retrógrada foram encontradas nos sistemas com razão de massa $\mu_2 = 5.15463 \times 10^{-5}$ (sistema Sol-Netuno), $\mu_2 = 0.001$ (sistema Sol-Júpiter), $\mu_2 = 0.0121506683$ (sistema Terra-Lua), $\mu_2 = 0.04$, $\mu_2 = 0.1$, $\mu_2 = 0.1056338028$ (sistema Plutão-Caronte) e $\mu_2 = 0.3$. Nos sistemas com razão de massa $\mu_2 = 0.4$ e $\mu_2 = 0.5$ não conseguimos encontrar a família coorbital retrógrada que bifurcaria da circular externa retrógrada e nem a família coorbital excêntrica retrógrada.

Nos sistemas com razão de massa $\mu_2 = 0.04$, $\mu_2 = 0.1$ e $\mu_2 = 0.1056338028$ (sistema Plutão-Caronte), encontramos bifurcações de multiplicação de período surgindo das famílias coorbitais excêntricas retrógradas e gerando famílias retrógradas com multiplicidade $M = 2, 3, 4, 5, 6$; veja a relação na Tabela 4.1. Além disso, nos sistemas com razão de massa $\mu_2 = 0.1$, $\mu_2 = 0.1056338028$ (sistema Plutão-Caronte) e $\mu_2 = 0.3$, encontramos bifurcações de multiplicação de período surgindo das famílias retrógradas com ressonância 1/-2 e gerando famílias retrógradas com multiplicidade $M = 2, 3$; veja a relação na Tabela 4.2.

M=2	M=3	M=4	M=5	M=6
$\mu_2 = 0.1$ Plutão-Caronte	$\mu_2 = 0.04$ $\mu_2 = 0.1$ Plutão-Caronte	$\mu_2 = 0.04$	$\mu_2 = 0.04$ $\mu_2 = 0.1$ Plutão-Caronte	$\mu_2 = 0.04$

Tabela 4.1: Tabela descrevendo em quais sistemas encontramos famílias com multiplicidade maior que 1 geradas a partir de bifurcações com multiplicação de período nas famílias coorbitais excêntricas retrógradas.

M=2	M=3
$\mu_2 = 0.04$	$\mu_2 = 0.04$
$\mu_2 = 0.1$	$\mu_2 = 0.1$
Plutão-Caronte	$\mu_2 = 0.3$
$\mu_2 = 0.3$	

Tabela 4.2: Tabela descrevendo em quais sistemas encontramos famílias com multiplicidade maior que 1 geradas a partir de bifurcações com multiplicação de período nas famílias retrógradas em ressonância 1/-2.

Referências

- [1] M. H. M. Morais and F. Namouni. Retrograde resonance in the planar three-body problem. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 117:405-421, 2013.
- [2] M. H. M. Morais and F. Namouni. Asteroids in retrograde resonance with Jupiter and Saturn. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 436, 2013.
- [3] M. H. M. Morais and F. Namouni. Reckless orbiting in the Solar System. *Nature (News & Views)*, Vol. 543, 7647, pp. 635-636, 2017.
- [4] J. D. Hadjidemetriou. Periodic orbits in gravitacional systems. In *Chaotic Worlds: From Order to Disorder in Gravitational N-Body Dynamical Systems*, Grécia, 2006.
- [5] P. Murdin. *Encyclopedia of astronomy & astrophysics*. CRC Press, 2001.
- [6] C. D. Murray and S. F. Dermott. *Solar system dynamics*. Cambridge University Press, 1999.
- [7] K. R. Meyer and G. R. Hall. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer-Verlag, 1992.
- [8] M. Hénon. A family of periodic solutions of the planar three-body problem, and their stability. *Celestial mechanics*, 13(3):267–285, 1976.
- [9] G. Voyatzis and A. Mourtetzikoglou. Periodic motion and stability of gravitational planar triple systems. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 2019.
- [10] H. Goldstein, C.P. Poole Jr, and J.L. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson, 3 edition, 2002.
- [11] Y. Wang, E. Athanassoula, P. Patsis, and Shude Mao. Periodic orbits of multiplicity higher than one in an N-body barred galaxy potential. *Astronomy & Astrophysics*, 2022.
- [12] D. A. Sadovskii and J. B. Delos. Bifurcation of the periodic orbits of Hamiltonian systems: An analysis using normal form theory. *PHYSICAL REVIEW E*, 54, 1996.

- [13] R. A. Broucke. Stable orbits of planets of a binary star system in the three-dimensional restricted problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 81:321–341, 2001.
- [14] M. H. M. Morais and F. Namouni. Periodic orbits of the retrograde coorbital problem. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 490:3799–3805, 2019.
- [15] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo, and H. G. Wetzler. *Álgebra linear*. Editora HARBRA ltda, 3^a edition, 1980.
- [16] G. A. Caritá, A. C. Signor, M. H. M. Morais, R. E. Carvalho, and A. F. B. A. Prado. Retrograde resonances at high mass ratio in the circular restricted 3-body problem. *Nonlinear Dynamics*, 2023.
- [17] C. Zagouras and V. V Markellos. Axisymmetric periodic orbits of the restricted problem in three dimensions. *Astronomy and Astrophysics*, 59:79–89, 1977.
- [18] M. H. M. Morais and C. A. Giuppone. Stability of prograde and retrograde planets in circular binary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 424, 2012.
- [19] B. Quarles, G. LI, V. Kostov, and N. Haghighipour. Orbital stability of circumstellar planets in binary systems. *The Astronomical Journal*, 159:80, 2020.
- [20] T. Gallardo, C. Beaugé, and C.A. Giuppone. Semianalytical model for planetary resonances. *Astronomy and Astrophysics*, 646, A148, 2021.
- [21] T. Kotoulas and G. Voyatzis. Planar retrograde periodic orbits of the asteroids trapped in two-body mean motion resonances with jupiter. *Planetary and Space Science*, 2020.
- [22] T. Kotoulas and G. Voyatzis. Retrograde periodic orbits in 1/2, 2/3 and 3/4 mean motion resonances with Neptune. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2020.
- [23] T. Kotoulas, M. H. M. Morais, and G. Voyatzis. The phase space structure of retrograde mean motion resonances with Neptune: the 4/5, 7/9, 5/8 and 8/13 cases. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 134 (6), 52, 2022.
- [24] A. C. Signor, G. A. Caritá, and M. H. M. Morais. A numerical study of fourth-and fifth-order retrograde mean motion resonances in planetary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2023.
- [25] A. Elipe, A. Abad, M. Arribas, A. F. S. Ferreira, and R. V. Moraes. Symmetric periodic orbits in the dipole-segment for two equal masses. *The Astronomical Journal*, page 161:274 (13pp), 2021.

- [26] P. Deuffhard and F. Bornemann. *Scientific computing with ordinary differential equations*, volume 42. Springer Science & Business Media, 2012.
- [27] R. Bulirsch and J. Stoer. Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods. *Numerische Mathematik*, 8(1):1–13, 1966.
- [28] M. H. M. Morais, M. J. Fassis, and A. C. Signor. Periodic orbits and capture in the retrograde coorbital resonance with Neptune. *Astrophysics and Space Science*, 370:24, 2025.
- [29] A. Abad, M. Arribas, M. Palacios, and A. Elipe. Evolution of the characteristic curves in the restricted three-body problem in terms of the mass parameter. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 135:7, 2023.
- [30] E. Strömberg. Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps. *Bulletin Astronomique*, vol. 9, pp. 87-130, 9:87–130, 1933.
- [31] M. Michalodimitrakis. A contribution to the three-dimensional Copenhagen problem. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 76, no. 1, June 1979, p. 6-14., 76: 6–14, 1979.
- [32] L. Benet, D. Trautmann, and T.H. Seligman. Chaotic scattering in the restricted three-body problem I. the Copenhagen problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 66:203–228, 1996.

Apêndice A

Cálculo das matrizes Jacobianas

Para que fosse possível utilizar a matriz de monodromia e calcular os índices de estabilidade é necessário encontrar a matriz Jacobiana para as equações de movimento (1.26) do PR3C bidimensional.

O primeiro passo é reescrever o sistema de duas equações diferenciais de segunda ordem (1.26) como um sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} f_1 = \dot{x} \\ f_2 = \dot{y} \\ \dot{f}_1 = - \left[\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3} \right] + 2nf_2 + n^2x \\ \dot{f}_2 = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y - 2nf_1 + n^2y \end{cases} \quad (A.1)$$

Definindo $U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$ e assumindo $n = 1$, reescrevemos o sistema como:

$$\begin{cases} f_1 = \dot{x} \\ f_2 = \dot{y} \\ \dot{f}_1 = \frac{\partial U}{\partial x} + 2f_2 \\ \dot{f}_2 = \frac{\partial U}{\partial y} - 2f_1 \end{cases} \quad (A.2)$$

Vamos, então, encontrar a matriz Jacobiana desse sistema. Denotaremos:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{pmatrix}.$$

Na primeira linha, temos

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}} = 1 ; \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} = 0.$$

Na segunda linha, temos

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}} = 0 ; \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}} = 1.$$

Na terceira linha, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= \frac{\partial \dot{f}_1}{\partial x} = U_{xx} + \frac{\partial 2\dot{y}}{\partial x} = U_{xx} ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{f}_1}{\partial y} = U_{xy} + \frac{\partial 2\dot{y}}{\partial y} = U_{xy} ; \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= \frac{\partial \dot{f}_1}{\partial \dot{x}} = U_{x\dot{x}} + \frac{\partial 2\dot{y}}{\partial \dot{x}} = 0 ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{\partial \dot{f}_1}{\partial \dot{y}} = U_{x\dot{y}} + \frac{\partial 2\dot{y}}{\partial \dot{y}} = 2\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}} = 2.\end{aligned}$$

Na quarta linha, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} &= \frac{\partial \dot{f}_2}{\partial x} = U_{yx} - \frac{\partial 2\dot{x}}{\partial x} = U_{yx} ; \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{f}_2}{\partial y} = U_{yy} - \frac{\partial 2\dot{x}}{\partial y} = U_{yy} ; \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_3} &= \frac{\partial \dot{f}_2}{\partial \dot{x}} = U_{y\dot{x}} - \frac{\partial 2\dot{x}}{\partial \dot{x}} = -2\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}} = -2 ; \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = \frac{\partial \dot{f}_2}{\partial \dot{y}} = U_{y\dot{y}} - \frac{\partial 2\dot{x}}{\partial \dot{y}} = 0.\end{aligned}$$

Assim, a Jacobiana desse sistema será da forma

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{yx} & U_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

com U_{xx} , U_{xy} , U_{yx} e U_{yy} que serão calculados abaixo (equações (A.13), (A.14), (A.15) e (A.16), respectivamente).

Agora, vamos encontrar as derivadas parciais de $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$. Vale lembrar que $r_1 = \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2}$ e $r_2 = \sqrt{(x - \mu_1)^2 + y^2}$.

As derivadas parciais de $\frac{1}{r_1}$ e $\frac{1}{r_2}$ em relação a x são

$$\frac{\partial(1/r_1)}{\partial x} = -\frac{[(x + \mu_2)^2 + y^2]^{-\frac{3}{2}}}{2} \cdot (2x + 2\mu_2) \Rightarrow \frac{\partial(1/r_1)}{\partial x} = -\frac{x + \mu_2}{r_1^3} \quad (\text{A.3})$$

e

$$\frac{\partial(1/r_2)}{\partial x} = -\frac{[(x - \mu_1)^2 + y^2]^{-\frac{3}{2}}}{2} \cdot (2x - 2\mu_1) \Rightarrow \frac{\partial(1/r_2)}{\partial x} = -\frac{x - \mu_1}{r_2^3} . \quad (\text{A.4})$$

Logo, a derivada parcial U_x é

$$\begin{aligned}U_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x^2 + y^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu_1}{r_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu_2}{r_2} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x^2 + y^2}{2} \right] + \mu_1 \frac{\partial(1/r_1)}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial(1/r_2)}{\partial x} = x + \mu_1 \left(-\frac{x + \mu_2}{r_1^3} \right) + \mu_2 \left(-\frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow U_x = x - \frac{(x + \mu_2)}{r_1^3} \mu_1 - \frac{(x - \mu_1)}{r_2^3} \mu_2 . \quad (\text{A.5})\end{aligned}$$

As derivadas parciais de $\frac{1}{r_1}$ e $\frac{1}{r_2}$ em relação a y são

$$\frac{\partial(1/r_1)}{\partial y} = -\frac{[(x + \mu_2)^2 + y^2]^{-\frac{3}{2}}}{2} \cdot 2y \Rightarrow \frac{\partial(1/r_1)}{\partial y} = -\frac{y}{r_1^3} \quad (\text{A.6})$$

e

$$\frac{\partial(1/r_2)}{\partial y} = -\frac{[(x - \mu_1)^2 + y^2]^{-\frac{3}{2}}}{2} \cdot 2y \Rightarrow \frac{\partial(1/r_2)}{\partial y} = -\frac{y}{r_2^3} . \quad (\text{A.7})$$

Logo, a derivada parcial U_y é

$$\begin{aligned}
U_y &= \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x^2+y^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu_1}{r_1} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu_2}{r_2} \right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x^2+y^2}{2} \right] + \mu_1 \frac{\partial(1/r_1)}{\partial y} + \mu_2 \frac{\partial(1/r_2)}{\partial y} = y + \mu_1 \left(-\frac{y}{r_1^3} \right) + \mu_2 \left(-\frac{y}{r_2^3} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow U_y = y - \frac{y}{r_1^3} \mu_1 - \frac{y}{r_2^3} \mu_2 .
\end{aligned} \tag{A.8}$$

As derivadas parciais de r_1^3 e r_2^3 em relação a x e a y são

$$\frac{\partial r_1^3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(x + \mu_2)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{\partial r_1^3}{\partial x} = 3r_1(x + \mu_2) ; \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial r_1^3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [(x + \mu_2)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{\partial r_1^3}{\partial y} = 3yr_1 ; \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial r_2^3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(x - \mu_1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{\partial r_2^3}{\partial x} = 3r_2(x - \mu_1) ; \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial r_2^3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [(x - \mu_1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{\partial r_2^3}{\partial y} = 3yr_2 . \tag{A.12}$$

Por fim, as derivadas parciais U_{xx} , U_{xy} , U_{yx} e U_{yy} são

$$\begin{aligned}
U_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[x - \frac{\mu_1(x+\mu_2)}{r_1^3} - \frac{(x-\mu_1)\mu_2}{r_2^3} \right] = \\
&= 1 - \frac{[\mu_1(x+\mu_2)]' r_1^3 - \mu_1(x+\mu_2) [r_1^3]'}{(r_1^3)^2} - \frac{[(x-\mu_1)\mu_2]' r_2^3 - (x-\mu_1)\mu_2 [r_2^3]'}{(r_2^3)^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow U_{xx} = 1 - \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{3(x + \mu_2)^2 \mu_1}{r_1^5} - \frac{\mu_2}{r_2^3} + \frac{3(x - \mu_1)^2 \mu_2}{r_2^5} ;
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
U_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[x - \frac{\mu_1(x+\mu_2)}{r_1^3} - \frac{\mu_2(x-\mu_1)}{r_2^3} \right] = \\
&= 0 - \frac{[\mu_1(x+\mu_2)]' r_1^3 - \mu_1(x+\mu_2) [r_1^3]'}{(r_1^3)^2} - \frac{[\mu_2(x-\mu_1)]' r_2^3 - \mu_2(x-\mu_1) [r_2^3]'}{(r_2^3)^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow U_{xy} = \frac{3(x + \mu_2)y\mu_1}{r_1^5} + \frac{3(x - \mu_1)y\mu_2}{r_2^5} ;
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
U_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[y - \frac{y\mu_1}{r_1^3} - \frac{y\mu_2}{r_2^3} \right] = 0 - \frac{[y\mu_1]' r_1^3 - y\mu_1 [r_1^3]'}{(r_1^3)^2} - \frac{[y\mu_2]' r_2^3 - y\mu_2 [r_2^3]'}{(r_2^3)^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow U_{yx} = \frac{3y\mu_1(x + \mu_2)}{r_1^5} + \frac{3y\mu_2(x - \mu_1)}{r_2^5} ;
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
U_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[y - \frac{y\mu_1}{r_1^3} - \frac{y\mu_2}{r_2^3} \right] = 1 - \frac{[y\mu_1]' r_1^3 - y\mu_1 [r_1^3]'}{(r_1^3)^2} - \frac{[y\mu_2]' r_2^3 - y\mu_2 [r_2^3]'}{(r_2^3)^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow U_{yy} = 1 - \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{3y^2\mu_1}{r_1^5} - \frac{\mu_2}{r_2^3} + \frac{3y^2\mu_2}{r_2^5} .
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Além disso, precisamos calcular U_{zz} para utilizar essa equação em (1.37) e conseguir calcular o índice $K3D$ para as OPSs planas. Nesse caso, temos $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$ com $r_1 = \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2}$ e $r_2 = \sqrt{(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2}$.

As derivadas parciais de $\frac{1}{r_1}$ e $\frac{1}{r_2}$ em relação a z são

$$\frac{\partial(1/r_1)}{\partial z} = -\frac{[(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}}}{2} \cdot 2z \Rightarrow \frac{\partial(1/r_1)}{\partial z} = -\frac{z}{r_1^3} \quad (\text{A.17})$$

e

$$\frac{\partial(1/r_2)}{\partial z} = -\frac{[(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}}}{2} \cdot 2z \Rightarrow \frac{\partial(1/r_2)}{\partial z} = -\frac{z}{r_2^3} . \quad (\text{A.18})$$

Logo, a derivada parcial U_z é

$$\begin{aligned} U_z &= \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{x^2 + y^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu_1}{r_1} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu_2}{r_2} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{x^2 + y^2}{2} \right] + \mu_1 \frac{\partial(1/r_1)}{\partial z} + \mu_2 \frac{\partial(1/r_2)}{\partial z} = 0 + \mu_1 \left(-\frac{z}{r_1^3} \right) + \mu_2 \left(-\frac{z}{r_2^3} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow U_z = -\frac{z}{r_1^3} \mu_1 - \frac{z}{r_2^3} \mu_2 . \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

As derivadas parciais de r_1^3 e r_2^3 em relação a z são

$$\frac{\partial r_1^3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{\partial r_1^3}{\partial z} = 3zr_1 ; \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial r_2^3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{\partial r_2^3}{\partial z} = 3zr_2 . \quad (\text{A.21})$$

Por fim, a derivada parcial de U_{zz} é

$$\begin{aligned} U_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{z\mu_1}{r_1^3} - \frac{z\mu_2}{r_2^3} \right] = -\frac{[z\mu_1]' r_1^3 - z\mu_1 [r_1^3]'}{(r_1^3)^2} - \frac{[z\mu_2]' r_2^3 - z\mu_2 [r_2^3]'}{(r_2^3)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow U_{zz} = -\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{3z^2\mu_1}{r_1^5} - \frac{\mu_2}{r_2^3} + \frac{3z^2\mu_2}{r_2^5} . \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Apêndice B

Bifurcações com multiplicação de período

A discussão apresentada nesse apêndice é baseada em [4].

A partir do expoente característico $\alpha = \frac{1}{T} \ln \lambda$, $T > 0$ período e λ autovalores da matriz de monodromia, escrevemos a solução (do sistema de equações variacionais) para o vetor desvio na forma $\xi(t) = f(t) e^{\alpha T}$ com $f(t)$ função T -periódica.

Assim, podemos escrever uma solução geral para o sistema de equações variacionais a partir de uma combinação linear:

$$\xi(t) = c_1 f_1(t) + c_2 [f_2(t) + t f_1(t)] + c_3 f_3(t) e^{\sigma t} + c_4 f_4(t) e^{-\sigma t}$$

onde temos

- para expoentes característicos (de $\lambda_{3,4}$) reais e positivos: $\sigma = \alpha$. Implica em solução $x(t)$ instável.
- para expoentes característicos (de $\lambda_{3,4}$) reais e negativos: $\sigma = \alpha + \frac{i\pi}{T}$. Implica em solução $x(t)$ instável.
- para expoentes característicos (de $\lambda_{3,4}$) complexos no círculo unitário (isto é, módulo igual a 1): $\sigma = i\beta$. Implica em solução $x(t)$ estável.

As soluções $\xi_1 = f_1(t)$ e $\xi_2 = f_2(t) + t f_1(t)$ são linearmente independentes e correspondem ao par de autovalores unitários $\lambda_{1,2}$.

A partir daqui vamos escrever os autovalores usando a notação polar de números complexos, isto é, para o autovalor $\lambda = a + bi$ [onde a é a parte real, $Re(\lambda)$, de λ e b é a parte imaginária, $Im(\lambda)$, de λ] vamos escrever $\lambda = |\lambda|(\cos\theta + i\sin\theta) = |\lambda|e^{i\theta}$ onde $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo de λ e θ é o argumento de λ . Note que para autovalores no círculo unitário, $|\lambda| = 1$ e, portanto, $\lambda = e^{i\theta}$.

Além disso, como o par de autovalores unitários se mantém em todos os casos listados acima, vamos analisar apenas a parte da solução geral $\xi(t)$ que varia e denotá-la:

$$\bar{\xi}(t) = c_3 f_3(t) e^{\sigma t} + c_4 f_4(t) e^{-\sigma t}$$

Note que em $t = 0$, temos $\bar{\xi}(0) = c_3 f_3(0) e^{\sigma 0} + c_4 f_4(0) e^{-\sigma 0} = c_3 f_3(0) + c_4 f_4(0)$.

Bifurcações com mesmo período

Quando $\sigma = 0$, temos autovalores $\lambda_{3,4}$ do tipo $e^{\pm 0}$, a solução geral $\bar{\xi}(t)$ é dada por:

$$\bar{\xi}(t) = c_3 f_3(t) e^{0t} + c_4 f_4(t) e^{0t} = c_3 f_3(t) + c_4 f_4(t)$$

e em $t = T$ (já que $f_{3,4}$ é periódica e, portanto, $f_{3,4}(T) = f_{3,4}(0)$), temos

$$\bar{\xi}(T) = c_3 f_3(T) + c_4 f_4(T) = c_3 f_3(0) + c_4 f_4(0) = \bar{\xi}(0).$$

Logo, para os autovalores $\lambda_{3,4}$ com argumento $\theta = 0$, o período se mantém.

Note que quando $\sigma = i2\pi w$, $w \in \mathbb{Z}$, o período também se mantém já que $\lambda_{3,4} = e^{\pm i2\pi w}$ equivale a $\lambda_{3,4} = e^{\pm i0}$ já que os valores no círculo unitário são 2π -periódicos.

Bifurcações com multiplicação de período

Essas bifurcações acontecem quando $\sigma = i2\pi \frac{w}{k}$, com $k, w \in \mathbb{Z}$.

Veja que, nesse caso, $\lambda_{3,4} = e^{\pm i2\pi \frac{w}{k}}$ e $\bar{\xi}(t) = c_3 f_3(t) e^{i2\pi \frac{w}{k} t} + c_4 f_4(t) e^{-i2\pi \frac{w}{k} t}$, logo

$$\bar{\xi}(T) = c_3 f_3(T) e^{i2\pi \frac{w}{k} T} + c_4 f_4(T) e^{-i2\pi \frac{w}{k} T}.$$

Porém, quando descrevemos k vezes a órbita $x(t)$, isto é, $t = kT$, voltamos à solução inicial $\bar{\xi}(0)$. De fato, os autovalores passam a ser dados por $\lambda_{3,4} = e^{\pm i2\pi w}$ e a solução em $t = kT$ é

$$\bar{\xi}(kT) = c_3 f_3(kT) e^{i2\pi w T} + c_4 f_4(kT) e^{-i2\pi w T}.$$

Como os valores no círculo unitário são 2π -periódicos, então $\lambda_{3,4} = e^{\pm i2\pi w} = e^{\pm i0}$ e segue que $\bar{\xi}(kT) = \bar{\xi}(0)$ já que $f_{3,4}$ são T -periódicas.

Logo, os autovalores $\lambda_{3,4}$ com argumento $\theta = 2\pi \frac{w}{k}$, $w \in \mathbb{Z}$, implicam em órbitas com período kT .

Bifurcações com duplicação de período

Em particular, quando $k = 2$ temos $\sigma = i\pi w$, com $w \in \mathbb{Z}$. Assim:

- i Em $t = T$, os autovalores são $\lambda_{3,4} = e^{\pm i\pi} = \cos\pi \pm i\sin\pi = -1 \pm 0 = -1$ e a solução geral $\bar{\xi}(t)$ é $\bar{\xi}(T) = c_3 f_3(T) e^{i\pi w T} + c_4 f_4(T) e^{-i\pi w T}$.
- ii Em $t = 2T$, os autovalores são $\lambda_{3,4} = e^{\pm i2\pi} = \cos 2\pi \pm i\sin 2\pi = 1 \pm 0 = 1 \equiv e^{\pm i0}$ e a solução geral $\bar{\xi}(t)$ é $\bar{\xi}(2T) = c_3 f_3(2T) e^{i2\pi w T} + c_4 f_4(2T) e^{-i2\pi w T} = \bar{\xi}(0)$ já que os valores no círculo unitário são 2π -periódicos e $f_{3,4}$ são T -periódicas.

Perceba que $\lambda_{3,4} = -1$ em $t = T$ implicam em $K2D = -2$. De fato,

$$K2D = \text{tr}(\Delta(T)) - 2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - 2 = 1 + 1 - 1 - 1 - 2 = -2.$$

Apêndice C

Diagramas característicos

Veja abaixo diagramas característicos $C_J X x_0$ obtidos inicialmente para as famílias nos nove sistemas explorados no Capítulo 3. As figuras apresentadas anteriormente para cada um dos sistemas no Capítulo 3 possuem as OPSs retrógradas nos referenciais sinódico e inercial, já os diagramas que serão expostos abaixo possuem também as famílias de OPSs retrógradas no referencial sinódico, mas prógradas no referencial inercial. Nas figuras, a abreviação '*hor.*' significa '*horizontalmente*'.

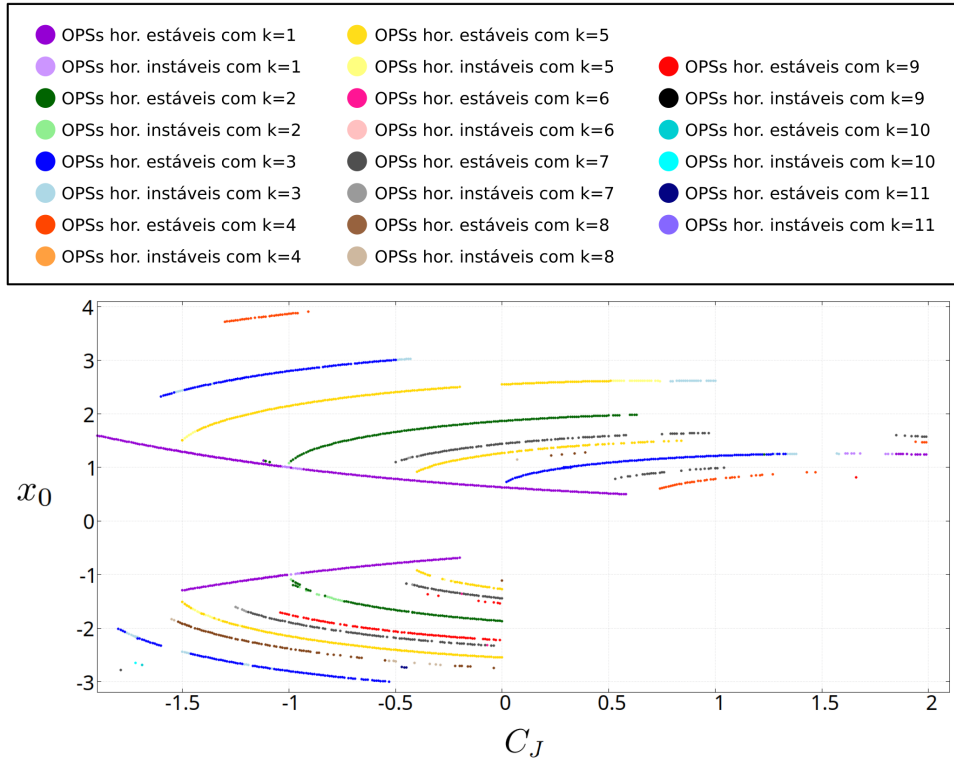


Figura C.1: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente no sistema Sol-Netuno.

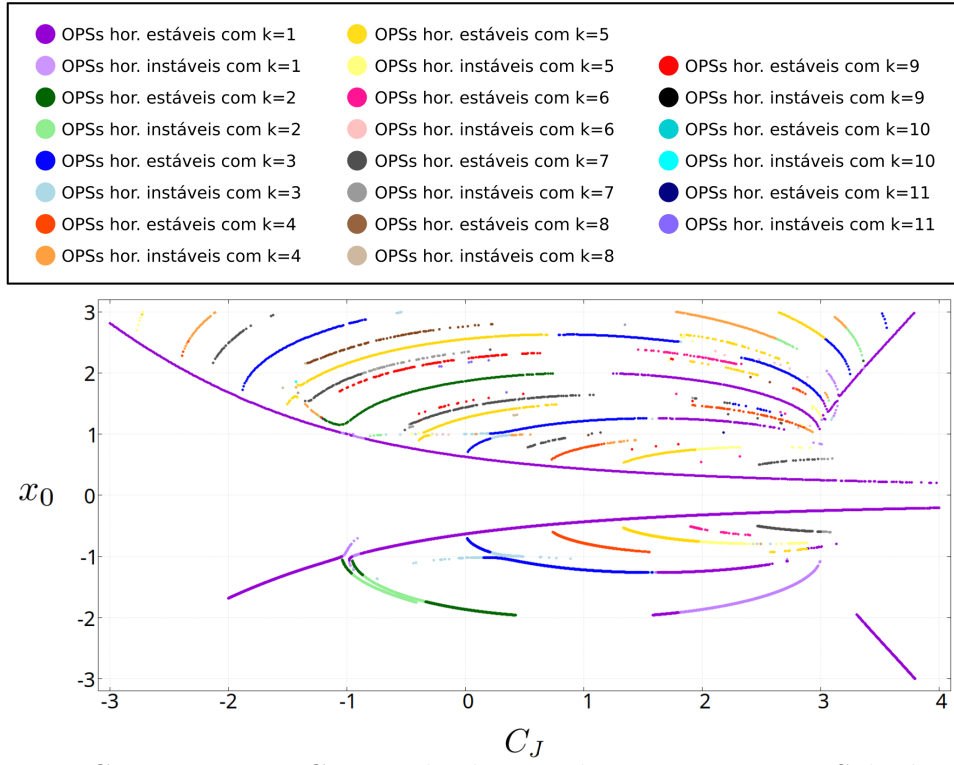


Figura C.2: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente no sistema Sol-Júpiter.

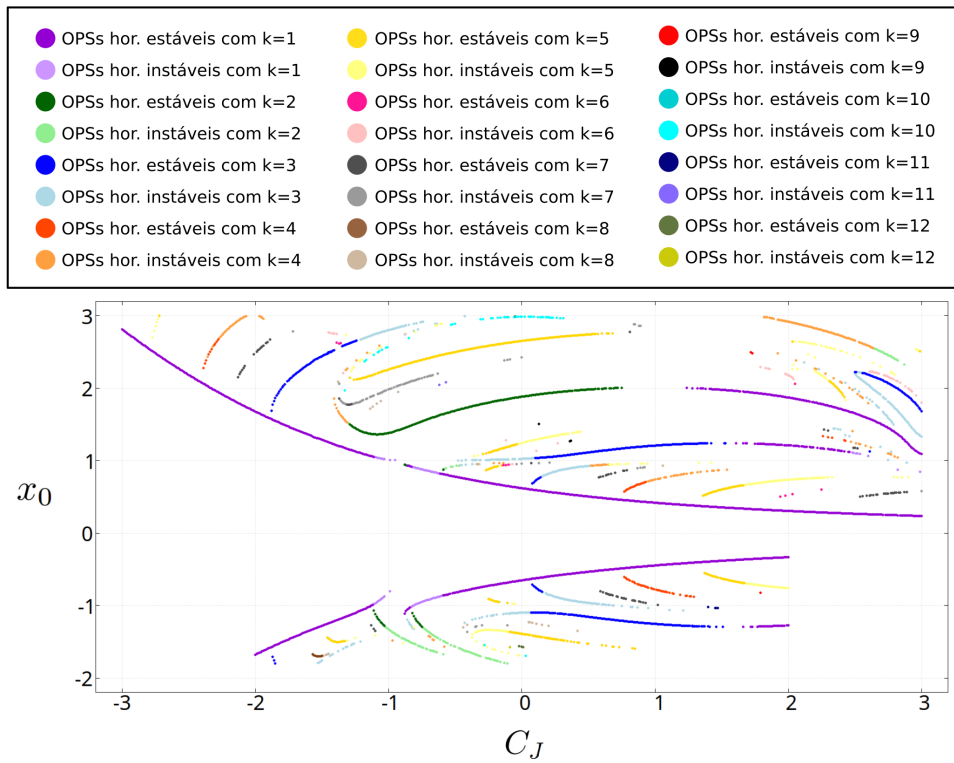


Figura C.3: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente no sistema Terra-Lua.

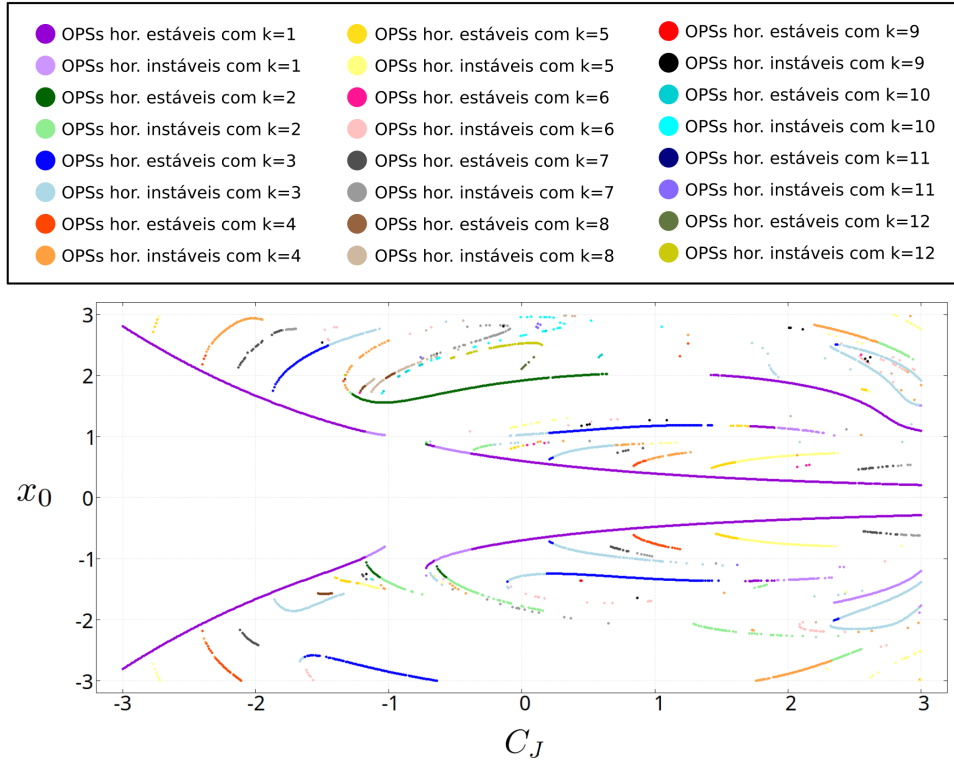


Figura C.4: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente no sistema com $\mu_2 = 0.04$.

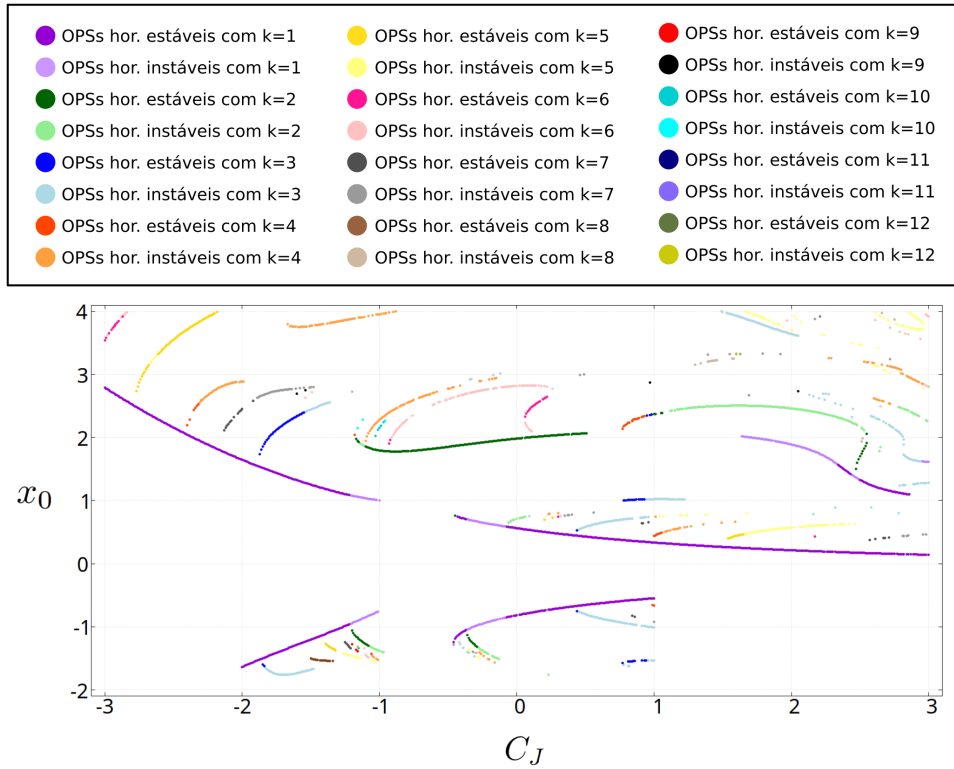


Figura C.5: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente no sistema com $\mu_2 = 0.1$.

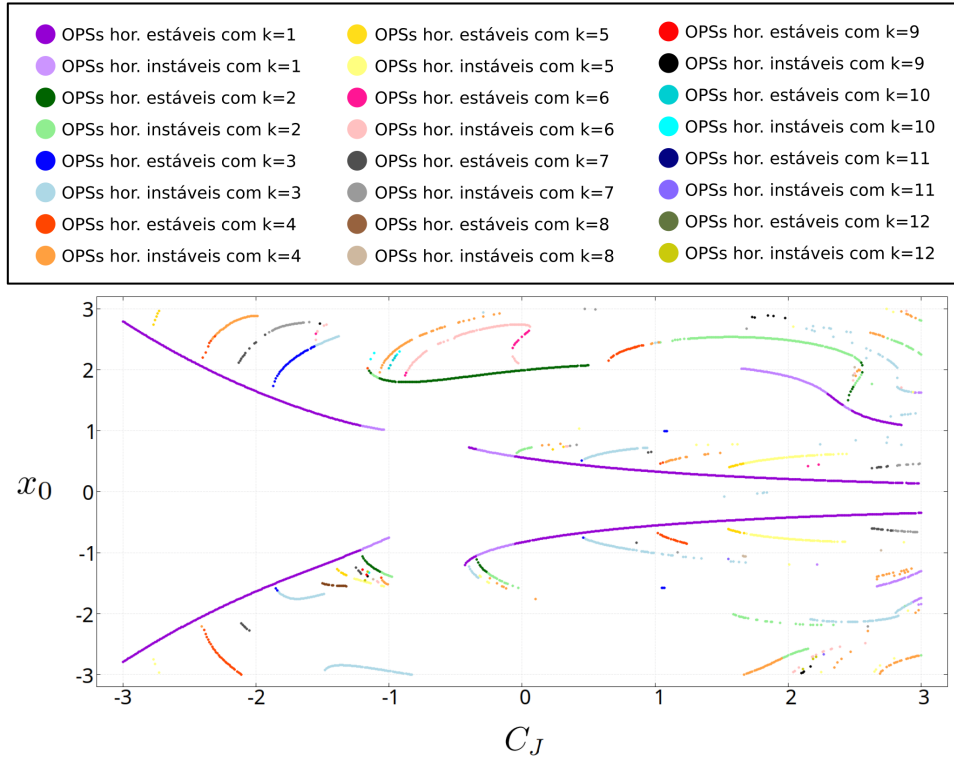


Figura C.6: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente no sistema Plutão-Charonte.

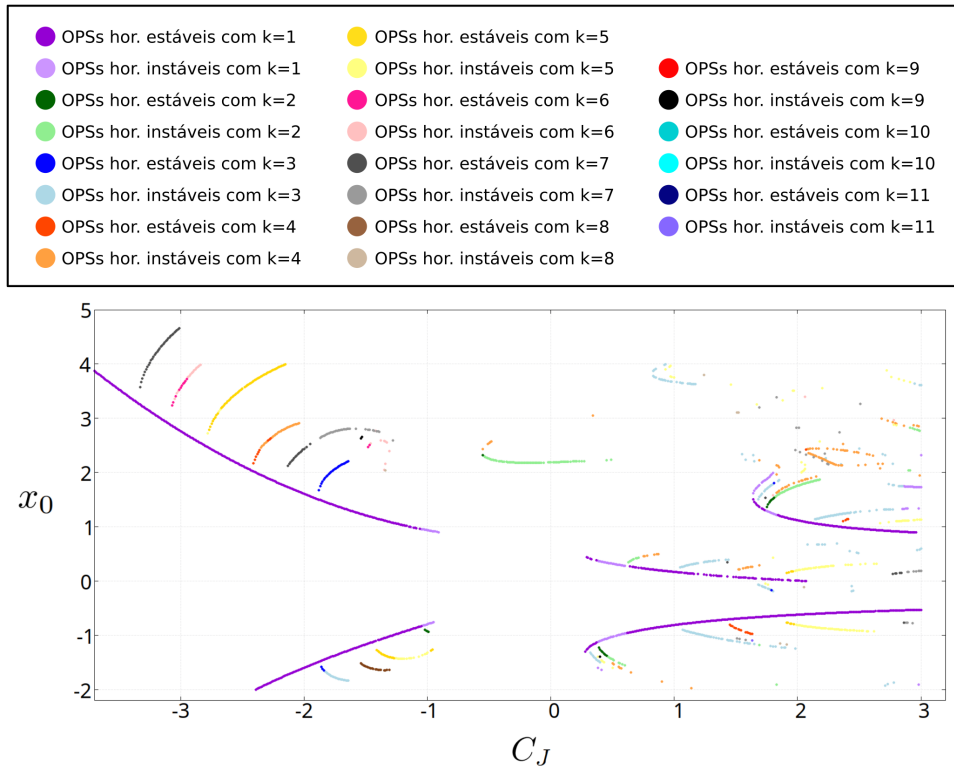


Figura C.7: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente no sistema com $\mu_2 = 0.3$.

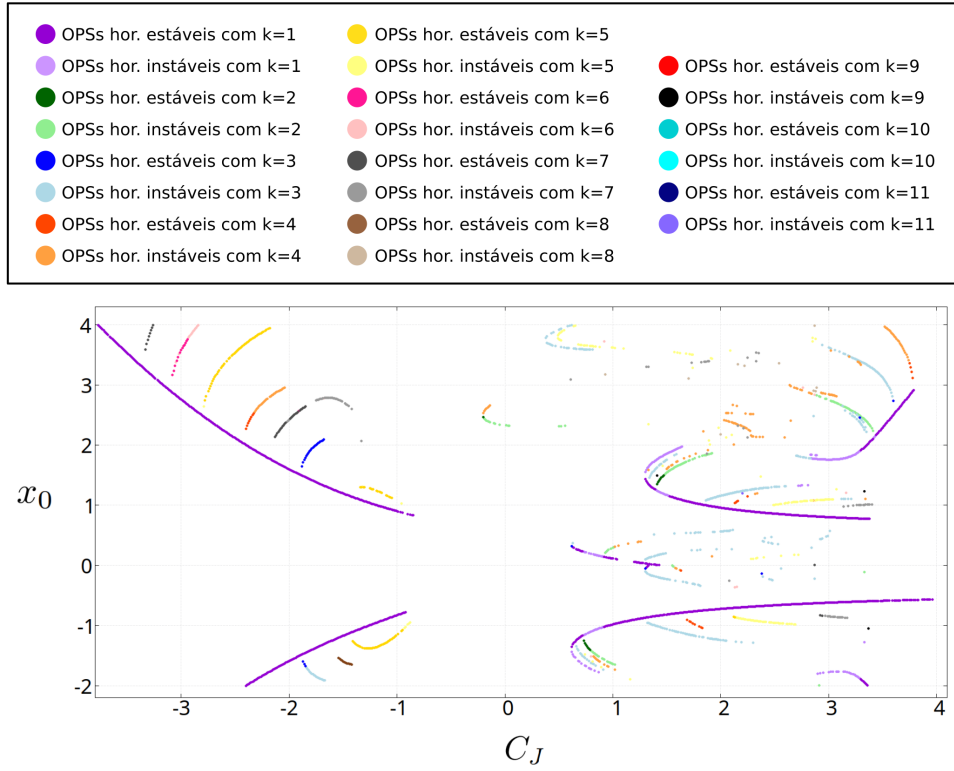


Figura C.8: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente no sistema com $\mu_2 = 0.4$.

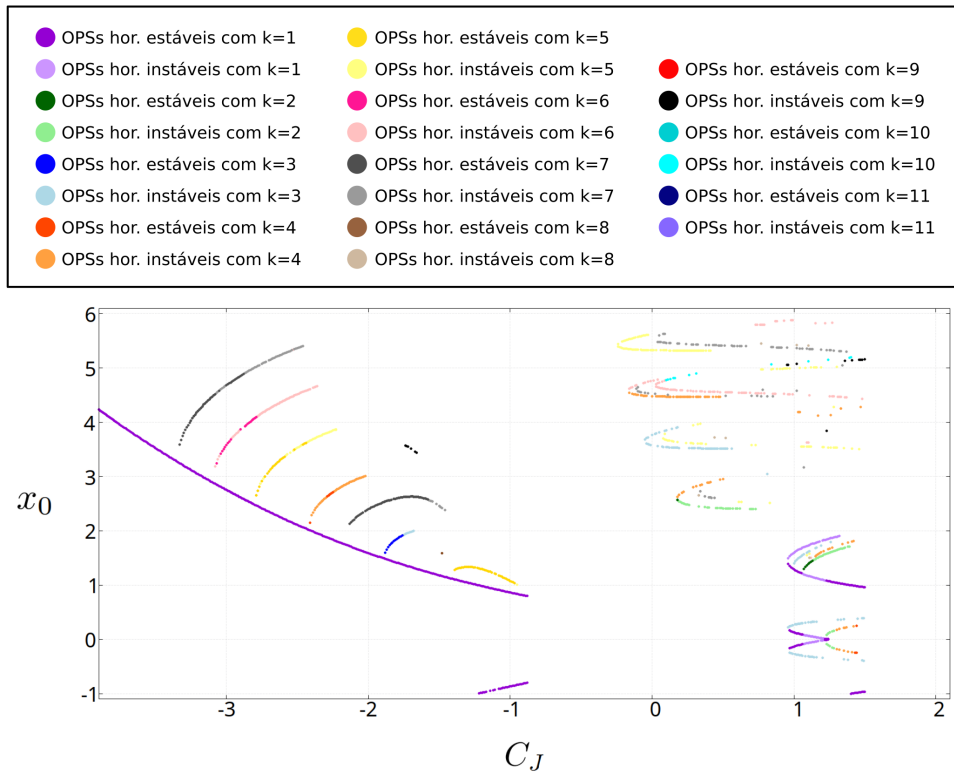


Figura C.9: Diagrama $C_J X x_0$ obtido inicialmente no sistema com $\mu_2 = 0.5$.

Apêndice D

Bifurcações em famílias 3D no sistema Sol-Netuno

Para esse sistema em específico, decidimos explorar também as famílias 3D que bifurcam das circulares e coorbitais retrógradas planas. Como explicado no final do Capítulo 2, obtivemos as famílias de OPSs tridimensionais a partir dos pontos nas famílias 2D onde $K3D = \pm 2$. Logo, as cinco famílias retrógradas 3D que encontramos para o sistema Sol-Netuno vieram dos pontos de bifurcação vertical apresentados nas Tabelas E.1, E.2 e E.3 disponíveis no Apêndice E.

Das 5 famílias retrógradas 3D que encontramos, três bifurcaram da família retrógrada circular externa 2D, uma bifurcou da família retrógrada circular interna 2D e uma da família retrógrada coorbital excêntrica 2D. As denotaremos por:

- **Família 3D-i:** Originada do ponto de bifurcação da família retrógrada circular externa 2D em $C_J \approx -1.0560$. Essa família tem simetria do tipo 1.
- **Família 3D-ii:** Originada do ponto de bifurcação da família retrógrada circular externa 2D em $C_J \approx -1.0092$. Essa família tem simetria do tipo 2 e conseguimos encontrá-la para inclinações de $I = 180^\circ$ até $I \approx 60^\circ$.
- **Família 3D-iii:** Originada do ponto de bifurcação da família ressonante que bifurca da circular externa retrógrada 2D em $C_J \approx -1.0008$. Essa família tem simetria do tipo 2 e conseguimos encontrá-la para inclinações de $I = 180^\circ$ até $I \approx 177^\circ$.
- **Família 3D-iv:** Originada do ponto de bifurcação da família retrógrada circular interna 2D em $C_J \approx -0.99055$. Essa família tem simetria do tipo 2 e conseguimos encontrá-la para inclinações de $I = 180^\circ$ até $I \approx 70^\circ$.
- **Família 3D-v:** Originada do ponto de bifurcação da família retrógrada coorbital excêntrica 2D em $C_J \approx -1.0122$. Essa família tem simetria do tipo 2.

As famílias 3D-i e 3D-v se unem em uma só família 3D a partir de $C_J \approx -1.0081$ ($I \approx 176.55^\circ$, $a \approx 1.0067$ and $e \approx 0.000719$) e conseguimos encontrá-las para inclinações de $I = 180^\circ$ até $I \approx 0^\circ$.

Diagramas característicos contendo as cinco famílias 3D citadas acima estão disponíveis na Figura D.1.

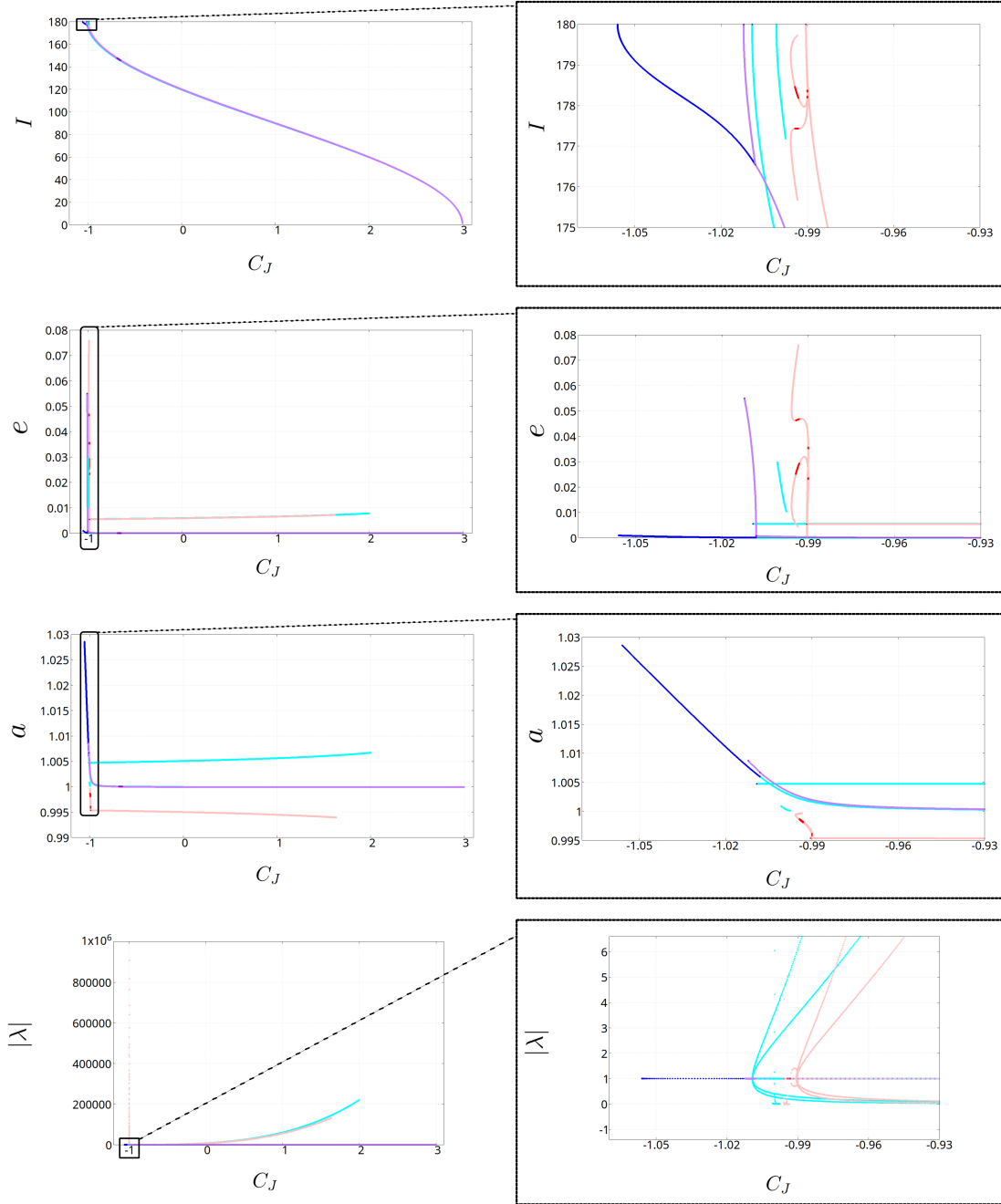


Figura D.1: Diagramas característicos das famílias retrógradas 3D no sistema Sol - Netuno: C_J (constante de Jacobi) X I (inclinação), C_J X a (semi-eixo maior), C_J X e (excentricidade) e C_J X $|\lambda|$ (módulo dos autovalores da matriz de monodromia); zoom em trechos interessantes à direita. As órbitas das famílias i, ii e iii são as representadas em azul ciano quando instáveis e azul escuro quando estáveis; as da família iv são rosa quando instáveis e vermelho quando estáveis e as da família v são lilás quando instáveis e violeta quando estáveis.

Apêndice E

Pontos onde ocorrem troca de estabilidade

E.1 Das famílias no sistema Sol-Netuno ($\mu_2 = 5.15463 \times 10^{-5}$)

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.93471	-0.72758	2.0526	1.0068	0.27742	-2.0003	-0.18315
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.90243	-0.67477	2.0789	1.0077	0.33045	-4.8889	-2.0001
-1.0008	-0.97105	2.0009	1.0009	0.029893	-5.8501	2.0016
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0092	-0.99917	2.0023	1.0047	0.0055652	-2.0	-1.9998
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0560	-1.0277	2.0145	1.0286	0.00096169	-1.9917	-2.0
-1.0092	-0.99921	2.0023	1.0047	5.5431×10^{-3}	-1.9998	-2.0

Tabela E.1: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular externa retrógrada (família $1i$ na Figura 3.5) e na orbital que bifurca dela (família $2i$ na Figura 3.5) no sistema Sol - Netuno. O último ponto de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante II e os demais pertencem à família ressonante I (vide Figura 3.6).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família 2ii						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.99733	-1.0287	2.0000	0.99918	0.029505	1.9985	-5.8499
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família 1ii						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.99051	-1.0008	1.9976	0.99535	0.0054560	-2.0	-1.9998
-0.94318	-0.97306	1.9863	0.97216	0.00087416	-2.0	-1.9916
Pontos de troca de estabilidade vertical na família 1ii						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.99055	-1.0009	1.9976	0.99537	0.0054772	-1.9998	-2.0

Tabela E.2: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular interna retrógrada (família 1ii na Figura 3.5) e na coorbital que bifurca dela (família 2ii na Figura 3.5) no sistema Sol - Netuno. O último ponto de troca de estabilidade horizontal pertence à família ressonante *IV* e os demais pertencem à família ressonante *III* (vide Figura 3.6).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família 2iii						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1351	1.1498	-2.0487	1.0736	0.071035	-1.9997	5.7473
Pontos de troca de estabilidade vertical na família 2iii						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0122	1.0621	-2.0062	1.0084	0.053325	1.9969	2.0

Tabela E.3: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família coorbital excêntrica retrógrada (família 2iii na Figura 3.5) no sistema Sol - Netuno.

E.2 Das famílias no sistema Sol-Júpiter ($\mu_2 = 0.001$)

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família 2i						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0387	-0.99655	2.0099	1.0215	0.025381	2.0	1.9829
-0.95527	-1.2837	2.0400	1.0151	0.26361	-1.9999	-0.25205
Pontos de troca de estabilidade vertical na família 2i						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.90790	-1.3546	2.0542	1.0140	0.33489	-4.8479	-2.0
-1.0047	-0.92533	2.0059	1.0073	0.082328	-5.5447	2.0005
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família 1i						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0387	-0.99637	2.0099	1.0215	0.025559	-2.0	-1.9957
Pontos de troca de estabilidade vertical na família 1i						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1499	-1.0729	2.0411	1.0804	0.0078121	-1.9447	-2.0
-1.0395	-0.99719	2.0101	1.0219	0.025117	-1.9960	-2.0

Tabela E.4: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular externa retrógrada (família 1i na Figura 3.9) e na coorbital que bifurca dela (família 2i na Figura 3.9) no sistema Sol - Júpiter. O último ponto de troca de estabilidade vertical descrito pertence à família ressonante II e os demais pertencem à família ressonante I (vide Figura 3.10).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.95625	-1.0039	1.9893	0.98013	0.023229	2.0	1.9842
-0.86425	-1.3039	2.0246	0.98645	0.32083	-2.0001	0.11263
-0.33487	-1.7378	2.1228	0.99757	0.74109	-1.9999	1.3782
-0.97997	-1.0737	1.9991	0.99463	0.078468	2.0003	-5.5637
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.95698	-1.0045	1.9895	0.98049	0.023502	-1.9958	-2.0
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.95625	-1.0037	1.9893	0.98013	0.023069	-2.0	-1.9961
-0.84287	-0.93266	1.9643	0.92646	0.0056076	-2.0	-1.9432

Tabela E.5: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular interna retrógrada (família $1ii$ na Figura 3.9) e na coorbital que bifurca dela (família $2ii$ na Figura 3.9) no sistema Sol - Júpiter. O último ponto de troca de estabilidade horizontal e o ponto de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante IV e os demais pertencem à família ressonante III (vide Figura 3.10).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.4372	1.8742	-2.4531	1.3656	0.37315	2.0119	290.62
-1.4372	1.8717	-2.4515	1.3649	0.37210	-2.0064	288.93
-1.2256	1.2838	-2.1061	1.1346	0.13243	-2.0002	5.1617
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0507	1.1538	-2.0310	1.0380	0.11249	1.9374	2.0
0.80116	1.9961	-2.0459	1.0009	0.99524	1.9591	2.0

Tabela E.6: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família coorbital excêntrica retrógrada (família $2iii$ na Figura 3.9) no sistema Sol - Júpiter.

E.3 Das famílias no sistema Terra-Lua ($\mu_2 = 0.0121506683$)

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1168	-0.98725	2.0322	1.0872	0.10309	2.0	1.7848
-1.0233	-1.2916	2.0607	1.0578	0.20951	-2.0	-0.90418
-0.41304	-0.17814	3.5169	1.4649	0.88669	-2.0	533.37
-0.41292	-0.17508	3.5483	1.4849	0.89028	2.0003	544.59
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.99180	-1.3379	2.0694	1.0540	0.25780	-3.5036	-2.0001
-1.0161	-0.84578	2.0285	1.0483	0.20477	-4.7702	2.0002
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1168	-0.98712	2.0322	1.0872	0.10322	-2.0	-1.9454
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.3331	-1.1593	2.1002	1.2135	0.054702	-1.7634	-2.0
-1.1266	-0.99727	2.0344	1.0922	0.098030	-1.9570	-2.0

Tabela E.7: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular externa retrógrada (família $1i$ na Figura 3.13) e na coorbital que bifurca dela (família $2i$ na Figura 3.13) no sistema Terra - Lua. Os dois últimos pontos de troca de estabilidade horizontal e o último ponto de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante II e os demais pertencem à família ressonante I (vide Figura 3.14).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.82807	-1.0138	1.9597	0.93672	0.069265	2.0	1.8204
-0.74185	-1.3022	1.9949	0.95475	0.35115	-2.0	0.17223
0.66626	-1.9882	2.0724	0.99729	0.98145	-1.9999	1.8649
-0.88523	-1.1536	1.9895	0.97651	0.16896	1.9999	-4.8738
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.62482	-1.4529	2.0290	0.96355	0.49524	-7.3662	-2.0
-0.0099679	-1.8396	2.1175	0.99081	0.84435	-12.820	-2.0
-0.83641	-1.0231	1.9620	0.94102	0.074322	-1.9435	-2.0
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.82807	-1.0136	1.9597	0.93672	0.069158	-2.0	-1.9546
-0.61230	-0.87133	1.9194	0.84040	0.022338	-2.0	-1.7413

Tabela E.8: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular interna retrógrada (família $1ii$ na Figura 3.13) e na coorbital que bifurca dela (família $2ii$ na Figura 3.13) no sistema Terra - Lua. O último ponto de troca de estabilidade horizontal e o último ponto de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante IV e os demais pertencem à família ressonante III (vide Figura 3.14).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.4109	1.8976	-2.4644	1.3589	0.40536	2.0008	22.927
-1.4103	1.8675	-2.4447	1.3499	0.39247	-2.0005	21.258
-1.3010	1.5126	-2.2206	1.2172	0.25262	-2.0	3.8358
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.2908	2.3192	-2.7450	1.4606	0.59613	378.59	-2.0001
-1.3001	2.3028	-2.7340	1.4574	0.58843	344.54	2.0010
-1.1498	1.3752	-2.1279	1.1281	0.22989	1.1641	2.0

Tabela E.9: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família coorbital excêntrica retrógrada (família $2iii$ na Figura 3.13) no sistema Terra - Lua.

E.4 Das famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.04$

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1774	-0.97496	2.0550	1.2013	0.22170	2.0	1.2842
-1.0681	-1.3019	2.0784	1.1231	0.12358	-2.0001	-2.2559
-0.65709	-1.6139	2.1243	1.0470	0.50328	-2.0078	-219.24
-0.65697	-1.6125	2.1235	1.0464	0.50270	1.9729	-233.26
-0.44257	-0.21314	3.4125	1.6120	0.89259	-1.9999	163.86
-0.44133	-0.20287	3.5128	1.6947	0.90389	2.0001	175.45
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0748	-1.2920	2.0768	1.1251	0.11279	-1.7351	-2.0
-1.0220	-0.79667	2.0591	1.1412	0.33694	-4.0104	2.0001
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1774	-0.97476	2.0550	1.2013	0.22191	-2.0	-1.8122
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.4683	-1.2211	2.1498	1.3970	0.15456	-1.5829	-2.0
-1.2125	-1.0090	2.0622	1.2208	0.20628	-1.8811	-2.0

Tabela E.10: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular externa retrógrada (família $1i$ na Figura 3.16) e na coorbital que bifurca dela (família $2i$ na Figura 3.16) no sistema com $\mu_2 = 0.04$. Os dois últimos pontos de troca de estabilidade horizontal e o último ponto de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante II e os demais pertencem à família ressonante I (vide Figura 3.17).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.64955	-1.0269	1.9209	0.89457	0.10326	2.0	1.4484
-0.56696	-1.3060	1.9556	0.92219	0.37280	-1.9999	-0.0037356
-0.72801	-1.2098	1.9672	0.95476	0.22524	2.0002	-4.2258
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.45500	-1.4525	1.9893	0.93510	0.51052	-7.6928	-2.0
0.54254	-1.9693	2.0876	0.98958	0.94964	-17.432	-1.9998
-0.67475	-1.0572	1.9286	0.90838	0.11980	-1.7865	-2.0
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.64954	-1.0269	1.9209	0.89456	0.10318	-2.0	-1.8570
-0.37965	-0.84572	1.8767	0.77678	0.037252	-2.0	-1.4997

Tabela E.11: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular interna retrógrada (família $1ii$ na Figura 3.16) e na coorbital que bifurca dela (família $2ii$ na Figura 3.16) no sistema com $\mu_2 = 0.04$. O último ponto de troca de estabilidade horizontal e o último ponto de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante IV e os demais pertencem à família ressonante III (vide Figura 3.17).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.3418	1.9563	-2.4922	1.34100	0.48863	1.9998	6.4970
-1.3337	1.8597	-2.4273	1.3109	0.44916	-2.0	5.0230
-1.2787	1.7039	-2.3217	1.2515	0.39344	-2.0	2.7311
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.2542	2.2912	-2.7180	1.4243	0.63667	89.234	2.0001
-1.2111	1.6202	-2.2614	1.2074	0.37499	-0.71864	2.0
-1.2210	2.3500	-2.7576	1.4367	0.66356	126.63	-1.9999

Tabela E.12: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família coorbital excêntrica retrógrada (família $2iii$ na Figura 3.16) no sistema com $\mu_2 = 0.04$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $6i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.2284	1.6368	-2.2739	1.2175	0.37721	2.0	3.0238
-1.1916	1.4459	-2.1769	1.1785	0.26083	2.0	0.84766
-1.1323	1.9078	-2.4170	1.2540	0.55323	2.0	-2.1315
-1.0237	2.0502	-2.4938	1.2703	0.64535	-2.0	-10.161
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $6i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.2102	1.5037	-2.2050	1.1905	0.29669	1.9145	1.9999
-1.2072	1.7592	-2.3386	1.2369	0.45466	2.1197	2.0
-1.1408	1.3348	-2.1290	1.1597	0.18549	4.8193	-1.9999
-1.1344	1.9046	-2.4153	1.2537	0.55110	2.0273	-1.9998
-1.0410	1.1866	-2.0898	1.17052	0.047922	31.874	-2.0
-0.99091	1.1318	-2.0919	1.2123	0.033475	61.802	1.9996

Tabela E.13: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $6i$ que bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada com duplicação de período ($M = 3$) no sistema com $\mu_2 = 0.04$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $8i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1531	1.5811	-2.2285	1.1772	0.37705	2.0	-0.11166
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $8i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.91439	1.0936	-2.0983	1.2580	0.098827	10.264	2.0
-0.83794	1.0497	-2.1433	1.4727	0.26009	16.331	2.0001
-0.78934	1.0327	-2.1785	1.6931	0.36643	20.941	-1.9993

Tabela E.14: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $8i$ que bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada com quadruplicação de período ($M = 4$) no sistema com $\mu_2 = 0.04$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $10i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0685	1.5529	-2.1955	1.1399	0.39742	2.0	-1.0388
-0.75085	1.1457	-2.0282	1.0555	0.12341	1.9988	1.9633
0.012639	1.3618	-1.8468	0.81935	0.71084	2.0023	-3.9151
0.052973	1.3732	-1.8398	0.81589	0.73206	-1.9990	-4.1873
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $10i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.80271	1.1412	-2.0425	1.0865	0.087180	-0.62746	2.0
-0.79969	2.1362	-2.5127	1.2483	0.74343	8.1646	2.0
-0.76212	2.1724	-2.5329	1.2547	0.76337	10.296	2.0
-0.75520	1.1452	-2.0294	1.0582	0.12006	1.6468	2.0001
-0.23810	1.2854	-1.8934	0.85255	0.55462	27.094	-2.0001

Tabela E.15: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $10i$ que bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada com quintuplicação de período ($M = 5$) no sistema com $\mu_2 = 0.04$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $12i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.96243	1.5723	-2.1808	1.1065	0.45710	2.0	-0.97366
0.15714	2.4760	-2.6056	1.2714	0.97894	2.0	2.3208
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $12i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.72087	2.1189	-2.4838	1.2248	0.76270	3.1318	2.0
-0.46088	2.3280	-2.5981	1.2667	0.86949	6.1786	2.0
-0.045452	2.5150	-2.6784	1.3039	0.95950	5.2439	2.0
0.070984	2.2513	-2.4284	1.1719	0.95511	1.9478	2.0

Tabela E.16: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $12i$ que bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada com sextuplicação de período ($M = 6$) no sistema com $\mu_2 = 0.04$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $10ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
0.50027	2.0025	-2.1276	1.0292	0.98461	2.0	1.9538
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $10ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
0.57655	2.2929	-2.3588	1.1674	0.99837	1.9270	2.0
0.61527	1.7941	-1.9355	0.92616	0.98035	2.1233	2.0

Tabela E.17: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $10ii$ que bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada com quintuplicação de período ($M = 5$) no sistema com $\mu_2 = 0.04$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $3i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.8765	1.5597	-2.3755	1.6042	0.0027905	2.0	1.8741
-1.4525	2.4921	-2.9109	1.5616	0.62147	-1.9999	1.6455
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $3i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.6107	1.0622	-2.2943	2.9920	0.63163	4.3034	-1.9997
-1.2376	0.99943	-2.4724	4.6568	1.2232	19.678	-1.9999
-1.1978	0.99603	-2.5027	3.2227	1.3215	23.684	2.0003
-1.0461	2.7727	-3.0758	1.5651	0.79714	-20.877	-2.0002

Tabela E.18: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família retrógrada com ressonância $1/-2$ (família $3i$) no sistema com $\mu_2 = 0.04$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $6ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.4988	2.7042	-3.0914	1.6578	0.65531	1.9999	-2.4524
-1.4987	1.9932	-2.5482	1.4136	0.43829	-1.9999	-2.7140
-1.4525	2.4920	-2.9109	1.5616	0.62145	2.0	0.70750
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $6ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.4983	2.6958	-3.0844	1.6544	0.65368	6.8578	-2.0
-1.4763	1.7817	-2.4088	1.3534	0.34606	-141.44	-2.0001
-1.4631	1.7238	-2.3723	1.3366	0.31969	-230.72	1.9995

Tabela E.19: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $6ii$ que bifurca da família $3i$ com duplicação de período ($M = 2$) no sistema com $\mu_2 = 0.04$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $9i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5886	2.7033	-3.1052	1.6874	0.62575	-1.9974	-6.8413
-1.5887	2.7003	-3.1027	1.6863	0.62503	1.9999	-6.4871
-1.5132	2.0862	-2.6152	1.4461	0.47030	1.9999	-1.7023
-1.5076	2.4392	-2.8785	1.5610	0.58825	2.0	-0.016549
-1.5045	2.3660	-2.8209	1.5338	0.56863	2.0	-0.14897
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $9i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5738	2.6459	-3.0556	1.6605	0.61752	12.987	-2.0002
-1.5615	2.7460	-3.1363	1.6946	0.64401	-250.56	-2.0020
-1.5532	2.7511	-3.1392	1.6939	0.64779	-328.39	1.9960
-1.5127	2.0418	-2.5842	1.4330	0.45275	4.8159	-2.0
-1.5037	1.9109	-2.4947	1.3945	0.39903	40.562	-2.0
-1.4891	2.7773	-3.1509	1.6835	0.67344	-903.03	2.0106
-1.4858	1.7987	-2.4209	1.3612	0.35080	165.63	2.0002
-1.4854	2.7785	-3.1513	1.6829	0.67482	-930.80	-2.0047

Tabela E.20: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $9i$ que bifurca da família $3i$ com duplicação de período ($M = 3$) no sistema com $\mu_2 = 0.04$.

E.5 Das famílias em um sistema com razão de massa

$$\mu_2 = 0.1$$

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.2112	-0.95262	2.0827	1.5051	0.43353	2.0	0.21908
-1.0701	-1.3107	2.0893	1.2591	0.038491	-2.0001	-5.8039
-0.49976	-0.29019	3.1963	2.1047	0.90964	-1.9997	64.162
-0.49167	-0.26219	3.4396	2.5216	0.93568	1.9994	76.947
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1485	-1.1967	2.0778	1.3260	0.17288	0.32653	-2.0001
-1.0197	-0.76811	2.1033	1.4184	0.52898	-3.1729	1.9999
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.2112	-0.95239	2.0828	1.5054	0.43376	-2.0	-1.4897
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5794	-1.2680	2.1956	1.8549	0.37030	-1.4285	-2.0
-1.3098	-1.0411	2.0999	1.5792	0.40407	-1.7675	-2.0

Tabela E.21: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular externa retrógrada (família $1i$ na Figura 3.23) e na coorbital que bifurca dela (família $2i$ na Figura 3.23) no sistema com $\mu_2 = 0.1$. Os dois últimos pontos de troca de estabilidade horizontal e o último ponto de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante II e os demais pertencem à família ressonante I (vide Figura 3.24).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.36756	-1.0494	1.8621	0.84670	0.12130	2.0	0.75528
-0.28841	-1.3173	1.8954	0.88335	0.37806	-1.9999	-0.50916
-0.46076	-1.2617	1.9221	0.92669	0.25355	1.9999	-3.4826
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.19681	-1.4415	1.9240	0.89783	0.49419	-7.0509	-2.0
1.0903	-2.0254	2.0038	0.96905	0.98685	-16.841	-1.9999
-0.42226	-1.1227	1.8819	0.88081	0.16105	-1.3413	-2.0
2.3929	-2.3286	1.9746	1.2110	0.84026	260.13	-2.0
2.5920	-2.3052	1.8975	1.2472	0.76804	154.25	2.0
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.36756	-1.0492	1.8621	0.84667	0.12115	-2.0	-1.6599
-0.076580	-0.85145	1.8196	0.71752	0.047299	-2.0	-1.2041

Tabela E.22: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular interna retrógrada (família $1ii$ na Figura 3.23) e na coorbital que bifurca dela (família $2ii$ na Figura 3.23) no sistema com $\mu_2 = 0.1$. O último ponto de troca de estabilidade horizontal e os três últimos pontos de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante IV e os demais pertencem à família ressonante III (vide Figura 3.24).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1809	2.0724	-2.5446	1.3043	0.66565	2.0	2.1112
-1.1473	1.9216	-2.4343	1.2499	0.61733	-2.0	1.5922
-1.1044	1.8609	-2.3861	1.2209	0.60610	-2.0	1.4220
0.75753	2.0867	-2.1420	1.0960	0.99516	-2.0	1.9905
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0641	2.4104	-2.7791	1.3958	0.79856	60.959	-2.0002
-1.1787	2.0307	-2.5148	1.2907	0.65077	0.14411	2.0
-1.1668	2.1847	-2.6236	1.3373	0.70843	11.252	2.0

Tabela E.23: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família coorbital excêntrica retrógrada (família $2iii$ na Figura 3.23) no sistema com $\mu_2 = 0.1$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $4i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1044	1.8611	-2.3862	1.2210	0.60619	2.0	0.021979
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $4i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.82585	2.5223	-2.8280	1.3973	0.87672	52.523	2.0
-0.69038	2.6445	-2.9076	1.4303	0.91886	122.36	1.9999
-0.61553	2.6996	-2.9424	1.4456	0.93661	177.63	-2.0005
0.36464	3.0399	-3.0892	1.5770	0.99103	277.41	-1.9940
0.37190	3.0389	-3.0871	1.5768	0.99063	280.07	2.0090

Tabela E.24: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $4i$ (da Figura 3.23) que bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada com duplicação de período ($M = 2$) no sistema com $\mu_2 = 0.1$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $10i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0481	1.8168	-2.3465	1.1930	0.60678	2.0	-1.2882
-0.96542	2.2588	-2.6416	1.3175	0.79044	-1.9998	-1.3521
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $10i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.89058	1.2913	-2.0888	1.1148	0.24795	31.436	-2.0
-0.88851	2.4096	-2.7467	1.3615	0.84324	-52.340	-2.0
-0.87040	1.2644	-2.0826	1.1202	0.21804	48.173	-2.0
-0.86378	2.4466	-2.7723	1.3722	0.85583	-101.57	-2.0

Tabela E.25: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $10i$ (da Figura 3.23) que bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada com quintuplicação de período ($M = 5$) no sistema com $\mu_2 = 0.1$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $6i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.94453	1.7838	-2.3040	1.1554	0.63046	2.0	-1.1505
-0.81426	1.2900	-2.0703	1.0815	0.28524	-2.0002	-0.22647
0.17859	2.0199	-2.2202	1.0727	0.97633	2.0	1.7483
0.18001	2.0184	-2.2187	1.0719	0.97634	2.0	1.7490
0.26971	2.7476	-2.8320	1.4244	0.99923	2.0001	2.5295
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $6i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.45024	1.0374	-2.1364	1.5397	0.26129	-135.20	-2.0
-0.63020	1.1137	-2.0711	1.2033	0.0086541	-35.110	2.0
-0.60944	1.1017	-2.0767	1.2291	0.022315	-42.488	2.0
-0.55501	2.5690	-2.8194	1.3808	0.93292	10.812	2.0
-0.23411	2.7558	-2.9269	1.4395	0.98397	20.575	2.0
0.11554	2.4898	-2.6276	1.2976	0.99588	0.74014	2.0
0.17266	2.8192	-2.9148	1.4597	0.99994	11.962	2.0

Tabela E.26: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $6i$ (da Figura 3.23) que bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada com triplicação de período ($M = 3$) no sistema com $\mu_2 = 0.1$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $3i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.8681	1.5329	-2.3741	1.6275	0.0033175	2.0	1.4568
-1.5489	2.3961	-2.8540	1.5175	0.64487	-1.9999	1.0310
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $3i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.6342	1.0880	-2.3231	3.9715	0.70087	3.2963	-1.9998
-1.3283	0.98058	-2.5373	1.9729	1.5477	11.698	-2.0001
-1.2796	2.6157	-2.9834	1.5225	0.78372	-11.989	-2.0001
-1.2668	0.96988	-2.5984	1.3760	1.7775	15.405	1.9998
-1.0499	0.94344	-2.8757	0.55144	2.8922	44.464	1.9994
-1.0353	0.94213	-2.8977	0.52449	2.9869	47.562	-2.0009

Tabela E.27: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família retrógrada com ressonância 1/-2 (família $3i$ da Figura 3.23) no sistema com $\mu_2 = 0.1$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $6ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5492	2.2771	-2.7635	1.4804	0.60570	2.0	-1.1883
-1.5435	2.0732	-2.6154	1.4224	0.52782	-1.9999	-1.9749
-1.1697	2.8440	-3.1579	1.5911	0.85034	-2.0820	-12.407
-1.1691	2.8441	-3.1579	1.5910	0.85050	1.8823	-12.815
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $6ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5418	2.6224	-3.0325	1.5929	0.70913	-3.3556	-2.0
-1.5067	1.8231	-2.4460	1.3584	0.41572	-43.564	1.9998
-1.1869	2.8405	-3.1576	1.5929	0.84599	-103.43	2.0023
-1.1826	2.8414	-3.1577	1.5924	0.84708	-80.187	-1.9914
-1.1243	2.8521	-3.1577	1.5860	0.86138	379.35	-1.9899
-1.1219	2.8525	-3.1576	1.5857	0.86193	404.35	1.9873

Tabela E.28: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $6ii$ (da Figura 3.23) que bifurca da família $3i$ (da Figura 3.23) com duplicação de período ($M = 2$) no sistema com $\mu_2 = 0.1$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $9i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.6217	2.5926	-3.0216	1.6064	0.67619	1.9998	-2.1296
-1.6203	2.6247	-3.0473	1.6171	0.68498	-1.9993	-1.9660
-1.5968	2.3434	-2.8220	1.5168	0.61089	2.0	-1.8621
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $9i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.6206	2.6213	-3.0446	1.6160	0.68400	-1.3444	-2.0
-1.6161	2.5082	-2.9533	1.5760	0.65498	3.0969	-2.0
-1.5916	2.7058	-3.1089	1.6374	0.71360	-66.500	2.0002
-1.5828	2.2085	-2.7190	1.4724	0.56781	2.8673	-2.0
-1.5733	2.1221	-2.6552	1.4459	0.53678	5.3837	-2.0
-1.5626	2.7346	-3.1281	1.6397	0.72880	-154.68	1.9992
-1.5482	2.7447	-3.1341	1.6394	0.73524	-205.07	-1.9947
-1.5327	1.8819	-2.4872	1.3785	0.43772	63.083	2.0003

Tabela E.29: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $9i$ (da Figura 3.23) que bifurca da família $3i$ (da Figura 3.23) com duplicação de período ($M = 3$) no sistema com $\mu_2 = 0.1$.

E.6 Das famílias no sistema Plutão-Caronte ($\mu_2 = 0.1056338028$)

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.2116	-0.95043	2.0849	1.5433	0.45261	2.0	0.12002
-1.0673	-1.3105	2.0893	1.2733	0.053767	-2.0	-6.2321
-0.90809	-1.0489	2.0033	1.1576	0.18518	-1.9970	-2.9506
-0.90812	-1.0555	2.0034	1.1568	0.17887	2.0009	-20.412
-0.82874	-1.4293	2.0770	1.1410	0.16011	2.0002	-108.06
-0.83014	-1.4410	2.0824	1.1446	0.16664	-1.9983	-90.632
-0.50764	-0.31636	3.0448	1.9587	0.89242	-2.0005	3646.0
-0.50486	-0.29763	3.1760	2.1707	0.91155	2.0	3653.9
-0.50486	-0.29758	3.1764	2.1713	0.91160	-1.9995	60.466
-0.49576	-0.26770	3.4331	2.6516	0.93888	1.9998	73.388
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1522	-1.1875	2.0778	1.3520	0.19981	0.45839	-2.0001
-0.90808	-1.0485	2.0033	1.1577	0.18552	-2.2119	-2.0076
-0.90806	-1.0471	2.0033	1.1579	0.18693	-3.1261	2.0070
-1.0191	-0.76720	2.1068	1.4541	0.54504	-3.1164	2.0
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.2116	-0.95023	2.0849	1.5435	0.45280	-2.0	-1.4560
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5854	-1.2704	2.1983	1.9133	0.39124	-1.4205	-2.0
-1.3168	-1.0442	2.1028	1.6253	0.42249	-1.7590	-2.0

Tabela E.30: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular externa retrógrada (família $1i$ na Figura 3.30) e na coorbital que bifurca dela (família $2i$ na Figura 3.30) no sistema Plutão - Caronte. Os dois últimos pontos de troca de estabilidade horizontal e o último ponto de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante II e os demais pertencem à família ressonante I (vide Figura 3.31).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.34386	-1.0514	1.8572	0.84327	0.12158	2.0	0.69646
-0.26492	-1.3186	1.8904	0.88053	0.37751	-2.0001	-0.55590
-0.43781	-1.2651	1.9180	0.92460	0.25403	2.0001	-3.4290
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.17553	-1.4402	1.9185	0.89493	0.49126	-6.9532	-2.0
1.1246	-2.0263	1.9962	0.96623	0.98774	-16.297	-2.0
-0.40093	-1.1286	1.8782	0.87931	0.16342	-1.2920	-2.0
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.34386	-1.0513	1.8572	0.84325	0.12142	-2.0	-1.6421
-0.052927	-0.85332	1.8150	0.71370	0.047617	-2.0	-1.1828

Tabela E.31: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular interna retrógrada (família $1ii$ na Figura 3.30) e na coorbital que bifurca dela (família $2ii$ na Figura 3.30) no sistema Plutão - Caronte. O último ponto de troca de estabilidade horizontal e o último ponto de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante IV e os demais pertencem à família ressonante III (vide Figura 3.31).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.1651	2.0826	-2.5490	1.3014	0.68152	2.0003	1.9442
-1.1330	1.9374	-2.4422	1.2488	0.63591	-2.0	1.5151
-1.0756	1.8629	-2.3817	1.2120	0.62414	-2.0	1.3511
0.64165	2.0846	-2.1675	1.0958	0.99873	-2.0001	1.9867
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0490	2.4158	-2.7809	1.3929	0.81022	58.613	-2.0001

Tabela E.32: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família coorbital excêntrica retrógrada (família $2iii$ na Figura 3.30) no sistema Plutão - Caronte.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $4i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0756	1.8631	-2.3819	1.2121	0.62423	2.0	-0.17446
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $4i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.79347	2.5293	-2.8282	1.3942	0.88991	48.608	2.0
-0.66905	2.6415	-2.9015	1.4257	0.92682	103.34	2.0
-0.58076	2.7064	-2.9425	1.4447	0.94652	158.53	-2.0005
0.37879	3.0364	-3.0836	1.5805	0.98802	251.09	-1.9932
0.38674	3.0353	-3.0813	1.5803	0.98752	253.76	2.0070

Tabela E.33: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $4i$ que bifurcam da família coorbital excêntrica retrógrada com duplicação de período ($M = 2$) no sistema Plutão - Caronte.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $10i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0161	1.8187	-2.3413	1.1836	0.62583	2.0	-1.1356
-0.94096	2.2457	-2.6270	1.3061	0.80019	-1.9997	-1.4327
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $10i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.86834	2.3955	-2.7318	1.3511	0.85123	-44.422	-2.0
-0.86135	1.2982	-2.0842	1.1024	0.27341	31.430	-2.0
-0.85665	1.2917	-2.0825	1.1033	0.26643	34.490	-2.0
-0.84041	2.4390	-2.7621	1.3640	0.86553	-92.901	-2.0

Tabela E.34: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $10i$ que bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada com quintuplicação de período ($M = 5$) no sistema Plutão - Caronte.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $6i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.89631	1.7967	-2.3019	1.1457	0.66035	2.0	-1.0890
-0.78612	1.3071	-2.0670	1.06723	0.32372	-2.0001	-0.20629
-0.073670	2.2935	-2.4961	1.2149	0.97479	2.0	1.6365
0.058868	2.0024	-2.2338	1.0741	0.96271	2.0	1.6367
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $6i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.58149	1.1096	-2.0654	1.1939	0.017876	-42.230	2.0
-0.57841	1.1079	-2.0662	1.1975	0.013384	-43.381	2.0
-0.48305	2.5559	-2.7955	1.3673	0.94658	7.7171	2.0
-0.39685	1.0345	-2.1316	1.5266	0.25316	-152.56	-2.0
-0.019247	2.5014	-2.6635	1.3096	0.99073	0.99068	2.0
0.65818	1.6443	-1.8302	0.88052	0.98741	10.499	2.0

Tabela E.35: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $6i$ que bifurca da família coorbital excêntrica retrógrada com triplicação de período ($M = 3$) no sistema Plutão - Caronte.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $3i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.8679	1.5311	-2.3742	1.6291	0.0047294	2.0	1.4163
-1.5521	2.3919	-2.8514	1.5134	0.65027	-1.9999	0.96436
-1.0840	2.6759	-3.0011	1.5034	0.85018	-1.9935	-37.837
-1.0838	2.6731	-2.9986	1.5022	0.84976	1.9928	-40.504
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $3i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.6366	1.0888	-2.3251	4.0816	0.70736	3.2513	-2.0
-1.3346	0.97830	-2.5415	1.8862	1.5747	11.321	-1.9999
-1.2941	2.6038	-2.9761	1.5184	0.78443	-11.390	-1.9999
-1.2718	0.96693	-2.6050	1.3141	1.8162	14.957	1.9997
-1.0548	0.93951	-2.8860	0.53316	2.9603	42.170	2.0007
-1.0400	0.93814	-2.9087	0.50695	3.0589	45.063	-2.0004

Tabela E.36: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família retrógrada com ressonância $1/-2$ (família $3i$) no sistema Plutão - Caronte.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $6ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5522	2.4506	-2.8971	1.5326	0.66794	2.0	-1.1503
-1.5455	2.0761	-2.6181	1.4208	0.53556	-2.0002	-2.0009
-1.1703	2.8407	-3.1553	1.5873	0.85623	-1.9654	-11.065
-1.1697	2.8408	-3.1553	1.5872	0.85639	1.9191	-11.320
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $6ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5455	2.6063	-3.0201	1.5841	0.71194	-1.9568	-2.0
-1.5091	1.8315	-2.4520	1.3586	0.42582	-39.346	1.9998
-1.1907	2.8368	-3.1551	1.5895	0.85117	-108.75	1.9956
-1.1856	2.8378	-3.1552	1.5889	0.85245	-84.493	-2.0134
-1.1386	2.8460	-3.1548	1.5837	0.86382	219.64	-1.9754
-1.1356	2.8465	-3.1547	1.5833	0.86453	244.37	1.9547

Tabela E.37: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $6ii$ que bifurca da família $3i$ com duplicação de período ($M = 2$) no sistema Plutão - Caronte.

E.7 Das famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.3$

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0388	-0.82099	2.1896	7.2037	1.0723	2.0	-0.41739
-0.74080	-0.60720	2.4750	4.9225	1.0624	2.0	115.30
-0.74080	-0.60723	2.4749	4.9246	1.0624	-2.0	10.830
-0.58923	-0.44961	3.2667	1.9540	1.0766	1.9997	32.453
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.96520	-0.93545	2.1001	12.059	0.94731	1.4621	1.9985
-0.99889	-0.79236	2.2073	7.1717	1.0687	-2.0368	2.0001
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.0388	-0.82094	2.1897	7.2000	1.0724	-2.0	1.2580
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.6464	-1.2827	2.2403	4.4608	1.2203	-1.3646	-2.0
-1.4828	-1.1515	2.1856	5.1578	1.1651	-1.5690	-2.0

Tabela E.38: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular externa retrógrada (família $1i$ na Figura 3.37) e na coorbital que bifurca dela (família $2i$ na Figura 3.37) no sistema com $\mu_2 = 0.3$. Os dois últimos pontos de troca de estabilidade horizontal e o último ponto de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante II e os demais pertencem à família ressonante I (vide Figura 3.38).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
0.37784	-1.1249	1.7069	0.76150	0.083273	2.0	-0.82141
0.45370	-1.3754	1.7404	0.81431	0.32064	-2.0	-1.8228
0.27486	-1.3535	1.7828	0.87819	0.19966	2.0001	-2.1089
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
0.46706	-1.3966	1.74535	0.81795	0.34063	-2.7988	-2.0
0.27529	-1.3381	1.7772	0.87236	0.19004	1.5158	-2.0
1.8762	-2.2409	2.0176	0.97843	0.98368	94.381	-2.0003
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
0.37783	-1.1248	1.7069	0.76148	0.083179	-2.0	-1.0856
0.61444	-0.95683	1.6717	0.63554	0.033512	-2.0	-0.69176

Tabela E.39: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular interna retrógrada (família $1ii$ na Figura 3.37) e na coorbital que bifurca dela (família $2ii$ na Figura 3.37) no sistema com $\mu_2 = 0.3$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.55823	2.3784	-2.6637	1.3397	0.99917	1.9999	-0.29780
-0.54759	2.3188	-2.6134	1.3095	0.99989	-2.0	-0.080502
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2iii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.46745	2.5914	-2.8257	1.4587	0.98213	32.124	-2.0
1.6626	3.3880	-3.2278	4.1706	0.11572	273.94	-1.9993

Tabela E.40: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família coorbital excêntrica retrógrada (família $2iii$ na Figura 3.37) no sistema com $\mu_2 = 0.3$. O último ponto de troca de estabilidade horizontal e os dois últimos pontos de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante IV e os demais pertencem à família ressonante III (vide Figura 3.38).

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $3i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.8794	1.5017	-2.3791	1.5777	0.14203	2.0	0.65244
-1.4887	2.3212	-2.7894	1.3839	0.89402	-2.0001	-3.6786
-1.3594	2.2718	-2.7288	1.3469	0.90939	-2.0	-4.9536
-1.3521	1.9752	-2.5178	1.2579	0.80869	-1.9997	110.09
-1.3534	2.0497	-2.5681	1.2771	0.83994	2.0003	69.092
-1.0996	1.2487	-2.1578	1.3135	0.17912	2.0	-275.43
-1.1173	1.2741	-2.1622	1.2879	0.22222	-2.0006	-246.52
-0.63047	0.80039	-2.9189	0.34402	4.1986	2.0	7938.3
-0.64166	0.77250	-3.2894	0.19394	6.5300	-2.0	9948.3
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $3i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5566	2.2814	-2.7718	1.3832	0.86623	-0.78481	-2.0
-1.3558	2.2503	-2.7121	1.3390	0.90461	-1.0491	-1.9992
-1.3537	2.2285	-2.6956	1.3314	0.89918	-0.075653	1.9994
-1.2118	1.4327	-2.2116	1.2098	0.43215	-24.597	-2.0066
-1.2132	1.4353	-2.2127	1.2093	0.43503	-24.887	1.9997
-0.93597	1.0557	-2.1840	2.0197	0.32877	23.686	-1.9905
-0.93527	1.0550	-2.1844	2.0271	0.33156	23.715	1.9758

Tabela E.41: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família retrógrada com ressonância 1/-2 (família $3i$ da Figura 3.37) no sistema com $\mu_2 = 0.3$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $6i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.4887	2.3214	-2.7896	1.3840	0.89408	2.0	11.531
-1.4686	2.0603	-2.5976	1.3040	0.81007	-2.0	1.1166
-1.3521	1.9753	-2.5179	1.2579	0.80874	2.0	12117.3
-1.3518	2.0022	-2.5356	1.2644	0.82076	-1.9988	11918.4
-1.3095	2.4894	-2.8886	1.4226	0.96082	1.9993	-1278.5
-1.3131	2.5110	-2.9064	1.4317	0.96339	-2.0010	-1072.3
-1.3073	2.4490	-2.8560	1.4061	0.95496	1.9998	-1621.6
-1.3077	2.4299	-2.8411	1.3987	0.95179	-1.9996	-1744.4
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $6i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.4704	2.0722	-2.6061	1.3073	0.81458	-1.5924	2.0001
-1.4626	2.0238	-2.5718	1.2940	0.79585	-3.4259	-1.9998
-1.3262	2.2686	-2.7204	1.3410	0.91551	-99.134	1.9532
-1.3262	2.2688	-2.7205	1.3410	0.91555	-99.070	-2.1626

Tabela E.42: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $6i$ (da Figura 3.37) que bifurca da família $3i$ (da Figura 3.37) com duplicação de período ($M = 2$) no sistema com $\mu_2 = 0.3$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $9i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5592	2.4928	-2.9342	1.4544	0.92030	2.0001	1.8147
-1.5527	2.5812	-3.0034	1.4863	0.93858	-1.9999	1.6002
-1.5434	2.2906	-2.7763	1.3836	0.87235	2.0	-4.9011
-1.3957	1.7114	-2.3694	1.2326	0.63183	2.0368	2380.3
-1.3957	1.7110	-2.3692	1.2326	0.63148	-2.0324	2419.7
-1.2896	2.5649	-2.9460	1.4520	0.97311	1.9997	-11251.1
-1.2902	2.5681	-2.9487	1.4534	0.97341	-2.0073	-10890.7
-1.2848	2.5072	-2.8986	1.4275	0.96654	1.9915	-17891.5
-1.2848	2.5047	-2.8965	1.4265	0.96620	-1.9937	-18180.3
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $9i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5592	2.5008	-2.9404	1.4572	0.92196	1.8752	2.0
-1.5529	2.3743	-2.8411	1.4122	0.89368	2.1966	-2.0
-1.5542	2.5721	-2.9963	1.4830	0.93672	-1.1955	2.0
-1.5438	2.6183	-3.0318	1.4994	0.94629	-7.1403	-2.0001
-1.4904	2.0053	-2.5649	1.2965	0.77810	12.401	-2.0002
-1.4864	1.9895	-2.5537	1.2922	0.77173	14.307	2.0013
-1.4516	2.7056	-3.0882	1.5251	0.97071	-75.447	-1.99940
-1.4474	2.7060	-3.0878	1.5249	0.97125	-78.889	1.9707
-1.4112	2.7032	-3.0796	1.5206	0.97493	-107.60	-2.0095
-1.4130	2.7036	-3.0802	1.5210	0.97478	-106.23	1.9752

Tabela E.43: Dados das OPSs onde ocorrem trocas de estabilidade horizontal e vertical na família $9i$ (da Figura 3.37) que bifurca da família $3i$ (da Figura 3.37) com duplicação de período ($M = 3$) no sistema com $\mu_2 = 0.3$.

E.8 Das famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.4$

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.60983	-0.53570	3.2317	0.80806	1.1679	1.9998	27.913
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.6267	-1.2678	2.2461	1.1606	1.7477	-1.4005	-2.0
-1.5422	-1.2022	2.2198	1.1683	1.6866	-1.5053	-2.0
-0.99259	-0.82342	2.2509	1.1864	1.3569	-1.8290	1.9999

Tabela E.44: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular externa retrógrada (família $1i$ na Figura 3.42) no sistema com $\mu_2 = 0.4$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
0.72057	-1.1667	1.63052	0.73263	0.046506	2.0	-1.2990
0.79580	-1.4128	1.6681	0.79423	0.27518	-2.0	-2.2192
0.61697	-1.3956	1.7137	0.87010	0.14423	1.9999	-1.6005
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
0.77783	-1.3813	1.6604	0.78769	0.24585	-0.92042	-2.0
0.62532	-1.4639	1.7416	0.89738	0.18561	4.5931	-2.0
1.6295	-2.1349	1.9780	0.94850	0.82911	61.838	-1.9994
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
0.72057	-1.1666	1.6305	0.73261	0.046415	-2.0	-0.83729
0.91770	-1.0216	1.5968	0.61259	0.014763	-2.0	-0.52709

Tabela E.45: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular interna retrógrada (família $1ii$ na Figura 3.42) e na coorbital que bifurca dela (família $2ii$ na Figura 3.42) no sistema com $\mu_2 = 0.4$. O último ponto de troca de estabilidade horizontal e os dois últimos de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante II e os demais pertencem à família ressonante I (vide Figura 3.43).

E.9 Das famílias em um sistema com razão de massa $\mu_2 = 0.5$ - Problema de Copenhaga

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-0.61636	0.61701	-3.2308	0.13994	8.9821	2.0002	26.616
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $1i$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
-1.5906	1.2479	-2.2488	1.5566	0.12291	-1.4494	-2.0
-0.99044	0.85939	-2.2906	3.7990	1.3578	-1.7641	2.0

Tabela E.46: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular externa retrógrada (família $1i$ na Figura 3.46) no sistema com $\mu_2 = 0.5$.

Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
1.4206	0.24142	-1.9631	3.4794	1.2131	2.0	-5.3227
1.5198	0.27293	-2.0621	1.3578	1.5693	-2.0	-5.7059
0.95555	0.20564	-1.9751	2.5714	1.2744	1.9999	-1.1256
1.0594	0.088475	-1.7543	1.4703	0.59976	-2.0	-0.60973
Pontos de troca de estabilidade vertical na família $2ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
1.2216	0.058260	-1.6843	0.95543	0.41570	2.0947	-2.0
1.0429	0.29211	-2.2617	0.55728	2.4214	13.101	-2.0
1.3449	0.36785	-2.7405	0.21237	5.0866	32.021	-2.0
Pontos de troca de estabilidade horizontal na família $1ii$						
C_J	x_0	$\dot{y}_0$	a	e	$K2D$	$K3D$
1.2169	0.012325	-1.6690	0.81447	0.37098	-2.0	-0.38974

Tabela E.47: Dados dos pontos onde ocorrem mudança de estabilidade horizontal e vertical na família circular interna retrógrada (família $1ii$ na Figura 3.46) e na coorbital que bifurca dela (família $2ii$ na Figura 3.46) no sistema com $\mu_2 = 0.5$. Os dois últimos pontos de troca de estabilidade horizontal e os dois últimos pontos de troca de estabilidade vertical descritos pertencem à família ressonante II e os demais pertencem à família ressonante I (vide Figura 3.47).