



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.004/96

Dinâmica Assintótica na QED_3

José Luis Boldo

Orientador

Bruto Max Pimentel Escobar



Agosto 1996

Índice

Introdução	1
1 Estudo Semi-clássico da QED₃	4
1.1 Formulação do Método	4
1.2 Aplicações: Pequenas Perturbações Atuando no Elétron	11
2 Dinâmica Assintótica	18
2.1 A Matriz S de Dyson	18
2.2 Espalhamento Coulombiano Não Relativístico	23
2.3 Construção do Operador Assintótico na QED ₃	25
2.4 Espectro de Frequências	33
3 Espaço de estados de Fótons	40
3.1 Espaço de Estados Coerentes	40
3.2 Espaço de Estados Assintóticos	44
4 Considerações Finais	49

Agradecimentos

Ao Prof. Pimentel pela boa orientação, pelo apoio e por ter me auxiliado em várias situações.

Ao Jeferson, pelas discussões sobre o assunto deste trabalho.

Ao Randall, pela ajuda no uso do editor de textos.

Ao Gargamel, por ter me apresentado ao Prof. Pimentel e ter se demonstrado muito prestativo.

Ao Orimar, pela contribuição para o meu aprendizado na graduação.

Aos meus pais e irmãos, com quem sempre posso contar.

À todos os meus amigos.

Aos professores e funcionários do IFT.

Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho faremos um estudo da dinâmica assintótica na QED_3 , em processos de espalhamento de partículas carregadas. Assintoticamente, a contribuição dos fótons emitidos vem do setor infravermelho, onde divergências aparecem na teoria. Para corrigir este problema é proposto uma redefinição do operador S , além da introdução de um novo espaço de estados assintóticos que não é equivalente unitário à representação de Fock usual. Deste modo, obtém-se resultados finitos para os elementos de matriz desse operador.

Palavras Chave: QED_3 , Divergências no infravermelho, Dinâmica assintótica.

Área de conhecimento: 1.05.03.01-5

Abstract

In this work we shall present a study of the asymptotic dynamics in scattering processes involving charged particles in QED_3 . Asymptotically, the contribution of the emitted photons comes from the infrared region, where the theory is divergent. In order to circumvent this problem, it is proposed a redefinition of the S-operator as well as the introduction of a new space of asymptotic states, which is unitarily inequivalent to the usual Fock representation. As a result, we obtain finite matrix elements for this operator.

Keywords: QED_3 , Infrared Divergences, Asymptotic Dynamics.

Introdução

O método usado na QED₄ para tratar processos não estacionários tais como o espalhamento de elétrons por um potencial externo com a emissão de um número finito de fótons de baixa energia, usando a expansão da matriz S em potências de e^2 , leva ao surgimento de divergências nas amplitudes de probabilidade destes processos. Em particular, a probabilidade de espalhamento de um elétron com a emissão simultânea de um fóton no elemento de ângulo sólido $d\Omega$ e no intervalo de frequência $d\omega$, é [1][2]

$$w = w_0 \frac{e^2}{(2\pi)^3} d\Omega \frac{d\omega}{2\omega} \sum_{\lambda=1,2} \left| \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \left(\frac{\vec{p}}{p' \cdot \vec{k}} - \frac{\vec{p}}{p \cdot \vec{k}} \right) \right|^2,$$

onde w_0 é a probabilidade de espalhamento elástico do elétron sem a emissão de fótons, k é o momento do fóton emitido e o elétron tem uma variação de seu momento de p para p' . Daí, vemos que a probabilidade de emissão de um fóton possui um comportamento

$$\frac{d\omega}{\omega},$$

independente do ângulo de espalhamento, de modo que a probabilidade total é logaritmicamente divergente para baixas frequências. Estas divergências no setor de baixas frequências são conhecidas como divergências no infravermelho.

Este problema está associado ao fato de que o número médio de fótons emitidos pela partícula espalhada tende para infinito quando a frequência desses fótons tende para zero. De fato, em um experimento envolvendo partículas carregadas sempre há uma imprecisão na medida da energia do estado final e esta imprecisão pode ser formada por um número infinito de fótons de baixa energia.

O primeiro estudo levando em consideração o efeito coletivo de fótons de baixa energia foi efetuado por Bloch e Nordsieck (B-N) [3] no final dos anos 30. Eles mostraram que a probabilidade de emissão de um número finito de fótons de baixa energia é zero e não infinita como prevê a teoria de perturbação. Por outro lado, quando a probabilidade de transição é somada sob todos os possíveis estados finais, de acordo com os fatos experimentais, obtém-se um resultado finito.

Podemos investigar o problema de divergências no setor infravermelho do ponto de vista semi-clássico [4], se usarmos a aproximação de que a emissão de fótons de baixa energia não afeta o movimento do elétron. Suponhamos, por exemplo, que um elétron seja espalhado por um potencial externo, causando uma variação do seu momento de p para p' . Naquela aproximação, a energia média irradiada é obtida sem o conhecimento dos detalhes da trajetória da partícula espalhada. Assim, para frequências muito menores que o inverso

do tempo de colisão, pode ser mostrado que a energia média irradiada por unidade de intervalo de frequência e por unidade de elemento de ângulo sólido é

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \left| \vec{\epsilon}_{\lambda} \left(\vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\vec{p}'}{\vec{p}' \cdot \hat{k}} - \frac{\vec{p}}{\vec{p} \cdot \hat{k}} \right) \right|^2.$$

Desta expressão, vemos que a energia média irradiada por unidade de intervalo de frequência é independente de ω quando $\omega \rightarrow 0$. Daí, vem que o número médio de fótons emitidos neste intervalo

$$\bar{n} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right) d\omega d\Omega,$$

tende para infinito quando $\omega \rightarrow 0$.

O tratamento convencional usado na QED₄ para eliminar essas divergências tem sido somar as probabilidades de transição sobre todos os possíveis estados finais, onde é incluído um número arbitrário de fótons de baixa energia. Neste caso, pode-se mostrar que a probabilidade total de transição é finita, de acordo com os resultados experimentais [5]

$$w_{\text{exp}} = w_0 \exp \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow 0} 2\alpha \left(\tilde{\beta}_{\lambda} + \beta_{\lambda} \right) \right\},$$

onde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ e λ é a massa que é dada ao fóton para controlar as divergências no infravermelho. $\tilde{\beta}_{\lambda}$ e β_{λ} são as contribuições divergentes de ordem mais baixa em correção radiativa, cuja soma é finita.

Nos cálculos perturbativos, é assumido que os estados assintóticos pertencem ao espaço de Fock. Mas, como é demonstrado no modelo de B-N e confirmado experimentalmente, um número infinito de fótons de baixa frequência são emitidos. Além disso, o operador S é definido nesta teoria assumindo-se que a dinâmica assintótica é governada pela Hamiltoniana livre [6]. Por outro lado, a nível não relativístico, sabe-se que uma partícula espalhada por um potencial coulombiano não é representada a grandes distâncias por uma onda plana, mas sim por uma onda plana distorcida, que também é divergente neste limite [7][8]. Portanto, pode-se atribuir as divergências no setor infravermelho bem como a divergência coulombiana devido a uma escolha não apropriada dos estados assintóticos que possam ser comparados aos resultados experimentais, além da má definição do operador S de espalhamento, onde não é levada em consideração a dinâmica assintótica.

Muitos autores têm levado esses fatos em consideração. Murota [9] foi o primeiro a considerar a contribuição exata de fótons de baixa energia na definição do operador S . Posteriormente, Kulish e Faadeev (K-F) [10] propuseram além da redefinição deste operador, uma modificação do espaço de estados assintóticos. O modelo de K-F é baseado em idéias anteriores, principalmente as de Chung [11] e Kibble [12], onde a representação de Fock do espaço de Hilbert, contendo um número finito de fótons de baixa energia, é substituída por uma representação de estados coerentes composta de um número infinito desses fótons, de modo que os elementos de matriz do operador S de Dyson, entre estes estados são finitos e não nulos. Outros métodos foram desenvolvidos para resolver o problema [13], embora ainda não seja um assunto completamente explorado.

O estudo do problema do infravermelho em teorias de gauge em quatro dimensões pode ser estendido ao caso tridimensional, onde se requer uma análise mais cuidadosa. Este

estudo pode ainda ser justificado se levarmos em conta que alguns fenômenos físicos, tais como o efeito Hall quântico[14] e a supercondutividade à altas temperaturas, podem ser melhor compreendidos no contexto da eletrodinâmica quântica em (2+1)-dimensões.

No capítulo 1, discutiremos a idéia central para o entendimento das divergências no setor infravermelho na QED₃ e a forma de como deve ser tratado este problema, na aproximação semi-clássica. No capítulo 2, seguindo as idéias de K-F, é proposta uma redefinição do operador S na QED₃, baseando-se no fato de que as interações eletromagnéticas são de longo alcance. É mostrado que, a grandes distâncias, a dinâmica não é governada por uma Hamiltoniana livre mas sim, por uma Hamiltoniana que satisfaça as condições físicas do problema. Ou seja, $e^{-iH_0 t}$ é substituído, nos operadores de onda, por um operador adequado $U_{as}(t)$ para descrever a evolução temporal assintótica. No capítulo 3, veremos que o novo operador S não é bem definido no espaço de Fock. Para se corrigir este problema é introduzido o espaço de estados assintóticos, que apesar de ser uma representação não equivalente à de Fock, é relativisticamente invariante, separável e invariante de gauge. Com isso, a representação matricial do novo operador S , na base de estados assintóticos, possui elementos de matriz finitos.

Capítulo 1

Estudo Semi-clássico da QED₃

Neste capítulo, faremos um estudo a nível semi-clássico de como tratar as divergências no infravermelho na QED₃. O método usado aqui é baseado no estudo desenvolvido por B-N [3][15], onde é assumido que a energia e o momento de cada fóton emitido são consideravelmente menores que a energia e o módulo da variação do momento do elétron espalhado. Ou seja:

$$\frac{\omega}{m} \ll 1, \quad \frac{\omega}{\Delta p} \ll 1, \quad (1.1)$$

onde m e Δp são a massa e a variação do momento do elétron espalhado, respectivamente, e ω é a frequência de cada fóton emitido. Neste caso, podemos supor que a emissão de fótons de baixa frequência não afeta o movimento do elétron e sua trajetória é conhecida antes e depois do espalhamento. Assim, esperamos que os resultados obtidos usando a mecânica quântica sejam os resultados clássicos reinterpretados. Isto é, que a probabilidade total de uma dada variação no movimento do elétron não é afetada pela interação com o campo de radiação e que o número médio de fótons é infinito, de modo que a energia média irradiada é igual a energia irradiada classicamente na trajetória correspondente.

1.1 Formulação do Método

A Hamiltoniana do sistema elétron e campo eletromagnético é dado por:

$$H = \vec{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - e \vec{A} \right) + \beta m + \frac{1}{2} \int \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) d\vec{x}, \quad (1.2)$$

onde e , $\vec{p}$ e m são, respectivamente, a carga, o momento e a massa do elétron. $\vec{\alpha}$ e β são definidos em termos das matrizes gama de Dirac.

A convenção usada para o tensor métrico e a representação das matrizes gama de Dirac, no espaço-tempo tridimensional é

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2,$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli. Com isso, a algebra das matrizes gama é

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu},$$

$$\gamma^\nu \gamma^\mu = g^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha,$$

e

$$\alpha^j = \gamma^0 \gamma^j, \quad \beta = \gamma^0.$$

Consideremos um sistema no qual o campo eletromagnético é quantizado. Portanto, o potencial vetor e os vetores do campo eletromagnético não devem ser tratados como quantidades ordinárias mas sim como operadores. A fim de expressar a Hamiltoniana em termos desses operadores, faremos uma breve discussão a respeito da quantização do campo eletromagnético na QED₃.

Lembrando que as equações de Maxwell são invariantes sobre transformações de gauge

$$A^\mu(x) \rightarrow \tilde{A}^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda, \quad (1.3)$$

podemos impor uma condição adicional sobre o potencial $A^\mu(x)$ (a condição de Lorentz):

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad (1.4)$$

e assim mostrar que as componentes do potencial vetor satisfazem a equação de onda

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = \square A^\mu(x) = 0. \quad (1.5)$$

Levando em conta que A^μ deve ser real, escrevemos a solução da equação de onda na forma de uma soma de Fourier:

$$A^\mu(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(c_k^\mu e^{-ik \cdot x} + c_k^{\mu*} e^{ik \cdot x} \right), \quad (1.6)$$

onde assumimos condições de contorno periódicas de modo que A esteja limitado em um quadrado de lado $L = \Omega^{\frac{1}{2}}$. O termo $\sqrt{2\omega_k}$ se tornará claro a seguir, onde

$$\omega_k = \left| \vec{k} \right| = k^0. \quad (1.7)$$

A quantização é feita, considerando-se que as amplitudes que aparecem nas superposições de ondas planas não são números, mas operadores que atuam no espaço de número de ocupação. Ou seja:

$$c_\mu \rightarrow a_\mu$$

e

$$c_\mu^* \rightarrow a_\mu^\dagger,$$

com

$$[a_k^\mu, a_{k'}^{\nu\dagger}] = -\delta_{kk'} \delta_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

O significado do termo $\sqrt{2\omega_k}$, na solução da equação de onda, é obtido levando em conta que o comutador entre duas componentes do operador do campo eletromagnético, em diferentes pontos do espaço-tempo, deve ser um invariante de Lorentz. Isto é

$$\begin{aligned} [A^\mu(x), A^\nu(y)] &= -\delta_{\mu\nu} (2\pi)^{-2} \int \frac{d^2k}{2\omega_k} \left(e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right) \\ &= -\delta_{\mu\nu} (2\pi)^{-2} \int d^3k \delta(k^2) e^{-ik \cdot (x-y)} \text{sgn}(k^0) \\ &= i\delta_{\mu\nu} D(x-y), \end{aligned}$$

onde D é a função de Pauli-Jordan, que é um invariante de Lorentz. Para tornar o lado direito desta igualdade um covariante de Lorentz, modifiquemos a expansão (1.6) para a componente A^0 introduzindo um sinal negativo na frente do primeiro coeficiente, de modo que

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = ig^{\mu\nu} D(x-y).$$

Como estamos interessados na propagação de fótons transversais no meio livre, reformulamos a teoria no gauge de radiação

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad A^0 = 0. \quad (1.9)$$

Neste gauge os campos clássicos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são representados, pelo potencial vetor, através das seguintes expressões:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

e

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (1.10)$$

Após a quantização, o operador campo eletromagnético representando fótons transversais torna-se

$$\vec{A}(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \vec{\epsilon}_k \left(a_k e^{-ik \cdot x} + a_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right), \quad (1.11)$$

onde $\vec{\epsilon}_k$ é o vetor de polarização linear. Reescrevendo a equação (1.9) no espaço dos momentos:

$$\vec{k} \cdot \vec{A} = 0, \quad (1.12)$$

verificamos que $\vec{\epsilon}_k$ é perpendicular ao vetor de onda $\vec{k}$, mostrando que o campo de radiação é transversal a direção de propagação.

Usando as equações (1.10) e (1.11), podemos expressar os operadores campos elétrico e magnético em termos das amplitudes quantizadas:

$$\vec{E}(x) = i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2\Omega}} \vec{\epsilon}_k \left(a_k e^{-ik \cdot x} - a_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right), \quad (1.13)$$

$$\vec{B}(x) = i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2\Omega}} \left(\hat{k} \times \vec{\epsilon}_k \right) \left(a_k e^{-ik \cdot x} - a_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right). \quad (1.14)$$

Da mesma forma, a parte da Hamiltoniana relacionada com o campo de radiação

$$H_{rad} = \frac{1}{2} \int \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) d\vec{x}$$

pode ser reescrita como:

$$H_{rad} = \sum_{\vec{k}} \omega_k a_k^\dagger a_k.$$

Fazendo a seguinte transformação

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (P_k + iQ_k)$$

e

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (P_k - iQ_k),$$

a Hamiltoniana de radiação torna-se

$$H_{rad} = \sum_{\vec{k}} \omega_k \left(P_k^2 + Q_k^2 \right).$$

Assim, o problema do campo de radiação passa a ser o de se encontrar os autovalores de energia de um conjunto de osciladores desacoplados. Aqui as variáveis canônicas P_k e Q_k são operadores satisfazendo as seguintes relações de comutação:

$$[P_k, Q_{k'}] = -i\delta_{k,k'}, \quad (1.15)$$

$$[P_k, P_{k'}] = [Q_k, Q_{k'}] = 0. \quad (1.16)$$

Como o espectro de autovalores do oscilador harmônico é conhecido, reescrevemos a Hamiltoniana do sistema, em função dessas variáveis dinâmicas

$$\begin{aligned} H &= \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \sum_{\vec{k}} \vec{a}_k \left\{ P_k \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) - Q_k \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) \right\} \\ &+ \beta m + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_k \left(P_k^2 + Q_k^2 \right), \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde

$$\vec{a}_k = \frac{e \vec{\epsilon}_k}{\sqrt{\omega_k \Omega}}. \quad (1.18)$$

Após ter reescrito a Hamiltoniana em uma forma mais conhecida, nosso objetivo será resolver a equação de autovalores para este sistema, no qual o acoplamento entre a partícula espalhada e o campo eletromagnético não é tratado perturbativamente. Portanto:

$$H |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle, \quad (1.19)$$

onde a solução desta equação é unicamente separada em duas partes

$$|\Psi\rangle = |\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle, \quad (1.20)$$

correspondendo à autofunções de energia positiva e negativa, respectivamente.

Em primeira aproximação, podemos desprezar a reação do campo eletromagnético sobre o elétron, pois consideraremos o caso de baixas frequências. Classicamente, isso é equivalente a supor que o elétron possui velocidade constante antes e depois de sofrer espalhamento por algum potencial externo. Afim de introduzir explicitamente esta aproximação em nossos cálculos, lembramos que o vetor $\vec{\alpha}$ de Dirac é interpretado fisicamente como a velocidade do elétron dividido por c (em nossa notação $c = 1$). Esta afirmação é verificada, tomando o valor esperado deste operador em relação as soluções da equação de Dirac para um elétron livre com energias positiva e negativa, respectivamente:

$$\langle \vec{\alpha} \rangle_+ = \frac{\vec{p}}{E} \quad (1.21)$$

e

$$\langle \vec{\alpha} \rangle_- = -\frac{\vec{p}}{|E|}. \quad (1.22)$$

Se as condições acima forem satisfeitas, podemos resolver a equação de autovalores (1.19) seguindo a analogia clássica. Isto é, trocando o operador $\vec{\alpha}$ pelo número $\vec{\mu}$ representando a velocidade clássica do elétron:

$$\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\mu} \quad (1.23)$$

e, ao mesmo tempo, substituir o operador β por $(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}$. Logo, o problema dinâmico é facilmente resolvido.

As soluções $|\Psi^{+,-}\rangle$ correspondem, no limite quando a interação entre o elétron e o campo tende para zero, ao movimento do elétron em estados com momento $m(1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} \vec{\mu}$ e com energias $\pm m(1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}}$. De (1.21), vemos que a aproximação (1.23) é equivalente a supor que a solução da equação (1.19) é dada por $|\Psi^+\rangle$ e assumir $|\Psi^-\rangle$ igual a zero. Com isso, obtemos um estado onde a energia do elétron é positiva antes e depois do espalhamento. É importante salientar que, na teoria de Dirac, se o elétron é inicialmente descrito por uma solução de energia positiva ele se manterá em um estado de energia positiva, após interagir com o centro espalhador, se não for submetido a perturbações muito intensas.

Com isso, o próximo passo é encontrar a solução da equação de autovalores

$$\left\{ \vec{\mu} \cdot \left[\vec{p} + \sum_{\vec{k}} \vec{a}_k \left(-P_k \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) + Q_k \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) \right) \right] + m(1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_k (P_k^2 + Q_k^2) - E \right\} |u\rangle = 0, \quad (1.24)$$

que pode ser simplificada com as seguintes transformações canônicas:

$$P_k = P'_k - \sigma_k \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right), \quad (1.25)$$

$$Q_k = Q'_k + \sigma_k \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right), \quad (1.26)$$

$$\vec{p} = \vec{p}' - \sum_{\vec{k}} \vec{k} \sigma_k \left(-P'_k \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) + Q'_k \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) + \frac{1}{2} \sigma_k \right), \quad (1.27)$$

$$\vec{x} = \vec{x}'. \quad (1.28)$$

Portanto, a função de onda transformada, no espaço das coordenadas, é dada por:

$$u(Q_k, \vec{x}) = \exp \left\{ -i \sum_{\vec{k}} \sigma_k \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) \left(+Q'_k + \frac{1}{2} \sigma_k \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) \right) \right\} u'(Q'_k, \vec{x}). \quad (1.29)$$

Substituindo as transformações (1.25-1.28) em (1.24), teremos:

$$\begin{aligned} & \left\{ \vec{\mu} \cdot \vec{p}' + \sum_{\vec{k}} \left(|\vec{k}| - \vec{k} \cdot \vec{\mu} \right) \sigma_k \left(-P'_k \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) + Q'_k \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) + \frac{1}{2} \sigma_k \right) \right. \\ & + m(1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} + \sum_{\vec{k}} \vec{a}_k \cdot \vec{\mu} \left(-P'_k \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) + Q'_k \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) + \sigma_k \right) \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_k (P_k'^2 + Q_k'^2) - E \right\} |u'\rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Escolhendo

$$\sigma_k = - \frac{\vec{a}_k \cdot \vec{\mu}}{\left(|\vec{k}| - \vec{k} \cdot \vec{\mu} \right)}, \quad (1.31)$$

obtemos uma equação de autovalores mais simplificada:

$$\left\{ \vec{\mu} \cdot \vec{p} + m (1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{(\vec{a}_k \cdot \vec{\mu})^2}{\left(\left| \vec{k} \right| - \vec{k} \cdot \vec{\mu} \right)} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_k (P_k^2 + Q_k^2) - E \right\} |u'\rangle = 0. \quad (1.32)$$

O terceiro termo desta equação, a autoenergia do elétron, é divergente quando a frequência do fóton tende para zero. Para mostrar isso explicitamente, usaremos o espaço infinito de configuração, trocando o somatório por uma integral. Assim,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{(\vec{a}_k \cdot \vec{\mu})^2}{\left(\left| \vec{k} \right| - \vec{k} \cdot \vec{\mu} \right)} &= -\frac{1}{2} \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(\hat{\varepsilon} \cdot \vec{\mu})^2}{(1 - \vec{\mu} \cdot \hat{k})} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{e^2}{(2\pi)^2} \ln \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(\hat{\varepsilon} \cdot \vec{\mu})^2}{(1 - \vec{\mu} \cdot \hat{k})} \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^2} \pi \left(\sqrt{1 - |\vec{\mu}|^2} - 1 \right) \ln \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right) \\ &= m_{self} \left(1 - |\vec{\mu}|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

onde o limite superior na integral da frequência do fóton, Δ , serve para definir baixas frequências e λ tende para zero. Usando (1.33), definimos a massa física do elétron [16]

$$m(\Delta, \lambda) = m + m_{self}.$$

Desta forma, reescrevemos (1.32) como:

$$\left\{ \vec{\mu} \cdot \vec{p} + m(\Delta, \lambda) (1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_k (P_k^2 + Q_k^2) - E \right\} |u'\rangle = 0,$$

com solução geral (de agora em diante usaremos simplesmente m em vez de $m(\Delta, \lambda)$)

$$u'(Q_k, \vec{x}) = \gamma(\vec{\mu}) \Omega^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ i m (1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} \vec{\mu} \cdot \vec{x} \right\} \prod_k h_m(Q_k), \quad (1.34)$$

$$E = m (1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_k \left(m_k + \frac{1}{2} \right). \quad (1.35)$$

Analisando a forma da função de onda (1.34), verificamos que se esta contém um termo de onda plana representando um elétron com momento $m (1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} \vec{\mu}$ multiplicada pela função de onda do campo de radiação, na forma de um produto de funções de onda de

osciladores desacoplados. A função de onda normalizada de cada oscilador harmônico satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$h_m''(y) - y^2 h_m(y) + (2m + 1) h_m(y) = 0$$

Retornamos a função de onda original, $u(Q_k, \vec{x})$, usando (1.26), (1.29) e (1.34):

$$u(Q_k, \vec{x}) = \gamma(\vec{\mu}) \Omega^{-\frac{1}{2}} \prod_k h_m \left(Q_k - \sigma_k \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) \right) \quad (1.36)$$

$$\times \exp \left\{ i m \left(1 - \mu^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \vec{\mu} \cdot \vec{x} - i \sum_{\vec{k}} \sigma_k \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) \left(Q_k - \frac{1}{2} \sigma_k \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) \right) \right\}$$

Após ter obtido a função de onda que descreve o sistema elétron acoplado ao campo de radiação, usaremos esta solução para calcular a probabilidade de transição que uma partícula carregada passe de um certo estado inicial para um dos estados finais com a emissão simultânea de radiação, devido a uma pequena perturbação dependente do tempo. Como o campo de radiação foi quantizado, podemos calcular a probabilidade de transição em função do número de fótons emitidos e a partir daí obteremos os resultados mais importantes: só tem sentido considerar o efeito coletivo de fótons de baixa frequência e o número médio desses fótons emitidos, em cada processo, é infinito.

1.2 Aplicações: Pequenas Perturbações Atuando no Elétron

Usando a solução (1.36), podemos obter a probabilidade do sistema passar de um estado inicial para algum estado final, devido a uma pequena perturbação dependente do tempo $V(t)$ atuando nas coordenadas e spin do elétron. Para isso, consideremos a Hamiltoniana do sistema total composto de duas partes:

$$H_T = H_0 + V(t),$$

onde H_0 é a Hamiltoniana dada pela equação (1.17). As autofunções para o sistema perturbado devem satisfazer a equação de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\zeta, t\rangle = H_T |\zeta, t\rangle.$$

É importante salientar que, o sistema elétron mais campo eletromagnético não está sendo tratado perturbativamente e que a única aproximação usada para obter (1.36) foi desprezar o recuo do elétron devido à emissão de radiação. Desta forma o problema $V(t) = 0$ já está resolvido, no sentido que os autoestados $|n\rangle$ e autovalores de energia E_n relacionados pela equação de autovalores:

$$H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (1.37)$$

são completamente conhecidos. Para obter a probabilidade de transição, em função do tempo, do sistema ser encontrado em n , com $n \neq i$, supomos que em $t = 0$ o sistema físico encontra-se no estado

$$|\zeta\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \zeta \rangle = \sum_n C_n |n\rangle. \quad (1.38)$$

Da mesma forma, para $t > 0$, expandimos as soluções do sistema em termos das autofunções não perturbadas:

$$|\zeta, t\rangle = \sum_n C_n(t) e^{-iE_n t} |n\rangle, \quad (1.39)$$

onde fator $e^{-iE_n t}$ está presente mesmo se V for zero. Isto nos mostra que a dependência temporal de $C_n(t)$ é devido somente à perturbação $V(t)$. Portanto, a probabilidade de encontrar o sistema em um autoestado final $|n\rangle$, após a partícula ser espalhada, é obtida calculando $|C_n(t)|^2$. A amplitude de transição $C_n(t)$ é, em primeira ordem da teoria de perturbação, dada por:

$$C_n(t) = -i \langle n | V | i \rangle \int_0^t e^{i\omega_{ni}t'} dt', \quad (1.40)$$

onde $\omega_{ni} = (E_n - E_i)$. Para obter os resultados acima, assumimos que em $t = 0$ somente o estado inicial $|i\rangle$ está ocupado e consideramos o caso de uma perturbação constante ligada em $t = 0$. Ou seja

$$V(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } t < 0 \\ V \text{ (independente do tempo)} & , \text{ para } t \geq 0 \end{cases}. \quad (1.41)$$

A probabilidade de transição de um estado inicial $|i\rangle$ para algum do estado final $|f\rangle$ é:

$$\begin{aligned} P(i \rightarrow f) &= |C_f(t)|^2 \\ &= \frac{4 |\langle f | V | i \rangle|^2}{|E_f - E_i|^2} \sin^2 \left[\frac{(E_f - E_i) t}{2} \right] \\ &= 2\pi |\langle f | V | i \rangle|^2 t \delta(E_f - E_i), \end{aligned} \quad (1.42)$$

onde usamos o fato que:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \eta x}{\eta x^2} = \delta(x).$$

Portanto, a probabilidade de transição por unidade de tempo é

$$T(i \rightarrow f) = \frac{P(i \rightarrow f)}{t} = 2\pi |\langle f | V | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i). \quad (1.43)$$

Para calcular o elemento de matriz $\langle f | V | i \rangle$, consideremos um estado inicial formado por um elétron com velocidade $\vec{\mu}$ e nenhum fóton presente:

$$|i\rangle = |\vec{\mu}, 0\rangle. \quad (1.44)$$

Por outro lado, o estado final será caracterizado por um elétron com velocidade $\vec{\nu}$ e n_k fótons emitidos:

$$|f\rangle = |\vec{\nu}, n_k\rangle. \quad (1.45)$$

Assim,

$$\langle \vec{\nu}, n_k | V | \vec{\mu}, 0 \rangle = \int dQ \int d\vec{x} u_{\vec{\nu}, n_k}^* (Q_k, \vec{x}) V u_{\vec{\mu}, 0} (Q_k, \vec{x}). \quad (1.46)$$

Usando (1.35), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nu}, n_k | V | \vec{\mu}, 0 \rangle &= \exp \left\{ -im (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \vec{\nu} \cdot \vec{x} \right\} \gamma^* (\vec{\nu}) V \gamma (\vec{\mu}) \\ &\times \exp \left\{ im (1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} \vec{\mu} \cdot \vec{x} \right\} \prod_k I \left(\vec{k}; \tau_k, n_k; \sigma_k, 0 \right), \end{aligned} \quad (1.47)$$

onde τ_k é uma função de $\vec{\nu}$ assim como σ_k é função de $\vec{\mu}$ (ver 1.31)

$$\begin{aligned} I \left(\vec{k}; \tau_k, n_k; \sigma_k, 0 \right) &= \int dQ_k h_n \left(Q_k - \tau_k \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) \right) h_0 \left(Q_k - \sigma_k \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) \right) \\ &\times \exp \left\{ -i (\sigma_k - \tau_k) Q_k \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) + \frac{i}{2} (\sigma_k^2 - \tau_k^2) \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{x} \right) \right\} \\ &= e^{-in_k \vec{k} \cdot \vec{x}} K \left(\vec{k}; \tau_k, n_k; \sigma_k, 0 \right), \end{aligned} \quad (1.48)$$

onde

$$K \left(\vec{k}; \tau_k, n_k; \sigma_k, 0 \right) = \exp \left\{ -\frac{1}{4} (\sigma_k - \tau_k)^2 \right\} (n_k!)^{\frac{1}{2}} \frac{[-i2^{-\frac{1}{2}} (\sigma_k - \tau_k)]^{n_k}}{n_k!}. \quad (1.49)$$

Substituindo (1.48) em (1.47), podemos escrever o elemento de matriz $\langle f | V | i \rangle$ na forma:

$$\langle \vec{\nu}, n_k | V | \vec{\mu}, 0 \rangle = \frac{1}{\Omega} F(\vec{q}) \prod_k K \left(\vec{k}; \tau_k, n_k; \sigma_k, 0 \right), \quad (1.50)$$

sendo:

$$F(\vec{q}) = \int d\vec{x} \exp(i \vec{q} \cdot \vec{x}) \gamma^* (\vec{\nu}) V \gamma (\vec{\mu}) \quad (1.51)$$

e

$$\vec{q} = \left[m (1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} \vec{\mu} - m (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \vec{\nu} \right] - \sum_{\vec{k}} n_k \vec{k}. \quad (1.52)$$

Usando o resultado (1.50) obtemos a probabilidade de transição por unidade de tempo (1.43), com os estados inicial e final definidos em (1.44) e (1.45)

$$T(\tau_k, n_k; \sigma_k, 0) = \frac{2\pi}{\Omega^2} \delta \left[m(1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} - m(1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} - \sum_{\vec{k}} n_k \omega_k \right] \quad (1.53)$$

$$\times \left| F(\vec{q}) \right|^2 \prod_{\vec{k}} \left| K(\vec{k}; \tau_k, n_k; \sigma_k, 0) \right|^2.$$

Para simplificar a discussão desprezaremos o termo eletromagnético em (1.52) e no argumento da função delta, pois estamos trabalhando no limite de baixas frequências. Assim, consideraremos que a energia e o momento do campo eletromagnético são pequenos se comparados com as variações da energia e do momento do elétron.

Como o espectro de energia final do elétron espalhado é contínuo, só tem sentido perguntar sobre a probabilidade desta partícula ser espalhada em um grupo de estados com momento centrado em torno de $\vec{p}_\nu$ e com energia final entre $E_\nu - \frac{1}{2}dE_\nu$ e $E_\nu + \frac{1}{2}dE_\nu$. Então, se a probabilidade total de transição por unidade de tempo para um estado final com momento $\vec{p}_\nu$ é dada por (1.53), a probabilidade de transição por unidade de tempo dentro de um conjunto de estados finais em torno de $\vec{p}_\nu$ será

$$\int_{E_\nu - \frac{1}{2}dE_\nu}^{E_\nu + \frac{1}{2}dE_\nu} T(\tau_k, n_k; \sigma_k, 0) \rho_{E_\nu} dE_\nu. \quad (1.54)$$

O número de estados finais admitidos, neste intervalo de energia, para uma partícula espalhada em um elemento de ângulo $d\varphi$ é

$$dN = \rho_{E_\nu, d\varphi} dE_\nu,$$

onde $\rho_{E_\nu, d\varphi}$ é a densidade de estados disponíveis para cada partícula espalhada naquele intervalo

$$\rho_{E_\nu, d\varphi} = \frac{\Omega}{(2\pi)^2} d\varphi \frac{d}{dE_\nu} \int |\vec{p}_\nu| d|\vec{p}_\nu|. \quad (1.55)$$

Usando a expressão para a energia total

$$E^2 = p^2 + m^2,$$

obtemos

$$\frac{d}{dE} = \frac{E}{|\vec{p}|} \frac{d}{d|\vec{p}|}.$$

Com isso, a densidade de estados pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \rho_{E_\nu, d\varphi} &= \frac{\Omega}{(2\pi)^2} d\varphi \frac{1}{|\vec{v}|} \frac{d}{d|\vec{p}_\nu|} \int |\vec{p}_\nu| d|\vec{p}_\nu| \\ &= \frac{\Omega}{(2\pi)^2} m (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} d\varphi, \end{aligned} \quad (1.56)$$

onde usamos as seguintes expressões relativísticas para a energia e o momento de uma partícula com velocidade $\vec{\nu}$

$$E_\nu = m (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.57)$$

e

$$\vec{p}_\nu = m \vec{\nu} (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.58)$$

Logo, a probabilidade de um elétron ser espalhado em um elemento de ângulo $d\varphi$, com a emissão simultânea de n_k fótons de grande comprimento de onda, é dada por

$$\begin{aligned} w_{d\varphi} &= \int_{E_\nu - \frac{1}{2}dE_\nu}^{E_\nu + \frac{1}{2}dE_\nu} T(\tau_k, n_k; \sigma_k, 0) \rho_{E_\nu, d\varphi} dE_\nu \\ &= \frac{1}{2\pi\Omega} d\varphi m (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \left| F(\vec{q}) \right|^2 \prod_k \left| K\left(\vec{k}; \tau_k, n_k; \sigma_k, 0\right) \right|^2 \Big|_{E_\mu \simeq E_\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi\Omega} d\varphi m (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \left| F(\vec{q}) \right|^2 \\ &\quad \times \prod_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\sigma_k - \tau_k)^2 \right\} \frac{\left[\frac{1}{2} (\sigma_k - \tau_k)^2 \right]^{n_k}}{n_k!}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Deste resultado, vemos que a probabilidade total de transição é o produto de dois termos:

$$w_0 = \frac{1}{2\pi\Omega} d\varphi m (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \left| F(\vec{q}) \right|^2 \quad (1.60)$$

e

$$w_\gamma = \prod_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\sigma_k - \tau_k)^2 \right\} \frac{\left[\frac{1}{2} (\sigma_k - \tau_k)^2 \right]^{n_k}}{n_k!}. \quad (1.61)$$

O primeiro termo, é a probabilidade de espalhamento elástico de um elétron no elemento de ângulo $d\varphi$ e com velocidade final centrada em torno de $\vec{\nu}$. O segundo termo, dw_γ , é uma distribuição de Poisson para a probabilidade de emissão de fótons de grande comprimento de onda, se interpretarmos $\frac{1}{2} (\sigma_k - \tau_k)^2$ como o número médio de fótons emitidos com momento $\vec{k}$. De fato, usando (1.31)

$$\begin{aligned} \bar{n}_k &\equiv \frac{1}{2} (\sigma_k - \tau_k)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\vec{a}_k \cdot \vec{\mu}}{\left(\left| \vec{k} \right| - \vec{k} \cdot \vec{\mu} \right)} - \frac{\vec{a}_k \cdot \vec{\nu}}{\left(\left| \vec{k} \right| - \vec{k} \cdot \vec{\nu} \right)} \right]^2 \\ &= \frac{e^2}{2\omega_k^3 \Omega} \left[\frac{\hat{e} \cdot \vec{\mu}}{(1 - \mu_k)} - \frac{\hat{e} \cdot \vec{\nu}}{(1 - \nu_k)} \right]^2 \end{aligned} \quad (1.62)$$

e o número médio total de fótons emitidos, no intervalo de frequência $\lambda \leq \omega \leq \Delta$ e elemento de ângulo $d\varphi_k$, é a soma da expressão acima nos momentos dos fótons

$$\bar{n} = \sum_{\vec{k}} \bar{n}_k = \frac{e^2}{2(2\pi)^2} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d\omega}{\omega^2} \int d\varphi_k \left[\frac{\hat{\epsilon} \cdot \vec{\mu}}{(1 - \mu_k)} - \frac{\hat{\epsilon} \cdot \vec{\nu}}{(1 - \nu_k)} \right]^2, \quad (1.63)$$

cujo resultado é o mesmo obtido classicamente.

Usando os resultados acima, podemos verificar que a probabilidade de transição com a emissão de um número finito de fótons de baixas energias é zero. Para mostrar isto, consideremos primeiramente o caso onde somente um fóton é emitido ($n_k = 1$). Neste caso

$$\begin{aligned} w_{\gamma} &= \prod_k \exp \{ -\bar{n}_k \} \bar{n}_k \\ &= \exp \left\{ - \sum_k \bar{n}_k \right\} \prod_k \bar{n}_k \\ &= \exp \{ -\bar{n} \} \prod_k \bar{n}_k. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Como o número médio de fótons é infinito e a função exponencial é dominante, se comparada como o segundo termo, vemos que a probabilidade de emissão de um único fóton se anula. No caso de emissão de um maior número (finito) de fótons, (1.64) difere de (1.61) somente por um número finito de fatores e, portanto, permanecendo zero. Deste resultado, tiramos algumas conclusões importantes:

i - a probabilidade de um elétron ser espalhado e emitir um número finito de fótons de baixa frequência é zero e não infinita como prevê a teoria da perturbação.

ii - Como um caso particular do primeiro, a probabilidade de um espalhamento puramente elástico por parte do elétron é igual a zero, confirmando o resultado clássico de que toda partícula acelerada deve emitir radiação.

Por outro lado, a probabilidade total de espalhamento de um elétron, independente do número de fótons de grande comprimento de onda emitidos, é obtida pela soma de (1.59) sobre todos os valores de n_k . Isto é:

$$\sum_{n_k} w_{d\varphi} = \frac{1}{2\pi\Omega} d\varphi m (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \left| F(\vec{q}) \right|^2 = w_0,$$

o qual também seria obtida se fosse desprezada a interação com o campo eletromagnético. Portanto, podemos interpretar a probabilidade para o espalhamento elástico de um elétron, obtida pela teoria de perturbação, como a probabilidade total que o elétron seja espalhado independentemente do número de fótons de baixa frequência emitidos durante este processo. Além disso, como a probabilidade da transição acompanhada pela emissão de um número finito de fótons é zero e que a probabilidade total de transição é sempre finita, concluímos o número médio de fótons emitidos é infinito, confirmando o resultado clássico.

A energia média irradiada, devido a um número indeterminado de fótons de grande comprimento de onda, emitidos em um intervalo de frequência entre ω_k e $\omega_k + d\omega_k$ e elemento de ângulo $d\varphi_k$, quando o elétron é defletido em um elemento de ângulo $d\varphi$, é:

$$d\langle E \rangle = \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \omega_k d\omega_k d\varphi_k \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k \omega_k w_{d\varphi}.$$

Usando (1.59), obtemos:

$$\begin{aligned} d\langle E \rangle &= \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \omega_k d\omega_k d\varphi_k w_0 \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{n_k e^{-\bar{n}_k} (\bar{n}_k)^{n_k}}{n_k!} \\ &= \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \omega_k d^2 k w_0 (\bar{n}_k) \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{2\omega_k^2} \left[\frac{\hat{\epsilon} \cdot \vec{\mu}}{(1 - \mu_k)} - \frac{\hat{\epsilon} \cdot \vec{\nu}}{(1 - \nu_k)} \right]^2 w_0, \end{aligned} \tag{1.65}$$

onde usamos o fato que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n e^{-x} x^n}{n!} = x.$$

Esta expressão é apenas o produto da probabilidade total, w_0 , do elétron ser espalhado em um ângulo $d\varphi$ multiplicada pela expressão clássica para a energia irradiada pelo elétron naquele intervalo de frequência e emitida em um elemento de ângulo $d\varphi_k$. O mesmo resultado é obtido através da teoria de perturbação em regiões de baixa frequência. Assim, a energia média irradiada e a probabilidade total de transição, independente do número de fótons de baixa frequência emitidos, podem ser determinadas pela teoria de perturbação, embora a probabilidade do elétron ser espalhado e acompanhada com a emissão de um número finito de fótons de baixa frequência não é corretamente determinado por esta teoria.

Capítulo 2

Dinâmica Assintótica

Neste capítulo estudaremos inicialmente a forma de como a matriz S é definida na teoria de perturbação e as condições para que seja um operador bem definido no espaço de Fock. Neste formalismo é assumindo que o potencial de interação anula-se assintoticamente, implicando que a dinâmica das partículas é considerada livre em regiões assintóticas. No entanto, veremos que este tratamento parece não ser válido para o caso de interações de longo alcance, como a coulombiana. Neste sentido, é proposto uma redefinição do operador S levando em conta este fato.

Na seção 2.1, faremos uma revisão sobre a definição do operador S na teoria de perturbação. Na seção 2.2, usando um cálculo simples, descreveremos o comportamento de uma partícula espalhada por um potencial de Coulomb em duas dimensões, a nível não relativístico. Baseado nas condições físicas do problema, obtemos um esboço da idéia principal do modelo. Na seção 2.3, construiremos explicitamente o operador que descreve a dinâmica assintótica $U_{as}(t)$ na QED₃. Na seção 2.4, faremos uma análise desse problema no espectro de frequências.

2.1 A Matriz S de Dyson

Consideremos um sistema quântico descrito por uma Hamiltoniana H constituída de dois termos

$$H = H_0 + V(t), \quad (2.1)$$

onde H_0 é a Hamiltoniana livre e $V(t)$ é um potencial de interação de curto alcance

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} V(t) = 0. \quad (2.2)$$

Isto implica que assintoticamente as partículas espalhadas são consideradas livres. Assim, como em processos de espalhamento as partículas só são observadas em regiões assintóticas ($t \rightarrow \pm\infty$), os estados assintóticos são autoestados de H_0 .

Usando estas idéias, define-se o operador S na teoria de perturbação, assumindo que a dinâmica assintótica é governada por H_0 [6]:

$$S = W_{out}^\dagger W_{in}, \quad (2.3)$$

onde W_{in} e W_{out} são os operadores de onda

$$W_{out}^{in} = \lim_{t \rightarrow \mp \infty} U(t, 0)^\dagger e^{-iH_0 t} \quad (2.4)$$

e

$$U(t, s) = e^{-iH(t-s)}. \quad (2.5)$$

Usando (2.5), reescrevemos a matriz S como

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ s \rightarrow -\infty}} e^{iH_0 t} U(t, s) e^{-iH_0 s}. \quad (2.6)$$

Desta definição, o significado físico da matriz S é o seguinte: um estado assintótico inicial φ considerado em $t = 0$, é transformado para $s \rightarrow -\infty$ por dinâmica livre e então evolui de $-\infty$ a $t \rightarrow +\infty$ via $U(t, s)$ e finalmente transformado de $t \rightarrow +\infty$ para $t = 0$ por dinâmica livre. A probabilidade de transição deste estado inicial para um outro estado assintótico final ψ , é dada por

$$|\langle \psi | S | \varphi \rangle|^2, \quad (2.7)$$

onde os estados assintóticos pertencem ao espaço de Fock.

Resolvendo a equação de movimento para o operador evolução temporal, a matriz S pode ser reescrita na forma de produto ordenado temporal

$$S = T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} V^I(t) dt \right\}, \quad (2.8)$$

onde $V^I(t)$ é o potencial na representação de interação. Se o potencial de interação se anula em regiões distantes, tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds ||V(s)|| < \infty, \quad (2.9)$$

então a série de Dyson para o operador S (2.8) também possui norma convergente. Logo, o operador S é unitário no espaço de Fock, sob a condição das partículas possuírem dinâmica livre em regiões assintóticas.

O método usado acima torna-se duvidoso para descrever processos de espalhamento, quando consideramos potenciais de longo alcance, como é o caso do potencial coulombiano. Neste caso, mesmo em regiões distantes esse potencial não pode ser desprezado.

Para finalizar esta seção, trataremos de duas questões importantes relacionadas com a construção do operador S , levando em conta a dinâmica assintótica

1- Podemos fatorizar a contribuição exata da dinâmica assintótica, na definição do operador S , separando a Hamiltoniana de interação em duas partes [9]

$$H(t) = H_s(t) + H_h(t),$$

onde H_s é a parte da Hamiltoniana de interação que descreve a dinâmica assintótica (onde os fótons emitidos possuem baixa frequência) e H_h a parte restante. Assim, reescrevemos a matriz S como

$$\begin{aligned}
S &= T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (H_s(t) + H_h(t)) \right] \\
&= U(\infty, t_0) S_h U(t_0, -\infty),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

onde

$$U(t, t_0) = T \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H_s(\tau) \right] \tag{2.11}$$

e

$$S_h = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_h(t) \right]. \tag{2.12}$$

2- Se $H_s(\tau)$ satisfaz a condição

$$[H_s(t_1), H_s(t_2)] = c - \text{número}, \quad \forall t_1 \neq t_2, \tag{2.13}$$

o operador evolução temporal pode ser reescrito na forma de produto ordinário

$$U(t, t_0) = \exp \{R(t, t_0)\} \exp \{i\phi(t, t_0)\}, \tag{2.14}$$

onde

$$R(t, t_0) = \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] \tag{2.15}$$

e

$$i\phi(t, t_0) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} ds [H(\tau), H(s)] \right\}. \tag{2.16}$$

Para provar o primeiro item, usaremos o fato que H_s e H_h comutam. Assim

$$\begin{aligned}
S &= T \left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_s(t) \right] \left[1 - i \int dt_1 H_h(t_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(-i)^2}{2!} \int dt_1 \int dt_2 H_h(t_1) H_h(t_2) + \dots \right] \right\} \\
&= T \left\{ U(+\infty, -\infty) - i \int dt_1 U(+\infty, t_1) H_h(t_1) U(t_1, -\infty) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-i)^2}{2!} \int dt_1 \int dt_2 U(+\infty, t_1) H_h(t_1) U(t_1, t_2) H_h(t_2) U(t_2, -\infty) + \dots \right\}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Deste modo, o termo de n -ésima ordem da matriz S na série perturbativa com relação a $H_h(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}
S^{(n)} &= (-i)^n \int dt_1 \dots dt_n \theta(t_1 - t_2) \theta(t_2 - t_3) \dots \theta(t_{n-1} - t_n) \\
&\quad \times U(+\infty, t_1) H_h(t_1) U(t_1, t_2) H_h(t_2) \dots U(t_{n-1}, t_n) H_h(t_n) U(t_n, +\infty).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Podemos examinar a dependência em t_i no integrando acima, inserindo conjuntos completos antes e depois de $H_h(t_i)$. Daí, vemos que a dependência em t_i de $H_h(t_i)$ é dada pela diferença de energia dos estados colocados antes e depois de $H_h(t_i)$

$$H_h(t_i) \sim e^{i\Delta E t_i}. \tag{2.19}$$

Por outro lado, veremos adiante que a dependência em t_i nos operadores $U(t_{n-i}, t_i)$ e $U(t_i, t_{n+i})$ é da forma

$$U(t_{n-i}, t_i), U(t_i, t_{n+i}) \sim \sum e^{i \sum \frac{p \cdot k}{E} t_i}. \quad (2.20)$$

Como os fótons em H_s possuem energia muito menor que os fótons em H_h

$$|\Delta E_i| \gg \left| \sum \frac{p \cdot k}{E_i} \right|, \quad (2.21)$$

podemos fazer a seguinte aproximação

$$U(t_{n-i}, t_i) H_h(t_i) U(t_i, t_{n+i}) \simeq U(t_{n-i}, t_0) H_h(t_i) U(t_0, t_{n+i}) \quad (2.22)$$

Observando que $U(t_0, t_0) = 1$, (2.18) pode ser aproximada por

$$S^{(n)} = U(\infty, t_0) \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T[H_h(t_1) \dots H_h(t_n)] U(t_0, -\infty).$$

Generalizando para todo n , (2.10) fica provada.

Passemos para o segundo item. Primeiramente definimos o operador $H^{(1)}(t)$ como

$$T \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] = \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] T \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H^{(1)}(\tau) \right] \quad (2.23)$$

Para determinar o operador desconhecido, $H^{(1)}(t)$, diferenciemos a equação (2.23) em relação a t e multipliquemos o lado esquerdo por $\exp \left[i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right]$

$$\begin{aligned} & \exp \left[i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] (-i) H(t) T \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] \\ &= \left\{ \exp \left[i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] \frac{d}{dt} \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] + (-i) H^{(1)}(t) \right\} \\ & \times T \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H^{(1)}(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Reescrevendo o lado esquerdo desta equação usando (2.23), obtemos

$$\begin{aligned} & \exp \left[i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] (-i) H(t) \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] \\ &= \left\{ \exp \left[i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] \frac{d}{dt} \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] + (-i) H^{(1)}(t) \right\} \end{aligned}$$

e, com isso, isolamos $H^{(1)}(t)$

$$H^{(1)}(t) = \exp \left[i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] \left(H(t) - i \frac{d}{dt} \right) \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right]. \quad (2.24)$$

Podemos expressar $H^{(1)}(t)$ como uma soma envolvendo comutadores, lembrando que

$$e^{-A} B e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\dots [B, A], A^m, \dots, A \right] \quad (2.25)$$

e

$$e^{-A} \frac{d}{dt} e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \left[\dots \left[\dot{A}, A \right], A \right]^m, \dots, A \quad (2.26)$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \exp \left[i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] H(t) \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] \\ &= H(t) + (-i) \left[H(t), \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] + \frac{(-i)^2}{2!} \left[\left[H(t), \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right], \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] \\ & \quad + \frac{(-i)^3}{3!} \left[\left[\left[H(t), \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right], \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right], \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \left[\dots \left[H(t), \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right], \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right]^m, \dots, \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} & \exp \left[i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] (-i) \frac{d}{dt} \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-(-i)^m}{m!} \left[\dots \left[H(t), \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right], \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right]^m, \dots, \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Substituindo (2.27) e (2.28) em (2.24), $H^{(1)}(t)$ fica determinado:

$$H^{(1)}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \frac{m}{(m+1)!} \left[\dots \left[H(t), \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right], \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right]^m, \dots, \int_{t_0}^t d\tau H(\tau).$$

Para o caso onde o comutador entre Hamiltonianas em tempos diferentes é um c-número, isto é:

$$[H(t), H(\tau)] = c - \text{número}, \quad \forall t \neq \tau, \quad (2.29)$$

$H^{(1)}(t)$ é dado simplesmente por

$$H^{(1)}(t) = \frac{-i}{2} \int_{t_0}^t d\tau [H(t), H(\tau)]. \quad (2.30)$$

Neste caso, o operador de evolução temporal torna-se

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] T \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H^{(1)}(\tau) \right] \\ &= \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} ds [H(\tau), H(s)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Esta forma para o operador de evolução temporal será muito útil em cálculos posteriores, pois a Hamiltoniana que descreve a dinâmica assintótica satisfaz a condição (2.13) e, portanto, se tornará fácil obter explicitamente a forma do operador de evolução temporal nesta região.

O assunto que será discutido na próxima seção é o espalhamento de uma partícula carregada por um potencial de longo alcance (o potencial coulombiano), a nível não relativístico, com o objetivo de deixar claro qual a idéia principal do que será discutida no restante deste capítulo.

2.2 Espalhamento Coulombiano Não Relativístico

Para ilustrar o método usado na construção do operador assintótico, $U_{as}(t)$, consideremos o espalhamento de uma partícula carregada por um potencial coulombiano em duas dimensões. A Hamiltoniana do sistema tem a seguinte forma:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + g \ln r = H_0 + V \quad (2.32)$$

onde m é a massa da partícula espalhada e g é o produto das cargas dessa partícula e do centro espalhador.

Primeiramente construiremos a forma do potencial na região assintótica usando a representação de interação e, com isso, obteremos o pacote de onda que representará a partícula espalhada nessa região. Para isso, consideremos os observáveis $\vec{x}$ e $\vec{p}$ como operadores momento e posição, na representação de interação. Nesta representação, esses operadores satisfazem a seguinte equação de movimento:

$$\frac{dO_I}{dt} = \frac{1}{i} [O_I, H_0]. \quad (2.33)$$

Usando a Hamiltoniana (2.32) e a equação acima, vemos que o momento da partícula espalhada é uma constante de movimento:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{i} [\vec{p}, H_0] = 0. \quad (2.34)$$

Similarmente, a equação de movimento obedecida pelas coordenadas

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{1}{i} [\vec{x}, H_0] = \frac{\vec{p}}{m} \quad (2.35)$$

cuja solução

$$\vec{x}(t) = \vec{x} + \frac{\vec{p}}{m}t, \quad (2.36)$$

descreve a evolução temporal do operador coordenada da partícula espalhada, é idêntica à equação clássica da trajetória de uma partícula em movimento retilíneo e uniforme. Com esses resultados podemos obter a forma do potencial de interação a grandes distâncias, assumindo que nessa região as partículas se comportam como partículas clássicas com trajetórias bem definidas. Assim, quando $|t| \rightarrow \infty$

$$V(t) = g \ln \left(\frac{|\vec{p}|}{m} t \right). \quad (2.37)$$

Este potencial, que descreve a interação na região assintótica $|t| \rightarrow \infty$, não possui norma convergente e sua contribuição para a dinâmica assintótica não pode ser desprezada. Em outras palavras, a dinâmica assintótica não é governada por H_0 mas sim pelo operador

$$H_{as}(t) = H_0 + V_{as}(t) = H_0 + g \ln \left(\frac{|\vec{p}|}{m} t \right). \quad (2.38)$$

Com esta Hamiltoniana descrevendo a dinâmica assintótica e levando em conta que $V_{as}(t)$ na representação de interação é a mesma que na representação de Schrödinger, pois

$$[V_{as}(t), H_0] = 0, \quad (2.39)$$

a função de onda que descreve o comportamento da partícula nessa região é obtida resolvendo a equação de Schrödinger para H_{as}

$$i \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle = H_{as}(t) |\alpha, t\rangle, \quad (2.40)$$

onde $|\alpha, t\rangle$ é o estado físico da partícula espalhada. Na representação dos momentos, a equação acima torna-se:

$$i \frac{d}{dt} \Psi(\vec{p}, t) = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + g \ln \left(\frac{|\vec{p}|}{m} t \right) \right] \Psi(\vec{p}, t), \quad (2.41)$$

cuja solução é

$$\Psi(\vec{p}, t) = c(\vec{p}) \exp \left\{ -i \frac{\vec{p}^2}{2m} t - ig \left[t \ln \left(\frac{|\vec{p}|}{m} t - 1 \right) - t_0 \ln \left(\frac{|\vec{p}|}{m} t_0 - 1 \right) \right] \right\}. \quad (2.42)$$

Podemos escrever o pacote de ondas na representação de coordenadas, tomando a transformada de Fourier da expressão acima

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int d\vec{p} \Psi(\vec{p}, t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\vec{p} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} c(\vec{p}) \\ &\quad \times \exp \left\{ -i \frac{\vec{p}^2}{2m} t - ig \left[t \ln \left(\frac{|\vec{p}|}{m} t - 1 \right) - t_0 \ln \left(\frac{|\vec{p}|}{m} t_0 - 1 \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

A escolha desta solução se deve a certas condições iniciais para a equação (2.41). Estas são determinadas levando-se em conta o fato de que a variação temporal das distribuições das coordenadas e momento da partícula representada pelo pacote de onda (2.43) para $|t| \rightarrow \infty$ deve ser governada pela dinâmica clássica. A constante t_0 não é um fator significativo neste contexto.

Para verificar essas afirmações, vamos tomar os valores esperados das coordenadas e momentos em relação a solução (2.43). Para a distribuição de momentos, obtemos:

$$\langle \vec{p}(t) \rangle = \int d\vec{p} \left| c(\vec{p}) \right|^2 \vec{p} = \langle \vec{p} \rangle. \quad (2.44)$$

Similarmente, o valor médio das coordenadas tem o seguinte comportamento na região assintótica:

$$\langle \vec{x}(t) \rangle = \frac{\langle \hat{p} \rangle t}{m} + gt \left\langle \frac{\hat{p}}{p^2} \right\rangle. \quad (2.45)$$

Isto mostra que a escolha da solução (2.43) para os pacotes de onda na região assintótica é de origem física e leva a uma definição coerente da matriz S . O pacote de onda, (2.43), pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= U_{as}(t) \Psi \\ &= e^{-iH_0 t} \exp \left\{ -ig \left[t \ln \left(\frac{|\vec{p}|}{m} t - 1 \right) - t_0 \ln \left(\frac{|\vec{p}|}{m} t_0 - 1 \right) \right] \right\} \Psi. \end{aligned} \quad (2.46)$$

O exemplo anterior mostra que a escolha da Hamiltoniana que descreve a dinâmica assintótica depende da origem física do problema, ao contrário das definições usuais na teoria formal de espalhamento, onde H_0 é tomada como operador assintótico, sobre operadores de onda.

Com base nisso, redefinimos os operadores de onda da seguinte forma:

$$W_{out}^{in} = \lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{-iHt} U_{as}(t) \quad (2.47)$$

Nesta seção, obtemos uma Hamiltoniana que descreve a dinâmica assintótica a nível não relativístico e posteriormente resolvemos a equação de Schrödinger para esta Hamiltoniana, escolhendo certas condições iniciais, de modo que as partículas se comportem como partículas clássicas em $|t| \rightarrow \infty$. Na próxima seção usaremos estes argumentos para construir $U_{as}(t)$ na QED₃.

2.3 Construção do Operador Assintótico na QED₃

Vamos agora construir o operador que descreve as interações na região assintótica usando a eletrodinâmica quântica.

Para descrever a interação de elétrons e pósitrons com o campo eletromagnético na QED₃, precisamos definir os campos que os descrevem. Elétrons e pósitrons são descritos pelo campo de Dirac quantizado, $\Psi(x)$, que pode ser representado como uma soma de dois termos: um de frequência positiva e outro de frequência negativa, isto é,

$$\Psi(x) = \Psi^{(+)}(x) + \Psi^{(-)}(x). \quad (2.48)$$

Similarmente, o seu campo conjugado, $\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger \gamma^0$, pode ser representado por

$$\bar{\Psi}(x) = \bar{\Psi}^{(+)}(x) + \bar{\Psi}^{(-)}(x). \quad (2.49)$$

Estes campos são expandidos em termos de operadores de criação e aniquilação de elétrons e pósitrons, $b_r^\dagger(\vec{p})$, $b_r(\vec{p})$, $b_r^\dagger(\vec{p})$ e $b_r(\vec{p})$, respectivamente

$$\begin{aligned} \Psi^{(+)}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int d\vec{p} \sqrt{\frac{m}{p_0}} \sum_r b_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - ip_0 t}, \\ \Psi^{(-)}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int d\vec{p} \sqrt{\frac{m}{p_0}} \sum_r d_r^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x} + ip_0 t}, \\ \bar{\Psi}^{(-)}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int d\vec{p} \sqrt{\frac{m}{p_0}} \sum_r b_r^\dagger(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x} + ip_0 t}, \\ \bar{\Psi}^{(+)}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int d\vec{p} \sqrt{\frac{m}{p_0}} \sum_r d_r(\vec{p}) \bar{v}_r(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - ip_0 t}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde

$$\bar{u}_r = u_r^\dagger \gamma^0$$

e os operadores de criação e aniquilação de férmions satisfazem as seguintes relações de anticomutação:

$$\begin{aligned} \{b_r(\vec{p}), b_s^\dagger(\vec{p}')\} &= \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \\ \{d_r(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} &= \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned} \quad (2.51)$$

O operador que descreve a interação entre partículas carregadas e o campo eletromagnético na representação de interação é dado por:

$$V_I = \int j^\mu(x) \cdot A_\mu(x) d\vec{x}, \quad (2.52)$$

onde $j^\mu(x)$ é o operador corrente

$$j^\mu(x) = e : \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) : \quad (2.53)$$

O produto normal é indicado pelos dois pontos e impõe a condição de que os operadores de aniquilação devem estar à direita dos operadores de criação.

O potencial eletromagnético, na expressão para o potencial de interação, pode ser um campo externo ou quantizado. Como iremos considerar somente a emissão de fótons na região assintótica, $A_\mu(x)$ será o operador campo eletromagnético expandido em termos de operadores de criação e aniquilação de fótons (ver 1.11)

Retornando para a discussão da forma do operador corrente verificamos que $j^\mu(x)$ pode ser decomposto como uma soma de quatro termos

$$j^{\mu++} = e \bar{\Psi}^{(+)} \gamma^\mu \Psi^{(+)},$$

$$j^{\mu--} = e \bar{\Psi}^{(-)} \gamma^{\mu} \Psi^{(-)}, \quad (2.54)$$

$$j^{\mu+-} = e : \bar{\Psi}^{(+)} \gamma^{\mu} \Psi^{(-)} :,$$

$$j^{\mu-+} = e : \bar{\Psi}^{(-)} \gamma^{\mu} \Psi^{(+)} :.$$

De (2.50), notamos que $\Psi^{(+)}$ (a parte de Ψ com frequência positiva) é linear em operadores de aniquilação de elétrons. Do mesmo modo, $\Psi^{(-)}$, $\bar{\Psi}^{(+)}$ e $\bar{\Psi}^{(-)}$, criam pósitrons, aniquilam pósitrons e criam elétrons, respectivamente. Assim, cada termo do operador corrente representa um processo físico particular: $j^{\mu--}$ e $j^{\mu++}$ estão relacionados com a criação e aniquilação de pares de partículas, enquanto $j^{\mu+-}$ e $j^{\mu-+}$ envolvem espalhamento de férmions.

Antes de substituir explicitamente as expressões para os operadores que compõem o potencial de interação, verificamos que o problema se torna bem mais simples se levarmos em conta que somente as partes do operador de corrente relacionadas com o espalhamento de férmions contribuem para o potencial de interação na região assintótica. O argumento é o seguinte: a solução da equação de movimento obedecida pelo operador de evolução temporal na região assintótica envolve a integração temporal do potencial de interação. Como a dependência temporal de $V_I(t)$ é do tipo $e^{i\alpha t}$, somente os termos onde α se aproxima de zero, dentro do intervalo de integração nos momentos, contribuem assintoticamente, pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{i\alpha t}}{\alpha} = \pi \delta(\alpha). \quad (2.55)$$

Assim, as partes do potencial de interação contendo operadores de corrente que representam a produção e aniquilação de pares não contribuem na região assintótica, pois os argumentos da função exponencial caracterizando a dependência temporal deste operador são da forma

$$p^0 + q^0 \mp \omega = \left(\vec{p}^2 + m^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\left(\vec{p} + \vec{k} \right)^2 + m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mp k_0, \quad (2.56)$$

que é diferente de zero para todo $\vec{p}$ e $\vec{k}$. Por outro lado, os termos que envolvem espalhamento de férmions, com a emissão de fótons, têm como argumento da função exponencial

$$p^0 - q^0 \mp \omega = \left(\vec{p}^2 + m^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\left(\vec{p} + \vec{k} \right)^2 + m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mp k_0, \quad (2.57)$$

que se anula para $\vec{k}$ igual a zero e para todo $\vec{p}$. Este resultado é satisfatório, pois é necessário fótons com energia $\omega \geq 2m$ para se tornar possível a produção de pares.

Com isso, escrevemos explicitamente o potencial de interação na região assintótica:

$$V_{as}(t) = \frac{e}{(2\pi)} \int d\vec{k} \int d\vec{p} \int d\vec{q} \sum_r \frac{p^\mu}{p^0} \left(b_r^\dagger(\vec{q}) b_r(\vec{p}) - d_r^\dagger(\vec{q}) d_r(\vec{p}) \right) \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \delta \left(\vec{q} - \vec{p} - \vec{k} \right) \left(a_\mu \left(\vec{k} \right) e^{-i\omega t} + a_\mu^\dagger \left(\vec{k} \right) e^{i\omega t} \right) e^{i(q^0 - p^0)t} \\
& = \frac{e}{(2\pi)} \int d\vec{k} \int d\vec{p} \sum_r \frac{p^\mu}{p^0} \left(b_r^\dagger \left(\vec{p} + \vec{k} \right) b_r \left(\vec{p} \right) - d_r^\dagger \left(\vec{p} + \vec{k} \right) d_r \left(\vec{p} \right) \right) \\
& \times \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(a_\mu \left(\vec{k} \right) e^{-i\omega t} + a_\mu^\dagger \left(\vec{k} \right) e^{i\omega t} \right) e^{i(q^0 - p^0)t},
\end{aligned}$$

onde o argumento da função delta impõe a conservação de momento do sistema:

$$\vec{p} + \vec{k} = \vec{q}, \quad (2.59)$$

sendo $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{k}$, os momentos dos férmions e fótons emitidos.

Outras simplificações podem ser feitas, levando em conta que a principal contribuição para as integrais restantes, no limite $|t| \rightarrow \infty$, provem das vizinhanças de $\vec{k}$ igual a zero.

$$p^0 - q^0 \mp \omega \simeq \mp \frac{p \cdot k}{p^0}. \quad (2.60)$$

Além disso, em (2.58) fizemos a seguinte aproximação

$$\begin{aligned}
\bar{u}_r(p) \gamma^\mu u_s(q) &= \frac{1}{2m} \bar{u}_r(p) [p^\mu + q^\nu + i\sigma^{\mu\nu} (p_\nu - q_\nu)] u_s(q) \\
&\simeq \frac{p^\mu}{m} \delta_{rs},
\end{aligned} \quad (2.61)$$

onde

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Observamos que a parte de $V_{as}(t)$ envolvendo operadores de férmions, pode ser aproximada por

$$\begin{aligned}
& \left[b_r^\dagger \left(\vec{p} + \vec{k} \right) b_r \left(\vec{p} \right) - d_r^\dagger \left(\vec{p} + \vec{k} \right) d_r \left(\vec{p} \right) \right] \\
& \simeq \left[b_r^\dagger \left(\vec{p} \right) b_r \left(\vec{p} \right) - d_r^\dagger \left(\vec{p} \right) d_r \left(\vec{p} \right) \right].
\end{aligned} \quad (2.62)$$

Multiplicando esta expressão pela carga do elétron, obtemos o operador densidade de carga no espaço dos momentos

$$\rho \left(\vec{p} \right) = e \left[b_r^\dagger \left(\vec{p} \right) b_r \left(\vec{p} \right) - d_r^\dagger \left(\vec{p} \right) d_r \left(\vec{p} \right) \right]. \quad (2.63)$$

Substituindo (2.60) e (2.63) em (2.58), o potencial de interação na região assintótica é reescrito como

$$\begin{aligned}
V_{as}(t) &= \frac{1}{(2\pi)} \int d\vec{k} \int d\vec{p} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{p^\mu}{p^0} \rho \left(\vec{p} \right) \left[a_\mu \left(\vec{k} \right) e^{-i\frac{k \cdot p}{p^0} t} + a_\mu^\dagger \left(\vec{k} \right) e^{i\frac{k \cdot p}{p^0} t} \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega_k}} j_{as}^\mu \left(\vec{k}, t \right) \left[a_\mu \left(\vec{k} \right) e^{-i\omega t} + a_\mu^\dagger \left(-\vec{k} \right) e^{i\omega t} \right],
\end{aligned} \quad (2.64)$$

onde

$$j_{as}^{\mu}(\vec{k}, t) = \int p^{\mu} e^{i \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{p^0} t} \rho(\vec{p}) \frac{d\vec{p}}{p^0}. \quad (2.65)$$

O significado físico deste operador de corrente pode ser verificado escrevendo-o no espaço de coordenadas através de uma transformada de Fourier

$$\begin{aligned} j_{as}^{\mu}(x) &= \frac{1}{(2\pi)} \int d\vec{k} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} j_{as}^{\mu}(\vec{k}, t) \\ &= (2\pi) \int d\vec{p} \frac{p^{\mu}}{p^0} \rho(\vec{p}) \delta\left(\vec{x} - \frac{\vec{p}}{p^0} t\right), \end{aligned} \quad (2.66)$$

que possui a forma de uma distribuição de corrente devido ao movimento de uma partícula carregada com densidade de carga $\rho(\vec{p})$ e velocidade uniforme $\frac{\vec{p}}{p^0}$. De fato, os autovalores do operador (2.65), atuando num espaço de partículas carregadas, são densidades de corrente clássicas devido ao movimento dessas partículas, mostrando que assintoticamente as partículas espalhadas se comportam como partículas clássicas. Isto pode ser verificado, definindo um estado de elétrons e pósitrons com dado momento e spin

$$\Psi(\vec{p}_1, s_1; \dots; \vec{p}_n, s_n | \vec{q}_1, i_1; \dots; \vec{q}_m, i_m) = b_{s_1}^{\dagger}(\vec{p}_1) \dots b_{s_n}^{\dagger}(\vec{p}_n) d_{i_1}^{\dagger}(\vec{q}_1) \dots d_{i_m}^{\dagger}(\vec{q}_m) |0\rangle,$$

que é autoestado do operador $j_{as}^{\mu}(\vec{k}, t)$, com autovalor

$$j^{\mu}(\vec{k}, t | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m) = \sum_{j=1}^m j^{\mu}(\vec{k}, t | \vec{q}_j) - \sum_{j=1}^n j^{\mu}(\vec{k}, t | \vec{p}_j),$$

onde

$$j^{\mu}(\vec{k}, t | p) = |e| \frac{p^{\mu}}{p^0} e^{i \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{p^0} t},$$

é a densidade de corrente de uma partícula clássica com momento $\vec{p}$. Logo, o método de tratar a dinâmica assintótica é uma generalização natural daquele obtido não relativisticamente. Análogo ao caso não relativístico, a Hamiltoniana que descreve a dinâmica assintótica é dado por:

$$H_{as} = H_0 + V_{as}(t), \quad (2.67)$$

onde H_0 é a Hamiltoniana livre. Com isso poderemos obter $U_{as}(t)$, resolvendo a equação de Schrödinger para o operador de evolução temporal

$$i \frac{d}{dt} U(t) = H(t) U(t), \quad (2.68)$$

onde H é a Hamiltoniana do sistema que está sendo considerado. Em nosso problema $H = H_{as}$ e, portanto, a equação diferencial acima deve ser satisfeita pelo operador $U_{as}(t)$.

Seguindo a analogia do resultado não relativístico, procuramos soluções para a Equação acima da seguinte forma:

$$U_{as}(t) = e^{-iH_0 t} Z(t). \quad (2.69)$$

Substituindo este operador na equação (2.68), obtemos a seguinte equação de movimento para $Z(t)$

$$i \frac{d}{dt} Z(t) = V_{as}^I(t) Z(t), \quad (2.70)$$

onde $V_{as}^I(t)$ é o operador potencial assintótico na representação de interação. Ou seja:

$$V_{as}^I(t) = e^{iH_0 t} V_{as}(t) e^{-iH_0 t}. \quad (2.71)$$

A solução da equação acima é o produto ordenado temporal:

$$Z(t) = T \exp \left\{ -i \int^t V_{as}^I(\tau) d\tau \right\}, \quad (2.72)$$

cujas soluções podem ser simplificadas, se levarmos em conta o resultado obtido na seção anterior, isto é, que o comutador entre potenciais em diferentes tempos é um c-número:

$$[V_{as}^I(t_1), V_{as}^I(t_2)] = c - \text{Número} \quad (2.73)$$

e conseqüentemente

$$[V_{as}^I(t), [V_{as}^I(t_1), V_{as}^I(t_2)]] = 0, \quad \forall t, t_1, t_2. \quad (2.74)$$

Com isso, a solução para $Z(t)$, na forma de produto ordenado temporal, pode ser reescrita na forma de produto ordinário

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp \left\{ -i \int^t V_{as}^I(\tau) d\tau \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} ds [V_{as}^I(\tau), V_{as}^I(s)] \right\} \\ &= \exp \{ R(t) \} \exp \{ i\phi(t) \}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde

$$R(t) = -i \int_{t_0}^t V_{as}^I(\tau) d\tau \quad (2.76)$$

e

$$\phi(t) = -\frac{1}{2i} \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} ds [V_{as}^I(\tau), V_{as}^I(s)]. \quad (2.77)$$

Deste resultado, vemos que o operador assintótico consiste de dois fatores que comutam entre si. O primeiro envolve operadores de fótons e suas propriedades serão estudadas no próximo capítulo, quando definiremos o espaço de estados assintóticos. O segundo é um fator de fase e veremos que sua forma é uma generalização da fase coulombiana obtida nos cálculos não relativísticos da seção 2.2.

Agora voltamos nossa atenção sobre a escolha do limite inferior de integração τ_0 , nas integrais temporais. No limite superior temos $|t| \rightarrow \infty$, pois queremos descrever o comportamento assintótico. Por razões de simetria poderíamos ser tentados a escolher τ_0 igual a zero. Tal escolha, entretanto, ignora o fato de que somente assintoticamente $V_{as}(t)$ tem significado físico. Se o operador $R(t)$, que é formado linearmente de operadores de criação e aniquilação de fótons, tiver contribuição a tempos finitos, não comutará com o momento total do campo de radiação e o limite $|t| \rightarrow \infty$ poderá diferir do limite clássico. Estes operadores comutarão quando considerarmos tempos infinitos, onde somente baixos valores do momento do fóton contribuem para as integrais temporais. Assim, $U_{as}(t)$ não deve conter contribuições de integrais da função $V_{as}(t)$ com relação a tempos finitos.

A exigência acima admite somente um modo de calcular as integrais temporais, isto é, devemos assumir que

$$\int_{as}^t e^{is\tau} d\tau = \frac{1}{is} e^{ist}. \quad (2.78)$$

Neste caso, os termos que não comutam assintoticamente com o momento total estarão ausentes.

Substituindo a expressão (2.64) para $V_{as}^I(t)$ em (2.76), e calculando a integral temporal, $R(t)$ torna-se:

$$\begin{aligned} R(t) &= -\frac{i}{(2\pi)} \int d\vec{k} \int d\vec{p} \frac{1}{\sqrt{2\omega p_0}} p^\mu \rho(\vec{p}) \\ &\quad \times \int^t d\tau \left[a_\mu(\vec{k}) e^{-i\frac{k \cdot p}{p^0} \tau} + a_\mu^\dagger(\vec{k}) e^{i\frac{k \cdot p}{p^0} \tau} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \int d\vec{p} \frac{p^\mu}{p \cdot k} \rho(\vec{p}) \left[a_\mu(\vec{k}) e^{-i\frac{k \cdot p}{p^0} t} - a_\mu^\dagger(\vec{k}) e^{i\frac{k \cdot p}{p^0} t} \right] \end{aligned} \quad (2.79)$$

Da mesma forma a fase ϕ , pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int^t d\tau \int^{t_0} ds \int d\vec{p} \int d\vec{q} \frac{p \cdot q}{p^0 q^0} \rho(\vec{p}) \rho(\vec{q}) \\ &\quad \times \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \sin \left[k \left(\frac{q}{q^0} \tau - \frac{p}{p^0} s \right) \right] \end{aligned} \quad (2.80)$$

A fim de obtermos uma forma mais conhecida para esta fase, calcularemos as integrais temporais e no momento do fóton. Para isso, definimos a função integral

$$\begin{aligned} I(p, q, \tau, s) &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \sin \left[k \left(\frac{q}{q^0} \tau - \frac{p}{p^0} s \right) \right] \\ &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \sin(k \cdot x), \end{aligned} \quad (2.81)$$

onde

$$x = \frac{q}{q^0}\tau - \frac{p}{p^0}s. \quad (2.82)$$

Sabendo que $\left| \vec{k} \right| = \omega$ e escolhendo φ o ângulo entre $\vec{x}$ e $\vec{k}$, obtemos:

$$\begin{aligned} I(p, q, \tau, s) &= \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{2\omega} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \left[\omega \left(x_0 - \left| \vec{x} \right| \cos \varphi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\omega \sin \omega \lambda, \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde definimos

$$\lambda = x_0 - \left| \vec{x} \right| \cos \varphi. \quad (2.84)$$

Desta forma

$$\begin{aligned} I(p, q, \tau, s) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2i} \int_0^\infty d\omega \left(e^{i\omega\lambda} - e^{-i\omega\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{4i} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{i}{\lambda + i\epsilon} + \frac{i}{\lambda - i\epsilon} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\left(x_0 - \left| \vec{x} \right| \cos \varphi \right)} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{x^2}}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

para $x^2 > 0$.

Nosso próximo passo é calcular as integrais temporais da forma

$$G(p, q, t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^\tau ds \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \sin \left[k \left(\frac{q}{q^0}\tau - \frac{p}{p^0}s \right) \right]. \quad (2.86)$$

Levando em conta o resultado (2.85), com x definido em (2.82) obtemos

$$\begin{aligned} G(p, q, t) &= \pi \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^\tau ds \frac{1}{\sqrt{\frac{p^2}{p_0^2}s^2 - 2\frac{p \cdot q}{p^0 q^0}\tau s + \frac{q^2}{q_0^2}\tau^2}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{p^2}{p_0^2}}} \int_{t_0}^t d\tau \\ &\quad \times \ln \left[\left(2\sqrt{\frac{p^2}{p_0^2}} \sqrt{\frac{p^2}{p_0^2} - 2\frac{p \cdot q}{p^0 q^0} + \frac{q^2}{q_0^2}} + 2\sqrt{\frac{q^2}{q_0^2}} - 2\frac{p \cdot q}{p^0 q^0} \right) \tau \right] \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{p^2}{p_0^2}}} \int_{t_0}^t d\tau \ln \left[\left(2\sqrt{\frac{p^2}{p_0^2}} \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| + 2\sqrt{\frac{q^2}{q_0^2}} - 2\frac{p \cdot q}{p^0 q^0} \right) \tau \right]. \end{aligned} \quad (2.87)$$

A integral acima é do tipo

$$\int^t dx \ln \beta x = t(1 - \ln \beta t). \quad (2.88)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} G(p, q, t) &= \frac{\pi t}{\sqrt{\frac{p^2}{p_0^2}}} \left\{ 1 - \ln \left[\left(2\sqrt{\frac{p^2}{p_0^2}} \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| + 2\sqrt{\frac{q^2}{q_0^2}} - 2\frac{p \cdot q}{p^0 q^0} \right) t \right] \right\} \\ &\simeq \pi t \left[1 - \ln \left(2 \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| t \right) \right], \end{aligned} \quad (2.89)$$

na última linha foi tomado o limite não relativístico para comparar esse resultado com aquele obtido na seção 2.2. Desta maneira o operador $\phi(t)$ pode ser expresso na seguinte forma:

$$\phi(t) = \frac{1}{4\pi} \int d\vec{q} \int d\vec{p} \frac{p \cdot q}{p^0 q^0} \rho(\vec{p}) \rho(\vec{q}) t \left[1 - \ln \left(2 \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| t \right) \right], \quad (2.90)$$

mostrando que é uma generalização relativística da fase coulombiana obtida na seção 2.2, divergindo assintoticamente. O autovalor desse operador atuando num espaço de partículas carregadas, fornece a interação coulombiana entre todas as partículas do sistema. Por outro lado, o operador $R(t)$ tem origem puramente relativística.

Com $Z(t)$ definido em (2.75), o operador assintótico é reescrito como

$$U_{as}(t) = e^{-iH_0 t} e^{R(t)} e^{i\phi(t)} \quad (2.91)$$

e seguindo a generalização não relativística, o operador S é redefinido como

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ s \rightarrow -\infty}} U_{as}^\dagger(t) e^{-iH(t-s)} U_{as}(s). \quad (2.92)$$

Esta definição difere da matriz S de Dyson, dada por (2.4), pela troca de

$$e^{-iH_0 t} \rightarrow U_{as}(t), \quad (2.93)$$

mostrando que o alcance infinito do potencial de Coulomb destrói o comportamento de dinâmica livre em regiões assintóticas, ao contrário da definição da matriz S de Dyson.

2.4 Espectro de Frequências

Faremos agora uma análise da dinâmica assintótica no espectro de frequências, levando em conta que as singularidades no infravermelho são um efeito de tempos assintóticos.

O ponto de partida deste modelo é separar o Hamiltoniano numa parte "soft", que é formada por fótons com energia menor que Δ e "hard", a parte restante,

$$H(t) = H_s(t) + H_h(t). \quad (2.94)$$

Usando (2.10), a matriz S pode ser reescrita como

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ s \rightarrow -\infty}} U(t, t_0) S_h U^\dagger(s, t_0), \quad (2.95)$$

onde

$$U(t, t_0) = T \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H_s(\tau) \right], \quad (2.96)$$

possui divergências no infravermelho, enquanto S_h é livre destas divergências pois contém pelo menos uma interação H_h .

O procedimento que seguiremos aqui é basicamente o mesmo da seção anterior. Mas neste caso, usaremos a representação de interação e será invertida a ordem de integração, de modo a possibilitar a análise das divergências no espectro de frequência. A forma da Hamiltoniana de interação H_s na representação de interação é igual a V_{as}^I , definido em (2.71). Assim, o operador evolução temporal assintótico obedece a seguinte equação de evolução.

$$i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H_s U(t, t_0), \quad (2.97)$$

cuja solução é dada por (2.96). Comparando (2.97) com (2.72) e (2.75), obtemos

$$U(t, t_0) = \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau H_s(\tau) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^\tau ds [H_s(\tau), H_s(s)] \right\}. \quad (2.98)$$

Seguindo os mesmos passos da seção anterior, definimos

$$i\phi(t, t_0) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^\tau ds [H_s(\tau), H_s(s)] \quad (2.99)$$

e

$$R(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t d\tau H_s(\tau). \quad (2.100)$$

Usando (2.80) a fase $i\phi(t, t_0)$ torna-se

$$\begin{aligned} i\phi(t, t_0) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^\tau ds \int d\vec{p} \int d\vec{q} \hat{p} \cdot \hat{q} \rho(\vec{p}) \rho(\vec{q}) \\ &\times \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \left(e^{-ik \cdot (\hat{p}\tau - \hat{q}s)} - e^{ik \cdot (\hat{p}\tau - \hat{q}s)} \right), \end{aligned} \quad (2.101)$$

onde

$$\hat{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \hat{q} = \frac{q}{q_0}. \quad (2.102)$$

Na expressão acima, calcularemos primeiro as integrais temporais, definindo:

$$\begin{aligned} I(\hat{p}, \hat{q}, t, t_0) &= \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^\tau ds \left(e^{-ik \cdot (\hat{p}\tau - \hat{q}s)} - e^{ik \cdot (\hat{p}\tau - \hat{q}s)} \right) \\ &= I_1(\hat{p}, \hat{q}, t, t_0) + I_2(\hat{p}, \hat{q}, t, t_0) \end{aligned} \quad (2.103)$$

onde

$$I_1(\hat{p}, \hat{q}, t, t_0) = \frac{-2i}{(\hat{q} \cdot k)[k \cdot (\hat{p} - \hat{q})]} \times [\sin k \cdot (\hat{p} - \hat{q})t - \sin k \cdot (\hat{p} - \hat{q})t_0] \quad (2.104)$$

e

$$I_2(\hat{p}, \hat{q}, t, t_0) = \frac{4i}{(\hat{q} \cdot k)(\hat{p} \cdot k)} \sin k \cdot \hat{p}(t - t_0).$$

De (2.103) e (2.104), reescrevemos (2.101) como

$$i\phi(t, t_0) = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d\vec{p} \int d\vec{q} \hat{p} \cdot \hat{q} \rho(\vec{p}) \rho(\vec{q}) \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \times \left\{ \frac{[\sin k \cdot (\hat{p} - \hat{q})t - \sin k \cdot (\hat{p} - \hat{q})t_0]}{(\hat{q} \cdot k)[k \cdot (\hat{p} - \hat{q})]} - \frac{2 \sin k \cdot \hat{p}(t - t_0)}{(\hat{q} \cdot k)(\hat{p} \cdot k)} \right\}. \quad (2.105)$$

A matriz S é definida em (2.95) no limite $t, s \rightarrow \pm\infty$. O tempo t_0 é um parâmetro que deve ser escolhido convenientemente, no intervalo $-\infty < t_0 < +\infty$. Neste caso, escolhemos t_0 igual a zero e justificaremos esta escolha adiante.

A construção da parte assintótica da matriz S é efetuada tomando-se os limites mencionados acima nos operadores de evolução temporal,

$$U(\pm\infty, 0) = \exp[R(\pm\infty, 0)] \exp[i\phi(\pm\infty, 0)], \quad (2.106)$$

onde

$$R(\pm\infty, 0) = \frac{1}{(2\pi)} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \int d\vec{p} \frac{p^\mu}{p \cdot k} \rho(\vec{p}) \left[a_\mu\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) - a_\mu^\dagger\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) \right] \quad (2.107)$$

e

$$\begin{aligned} i\phi(\pm\infty, 0) &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d\vec{p} \int d\vec{q} \hat{p} \cdot \hat{q} \rho(\vec{p}) \rho(\vec{q}) \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \\ &\times \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\{ \frac{\sin k \cdot (\hat{p} - \hat{q})t}{(\hat{q} \cdot k)[k \cdot (\hat{p} - \hat{q})]} - \frac{2 \sin k \cdot \hat{p}t}{(\hat{q} \cdot k)(\hat{p} \cdot k)} \right\} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d\vec{p} \int d\vec{q} \hat{p} \cdot \hat{q} \rho(\vec{p}) \rho(\vec{q}) \\ &\times \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \frac{1}{(\hat{q} \cdot k)} \{ \pm\pi \delta[k \cdot (\hat{p} - \hat{q})] \mp 2\pi \delta(\hat{p} \cdot k) \}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Como o segundo termo entre colchetes envolvendo a função delta se anula, obtemos finalmente:

$$\phi(\pm\infty, 0) = \mp \frac{i}{4\pi} \int d\vec{p} \int d\vec{q} \hat{p} \cdot \hat{q} \rho(\vec{p}) \rho(\vec{q}) \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \frac{\delta[k \cdot (\hat{p} - \hat{q})]}{(\hat{q} \cdot k)}. \quad (2.109)$$

Afim de verificar as divergências no infravermelho, existentes neste operador de fase, calcularemos agora a integral no momento do fóton no intervalo $\Delta \leq \omega \leq \lambda$, definindo a função

$$\begin{aligned} g(p, q) &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{(\hat{q} \cdot \vec{k})} \delta[k \cdot (\hat{p} - \hat{q})] \\ &= \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{\omega d\omega}{2\omega} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{\omega \left(1 - \frac{|\vec{q}|}{q_0} \cos \gamma\right)} \delta\left(\omega \left|\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right| \cos \varphi\right), \end{aligned} \quad (2.110)$$

onde φ é o ângulo azimutal do vetor $\vec{k}$, γ o ângulo entre $\vec{k}$ e $\frac{\vec{q}}{q_0}$ e colocamos o vetor $\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right)$ ao longo do eixo x . Para facilitar os cálculos tomamos o limite de pequeno ângulo de espalhamento, $\frac{\vec{q}}{q_0} \perp \left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right)$. Na integral do momento do fóton o limite superior, Δ , serve para definir fótons "soft" e seu significado físico está relacionado com a limitação experimental, onde fótons com energia abaixo deste limiar não serão detectados. Por outro lado, o corte inferior deve ser removido tomando $\lambda \rightarrow 0$.

Usando o fato que

$$\cos \gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi,$$

a integral (2.110) é reescrita como

$$\int_{\lambda}^{\Delta} \frac{\omega d\omega}{2\omega} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{\omega \left(1 - \frac{|\vec{q}|}{q_0} \sin \varphi\right)} \delta\left(\omega \left|\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right| \cos \varphi\right). \quad (2.111)$$

Levando em conta a propriedade da função delta

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left|\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}}, \quad (2.112)$$

onde x_i são as raízes da função $f(x)$, obtemos

$$\delta\left(\omega \left|\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right| \cos \varphi\right) = \frac{1}{\omega \left|\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right|} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\delta\left(\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)}{|\sin \varphi|_{\varphi=\frac{n\pi}{2}}} \quad (2.113)$$

Substituindo este resultado em (2.110), obtemos

$$\begin{aligned} g(p, q) &= \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{\omega d\omega}{2\omega^3} \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{\left|\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right|} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\left[\sum_{n=1,3,5,\dots} \delta\left(\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)\right]}{\left(1 - \frac{|\vec{q}|}{q_0} \sin \varphi\right)} \\ &= \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{\omega d\omega}{2\omega^3} \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{\left|\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right|} \left[\frac{1}{1 - \frac{|\vec{q}|}{q_0}} + \frac{1}{1 + \frac{|\vec{q}|}{q_0}}\right]. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Como estamos interessados somente na divergência no espectro de frequência, tomamos o limite não relativístico da expressão acima ou $|\vec{v}| \ll c$. Deste modo

$$\begin{aligned} g(p, q) &= \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{\omega d\omega}{2\omega^3} \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{\left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right|} \\ &= \frac{1}{v_{pq}} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d\omega}{2\omega^2} \\ &= \frac{1}{v_{pq}} \left(-\frac{1}{\omega} \right)_{\lambda}^{\Delta}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

onde

$$v_{pq} \equiv \frac{p \cdot q}{\sqrt{(p \cdot q)^2 - p^2 q^2}}.$$

Substituindo (2.114) em (2.109), obtemos a seguinte forma para o operador de fase

$$\phi(\pm\infty, 0) = \pm \frac{i}{4\pi} \int d\vec{p} \int d\vec{q} \frac{\rho(\vec{p}) \rho(\vec{q})}{v_{pq}} \left(-\frac{1}{\omega} \right)_{\lambda}^{\Delta}.$$

As únicas diferenças entre o método usado nesta seção e o da seção anterior, para descrever a dinâmica assintótica são as seguintes: no primeiro a análise das divergências contidas na fase ϕ é feita usando o tempo como parâmetro e desconsiderando o limite inferior t_0 nas integrais temporais, enquanto que no segundo esta análise é verificada no espectro de frequência e t_0 é colocado igual a zero, como é feito usualmente na definição dos operadores de onda. A fim de verificar que os dois métodos levam aos mesmos resultados, fixamos t e t_0 na expressão da fase $\phi(t, t_0)$ em (2.105) e calculamos a integral no momento no fóton, em todo o plano. Para isso, reescrevemos esta fase como

$$\begin{aligned} i\phi(t, t_0) &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d\vec{p} \int d\vec{q} \hat{p} \cdot \hat{q} \rho(\vec{p}) \rho(\vec{q}) \\ &\quad \times [G_1(\hat{p}, \hat{q}, t) - G_2(\hat{p}, \hat{q}, t_0) - G_3(\hat{p}, \hat{q}, t, t_0)], \end{aligned} \quad (2.116)$$

onde

$$\begin{aligned} G_1(\hat{p}, \hat{q}, t) &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \frac{\sin k \cdot (\hat{p} - \hat{q}) t}{(\hat{q} \cdot k) [k \cdot (\hat{p} - \hat{q})]}, \\ G_2(\hat{p}, \hat{q}, t_0) &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \frac{\sin k \cdot (\hat{p} - \hat{q}) t_0}{(\hat{q} \cdot k) [k \cdot (\hat{p} - \hat{q})]}, \\ G_3(\hat{p}, \hat{q}, t, t_0) &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \frac{2 \sin k \cdot \hat{p} (t - t_0)}{(\hat{q} \cdot k) (\hat{p} \cdot k)}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

O próximo passo é calcular explicitamente as integrais acima no espectro de frequência. Começamos por $G_1(\hat{p}, \hat{q}, t)$

$$G_1(\hat{p}, \hat{q}, t) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\omega d\omega}{2\omega} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin \left[\omega \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| t \cos \varphi \right]}{\omega^2 \left(1 - \left| \frac{\vec{q}}{q_0} \right| \cos \xi \right) \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| \cos \varphi}, \quad (2.118)$$

onde introduzimos um corte no limite inferior da integral na frequência do fóton para controlar a divergência que aparecerá se $\lambda \rightarrow 0$. Desta forma

$$G_1(\hat{p}, \hat{q}, t) = \frac{t}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\lambda^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{\sin a(\varphi) \omega}{a(\varphi)}, \quad (2.119)$$

onde

$$a(\varphi) = t \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| \cos \varphi. \quad (2.120)$$

Usando o resultado

$$\begin{aligned} \int x^{\mu-1} \sin \alpha x dx &= -\frac{1}{2\alpha^\mu} \left\{ \exp \left[\frac{i\pi}{2} (\mu - 1) \right] \Gamma(\mu, -i\alpha x) \right. \\ &\quad \times \exp \left[\frac{i\pi}{2} (1 - \mu) \right] \Gamma(\mu, i\alpha x) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (2.121)$$

para $\text{Re } \mu < 1, \alpha > 0$ e $x > 0$,

$$\int_\lambda^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{\sin a(\varphi) \omega}{a(\varphi)} = -\frac{a}{2} \left\{ e^{-i\pi} \Gamma(-1, -ia\omega) + e^{i\pi} \Gamma(-1, ia\omega) \right\}_\lambda^\infty. \quad (2.122)$$

Usando a seguinte relação de recorrência

$$\Gamma(\alpha + 1, x) = \alpha \Gamma(\alpha, x) + x^\alpha e^{-x},$$

verificamos que

$$\begin{aligned} \Gamma(-1, ia\omega) &= -\Gamma(0, ia\omega) + \frac{e^{-ia\omega}}{ia\omega}, \\ \Gamma(-1, -ia\omega) &= -\Gamma(0, -ia\omega) - \frac{e^{ia\omega}}{ia\omega}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

A função gama incompleta tem a seguinte representação integral

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Portanto

$$\Gamma(\alpha, \infty) = 0.$$

Além disso

$$\frac{e^{-ia\omega}}{ia\omega} - \frac{e^{ia\omega}}{ia\omega} = -2 \frac{\sin a\omega}{a\omega} \rightarrow \begin{cases} 0, & \omega \rightarrow \infty \\ -2, & \omega \rightarrow 0 \end{cases}.$$

Substituindo (2.121) e (2.123) em (2.122), obtemos

$$\int_\lambda^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{\sin a(\varphi) \omega}{a(\varphi)} = \frac{1}{2} [\Gamma(0, ia\lambda) + \Gamma(0, -ia\lambda) + c].$$

Usando

$$\Gamma(0, x) - \text{Ei}(-x) = -c - \ln x,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma(0, ia\lambda) &= -c - \ln(ia\lambda) = -c - \ln(a\lambda) + \frac{i\pi}{2}, \\ \Gamma(0, -ia\lambda) &= -c - \ln(-ia\lambda) = -c - \ln(a\lambda) - \frac{i\pi}{2}.\end{aligned}$$

Com isso

$$\begin{aligned}G_1(\hat{p}, \hat{q}, t) &= -\frac{t}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi (c + \ln(a\lambda)) \\ &= -\frac{t}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[c + \ln \lambda + \ln \left(t \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| \cos \varphi \right) \right] \\ &= -\frac{t}{4\pi} \left[\ln \frac{\lambda}{2} + \ln \left(t \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| \right) \frac{i\pi}{2} + c \right].\end{aligned}\tag{2.124}$$

A integral G_2 torna-se idêntica a G_1 se trocarmos t por t_0 , isto é,

$$G_2(\hat{p}, \hat{q}, t_0) = -\frac{t_0}{4\pi} \left[\ln \frac{\lambda}{2} + \ln \left(t_0 \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| \right) \frac{i\pi}{2} + c \right].\tag{2.125}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}G_3(\hat{p}, \hat{q}, t, t_0) &= \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\omega d\omega}{\omega} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin \left[\omega \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| (t - t_0) \cos \varphi \right]}{\omega^2} \\ &= \int_{\lambda}^{\infty} d\omega \frac{\sin \beta(\varphi) \omega}{\omega^2} \\ &= -\int_0^{2\pi} d\varphi \beta(c + \ln(\beta\lambda)),\end{aligned}\tag{2.126}$$

onde

$$\beta(\varphi) = \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| (t - t_0) \cos \varphi.$$

A integral acima é do tipo

$$\int_0^{2\pi} d\varphi [f(\hat{p}, \hat{q}, t, t_0) \cos \varphi + \cos \varphi \ln \cos \varphi] = 0.$$

Substituindo (2.124) e (2.125) em (2.116) a fase ϕ fica determinada:

$$\begin{aligned}i\phi(t, t_0) &= \frac{i}{4\pi(2\pi)^2} \int d\vec{p} \int d\vec{q} \hat{p} \cdot \hat{q} \rho(\vec{p}) \rho(\vec{q}) \\ &\quad \left\{ t \left[\ln \frac{\lambda}{2} + \ln \left(t \left| \frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right| \right) + \frac{i\pi}{2} + c \right] - (t \rightarrow t_0) \right\}.\end{aligned}\tag{2.127}$$

e possui o mesmo comportamento em tempos assintóticos que (2.90), onde foi desprezado o limite inferior de integração. Mostrando que a escolha de t_0 não é um fator relevante.

Capítulo 3

Espaço de estados de Fótons

O objetivo deste capítulo é a definição de um espaço de estados assintóticos, para descrever um sistema com um número infinito de fótons. Este espaço é chamado de espaço de estados coerentes e, ao contrário do espaço de Fock, contém um número de ocupação infinito.

Na seção 3.1 veremos que estados coerentes podem ser definidos em termos de estados pertencentes ao espaço de Fock usual e, em seguida, estudaremos as principais propriedades do espaço formado por estados coerentes. Na seção 3.2 mostraremos que a redefinição da matriz S , levando em conta a dinâmica assintótica, nos faz concluir que o espaço de estados assintóticos deve ser formado de estados coerentes ao invés daqueles pertencentes ao espaço de Fock.

3.1 Espaço de Estados Coerentes

A noção de estados coerentes foi introduzida por Schrödinger, com objetivo de encontrar as soluções do oscilador harmônico que mais se aproximassem das soluções do oscilador clássico. Posteriormente estes estados foram utilizados em problemas de óptica quântica[17]. Nesta seção, usaremos o conceito de estados coerentes na eletrodinâmica quântica para formar um espaço adequado que descreva um sistema com um número infinito de fótons. Inicialmente faremos uma discussão para um sistema com um número finito de graus de liberdade e em seguida consideraremos o caso geral de infinitos graus de liberdade.

Dada uma álgebra de operadores de criação e aniquilação de fótons $a_i^\dagger$ e a_i , temos

$$[a_k^\dagger, a_i^\dagger] = [a_k, a_i] = 0, \quad [a_k, a_i^\dagger] = \delta_{ki} \quad (3.1)$$

onde i representa um estado de fóton com dado momento e polarização.

A partir do estado de vácuo, que é definido por

$$a_i |0\rangle = 0, \quad \forall i, \quad (3.2)$$

podemos construir um vetor de estado representando n fótons no mesmo estado i , através da aplicação da n_i -ésima potência de $a_i^\dagger$ sobre aquele estado:

$$|n_i\rangle = \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle, \quad (3.3)$$

onde n_i é o número de fótons no estado i . De um modo mais geral, o produto direto de diferentes estados de fótons

$$\begin{aligned} |\{n_i\}\rangle &\equiv \prod_i |n_i\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_I\rangle \\ &= \prod_{i=1}^I \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.4)$$

forma uma base para o espaço de número de ocupação, composto de um número definido de fótons em diferentes estados. Este vetor de estado é autoestado simultâneo de todos os operadores número de fótons

$$N_i = a_i^\dagger a_i, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (3.5)$$

e corresponde a situação física na qual existem n_1 fótons no estado 1, n_2 fótons no estado 2, etc...

Os autovetores de um dado operador de aniquilação a_i , podem ser parametrizados por um número complexo α_i e definidos a partir do vácuo

$$|\alpha_i\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha_i|^2\right\} \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle. \quad (3.6)$$

Um estado definido desta forma desta é chamado de estado coerente. Usando as relações de comutação (3.1), pode-se mostrar que estes estados satisfazem a seguinte equação de autovalores

$$a_i |\alpha_i\rangle = \alpha_i |\alpha_i\rangle \quad (3.7)$$

e que o número médio de fótons do i -ésimo estado é

$$\langle \alpha_i | N_i | \alpha_i \rangle = |\alpha_i|^2. \quad (3.8)$$

É importante observar que um estado da forma (3.6) pode ser obtido pela atuação de um operador unitário do tipo

$$W(\alpha_i) = \exp\{\alpha_i^* a_i - \alpha_i a_i^\dagger\}, \quad (3.9)$$

sobre o estado de vácuo. Ou seja

$$\begin{aligned} W(\alpha_i) |0\rangle &= \exp\{\alpha_i^* a_i - \alpha_i a_i^\dagger\} |0\rangle \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha_i|^2\right\} \exp\{\alpha_i a_i^\dagger\} |0\rangle \\ &= |\alpha_i\rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde usamos a fórmula

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B, \quad (3.11)$$

válida sempre que $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Os estados definidos desta maneira não são ortogonais, pois o produto escalar entre dois estados $|\alpha_i\rangle$ e $|\beta_i\rangle$ é dado por

$$\langle \alpha_i | \beta_i \rangle = \exp\left\{-\sum_i |\alpha_i - \beta_i|^2\right\} \exp\{i \operatorname{Im}(\alpha_i^* \beta_i)\}. \quad (3.12)$$

Por outro lado, deste resultado vemos que os estados estão normalizados

$$\langle \alpha_i | \alpha_i \rangle = 1. \quad (3.13)$$

Da mesma forma que construímos uma base para o espaço de número de ocupação, podemos formar uma base de estados coerentes $\mathcal{C}_I$ tomando o produto direto de estados individuais (3.6)

$$\begin{aligned} |\{\alpha_i\}\rangle &= \prod_{i=1}^I |\alpha_i\rangle \\ &= \exp \left\{ \sum_{i=1}^I (\alpha_i^* a_i - \alpha_i a_i^\dagger) \right\} |0\rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^I |\alpha_i|^2 \right\} \exp \left\{ \sum_{i=1}^I \alpha_i a_i^\dagger \right\} |0\rangle \quad (3.15)$$

Em outras palavras, esta base pode ser gerada a partir do vácuo pela atuação do operador

$$W(\alpha_i) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^I (\alpha_i^* a_i - \alpha_i a_i^\dagger) \right\} \quad (3.16)$$

e o número médio de fótons em cada estado (3.15) é dado por

$$\langle N \rangle = \sum_{i=1}^I |\alpha_i|^2. \quad (3.17)$$

Uma base para o campo de radiação é formada usando (3.15) no limite $I \rightarrow \infty$. Para o caso onde o número de fótons é finito,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty, \quad (3.18)$$

podemos expandir $|\{\alpha_i\}\rangle$ em termos de estados pertencentes ao espaço de Fock $\mathcal{F}$ e o operador W continua sendo um operador unitário nesse espaço. Ou seja, a representação em estados coerentes do espaço de Hilbert é equivalente unitária à representação de Fock. No entanto, se

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \infty, \quad (3.19)$$

o fator de normalização em (3.15) se anulará e o produto escalar entre qualquer vetor pertencente ao espaço de Fock e qualquer estado coerente se anulará (quando $I \rightarrow \infty$)

$$\langle \{n_i\} | \{\alpha_i\} \rangle = 0. \quad (3.20)$$

Neste caso, os estados coerentes não podem ser expandidos em termos de estados que pertencem ao espaço de Fock e o operador W não é mais definido neste espaço. Entretanto, existem espaços maiores que o espaço de Fock, definidos por Neumann[18], em termos de produtos tensoriais infinitos, nos quais a expressão (3.14) ainda tem significado físico no limite $I \rightarrow \infty$. Logo, num desses espaços

$$W(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^* a_i - \alpha_i a_i^\dagger), \quad (3.21)$$

continua sendo um operador unitário. Em termos deste operador definimos um espaço de estados coerentes, formado por um número infinito de fótons.

A diferença entre esses dois espaços pode ser ilustrada na representação de número de ocupação, onde os estados podem ser caracterizados por uma seqüência γ de números inteiros não negativos

$$\Psi_\gamma \Longleftrightarrow \gamma \equiv \{n_1, n_2, \dots\}, \quad (3.22)$$

onde n_i é o número de fótons no i -ésimo estado. Sejam Γ o conjunto de todos os γ 's e Γ_0 o subconjunto de Γ que contém todas as seqüências $\{n_1, n_2, \dots\}$ nas quais

$$\sum_i n_i < \infty. \quad (3.23)$$

Assim, o espaço de Fock é obtido tomando Ψ_γ , com $\gamma \in \Gamma_0$, como vetores de base. O conjunto das seqüências que satisfaz (3.23) possui um número contável de vetores de base e, portanto, o espaço de Fock $\mathcal{F}$ é separável. Ao contrário, se não impusermos restrições sobre as distribuições permitidas dos inteiros $n_1, n_2, \dots$, o conjunto de todas as seqüências é contínuo e o espaço $\mathcal{H}$ no qual

$$\sum_\gamma |\Psi_\gamma|^2 < \infty, \quad (3.24)$$

é não separável. Este espaço é isomorfo ao produto tensorial infinito de Neumann.

A álgebra dos operadores de criação e aniquilação de fótons, a_i e $a_i^\dagger$, é definida em $\mathcal{H}$ da mesma forma como no espaço de Fock $\mathcal{F}$. Por exemplo

$$a_i^\dagger \Psi_\gamma = \sqrt{n_i} \Psi_{\gamma'}, \quad (3.25)$$

onde $\gamma = \{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}$ e $\gamma' = \{n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, \dots\}$. Mesmo que o espaço de Fock permaneça invariante sobre a ação dos operadores de criação e aniquilação, não podemos generalizar isto para funções arbitrárias desses operadores, como no caso do operador W , se tivermos $\sum_i |\alpha_i|^2 = \infty$. Ou seja, este operador mapeia todo vetor pertencente ao espaço de Fock num outro espaço. Consideramos então um subespaço separável do espaço $\mathcal{H}$ que seja a imagem do espaço de Fock pela atuação de $W_{\{\alpha\}}$ [19]

$$\mathcal{C}_{\{\alpha\}} = W_{\{\alpha\}} \mathcal{F}, \quad (3.26)$$

onde $\mathcal{C}_{\{\alpha\}}$ é um espaço de estados coerentes com número de ocupação infinito.

Agora verificaremos as condições necessárias para que as imagens do espaço de Fock obtidas pela atuação de diferentes operadores W sobre $\mathcal{F}$ coincidam. Para isso, consideremos as seqüências $\{\alpha\}$ e $\{\beta\}$, tais que

$$\mathcal{C}_{\{\alpha\}} = W_{\{\alpha\}} \mathcal{F}$$

e

$$\mathcal{C}_{\{\beta\}} = W_{\{\beta\}} \mathcal{F}. \quad (3.27)$$

Usando a definição do operador W (3.21), pode-se mostrar que

$$W_{\{\beta\}}^\dagger W_{\{\alpha\}} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_i (\beta_i^* \alpha_i - \beta_i \alpha_i^*) \right\} W_{\{\alpha-\beta\}} \quad (3.28)$$

e, portanto

$$W_{\{\beta\}} W_{\{\beta\}}^\dagger = 1. \quad (3.29)$$

Com isso, reescrevemos (3.27) como

$$\mathcal{C}_{\{\alpha\}} = W_{\{\beta\}} W_{\{\beta\}}^\dagger W_{\{\alpha\}} \mathcal{F}. \quad (3.30)$$

Desta equação, concluímos que os dois subespaços $\mathcal{C}_{\{\alpha\}}$ e $\mathcal{C}_{\{\beta\}}$ coincidem somente se o produto $W_{\{\beta\}}^\dagger W_{\{\alpha\}}$ for um operador bem definido no espaço de Fock. Ou seja

$$W_{\{\beta\}}^\dagger W_{\{\alpha\}} \mathcal{F} = \mathcal{F}. \quad (3.31)$$

Para que esta afirmação seja satisfeita, devemos impor as seguintes restrições sobre α_i e β_i . Ou seja, se

$$\sum_i |\alpha_i - \beta_i|^2 < \infty$$

e

$$\sum_i |\text{Im } \alpha_i \beta_i^*| < \infty, \quad (3.32)$$

os espaços $\mathcal{C}_{\{\alpha\}}$ e $\mathcal{C}_{\{\beta\}}$ coincidem,

$$\mathcal{C}_{\{\alpha\}} = W_{\{\beta\}} \mathcal{F} = \mathcal{C}_{\{\beta\}}. \quad (3.33)$$

3.2 Espaço de Estados Assintóticos

Nesta seção, estudaremos as principais propriedades do operador $W(t) = e^{R(t)}$, usando os resultados obtidos na seção anterior. Como este operador é formado linearmente de operadores de férmions e de fótons, os subespaços na qual atua é formado por vetores da forma

$$|n, m\rangle \otimes |\Phi_\gamma\rangle, \quad (3.34)$$

onde $|n, m\rangle$ é um estado de partículas carregadas (elétrons e pósitrons) com momentos e spins definidos

$$|n, m\rangle \doteq \left| \vec{p}_1, s_1; \dots; \vec{p}_n, s_n \mid \vec{q}_1, i_1; \dots; \vec{q}_m, i_m \right\rangle \quad (3.35)$$

e $|\Phi_\gamma\rangle$ é um estado arbitrário de fótons.

Para verificar a forma de como $W(t)$ atua nestes vetores de estado, vamos enfatizar os principais fatos a serem discutidos

i - Levando em conta que $W(t)$ preserva o momento, o spin e o número das partículas carregadas, este operador é diagonal na base $\{|n, m\rangle\}$. Assim, os elementos de matriz W_{mn} é a forma como $W(t)$ atua em $|\Phi_\gamma\rangle$.

ii - Veremos que, $W(t)$ possui a mesma forma que o operador $W(\alpha_i)$ da seção anterior, para o caso de um número infinito de fótons. Isto implica que $W(t)$ não é definido no espaço

de Fock e, portanto, uma base para o espaço de estados assintóticos deve ser constituída de estados coerentes com um número infinito de fótons.

iii - Verificar as propriedades de invariância deste espaço.

O primeiro item pode ser verificado, escrevendo o operador $R(t)$ como

$$R(t) = (f(t), a)^* - (f(t), a), \quad (3.36)$$

onde

$$(f(t), a) \equiv \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} f^{\mu*}(\vec{k}, t) a_{\mu}(\vec{k}) \quad (3.37)$$

e

$$f^{\mu}(\vec{k}, t) = \int d\vec{p} \frac{p^{\mu}}{p \cdot k} \rho(\vec{p}) e^{i\frac{k \cdot p}{p^0} t}. \quad (3.38)$$

Este operador é diagonal na base formada de estados de partículas carregadas

$$\begin{aligned} \langle n, m | f^{\mu}(\vec{k}, t) | n', m' \rangle &= e \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i^{\mu}}{p_i \cdot k} e^{i\frac{k \cdot p_i}{p_i^0} t} - \sum_{i=1}^m \frac{q_i^{\mu}}{q_i \cdot k} e^{i\frac{k \cdot q_i}{q_i^0} t} \right) \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \\ &\equiv f_{n,m}^{\mu}(\vec{k}, t) \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \end{aligned} \quad (3.39)$$

e cada elemento de matriz é uma soma de correntes clássicas devido às partículas carregadas em movimento uniforme. Tendo em vista o resultado acima vemos que, em cada subespaço, o operador $R(t)$ atua em $|\Phi_{\gamma}\rangle$ da seguinte forma:

$$R_{m,n}(t) = (f_{n,m}^{\mu}, a_{\mu}) - (f_{n,m}^{\mu}, a_{\mu})^* \quad (3.40)$$

e, portanto,

$$W_{mn}(t) = \exp \left\{ \frac{e}{(2\pi)} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \left[f_{n,m}^{\mu}(\vec{k}, t) a_{\mu}^{\dagger}(\vec{k}) - f_{n,m}^{\mu*}(\vec{k}, t) a_{\mu}(\vec{k}) \right] \right\} \quad (3.41)$$

é a forma como $W(t)$ atua em $|\Phi_{\gamma}\rangle$. Como a forma deste operador é muito semelhante aquela do operador $W_{\{\alpha\}}$, que gera estados coerentes a partir de estados de Fock, faremos uma generalização do que vimos na seção anterior para o estudo do operador $W_{mn}(t)$. Assim, relacionamos a soma em i na equação (3.21) com a integral sobre o momento dos fótons. Além disso, as outras analogias são

$$\alpha_i \rightarrow f_{nm}^{\mu}(\vec{k}, t)$$

e

$$\sum_i |\alpha_i|^2 \rightarrow \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} f_{n,m}^{\mu}(\vec{k}, t) f_{n,m}^{\mu*}(\vec{k}, t). \quad (3.42)$$

Usando a definição (3.39) para o operador $f_{nm}^\mu(\vec{k}, t)$ verificamos que a integral acima é divergente no limite inferior. Logo, $W_{mn}(t)$ não é bem definido no espaço de Fock, do mesmo modo que $W(t)$ não é bem definido no espaço de Fock $\mathcal{F}$ para fótons e partículas carregadas. Entretanto, $W(t)$ pode ser definido como um operador unitário no espaço não separável

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}_Q \otimes \mathcal{H}_\gamma, \quad (3.43)$$

onde $\mathcal{F}_Q$ é o espaço de Fock para partículas carregadas e $\mathcal{H}_\gamma$ é o espaço não separável de Neumann para fótons.

Do mesmo modo que na seção anterior, consideremos um subespaço separável de $\mathcal{H}$ denominado espaço de estados assintóticos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{as} &= W^\dagger(t) \mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}_Q \otimes \mathcal{C}_\gamma \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde $\mathcal{C}_\gamma$ é o espaço de estados coerentes para fótons. Podemos dar definições alternativas para $\mathcal{H}_{as}$ da mesma forma como em (3.27), onde as diferentes seqüências $\{\alpha_i\}$ e $\{\beta_i\}$ satisfazem as restrições (3.32). Consideremos, por exemplo,

$$\mathcal{H}_{as} = \exp\{-R_f\} \mathcal{F} \quad (3.45)$$

onde o operador antissimétrico, R_f , é definido como

$$R_f = \frac{1}{(2\pi)} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \int d\vec{p} \rho(\vec{p}) \left[f^\mu(\vec{k}, t) a_\mu^\dagger(\vec{k}) - f^{\mu*}(\vec{k}, t) a_\mu(\vec{k}) \right] \quad (3.46)$$

e os fatores $f_\mu(\vec{k}, t)$ podem se funções arbitrárias, sujeitas às restrições de que as integrais

$$\int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \left(f_{n,m}^\mu(\vec{k}, t) - \frac{p^\mu}{p \cdot k} e^{i\frac{k \cdot p}{p^0} t} \right) \left(f_{n,m}^{\mu*}(\vec{k}, t) - \frac{p^\mu}{p \cdot k} e^{-i\frac{k \cdot p}{p^0} t} \right)$$

e

$$\int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \left| f_{n,m}^{\mu*}(\vec{k}, t) \frac{p^\mu}{p \cdot k} e^{i\frac{k \cdot p}{p^0} t} - f_{n,m}^\mu(\vec{k}, t) \frac{p^\mu}{p \cdot k} e^{-i\frac{k \cdot p}{p^0} t} \right| \quad (3.47)$$

convergem para todo $\vec{p}$ e $\vec{q}$.

Agora passaremos para o item iii, onde deveremos mostrar que o espaço $\mathcal{H}_{as}$ tem as seguintes propriedades:

- 1- Não depende de t ,
- 2- É relativisticamente invariante e invariante de gauge.

A primeira propriedade é automaticamente satisfeita, pois o tempo não aparece em todas as definições alternativas de $\mathcal{H}_{as}$.

A invariância de $\mathcal{H}_{as}$ sob transformação de Poincaré[20]

$$(a, \Lambda) : x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (3.48)$$

é verificada observando que sob esta transformação de simetria representada pelo operador unitário $U(a, \Lambda)$, temos a seguinte relação para os campos quantizados

$$U(a, \Lambda) \varphi_\mu(x) U^\dagger(a, \Lambda) = (\Lambda^{-1})_\mu^\nu \varphi_\nu(\Lambda x + a).$$

Assim, os operadores de fótons e partículas carregadas transformam-se como

$$\sqrt{k_0} U(a, \Lambda) a_\mu(k) U^\dagger(a, \Lambda) = \sqrt{(\Lambda k)_0} (\Lambda^{-1})_\mu^\nu a_\nu(k) e^{-i\Lambda k a}$$

e

$$p_\sigma U(a, \Lambda) \rho(p) U^\dagger(a, \Lambda) = (\Lambda p)_\sigma \rho(\Lambda p). \quad (3.49)$$

Destes resultados, vemos que $U(a, \Lambda) W^\dagger(t) U^\dagger(a, \Lambda)$ é um operador do tipo $\exp\{-R_f\}$, onde temos a liberdade de definir uma função $f_{a, \Lambda}^\mu(k, p)$, tal que as condições (3.47) sejam satisfeitas. Assim,

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda) \mathcal{H}_{as} &= U(a, \Lambda) W^\dagger(t) \mathcal{F} \\ &= U(a, \Lambda) W^\dagger(t) U^\dagger(a, \Lambda) \mathcal{F} = \mathcal{H}_{as}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para verificar a invariância de gauge do espaço $\mathcal{H}_{as}$, observamos que somente os operadores de criação e aniquilação de fótons são afetados por esta transformação de simetria, a qual é representada pelo operador $U(\lambda)$. Ou seja:

$$U(\lambda) a_\mu(k) U^\dagger(\lambda) = a_\mu(k) + k_\mu \lambda(k), \quad (3.51)$$

de forma que, os operadores $W^\dagger(t)$ e $U(\lambda) W^\dagger(t) U^\dagger(\lambda)$ diferem somente por um fator da forma

$$\mathcal{O}(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{(2\pi)} \int \frac{d^2 k}{\sqrt{2\omega_k}} \int d\vec{p} \rho(\vec{p}) \left[\lambda \left(\frac{\vec{k}}{k} \right) e^{-i \frac{k \cdot \vec{p}}{p^0} t} - \lambda^* \left(\frac{\vec{k}}{k} \right) e^{i \frac{k \cdot \vec{p}}{p^0} t} \right] \right\}, \quad (3.52)$$

que comuta com $W^\dagger(t)$ e é bem definido no espaço de Fock. Logo

$$\begin{aligned} U(\lambda) \mathcal{H}_{as} &= U(\lambda) W^\dagger(t) \mathcal{F} \\ &= U(\lambda) W^\dagger(t) U^\dagger(\lambda) \mathcal{F} \\ &= \mathcal{O}(\lambda) W^\dagger(t) \mathcal{F} = \mathcal{H}_{as}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

O resultado (3.52) pode ser justificado, escrevendo a transformação de gauge do campo $A_\mu(x)$ (1.3), no espaço dos momentos e levando em conta que, se a condição de Lorentz for satisfeita, a função de gauge Λ , satisfaz a equação $\square \Lambda = 0$, com solução da forma

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2 k}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\lambda(k) e^{-ik \cdot x} + \lambda^*(k) e^{ik \cdot x} \right).$$

Após termos definido um operador S e um espaço que levam em conta a dinâmica assintótica, vamos verificar que os elementos de matriz desse novo operador S , na base

desses estados assintóticos, são livres de divergências no infravermelho bem como das divergências coulombianas. Para isso, consideremos o operador

$$\tilde{S}_D(t_2, t_1) = \exp \{-i\phi(t_2)\} S_D(t_2, t_1) \exp \{i\phi(t_1)\},$$

o qual difere da matriz S de Dyson, para tempos finitos, somente pelos fatores de fase $\exp \{\pm i\phi(t)\}$. Lembrando que o operador $W^\dagger(t)$ mapeia o espaço de Fock para o espaço de estados assintóticos, vemos que nos elementos de matriz do operador

$$S = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} S(t_2, t_1) = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} W^\dagger(t_2) \tilde{S}_D(t_2, t_1) W(t_1),$$

em uma base de estados assintóticos

$$S_{\alpha, \beta} = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \langle \alpha(t_2) | W^\dagger(t_2) \tilde{S}_D(t_2, t_1) W(t_1) | \beta(t_1) \rangle_{as},$$

temos a seguinte sequência de mapeamentos

$$\mathcal{H}_{as} \xrightarrow{W} \mathcal{F} \xrightarrow{\tilde{S}} \mathcal{F} \xrightarrow{W^\dagger} \mathcal{H}_{as}$$

e, com isso, observamos que o operador S é bem definido em $\mathcal{H}_{as}$.

Capítulo 4

Considerações Finais

Após o estudo de como tratar as divergências no infravermelho na QED_3 verificamos que as causas do surgimento desse problema nesta teoria foram obtidas na aproximação semi-clássica, onde é levada em consideração a contribuição exata de fótons de baixa energia. A solução $u(Q_k, \vec{x})$ (1.36), construída nesta aproximação, é útil para estudar outros processos não estacionários. Com esta solução, podemos calcular a probabilidade de transição de um determinado processo ocorrer em primeira ordem com relação à perturbações externas mas em todas as ordens com relação a emissão de fótons.

Nesse tratamento semi-clássico, observamos que as transformações canônicas (1.28-1.36) desacoplam o auto campo do elétron do campo de radiação. Na QED_3 , este auto campo diverge logarithmicamente para baixas frequências, ao contrário da QED_4 , onde pode ser desprezado se comparado ao termo de massa. De um modo geral, as divergências no infravermelho têm-se demonstrado mais drásticas na QED_3 em relação à QED_4 , pois na medida $\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}$ temos uma ordem inferior no módulo do momento do fóton no primeiro caso, se comparado com o segundo.

Como vimos no capítulo 2, devido ao fato da QED_3 ser uma teoria abeliana, é possível obter a contribuição exata de fótons de baixa energia na definição do operador S , pois somente dois termos em (2.72) são diferentes de zero. No entanto, da mesma forma que na aproximação semi-clássica, esse tratamento não é válido para teorias não abelianas como a $QCD_{3/4}$ [21].

Vimos também que a divergência coulombiana em função de tempos assintóticos não possui o mesmo comportamento quando a análise desta mesma divergência é feita no espectro de frequências, ao contrário da QED_4 , onde o comportamento é logarítmico nos dois casos. Isto pode ser justificado lembrando que, a nível não relativístico, o potencial coulombiano em duas dimensões é proporcional a $\ln(r)$ e possui um alcance superior a $1/r$, no caso tridimensional.

A proposta de alteração da dinâmica assintótica, levando a uma modificação do espaço de estados assintóticos bem como a redefinição do operador S , parece não apresentar vantagens práticas em relação aos cálculos perturbativos, do ponto de vista de obter uma seção de choque total. Mas nos mostra que, se a teoria é bem definida, os elementos da matriz S são finitos.

No capítulo 3 verificamos que os operadores $W^\dagger(t_1)$ e $W(t_2)$ que aparecem na definição da matriz S , nos induzem a introduzir e explorar o espaço de estados assintóticos. Em cálculos de elementos de matriz do operador $S(t_1, t_2)$, nos estados de $\mathcal{H}_{as}$, podemos omitir

os operadores $W(t)$, pois quando tomamos o limite $t \rightarrow \pm\infty$ estes operadores são transformados em operadores identidade: de (3.39) e (3.40), vemos que as funções dependentes de tempo, nos operadores $R(t)$ se anulam

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{p \cdot k} e^{i \frac{k \cdot p}{p^0} t} = \pm i \pi \delta(p \cdot k) = 0.$$

A afirmação acima não é verdadeira no caso da análise no espectro de frequência, pois naquele caso não desprezamos o limite inferior de integração temporal (colocamos igual a zero). Embora este fato não altere os principais resultados: a única diferença entre os dois casos é um termo global livre de divergências no infravermelho. Além disso, papel dos operadores $\exp \{\pm i \phi(t)\}$ consiste em eliminar as possíveis fatores de fase que poderiam surgir se calcularmos os elementos de matriz S entre estados de $\mathcal{H}_{as}$.

As perspectivas com relação a este modelo são principalmente a implementação dos cálculos para obter resultados a nível de seção de choque, uma prova geral da unitariedade do novo operador S e generalização para aplicações na $\text{QCD}_{3/4}$.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Mandl and G. Shaw, "Quantum Electrodynamics", Second Edition, John Wiley & Sons, New York (1984);
- [2] J. M. Jauch and F. Rohrlich, "The Theory of Photons and Electrons", Second Edition, Springer Verlag (1976);
- [3] F. Bloch and A. Nordsieck, Phys. Rev. 52, 54, (1937);
- [4] J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", Second Edition, John Wiley & Sons, New York (1975);
- [5] D. R. Yennie, S.C. Frautschi, and H. Suura, Ann. Phys. (New York), 13, 379 (1961);
- [6] G. Scharf, "Finite Quantum Electrodynamics", Springer-Verlag, Berlin (1989);
- [7] J. D. Dollard, J. Math. Phys. 5, 729 (1964);
- [8] N. Papanicolaou, Ann. Phys. (New York), 89, 423, (1975);
- [9] T. Murota, Prog. Theor. Phys. 24, 1109, (1960);
- [10] P. Kulish and L. Faddeev, Teor. Mat. Fiz. 4, 153 (1970) [Theor. Math. Phys. 4, 745 (1970)];
- [11] V. Chung, Phys. Rev., 140B, 1100 (1965);
- [12] T. W. B. Kibble, Phys. Rev. 173, 1527; 174, 1882; 175, 1624 (1968);
- [13] D. Zwanziger, Phys. Rev. D11, 3481, 3504 (1975);
- [14] R. E. Prange and S. M. Girvin, "The Quantum Hall Effect", Springer Verlag, New York (1987);
- [15] B. M. Pimentel and J. L. Tomazelli, J. Phys G, 20 (1993);
- [16] B. M. Pimentel, G. Scharf, J. L. Tomazelli and W. F. Wreszinski, Ann. of Phys. 231, 185, (1994);
- [17] R. J. Glauber, Phys. Rev. Lett. 10, 277; 130, 2529; 131, 2766 (1963);
- [18] J. von Neumann, Comp. Math. 6, 1 (1938);

- [19] G. Reents, J. Math. Phys. 15, 31 (1974);
- [20] B. Binegar, J. Math. Phys. 23, 1511 (1982); J. L. Tomazelli, "Tese de Doutorado", IFT-Unesp (1996);
- [21] M. Ciafaloni, Phys. Lett. 150B, 379 (1985); S. Catani, M. Ciafaloni and G. Marchesini, Nucl. Phys. B264, 588 (1986); S. Catani, M. Ciafaloni, Nucl. Phys. B289, 535 (1987).

