

Introdução à Teoria de Poincaré-Bendixson para campos de vetores planares*

Otávio Henrique Perez e Tiago de Carvalho[†]

7 de julho de 2014

Resumo

O Teorema de Poincaré-Bendixson é um resultado muito importante no estudo de Sistemas Dinâmicos, pois ele estabelece para quais tipos de conjunto limite as trajetórias de um campo de vetores em $\mathbb{R}^2$ deve convergir. Neste trabalho vamos abordar a Função do Primeiro Retorno de Poincaré, além de discutir a estabilidade de Ciclos Limites e provar o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Palavras Chave: Sistemas de equações diferenciais ordinárias, campos de vetores, retratos de fase, conjunto limite, Teorema de Poincaré-Bendixson.

Introdução

Muitas vezes, ao nos depararmos com uma equação diferencial, não estamos interessados em sua solução numérica e sim em descobrir o comportamento do sistema a longo prazo. Com esta finalidade, temos que investigar o conjunto limite das trajetórias quando o tempo vai para infinito. O Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais planares aqui exposto responde esta pergunta.

1 A Teoria de Poincaré-Bendixson em $\mathbb{R}^2$

Vamos introduzir algumas definições fundamentais para o entendimento da teoria que será discutida ao longo deste trabalho. Todas elas podem ser encontradas em [1].

Definição 1.1 *Seja E um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(E)$. Para $x_0 \in E$, seja $\phi(t, x_0)$ a solução do PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= 0, \end{cases} \quad (1.0.1)$$

*definida no intervalo maximal $I(x_0) = (\alpha, \beta)$. Nessas condições, para todo $t \in I(x_0)$, a função $\phi_t : E \rightarrow E$, definida por $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ é chamada de **fluxo da equação diferencial** ou **fluxo do campo de vetores**.*

*Trabalho realizado durante estágio de iniciação científica financiado pela FAPESP (processo número 2013/09624-7)

[†]Emails: otavio_perez@hotmail.com e tcarvalho@fc.unesp.br

Considerando que o ponto x_0 está fixo, a função $\phi_t(x_0) : I \rightarrow E$ define a curva das soluções ou a trajetória do sistema de fluxo da equação diferencial passando pelo ponto $x_0 \in E$. A trajetória pode ser vista como a curva ao longo do movimento τ sobre o ponto x_0 no subconjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, conforme a Figura 1.

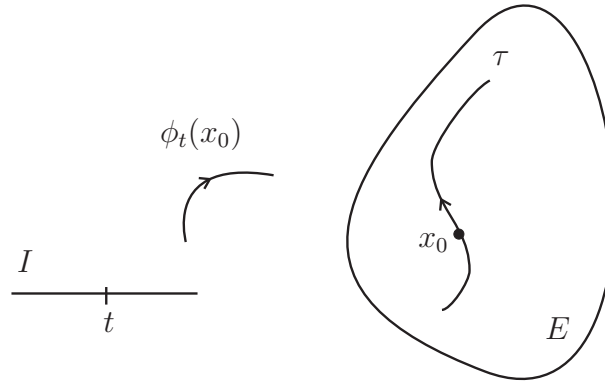


Figura 1: Trajetória

Se pensarmos no ponto x_0 variando sobre $K \subset E$, o fluxo $\phi_t : K \rightarrow E$ poderá ser visto como o movimento de todos os pontos no conjunto K , conforme a Figura 2.

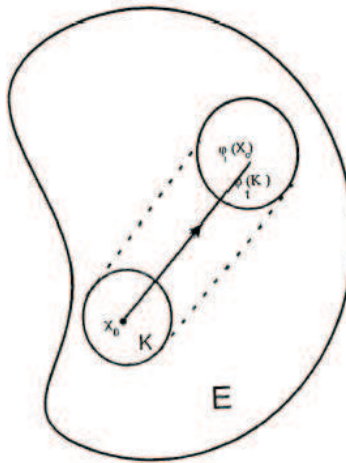


Figura 2: Movimento de todos os pontos do conjunto K

Agora, considere o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.0.2)$$

onde $f \in C^1(E)$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Para $x \in E$, a função $\phi(., x) : \mathbb{R} \rightarrow E$ define a **trajetória** ou **órbita** de (1.0.2) que passa pelo ponto x . Podemos pensar na trajetória $\phi(., x)$ que passa pelo ponto $x_0 \in E$ como a curva do movimento ao longo do tempo t . Assim, temos que $\Gamma_{x_0} = \{x \in E / x = \phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$ é a trajetória de (1.0.2) que passa pelo ponto x_0 em $t = 0$. Denotaremos a trajetória simplesmente por Γ , que será um subconjunto do espaço de fase $\mathbb{R}^n$. Na Figura 3, as setas indicam o movimento da trajetória a medida que o tempo passa.

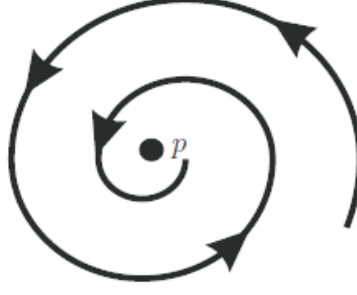


Figura 3: A trajetória Γ de (1.0.2) que tende ao ω -limite

Definição 1.2 A **trajetória positiva** de (1.0.2) que passa pelo ponto $x_0 \in E$ é dada por $\Gamma_{x_0}^+ = \{x \in E / x = \phi(t, x_0), t \geq 0\}$. Analogamente, a **trajetória negativa** de (1.0.2) que passa pelo ponto $x_0 \in E$ é dada por $\Gamma_{x_0}^- = \{x \in E / x = \phi(t, x_0), t \leq 0\}$.

Note que $\Gamma_{x_0} = \Gamma_{x_0}^+ \cup \Gamma_{x_0}^-$.

Definição 1.3 Um ponto $p \in E$ é um **ponto de ω -limite** da trajetória $\phi(t, x)$ do sistema (1.0.2) se existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = p.$$

Analogamente, dizemos que um ponto $q \in E$ é um **ponto de α -limite** da trajetória $\phi(t, x)$ do sistema (1.0.2) se existe uma sequência $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = q.$$

O conjunto de todos os pontos de ω -limite da trajetória $\phi(t, x)$ do sistema (1.0.2) é chamado de **conjunto ω -limite de Γ** e é denotado por $\omega(\Gamma)$. Analogamente, o conjunto de todos os pontos de α -limite da trajetória $\phi(t, x)$ do sistema (1.0.2) é chamado de **conjunto α -limite de Γ** e é denotado por $\alpha(\Gamma)$. O conjunto $\alpha(\Gamma) \cup \omega(\Gamma)$ é chamado de **conjunto limite de Γ** .

A seguir, vamos enunciar o Teorema do Fluxo Tubular, cuja demonstração está em [2]. A partir deste teorema, podemos perceber que a trajetória de pontos não singulares de um campo qualquer pode ser vista "simplificadamente" como as trajetórias de um campo constante, como mostra a Figura 4.

Teorema 1.1 (Teorema do Fluxo Tubular): Seja p um ponto não singular do campo $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r e $f : A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal local de X de classe C^r onde $f(0) = p$. Existe uma vizinhança V de p em Δ e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^r onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta do $\mathbb{R}^{n-1}$ de centro na origem $f^{-1}(p) = 0$ tal que

1. $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$,
2. h é uma C^r -conjugação entre $X|_V$ e o campo constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

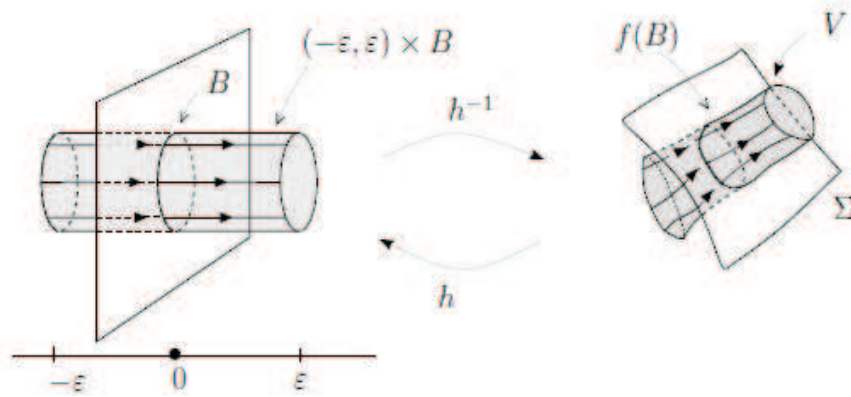


Figura 4: O Teorema do Fluxo Tubular

1.1 A Função de Poincaré

A **Função de Poincaré** ou **Função do Primeiro Retorno** é um resultado essencial no estudo de bifurcações e estabilidade de órbitas periódicas, cuja definição também pode ser encontrada tanto em [1] quanto em [2]. Seja Γ uma órbita periódica do sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.1.1)$$

que passa por x_0 e Σ é o hiperplano perpendicular a Γ em x_0 . Para todo ponto $x \in \Sigma$ suficientemente próximo de x_0 , a solução $\phi_t(x)$ de (1.1.1) que passa por x em t_0 interceptará Σ em um ponto $P(x)$ próximo de x_0 para $t \neq 0$. Chamamos a função $x \mapsto P(x)$ de **Função do Primeiro Retorno de Poincaré**. Note que Σ é a seção transversal de Γ em x_0 , isto é, Σ é uma superfície suave passando por $x_0 \in \Gamma$ e que não é tangente a Γ em x_0 , conforme mostra a Figura 5.

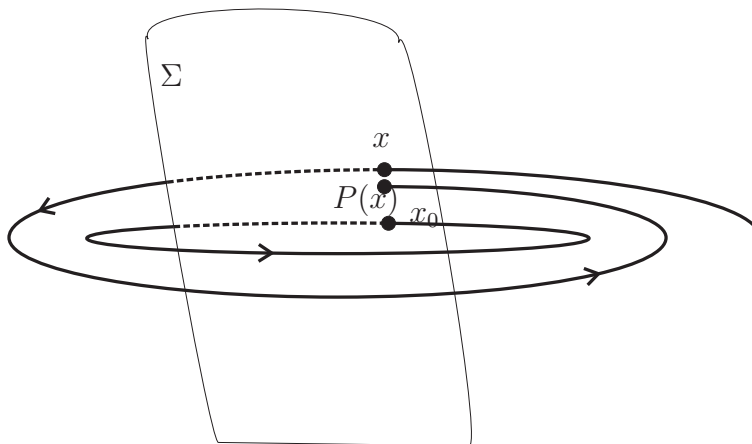


Figura 5: Função do Primeiro Retorno de Poincaré

A seguir veremos um resultado importante para provarmos a existência e a unicidade da Função de Poincaré $P(x)$ e de sua derivada $P'(x)$.

Teorema 1.2 (Teorema da Função Implícita) *Seja $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ um aberto e $f \in C^1(E)$. Suponhamos que $(a, b) \in E$ é tal que $f(a, b) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$. Então, existe uma vizinhança $N_\delta(b)$ ($b \in \mathbb{R}^m$) e uma única função $g \in C^1(N_\delta(b))$ tal que*

$g(b) = a$ e $f(g(y), y) = 0$, para todo $y \in N_\delta(b)$. Ou seja, a função g é definida implicitamente pela função f .

Teorema 1.3 *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f \in C^1(E)$. Suponhamos que $\phi_t(x_0)$ é uma solução periódica de (1.1.1) de período T e que o ciclo $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \phi(t, x_0), 0 \leq t \leq T\}$ está contido em E . Seja Σ um hiperplano ortogonal à Γ em x_0 , ou seja,*

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Existe $\delta > 0$ e uma única função $\tau(x) \in C^1(E)$ para $x \in N_\delta(x_0)$ tal que $\tau(x_0) = T$ e $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma$, para todo $x \in N_\delta(x_0)$.

Demonstração: Seja $x_0 \in \Gamma \cap \Sigma$. Definimos a função

$$F(t, x) = [\phi(t, x) - x_0] \cdot f(x_0).$$

Como $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times E)$, temos que $F \in C^1(\mathbb{R} \times E)$. Além disso, como ϕ é periódica de período T , segue que $F(T, x_0) = [\phi(T, x_0) - x_0] \cdot f(x_0) = (x_0 - x_0) \cdot f(x_0)$. Dessa forma, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial t}(T, x_0) = \frac{\partial \phi(T, x_0)}{\partial t} \cdot f(x_0) = f(x_0) \cdot f(x_0) = |f(x_0)|^2 \neq 0,$$

pois x_0 não é ponto de equilíbrio do sistema (1.1.1).

Segue do Teorema da Função Implícita que existe $\delta > 0$ e uma única função $\tau(x) \in C^1(N_\delta(x_0))$ tal que $\tau(x_0) = T$ e $F(\tau(x), x) = 0$, para todo $x \in N_\delta(x_0)$. Consequentemente, $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma$, para todo $x \in N_\delta(x_0)$. $\square$

Definição 1.4 *Sejam Γ , Σ , δ e $\tau(x)$ definidos como no teorema acima. Para $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$, a função $P(x) = \phi(\tau(x), x)$ é chamada de **Função de Poincaré** em x_0 .*

Note que recorre do Teorema anterior que $P \in C^1(N_\delta(x_0) \cap \Sigma)$.

Exemplo 1.1 *Vamos analisar o seguinte sistema proposto em [1]:*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares ($x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$) e derivando o sistema em relação à r , obtemos

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta &= -r \sin \theta + r \cos \theta (1 - r^2) \\ \dot{r} \sin \theta &= r \cos \theta + r \sin \theta (1 - r^2). \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $\cos \theta$ e a segunda por $\sin \theta$ e em seguida somando ambas, obtemos $\dot{r} = r(1 - r^2)$. Se derivarmos o sistema em relação à θ , teremos $\dot{\theta} = 1$ e, portanto,

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases}$$

Note que

- Para $r = 1$, temos $\dot{r} = 0$ e, portanto, o fluxo não repele e nem atrai.
- Para $r > 1$, temos $\dot{r} < 0$ e, portanto, o fluxo é um foco atrator com raio decrescente.

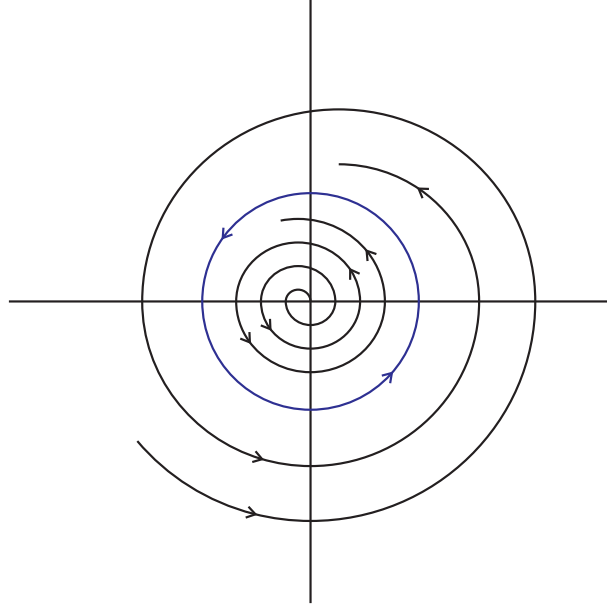


Figura 6: Retrato de Fase

- Para $r < 1$, temos $\dot{r} > 0$ e, portanto, o fluxo é um foco repulsor com raio crescente.
- A origem é um ponto de equilíbrio do sistema e o fluxo é anti-horário.

A trajetória que passa pelo ponto $(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ em $t = 0$ no círculo unitário é dada por $x(t) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$. Veja a Figura 6

A Função de Poincaré deste exemplo pode ser obtida encontrando as soluções do sistema que foi reescrito com coordenadas polares, ou seja, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1, \end{cases}$$

com $r(0) = r_0$ e $\theta(0) = \theta_0$.

Usando o método das equações diferenciais separáveis e aplicando a condição inicial, obtemos as seguintes soluções:

$$r(t, r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\theta(t, \theta_0) = t + \theta_0,$$

Se Σ é o raio que forma um ângulo θ_0 com o eixo x , segue que Σ é perpendicular a Γ , onde Γ é a trajetória que passa por $(r_1, \theta_0) \in \Sigma \cap \Gamma$ em $t = 0$. Note que $T = 2\pi$.

A Função de Poincaré para este exemplo é dada por

$$\phi(\tau(x), x) = \phi(T, x) = P(r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

e

$$P'(r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-\frac{3}{2}} e^{-4\pi} r_0^{-3}.$$

Como $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$, temos que este ciclo limite é atrator, conforme a Figura 7.

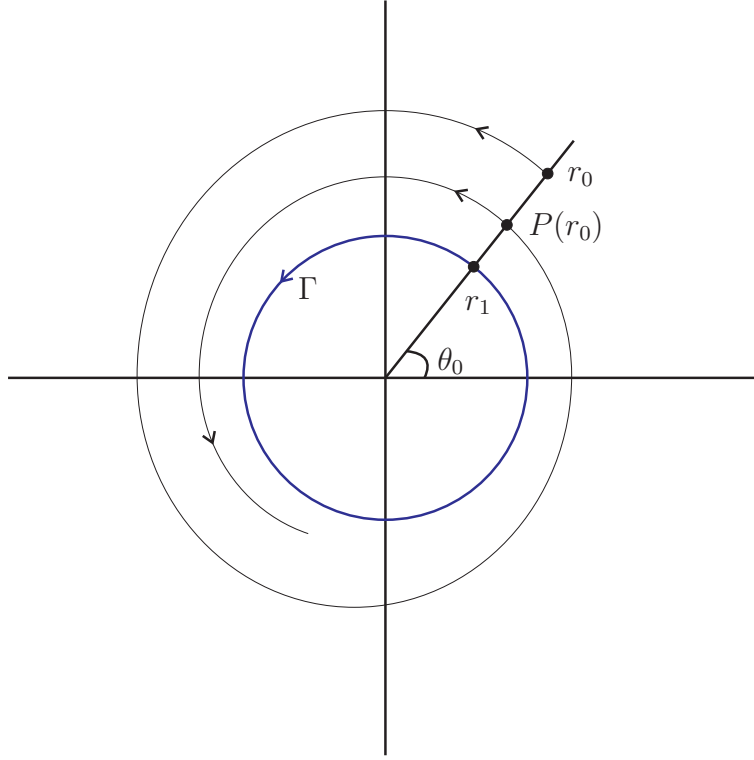


Figura 7: Função de Poincaré

Teorema 1.4 (Teorema do Valor Médio de Lagrange) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Definição 1.5 Uma **Curva de Jordan** é uma curva fechada e simples que separa o plano em duas regiões (uma limitada e outra ilimitada), sendo o traço da curva a fronteira comum entre as duas regiões. Sendo Γ uma curva fechada, segue que Σ é dividido em dois segmentos abertos Σ^+ (localizado no exterior da curva) e Σ^- (localizado no interior da curva). Veja a Figura 8

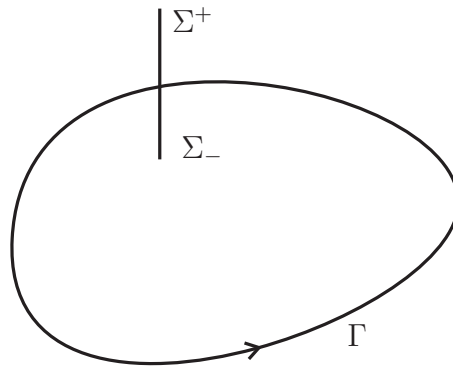


Figura 8: Curva de Jordan

Observação 1.1 Seja s o sinal da distância ao longo de Σ ($s > 0$ para pontos em Σ^+ e $s < 0$ para pontos em Σ^-). Vamos classificar os ciclos limites a partir do sinal de $P'(0) - 1$, onde $P(x)$ é a Função de Poincaré.

Considere a função distância dada por

$$d(s) = P(s) - s.$$

Segue que $d(0) = 0$ e $d'(s) = P'(s) - 1$. Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, para $|s| < \delta$ existe $\theta \in (0, s)$ tal que

$$d'(\theta) = \frac{d(s) - d(0)}{s - 0} = \frac{d(s)}{s} = \frac{P(s) - s}{s}$$

$$d(s) = d'(\theta)s.$$

Como $d'(s)$ é contínua, temos que se $d'(0) \neq 0$, então $d'(s)$ terá o mesmo sinal de $d'(0)$ para $|s|$ suficientemente pequeno.

Temos os seguintes casos:

- Se $d(s) < 0$ para $s > 0$, então $d'(0) < 0$ e o ciclo limite é atrator.
- Se $d(s) > 0$ para $s < 0$, então $d'(0) < 0$ e o ciclo limite é atrator.
- Se $d(s) > 0$ para $s > 0$, então $d'(0) > 0$ e o ciclo limite é repulsor.
- Se $d(s) < 0$ para $s < 0$, então $d'(0) > 0$ e o ciclo limite é repulsor.

Observe que se $d'(s) > 0$, então $P'(s) > 1$, e assim, Γ é repulsor. Analogamente, se $d'(s) < 0$, então $P'(s) < 1$, e assim, Γ é atrator.

Definição 1.6 Uma matriz $\phi(t)$ de ordem $n \times n$ cujas colunas formam uma base do espaço de soluções do sistema $\dot{x} = Ax$ chama-se **matriz fundamental** de $\dot{x} = Ax$.

Observação 1.2 Vamos assumir que

$$\varphi'(t) = (\det \phi(t))' = \sum_{i=1}^n \det(\phi_1(t), \dots, \phi'_i(t), \dots, \phi_n(t)).$$

Teorema 1.5 (Fórmula de Liouville) Seja $\phi(t)$ a matriz cujas colunas são soluções do sistema $\dot{x} = Ax$. Então, para todo $t, t_0 \in I$ com t_0 fixo e $I \cap \mathbb{R}$ é um intervalo, vale

$$\det \phi(t) = \det[\phi(t_0)] \int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds.$$

Ideia da Demonstração: Vamos demonstrar para $n = 2$. Para tal, basta provarmos que $\varphi(t) = \det \phi(t)$ é solução de $\dot{x} = [\text{tr} A(t)]x$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [\text{tr} A(t)]x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = [\text{tr} A(t)]x \Rightarrow \frac{dx}{x} = [\text{tr} A(t)]dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^t [\text{tr} A(s)]ds \Rightarrow e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s)ds} = \frac{|x(t)|}{|x(t_0)|}. \end{aligned}$$

Substituindo x por ϕ_t , obtemos

$$|\det \phi_t| = |\det \phi_{t_0}| e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s)ds}.$$

Denotando $A(t) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t) & \beta_{12}(t) \\ \beta_{21}(t) & \beta_{22}(t) \end{pmatrix}$ e considerando a hipótese de que $\dot{x} = [\text{tr} A(t)]x$, segue que $\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$. Assim, temos

$$\begin{pmatrix} \phi_1'(t) \\ \phi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t) & \beta_{12}(t) \\ \beta_{21}(t) & \beta_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1'(t) \\ \phi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t)\phi_1(t) + \beta_{12}(t)\phi_2(t) \\ \beta_{21}(t)\phi_1(t) + \beta_{22}(t)\phi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $\varphi'(t) = \det(\phi_1'(t), \phi_2(t)) + \det(\phi_1(t), \phi_2'(t))$. Substituindo os valores de $\phi_1'(t)$ e $\phi_2'(t)$, segue que

$$\varphi'(t) = \det(\beta_{11}(t)\phi_1(t) + \beta_{12}(t)\phi_2(t), \phi_2(t)) + \det(\phi_1(t), \beta_{21}(t)\phi_1(t) + \beta_{22}(t)\phi_2(t)).$$

Resolvendo na forma matricial,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \begin{vmatrix} \beta_{11}(t)\phi_1(t) + \beta_{12}(t)\phi_2(t) \\ \phi_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_1(t) \\ \beta_{21}(t)\phi_1(t) + \beta_{22}(t)\phi_2(t) \end{vmatrix} \\ \varphi'(t) &= \begin{vmatrix} \beta_{11}(t)\phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{12}(t)\phi_2(t) \\ \phi_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_1(t) \\ \beta_{21}(t)\phi_1(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_1(t) \\ \beta_{22}(t)\phi_2(t) \end{vmatrix} \\ \varphi'(t) &= \begin{vmatrix} \beta_{11}(t)\phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{vmatrix} + 0 + 0 + \begin{vmatrix} \phi_1(t) \\ \beta_{22}(t)\phi_2(t) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\varphi'(t) = \beta_{11}(t) \det \phi(t) + \beta_{22}(t) \det \phi(t) = (\beta_{11}(t) + \beta_{22}(t)) \det \phi(t) = \text{tr} A(t) \det \phi(t).$$

Para mostrar o caso geral, basta utilizarmos o mesmo raciocínio. $\square$

1.2 Ciclos Limites no Plano

A seguir, vamos introduzir algumas definições e demonstrar uma proposição, conforme [2].

Definição 1.7 Sejam $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Dizemos que uma órbita periódica γ de X é um **ciclo limite** se existir uma vizinhança V de γ tal que γ é um órbita fechada de X e intercepta V .

Definição 1.8 Sejam $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 e γ uma órbita fechada de X . Denotamos $\text{Ext}\gamma$ e $\text{Int}\gamma$ como, respectivamente, o **Exterior da Órbita** γ e **Interior da Órbita** γ .

Proposição 1.1 Seja φ a solução do sistema $\dot{x} = f(x)$. Nas condições das definições acima, existem apenas três tipos de ciclos limites:

- (a) **Atrator**, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in V$
- (b) **Repulsor**, quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in V$
- (c) **Semi-estável**, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in V \cap \text{Ext}\gamma$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in V \cap \text{Int}\gamma$, ou o contrário.

Demonstração: Suponhamos que em X temos uma V -vizinhança que não contém singularidades. Seja $p \in \gamma$, Σ uma seção transversal a γ passando por p e $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ a função de Poincaré, conforme a Figura 9.

Vamos considerar o sentido positivo de Σ de $\text{Ext}\gamma$ para $\text{Int}\gamma$. Dado $q \in \Sigma \cap \text{Ext}\gamma$, temos que $\pi(q) > q$ ou $\pi(q) < q$. Vamos analisar o caso quando $\pi(q) > q$.

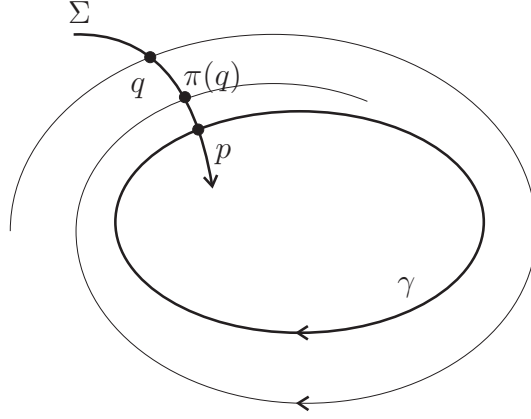


Figura 9: Seção transversal e aplicação de primeiro retorno.

Considere a região A limitada por γ , o arco da trajetória $\widehat{q\pi(q)}$ e pelo segmento $\overline{q\pi(q)} \subset \Sigma$. Dado $x \in A$, $\varphi(t, x) \in A$ para todo $t \geq 0$, isto é, a região A é o homeomorfa a uma anel e positivamente invariante devido a unicidade e a orientação das órbitas. Além disso, $\varphi(t, x)$ intercepta Σ numa sequência monótona x_n que converge para p . Logo, o ciclo limite é atrator quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$.

Se $\pi(q) < q$, basta considerar o campo $-X$ e repetir o mesmo raciocínio para concluir que um ciclo limite é repulsor quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$.

As mesmas considerações podem ser feitas em $\text{Int}\gamma$. Combinando todas as possibilidades, provamos a proposição. $\square$

Observação 1.3 Temos que γ é um ciclo limite se, e somente se, p é um ponto fixo isolado de π . Assim, temos

- (a) γ é **Atrator** se, e somente se, $|\pi(x) - p| < |x - p|$, para todo $x \neq p$ próximo de p .
- (b) γ é **Repulsor** se, e somente se, $|\pi(x) - p| > |x - p|$, para todo $x \neq p$ próximo de p .
- (c) γ é **Semi-estável** se, e somente se, $|\pi(x) - p| < |x - p|$, para todo $x \in \Sigma \cap \text{Ext}\gamma$ próximo de p e $|\pi(x) - p| > |x - p|$, para todo $x \in \Sigma \cap \text{Int}\gamma$ próximo de p , ou o contrário.

Veja a Figura 10

Pelo Teorema do Valor Médio, temos $\pi'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{|\pi(x) - \pi(p)|}{|x - p|} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{|\pi(x) - p|}{|x - p|}$. Assim, se $\pi'(x) > 1$, então γ é repulsor, e se $\pi'(x) < 1$, então γ é atrator.

1.3 Derivadas da Transformação de Poincaré

O Teorema a seguir estabelece uma condição suficiente para classificar uma órbita periódica.

Teorema 1.6 Sejam $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $X = (X_1, X_2) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Seja γ uma órbita periódica de X de período T e $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ a transformação de Poincaré numa seção transversal Σ a γ passando por p . Então,

$$\pi'(p) = \exp\left[\int_0^T \text{div}X(\gamma(t))dt\right],$$

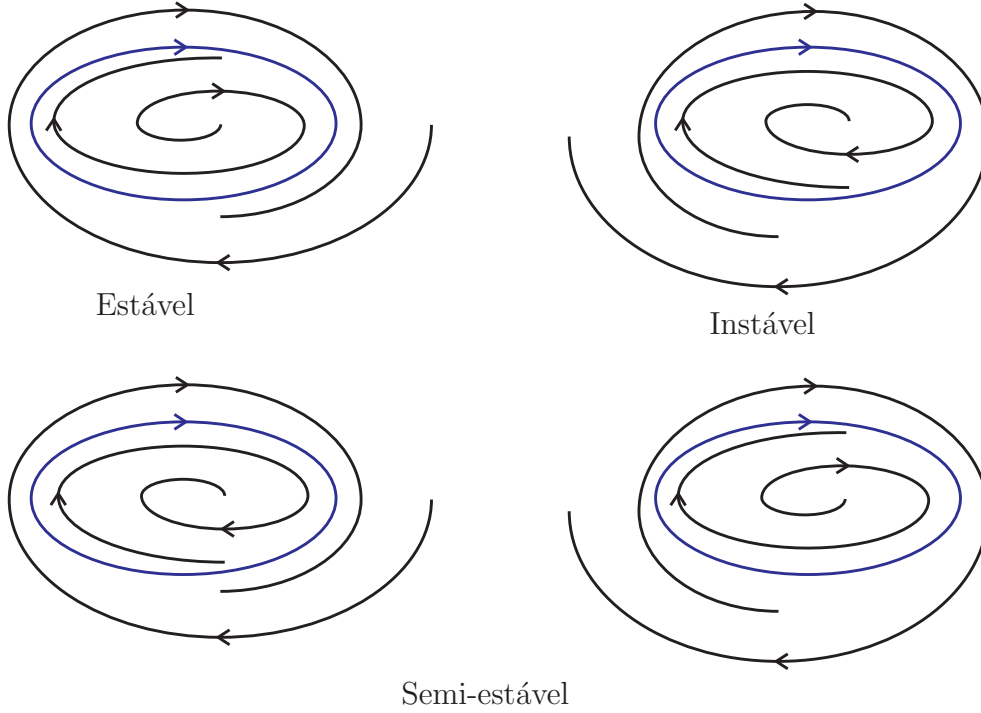


Figura 10: Ciclos limites

onde $\text{div}X(x) = D_1X_1(x) + D_2X_2(x)$. Se $\int_0^T \text{div}X(\gamma(t))dt < 0$, então γ é atrator, e se $\int_0^T \text{div}X(\gamma(t))dt > 0$, então γ é repulsor.

A seguir, vamos enunciar o **Teorema de Poincaré-Bendixson** conforme [2] e demonstrá-lo. Ele é um resultado de importância ímpar e que serve para classificar o conjunto limite de trajetórias.

Teorema 1.7 (O Teorema de Poincaré-Bendixson): Sejam $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^k com $k \geq 1$, $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma curva integral e a semiórbita positiva $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) / t \geq 0\}$ tal que esteja contida num compacto $K \subset \Delta$.

Suponha que X possua um número finito de singularidades em $\omega(p)$. Temos três possibilidades:

- (a) Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.
- (b) Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ é um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando $t \rightarrow \pm\infty$.
- (c) Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.

Demonstração: Antes de provar este teorema, vamos apresentar e demonstrar quatro Lemas.

Lema 1.1 Seja Σ uma seção transversal a X e $\gamma = \{\varphi(t)\}$ uma órbita de X . Se $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$, então p pode ser expresso como limite de uma sequência de pontos $\varphi(t_n)$ onde $t_n \rightarrow \infty$

Demonstração: Por hipótese, sabemos que $\gamma = \{\varphi(t)\} = \{\varphi(t, q)\}$ e $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$. Consideremos uma vizinhança V de p e a aplicação $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$. Como $p \in \omega(\gamma)$, existe uma sequência $(\tilde{t}_n)$ tal que $(\tilde{t}_n) \rightarrow \infty$ e $\varphi(\tilde{t}_n) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$. Dessa forma, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(\tilde{t}_n) \in V$, para todo $n \geq n_0$.

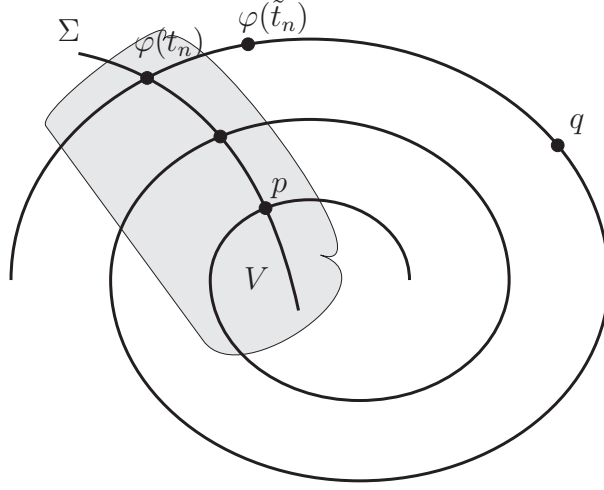


Figura 11: Ilustração do Lema (1.1)

Se $t_n = \tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n))$, temos

$$\varphi(t_n) = \varphi(t_n, q) = \varphi(\tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n)), q) = \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)),$$

e, por definição de τ , segue que $\varphi(\tilde{t}_n) \in \Sigma$. Como a aplicação τ é contínua, obtemos

$$\lim \varphi(t_n) = \lim \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)) = \varphi(\tau(\lim \varphi(\tilde{t}_n)), \lim \varphi(\tilde{t}_n)) = \varphi(\tau(p), p) = \varphi(0, p) = p.$$

□

Observação 1.4 Note que a seção transversal Σ possui dimensão $k = 1$, pois estamos considerando um campo vetorial $X \subset \mathbb{R}^2$. Dessa forma, localmente Σ é a imagem difeomorfa de um intervalo de $\mathbb{R}$ e assim, Σ possui uma ordenação total induzida pela ordenação total do intervalo. Por isso podemos falar em sequências monótonas em Σ .

Lema 1.2 Seja Σ uma seção transversal a $X \subset \Delta$. Se γ é uma órbita de X e $p \in \Sigma \cap \gamma$, então $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) / t > 0\}$ intercepta Σ em uma sequência monótona $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$.

Demonstração: Seja $D = \{t \in \mathbb{R}^+ / \varphi(t, p) \in \Sigma\}$. Decorre do Teorema do Fluxo Tubular que D é discreto. Portanto, podemos ordenar o conjunto

$$D = \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}.$$

Seja $p_1 = p$ e definimos $p_n = \varphi(t_{n-1}, p)$. Se $p_1 = p_2$, então γ é uma trajetória fechada de período $\tau = t_1$ e $p_n = p$ para todo n . Se $p_1 \neq p_2$, vamos tomar $p_1 < p_2$ e, caso exista p_3 , vamos mostrar que $p_3 > p_2$.

Orientamos a seção transversal Σ conforme a Figura 12 (a). Observe que, como Σ é conexo e o campo X é contínuo, as órbitas de X cruzam Σ sempre no mesmo sentido, como mostra a Figura 12 (b).

Consideremos agora a Curva de Jordan formada pela união do seguimento $\overline{p_1 p_2} \subset \Sigma$ com o arco $\widehat{p_1 p_2}$, como na Figura 13.

A partir de p_2 , a órbita γ fica contida na região S limitada pela curva (isto é, para valores de $t > t_1$). De fato, ela não pode interceptar o arco $\widehat{p_1 p_2}$ devido à unicidade das órbitas e não pode interceptar o segmento $\overline{p_1 p_2}$ porque iria contrariar o sentido do fluxo, como mostra a Figura 14.

Assim, caso exista p_3 , teremos $p_1 < p_2 < p_3$. Analogamente, obteremos $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ e, portanto, $\{p_n\}$ é uma sequência monótona. O raciocínio é análogo para $p_1 > p_2$. □

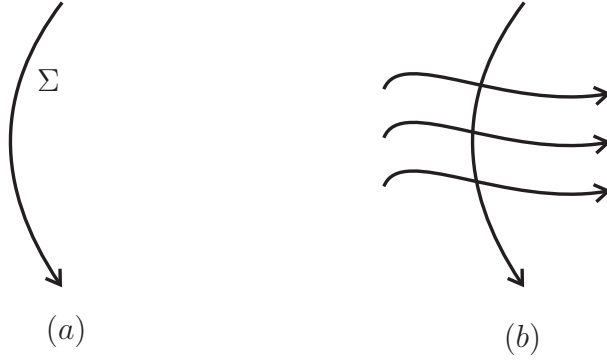


Figura 12: Seção transversal.

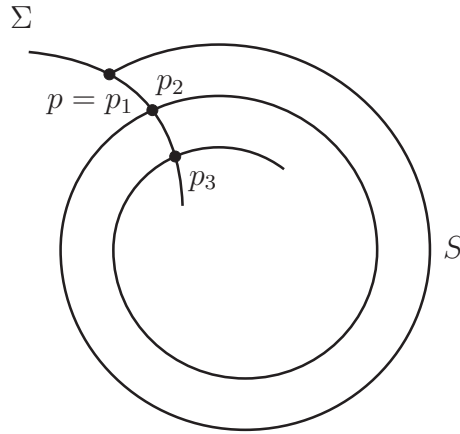


Figura 13: Curva de Jordan.

Lema 1.3 Se Σ é uma seção transversal ao campo X e $p \in \Delta$, então Σ intercepta $\omega(p)$ no máximo em um único ponto.

Demonstração: O conjunto de pontos γ_p^+ em Σ tem no máximo um ponto limite, pois pelo Lema (1.2) o mesmo forma uma sequência monótona. Daí, $\lim_{t_n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = p$. $\square$

Lema 1.4 Sejam $p \in \Delta$ com γ_p^+ contida num compacto e γ uma órbita de X com $\gamma \subset \omega(p)$. Se $\omega(\gamma)$ contém pontos regulares, então γ é uma órbita fechada e $\omega(p) = \gamma$.

Demonstração: Sejam $q \in \omega(\gamma)$ um ponto regular, V uma vizinhança de q e Σ_q a seção transversal correspondente. Pelo Lema (1.1), existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\gamma(t_n) \in \Sigma_q$ e $\gamma(t_n) \rightarrow q \in \omega(\gamma)$. Pelo Lema (1.3), a sequência $\{\gamma(t_n)\}$ reduz-se a um ponto e isso prova que γ é periódica.

Provemos agora que $\gamma = \omega(p)$. Como $\gamma(p)$ é conexo e γ é um conjunto fechado e não vazio, basta mostrar, por absurdo, que γ é aberto em $\omega(p)$.

Sejam $\bar{p} \in \gamma$, $V_{\bar{p}}$ uma vizinhança de $\bar{p}$ em γ e $\Sigma_{\bar{p}}$ a seção transversal correspondente. Vamos mostrar que $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Obviamente, $V_{\bar{p}} \cap \gamma \subset V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Por contradição, suponhamos que exista $\bar{q} \in V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ tal que $\bar{q}$ não pertence à γ . Pelo **Teorema do Fluxo Tubular** e pela Invariância de $\omega(p)$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, \bar{q}) \in \omega(p) \cap \Sigma_{\bar{p}}$ e $\varphi(t, \bar{q}) \neq \bar{p}$. Daí, existem dois pontos distintos de $\omega(p)$ em $\Sigma_{\bar{p}}$, o que é impossível pelo Lema (1.3), logo $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$.

Sendo $U = \bigcup_{\bar{p} \in \gamma} V_{\bar{p}}$ é aberto em $\omega(p)$, então $\gamma \subset \omega(p)$ e $U \cap \omega(p) = U \cap \gamma = \gamma$. Dessa forma, γ é aberto em $\omega(p)$. $\square$

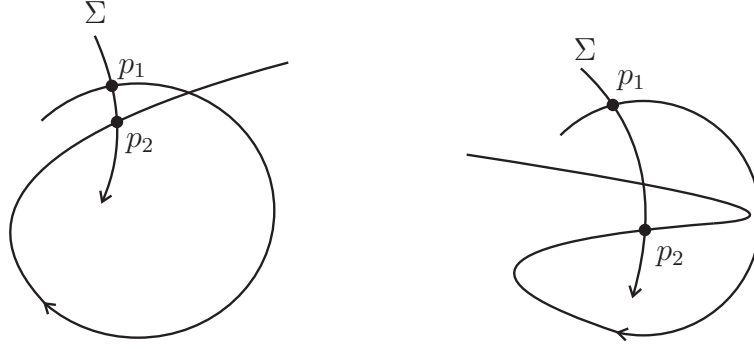


Figura 14: Impossibilidades

Agora, podemos continuar com demonstração do Teorema.

1. Se ocorre a hipótese **(a)** e $q \in \omega(p)$, então a órbita $\gamma_q \subset \omega(p)$. Sendo $\omega(p)$ compacto resulta que $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$. Segue do Lema (1.4) que $\omega(p) = \gamma_q$, que é uma órbita periódica. Veja a Figura 15.

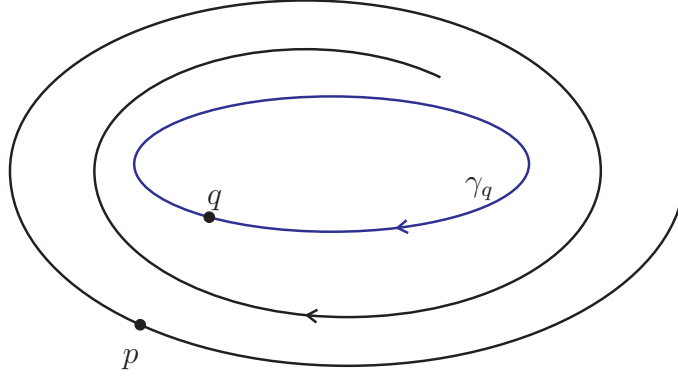


Figura 15: Órbita Periódica.

2. Se ocorre a hipótese **(b)**, temos que se γ for reduzido a um único ponto singular, então $\omega(\gamma)$ é um ponto singular. Caso γ não for reduzido a pontos singulares (ou seja, $\omega(p)$ contém pontos regulares), então $\omega(\gamma)$ contém apenas pontos singulares, pois se tiver apenas pontos regulares, pelo Lema (1.4) seria uma órbita fechada, o que é um absurdo. Mais ainda, reduz-se a um único ponto singular, pois é conexo. Veja a Figura 16.
3. Se ocorre a hipótese **(c)**, temos que a órbita irá convergir em um compacto, pois toda trajetória contida em um compacto possui uma subsequência que converge. Como $\omega(p)$ é conexo, a trajetória converge para um único ponto singular. Veja a Figura 17.

□

Vamos usar o Teorema acima para analisar o exemplo proposto por [2].

Exemplo 1.2 Seja X um campo vetorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ que não possui pontos singulares em $B_{r,R} = \{(x,y)/r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$, com $0 < r < R$. Se X aponta para o interior de $B_{r,R}$ em todo ponto de sua fronteira, então X tem uma órbita periódica em $B_{r,R}$, pois neste caso se a órbita não fosse periódica, ela estaria limitada em um compacto $K \subset B_{r,R}$ que contém um ponto singular, o que é um absurdo. O retrato de fase deste exemplo está na Figura 18.

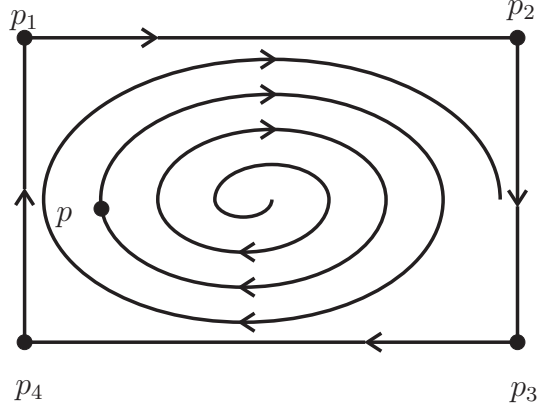


Figura 16: $\omega(p)$ é um conjunto de órbitas que tendem aos pontos singulares quando $t \rightarrow \pm\infty$

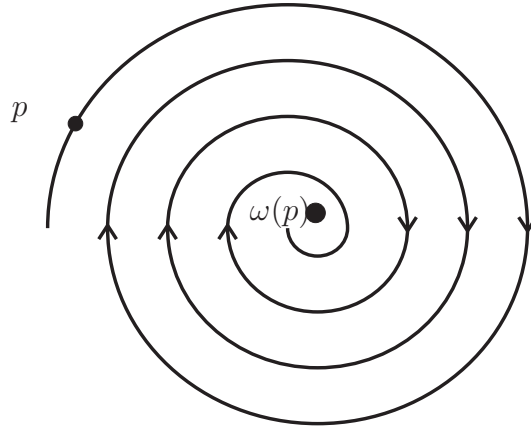


Figura 17: Convergência.

1.4 Pontos Singulares no Interior de Uma Órbita Periódica

O Teorema a seguir é uma aplicação do Teorema de Poincaré-Bendixon, como pode ser visto em [2].

Teorema 1.8 *Seja X um campo vetorial de classe C^1 num conjunto aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Se γ é uma órbita fechada de X tal que $\text{Int}\gamma \subset \Delta$, então existe um ponto singular de X contido em $\text{Int}\gamma$.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que não existem pontos singulares em $\text{Int}\gamma$. Considerando o conjunto Γ de órbitas fechadas de X contidas em $\overline{\text{Int}\gamma}$, ordenadas segundo a seguinte ordem

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \rightarrow \overline{\text{Int}\gamma_1} \supseteq \overline{\text{Int}\gamma_2},$$

mostraremos que todo subconjunto S totalmente ordenado de Γ admite uma cota superior, isto é, um elemento maior ou igual que qualquer elemento de S . Um conjunto nessas condições chama-se indutivo.

De fato, seja $\sigma = \{\cap \text{Int}\gamma_i / \gamma_i \in S\}$. Note que $\sigma \neq \emptyset$, pois cada $\text{Int}\gamma_i$ é compacto e a família $\{\cap \text{Int}\gamma_i / \gamma_i \in S\}$ tem a propriedade da Intersecção Finita (qualquer intersecção finita de elemento da família é não vazia).

Seja $q \in \sigma$. Pelo Teorema (1.7), $\omega(q)$ é uma órbita periódica contida em σ , pois este conjunto é invariante por X e não contém pontos singulares. Esta órbita é uma cota superior de S

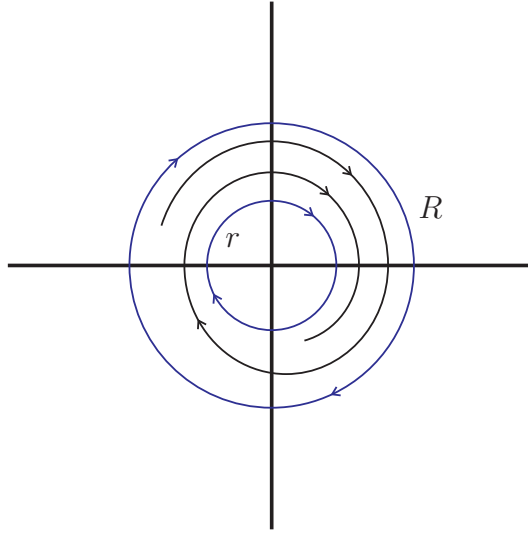


Figura 18: Figura Exemplo 1.2.

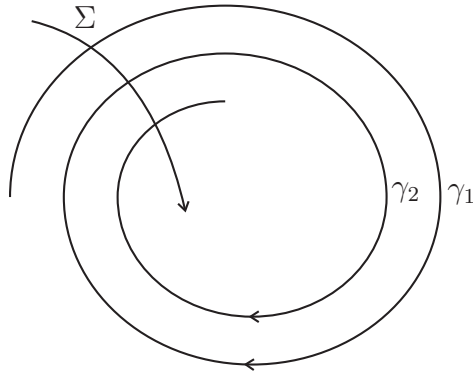


Figura 19: O conjunto Γ de órbitas fechadas de X

O Lema de Zorn nos diz que se em um conjunto não vazio e parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado tem uma cota superior, então o conjunto tem um elemento maximal. Seja μ o elemento maximal. Isto quer dizer que não existe nenhuma órbita fechada de Γ contida em $\text{Int}\mu$. Por outro lado, $p \in \text{Int}\mu$ e $\alpha(p), \omega(p)$ são órbitas fechadas pelo Teorema de Poincaré-Bendixson (pois não possuem pontos singulares). Como $\alpha(p)$ e $\omega(p)$ não podem ser iguais a μ , um deles estará contido em $\text{Int}\mu$, o que é um absurdo, pois μ é elemento maximal.

Esta contradição prova que devem existir pontos singulares em $\text{Int}\gamma$. $\square$

Referências

- [1] PERKO, L., *Differential equations and dynamical systems, Texts in Applied Mathematics*, 7, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.