

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**ESTABILIDADE E CONTROLE DINÂMICO DE *ROLL WAVES***

**FABIANA DE OLIVEIRA FERREIRA**

**TESE DE DOUTORADO**

Ilha Solteira - SP

2013

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

Estabilidade e Controle Dinâmico de *Roll waves*

**FABIANA DE OLIVEIRA FERREIRA**

**Orientador:** Prof. Dr. Carlos Roberto Minussi

**Coorientador:** Prof. Dr. Geraldo de Freitas Maciel

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da UNESP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação.

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

F383e Ferreira, Fabiana de Oliveira.  
Estabilidade e controle dinâmico de roll waves / Fabiana de Oliveira  
Ferreira. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2013  
204 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia  
de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2013

Orientador: Carlos Roberto Minussi  
Co-orientador: Geraldo de Freitas Maciel  
Inclui bibliografia

1. Catástrofes naturais. 2. Corridas de lama. 3. Fluido não-newtoniano.  
4. Roll waves. 5. Ensaio físicos. 6. Teste numéricos de roll waves.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

### CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

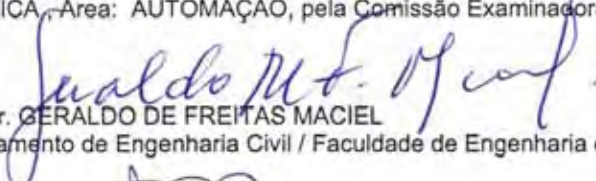
**TÍTULO:** Estabilidade e Controle Dinâmico de Roll Waves

**AUTORA:** FABIANA DE OLIVEIRA FERREIRA

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. CARLOS ROBERTO MINUSSI

**CO-ORIENTADOR:** Prof. Dr. GERALDO DE FREITAS MACIEL


Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

  
Prof. Dr. GERALDO DE FREITAS MACIEL

Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Profa. Dra. ANNA DIVA PLASENCIA LOTUFO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Profa. Dra. MARA LÚCIA MARTINS LOPES

Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. LUÍS MIGUEL CHAGAS DA COSTA GIL

Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial / Universidade Nova de Lisboa

  
Profa. Dra. MÔNICA FEIJÓ NACCACHE

Departamento de Engenharia Mecânica / Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Data da realização: 02 de agosto de 2013.

“Tudo posso naquele que me fortalece”  
Fil 4:13

Dedico este trabalho aos meus pais  
Silvio e Maria Luzia e ao meu irmão  
Silvio Cesar, que sempre me apoiaram  
e me fizeram acreditar na realização  
dos meus sonhos.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, que me ajudou a vencer os obstáculos, concedendo-me força e perseverança para concluir este trabalho.

À minha família, meu referencial, minha base e minha fortaleza. Agradeço aos meus pais e meu irmão, por serem tão presentes e estarem sempre me apoiando com muito amor e carinho.

Ao Prof. Geraldo de Freitas Maciel, pesquisador admirável, o qual sou muito grata pela orientação, pelas oportunidades que me proporcionou, contribuindo não só na tese, mas com a minha formação. Agradeço pelas inúmeras e agradáveis conversas, que despertaram em mim o gosto pela pesquisa.

À Prof<sup>a</sup>. Mônica Pinto Barbosa, por me abrir as portas, com a oportunidade de iniciar essa trajetória com o mestrado, por acreditar em meu trabalho e continuar me incentivando, e pela receptividade em sua casa.

Ao meu orientador Prof. Carlos Roberto Minussi por contribuir com o meu ingresso no doutorado, pela paciência e compreensão para conclusão deste trabalho e ao Prof. Cláudio Kitano, pela contribuição no grupo RMVP.

Ao meu namorado Joel David por ser tão especial em minha vida e me transmitir tanta tranquilidade, pela compreensão e por estar ao meu lado me apoiando e incentivando, com muito amor.

Ao Prof. Luís Gil, que foi uma pessoa formidável durante o meu estágio em Portugal, pela atenção e orientação e ao Prof. Eric Didier pela disposição em colaborar com o meu estágio.

Ao Prof. Claudio Freitas Neves que foi um grande incentivador do meu estágio de doutorado em Portugal.

Aos colegas do grupo RMVP, em especial ao Guilherme e Evandro, que contribuíram diretamente com esta pesquisa e mais do que companheiros de trabalho foram meus amigos.

À amiga Adriana, pelo companheirismo e à amiga Vanessa Malacrida, pelas suas palavras de sabedoria nos momentos mais difíceis desta jornada e a todos os amigos por grandes momentos juntos.

Ao programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, aos membros do laboratório de Hidrologia e Hidrometria da Engenharia Civil da Unesp de Ilha Solteira; ao DEMI da

Universidade Nova de Lisboa pela recepção durante o meu estágio de doutorado e a todos que me receberam de “braços abertos”, se tornando meus amigos.

Ao laboratório SINTEL (Sistemas Inteligentes) do Departamento de Engenharia Elétrica da UNESP de Ilha Solteira e a todos os colegas que estiveram apoiando na fase de simulações numéricas.

Aos Departamentos de Engenharia Elétrica e Mecânica da UNIFEI – Itajubá pela recepção no âmbito do projeto PROCAD.

Aos membros da banca de defesa pelas contribuições para o aperfeiçoamento desta tese.

Ao CNPq e aos projetos CAPES/FCT 5594/090 e PROCAD 053/2007 pelos financiamentos concedidos.

## RESUMO

Nesta tese propõem-se investigar os escoamentos com superfície livre de fluidos newtonianos e hiperconcentrados de reologia não-newtoniana, com aplicação no âmbito de catástrofes naturais. Esta temática apresenta duas vertentes: uma visão das ciências sociais sobre riscos e catástrofes e seus impactos de ordem econômica e social; uma segunda vertente no plano da engenharia (visão mais mecanicista) que trata do estudo dos escoamentos de fluidos laminares em corredores de lavas torrenciais, canais e encostas íngremes, com presença de um tipo específico de instabilidade na superfície livre, as *roll waves*. O fenômeno *roll wave* é caracterizado por sua configuração periódica, com frentes de ondas que se deslocam com elevada velocidade. Assim, a capacidade destrutiva do escoamento é potencializada com a presença destas instabilidades. Nesta tese procura-se identificar as condições de geração destas ondas e suas propriedades através de modelagem matemática e numérica. Para se estabelecer um modelo matemático que represente o fenômeno em questão, parte-se das equações fundamentais de conservação da massa e quantidade de movimento (equações de Cauchy), levando-se em consideração as hipóteses de águas rasas, com introdução do modelo reológico de *Herschel Bulkley* na parte viscosa do tensor de tensões. A técnica de análise de estabilidade linear é usada no equacionamento em variáveis adimensionais, tendo sido estabelecido dois critérios para a geração das *roll waves*: o primeiro está relacionado com número de Froude ( $Fr > Fr_c$ ), em que  $Fr_c$  é o número de Froude mínimo necessário para geração de *roll waves* e o segundo é determinado em função da frequência de perturbação ( $f < f_c$ ), onde  $f_c$  é a frequência máxima de perturbação possível à geração destas ondas. Identificadas tais condições, um modelo matemático (1D) determina as principais propriedades das *roll waves*, tais como amplitude, comprimento e velocidade de propagação. Este modelo é estabelecido reescrevendo as equações em um sistema móvel de coordenadas. Por se tratar de um sistema estritamente hiperbólico, as soluções foram obtidas com a imposição das condições de choque de *Rankine Hugoniot* da dinâmica dos gases; a partir de simulações numéricas utilizando o software Matlab, pôde-se confirmar a presença de *roll waves* com perfil típico de ondas de choque. No que tange ao modelo matemático completo, foram realizadas simulações usando o programa FLUENT, que resolve as equações fundamentais de conservação da massa e quantidade de movimento, tanto para fluido newtoniano quanto não-newtoniano. Dos resultados obtidos conclui-se que os critérios estabelecidos para a geração de *roll waves* são válidos tanto para fluido newtoniano quanto

não-newtoniano, e que o primeiro critério ( $Fr > Fr_c$ ) é necessário, mas não é suficiente para geração destas ondas, o que vem contribuir para um maior controle do fenômeno em estudos experimentais. Para escoamentos de fluidos não-newtonianos as *roll waves* são geradas e se propagam, por exemplo, com baixas frequências de perturbação, o que leva ao aparecimento de ondas longas e de amplitudes elevadas. Confrontado os resultados numéricos do modelo matemático (1D) com os resultados das equações completas, pôde-se verificar uma boa concordância quanto às amplitudes, comprimento e velocidade de propagação das *roll waves*, tanto para fluido newtoniano quanto não-newtoniano. Para fluido newtoniano o perfil das ondas é confirmado com os resultados experimentais obtidos por Fiorot (2012) em uma pequena rampa de “lavas torrenciais”, tais ondas foram observadas com a imposição de uma fonte de perturbação com frequências controladas. Estes resultados foram utilizados como dados de entrada dos modelos matemáticos e numéricos apresentados nesta tese, o que vem preencher uma lacuna existente na literatura, no que diz respeito ao estudo do fenômeno *roll waves*. No entanto, resta ainda enveredar esforços, no âmbito experimental, para geração de banco de dados de *roll waves* em escoamentos de fluidos de reologia não-newtoniana. Ensaios dessa natureza foram apenas iniciados no grupo de pesquisa RMVP (Reologia de Materiais Viscosos e Viscoplasticos), mas não foram explorados nessa tese.

**Palavras-chave:** Catástrofes naturais. Riscos. Corridas de lama. Fluido não-newtoniano. *Roll waves*. Ensaios físicos. Testes numéricos de *roll waves*.

## ABSTRACT

This thesis follows the investigation of free surface flows of Newtonian and hyperconcentrated (non-Newtonian) fluids on natural disasters context. This research presents two approaches, being the first approach a vision of natural hazards and disasters and their social consequences; and the second, the engineering plan (mechanical point of view) which is the study of muddy fluids in corridors, steep slopes and open channels with the presence of a specific type of instability on the free surface known as the *roll waves*. Roll wave phenomenon is characterized by its periodic configuration with moving wavefronts at high speed. Thus, the destructive capability of flow is enhanced by the presence of *roll waves*. This thesis attempts to identify generation conditions for these waves and also their properties, both through mathematical and numerical modeling. In order to establish a mathematical model that represents the phenomenon, the system of equations composed by mass and momentum conservation (Cauchy's equations) is used, taking into account the assumptions of shallow water, and introducing the Herschel-Bulkley rheological model on the viscous stress tensor. The technique of linear stability analysis is used on the system on dimensionless variables. Two criteria are established for the generation of *roll waves*: the first is related to Froude number ( $Fr > Fr_c$ ), where  $Fr_c$  is the minimum Froude number for the generation of *roll waves*; and the second is determined by the disturbance ( $f < f_c$ ), where  $f_c$  is the maximum disturbance frequency possible to the generation of these waves. Identified these conditions, a mathematical model (1D) determines the main properties of *roll waves*, such as amplitude, length and propagation velocity. This model is established by rewriting the equations in a moving coordinate system. As this model is a strictly hyperbolic system, whose solutions are obtained by imposition conditions of Rankine Hugoniot (shock waves) of gas dynamics; as from numerical simulations using Matlab, we could verify the presence of *roll waves* with typical profile of shock waves. Regarding the complete mathematical model, simulations were conducted using Fluent program, which resolves the complete system composed by mass and momentum conservation equations, for both Newtonian and non-Newtonian fluid. From the results obtained it are concluded that the criteria for the generation of *roll waves* are valid for both Newtonian and non-Newtonian fluid, and that the first criterion ( $Fr > Fr_c$ ) is necessary but not sufficient for the generation of these waves, which contributes to a improved control of the phenomenon in experimental studies. For non-Newtonian fluid flows as *roll waves*, these are generated and propagate, for

example, low-frequency disturbance, which leads to the appearance of long wavelength and high amplitude. Confronting the numerical results of the mathematical model (1D) with the results of the complete equations, it is observed a good agreement regarding the amplitude, length and speed of propagation of the waves roll for both Newtonian and non-Newtonian fluid. For Newtonian fluid, the profile waves is confirmed with experimental results obtained by Fiorot (2012) in a small ramp "torrential lava", such waves were observed with imposing a source of disturbance with frequency controlled. These results were used as input data for the mathematical and numerical models presented in this thesis, which fills a gap in the literature with regard to the study of the phenomenon *roll waves*. However, there is still starting an effort within experimental generation database of *roll waves* in fluid flows of non-Newtonian rheology. Tests of this nature were only started in the research group RMVP (Rheology of Viscous Materials and viscoplastic), but were not explored in this thesis.

**Keywords:** Natural disasters. Risk. Mud flows. Non-newtonian fluid. *Roll waves* physical tests. Numerical test of *roll waves*.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Deslizamento de terra em Angra dos Reis, Rio de Janeiro (2010). .....	27
<b>Figura 2</b> – (a) Catástrofe em Caraguatatuba em 1967, (b) Deslizamentos em Teresópolis em 2011. ....	28
<b>Figura 3</b> – Propagação de roll waves em canais artificiais: (a) Roll waves em vertedouro do reservatório de LlynBrienne, em Wales, Reino Unido, (b) Roll waves em um canal de concreto, (Lions Bay, British Columbia – Canadá), (c) Roll waves em escoamento hiperconcentrado.....	31
<b>Figura 4</b> – Medidas hidrográficas feitas em uma das estações de medidas situada na parte inferior do canal de Acquabona: (a) 25 de Julho; (b) 27 de Julho e (c) 17 de Agosto, de 1998.....	32
<b>Figura 5</b> – Roll waves em Grönnbach, na cidade de Merligen, Suíça, visualizadas no sentido jusante (Cornish, 1910).....	39
<b>Figura 6</b> – Solução de roll waves ajustadas por choques .....	41
<b>Figura 7</b> – Solução de roll waves com introdução de efeito difusivo com $Re = 10$ .....	42
<b>Figura 8</b> – Perfil de ondas obtido de solução aquosa de glicerina (fluido newtoniano).....	44
<b>Figura 9</b> – Visualização de roll waves em escoamento de fluido newtoniano (glicerina pura) .....	45
<b>Figura 10</b> – (a) Resultados para um ensaio com glicerina pura, vazão de 0,75 l/s e Amplitude $\Delta h \approx 2$ mm. ....	46
<b>Figura 11</b> – Representação do escoamento em águas rasas a partir de um sistema de eixo $\mathbb{R}^3$ com coordenadas $(x,y,z)$ .....	52
<b>Figura 12</b> – Perfil de velocidades para um fluido tipo Herschel Bulkley .....	57
<b>Figura 13</b> – Taxa de crescimento das perturbações para um fluido do tipo Herschel-Bulkley .....	65
<b>Figura 14</b> – Velocidade de propagação das perturbações fixando os parâmetros ( $C^* = 0,1$ e $n = 0,4$ ) e variando o número de Froude.....	66
<b>Figura 15</b> – Análise das funções $k_i(\omega_r)$ e $k_r(\omega_r)$ (ramo positivo) variando o número de Froude em relação à singularidade $Fr_s \cong 0,9518$ e fixando os parâmetros: $n = 0,4$ e $C^* = 0,1$ : (a) Comportamento da função $k_i(\omega_r)$ , (b) Comportamento da função $k_r(\omega_r)$ .....	70

<b>Figura 16</b> – Comportamento da função $k_i(\omega_r)$ (ramo positivo) variando o número de Froude e fixando os parâmetros: $n = 0.4$ e $C^* = 0,1$ , (a) Análise da Equação 62 mantendo sua configuração, (b) Análise da equação 62 considerando o valor absoluto de $(\alpha - 1/Fr^2)$ .....	71
<b>Figura 17</b> – Comportamento da função $kr\omega_r$ (ramo positivo) variando o número de Froude e fixando os parâmetros: $n = 0.4$ e $C^* = 0,1$ , (a) Análise da Equação 63 mantendo sua configuração, (b) Análise da Equação 63 considerando o valor absoluto de $(\alpha - 1/Fr^2)$ .....	72
<b>Figura 18</b> – Influência dos parâmetros reológicos $n, C^*$ na frequência crítica de perturbação para $Fr > Fr_c$ : (a) Influência do parâmetro $C^*$ , (b) Influência do índice de escoamento do fluido $n$ .....	75
<b>Figura 19</b> – Limite teórico para geração de Roll waves, relacionando número de Froude e o parâmetro $C^*$ com 3 casos de geração de roll waves. ....	76
<b>Figura 20</b> – Limite teórico para geração de Roll waves, relacionado à frequência crítica de perturbação ( $\omega$ ) e o parâmetro $C^*$ , com casos de geração e não geração de roll waves. ....	77
<b>Figura 21</b> – Limite teórico para geração de Roll waves em fluido newtoniano, relacionado à frequência crítica de perturbação ( $\omega$ ), com casos de geração e não geração de roll waves. ....	78
<b>Figura 22</b> – Perfil da roll wave .....	79
<b>Figura 23</b> – Funções $F(h)$ e $G(h)$ representadas em módulo e fase ( $n = 0,4$ , $C^* = 0,1734$ e $Fr = 0,53$ ) .....	87
<b>Figura 24</b> – Perfil das roll waves em que $Fr = 0,83$ , variando o valor da condição inicial $h_1$ . ....	89
<b>Figura 25</b> – Perfil das roll waves com $h_1 = h_{min}$ , para $Fr = 0,83$ , $Fr = 0,92$ , $Fr = 0,98$ ..	89
<b>Figura 26</b> – Perfil das roll waves para fluidos do tipo Power law e Herschel Bulkley, com $n = 0,4$ e $h_1 = h_{min}$ .....	90
<b>Figura 27</b> – Perfil das roll waves para fluidos do tipo Power law e Herschel Bulkley, com $n = 0,4$ e $h_1 = 0,74 > h_{min}$ .....	91
<b>Figura 28</b> – Malha numérica: (a) Malha e condições de contorno, (b) Detalhes da malha.....	97
<b>Figura 29</b> – Resultado experimental do perfil da superfície livre para o regime uniforme e regime perturbado e o espectro do sinal de perturbação para cada ensaio: a) Ensaio para uma vazão de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s. ....	107

<b>Figura 30</b> – Escoamento em regime uniforme .....	109
<b>Figura 31</b> – Perfil de velocidade do escoamento em regime uniforme: (a) Através de simulação numérica utilizando o Fluent, (b) Perfil de velocidade teórico e numérico .....	109
<b>Figura 32</b> – Taxa de deformação do escoamento: (a) Simulação numérica utilizando o Fluent, (b)Taxa de deformação teórica calculada através da Equação 29 e numérica através do Fluent.....	110
<b>Figura 33</b> – Propagação de roll waves ao longo do canal .....	112
<b>Figura 34</b> – Amplitude das ondas em função do tempo nos pontos 1,5 m, 2,5 m e 3,0m.....	114
<b>Figura 35</b> – Variação da frequência de perturbação (f) .....	115
<b>Figura 36</b> – Variação do efeito da magnitude de perturbação (B).....	116
<b>Figura 37</b> – Gráfico comparativo entre ondas geradas para vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s, com números de Froude de 0,83, 0,92 e 0,98, respectivamente. ....	117
<b>Figura 38</b> – Gráfico comparativo entre ondas geradas para diferentes números de Froude em função do tempo. ....	118
<b>Figura 39</b> – Diagrama das simulações para diferentes frequências de perturbação em função da distância longitudinal (m) .....	120
<b>Figura 40</b> – Diagrama das simulações para diferentes frequências de perturbação em função do tempo (s). ....	121
<b>Figura 41</b> – Perfil de velocidade e taxa de deformação para o escoamento em regime laminar com propriedades reológicas do tipo Power law: (a) Perfil de velocidade numérico e teórico do escoamento, (b) Taxa de deformação teórica e numérica do escoamento .....	123
<b>Figura 42</b> – Propagação de roll waves ao longo do canal para fluido do tipo power law com uma frequência de 1 HZ .....	124
<b>Figura 43</b> – Amplitude das ondas em função do tempo nos pontos 3 m , 4 m e 5 m.....	125
<b>Figura 44</b> – Perfil das roll waves para frequências de perturbação de 0,8 e 1 Hz.....	126
<b>Figura 45</b> –Perfil das roll waves para uma frequência de perturbação de 1 Hz com intensidade de 5% e 10 %.....	127
<b>Figura 46</b> – Perfil e velocidade e taxa de deformação para o escoamento em regime laminar com propriedades reológicas do tipo Herschel Bulkley: (a) Perfil de velocidade numérico e teórico do escoamento, (b) Taxa de deformação teórica e numérica do escoamento. ....	128

<b>Figura 47</b> – Propagação de roll waves ao longo do canal para fluido do tipo Herschel Bulkley com uma frequência de 0,8 Hz. ....	129
<b>Figura 48</b> – Influência da tensão crítica no perfil das roll waves com uma frequência de perturbação de 0,8 Hz. ....	129
<b>Figura 49</b> – Limite teórico para geração de roll waves do número de Froude em função do parâmetro $C^*$ e as simulações numéricas realizadas para fluidos não-newtonianos. ....	131
<b>Figura 50</b> – Simulações para fluido do tipo Power law, com frequências de perturbação de: 0,8; 1; 2; 3,7 e 5 Hz.....	132
<b>Figura 51</b> – Simulações para fluido do tipo Herschel Bulkley com $\tau_c = 0,2$ Pa, para frequências de perturbação de: 0,5; 0,8; 1 e 2,5 Hz.....	133
<b>Figura 52</b> – Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e numérico para uma vazão de 0,75 l/s.....	137
<b>Figura 53</b> – Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e numérico para uma vazão de 0,96 l/s.....	138
<b>Figura 54</b> – Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e numérico para uma vazão de 1,14 l/s.....	138
<b>Figura 55</b> – Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e matemático para uma vazão de 0,75 l/s.....	141
<b>Figura 56</b> – Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e matemático para uma vazão de 0,96 l/s.....	141
<b>Figura 57</b> – Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e matemático para uma vazão de 1,14 l/s.....	142
<b>Figura 58</b> – Comparação entre os resultados numérico e matemático para uma vazão de 0,75 l/s.....	143
<b>Figura 59</b> – Comparação entre os resultados numérico e matemático para uma vazão de 0,96 l/s.....	143
<b>Figura 60</b> – Comparação entre os resultados numérico e matemático para uma vazão de 1,14 l/s.....	144
<b>Figura 61</b> – Comparação entre os resultados teóricos e numéricos para fluido do tipo Power law com frequência de perturbação de 0,8 Hz.....	146
<b>Figura 62</b> – Comparação entre os resultados teóricos e numericos para fluido do tipo Power law com frequência de perturbação de 1 Hz.....	146

<b>Figura 63</b> – Comparação entre os resultados teóricos e numéricos para fluido do tipo Herschel Bulkley com frequência de perturbação de 0,8 Hz e tensão crítica de 0,1 Pa. .	147
<b>Figura 64</b> – Comparação entre os resultados teóricos e numéricos para fluido do tipo Herschel Bulkley com frequência de perturbação de 0,8 Hz e tensão crítica de 0,2 Pa. .	148
<b>Figura 65</b> – Análise do parâmetro ( $h_1$ ) para o fluido do tipo Power Law .....	149
<b>Figura 66</b> – Análise do parâmetro ( $h_1$ ) para o fluido do tipo Herschel Bulkley com tensão crítica de 0,1 Pa.....	150

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> – Esquemas numéricos utilizados .....	102
<b>Tabela 2</b> – Parâmetros dos ensaios para vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s (FIOROT, 2012). .....	107
<b>Tabela 3</b> – Propriedades das <i>roll waves</i> para vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s .....	118
<b>Tabela 4</b> – Propriedades do escoamento e das ondas em função da tensão crítica do fluido. ....	130
<b>Tabela 5</b> – Valores críticos ( $Frc, fc$ ) para geração de <i>roll waves</i> em função da tensão para fluidos com tensões críticas de 0, 0,1, 0,15 e 0,2 Pa. ....	131
<b>Tabela 6</b> – Propriedades das <i>roll waves</i> referentes às Figuras 51 e 52.....	134
<b>Tabela 7</b> – Comparação entre resultados experimentais (FIOROT, 2012) e numéricos, referentes à Figura52. ....	136
<b>Tabela 8</b> – Comparação entre resultados experimentais (FIOROT, 2012) e numéricos referentes à Figura53. ....	137
<b>Tabela 9</b> – Comparação entre resultados experimentais e numéricos (FIOROT, 2012) referente à Figura54.....	137
<b>Tabela 10</b> – Comparação entre resultados experimentais para uma vazão de 0,75 l/s e do modelo matemático, referente à Figura 55. ....	140
<b>Tabela 11</b> - Comparação entre resultados experimentais para uma vazão de 0,96 l/s e do modelo matemático, referente à Figura 56. ....	140
<b>Tabela 12</b> - Comparação entre resultados experimentais para uma vazão de 1,14 l/s e do modelo matemático, referente à Figura 57. ....	140
<b>Tabela 13</b> – Comparação entre as propriedades das ondas obtidas com o modelo numérico e o modelo matemático, para vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s.....	143
<b>Tabela 14</b> – Comparação entre as propriedades das ondas obtidas com o modelo numérico e o modelo matemático com frequências de perturbações de 0,8 e 1 Hz. ....	145
<b>Tabela 15</b> – Comparação entre as propriedades das ondas obtidas com o modelo numérico e o modelo matemático com tensões críticas de 0,1 e 0,2 Pa, para uma frequência de 0,8 Hz.....	147

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\nabla$	operador vetorial nabra $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
$\alpha$	coeficiente de distribuição de velocidade
$\zeta$	comprimento de onda no sistema móvel de coordenadas
$\theta$	ângulo de inclinação do canal
$\lambda$	comprimento da <i>roll wave</i>
$\mu$	viscosidade dinâmica ou absoluta de fluido newtoniano
$\mu_n$	índice de consistência para fluido do tipo <i>Power Law</i>
$\mu_B$	viscosidade plástica (fluido de Bingham)
$\eta$	viscosidade aparente
$\rho$	massa específica
$\tau$	tensão de cisalhamento
$\tau^*$	tensão de cisalhamento adimensional
$\tau_c$	tensão de escoamento, crítica ou rigidez inicial
$\tau_p$	tensão na parede
$\bar{\bar{\tau}}$	tensor extra-tensão ou parte viscosa do tensor de tensões
$\tau_{xz}$	tensão cisalhante atuante no eixo $x$ na direção $z$
$\omega$	freqüência das perturbações
$C$	coeficiente de Chézy
$g$	aceleração da gravidade
$n$	índice de escoamento do fluido
$U$	velocidade de propagação da <i>roll wave</i>
$Fr$	número de Froude
$Fr_c$	número de Froude crítico
$C^*$	tensão crítica adimensional ou coesão adimensional do fluido
$t$	escala de tempo
$\bar{\bar{T}}$	tensor de tensões
$\bar{\bar{\gamma}}$	tensor taxa de deformação ou gradiente de velocidade
$\dot{\gamma}_{II}$	segundo invariante do tensor de tensões

$\vec{u}$	vetor velocidade
$u$	componente da velocidade na direção $x$
$v$	componente da velocidade na direção $y$
$w$	componente da velocidade na direção $z$
$x$	abscissa no sistema de coordenadas cartesianas
$y$	ordenada no sistema de coordenadas cartesianas
$z$	cota no sistema de coordenadas cartesianas
$K_n$	índice de consistência do fluido de Herschel-Bulkley
$h_0$	lâmina do escoamento em regime uniforme
$L$	comprimento característico
$x^*$	abscissa adimensional no sistema de coordenadas cartesianas
$y^*$	ordenada adimensional no sistema de coordenadas cartesianas
$z^*$	cota adimensional no sistema de coordenadas cartesianas
$u^*$	componente da velocidade adimensional na direção $x$
$v^*$	componente da velocidade adimensional na direção $y$
$w^*$	componente da velocidade adimensional na direção $z$
$p$	pressão
$p^*$	pressão adimensional-
$\vec{f}$	força gravitacional
$\bar{u}$	velocidade média do escoamento
$h$	profundidade total do escoamento
$z_0$	profundidade do escoamento na região cisalhada
$l_0$	comprimento característico
$u_0$	velocidade em regime uniforme
$\bar{u}_0$	velocidade média do escoamento em regime uniforme
$\mathcal{H}$	valor infinitesimal sobre a lâmina d'água em regime perturbado
$\mathcal{V}$	valor infinitesimal sobre a velocidade do escoamento em regime perturbado
$\omega_i$	taxa de crescimento temporal das instabilidades
$k_i$	taxa de crescimento espacial das instabilidades
$Fr_s$	número de Froude no ponto de singularidade

$x'$	abscissa no sistema móvel de coordenadas
$c$	constante em função da velocidade de propagação da <i>roll wave</i>
$h_1$	profundidade do escoamento antes do choque
$h_2$	profundidade de escoamento depois do choque
$h_c$	profundidade crítica do escoamento
$I$	matriz identidade
$\bar{u}_1$	velocidade média do escoamento antes do choque
$\bar{u}_2$	velocidade média do escoamento depois do choque
$\bar{u}_c$	velocidade média do escoamento na seção crítica do escoamento
$\lambda$	autovalores
$\lambda^+_1$	velocidade de propagação antes do choque
$\lambda^+_2$	velocidade de propagação depois do choque

## SUMÁRIO

CAPÍTULO 1.....	INTRODUÇÃO
.....	25
1.1	Desastres Naturais no Brasil.....26
1.2	Uma Reflexão sobre a Implementação de Políticas Públicas em prol da Mitigação de Riscos Naturais, Adaptação e Incremento de Resiliência. ....28
1.3	Justificativa e Importância da Pesquisa.....30
1.4	Tratamento do Problema .....34
1.5	Objetivos .....35
1.6	Estruturação da Tese .....36
CAPÍTULO 2.....	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA
.....	38
2.1	Roll waves .....38
2.1.1	Roll waves em escoamentos de fluidos ideal e newtoniano 40
2.1.2	Roll waves em escoamentos de fluidos não-newtonianos.....46
CAPÍTULO 3.....	MODELAGEM MATEMÁTICA
.....	50
3.1	Equações Motrizes e Hipóteses.....50
3.2	Transformação das Equações para a obtenção do Modelo tipo Saint Venant.....52
3.2.1	Determinação do perfil de velocidade do escoamento.....55
3.2.2	Velocidade média e taxa de deformação do escoamento .....57
3.3	Processo de Promediação e Adimensionalização das Equações.....59
3.4	Análise de Estabilidade Linear.....62
3.4.1	Análise de estabilidade temporal.....63
3.4.2	Análise de estabilidade espacial .....67
3.4.3	Análise dos critérios de geração .....76
3.5	Equação e Perfil das <i>Roll waves</i> .....79

3.5.1	Condição crítica de escoamento .....	79
3.5.2	Determinação da equação da roll wave .....	82
3.5.3	Condições de choque .....	85
3.5.4	Verificação da funcionalidade do modelo para geração de roll waves .....	88
CAPÍTULO 4.....MODELAGEM NUMÉRICA		
.....		93
4.1	Simulações Numéricas através de CFD (Computational Fluid Dynamics) .....	94
4.1.1	Modelo multifásico.....	95
4.2	Fase de Pré Processamento.....	96
4.2.1	Construção da malha .....	96
4.2.1.1	Tratamento numérico da velocidade média para reologia não- newtoniana .....	99
4.2.2	Imposição de uma perturbação .....	101
4.2.3	Condições de operação .....	102
4.3	Esquemas Numéricos (Solver) .....	102
4.3.1	Discretização temporal .....	104
CAPÍTULO 5..... RESULTADOS NUMÉRICOS		
.....		106
5.1	Testes com Resultados Experimentais para fluido newtoniano .....	106
5.1.1	Simulação numérica para o 1º caso .....	108
5.1.2	Introdução de uma Perturbação .....	111
5.1.3	Análise dos Efeitos da Perturbação Imposta e do Número de Froude .....	115
5.1.4	Avaliação do critério de estabilidade em relação à frequência de perturbação.....	119
5.2	Testes de Validação para Fluidos Não-Newtonianos.....	122
5.2.1	Testes para fluidos do tipo Power law.....	122
5.2.2	Introdução de uma perturbação na busca de roll waves em fluido do tipo Power law .....	124
5.2.2.1	Avaliação dos efeitos causados pela perturbação.....	125
5.2.3	Testes para Fluidos de Herschel Bulkley .....	127

5.2.3.1	Introdução de uma perturbação em busca de roll waves em fluidos de Herschel Bulkley .....	129
5.2.4	Verificação dos critérios de geração de roll waves para fluidos não- newtonianos.	130
CAPÍTULO 6.....CONFRONTAÇÃO DE RESULTADOS: EXPERIMENTAIS, TEÓRICOS E NUMÉRICOS .....		135
6.1	Comparações para Fluido Newtoniano .....	135
6.1.1	Comparação entre os resultados experimentais e Numéricos para Fluido Newtoniano via Fluent.....	136
6.1.2	Comparação entre os resultados experimentais e o modelo matemático para fluido newtoniano .....	139
6.1.3	Comparação entre os modelos numérico e matemático para fluido newtoniano .....	143
6.2	Comparações para Fluidos Não Newtonianos.....	145
6.2.1	Análise do parâmetro ( $h_1$ ) .....	149
CAPÍTULO 7..... CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....		151
7.1	Conclusões.....	151
7.1.1	Modelo matemático .....	152
7.1.2	Modelo numérico .....	153
7.2	Aplicações .....	155
7.3	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	156
7.3.1	Modelo Matemático .....	156
7.3.2	Modelo físico.....	157
7.3.3	Perspectivas Futuras deste trabalho em áreas afins.....	158
7.4	Publicações .....	158
REFERÊNCIAS .....		161
APÊNDICE A - DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS .....		167
APÊNDICE B - PERFIL DE VELOCIDADE DO ESCOAMENTO, PROMEDIAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS E ADIMENSIONALIZAÇÃO .....		173

APÊNDICE C - DEMONSTRAÇÃO DO SISTEMA HIPERBÓLICO E GENUINAMENTE NÃO-LINEAR.....	183
APÊNDICE D – FUNÇÃO DEFINIDA PELO USUÁRIO DA PERTURBAÇÃO INSERIDA NA VELOCIDADE MÉDIA DO ESCOAMENTO PARA FLUIDO NEWTONIANO E NÃO NEWTONIANO.....	188
ANEXO A - BREVE REVISÃO DE MODELOS REOLÓGICOS.....	192
ANEXO B - METODOLOGIA DOS EXPERIMENTOS PARA SIMULAÇÃO DE ROLL WAVES.....	200

---

## CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

---

Desastres naturais é um tema cada vez mais presente e que tem sido amplamente divulgado, visto que têm ocorrido mundialmente, em função das mudanças climáticas como resultado do aquecimento global, modificações da paisagem e mau planejamento urbano.

Quando se trata de desastres naturais, causando grande impacto na sociedade, estes são distinguidos em função da natureza do fenômeno que o desencadeia. O efeito impactante do acidente resulta da ação conjunta de causas de natureza meteorológica, geológica ou geomorfológica ou uma combinação destas, sendo potencializada por ações de antropização. Tais desastres são decorrentes de fenômenos, como as tempestades, inundações, deslizamentos de terra, terremotos, vulcões, etc., que ocorrem em diversas partes do mundo, podendo, em algumas regiões, fazerem-se presentes em locais de maior vulnerabilidade. Vale, entretanto, ressaltar que se não houver danos ou a ocorrência for em uma área não-povoada, o fenômeno é considerado apenas um evento natural.

Alguns estudos apontam dados de aumento não só na frequência, mas principalmente nos danos e prejuízos causados nas últimas décadas (MARCELINO, 2006). Segundo o banco

de dados global de desastres naturais (EM-DAT, 2007 citado por MARCELINO, 2008), a maior ocorrência entre os anos 1900 e 2006 foi na Ásia, com 3699 registros, seguidos pelo continente americano com 2416 registros. Destes, os desastres que mais ocorreram em todo o mundo foram as inundações (35%) que estão associadas a furacões, tornados e vendavais.

No ano de 2011, segundo o relatório global de clima e catástrofes da Aon Benfield e conforme apontamentos na página do CEMADEN (Centro Nacional de Monitoramento e Alertas de Desastres Naturais), foram registradas catástrofes naturais que causaram grandes impactos em várias partes do mundo: inundações no Brasil, terremotos na Nova Zelândia e no Japão (acidente na usina nuclear de Fukushima) seguido por Tsunami, além de tempestades acompanhadas por tornados nos Estados Unidos. O furacão Irene também em território norte-americano, assim como alagamentos na Tailândia, tremores de terra na Turquia e tempestades nas Filipinas (UNITED NATIONS OFFICE FOR DISASTER RISK REDUCTION-UNISDR, 2012).

Segundo dados do UNISDR (2012), o ano de 2011 foi marcado por 302 desastres naturais que mataram 29.782 pessoas no mundo, notadamente na Ásia. A estimativa é que os desastres geraram US\$ 366 bilhões de prejuízos, podendo ser considerado, em termos financeiros, o ano mais caro da história.

## 1.1 Desastres Naturais no Brasil

O cenário natural do Brasil também vem sendo afetado por mudanças climáticas e temos nos deparado com sucessivos eventos naturais como inundações e deslizamentos de terra nas épocas de chuvas. Estas ocorrências, associadas ao mal planejamento urbano, assoreamento de rios, desmatamento de encostas e ocupação de locais inadequados para moradia, causam verdadeiras catástrofes.

Nas regiões Sul e Sudeste do Brasil, dentre os fenômenos naturais, os que ganham mais destaque são as corridas de lama ao longo das encostas que ocorrem após chuvas intensas (GUIDICINI; NIEBLE, 1984). E quando atingem áreas com infra-estruturas, o evento se torna catastrófico, causando diversos prejuízos de ordem humana, social, ambiental e econômica. Segundo o Ministério da Ciência e Tecnologia (2011), os deslizamentos de terra são as maiores causas de mortes por desastres naturais no mundo.

O Estado do Rio de Janeiro, principalmente no verão, em que chuvas intensas ocorrem, tem sido cenário destas catástrofes. Dentre inúmeros exemplos, um acidente recente

foi o deslizamento de terra em Angra dos Reis, Rio de Janeiro (2010), que formou um canal inclinado natural com escoamento de material lamoso que destruiu um albergue, matando cerca de 40 pessoas, conforme mostrado na Figura 1.

**Figura 1** - Deslizamento de terra em Angra dos Reis, Rio de Janeiro (2010).



**Fonte:** Araújo e Galdo (2010).

No ano seguinte (2011), o Rio de Janeiro foi marcado por outra catástrofe natural, que é considerada a maior do Brasil desde o desastre de Caraguatatuba (Figura 2a), no litoral norte de São Paulo em março de 1967 quando após um longo período chuvoso, lama e rochas desceram dos morros, provocando deslizamentos sucessivos de terra. Na cidade, casas foram soterradas, os rios ganharam fortes correntezas arrastando árvores e estruturas, provocando perdas significativas e a morte de cerca de 500 pessoas (REBELLO, 2012).

Na região serrana do Rio de Janeiro (2011), o acidente resultou de uma conjunção ou geografização de 03 fatores, a saber: a ação meteorológica da ZCAS – Zona de Convergência do Atlântico Sul, relevo íngreme com presença de camada de solo fina saturado pela ação das chuvas intensas (200 a 300 mm em poucas horas), reduzindo sobremaneira a coesão e, por conseguinte o atrito que, associados a uma ocupação desordenada do espaço, quando não com práticas geotécnicas errôneas, explicam o acidente em sua amplitude. Assim, os escorregamentos de encostas e frentes de lama foram favorecidos, formando verdadeiros canais naturais com transporte de detritos e material lamoso significativo, conforme apresentado na figura 2b. Nesta situação, grande parte da destruição foi causada pelo efeito tipo frentes de lava torrencial com dinâmica e energia suficiente para destruir bens e

infraestrutura, erodir leitos (desnudando até eventos pretéritos) e, provocando, forçosamente, vítimas. Segundo um balanço divulgado pela Defesa Civil Estadual do Rio de Janeiro em 28/01/2011, houve 8.777 desabrigados e mais de 20 mil desalojados. E, ainda, o trabalho de um médico legista aponta que ao todo foram 950 vítimas fatais e que restam 430 pessoas desaparecidas neste desastre (GUIDUGLI, 2012).

**Figura 2** - (a) Catástrofe em Caraguatatuba em 1967, (b) Deslizamentos em Teresópolis em 2011.



**Fontes:** (a) Veiga (2011), (b) Gonçalo (2011).

Geralmente, os acidentes ocorridos em encostas e corredores com corridas de fluidos hiperconcentrados (misturas hiperconcentradas de água, argila, areia e agregados de maior granulometria, com níveis elevados de concentração) não só veiculam grande carga de sedimento, mas também blocos de rocha, tronco de árvores, o que vem potencializar os danos em toda sua extensão.

Catástrofes dessa natureza têm sido resolvidas através de medidas pouco eficazes, que dificilmente recuperam os prejuízos, pois as medidas corretivas diminuem pouco o risco, mas não evitam os acidentes. Na verdade, medidas de prevenção e de gestão devem urgentemente ser aplicadas a estes ambientes, evitando futuros danos. O Estado brasileiro tem obrigação de romper definitivamente com o paradigma da tragédia anunciada.

## 1.2 Uma Reflexão sobre a Implementação de Políticas Públicas em prol da Mitigação de Riscos Naturais, Adaptação e Incremento de Resiliência.

A análise do risco constitui o domínio científico e técnico cujo objeto é a identificação e análise dos diferentes fatores do risco, visa à promoção de medidas de prevenção, redução e mitigação, assim como o desenvolvimento de políticas públicas de gestão territorial e de informação dirigidas aos indivíduos e comunidades.

Com as transformações globais, as dinâmicas populacionais de urbanização e litoralização, não-reversibilidade de muitos dos processos naturais, a expressão espacial dos riscos e a qualificação da probabilidade de ocorrência de eventos extraordinários têm adquirido progressiva importância. A estes focos de interesses associam-se as preocupações dos cidadãos, das comunidades, das instituições ou dos estados, relativamente aos valores ambientais e aos critérios de segurança e fiabilidade dos processos, estruturas e equipamentos, o que determina a incorporação de princípios éticos e de responsabilidade na gestão dos perigos (TAVARES, 2008).

No Brasil, os desastres naturais e todo o flagelo dele decorrente encontraram, em termo de ação governamental, no episódio de 2011, da região serrana (RJ), um primeiro projeto promissor visando monitorar área de riscos<sup>1</sup> e gerar alertas à população eventualmente em risco, seja em situação crítica, seja em ações que venham exigir até mesmo a reinstalação daqueles moradores e comunidades para áreas mais seguras. Os acidentes da Região Serrana do Rio de Janeiro, com saldo de 930 mortes e cerca de 15 000 sinistrados, criou um novo paradigma na questão do desastre natural no país. A criação em 2011 do CEMADEN (Centro Nacional de Monitoramento de Alerta de Desastres Naturais) como agente federal responsável por emitir alertas sobre a ocorrência de eventuais desastres em locais que podem colocar a vida das pessoas em risco tem por objetivo desenvolver, testar e implementar um sistema de previsão de ocorrência de Desastres Naturais em áreas suscetíveis em todo o Brasil; cerca de 300 municípios brasileiros já sendo monitorados. Dentre as competências do CEMADEN, destaca-se a realização de pesquisas que produzam informações e auxiliem nas ações contra desastres naturais.

Na sua essência, a finalidade maior do Centro e de suas ações será reduzir de imediato os indicadores preocupantes de riscos naturais no Brasil, no tocante, especificamente, ao número de mortes. Para tanto, haverá a necessidade de uma gestão integradora de ações de órgãos da esfera da União, dos Estados e Municípios, trabalhando de forma conjunta e sincronizada. Um desafio de todos nós, tendo a Universidade a tarefa de antever, explicar e

---

<sup>1</sup> O risco, objeto social, define-se como a percepção do perigo, da catástrofe possível. Não há risco sem uma população ou indivíduo que o perceba e que poderia sofrer seus efeitos. Correm-se riscos que são estimados, avaliados e calculados, e podem ser assumidos ou recusados. O risco é a tradução de uma ameaça, de um perigo para aquele que está sujeito a ele e o percebe como tal. Yvette Veyret - Paris X – Nanterre.

problematizar questões e, tanto quanto possível, delinear diretrizes no tocante a medidas de prevenção, predição e de mitigação associados a desastres naturais. Tal iniciativa está em consonância com as orientações da Conferência Mundial sobre a Redução dos Desastres (UNITED NATIONS INTERNATIONAL STRATEGY FOR DISASTER REDUCTION- ISDR-UN, 2005), que estabeleceu os princípios orientadores e as práticas capazes de incrementar a resiliência das comunidades vulneráveis a desastres, num contexto do desenvolvimento sustentável, nomeadamente através da identificação, avaliação e monitorização dos riscos, recorrendo ao desenvolvimento científico, e à capacitação técnica para observar, prever, modelar e cartografar os perigos naturais, e ainda aumentar a capacidade de resposta dos sistemas de alerta precoce, a partir de uma forte base institucional de implementação, desde escalas nacionais a locais.

Este referencial (UNITED NATIONS INTER-AGENCY TASK FORCE - UNIATF, 2005) contribuiu para o aprofundamento das ciências do risco, através da definição de medidas simples, de normas de proteção estrutural, ou de iniciativas financeiras ou de alocação de recursos. Procura-se assim, a implementação de ações, não só para reduzir o potencial de desastres, mas também para manter a dinâmica dos objetivos do Millennium Development, que incluem a redução da pobreza, a adaptação às alterações climáticas e a melhoria dos indicadores da saúde (TAVARES, 2008).

Como é salientado pelo (WORLD ECONOMIC FORUM-WEF, 2010) é necessário construir uma abordagem holística para a gestão do risco a nível nacional, a par da condução de análise de custo-benefício para a gestão do mesmo, visando melhorar a utilização de fundos e entender os benefícios, e crescimento a longo prazo do retorno dos investimentos dessa gestão, a par de uma comunicação clara e consistente sobre a natureza dos riscos e das estratégias para minimizá-los. A capacidade de produzir informação e inovação e, simultaneamente promover novas e existentes infraestruturas, são chaves para a prevenção dos riscos e fundamentais para a resiliência das populações.

### **1.3 Justificativa e Importância da Pesquisa**

Do ponto de vista mecanicista, foco desta pesquisa, sabe-se que em acidentes da natureza aqui tratada, além da formação de frentes energeticamente danosas, o transporte de sedimentos é significativo nos fluxos resultantes, sejam de fluidos ainda de propriedades newtonianas (água) ou fluidos não-newtonianos (água+ finos, hiperconcentrados), podendo surgir, no seio destes escoamentos, instabilidades que viriam a potencializar os danos

causados. Estes fenômenos são instabilidades de elevado nível energético que podem surgir na superfície livre de corridas de lama em canais inclinados, encostas, e que tendem a se propagar sob forma de um trem de ondas. Estas ondas que se apresentam com formas constantes e periódicas e com velocidade de propagação característica são denominadas *roll waves*.

Apesar de surgirem mais frequentemente em canais artificiais (Figura 3), não é raro encontrá-las em ambientes naturais, tais como, em rios e lagos (FER; LEMMIN; THORPE, 2003), deslizamentos de encostas, *debris* e *mudflows*, avalanches, etc.

**Figura 3** - Propagação de *roll waves* em canais artificiais: (a) *Roll waves* em vertedouro do reservatório de LlynBrianne, em Wales, Reino Unido, (b) *Roll waves* em um canal de concreto, (Lions Bay, British Columbia – Canadá), (c) *Roll waves* em escoamento hiperconcentrado



**Fontes:** (a) Gibson (2008), (b) Balmforth (2011), (c) Irstea (2001).

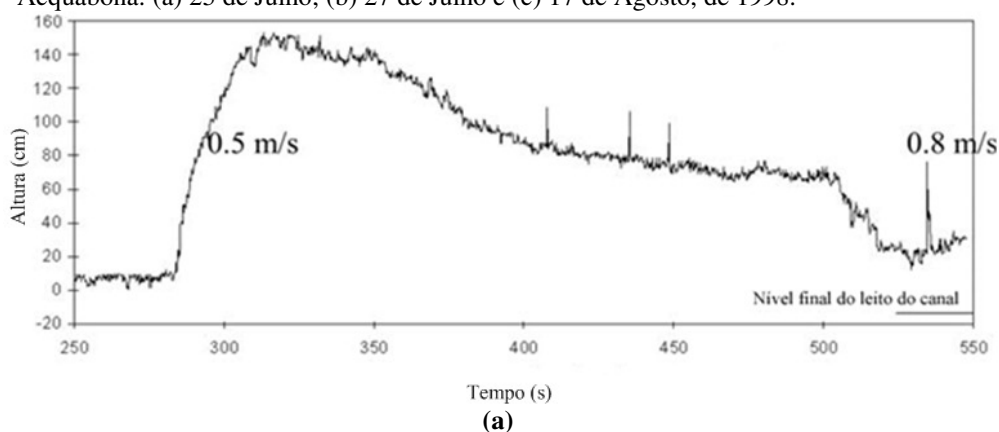
Dentro do contexto de catástrofes naturais e seus riscos, a equipe RMVP – Reologia de Materiais Viscosos e Viscoplásticos – Grupo de pesquisa certificado no CNPq – UNESP

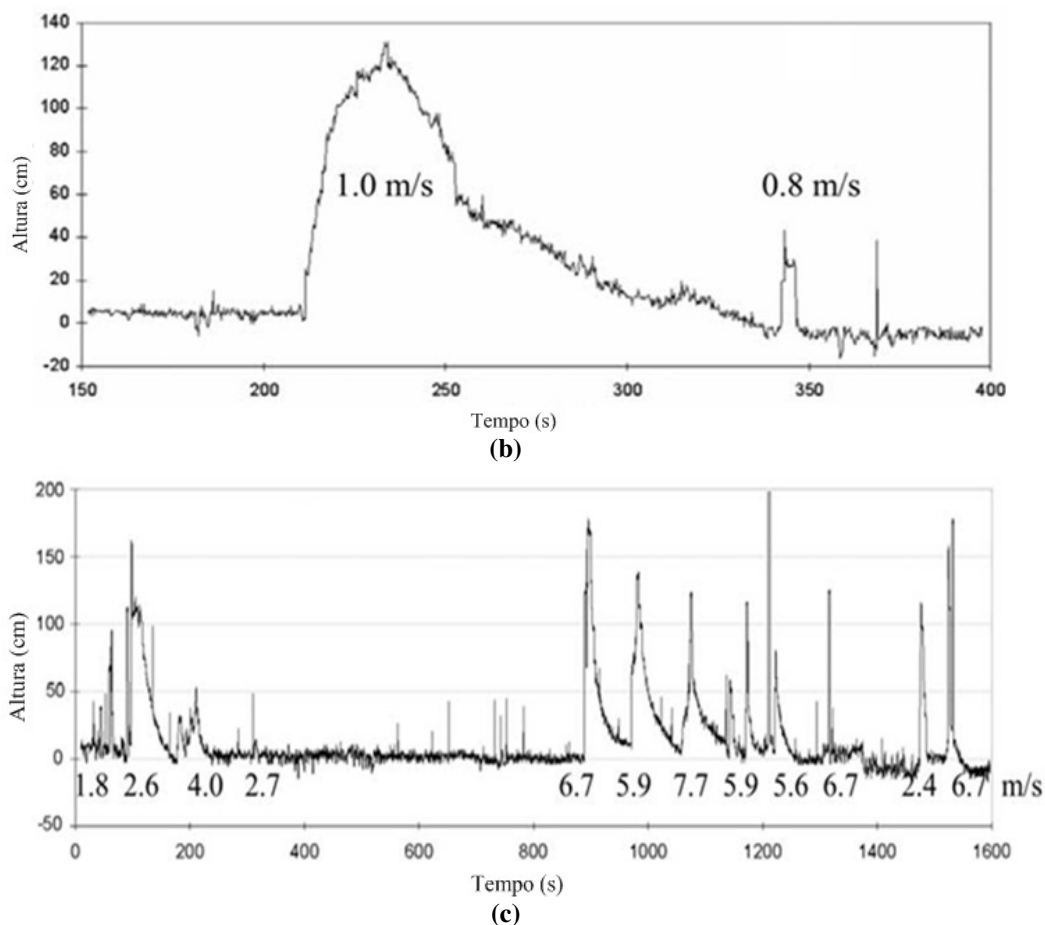
vem desenvolvendo trabalhos, de natureza teórica, física e numérica, na busca de identificar propriedades reométricas de materiais hiperconcentrados, como, por exemplo, mistura de água e argila, água, areia, argila (MACIEL; SANTOS; FERREIRA, 2009), com aplicação em problemas tipo ruptura de barragem (LEITE, 2009; MINUSSI; MACIEL, 2012) e, ainda, formação de instabilidades na superfície livre de escoamentos hiperconcentrados (FERREIRA et al. 2011), de natureza não-newtoniana, tema deste trabalho de doutorado.

A presença de *roll waves*, seja em canais naturais ou artificiais além de ocasionar transbordamentos e carregamento de detritos, devido ao seu poder erosivo, o fenômeno pode causar sérios prejuízos econômicos e sociais, caso atinjam ambientes com presença de infraestrutura civil e população. Embora não exista no Brasil a presença do fenômeno comprovada através de medições em canais naturais ou artificiais, ou encostas, outros países, como Nova Zelândia, China, Suíça e Itália confirmam o surgimento de frentes e trens de ondas em escoamentos lamosos.

Um exemplo destas ocorrências foi em Acquabona, na Itália, onde existe uma bacia de drenagem que contém um canal de 1300 m com registros de escoamentos com presença de frentes de ondas e carregamento significativo de detritos. Por se tratar de um local bem delimitado, fenômenos desta natureza podem ser oportunamente registrados, através de estações de medições instaladas ao longo do canal compostas por sondas ultrassônicas, que possibilitam medição de profundidade do escoamento em função do tempo. Assim, é possível confirmar a presença de frentes de ondas e medir suas amplitudes e velocidade de propagação, conforme explicitado por Zanutti e Lamberti (2007). Nos dias 25 e 27 de Julho de 1998 e 17 de Agosto do mesmo ano, foram efetuadas medições de pluviosidade e da profundidade do escoamento. A Figura 4 apresenta dados obtidos nos três dias de evento, caracterizando a altura das frentes de onda em função do tempo.

**Figura 4** – Medidas hidrográficas feitas em uma das estações de medidas situada na parte inferior do canal de Acquabona: (a) 25 de Julho; (b) 27 de Julho e (c) 17 de Agosto, de 1998.





Fonte: Zanuttigh e Lamberti (2007).

Os eventos de julho de 1998 (Figuras 4a e 4b) podem ser considerados de pequeno porte, já que o volume de material escoado era pequeno (600-700 m<sup>3</sup> e 400-500 m<sup>3</sup> em 25 e 27 de Julho, respectivamente) e a velocidade das frentes de ondas também podem ser consideradas baixas (< 1 m/s). Salienta-se que no dia 25, as tempestades foram precedidas por 14 mm de precipitação durante 7 horas, enquanto que no dia 27 as tempestades ocorreram após 46 horas sem chuva.

Já o evento do dia 17 de Agosto (Figura 4c) foi desencadeado por uma intensa tempestade, com uma precipitação de 25,4 mm em 30 minutos, causando um depósito de material sedimentar e rochoso de aproximadamente 8000 m<sup>3</sup>. Enquanto os eventos de julho foram de curta duração (4 e 2 minutos, respectivamente) e apresentaram um pico único, o evento do dia 17 de Agosto teve duração de 38 minutos e mais de 20 ondas (com evidências de *roll waves*) se formaram, com velocidade de propagação de 2 a 8 m/s. Este tipo de informação no Brasil ainda é escasso, se não inexistente.

É importante destacar que o tratamento da natureza de fluidos presentes neste tipo de evento requer cuidado, pois surge naturalmente a necessidade de se identificar e qualificar a

parcela sólida da mistura e a própria mistura (coesiva/não coesiva, por exemplo) assim como, e sobretudo, quantificar as correlações existentes entre tensões aplicadas no escoamento com as taxas de deformação decorrentes, ou seja, a reologia do material em escoamento, que, via de regra, apresenta relativa complexidade.

Ainda que quando da tentativa de modelagem matemática introduzem-se os termos mais apropriados a cada tipo de fenômeno (*mud floods*, *mudflows*, *debris flows*), numa tentativa de categorização dos eventos, sabe-se da dificuldade e complexidade em catalogar um determinado evento em função das variabilidades dos parâmetros físicos, dados reológicos experimentais oriundos de coleta de material algumas vezes localizada e não em todo trecho da corrida, ou até mesmo em função da precariedade e/ou inexistência dessas informações.

Neste sentido, identificar as condições de formação e manutenção de instabilidades do tipo *roll waves*, e desenvolver métodos de previsão de sua evolução são trabalhos de interesse no ramo científico. Maciel (2011) ilustra e tenta aproximar este tema em sua reflexão sobre o atual problema de gestão de riscos e de prevenção de catástrofes no Brasil.

Cabe salientar, que o estudo da ocorrência, evolução e prevenção destas instabilidades (*roll waves*) é tema de competências múltiplas, abrangendo matemática de sistemas hiperbólicos, sistemas dinâmicos, teoria da bifurcação, física, e diversos campos das engenharias, devendo, forte provavelmente, chamar à atenção e o interesse de engenheiros hidráulicos e de recursos hídricos.

## 1.4 Tratamento do Problema

O estudo do problema proposto é conduzido nesta pesquisa com modelagem matemática e utilização de ferramentas numéricas, através dos softwares MATLAB e FLUENT.

No tratamento matemático, leva-se em consideração que os escoamentos com superfície livre, em condições de pequena profundidade com relação ao comprimento característico, são regidos pelas equações shallow water (sistema do tipo Saint Venant). Este sistema é formado por duas equações a derivadas parciais do tipo estritamente hiperbólico. A dedução deste modelo matemático é efetuada partindo do princípio de conservação da massa e do balanço da quantidade de movimento, estas equações são integradas na vertical, onde se obtém um sistema de equações promediadas.

Neste trabalho, estas equações são adaptadas para fluidos de comportamento não-newtoniano, inserindo o modelo reológico de Herschel Bulkley (a 03 parâmetros) no tensor de tensões do equacionamento da quantidade de movimento.

Após a determinação do sistema promediado na vertical, uma análise de estabilidade linear é realizada com o propósito de determinar condições favoráveis para a formação de instabilidades. Este trabalho aponta para duas condições necessárias, a primeira condição está relacionada com as características do escoamento, a qual é estabelecida em função de um adimensional de interesse em engenharia hidráulica, o número de Froude. A segunda condição necessária está relacionada ao domínio de frequências de perturbação que são favoráveis à geração e propagação de instabilidades, seja para escoamentos newtonianos ou de reologia mais complexa, como a de Herschel Bulkley.

A seguir um modelo matemático que reproduz as principais características dessas ondas, tais como, forma, amplitude e velocidade de propagação é proposto. Para tanto, faz-se recurso da teoria de ondas de choque, teorema de Lax e condições de Rankine Hugoniot da dinâmica dos gases.

Os resultados obtidos com o modelo matemático proposto (1D) no âmbito desta tese são analisados e comparados com simulações numéricas, a partir de um solver desenvolvido em Matlab. Ademais, simulações numéricas das equações globais (equações de Cauchy) também são feitas, utilizando-se um software comercial, o Fluent, através de um dos seus módulos que permite resolver as equações fundamentais da continuidade e da quantidade de movimento, podendo optar pelo tipo de reologia. No que diz respeito a testes experimentais, este trabalho apresenta uma confrontação de resultados numéricos de *roll waves* com experimentos físicos controlados em laboratório, realizados pela equipe RMVP (FIOROT, 2012). Vale ressaltar que o grupo RMVP deixa aqui uma significativa contribuição, dada a grande lacuna de experimentos físicos do fenômeno, realizados de forma controlada e com medidas de precisão.

## 1.5 Objetivos

O objetivo principal desta tese consiste na validação do modelo matemático que vem sendo desenvolvido desde o mestrado da pesquisadora e que tem sido aprimorado no que concerne à geração e propagação de *roll waves* em fluidos hiperconcentrados (não

newtoniano). A construção de um modelo numérico que permita simular a geração e propagação de *roll waves*, utilizando o FLUENT, vem contribuir com a validação.

Os resultados obtidos com esses simuladores correspondem às soluções numéricas do sistema de equações para o problema. A sua comparação com os resultados experimentais vai permitir identificar as consequências das hipóteses simplificadoras consideradas na dedução dos modelos em questão.

Os objetivos específicos da tese podem ser enumerados da seguinte maneira:

- analisar de forma teórica a dinâmica dos escoamentos e a formação de instabilidades;
- colocar em evidência as condições de formação e estabilidade de *roll waves*;
- aprimorar o modelo matemático desenvolvido, visando uma maior representação em condições realísticas, tentando aproximar os resultados obtidos à realidade da corrida de lama com presença de *roll waves*;
- verificar a validade do modelo matemático proposto para reologias mais simplificadas;
- comparar os resultados experimentais para fluidos de reologia newtoniana (glicerina) obtidos por Fiorot (2012) com os resultados dos solvers numéricos (FLUENT e o solver do modelo matemático proposto nesta tese);
- realizar uma análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo matemático, através da variação dos parâmetros físicos (principalmente os de reologia) nos testes numéricos.

## 1.6 Estruturação da Tese

Esta tese é composta de 7 capítulos: Introdução, Estado da Arte, Modelagem Matemática, Modelagem Numérica, Resultados Numéricos, Confrontação de Resultados: Teóricos, Experimentais e Numéricos e por fim as Conclusões e Sugestões para trabalhos futuros.

Nesta introdução, capítulo 1 são apresentadas as motivações da pesquisa. Faz-se toda uma exploração abordando os motivos pelos quais essa pesquisa foi realizada. Tentou-se, neste capítulo, abordar o tema riscos e catástrofes naturais, clarear a fenomenologia tratada e a necessidade de preencher lacunas existentes nessa temática, apresentando a proposta do trabalho e a sua contribuição no ramo científico.

No capítulo 2, a revisão bibliográfica traz referências marcantes sobre o fenômeno *roll waves* em escoamentos de fluidos newtonianos e não-newtonianos. Não obstante, destaca-se a falta de resultados experimentais no assunto.

No capítulo 3 apresenta-se a formulação matemática do problema estudado, abordando as equações governantes, as considerações iniciais empregadas na solução do problema e o desenvolvimento matemático para a obtenção do sistema que rege o escoamento de águas rasas com a reologia de Herschel Bulkley. Apresenta-se também uma análise de estabilidade linear, através da qual se identifica critérios para geração de *roll waves*. Na sequência, é apresentado um modelo matemático (1D) que fornece amplitude, comprimento e velocidade de propagação das *roll waves*.

No capítulo 4 são apresentados os esquemas numéricos e condições de contorno do problema, com o uso do FLUENT para efetuar as simulações de *roll waves* tanto em escoamentos de fluidos newtonianos, caso da glicerina pura (FIOROT, 2012), como para fluidos não-newtonianos, com propriedades reológicas da literatura (NG; MEI, 1994). É também apresentada a malha (geometria) utilizada em tais simulações.

No capítulo 5 são apresentados os estudos de casos de *roll waves* através de simulações numéricas utilizando o software FLUENT. E, ainda, apresenta-se uma análise crítica dos resultados encontrados com embasamento teórico. Os resultados obtidos com o programa correspondem às soluções numéricas das equações fundamentais da mecânica dos fluidos

No capítulo 6 são apresentadas as comparações entre os resultados numéricos via Fluent, experimentais (FIOROT, 2012) e dos resultados obtidos a partir do modelo matemático apresentado no Capítulo 3, para fluido newtoniano. Já para o caso não-newtoniano são apresentadas as comparações entre os modelos numérico e matemático. As análises críticas decorrentes das comparações.

Finalmente, o Capítulo 6 retoma as linhas desenvolvidas e argumentadas dentro da tese, com ênfase na discussão dos métodos utilizados para tratar o problema, a validade do modelo matemático proposto e a contribuição da pesquisa dentro do contexto que o tema vem sendo abordado.

Nas referências bibliográficas figuram as clássicas e aquelas mais recentes, sobre as quais essa tese está assentada.

---

## CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

---

Neste capítulo, serão abordados inicialmente alguns aspectos importantes sobre o fenômeno *roll waves* como, suas características e natureza de escoamentos em que estas ondas podem surgir. A seguir, serão apresentadas algumas referências marcantes dentro do contexto, as quais estão organizadas de acordo com a reologia do fluido estudado.

### 2.1 Roll waves

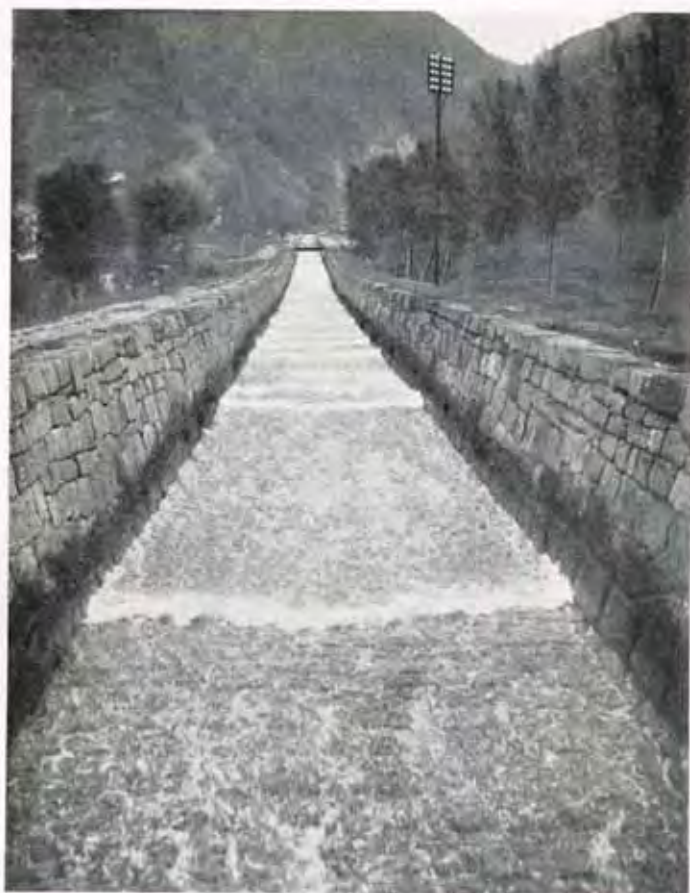
Dentro do contexto riscos naturais associados a movimentos de massa (IVERSON, 1997), o estudo de escoamentos com superfície livre de materiais lamosos é de grande relevância. Sabe-se que nesse tipo de escoamento podem ocorrer desde o transporte de sedimentos até a formação de ondas em corredores de encostas. As ocorrências dessas instabilidades (ondas) geralmente são provenientes de algum tipo de perturbação que se propaga como um trem de ondas com comprimentos bem definidos e formas constantes.

Essas *roll waves* ou *travelling waves* não são exclusivas de canais com superfície livre e catástrofes na natureza. Esse tipo de comportamento de sucessão de ondas é, por

consequente, de mesma topologia, pode aparecer em outras situações físicas, tais como em lavas vulcânicas (JULIAN, 1994), avalanches, correntes de gravidade (ALAVIAN, 1986), (CENEDESE et al., 2004), assim como em oscilações de pressão em uma artéria humana (PEDLEY, 1980; BROOK et al., 1999). Embora existam diversas aplicações, o foco desta pesquisa é a formação de tais instabilidades em escoamentos com superfície livre e de natureza viscoplástica.

As observações do fenômeno *roll waves* foram apresentadas primeiramente por Cornish (1910), que publicou diversas fotografias de ondas geradas no canal de Merligen, Suíça, que conduz a água advinda dos Alpes para o lago de Thun. Pelas fotos, foi possível perceber a natureza periódica das ondas formadas, longas e rasas, com cristas íngremes, quase verticais (Figura 5).

**Figura 5** - *Roll waves* em Grünbach, na cidade de Merligen, Suíça, visualizadas no sentido jusante (Cornish, 1910).



**Fonte:** Cornish (1910).

A partir desse relato, cientistas começaram a investir no estudo de *roll waves*, no plano teórico, numérico e experimental, na busca de identificar condições que favoreceriam a geração do fenômeno.

Para elucidar teoricamente as condições críticas de geração e propagação dessas ondas, faz-se necessário uma modelagem matemática adequada para o problema em questão. Por se tratar de ondas características de escoamentos de águas rasas, onde a profundidade do escoamento  $h$ , é muito menor do que o comprimento característico  $L$  ( $h \ll L$ ), as equações de Saint Venant (shallow water equation), tem sido amplamente utilizado como equações governantes, com imposições de hipóteses e condições que representem o escoamento a ser estudado.

No que diz respeito ao regime de escoamento, deve ser salientado que essas ondas podem aparecer tanto em escoamentos turbulentos, na qual, geralmente em fluidos newtonianos com baixa viscosidade, como, por exemplo, a água limpa, ou em escoamentos laminares, caso de fluidos hiperconcentrados (não-newtoniano) ou em fluidos newtonianos de elevada viscosidade, conforme testado experimentalmente por (LIU; GOLLUB, 1994; FIOROT, 2012).

Sabe-se que o fenômeno *roll wave* em escoamentos turbulentos, conforme estudado por (JEFFREYS, 1925; DRESSLER, 1949; BROCK, 1969; KRANENBURG, 1992; ZANUTTIGH; LAMBERTI, 2002); apresenta ondas de elevada velocidade de propagação. Fato que se deve à intensidade das forças inerciais serem maiores do que das forças viscosas. Já para os escoamentos laminares, onde são preponderantes a ação das forças viscosas do fluido as *roll waves* são formadas com baixos números de Reynolds, apresentam amplitudes mais elevadas e baixa velocidade de propagação, conforme mostrado por (BENJAMIN, 1957; CHEN, 1992; NG; MEI, 1994; LIU; MEI, 1994; MACIEL, 200; FIOROT, 2012). Para este tipo de escoamento, as equações governantes devem levar em consideração a variação da velocidade com a profundidade do escoamento devido aos efeitos viscosos e incorporar propriedades reológicas do fluido, para na sequência ser calculada a velocidade média, conforme apresentado no capítulo 3.

### 2.1.1 Roll waves em escoamentos de fluidos ideal e newtoniano

Conforme mencionado na seção 2.1, as propriedades físicas do fluido são de grande relevância para determinar o tipo de escoamento e as características cinemáticas e dinâmicas das ondas que podem aparecer.

Por se tratar de um sistema com evolução espaço-temporal, a interpretação pode ser feita como um sistema dinâmico e está sujeito a diversos tipos de abordagens teóricas.

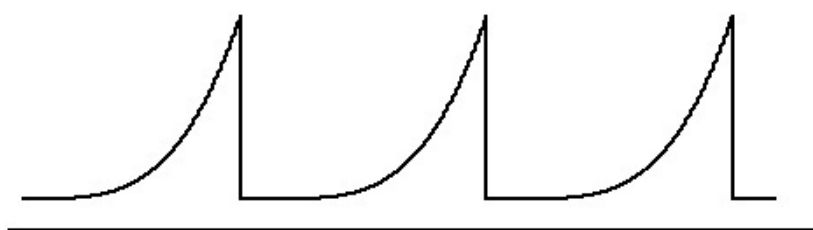
Um método que tem sido utilizado para identificar em que condições essas ondas aparecem, é a análise de estabilidade linear. Trata-se de uma análise feita com a imposição de uma perturbação de ordem infinitesimal no equacionamento. Utilizando desta técnica, Jeffreys (1925), a partir das equações de águas rasas, foi o primeiro a estabelecer um critério sobre a formação de *roll waves* em escoamentos turbulentos, considerando um fluido ideal (desprovido de viscosidade). Ele determinou o valor mínimo entre as forças inerciais e as forças gravitacionais para a ocorrência de instabilidades, ou seja, determinou o número de Froude crítico ( $Fr_c = 2$ ), donde, para número de Froude ( $Fr < Fr_c$ ), não haveria formação de *roll waves* e para ( $Fr > Fr_c$ ) o escoamento estaria em condição favorável ao aparecimento de instabilidades.

Brock (1969) verificou o critério estabelecido por Jeffreys experimentalmente, em um canal com 10 cm de largura e 18 m de comprimento, observando que não havia ocorrência de *roll waves* quando  $Fr < 2$ , mas nem sempre eram observadas no domínio favorável ( $Fr > 2$ ), ou seja, ele observou que esta é uma condição necessária, mas não suficiente.

Seguindo a mesma linha de Jeffreys (1925) e Dressler (1949) desenvolveu um trabalho que se tornou clássico dentro do contexto *roll waves*. Ele descreveu o fenômeno como sendo uma série de ondas de comprimentos bem definidos e interconectados por descontinuidades ou saltos.

A análise de Dressler é baseada na formulação de águas rasas para um fluido ideal, em que, na equação da quantidade de movimento é adicionado um modelo empírico para turbulência (C: coeficiente de Chézy). O equacionamento foi desenvolvido fazendo a suposição de *roll wave* permanente e periódica: Por se tratar de um sistema hiperbólico, a solução foi obtida com a imposição de condições de choque (Rankine Hugoniot), apresentando um perfil semelhante ao que se pode ver em escoamentos com geração de *roll waves*, conforme representado na Figura 6.

**Figura 6** - Solução de *roll waves* ajustadas por choques

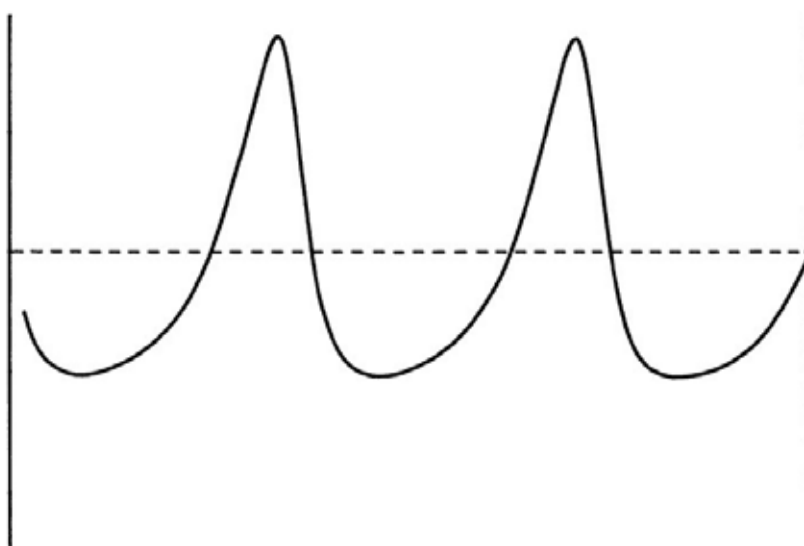


**Fonte:** Elaborada pela autora

O trabalho de Dressler é de grande contribuição dentro do plano teórico, pois o método introduzido ainda é muito utilizado por outros pesquisadores, tanto para escoamentos turbulentos quanto laminares, o que contribui muito para a fundamentação teórica deste trabalho, que apresenta como solução do modelo matemático desenvolvido ondas ajustadas por choques.

Estendendo o trabalho de Dressler, Needham e Merkin (1987) introduzem efeitos difusivos no equacionamento para regularizar os choques e obtêm soluções contínuas, que permitem observar o comprimento da onda gerada, sem alterar as condições de estabilidade do problema, conforme mostra a Figura 7.

**Figura 7** – Solução de *roll waves* com introdução de efeito difusivo com  $Re = 10$ .



**Fonte:** Needham e Merkin (1987).

As mesmas condições estabelecidas por Jeffreys e Dressler, também foram constatadas numericamente nos trabalhos de Kranenburg (1992) e Maciel et al. (1997) que verificaram também que quando impunham perturbações de diversos comprimentos de onda no escoamento, aquela de maior comprimento prevaleceria na *roll wave* gerada.

Um trabalho mais recente, foi o de Zanuttigh e Lamberti, (2002), que na tentativa de reproduzir numericamente os experimentos de Brock (1969) fizeram simulações baseados nas equações de águas rasas, utilizando a técnica de diferenças finitas para discretização das equações. Eles observaram a evolução de *roll waves*, por causa da imposição de uma perturbação senoidal. Este é um método que tem sido utilizado para observar a formação destas ondas, que quando em condições favoráveis, se amplificam até atingir a estabilidade,

com forma e velocidade de propagação constante, caso contrário, as mesmas tendem a se amortecerem.

Outra particularidade desse tipo de sucessão de ondas, é que as mesmas são de natureza convectiva, conforme demonstrado por Di Cristo e Vacca (2005), ou seja, existe uma direção preferencial de propagação, o que não ocorre com ondas de natureza absoluta, que se espalham por todo o domínio. Eles interpretaram a formação de *roll waves* a partir das equações de águas rasas, realizando uma análise de estabilidade temporal e espacial. As análises realizadas têm como parâmetro de controle o número de Froude e o comprimento adimensional.

Noble (2003) identificou condições de existência e unicidade das *roll waves*, através de métodos de topologia das variedades invariantes e dos teoremas de Fenichel. No entanto, não deixou pistas explícitas de como utilizar o equacionamento desenvolvido para uma aplicação de engenharia.

O trabalho de Balmforth e Mandre (2004) apresenta resultados importantes para aplicação de engenharia, pois eles exploraram o efeito topográfico do fundo do canal para estudar a dinâmica do escoamento. Utilizando as equações de águas rasas para escoamentos turbulentos, eles introduziram no equacionamento o efeito do fundo do canal e concluíram que a amplitude da topografia de fundo tem efeito sobre a estabilização ou desestabilização de *roll waves*.

Em se tratando dos escoamentos laminares, mas ainda de reologia newtoniana, a técnica de análise de estabilidade linear também é utilizada para identificar condições favoráveis para a formação de *roll waves*. Ishihara et al. (1954) mostraram que as instabilidades tendem a aparecer quando o número de Froude é superior a  $1/\sqrt{3}$  ou que o número de Reynolds seja superior a  $\cotg(\theta)$ , sendo que  $\theta$  é a inclinação do canal.

Benjamin (1957) e Yih (1963) determinaram um critério que identifica a formação destas instabilidades, fazendo uso da técnica de análise de estabilidade linear, para as equações de águas rasas, com imposição de perturbações senoidais e verificam que o número de Froude deve ser maior que 0,5 para a ocorrência de ondas, ou seja, para escoamentos laminares, o critério de geração é estabelecido para um número de Froude menor do que nos escoamentos turbulentos, isso se deve ao fato de que nos escoamentos laminares a velocidade do escoamento é menor.

Gao et al. (2003) observaram a formação de instabilidades (*roll waves*) em filmes finos, de solução aquosa de glicerina, através de simulações diretas das equações de Navier Stokes, utilizando o método Volume of Fluid (VOF). Este é um método que pode modelar

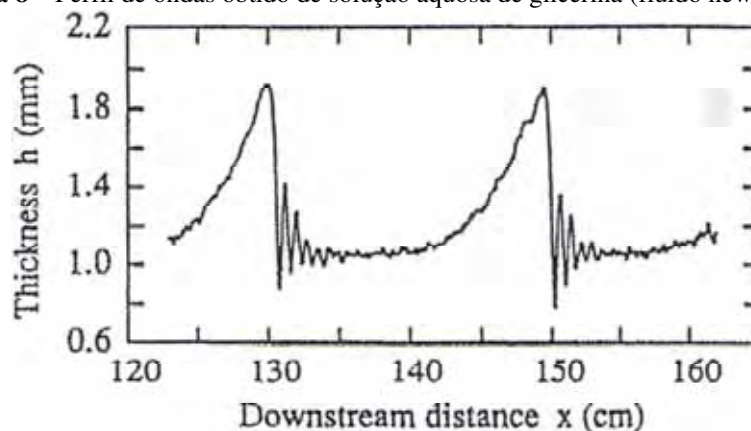
dois ou mais fluidos imiscíveis utilizando um conjunto único de equações de conservação da massa e quantidade de movimento.

Nestas simulações, Gao et al. (2003) utilizaram como parâmetro de entrada uma pequena perturbação senoidal e observaram um aumento na amplitude, atingindo um estado de estabilidade, com propagação de ondas de formas e velocidades constantes. Além disso, verificaram que os parâmetros que afetam as características das ondas são os números de Reynolds ( $Re$ ), a frequência de perturbação ( $f$ ) e o número de Weber ( $We$ ), que relaciona a tensão superficial com a força inercial do fluido que, geralmente, é utilizado em escoamentos de filmes muito finos, com interface entre dois fluidos diferentes.

Apesar de haver nessas duas últimas décadas avanços significativos em nível teórico e numérico do assunto, as observações experimentais de *roll waves* são escassas na literatura, por ser um trabalho delicado e de difícil realização, o que dificulta a verificação dos critérios estabelecidos teoricamente.

No âmbito experimental, o trabalho de Liu e Gollub (1994) é bastante representativo. Os experimentos foram realizados em filmes finos de solução aquosa de glicerina, com viscosidade aproximadamente cinco vezes maior do que a da água. Eles utilizaram sistemas óticos para medição de ondas, assim como feito por Kapitza (1948) para a mesma reologia de fluido. O aparato experimental era constituído de uma rampa, livre de perturbações externas, com o fluido em recirculação, à qual foi acoplado um sistema de aquisição computadorizado por fotoluminescência para a obtenção de medidas de amplitudes, conforme apresentado na Figura 8.

**Figura 8** – Perfil de ondas obtido de solução aquosa de glicerina (fluido newtoniano)



Fonte: Liu e Gollub (1994).

Tentando preencher a lacuna quanto às observações experimentais de *roll waves*, recentemente, foi desenvolvido o trabalho de Fiorot (2012) dentro da equipe RMVP. Neste trabalho, observou-se a formação de *roll waves* para escoamentos laminares de um fluido newtoniano altamente viscoso (glicerina pura). Verificou-se ainda que sua propagação ocorre como um trem de ondas, com formas constantes.

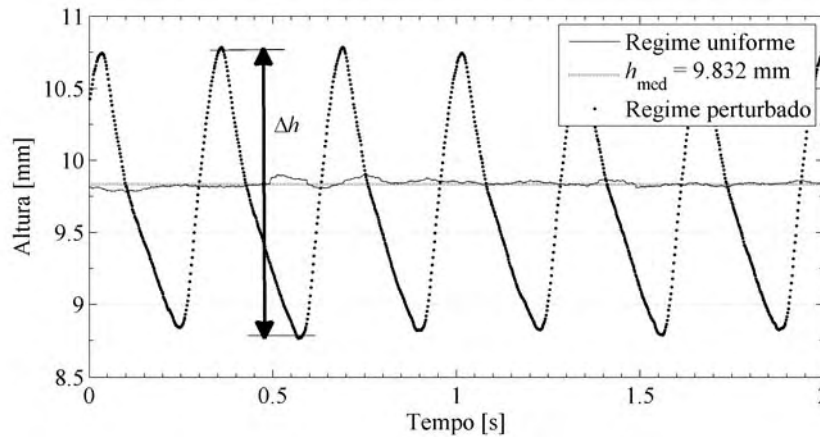
Estas ondas foram observadas com a imposição de uma fonte de perturbação que foi dimensionada para baixas frequências controladas a partir de um gerador de funções. Vale ressaltar que tais ondas se amplificavam somente quando o canal estava em condições favoráveis para geração das mesmas, ou seja, não ocorria para qualquer vazão e inclinação de canal. Além disso, observou-se a importância da frequência de perturbação imposta, que muitas vezes, mesmo em condições favoráveis tais ondas não se propagavam, conforme verificado numericamente por Maciel (2001). Na Figura 9, mostra-se a formação de *roll waves*, para uma vazão de 0,75 l/s, com o canal inclinado em 8 graus e uma perturbação com frequência de 3 Hz.

**Figura 9** – Visualização de *roll waves* em escoamento de fluido newtoniano (glicerina pura)



**Fonte:** Fiorot (2012).

O sistema de medição para amplitude destas ondas era composto por fotodetectores alinhados com um díodo-laser, a aquisição dos dados foi feita via PC que estava acoplado diretamente à saída de um osciloscópio digital. Assim, pôde-se medir o escoamento em regime uniforme e também com geração de ondas, conforme apresentado na Figura 10.

**Figura 10** – (a) Resultados para um ensaio com glicerina pura, vazão de 0,75 l/s e Amplitude  $\Delta h \approx 2$  mm.

Fonte: Fiorot (2012).

O modelo físico desenvolvido por Fiorot (2012) se mostrou eficaz para geração, controle e propagação de *roll waves* em escoamentos laminares de fluido newtoniano (glicerina pura). Tais resultados serão apresentados com o objetivo de realizar uma análise comparativa com os modelos matemático e numérico que vêm sendo desenvolvidos e explorados no âmbito desta tese.

### 2.1.2 Roll waves em escoamentos de fluidos não-newtonianos

Os escoamentos de fluidos não-newtonianos têm se mostrado complexos para a modelagem matemática e numérica. Isso se deve à influência das propriedades reológicas do fluido. Além disso, a escolha de um modelo reológico para avaliar o comportamento de fluidos hiperconcentrados também se torna uma incógnita no estudo.

Sabe-se que nos escoamentos não-newtonianos, as *roll waves* se propagam com baixas velocidades, porém apresentam grandes amplitudes. Alguns pesquisadores tentam identificar as condições de geração e propagação destas ondas, utilizando a técnica de análise de estabilidade linear, mas, neste caso, as propriedades reológicas do fluido estão inseridas na análise, o que torna mais complexo identificar tais condições e, principalmente, quais parâmetros estão influenciando nas características das ondas.

Usando a mesma ideia de Dressler, Ng e Mei (1994) construíram um modelo matemático partindo da formulação de águas rasas para escoamento laminar, usando uma proposta reológica do tipo power law. Uma análise de estabilidade linear do escoamento uniforme foi realizada e um critério de formação de instabilidades foi estabelecido. Eles verificaram que o domínio propício para a geração de tais ondas é quando o número de Froude é maior do que  $n/\sqrt{(2n+1)}$ , sendo que  $n$  corresponde ao índice de escoamento do

fluido, índice característico do modelo reológico do tipo *Power law*. A solução obtida para o perfil de ondas também depende da imposição das condições de choque, assim como no modelo matemático desenvolvido por Dressler (1949).

Embora o modelo reológico do tipo *Power law* insira efeito não-newtoniano, não é o melhor para representar um material lamoso como as misturas de água e argila em elevadas concentrações, pois esta proposta reológica não apresenta o efeito da tensão crítica de escoamento, que é um parâmetro crucial na dinâmica do escoamento e, por conseguinte, no perfil de velocidade do fluido.

Dentro de uma proposta reológica binghamiana, na qual o efeito de tensão crítica está inserido no modelo, Maciel (2001), a partir das equações de águas rasas introduzindo efeitos difusivos no equacionamento para regularizar os choques, obtém soluções contínuas para o perfil de onda, assim como Needham e Merkin (1987) para escoamentos de fluido newtoniano. Maciel (2001) determinou as condições de existência e estabilidade das *roll waves*, conforme as Equações 1 e 2:

$$\frac{1}{Fr^2} \left( \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{Fr^2} + \frac{C^* \left(1 - \frac{1}{Fr^2}\right)}{U^2}}}{-\frac{1}{Fr^2} + \sqrt{\frac{1}{Fr^2} + \frac{C^* \left(1 - \frac{1}{Fr^2}\right)}{U^2}}} \right) < 1 \quad (1)$$

$$1 < U < \frac{3 - 2C^*}{2(1 - C^*)} \quad (2)$$

em que  $Fr$  representa o número de Froude,  $C^*$  o parâmetro adimensional em função da tensão crítica do fluido e  $U$  a velocidade de propagação da *roll wave*.

Diversos aspectos julgados importantes na geração e propagação de *roll waves* foram verificados no trabalho de Maciel (2001). Em análises realizadas em relação à frequência de perturbação, foi concluído que o período da *roll wave* é definido pelo período da perturbação imposta e que um aumento na magnitude de perturbação não altera a sua amplitude, mas causa uma antecipação na geração da *roll wave*.

Por fim, ele analisou a influência dos adimensionais de interesse ( $Fr, C^*$ ), verificando que quanto maior o número de Froude maior seria amplitude da onda, a mesma observação foi feita em relação ao  $C^*$ .

Seguindo esta linha de fluidos não-newtonianos (hiperconcentrados), trabalhos experimentais têm sido realizados, na busca de identificar o comportamento reológico destes fluidos.

Coussot (1994) realizou um trabalho teórico experimental de suma importância que trata de lavas torrenciais. Utilizando um fluido hiperconcentrado (água + argila caulínica), ele provou, através de experimentos, que o modelo reológico do tipo Herschel Bulkley é o mais adequado para esse tipo de material, porque utiliza 3 parâmetros para representar o comportamento dos fluidos: tensão de escoamento ( $\tau_c$ ), índice do escoamento ( $n$ ), e índice de consistência do fluido ( $k_n$ ).

Na vertente teórica, Coussot mostra que existe um número de Froude mínimo ( $Fr_{min}$ ) dependente das características do fluido, para a ocorrência de instabilidades (*roll waves*) em escoamentos com superfície livre. Este critério foi validado experimentalmente, quando ele observou a formação de ondas em canal, cujo domínio do número de Froude era favorável ( $Fr > Fr_{min}$ ). Ele pôde observar também que abaixo do número de Froude mínimo não ocorria o aparecimento de tais instabilidades. Esta é uma conclusão importante, porém, em relação às características das ondas, a análise é qualitativa, pois as propriedades destas ondas não foram aferidas.

No entanto, com base em estudos dos últimos anos, tendo a experimentação física como base de decisão, verifica-se que essas suspensões argilosas e hiperconcentradas obedecem, de uma maneira geral, ao modelo reológico não-linear viscoplástico do tipo Herschel-Bulkley, (PIAU, 1996; HUANG; GARCIA, 1996) para as quais uma proposta Binghamiana torna-se um caso particular, não obstante às vezes interessante e conveniente em certas aplicações da engenharia (MACIEL, 2001).

Diante dos resultados apresentados na literatura pode-se perceber a importância da caracterização do fluido para identificar as características do escoamento e das instabilidades que podem surgir. Em trabalhos mais recentes desenvolvidos dentro do grupo RMVP, têm sido desenvolvidas pesquisas que visam a caracterização de fluidos hiperconcentrados. Maciel et al. (2009) mostraram que o comportamento de misturas argilosas se encaixam ao modelo de Herschel Bulkley, os testes foram realizados para diferentes concentrações em volume ( $C_v$ ) de argila caulínica e observaram que a mistura poderia ser caracterizada pela reologia de Herschel Bulkley quando  $5\% < C_v < 25\%$ , já para concentrações de até 5%, o fluido ainda apresenta propriedades newtonianas. Maciel et al. (2009) corroboram as observações de Coussot e estenderam o seu domínio de aplicação.

Seguindo esta linha, outros trabalhos do grupo RMVP têm sido desenvolvidos com a utilização do gel de carbopol 940 (MINUSSI, 2007; LEITE, 2009), para a utilização do mesmo como fluido representativo de lamas, uma vez que apresentam as mesmas características reológicas, e de propriedades físico químicas bem definidas.

Segundo análises reológicas efetuadas por Leite (2009), a partir de técnicas de reometria, o Carbopol 940, apresentou características bem definidas para um fluido do tipo Herschel-Bulkley, com valores próximos aos encontrados por (LACHAMP, 2003).

Minussi e Maciel (2012), em um trabalho numérico e experimental sobre ruptura de barragem para fluido não-newtoniano, utilizaram uma solução aquosa de carbopol 940, e identificaram experimentalmente as propriedades do fluido, tais como, massa específica, tensão crítica índice de escoamento do fluido e índice de consistência, caracterizando o mesmo como do tipo Herschel-Bulkley. Os experimentos foram realizados para diversas concentrações de Carbopol 940 e concluíram que para o estudo de ruptura de barragem, as melhores concentrações eram da ordem de 0,13%, podendo verificar também, que em quase todos os testes, grande parte do fluido permaneceu em repouso.

Assim exposto, fica claro que fluidos não-newtonianos, na maioria das vezes, podem apresentar uma tensão crítica de escoamento. Sabe-se também que as *roll waves* podem surgir em escoamentos com fluidos desta natureza, daí surge a necessidade da escolha de um modelo reológico para tratar o problema. Neste trabalho, justifica-se a utilização da reologia de Herschel Bulkley, já que pela literatura comprova-se que o modelo é um representante mais generalizado para fluidos hiperconcentrados e, ainda, permite tomar como particularidades propostas reológicas mais simplificadas (Bingham, power law e Newtoniana).

---

## CAPÍTULO 3    MODELAGEM MATEMÁTICA

---

Neste capítulo apresenta-se a formulação matemática do problema estudado, abordando as equações governantes, as considerações iniciais empregadas na solução do problema e o desenvolvimento matemático para a obtenção do sistema que rege o escoamento laminar de fluido não-newtoniano. Em seguida uma análise de estabilidade linear é realizada, para a obtenção de condições necessárias para a geração de *roll waves*. Estabelecidas tais condições, um modelo matemático é determinado a partir da teoria de *roll wave* permanente, que se mostrou capaz de fornecer, amplitude, comprimento e velocidade de propagação das ondas.

### 3.1 Equações Motrizes e Hipóteses

Os modelos matemáticos que representam a dinâmica de um escoamento são baseados nas equações da continuidade e da quantidade de movimento (equações de Cauchy). A forma como tais equações se apresentam, dependem das simplificações feitas. Neste item serão

apresentadas as equações utilizadas, as hipóteses e o processo de modelagem matemática para o escoamento de águas rasas (equações tipo Saint Venant).

Primeiramente são apresentadas as equações que representam o movimento do fluido de uma forma global, ou seja, sem a imposição de hipóteses.

- Equação da conservação da massa em forma vetorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (3)$$

- Equação da quantidade de movimento advinda da equação de Cauchy (Aris, 1962):

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \bar{\bar{T}} \quad (4)$$

sendo que  $\bar{\bar{T}}$  é o tensor dado por:

$$\bar{\bar{T}} = -p\bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\tau}} \quad (5)$$

em que:

$\vec{u}$ : vetor velocidade

$t$ : tempo

$\rho$ : massa específica do fluido

$\vec{f}$ : força gravitacional

$p$ : pressão

$\bar{\bar{\delta}}$ : matriz identidade

$\bar{\bar{\tau}}$ : tensor viscoso ou de cisalhamento

É na equação 3 que se introduz a descrição do comportamento do fluido através de um modelo reológico, conforme descrito no Anexo A. Nesta tese será utilizado o modelo de Herschel Bulkley, dado pela Equação 6:

$$\bar{\bar{\tau}} = \tau_c \frac{\bar{\bar{\dot{\gamma}}}}{\sqrt{-\dot{\gamma}_{II}}} + \frac{2^n K_n}{(\sqrt{-\dot{\gamma}_{II}})^{1-n}} \bar{\bar{\dot{\gamma}}} \quad (6)$$

Sendo que  $\tau_c$  é a tensão crítica de cisalhamento, que corresponde à tensão mínima necessária para se iniciar o movimento do fluido;  $n$  o índice de escoamento do fluido, que representa a não-linearidade da tensão com a deformação;  $K_n$  o índice de consistência do fluido, que indica a relação de proporcionalidade com a deformação e  $\dot{\gamma}_{II}$  é o segundo invariante do tensor de tensões  $\bar{\bar{\gamma}}$ , dado pela Equação 7:

$$\bar{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) \quad (7)$$

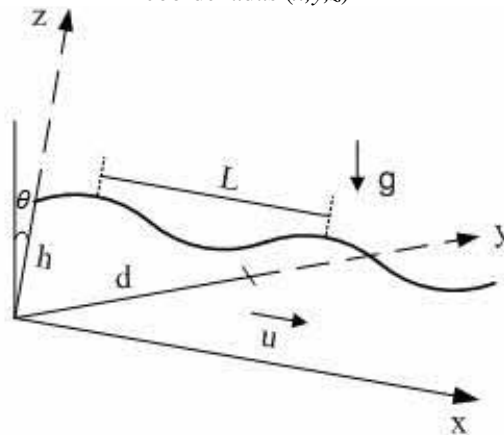
A partir das Equações 3 e 4, hipóteses serão impostas com o intuito de modelar matematicamente escoamentos laminares de águas rasas de fluido do tipo Herschel Bulkley.

### 3.2 Transformação das Equações para a obtenção do Modelo tipo Saint Venant

Muitos problemas aplicados à mecânica dos fluidos são resolvidos numericamente, ou a partir da construção de um modelo matemático que descreve o fenômeno físico.

A geração e propagação de *roll waves* geralmente ocorrem em escoamentos de águas rasas e em canais inclinados; além do tipo de fluido, a geometria do canal e as forças que regem o escoamento, devem influenciar na evolução destas ondas. Neste sentido, em busca de uma solução particular das Equações 3 e 4, que possa representar o fenômeno *roll waves*, será utilizada a teoria de escoamentos em águas rasas. A Figura 11 mostra a geometria do problema em águas rasas.

**Figura 11**– Representação do escoamento em águas rasas a partir de um sistema de eixo  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $(x,y,z)$



**Fonte:** Elaborada pela própria autora

Para efetuar a modelagem matemática, algumas hipóteses são consideradas, tais como:

- trata-se de escoamento de fluido incompressível ( $\rho$  é constante), ou seja, a divergência da velocidade é nula ( $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ );
- escoamento em regime laminar, ou seja, as partículas movem-se de forma ordenadas, em camadas, apresentando um perfil de velocidade parabólico (se o índice de escoamento  $n = 1$ );
- o comprimento característico ( $L$ ) deve ser maior do que a profundidade do escoamento ( $h$ ). Esta hipótese mostra que somente ondas longas, isto é, ondas onde o comprimento é maior que a altura são levadas em consideração;
- a largura do canal ( $d$ ) é muito maior do que a altura da coluna ( $h$ ) do fluido, assim, pode-se simplificar o cálculo das forças de resistência, desprezando a contribuição de paredes laterais, considerando apenas a tensão do fluido com o fundo do canal;
- o escoamento se dá primordialmente pela ação direta da gravidade através da componente do peso do fluido na direção do declive, ou seja, o escoamento é caracterizado por um único sentido de movimento.

Levando-se em consideração as hipóteses acima, conforme demonstrado no Apêndice A, o modelo matemático é estabelecido:

- Conservação da massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

- Conservação da quantidade de movimento:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}) \quad (9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - \rho g \cos \theta \quad (10)$$

sendo:

$$\tau_{xz} = \tau_c + K_n \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^n \quad (11)$$

$(u, 0, w)$  : vetor velocidade;

$u$ : velocidade longitudinal;

$w$ : velocidade vertical;

$P$ : pressão;

$\rho$ : massa específica do fluido;

$g$ : aceleração da gravidade;

$\theta$ : inclinação do canal;

$t$ : tempo.

Condições de contorno são dadas por:

- Condição cinemática na superfície livre, o que corresponde a igualdade entre a velocidade da superfície livre e de uma partícula a ela pertencente (Equação 12).

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{em } z = h(x, t) \quad (12)$$

- Condição de impermeabilidade no fundo do canal, o que corresponde a componente da velocidade ser nula na parede:

$$u = w = 0 \quad \text{em } z = 0 \quad (13)$$

- Tensão na superfície livre:

$$P = 0, \quad \tau_{xz} = 0 \quad \text{em } z = h(x, t) \quad (14)$$

Integrando a Equação 10 e usando a condição de contorno dada pela Equação 14 tem-se uma distribuição de pressão hidrostática:

$$P = \rho g(h - z)\cos\theta \quad (15)$$

Sabendo que se trata de escoamento laminar e estabelecidas as condições de contorno, busca-se pelo perfil de velocidade do escoamento em função das propriedades reológicas do fluido.

### 3.2.1 Determinação do perfil de velocidade do escoamento

Os fluidos hiperconcentrados podem apresentar uma resistência à deformação, ou seja, resiste a pequenas tensões (tensão crítica) antes de escoar. Assim, identificam-se duas regiões para o perfil de velocidade: um perfil típico da região onde a tensão de cisalhamento ocorre (próximo do fundo do canal) e um perfil de velocidade constante na região não-cisalhada (*plug flow*).

Tomando-se como hipóteses, que o escoamento seja permanente, uniforme e laminar, o perfil de velocidades pode ser calculado a partir do equilíbrio das tensões. Considerando que o atrito no fundo do canal é dado por:

$$\tau = \rho g \sin\theta (h_0 - z) \quad (16)$$

Sendo que o subíndice ( )<sub>0</sub> indica a condição de escoamento uniforme.

A expressão para o equilíbrio de forças considerando o modelo reológico de Herschel Bulkley fica da seguinte forma:

$$\rho g \sin\theta (h_0 - z) = \tau_c + K_n \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \quad (17)$$

Resolvendo a Equação 17 obtém-se o perfil de velocidade para o escoamento, as manipulações algébricas são apresentadas no Apêndice B. Conforme já mencionado, tem-se o perfil em duas regiões do escoamento: região cisalhada e não-cisalhada.

– **Região Cisalhada** ( $0 \leq z \leq z_0$ ):

$$u(z) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \sin\theta}{K_n} z_0^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (18)$$

– **Região Não-Cisalhada** ( $z_0 < z \leq h_0$ ):

$$u(z) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_n} z_0^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (19)$$

Sendo:  $z_0$  a espessura da região cisalhada (equação 19),  $n$  o índice de escoamento do fluido e  $K_n$  o índice de consistência do fluido.

$$z_0 = h_0 - \frac{\tau_c}{\rho g \operatorname{sen} \theta} \quad (20)$$

Com o objetivo de verificar numericamente o perfil de velocidade determinado, são considerados os seguintes grupos adimensionais (Equação 21):

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z}{z_0} \\ V &= \frac{u(z)}{u(z_0)} \end{aligned} \quad (21)$$

Substituindo as variáveis adimensionais nas Equações 18 e 19 tem-se:

$$U(Z) = 1 - (1 - Z)^{\frac{(n+1)}{n}}, \quad Z \leq 1 \quad (22)$$

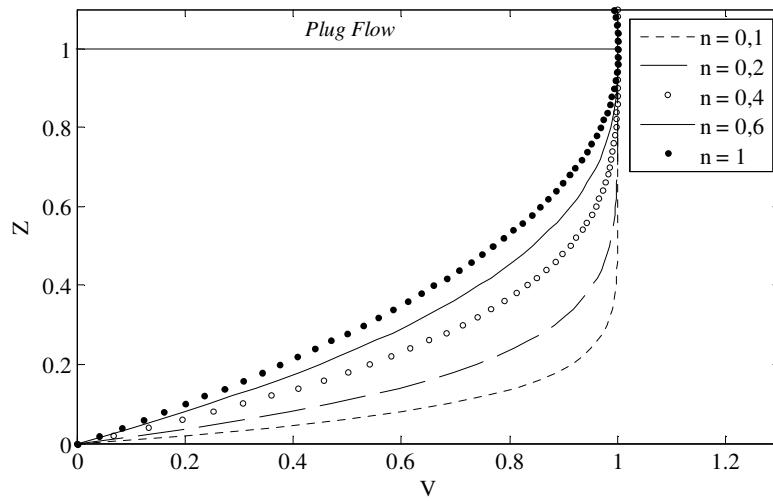
$$U(Z) = 1, \quad 1 < Z \leq \frac{1}{1 - C^*} \quad (23)$$

sendo:

$$C^* = \frac{\tau_c}{\rho g h_0 \operatorname{sen}(\theta)} \quad (24)$$

A Figura 12 mostra a distribuição do perfil de velocidades para diferentes valores de  $n$  (índice de escoamento do fluido).

**Figura 12-** Perfil de velocidades para um fluido tipo Herschel Bulkley



Fonte: Elaborada pela própria autora

Através da Figura 12 pode-se observar que na região cisalhada (próxima ao fundo do canal), o perfil de velocidade obedece uma lei exponencial e na zona de *plug*, ou seja, na região não-cisalhada, o perfil de velocidade é constante, conforme mostrado por (HUANG; GARCIA, 1998; MACIEL et al., 2013) .

Cabe salientar que no capítulo 5 serão confrontados resultados de velocidade do escoamento das simulações numéricas através do FLUENT com os resultados do perfil de velocidade obtido com o modelo matemático (Equações 18 e 19).

### 3.2.2 Velocidade média e taxa de deformação do escoamento

Esse item tem como objetivo determinar a velocidade média em relação à profundidade do escoamento, no intervalo  $0 \leq z \leq h$  e a taxa de deformação. Os cálculos são apresentados no Apêndice B.

Seja:  $\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dz$ , então no intervalo  $0 \leq z \leq h$ , tem-se:

$$\bar{u} = \frac{1}{h_0} \left[ \int_0^{z_0} u(z) dz + \int_{z_0}^{h_0} u(z) dz \right] \Rightarrow \tag{25}$$

$$\bar{u} = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \text{sen} \theta}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{h_0 \rho g \text{sen} \theta - \tau_c}{\rho g \text{sen} \theta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[ 1 - \frac{n}{2n+1} \left( \frac{h_0 \rho g \text{sen} \theta - \tau_c}{h \rho g \text{sen} \theta} \right) \right] \tag{26}$$

A partir da Equação 26, pode-se tomar como particularidade a velocidade média para fluidos de outras reologias, tais como, do tipo *Power Law* e newtoniano.

Para um fluido do tipo *Power law* ( $\tau_c = 0$ ), a velocidade média é a mesma determinada por Ng e Mei (1994), conforme a Equação 27.

$$\bar{u} = \frac{n}{2n + 1} \left( \frac{\rho g \sin \theta}{\mu_n} \right)^{\frac{1}{n}} (h_0)^{\frac{n+1}{n}} \quad (27)$$

Para fluido newtoniano ( $n = 1, \tau_c = 0$ ), a velocidade média é mesma encontrada na literatura clássica de escoamentos laminares, conforme Equação 28:

$$\bar{u} = \frac{1}{3} \left( \frac{\rho g \sin \theta}{\mu_n} \right) h_0^2 \quad (28)$$

A tensão de cisalhamento é determinada a partir da derivada da velocidade em relação à  $z$  (Equações 18 e 19). Como a velocidade na zona não cisalhada (*plug flow*) é constante, basta calcular a derivada da velocidade na região cisalhada.

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{z_0} \left( 1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\rho g \sin \theta}{K_n} z_0^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (29)$$

Através da Equação 29, pode-se observar que a taxa de deformação do fluido é nula em  $z = z_0$ , o que geralmente ocorre na superfície livre (região não-cisalhada) de escoamentos que só se deformam com aplicação de uma tensão mínima de cisalhamento, tais como, lamas e detritos, concreto fresco e géis. Salienta-se que os resultados da Equação 29 são confrontados com resultados da simulação via FLUENT, no Capítulo 5.

Após a determinação da velocidade média e da taxa de deformação do escoamento, a tensão de cisalhamento pode ser expressa em função da velocidade média e das propriedades reológicas do fluido, conforme apresentado na Equação 30.

$$\tau_p = \tau_c + K_n \left\{ \frac{\bar{u}(\rho g \sin \theta)^2 (n + 1)(2n + 1)h_0}{(h\rho g \sin \theta - \tau_c)[n(n + 1)h\rho g \sin \theta + n^2\tau_c]} \right\}^n \quad (30)$$

A tensão de cisalhamento determinada neste trabalho está em consonância com a encontrada por Huang e Garcia (1998) ao estudarem escoamentos de lama, aplicando o modelo reológico de *Herschel-Bulkley*.

Deve-se ressaltar que, o fato dos casos de particularidades estarem em consonância com outros trabalhos, vem confirmar a técnica utilizada para o cálculo da velocidade média e da taxa de deformação, tanto para fluido newtoniano quanto para fluidos não-newtonianos (*Power Law e Herschel Bulkley*).

Com as propriedades do escoamento (velocidade média, taxa de deformação e tensão de cisalhamento) determinadas, o próximo passo é determinar um sistema de equações de águas rasas (tipo Saint Venant), levando-se em consideração as propriedades reológicas do fluido de Herschel Bulkley.

### 3.3 Processo de Promediação e Adimensionalização das Equações

O modelo matemático que representa esse tipo de escoamento é obtido através da integração na vertical das Equações 8 e , aplicando as condições de contorno representadas pelas equações (5, 6 e 7), determina-se um sistema de equações para os escoamentos de águas rasas (tipo Saint Venant).

Para efetuar a integração, utiliza-se a regra de Leibniz, dada pela Equação 31:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} Q(x, y) dy &= \\ &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) dy + Q(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} - Q(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (31)$$

Feita a integração (Apêndice B) as equações de conservação da massa e quantidade de movimento são representadas pelas Equações 32 e 33.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial x} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\bar{u}^2h)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -g\cos\theta \frac{h^2}{2} \right) + g\hbar\text{sen}\theta + \frac{1}{\rho}(-\tau_p) \quad (33)$$

sendo que:  $\tau_p$  é a tensão de cisalhamento do fluido com o fundo do canal (Equação 30) e  $\alpha$  é o coeficiente de distribuição de velocidade dado pela Equação 34:

$$\alpha = \frac{1}{\bar{u}^2 h} \int_0^h u^2 dz = \left( \frac{2n+1}{3n+2} \right) \frac{[2(n+1)^2 h \rho g \text{sen}\theta + \tau_c n(4n+3)]}{\left[ (n+1)^2 h \rho \text{sen}\theta + 2(n+1)n\tau_c + \frac{n^2 \tau_c^2}{h \rho g \text{sen}\theta} \right]} \quad (34)$$

O sistema de equações para escoamentos de águas rasas foi determinado em variáveis dimensionais, o que facilita a comparação com os resultados experimentais obtidos por (FIOROT, 2012), bem como, com os resultados numéricos obtidos via Fluent (Capítulo 5). No entanto, para a realização de análises matemáticas é usual que se faça a adimensionalização do sistema em variáveis de interesse e que represente bem o problema estudado. Para o estudo do fenômeno *roll waves*, as equações (30 e 31) promediadas na vertical são reescritas em variáveis adimensionais, conforme apresentado no Apêndice B. As escalas adotadas são dadas por:

- Escala de comprimento:  $x = Lx^*$  e  $(h, z) = h_0(h^*, z^*)$ ,
- Escala de velocidade:  $\bar{u} = \bar{u}_0 \bar{u}^*$ ,
- Escala de tempo:  $t = (L/\bar{u}_0)t^*$ ,

Lembrando que:

$$\text{Número de Froude: } Fr = \bar{u} / \sqrt{(gh_0 \cos\theta)}$$

Sendo:  $L$  o comprimento de onda dado por:  $L = (\bar{u}_0^2) / g \text{sen}(\theta)$  e  $C^* = \tau_c / (h_0 \rho g \text{sen}\theta)$

Cabe destacar que o subíndice ( )<sub>0</sub> indica condições de escoamento uniforme e o asterisco ( )<sup>\*</sup> as variáveis adimensionais.

Introduzindo as variáveis adimensionais nas Equações 32, 33 e 34 e omitindo os asteriscos ( )<sup>\*</sup>, tem-se o sistema de equações para o escoamento de fluido hiperconcentrado, em canal inclinado, a partir da proposta reológica de Herschel-Bulkley.

– Equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (35)$$

– Equação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\bar{u}^2h)}{\partial x} + \frac{1}{2Fr^2} \frac{\partial h^2}{\partial x} = \\ = h - C^* - (1 - C^*) \left[ \bar{u}h \frac{(1 - C^*)(n + 1 + nC^*)}{(h - C^*)((n + 1)h + nC^*)} \right]^n \end{aligned} \quad (36)$$

A Equação 36, pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \alpha \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{h}{Fr^2} \frac{\partial h}{\partial x} + (1 - \alpha) \bar{u} \frac{\partial h}{\partial t} = \\ = h - C^* - (1 - C^*) \left[ \bar{u}h \frac{(1 - C^*)(n + 1 + nC^*)}{(h - C^*)((n + 1)h + nC^*)} \right]^n \end{aligned} \quad (37)$$

sendo:

$$\alpha = \frac{(2n + 1)}{(3n + 2)} \frac{[2(n + 1)^2h + C^*(4n + 3)n]}{[(n + 1)^2h + 2(n + 1)nC^* + n^2(C^*)^2/h]} \quad (38)$$

Com o modelo matemático concebido em variáveis adimensionais, objetiva-se determinar as condições para formação de instabilidades. Para isto, as análises matemáticas realizadas, no âmbito, desta tese são feitas a partir do sistema de equações da conservação de massa e quantidade de movimento para escoamento de águas rasas em sua forma adimensional, tomando como particularidade as reologias do tipo *Power law* e newtoniana, para efeito de comparações com a literatura.

Contudo, a primeira análise realizada é a de estabilidade linear, a qual se procura estabelecer critérios de geração de ondas em escoamentos laminares.

### 3.4 Análise de Estabilidade Linear

A não linearidade das equações apresentadas na seção 3.3 impossibilita a obtenção de uma solução algébrica geral. No entanto, como se procura por ondas com características periódicas que ocorrem na superfície, é lícito procurar inicialmente soluções periódicas que verifiquem as Equações 35 e 37.

A técnica utilizada nesta tese é a análise de estabilidade linear, por permitir a obtenção de informações importantes em relação à geração de ondas, tais como, a taxa de crescimento das instabilidades, a velocidade de propagação em função do número de ondas e critérios para geração das mesmas.

Para estabelecer a análise de estabilidade linear, uma perturbação infinitesimal sobre a lâmina e a velocidade é adicionada às equações da conservação da massa e quantidade de movimento, conforme as Equações 39 e 40, respectivamente:

$$h(x, t) = 1 + \mathcal{H}(x, t) \quad (39)$$

$$u(x, t) = 1 + \mathcal{V}(x, t) \quad (40)$$

Considerando  $\mathcal{H}(x, t) \ll 1$  e  $\mathcal{V}(x, t) \ll 1$  e o sistema de Equações 41 e 42, pode-se deduzir que:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = 0 \quad (41)$$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right) + \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + (1 - \alpha) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 1 + \mathcal{H} - C^* +$$

$$-(1 - C^*) \left[ (1 + \mathcal{V})(1 + \mathcal{H}) \frac{(1 - C^*)(n + 1 + nC^*)}{(1 + \mathcal{H} - C^*)((n + 1)(1 + \mathcal{H}) + nC^*)} \right]^n \quad (42)$$

Após manipulações algébricas no processo de linearização, obtém-se a equação em  $\mathcal{H}(x, t)$ , conforme apresentado pela Equação 43.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} + \left( \alpha - \frac{1}{Fr^2} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial t} + \frac{(n + 1)(2n + 1)}{(n + 1 + nC^*)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + n(1 - C^*) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \quad (43)$$

Como se pode observar a EDP (Equação diferencial à derivada parcial) obtida é do tipo equação da onda. Pela teoria linear, ondulações na superfície livre dos escoamentos podem ser determinadas através da solução da equação de Laplace, aplicando-se condições de contorno cinemáticas.

Neste caso, como é de interesse identificar condições críticas para geração de *roll waves*, sabendo-se que uma das características destas ondas é a periodicidade, impõe-se uma solução (Equação 44) que caracteriza a taxa de crescimento das perturbações e a frequência das mesmas.

$$\mathcal{H}(x, t) = \hat{H}e^{i(kx - \omega t)} \quad (44)$$

sendo que  $\hat{H}$  a magnitude de perturbação,  $k$  e  $\omega$  geralmente são números complexos e são definidos como:  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  e  $k = k_r + ik_i$ .

Vale ressaltar que  $k_r$  (parte real de  $k$ ) é o número de ondas e  $\omega_r$  (parte real de  $\omega$ ) é a frequência, já  $k_i$  e  $\omega_i$ , são as taxas de amplificação, em que  $\omega_i > 0$  indica a amplificação no tempo e ( $k_i < 0$ ) a amplificação no espaço na direção positiva de  $x$  (M. Gaster, 1962).

Na seção 3.4.1, será feita uma análise de estabilidade temporal, na busca de identificar a condição necessária para a amplificação das perturbações ( $\omega_i > 0$ ) e de verificar o perfil da velocidade de fase em função do número de ondas ( $k_r$ ).

### 3.4.1 Análise de estabilidade temporal

Para se realizar a análise de estabilidade temporal é necessário inserir a solução de ondas periódicas dada pela Equação 44 na Equação 43, estabelecendo assim a relação de dispersão (Equação 45), cuja incógnita é ( $\omega$ ). Nesta análise, considera-se  $k_i = 0$ .

$$\omega^2 - [2\alpha k - n(1 - C^*)i]\omega + \left(\alpha - \frac{1}{Fr^2}\right)k^2 - \frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1+nC^*)}ki = 0 \quad (45)$$

Resolvendo a Equação 45, tem-se:

$$\omega = \frac{1}{2} [2\alpha k - n(1 - C^*)i \pm \sqrt{a + bi}] \quad (46)$$

sendo:

$$a = 4 \left( \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{Fr^2} \right) k^2 - [n(1 - C^*)]^2 \quad (47)$$

$$b = 4 \left\{ \left[ \frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1+nC^*)} \right] - \alpha n(1 - C^*) \right\} k \quad (48)$$

Para analisar a Equação 46, separa-se a parte real da imaginária. Assim, as expressões que definem a taxa de crescimento das perturbações e a velocidade de propagação das ondas, são dadas por:

$$\omega_i = \frac{1}{2} \left[ -n(1 - C^*) \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \right] \quad (49)$$

$$\omega_r = \frac{1}{2} \left[ 2\alpha k \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \right] \quad (50)$$

Conforme mencionado na seção 3.4, a taxa de amplificação das instabilidades é determinada através da parte imaginária (NG; MEI, 1994). Portanto, para determinar uma condição de formação de instabilidades, considera-se a condição dada pela inequação:  $\omega_i > 0$ . Resolvendo a mesma, obtém-se uma condição necessária (Equação 51) para formação de instabilidades na superfície livre do escoamento, representada pelo número de Froude:

$$Fr > Fr_c = \frac{\vartheta}{\sqrt{\varphi^2 - 2\alpha\varphi\vartheta + \alpha\vartheta^2}} \quad (51)$$

sendo:

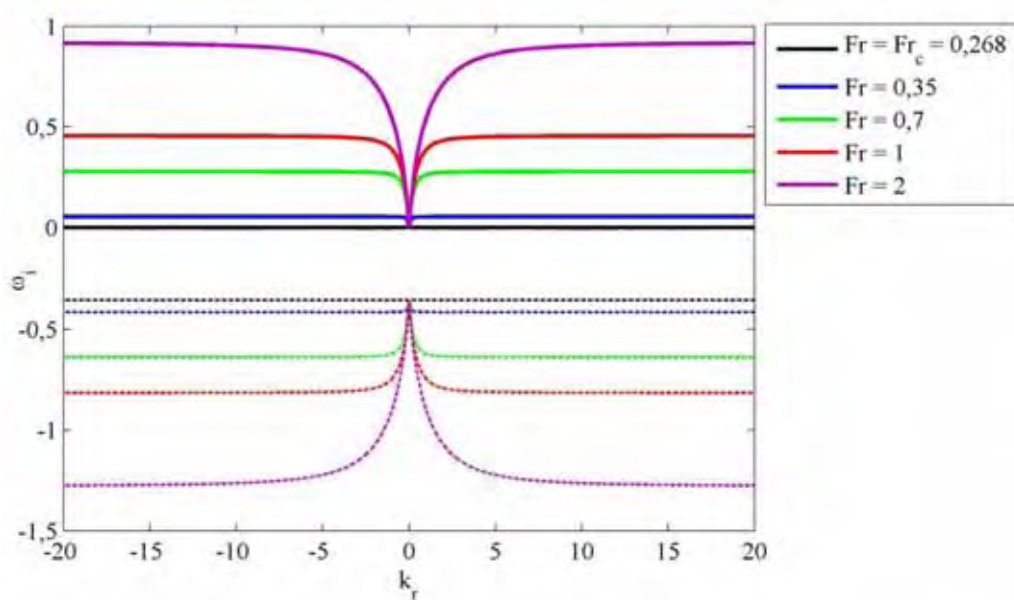
$$\varphi(n, C^*) = \frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1+nC^*)} \quad (52)$$

$$\vartheta(n, C^*) = n(1 - C^*) \tag{53}$$

O domínio estabelecido por  $Fr > Fr_c$  é dito favorável para a geração de *roll waves*. Esse tipo de análise foi realizada por Di Cristo e Vacca, (2005), onde verificaram a amplificação da perturbação em escoamento turbulento de fluido newtoniano para  $Fr > 2$ .

A Figura 13 mostra a taxa de crescimento da perturbação, variando o número de Froude e fixando os parâmetros  $n = 0,4$  e  $C^* = 0,1$ . Cabe salientar que a ilustração é feita para os ramos positivo e negativo da Equação 49, sendo que o ramo negativo é representado por linhas pontilhadas.

**Figura 13** - Taxa de crescimento das perturbações para um fluido do tipo Herschel-Bulkley ( $C^* = 0,1$  e  $n = 0,4$ ).



**Fonte:** Elaborada pela própria autora

Através da Figura 13 verifica-se que ocorre a amplificação da perturbação para  $Fr > Fr_c$  e  $k_r > 0$ . É importante destacar, que para  $k_r \rightarrow +\infty$ , a taxa de amplificação é assintótica, dada pela Equação 54:

$$\lim_{k_r \rightarrow +\infty} \omega_i^+ = -\frac{n(1 - C^*)}{2} + \frac{(\alpha\vartheta - \varphi)}{2 \left[ \alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{Fr^2} \right]} \tag{54}$$

Uma segunda análise é apresentada nesta seção e diz respeito à velocidade de propagação das instabilidades. Considerando  $k_i = 0$ , tem-se que a velocidade de propagação

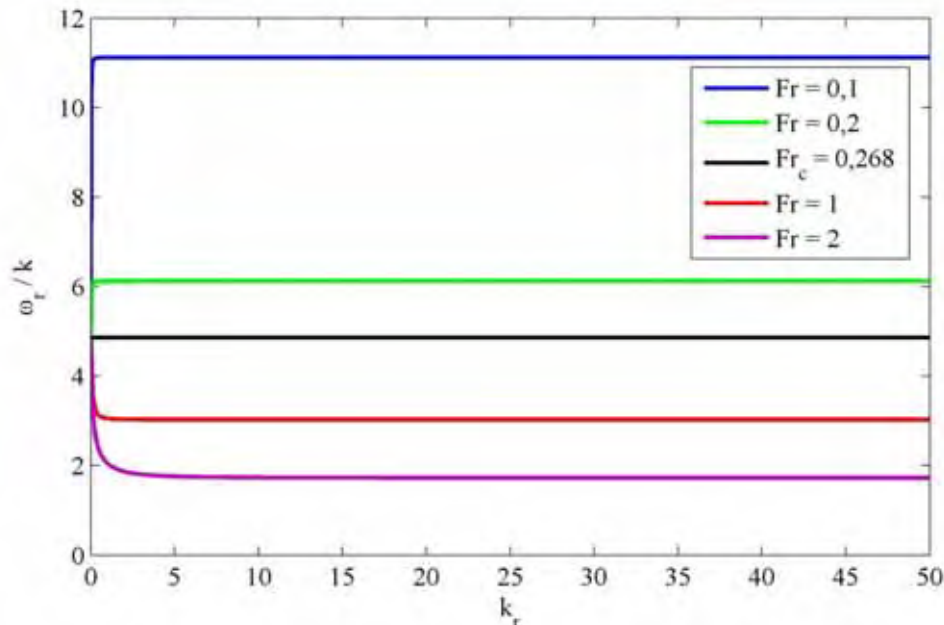
das ondas é dada pela relação entre a frequência ( $\omega_r$ ) e o número de ondas ( $k_r$ ), a mesma pode ser calculada através do limite de  $U = \frac{\omega_r(k_r)}{k_r}$ , quando  $k_r$  tende ao infinito, cuja solução é dada pela Equação 55.

$$\lim_{k_r \rightarrow \infty} \frac{\omega_r(k_r)}{k_r} = \alpha + \left[ \alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{Fr^2} \right]^{\frac{1}{2}} = U \quad (55)$$

no qual  $\alpha$  é dado pela Equação 38. Destaca-se que a velocidade de propagação determinada está em consonância com a que foi obtida por Ng e Mei (1994) para fluido do tipo *Power law*.

A Figura 14 mostra a velocidade de propagação, considerando  $k_r > 0$ , para diferentes números de  $Fr$ , com os parâmetros  $n = 0,4$  e  $C^* = 0,1$  fixos (MACIEL et al., 2013).

**Figura 14** - Velocidade de propagação das perturbações fixando os parâmetros ( $C^* = 0,1$  e  $n = 0,4$ ) e variando o número de Froude.



Fonte: Elabora pela própria autora.

Através da Figura 14, observa-se que as perturbações em que  $Fr < Fr_c$ , tendem a esvanecer.

Pode-se observar também o decaimento da velocidade das perturbações em função do número de ondas com o aumento do número de Froude (MACIEL et al., 2013). No entanto, a partir de um determinado número de ondas, a velocidade de propagação se mantém constante.

É importante ressaltar que Ng e Mei (1994) verificaram o mesmo comportamento da velocidade de propagação em relação ao número de Froude para fluido do tipo *Power law* ( $C^* = 0$ ).

Através da análise de estabilidade temporal, pôde-se verificar a taxa de crescimento das instabilidades quando  $\omega_i > 0$  e  $k_r > 0$  (Figura 13), o amortecimento das instabilidades quando ( $Fr < Fr_c$ ) e determinar um critério necessário para a geração de *roll waves* ( $Fr > Fr_c$ ), que em comparação com a literatura, mostrou-se consoante com outras reologias, tais como: a newtoniana e a de *Power law*.

Para fluidos newtonianos, em que o índice de escoamento do fluido ( $n$ ) é igual a 1, e não há presença de tensão crítica ( $\tau_c = 0$ ), tem-se o mesmo critério estabelecido por Ishihara (1954) para geração de *roll waves* em escoamentos laminares, dada pela Equação 56:

$$Fr > \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (56)$$

A mesma observação pode ser feita para fluido do tipo *Power law*, em que a tensão crítica é nula. Este resultado obtido é o mesmo estabelecido por Ng e Mei (1994), conforme a Equação 57:

$$Fr > \frac{n}{\sqrt{2n + 1}} \quad (57)$$

Determinado este critério, que está relacionado às condições dinâmicas do escoamento (forças inerciais e gravitacionais), procura-se investigar sobre a influência da frequência de perturbação na geração de *roll waves*, levando-se em consideração que estas ondas se propagam a partir de uma perturbação, seja na natureza, ou em modelos físicos. Fiorot (2012) observou que mesmo para  $Fr > Fr_c$ , dependendo da frequência de perturbação imposta, não ocorria propagação de *roll waves*, pois as ondas amorteciam conforme se afastavam da fonte de perturbação.

A investigação sobre a influência da frequência de perturbação na propagação de *roll waves* será conduzida através da análise de estabilidade espacial da seção 3.4.2.

### 3.4.2 Análise de estabilidade espacial

A análise de estabilidade espacial é realizada com o objetivo de investigar uma condição crítica que esteja relacionada à frequência de perturbação. Assim, a equação da dispersão fica da seguinte forma:

$$\left(\alpha - \frac{1}{Fr^2}\right)k^2 + \left[-\frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1+nC^*)}i - 2\alpha\omega\right]k + \omega^2 + n(1-C^*)i\omega = 0 \quad (58)$$

Considera-se:  $k = k_r + ik_i$  e  $\omega_i = 0$ , então,  $\omega = \omega_r$ .

Resolvendo a Equação 58, tem-se:

$$k(\omega_r) = \frac{1}{\left(\alpha - \frac{1}{Fr^2}\right)} \left[ (2\alpha\omega + \varphi i) \pm \sqrt{a + bi} \right] \quad (59)$$

sendo:

$$a = 4\omega^2 \left( \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{Fr^2} \right) - \varphi^2 \quad (60)$$

$$b = 4\omega \left( \alpha\varphi - \alpha\vartheta + \frac{\vartheta}{Fr^2} \right) \quad (61)$$

De forma análoga à análise de estabilidade temporal, separa-se a parte imaginária da parte real:

$$k_i(\omega_r) = \left[ \frac{1}{2\left(\alpha - \frac{1}{Fr^2}\right)} \right] \left[ \varphi \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \right] \quad (62)$$

$$k_r(\omega_r) = \left[ \frac{1}{2\left(\alpha - \frac{1}{Fr^2}\right)} \right] \left[ 2\alpha\omega \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \right] \quad (63)$$

Através das Equações 62 e 63 pode-se observar que as funções  $k_i(\omega_r)$  e  $k_r(\omega_r)$  apresentam uma singularidade quando:

$$Fr = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = Fr_s \quad (64)$$

Neste caso, tem-se que  $k_i(\omega_r) \rightarrow -\infty$  e  $k_r(\omega_r) \rightarrow -\infty$ .

Analisando a Equação 62, quando  $k_i(\omega_r) = 0$ , pode-se determinar o valor do número de Froude crítico.

Sabe-se que:

$$\left[ \frac{1}{2 \left| \left( \alpha - \frac{1}{Fr^2} \right) \right|} \right] = 0 \Leftrightarrow Fr = 0 \quad (65)$$

Como  $Fr = 0$ , não é conveniente, leva-se em consideração que:  $Fr > 0$  e  $0 < \alpha \leq \frac{6}{5}$ , desta forma, tem-se:

$$\left[ \varphi \pm \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \right] = 0 \quad (66)$$

Resolvendo a Equação 66, pode-se concluir que o número de Froude crítico é o mesmo estabelecido na análise de estabilidade temporal:

$$Fr_c = \frac{\vartheta}{\sqrt{\varphi^2 - 2\alpha\varphi\vartheta + \alpha\vartheta^2}} \quad (67)$$

Com as duas condições estabelecidas (Froude crítico e número de Froude no ponto de singularidade), é analisado o comportamento da função  $k_i(\omega_r)$ , na vizinhança do ponto de singularidade ( $Fr_s \cong 0,9518$ ) em relação à condição mínima para a amplificação da perturbação, conforme apresentado na Figura 15. Os números de Froude utilizados para a análise são dados pela Equação 68.

$$Fr = Fr_s \pm \delta \quad (68)$$

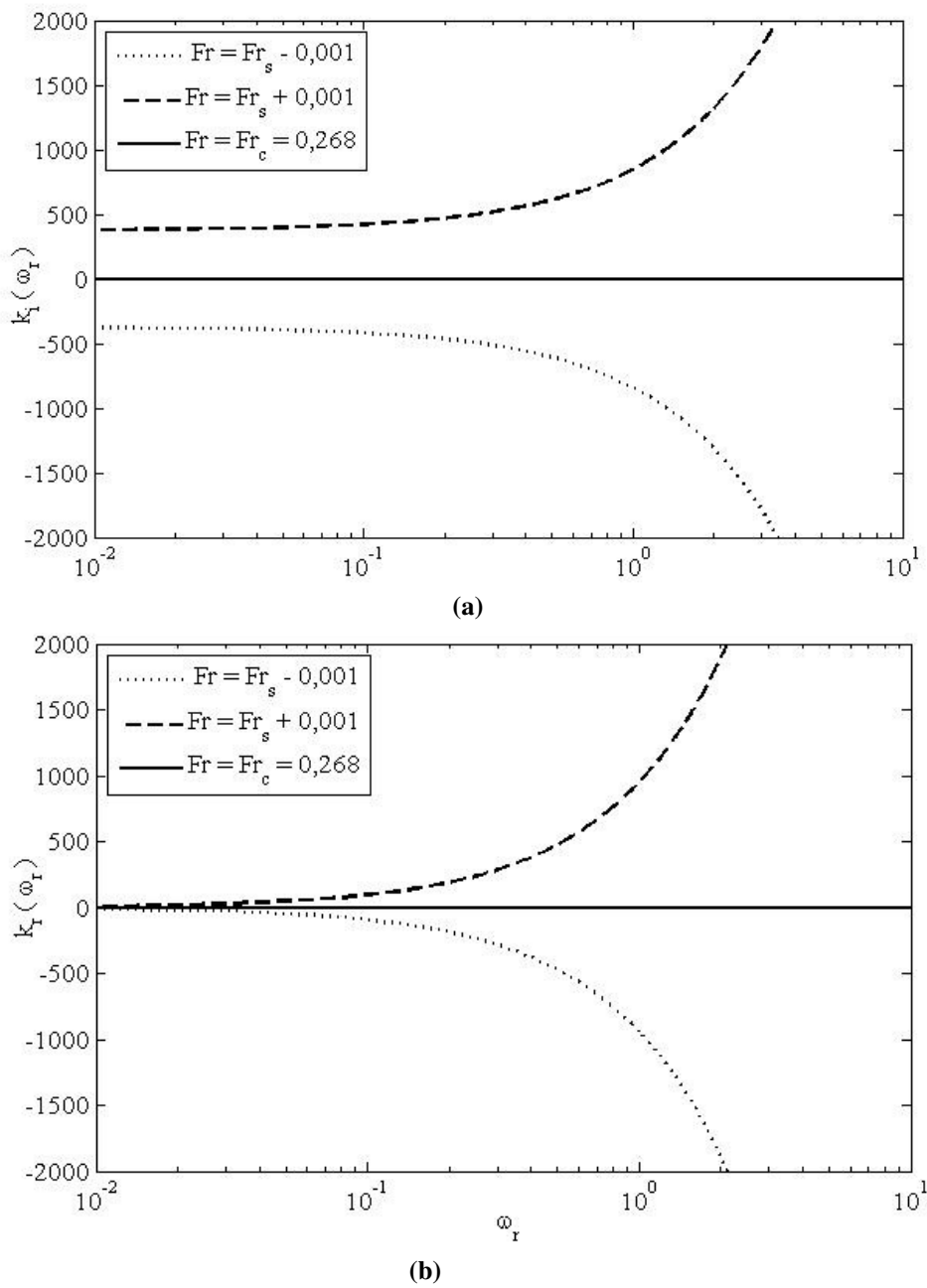
Sendo que  $\delta = 10^{-3}$ .

Analisando a Figura 15 pode-se observar que:

$$Fr < Fr_s \Rightarrow k_i(\omega_r) < 0 \text{ e } k_r(\omega_r) < 0 \quad (69)$$

$$Fr > Fr_s \Rightarrow k_i(\omega_r) > 0 \text{ e } k_r(\omega_r) > 0 \tag{70}$$

**Figura 15** – Análise das funções  $k_i(\omega_r)$  e  $k_r(\omega_r)$  (ramo positivo) variando o número de Froude em relação à singularidade ( $Fr_s \cong 0,9518$ ) e fixando os parâmetros:  $n = 0,4$  e  $C^* = 0,1$ : (a) Comportamento da função  $k_i(\omega_r)$ , (b) Comportamento da função  $k_r(\omega_r)$



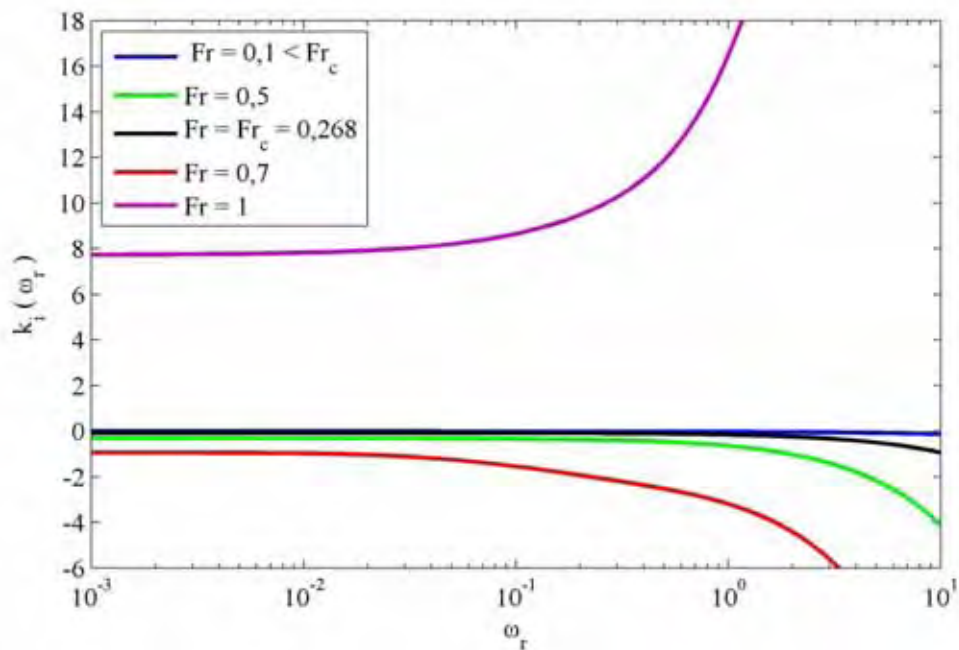
Fonte: Elaborada pela própria autora

– Análise da função  $k_i(\omega_r)$

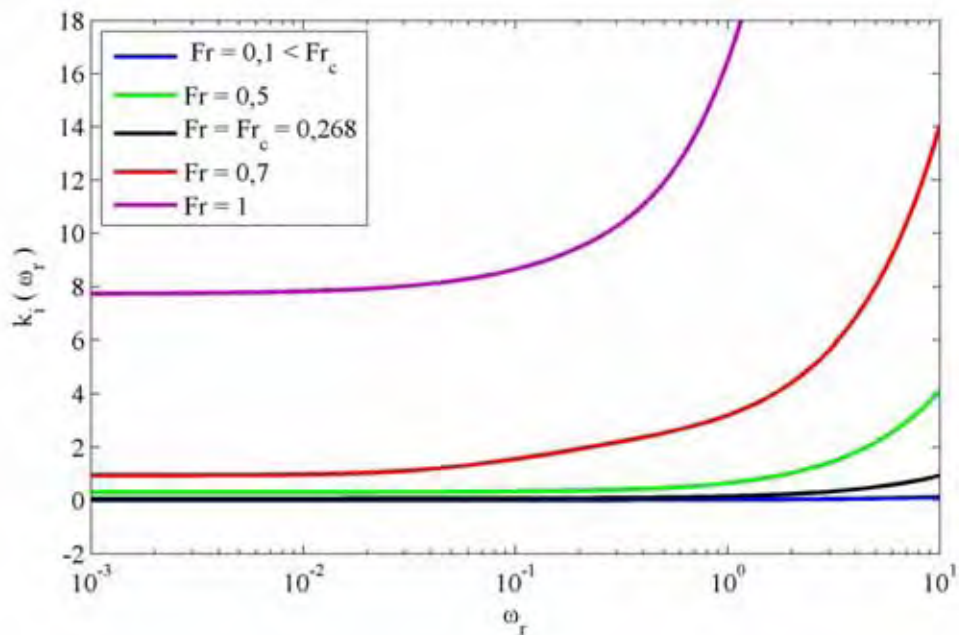
Para uma melhor análise da função  $k_i(\omega_r)$ , no que diz respeito ao critério de geração de instabilidades, verifica-se o comportamento da Equação 62 (ramo positivo) para  $Fr > Fr_c$  e  $Fr < Fr_c$ , em duas situações: na primeira análise a configuração da Equação 62 é mantida

(Figura 16a), já na segunda análise, com o intuito de determinar um domínio de  $k_i(\omega_r)$  para geração de ondas, calcula-se o módulo de  $\left(\alpha - \frac{1}{Fr^2}\right)$  (Figura 16b).

**Figura 16**– Comportamento da função  $k_i(\omega_r)$  (ramo positivo) variando o número de Froude e fixando os parâmetros:  $n = 0.4$  e  $C^* = 0,1$ , (a) Análise da Equação 62 mantendo sua configuração, (b) Análise da equação 62 considerando o valor absoluto de  $\left(\alpha - \frac{1}{Fr^2}\right)$ .



(a)



(b)

Fonte: Elaborada pela própria autora

Através da Figura 16a pode-se observar que para  $k_i(\omega_r)$  em sua configuração original, não se consegue verificar qual é o domínio da função ( $k_i(\omega_r) < 0$  ou  $k_i(\omega_r) > 0$ ) que está propício à amplificação da perturbação imposta, pois existem números de Froude maiores do que a condição crítica de geração de ondas ( $Fr_c$ ), quando  $k_i(\omega_r) < 0$  e também para  $k_i(\omega_r) > 0$ .

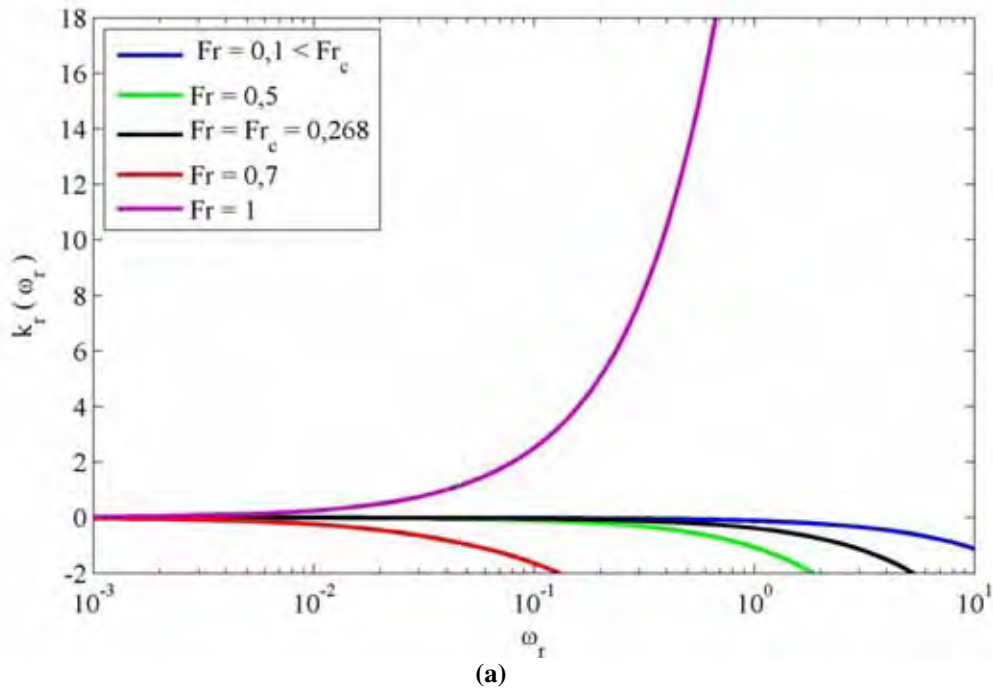
Já através da Figura 16b, observa-se que todo  $Fr > Fr_c$  está no domínio de  $k_i(\omega_r) > 0$ .

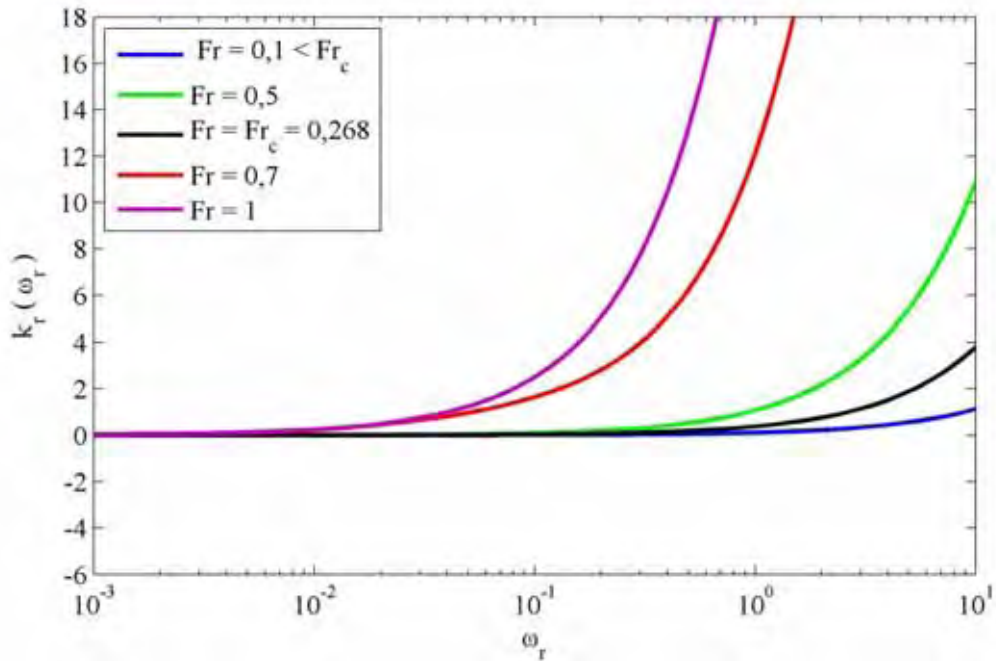
– **Análise da função  $k_r(\omega_r)$**

Através da função  $k_r(\omega_r)$  (Equação 63) busca-se uma segunda condição para geração de *roll waves*, a qual as análises são similares às realizadas para a função  $k_i(\omega_r)$ . Na Figura 17 mostra-se o comportamento da função  $k_r(\omega_r)$  (ramo positivo) variando o número de Froude e fixando os parâmetros:  $n = 0,4$  e  $C^* = 0,1$ .

Pode-se observar através da Figura 17a, que os números de Froude propícios para a geração de ondas se encontram no domínio  $\{k_r(\omega_r) \in \mathbb{R} / k_r(\omega_r) < 0 \text{ e } k_r(\omega_r) > 0\}$ , já a Figura 17b mostra que todo  $Fr > Fr_c$  está no domínio de  $k_r(\omega_r) > 0$ , o que está condizente com a análise da função  $k_i(\omega_r)$ .

**Figura 17** – Comportamento da função  $k_r(\omega_r)$  (ramo positivo) variando o número de Froude e fixando os parâmetros:  $n = 0.4$  e  $C^* = 0.1$ , (a) Análise da Equação 63 mantendo sua configuração, (b) Análise da Equação 63 considerando o valor absoluto de  $\left(\alpha - \frac{1}{Fr^2}\right)$ .





(b)  
Fonte: Elaborada pela própria autora

Através da Figura 17, observa-se também que a condição crítica ocorre quando  $k_r(\omega_r) = 0$ , assim, considera-se:

$$\left[ \frac{1}{2 \left| \left( \alpha - \frac{1}{Fr^2} \right) \right|} \right] \left[ 2\alpha\omega \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \right] = 0 \Rightarrow \quad (71)$$

Sabendo que  $Fr > 0$ , tem-se:

$$\left[ 2\alpha\omega \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \right] = 0 \Rightarrow (2\alpha\omega)^2 = \left( \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \right)^2 \Rightarrow \quad (72)$$

Após manipulações algébricas da Equação 72, tem-se:

$$\left[ (2\alpha\omega)^2 - \frac{a}{2} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 4\alpha^2\omega^2 - 4\alpha^2\omega^2 a = \frac{b^2}{4} \Rightarrow \quad (73)$$

Inserindo os valores de  $a$  e  $b$  (Equações 60 e 61) na Equação 71, tem-se:

$$4\alpha^2\omega^2 - 4\alpha^2\omega^2 \left[ 4\omega^2 \left( \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{Fr^2} \right) - \varphi^2 \right] = \frac{1}{4} \left[ 4\omega \left( \alpha\varphi - \alpha\vartheta + \frac{\vartheta}{Fr^2} \right) \right]^2 \quad (74)$$

Após manipulações algébricas, determina-se uma relação em função da frequência crítica de perturbação dada pela Equação 75:

$$\omega < \omega_c = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\left( \alpha - \frac{1}{Fr^2} \right) \vartheta^2 - 2\alpha\vartheta\varphi} \quad (75)$$

Note que para  $Fr \geq Fr_s = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ ,  $\omega_c$  é um número imaginário puro. Como é de interesse trabalhar com  $\omega > 0$ , calcula-se o valor absoluto da Equação 68.

$$\omega < |\omega_c| = \left| \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\left( \alpha - \frac{1}{Fr^2} \right) \vartheta^2 - 2\alpha\vartheta\varphi} \right| \quad (76)$$

Para reologia binghamiana ( $n = 1$ ), tem-se:

$$|\omega_c| = \left[ \frac{5(C^* + 2)^2}{6(7C^* + 8)} \right] \left| \sqrt{\left( \frac{3(7C^* + 8)}{5(C^* + 2)^2} - \frac{1}{Fr^2} \right) (1 - C^*) - \frac{72(7C^* + 8)}{5(C^* + 2)^3}} \right| \quad (77)$$

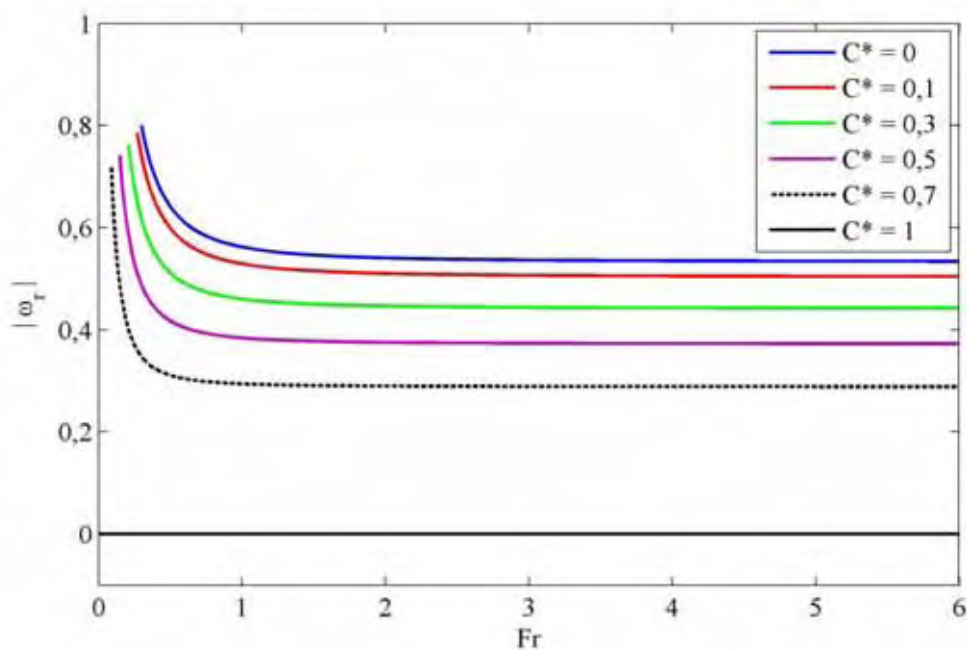
Para reologia newtoniana ( $n = 1, C^* = 0$ ), tem-se:

$$|\omega_c| = \frac{5}{12} \left| \sqrt{\left( \frac{6}{5} - \frac{1}{Fr^2} \right) - \frac{48}{5}} \right| \quad (78)$$

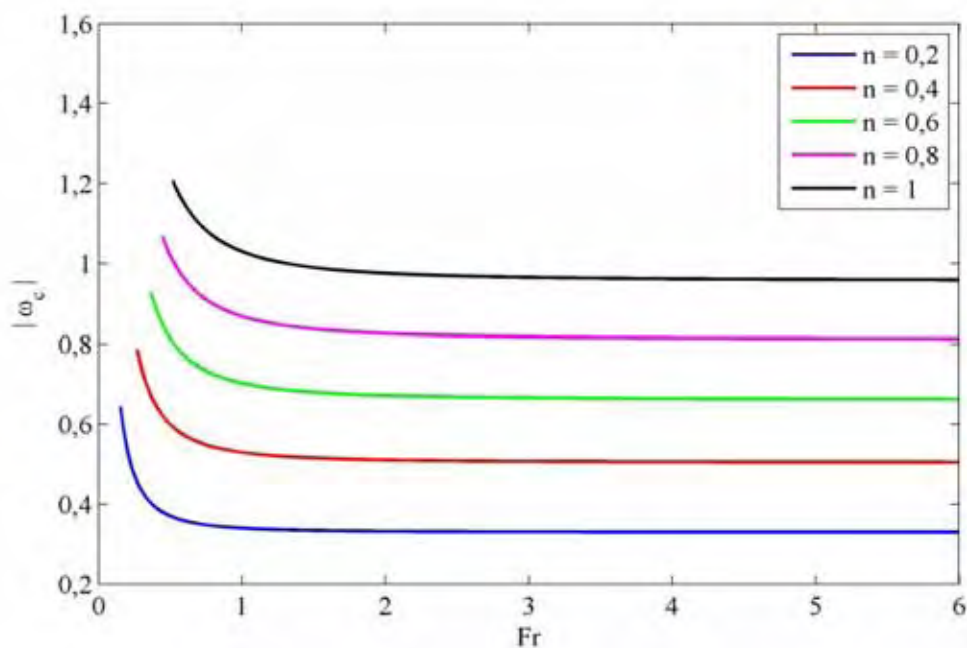
Após a determinação de uma frequência crítica de perturbação ( $|\omega_c|$ ), é de suma importância investigar o comportamento desta função, no que diz respeito às propriedades reológicas do fluido, conforme já mencionado no Capítulo 2.

A Figura 18 mostra a influência dos parâmetros reológicos  $n, C^*$  na frequência crítica de perturbação para  $Fr > Fr_c$ .

**Figura 18** - Influência dos parâmetros reológicos  $n, C^*$  na frequência crítica de perturbação para  $Fr > Fr_c$ : (a) Influência do parâmetro  $C^*$ , (b) Influência do índice de escoamento do fluido  $n$ .



(a)



(b)

Fonte: Elaborada pela própria autora

Através da Figura 18a pode-se observar que com o aumento do parâmetro  $C^*$ , ou seja, com o aumento da tensão de escoamento do fluido em relação à tensão de cisalhamento aplicada no fundo, o domínio da frequência de perturbação que propicia a geração de ondas diminui. Além disso, a diminuição do índice de escoamento do fluido, também provoca uma redução no domínio de frequência de perturbação (Figura 18b), o que significa que para

fluidos não-newtonianos, as *roll waves* são geradas sob tais restrições e geralmente se propagam com frequências mais baixas que em fluidos newtonianos. Tais afirmações são comprovadas através de simulações numéricas, que serão apresentadas de forma detalhada no Capítulo 5.

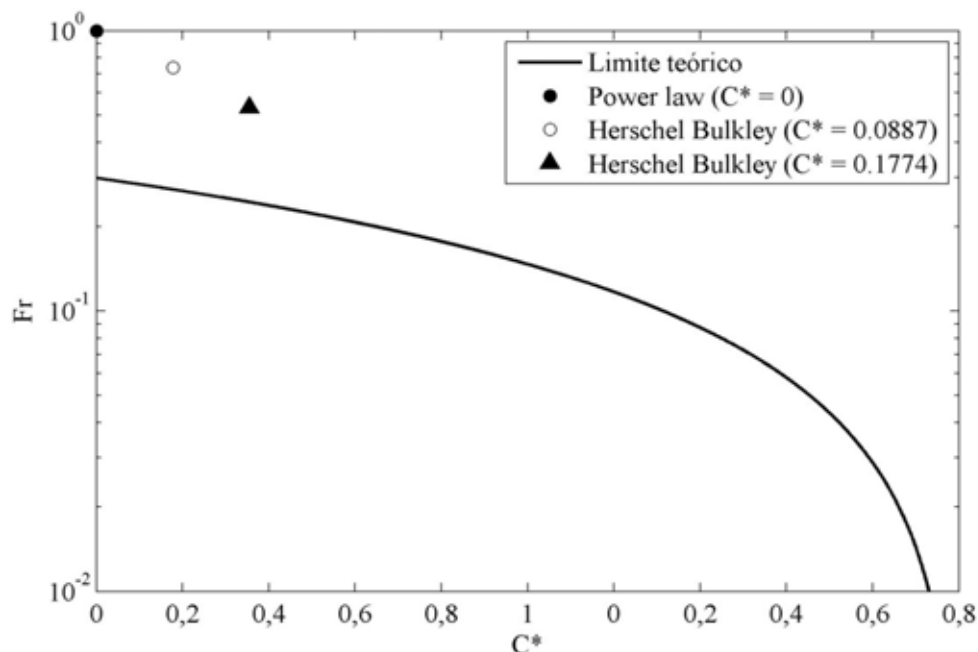
### 3.4.3 Análise dos critérios de geração

Neste item, será apresentado um estudo de casos que verificam as condições estabelecidas através da análise de estabilidade temporal e espacial. Vale ressaltar que as análises dos parâmetros aqui apresentados estão em variáveis adimensionais. No Capítulo 5, os mesmos casos serão explorados numericamente, de forma mais detalhada em variáveis dimensionais.

#### – Análise para Fluido Não-Newtoniano

Para a reologia não newtoniana foram simulados 3 casos, em que:  $C^* = 0$ ,  $C^* = 0,0887$ ,  $C^* = 0,1774$ , ambos os casos com  $n = 0,4$ . Inicialmente, verifica-se o primeiro critério estabelecido:  $Fr > Fr_c$ , conforme apresentado na Figura 19.

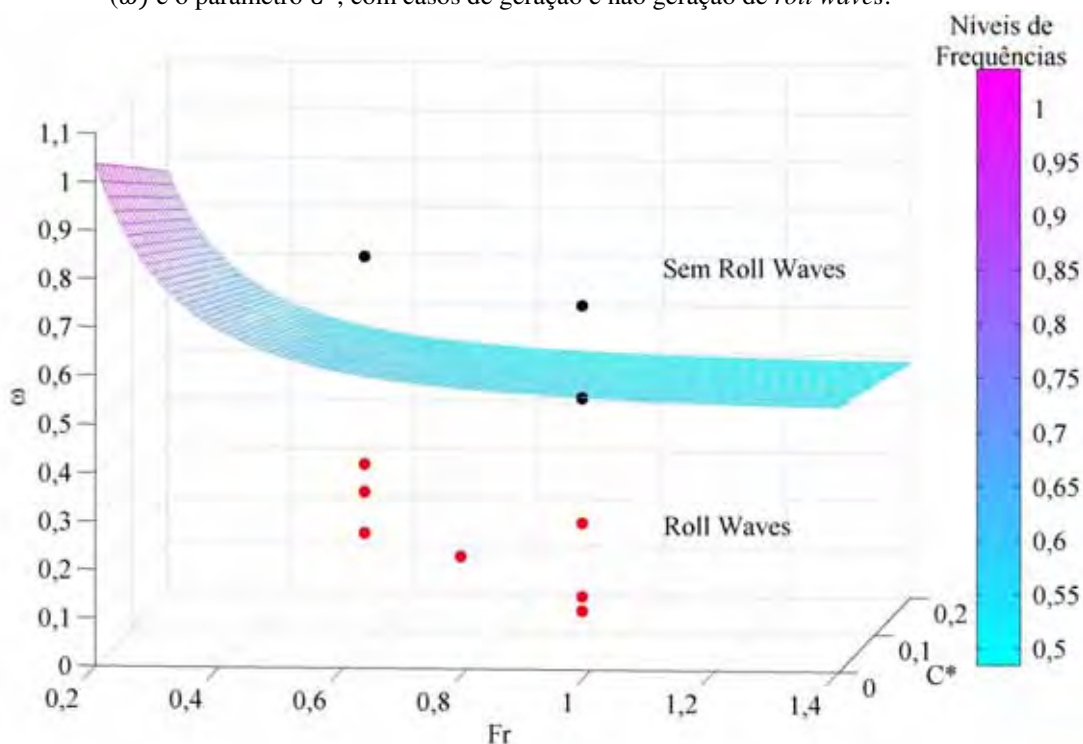
**Figura 19** – Limite teórico para geração de *Roll waves*, relacionando número de Froude e o parâmetro  $C^*$  com 3 casos de geração de *roll waves*.



**Fonte:** Elaborada pela própria autora.

A Figura 20 mostra uma superfície que representa o limite teórico do segundo critério para geração de *roll waves* (Equação 76) e as simulações que foram realizadas, com e sem geração de ondas. Salienta-se que os casos são os mesmos mostrados na Figura 19, ou seja, todos satisfazem a condição de geração relacionada ao número de Froude, porém foram simulados com variações nas frequências de perturbação ( $\omega$ ).

**Figura 20** – Limite teórico para geração de *Roll waves*, relacionado à frequência crítica de perturbação ( $\omega$ ) e o parâmetro  $C^*$ , com casos de geração e não geração de *roll waves*.



**Fonte:** Elaborada pela própria autora.

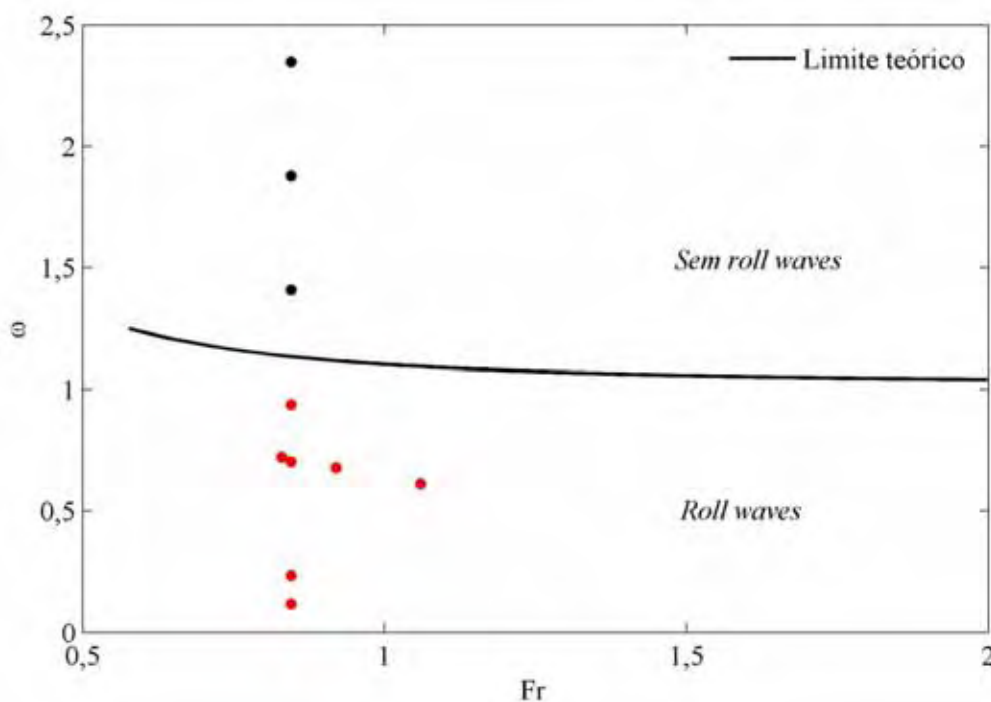
Na Figura 20 mostra-se que os casos simulados com uma frequência abaixo da frequência crítica de perturbação geraram *roll waves* e os mesmos simulados com uma frequência acima da crítica não ocorreu à geração destas ondas. As simulações mostradas no Capítulo 5 em variáveis dimensionais confirmam esta análise.

### – Análise para Fluido Newtoniano

Para fluido de reologia newtoniana ( $n = 1$  e  $C^* = 0$ ) foram realizadas as mesmas análises. Salienta-se que os casos foram simulados com base em resultados experimentais obtidos por Fiorot (2012). A Figura 21 mostra o limite teórico da frequência de perturbação

para geração de *roll waves* (Equação 78) e os casos que foram simulados numericamente, com ocorrência e não ocorrência de *roll waves*.

**Figura 21**– Limite teórico para geração de *Roll waves* em fluido newtoniano, relacionado à frequência crítica de perturbação ( $\omega$ ), com casos de geração e não geração de *roll waves*.



**Fonte:** Elaborada pela própria autora.

Através da Figura 21, pode-se observar que ambos os casos foram simulados para número de Froude acima do valor crítico para geração de *roll waves* em fluido newtoniano ( $Fr > \frac{1}{\sqrt{3}}$ ), porém para a frequência acima da crítica os pontos se encontram fora da região de geração. Numericamente, pode-se comprovar esta análise, os resultados das simulações estão apresentados no capítulo 5.

Nesta seção, determinaram-se dois critérios para a geração de *roll waves*, os quais serão verificados através de simulações numéricas apresentadas no capítulo 5.

Na seção 3.5, será determinada uma equação geral que possa representar ondas geradas por choques, com velocidade de propagação constante. Para isto será imposta uma teoria analítica de *roll wave* permanente, conforme feito no trabalho clássico de Dressler (1949) para fluido invíscido e por Ng e Mei (1994) para fluido do tipo *Power law*.

### 3.5 Equação e Perfil das *Roll waves*

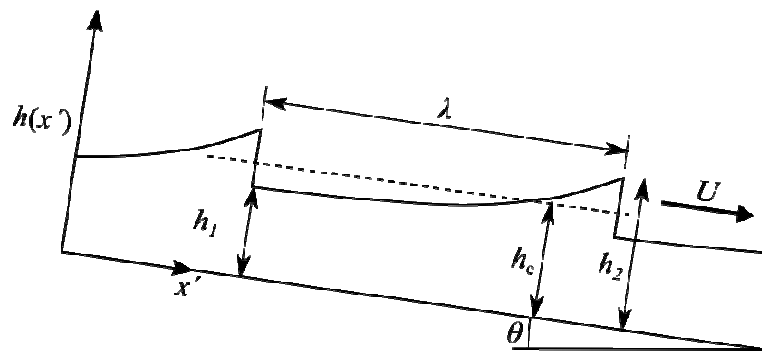
Este item tem como objetivo determinar uma solução geral de *roll waves* a partir do sistema de equações para águas rasas apresentado na seção 5.3. No entanto, inicialmente será mostrado que existe uma seção crítica de escoamento, a partir das Equações 35 e 36. Na sequência, será determinado um modelo para geração de *roll waves* com a imposição de condições de choque, devido à existência da condição crítica de escoamento.

#### 3.5.1 Condição crítica de escoamento

Sabe-se, em hidráulica, que um escoamento supercrítico ( $Fr > 1$ ) muda para subcrítico ( $Fr < 1$ ) através de ressalto hidráulico. Dressler (1949) mostrou que o perfil das *roll waves* em escoamento turbulento tem seção crítica.

Desta forma, a *roll wave* é definida como uma onda periódica, com uma velocidade constante, onde a velocidade da onda deve ser maior do que a velocidade do escoamento base. Para cada comprimento de onda, existe a transição do escoamento supercrítico ( $Fr > 1$ ) para escoamento subcrítico ( $Fr < 1$ ). Em consequência dessa transição de escoamento, a formação de *roll waves* consiste de um perfil contínuo entre choques sucessivos aumentando no sentido do declive do canal, conforme representado na Figura 22.

Figura 22– Perfil da *roll wave*



Fonte: Maciel et al. (2013).

Na Figura 22 mostra-se o perfil de uma onda, em que  $h$  aumenta de  $h_1$  para  $h_2$ , onde as profundidades podem ser definidas da seguinte maneira:

$h_1$ : profundidade antes do choque;

$h_c$ : profundidade crítica;

$h_2$ : profundidade depois do choque;

$\lambda$ : comprimento de onda;

$U$ : velocidade de propagação da *roll wave*.

Para mostrar a necessidade de estabelecer uma seção crítica do ponto de vista matemático, primeiro serão calculados os autovalores do sistema dado pelas Equações 35 e 36. Para isto, o sistema é reescrito na forma matricial, conforme a Equação 79.

$$\mathcal{U}_t + F(\mathcal{U})_x = S(\mathcal{U}) \quad (79)$$

Na qual:

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ h\bar{u} \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$F(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\bar{u} \\ \bar{u}^2 \alpha h + \frac{1}{2} \frac{1}{Fr^2} h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} \alpha + \frac{1}{2} \frac{1}{Fr^2} u_1^2 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$S(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ h - C^* - (1 - C^*) \left[ \bar{u} h \frac{(1 - C^*)(n + 1 + nC^*)}{(h - C^*)((n + 1)h + nC^*)} \right]^n \end{bmatrix} \quad (82)$$

Por definição, o sistema representado pela expressão 72 é dito hiperbólico se para todo valor de  $U$ , os autovalores da matriz jacobiana  $F'(U)$  são reais e distintos. Assim:

$$F'(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{u_2^2}{u_1^2}\right) \alpha + \frac{1}{Fr^2} u_1 & \frac{2u_2 \alpha}{u_1} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (83)$$

$$F'(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(\frac{1}{Fr^2}\right) h - \bar{u}^2 \alpha & 2\bar{u} \alpha \end{bmatrix} \quad (84)$$

O cálculo dos autovalores ( $\lambda$ ) é dado por:  $|F'(U) - \lambda I| = 0$ , sendo  $I$  a matriz identidade. Assim, tem-se:

$$\lambda = \alpha \bar{u} \pm \sqrt{\alpha(\alpha - 1)\bar{u}^2 + \frac{1}{Fr^2}h} \quad (85)$$

Note que o discriminante da Equação 85 é sempre positivo. Portanto os autovalores são reais e distintos, o que prova que o sistema de equações de águas rasas com a reologia de Herschel Bulkley é hiperbólico, além disso, possui campo característico genuinamente não-linear (Apêndice C).

Os autovalores são iguais à celeridade das ondas (TORO, 2001). Assim, podem-se estabelecer condições para cada seção mostrada na Figura 22, da seguinte maneira:

$$\lambda^+_{1} < U < \lambda^+_{2} \quad (86)$$

$$h_1 < h < h_c \Rightarrow \bar{u}_1 < \bar{u} < \bar{u}_c \Rightarrow \lambda^+ < U \quad (87)$$

$$h_c < h < h_2 \Rightarrow \bar{u}_c < \bar{u} < \bar{u}_2 \Rightarrow \lambda^+ > U \quad (88)$$

Na seção crítica:

$$h_1 < h_c < h_2 \Rightarrow \bar{u}_1 < \bar{u}_c < \bar{u}_2 \Rightarrow \lambda_c = U \quad (89)$$

Com base nas condições 87, 88 e 89, têm-se as condições para o escoamento supercrítico, crítico e subcrítico para fluido com reologia do tipo Herschel Bulkley, dada pelas Equações 90, 91 e 92.

$$U > \alpha \bar{u} + \sqrt{\alpha(\alpha - 1)\bar{u}^2 + \frac{1}{Fr^2}h} \quad (90)$$

$$U = \alpha \bar{u} + \sqrt{\alpha(\alpha - 1)\bar{u}^2 + \frac{1}{Fr^2}h} \quad (91)$$

$$U < \alpha \bar{u} + \sqrt{\alpha(\alpha - 1)\bar{u}^2 + \frac{1}{Fr^2} h} \quad (92)$$

sendo:

$U$ : velocidade de propagação da *roll wave*

$\bar{u}_1$ : velocidade média do escoamento antes do choque

$\bar{u}_2$ : velocidade média do escoamento depois do choque

$\bar{u}_c$ : velocidade média do escoamento na seção crítica do escoamento

$\lambda^+_1$ : velocidade de propagação antes do choque

$\lambda^+_2$ : velocidade de propagação depois do choque

Sabe-se que em condições de escoamento uniforme ( $\alpha = 1$ ), a partir da expressão 91, obtém-se a condição crítica do escoamento em regime uniforme:

$$U = \bar{u} + \sqrt{\frac{1}{Fr^2} h} \quad (93)$$

Assim, o número de Froude na seção crítica do escoamento uniforme, está em consonância com a literatura (DRESSLER, 1949; NG; MEI, 1994).

De acordo com as análises aqui apresentadas pode-se concluir que não existe uma solução periódica contínua para o sistema de Equações 35 e 36. Portanto, serão construídas soluções contínuas interligadas por choques que evoluem com a velocidade do choque, conforme feito por (DRESSLER 1949; NG; MEI, 1994).

Estas soluções são encontradas, levando-se em consideração que em uma seção o escoamento é supercrítico e em outra subcrítico. Pela continuidade, as duas regiões devem ser separadas por um ponto ( $h_c$ ) onde o escoamento tem exatamente a velocidade crítica. No entanto, as velocidades devem ser avaliadas de acordo com o movimento do choque, com velocidade ( $U$ ).

### 3.5.2 Determinação da equação da roll wave

Para a determinação de um modelo para geração de *roll waves*, as Equações 35 e 36 são reescritas em um sistema móvel de coordenadas que se desloca com a velocidade de propagação da *roll wave* ou celeridade (onda permanente) que, a priori, é uma incógnita do problema. Esta técnica é usual em hidrodinâmica, pois a física do problema garante a existência de ondas que se propagam à velocidade constante.

Assim, por hipótese tem-se:

$x' = x - Ut$ , sendo que  $U$  representa a velocidade de propagação da *roll wave*.

A partir dessa hipótese, podem-se estabelecer as seguintes relações 94, 95, 96 e 97:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} + \frac{\partial x'}{\partial t} = -U \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} \quad (94)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} + \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} \quad (95)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x'} + \frac{\partial x'}{\partial t} = -U \frac{\partial h}{\partial x'} \quad (96)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x'} + \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \frac{\partial h}{\partial x'} \quad (97)$$

Assim posto, as equações 35 e 36 são reescritas da seguinte forma:

– Equação da conservação da massa

$$h(\bar{u} - U) = c \quad (98)$$

sendo  $c$  uma constante.

Note que, em regime permanente, pode-se considerar  $(h, u) = (1, 1)$  uma solução da Equação 98, e o valor da constante é:  $c = (1 - U)$ .

– Equação da quantidade de movimento

$$\begin{aligned}
h \left( -U \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} + \alpha \bar{u} \frac{\partial h}{\partial x'} \right) + (1 - \alpha) U \bar{u} \frac{\partial h}{\partial x'} + \frac{h}{Fr^2} \frac{\partial h}{\partial x'} = \\
= h - C^* - (1 - C^*) \left\{ \left[ \bar{u} h \frac{(1 - C^*)((n + 1) + nC^*)}{(h - C^*)((n + 1)h + nC^*)} \right] \right\}^n
\end{aligned} \quad (99)$$

Resolvendo o sistema composto pelas Equações 98 e 99, a variável  $\bar{u}$  é eliminada e a equação da *roll wave* (Equação 100) é determinada em função da profundidade do escoamento, do número de Froude, da velocidade de propagação e dos parâmetros reológicos do fluido.

$$\frac{\partial h}{\partial x'} = \frac{h - C^* - (1 - C^*) \left\{ \left[ \frac{(1 + U(h - 1))(1 - C^*)}{h - C^*} \right] \left[ \frac{(n + 1) + nC^*}{(n + 1)h + nC^*} \right] \right\}^n}{\left( (\alpha - 1)U^2 - \frac{\alpha(1 - U)^2}{h^2} + \frac{h}{Fr^2} \right)} \equiv \frac{F(h)}{G(h)} \quad (100)$$

Através da Equação 100, pode-se observar que existe uma condição crítica que corresponde ao desaparecimento do denominador, conforme demonstrado na seção 3.5.1 para o sistema de Equações 35 e 36, sem a alteração para o sistema móvel de coordenadas.

A velocidade na seção crítica é expressa da seguinte forma (Maciel et al., 2013):

$$G(h_c) = \left[ \left( (\alpha - 1)U^2 - \frac{\alpha c^2}{h_c^2} + \frac{h_c}{Fr^2} \right) \right] = 0 \quad (101)$$

$$F(h_c) = h_c - C^* - (1 - C^*) \left\{ \left[ \frac{(c + Uh_c)(1 - C^*)}{(h_c - C^*)} \right] \left[ \frac{(n + 1) + nC^*}{(n + 1)h_c + nC^*} \right] \right\}^n = 0 \quad (102)$$

Resolvendo a Equação 102, pode-se verificar que existe somente uma raiz positiva que é dada por  $h_c = 1$ .

Fazendo a combinação algébrica das equações (101) e (102), obtém-se a velocidade de propagação das *roll waves* no ponto crítico, que é uma raiz da Equação 102, dada por:

$$\begin{aligned}
U = \left( \frac{h_c - C^*}{1 - C^*} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left[ \frac{(n + 1)h_c + nC^*}{(n + 1) + nC^*} \right] \frac{\alpha}{h_c} + \\
+ \left\{ \alpha(\alpha - 1) \left( \frac{h_c - C^*}{1 - C^*} \right)^{\frac{2(1+n)}{n}} \left[ \frac{(n + 1)h_c + nC^*}{(n + 1) + nC^*} \right] + \frac{h_c^3}{Fr^2} \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \quad (103)$$

Assim, tem-se que para  $h_c = 1$ , a velocidade de propagação das *roll waves* pode ser escrita:

$$U = \alpha + \left[ \alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{Fr^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (104)$$

Para fluido do tipo *Power law* ( $C^* = 0$ ), a velocidade de propagação da *roll wave* é a mesma determinada por Ng e Mei (1994) e por Julien e Hartley (1995) para fluido newtoniano.

Cabe salientar que a velocidade de propagação estabelecida nesta análise é a mesma determinada na análise de estabilidade linear quando  $k_r \rightarrow \infty$  (Equação 55).

Como as *roll waves* podem ser sucessões contínuas de choques conectados, o comprimento destas ondas pode ser calculado a partir da integração do inverso da Equação 100, cujos limites de integração são os valores da lâmina baixa e lâmina alta do escoamento:

$$\lambda = \int_{h_1}^{h_2(h_1)} \frac{G(h)}{F(h)} dh \quad (105)$$

no qual,  $h_1 < h_0$  (lâmina em regime uniforme) é imposta, e  $h_2$  é calculada a partir de  $h_1$ .

### 3.5.3 Condições de choque

A resolução da equação passa pela imposição de leis de conservação que permitem escrever a condição de Rankine Hugoniot (*shock waves*) da dinâmica dos gases, que são estabelecidas a partir do critério de entropia (TORO, 2001). Tais condições são representadas pelos choques de propriedades para a conservação da massa e quantidade de movimento, dadas pelas Equações 106 e 107. Este modelo foi utilizado por Dressler (1949) para construir o perfil da onda:

$$U[h]_1^2 = [\bar{u}h]_1^2 \quad (106)$$

$$U[\bar{u}h]_1^2 = \left[ \alpha \bar{u}^2 h + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{Fr} \right)^2 \right]_1^2 \quad (107)$$

sendo:

$h_2 - h_1$ : salto da propriedade.

Neste tipo de imposição, assume-se que a solução do problema consiste de ondas de choque com velocidade de propagação  $U$ . As quais são conectadas através de um salto.

A combinação algébrica das Equações (106) e (107) permitem obter a equação (108).

$$\alpha(1 - U)^2 - h_1 h_2 U^2 (\alpha - 1) - \frac{1}{2} \left( \frac{h_1}{Fr} \right)^2 h_2 - \frac{1}{2} h_1 \left( \frac{h_2}{Fr} \right)^2 = 0 \quad (108)$$

Resolvendo a Equação 108, tem-se:

$$h_2 = \left\{ \left[ \frac{h_1}{2} + (\alpha - 1) U^2 Fr^2 \right]^2 + \frac{2\alpha(1 - U)^2 Fr^2}{h_1} \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{h_1}{2} - (\alpha - 1) U^2 Fr^2 \quad (109)$$

A escolha da lâmina baixa  $h_1$ , não deve ser arbitrária. De acordo com todas as observações feitas sobre o comportamento da *roll waves*, busca-se por um perfil de ondas que seja crescente, ou seja, para a inclinação  $\frac{\partial h}{\partial x} > 0$ . Isto significa que  $F(h)$  e  $G(h)$  devem ter o mesmo sinal para qualquer  $0 < n < 1$  e  $0 \leq C^* < 1$ .

Este tipo de problema está sujeito a diversas abordagens teóricas, por se tratar de um sistema com evolução espaço-temporal. No entanto, nesta tese a escolha do parâmetro de entrada  $h_1$  não é mais imposto de forma aleatória, ou seja, obedecendo somente com a condição  $h_1 < h_0$ .

Para a determinação de um domínio de geração para os valores de  $h_1$ , uma análise fasorial foi realizada com o objetivo verificar o comportamento das funções  $F(h)$  e  $G(h)$  da Equação 100. Vale ressaltar que este tipo de análise é amplamente utilizado no estudo de sistemas dinâmicos de primeira ordem (OGATA, 1970). Para este tipo de problema essa abordagem é de iniciativa do grupo RMVP, conforme explanado nos trabalhos de (FIOROT, 2012).

As funções  $F(h)$  e  $G(h)$  são analisadas numericamente, onde se podem observar os seus módulos e fases, que são calculados considerando a seguinte definição:

Seja  $y$  um número complexo com parte real  $y_r$  e parte imaginária  $y_i$ , sendo  $j = \sqrt{-1}$ .

Então:

$$y = y_r + jy_i \Rightarrow \begin{cases} |y| = \sqrt{y_r^2 + y_i^2} \\ \angle y = \arctan\left(\frac{y_i}{y_r}\right) \end{cases} \quad (110)$$

e portanto,  $y$  pode ser reescrito sob a forma de Euler  $y = |y|e^{j\angle y}$ . Assim, as funções  $F(h)$  e  $G(h)$  podem ser escritas da seguinte forma:

$$F(h) = |F(h)|e^{j\angle F(h)} = |F(h)|[\cos(\angle F(h)) + j\text{sen}(\angle F(h))] \quad (111)$$

$$G(h) = |G(h)|e^{j\angle G(h)} = |G(h)|[\cos(\angle G(h)) + j\text{sen}(\angle G(h))] \quad (112)$$

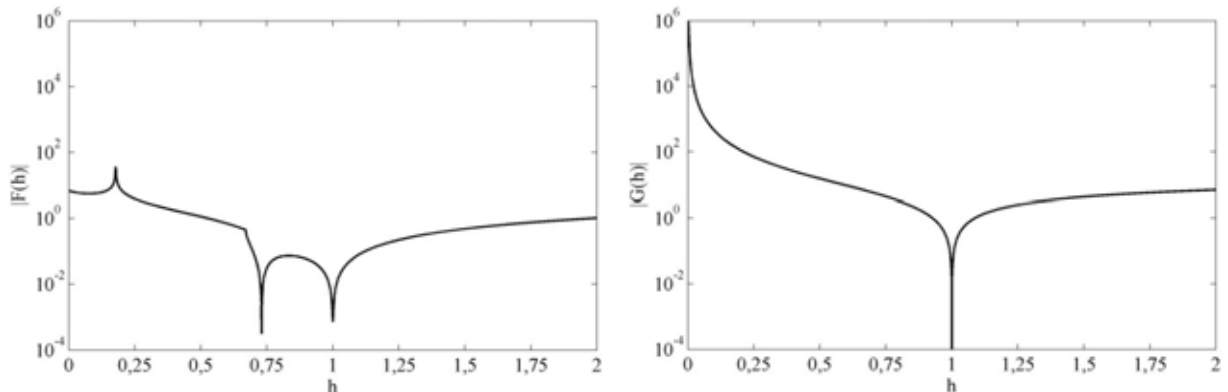
Portanto,

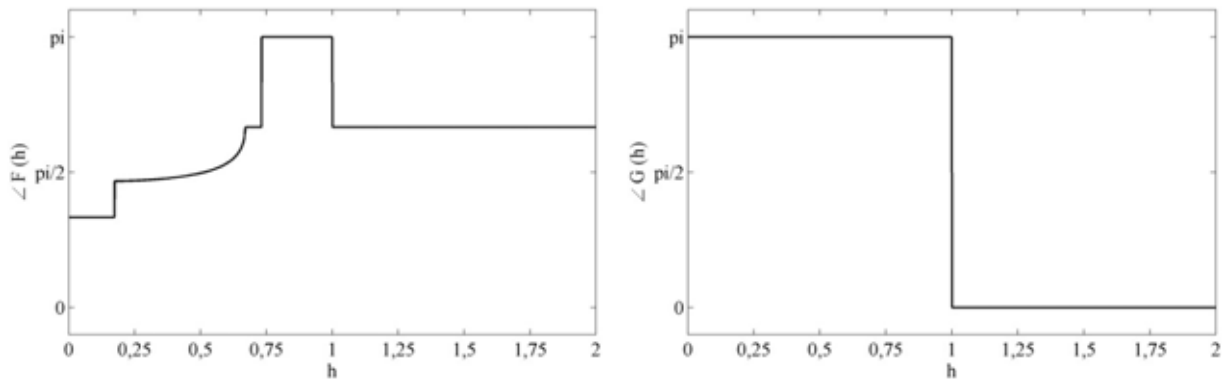
$$\frac{F(h)}{G(h)} = \frac{|F(h)|}{|G(h)|} e^{j(\angle F(h) - \angle G(h))} \quad (113)$$

### – Estudo de caso

Com base em análise fasorial um estudo de caso é realizado, determinando o valor absoluto e fases das funções, para fluido não-newtoniano com os seguintes dados de simulação:  $n = 0,4$ ,  $C^* = 0,1734$  e  $Fr = 0,53$ . Vale destacar que os mesmos dados são utilizados para simulação de *roll waves* no Capítulo 5. A Figura 23 mostra a análise das funções  $F(h)$  e  $G(h)$  representadas em módulo e fase.

**Figura 23** – Funções  $F(h)$  e  $G(h)$  representadas em módulo e fase ( $n = 0,4$ ,  $C^* = 0,1734$  e  $Fr = 0,53$ )





Fonte: Elaborada pela própria autora

Através da Figura 23 pode-se observar que a parte imaginária (responsável pela geração de instabilidades) de ambas as funções, está presente apenas quando  $h < h_c$ , ou seja, para que as *roll waves* possam ser observadas, o valor de  $h_1$  deve estar em um domínio propício à geração de instabilidades.

Assim, pode-se concluir que:

$$\frac{F(h)}{G(h)} = \frac{|F(h)|}{|G(h)|} e^{j(\pi-\pi)} \Rightarrow \frac{F(h)}{G(h)} = \frac{|F(h)|}{|G(h)|} \geq 0, \text{ para } h_{\min} < h < h_c \quad (114)$$

onde  $h_{\min}$  é a menor altura para que as fases de  $F(h)$  e  $G(h)$  sejam iguais. Portanto, o valor de  $h_{\min}$  deve ser tal que:

$$\angle F(h) = \angle G(h) \quad (115)$$

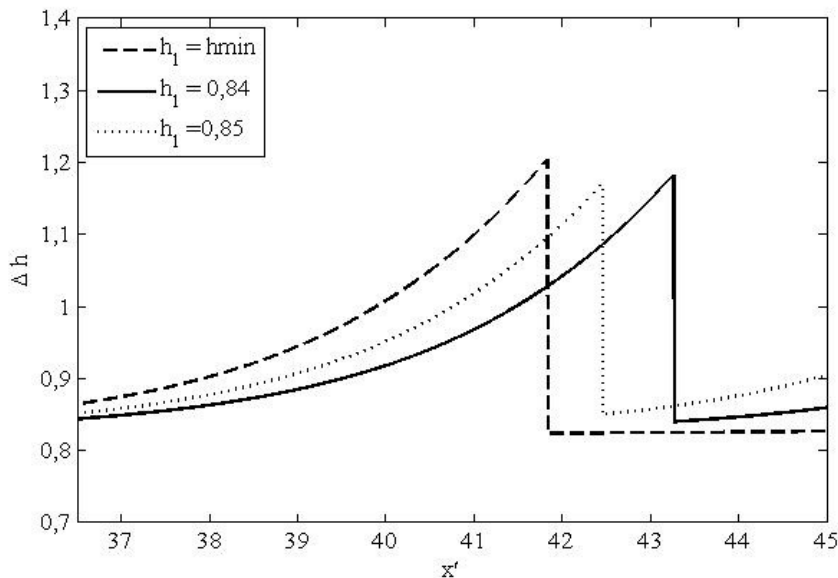
Para escoamentos com fluidos de reologia não-newtoniana, a função  $F(h)$  assume valores complexos, o que irá originar uma função complexa para integração. No entanto, ainda para estes casos, também existe um intervalo de  $h$  onde as fases de  $F(h)$  e  $G(h)$  são idênticas, onde a sua resolução será possível dentro do domínio real positivo (FERREIRA et al. 2011; FIOROT, 2012).

### 3.5.4 Verificação da funcionalidade do modelo para geração de roll waves

Neste item são apresentados os resultados obtidos a partir da Equação 105. Primeiramente, os testes são efetuados para fluido newtoniano ( $n = 1, C^* = 0$ ) a partir de dados experimentais obtidos por Fiorot (2012) em variáveis adimensionais. A Figura 24

mostra o perfil das *roll waves* em que  $Fr = 0,83$ , variando o valor da condição inicial  $h_1$ , que é parâmetro de entrada do modelo matemático proposto.

**Figura 24-** Perfil das *roll waves* em que  $Fr = 0,83$ , variando o valor da condição inicial  $h_1$ .

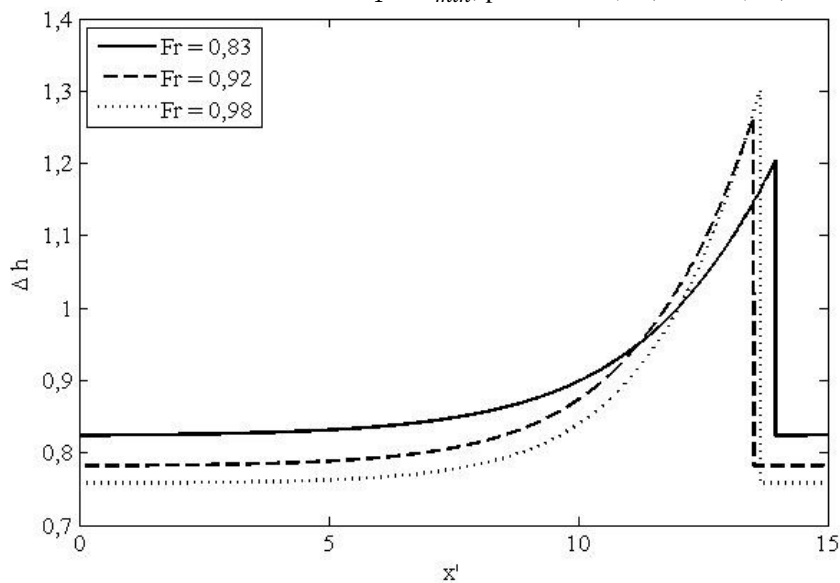


Fonte: Elaborada pela própria autora

Através da Figura 24, pode-se observar uma influência significativa do parâmetro de entrada  $h_1$  sobre o perfil das *roll waves*, pois, quanto menor o valor da lâmina baixa da onda ( $h_1$ ), maior será a amplitude e o comprimento das *roll waves*, quanto à velocidade de propagação este parâmetro não apresenta influência.

A Figura 25 mostra o perfil das *roll waves* variando o número de Froude, com  $h_1 = h_{min}$ .

**Figura 25-** Perfil das *roll waves* com  $h_1 = h_{min}$ , para  $Fr = 0,83$ ,  $Fr = 0,92$ ,  $Fr = 0,98$ .

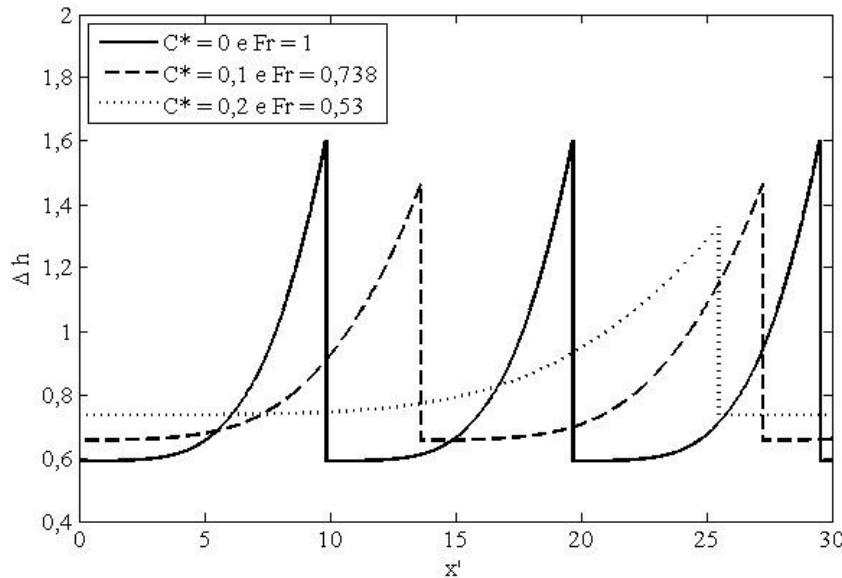


Fonte: Elaborada pela própria autora

Através da Figura 25, observa-se que quanto maior o número de Froude, o que significa que as forças inerciais são preponderantes às gravitacionais, menor será a lâmina baixa da onda e conseqüentemente maior será a amplitude da mesma, ainda que verificada a diminuição do comprimento de onda. Quanto à velocidade de propagação, o aumento do número de Froude provoca uma diminuição da mesma. Pôde-se verificar que para  $Fr = 0,83$ ,  $Fr = 0,92$ ,  $Fr = 0,98$ , a velocidade de propagação foi de 2,5, 2,39 e 2,33, respectivamente.

Para fluidos do tipo *Power Law* e *Herschel Bulkley* foram testados os casos apresentados na Figura 19, que estão dentro do domínio considerado propício para a geração de *roll waves*. A Figura 26 mostra o perfil das *roll waves* para fluidos do tipo *Power law* e *Herschel Bulkley*, para  $n = 0,4$ , com a imposição de  $h_1 = h_{min}$ , o que irá gerar ondas em sua amplitude máxima. Esta análise leva em consideração que para cada  $C^*$  existe um número de Froude correspondente. Pode-se observar que o aumento do parâmetro  $C^*$  provoca uma diminuição do número de Froude, isto se explica porque o aumento da tensão crítica do escoamento acarreta em diminuição da velocidade média.

**Figura 26-** Perfil das *roll waves* para fluidos do tipo *Power law* e *Herschel Bulkley*, com  $n = 0,4$  e  $h_1 = h_{min}$



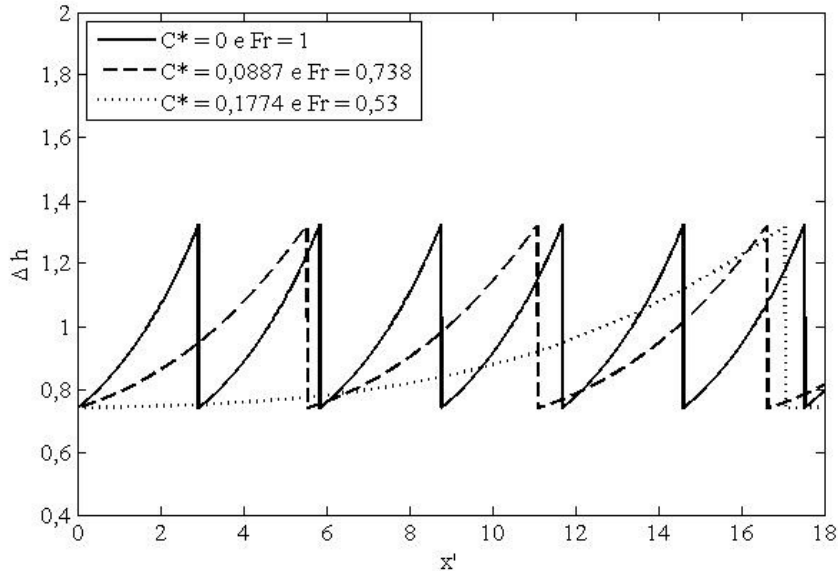
Fonte: Elaborada pela própria autora

Através desta análise pode-se observar que para fluidos não-newtonianos quanto maior número de Froude, maior será a amplitude máxima das ondas e menor o comprimento das mesmas.

Já para  $h_1$  fixo ( $h_1 = 0,74$ ) em todos os casos, pode-se observar que a diminuição do número de Froude causou um aumento de grande relevância no comprimento das ondas,

observou-se também uma diminuição das amplitudes, isto ocorreu porque  $h_1 > h_{min}$  nos três casos mostrados na Figura 27.

**Figura 27-** Perfil das *roll waves* para fluidos do tipo *Power law* e *Herschel Bulkley*, com  $n = 0,4$  e  $h_1 = 0,74 > h_{min}$



**Fonte:** Elaborada pela própria autora

A partir das análises realizadas nesta seção, pode-se observar a importância do parâmetro de entrada ( $h_1$ ) no perfil das *roll waves*. Cabe salientar, que a partir de resultados experimentais e numéricos via Fluent, apresentados no Capítulo 6, observa-se que deve existir uma dependência do parâmetro ( $h_1$ ) em relação à frequência de perturbação, que ainda precisa ser melhor investigado matematicamente.

Em linhas gerais, este capítulo apresentou um modelo matemático para escoamentos laminares de águas rasas com propriedades reológicas de *Herschel Bulkley*. A partir deste equacionamento determinaram-se critérios para geração de *roll waves* utilizando a teoria de análise de estabilidade linear. Em seguida, pôde-se verificar que o sistema de equações de águas rasas é hiperbólico. Portanto não há solução periódica contínua. Desta forma, para determinar um modelo para geração de *roll waves*, foi imposta a teoria de *roll wave* permanente (DRESSLER, 1949), acoplada às condições de choque, ou seja, o perfil de tais ondas são soluções periódicas, porém conectadas por choques.

Pode-se dizer que o modelo para geração de *roll waves* é uma solução particular das equações de águas rasas, por causa das condições que foram impostas. A funcionalidade foi verificada em sua forma adimensional, com a obtenção das principais propriedades das ondas:

amplitude, comprimento e velocidade de propagação, ou seja, este é um modelo que pode ser aplicado para prever *roll waves* tanto em escoamentos de fluidos newtonianos quanto não newtonianos em canais. No entanto, vale destacar que o modelo matemático proposto apresenta restrições, sendo válido para escoamentos laminares, desprezando os efeitos das paredes laterais do canal e os de tensão superficial.

Para verificar a validade do modelo matemático aqui apresentado, é de interesse compará-lo com um modelo que resolva as equações fundamentais de conservação de massa e quantidade de movimento, visto que o problema *roll waves*, conforme apontamentos da literatura (Capítulo 2) têm sido resolvido a partir das equações de águas rasas. Neste trabalho, optou-se pela utilização do software FLUENT amplamente utilizado em mecânica dos fluidos.

---

## CAPÍTULO 4    MODELAGEM NUMÉRICA

---

Com o desenvolvimento tecnológico, as simulações numéricas para análises de fenômenos complexos tornam-se cada vez mais utilizadas, trazendo soluções precisas e confiáveis. Neste sentido, é importante realizar simulações numéricas, a partir das equações completas de conservação da massa e quantidade de movimento, para verificar a validade do modelo matemático para geração de *roll waves*, conforme explanado no Capítulo 3. Estas simulações contribuem não só para validar o modelo matemático proposto nesta tese, como também para uma futura melhoria do mesmo, pois com base nestas simulações pode-se verificar as consequências das hipóteses simplificativas impostas ao modelo.

Neste capítulo é apresentado o modelo numérico utilizado para efetuar as simulações de *roll waves* tanto em escoamentos de fluidos newtonianos, caso da glicerina pura (Fiorot, 2012), como para fluidos não-newtonianos. Cabe salientar que as simulações numéricas do fenômeno *roll waves* para fluidos não newtonianos a partir das equações completas parece, a esta autora, uma iniciativa do grupo RMVP, com esta tese.

## 4.1 Simulações Numéricas através de CFD (Computational Fluid Dynamics)

A dinâmica dos fluidos computacional (CFD) consiste em um conjunto de técnicas matemáticas, numéricas e computacionais, as quais são utilizadas para resolver as equações de conservação originárias da teoria de fenômenos de transporte (massa, energia e quantidade de movimento) a partir de grandezas físicas de interesse para um determinado escoamento, seja compressível ou incompressível. Este conjunto de técnicas tem sido bastante utilizado para prever fenômenos físicos ou físico-químicos que surgem em escoamentos e outros processos de transporte de energia (VERSTEEG; MALALASEKERA, 1995).

Nesta tese, a simulação do fenômeno *roll wave* é realizada através do software Fluent. Neste tipo de simulação exigem-se três fases distintas para a obtenção da solução desejada (FERZIGER, 2002), a saber:

### a) Pré – processamento:

Esta é a fase em que o problema é definido através de um modelo matemático, cujo domínio computacional é discretizado através de uma malha de elementos infinitesimais. Em seguida, as condições de contorno e as propriedades do fluido são definidas. Esta é uma fase de suma importância, pois a precisão do resultado final depende muito do tipo de malha. Quanto mais fina for a malha, melhor será a precisão. No entanto, isto deve ser otimizado, levando-se em consideração o esforço e o tempo computacional.

### b) Solver:

Os procedimentos do algoritmo numérico seguem a seguinte linha:

- As variáveis do escoamento são modeladas a partir do sistema de equações de conservação da massa e quantidade de movimento;
- As equações fundamentais são discretizadas e substituídas, sendo que a discretização é feita pela técnica de volumes finitos;
- O sistema de equações é resolvido.

### c) Pós - processamento:

A fase de pós-processamento trata de análises das soluções obtidas através do software, os dados obtidos podem ser analisados e apresentados de diversas formas, através do próprio Fluent ou de outros aplicativos de apoio. Nesta tese utilizou-se o Tecplot e o Matlab.

Assim, o desenvolvimento do modelo numérico aqui apresentado utiliza de um dos seus módulos que permite resolver as equações fundamentais da continuidade e da quantidade de movimento (Cauchy), descritas no Capítulo 3, podendo-se optar pelo tipo de reologia. A técnica utilizada para a discretização das equações fundamentais é a de volumes finitos, que consiste em realizar um balanço das propriedades nas células, onde são integradas as equações. As equações são discretizadas no espaço e no tempo, para a obtenção um sistema linear que é resolvido por algoritmos específicos (MALISKA, 2004; PATANKAR, 1980; VERSTEEG; MALALASEKERA, 1995) Por se tratar de escoamento laminar, procedeu-se a simulação direta sem usar modelos de turbulência.

Para simular escoamentos com superfície livre (fronteira com forma deformável que constitui ela própria uma incógnita do problema) é necessário recorrer ao método *VOF* (*Volume of Fluid*) – item 4.1.1, o que corresponde a considerar o problema bifásico com uma fase de ar (gás ideal) e outra com o líquido. O método permite detectar a interface entre os dois fluidos através do cálculo da fração de volume que evolui desde 0 (ar) a 1 (líquido), e a isolinha de 0,5 é utilizada para identificar a superfície livre.

#### 4.1.1 Modelo multifásico

O *VOF* (*Volume of Fluid*) é um método muito utilizado em simulações de escoamentos bifásicos, por ser preciso na detecção das propriedades do escoamento na interface de dois fluidos. A formulação *VOF* é baseada no fato de dois ou mais fluidos não serem miscíveis. Em se tratando de escoamentos com superfície livre e com presença de ondas, o método tem sido bastante utilizado e se mostrado eficiente (MINUSSI, 2007; CONDE; DIDIER, 2009; BRITO, 2010).

Para cada fase, uma nova variável é introduzida: a fração de volume. Trata-se de um parâmetro escalar que varia entre 0 e 1. O valor 1 caracteriza o fluido líquido e o valor zero caracteriza o ar. O movimento da interface é dado por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \cdot \nabla C = 0 \quad (116)$$

que é a chamada equação de transporte da fração volumétrica  $C$ , onde  $u$  é o vetor velocidade.

Este método não calcula explicitamente a posição da superfície livre entre os fluidos (líquido e ar). A superfície livre é determinada em um campo de fração de volume. Ou seja, na prática é detectada na interface entre os dois fluidos. As propriedades físicas dos fluidos na região de transição são calculadas como médias ponderadas (BRITO, 2010). Sendo assim, a massa específica e a viscosidade são dadas pelas Equações 117 e 118:

$$\rho = C\rho_{(\text{água})} + (1 - C)\rho_{(\text{ar})} \quad (117)$$

$$\mu = C\mu_{(\text{líquido})} + (1 - C)\mu_{(\text{ar})} \quad (118)$$

O algoritmo de modelagem numérica para problemas com superfície livre podem ser encontrados em Ubbink e Issa (1999).

## 4.2 Fase de Pré Processamento

Na fase de pré-processamento é necessário a construção da malha e a definição das condições de contorno, seja para escoamentos em 2D ou 3D. Deve-se levar em consideração que uma malha não adequada pode alterar significativamente os resultados desejados, assim, como condições de contorno incompatíveis ao problema.

### 4.2.1 Construção da malha

Para a simulação do escoamento 2D de *roll waves*, utilizou-se uma malha retangular e estruturada, cujos elementos são alinhados com o escoamento, o que é indicado para escoamento com superfície livre, a vantagem deste tipo de malha é que utiliza-se menos elementos do que uma malha triangular, reduzindo assim o tempo de cálculo. Segundo instruções do Fluent 6.3 User's Guide (2008), malhas não estruturadas triangulares não são indicadas para escoamentos com superfície livre; pois induz à instabilidades e difusão numérica, podendo levar a soluções não realistas, sendo no entanto mais indicadas para discretizar regiões de fluido em torno de obstáculos, por exemplo.

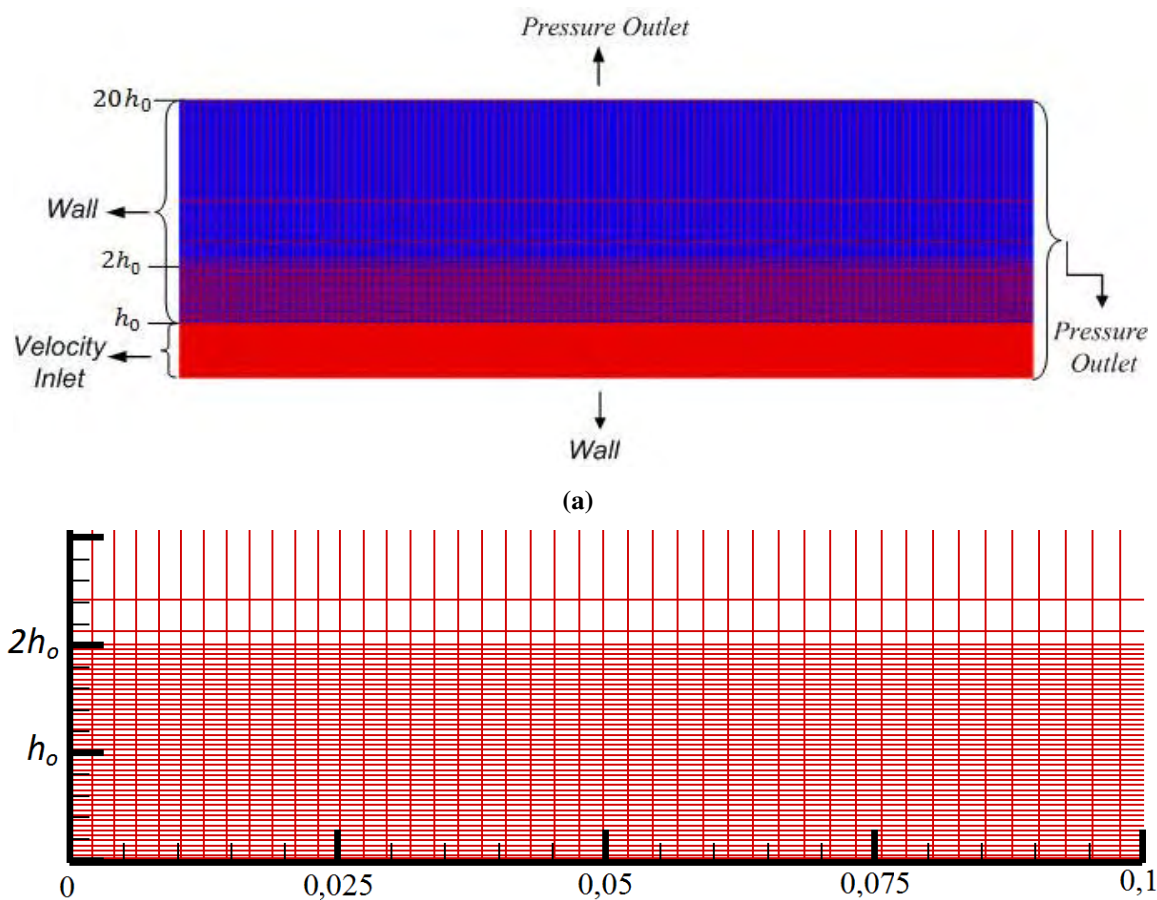
Como as *roll waves* são ondas longas quando comparadas à dimensão de um elemento da malha, o problema de amortecimento é evitado, conforme pode ocorrer com ondas de pequenos comprimentos (menores do que a dimensão do elemento da malha). Sabendo-se que

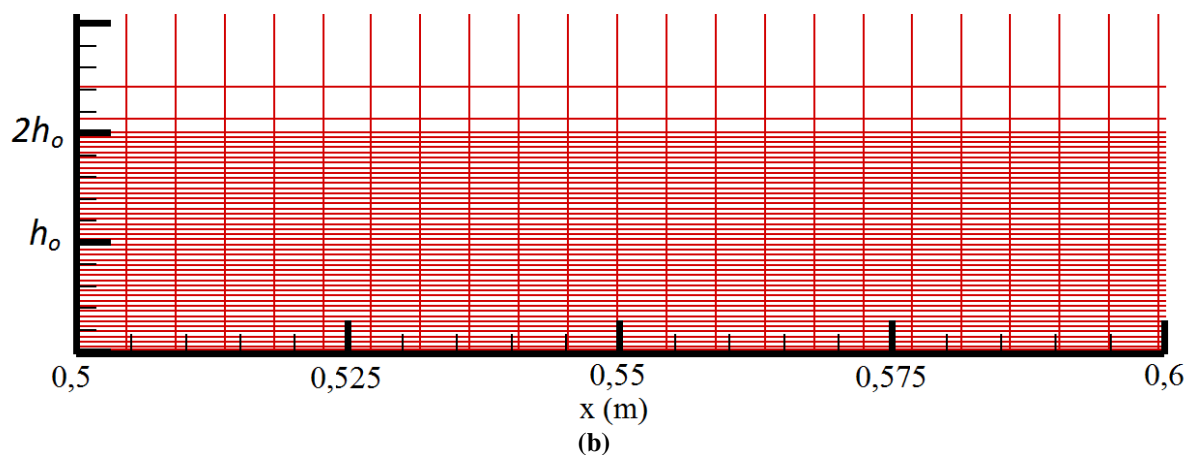
a malha deve ser bem estruturada e de dimensão ideal para garantir a solução desejável em um tempo não muito elevado, a mesma foi construída com as seguintes condições:

- a descontinuidade da malha foi evitada, ou seja, mudança brusca na dimensão dos elementos;
- na entrada (0,5 m), saída do escoamento e fundo do canal a discretização da malha é mais fina, com elementos mais estruturados possíveis; na entrada a dimensão dos elementos em  $x$  ( $\Delta x$ ), aumenta exponencialmente, até que  $\Delta x = 5\Delta y$ ;
- como a ordem de grandeza da amplitude da onda era incerta, uma região próxima da superfície livre foi refinada, numa espessura da ordem da lâmina inicial ( $h_0$ ).

A malha de discretização do domínio de cálculo ( $\Delta x, \Delta y$ ) foi construída usando o programa Gambit e a simulação tem as condições de contorno definidas conforme apresentado na Figura 28.

**Figura 28**– Malha numérica: (a) Malha e condições de contorno, (b) Detalhes da malha





Fonte: Elaborada pela própria autora

As hipóteses e condições de contorno assumidas para escoamento de fluido newtoniano (glicerina pura) são dadas por:

- Escoamento em duas dimensões sobre um canal retangular, com 3,5 metros de comprimento;
- Saída - *Pressure Outlet* (Pressão de Saída = Pressão atmosférica);
- Entrada - *Velocity Inlet*, Apenas a solução tipo é introduzida no domínio, com velocidade média dada pela Equação 119:

$$\bar{u} = \frac{1}{3} \left( \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \right) h_0^2 \quad (119)$$

Sendo  $h_0$  a lâmina inicial de entrada, correspondente ao regime uniforme no canal,  $g$ , a aceleração da gravidade,  $\mu$  a viscosidade dinâmica e  $\theta$  a inclinação do canal.

No restante da entrada, condição de parede é definida.

- Fundo do canal - *Wall* (Condição de parede, fluxo nulo);
- Cota superior do canal: *Pressure Outlet* (Saída de Pressão = Pressão atmosférica).

Para o caso não-newtoniano com reologia do tipo Herschel Bulkley as dimensões do canal foram modificadas, foi necessário um canal de maior comprimento (6m) para visualizar as ondas em sua forma estável e a velocidade média foi calculada de acordo com a forma que o modelo reológico é apresentado no software, que será mostrada na seção (4.2.1.1).

### 4.2.1.1 Tratamento numérico da velocidade média para reologia não-newtoniana

A análise de escoamentos com reologia mais complexa apresenta grande importância em engenharia, uma vez que estes estão presentes em fenômenos envolvendo fluidos não newtonianos. No entanto, para a simulação numérica destes fenômenos, as equações constitutivas devem receber um tratamento adequado e consoante com a reologia em questão.

A representação da forma com que o modelo de Herschel Bulkley é tratado no software FLUENT é dada pela Equação 5:

$$\bar{T} = \bar{T}_c + \eta \bar{D} \quad (120)$$

sendo que  $\bar{D}$  é o tensor de taxa de deformação e  $\eta$  é a viscosidade aparente, dados pelas Equações 121 e 122.

$$\bar{D} = \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (121)$$

$$\eta = \frac{\tau_c + K_n \left[ \dot{\gamma}^n - \left( \frac{\tau_c}{\mu_o} \right)^n \right]}{\dot{\gamma}} \quad (122)$$

sendo:

$\dot{\gamma}$ : taxa de deformação

$\tau_c$ : tensão crítica

$K_n$ : índice de consistência do fluido

$n$ : índice de escoamento

$\mu_o$ : parâmetro de ajuste para evitar a indeterminação do modelo (divisão por zero)

Levando-se em consideração que  $\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$ , tem-se a Equação 123:

$$\frac{\tau_c + K_n \left[ \dot{\gamma}^n - \left( \frac{\tau_c}{\mu_o} \right)^n \right]}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \eta \quad (123)$$

A relação  $\left(\frac{\tau_c}{\mu_o}\right)^n$  que se encontra na Equação 123 funciona como um ajuste/regulador do modelo de Herschel Bulkley para evitar indeterminação matemática ou divergência da viscosidade, pois quando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  (taxa de deformação tende a zero) tem-se  $\eta \rightarrow \infty$  (viscosidade aparente tendendo para infinito).

Com o modelo de Herschel Bulkley nesta configuração, é necessário impor o parâmetro  $\mu_o$ . Com esta imposição deve-se calcular novamente a velocidade média do escoamento em regime uniforme, que é inserida como dado de entrada da simulação.

Considerando  $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial z}$  e o atrito de fundo do canal dado pela Equação 16 (Capítulo 3), tem-se a equação 124 representando o equilíbrio de forças:

$$\rho g \sin \theta (h_0 - z) = \tau_c + K_n \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n - \left( \frac{\tau_c}{\mu_o} \right)^n \right] \quad (124)$$

A Equação 9 é resolvida de forma análoga à Equação 17 (Capítulo 3), assim tem-se que o perfil de velocidade é dado por:

– **Região Cisalhada** ( $0 \leq z \leq z_{0num}$ ):

$$u_{num}(z) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \sin \theta}{K_n} z_{0num}^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{z}{z_{0num}} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (125)$$

– **Região Não Cisalhada** ( $z_{0num} < z \leq h$ ):

$$u_{num}(z) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \sin \theta}{K_n} z_{0num}^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (126)$$

Sendo:

$$z_{0num} = h_0 - \left[ \frac{\tau_c}{\rho g \sin(\theta)} + \frac{k_n}{\rho g \sin(\theta)} \left( \frac{\tau_c}{\mu_o} \right)^n \right] \quad (127)$$

A velocidade média utilizada também é calculada de forma análoga à Equação 25:

$$\bar{u}_{num} = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \sin \theta}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} (z_{0num})^{\frac{n+1}{n}} \left[ 1 - \frac{n}{2n+1} \left( \frac{z_{0num}}{h_0} \right) \right] \quad (128)$$

É importante destacar que com a imposição da velocidade média numérica ( $\bar{u}_{num}$ ) é necessário fazer a escolha de ( $\mu_0$ ) de forma adequada, geralmente são valores elevados. Ressalta-se que uma escolha inadequada ou errônea pode alterar o tipo de fluido. Com as simulações realizadas, pôde-se perceber que o melhor resultado obtido foi para  $\mu_0 = 1000 \text{ kg/ms}$  (Apêndice D) que, numericamente, gera instabilidades de amplitude máxima, pouco sensível a um eventual valor superior a  $\mu_0$ .

Os testes de validação foram feitos através de comparações com o modelo matemático em relação ao perfil de velocidades e taxa de deformação do escoamento, tanto para fluido newtoniano, quanto para fluido não newtoniano, conforme mostrado no Capítulo 5.

#### 4.2.2 Imposição de uma perturbação

Com os parâmetros fixados e condições de contorno estabelecidas, é imposta na velocidade de entrada uma pequena perturbação senoidal de período  $T$ , com o propósito de avaliar qual seria a relação entre as instabilidades geradas e a fonte perturbadora. Este tipo de análise foi explorado por outros autores como, por exemplo, Zannutigh e Lamberti (2002) e Maciel (2001), que verificam a geração de *roll waves* para fluidos de reologia newtoniana e não-newtoniana, respectivamente, utilizando esquemas numéricos de diferenças finitas para a resolução das equações de águas rasas. Assim, a velocidade de entrada é dada pela seguinte equação:

$$V = \bar{u} \left[ 1 + B \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \right] \quad (129)$$

Sendo  $B$  a magnitude da perturbação e  $T$  é o período. A velocidade média  $\bar{u}$  é dada pela Equação 119 para o caso newtoniano e pela Equação 128 para o caso não-newtoniano.

Deve-se ressaltar que a imposição da perturbação foi feita através de uma UDF (*User Defined Function*), cujo algoritmo é programado em C (Apêndice D). Após a construção da malha e as condições de contorno definidas, o sistema de equações estabelecido (conservação da massa e Cauchy) é discretizado e devidamente aproximado pelo software, através dos

esquemas numéricos setados, sendo resolvido em regime transiente. Para isto é necessário escolher os esquemas numéricos adequados para obter a solução desejada.

### 4.2.3 Condições de operação

No interior do domínio são definidas as zonas dos fluidos. Para isto é necessário identificar os fluidos presentes no escoamento e suas propriedades, tais como: massa específica, viscosidade e para o caso não-newtoniano o modelo reológico utilizado. Nesta fase define-se também a aceleração da gravidade, que é onde se determina a inclinação do canal.

Como se trata de um modelo multifásico, é necessário definir as fases dos fluidos (primária ou secundária). Nestes modelos, a fase mais leve costuma ser definida como a fase primária (ar), o que irá contribuir para obtenção de melhores resultados, considerando a pressão na superfície livre igual a pressão atmosférica (FLUENT 6.3 USER'S GUIDE, 2006).

Vale destacar que o domínio possui uma lâmina inicial de escoamento, seja para o caso newtoniano ou não newtoniano. Definidas as condições de contorno e todas as condições de operação, é necessário escolher os esquemas numéricos adequados ao problema estudado.

## 4.3 Esquemas Numéricos (Solver)

O software FLUENT (versão 6.3.26) oferece uma grande variedade de modelos de discretização e de solvers contendo variáveis que podem afetar a convergência ou até mesmo a solução desejada. Vale destacar que os esquemas numéricos aqui apresentados já foram utilizados em simulações de escoamentos com superfície livre (CONDE; DIDIER, 2009). A Tabela 1 mostra um resumo dos esquemas numéricos utilizados.

**Tabela 1** - Esquemas numéricos utilizados

Modelo Multifásico	VoF
Tempo	<i>Unsteady</i>
Modelo Viscoso	<i>Second Order Implicit</i>
Acoplamento: Pressão/Velocidade	<i>Laminar</i>
Pressão	<i>Simplec</i>
Quantidade de Movimento	<i>Presto</i>
Fração de Volume	<i>Third Order MUSCL</i>
	<i>Modified HRIC</i>

**Fonte:** Elaborada pela própria autora

### – Acoplamento Pressão - Velocidade

O acoplamento Pressão - Velocidade à equação da conservação da quantidade de movimento pode ser realizado por três métodos diferentes no Software Fluent: SIMPLE, PISO e SIMPLEC (FLUENT 6.3 USER'S GUIDE, 2006). O algoritmo do SIMPLE (PATANKAR; SPALDING, 1972) é iterativo e o campo de pressões é estimado para determinar as componentes da velocidade. A correção da pressão é deduzida a partir das equações da quantidade de movimento e continuidade. Isto é repetido até ocorrer a convergência. Já o esquema PISO (*Pressure-Implicit with Splitting of Operators*) considera a qualidade de cada elemento de malha e executa dois cálculos adicionais com relação à correção de pressão (FLUENT 6.3 USER'S GUIDE, 2006).

Neste problema, o algoritmo utilizado para o acoplamento é o *SIMPLEC* (VAN DOORMAL; RAITHBY, 1984), conforme já utilizado em outros trabalhos de escoamento com superfície livre (MINUSSI, 2007; LEITE, 2009), cuja estrutura é semelhante ao *SIMPLE*, possuindo, porém, uma relação que permite corrigir a pressão a cada nova iteração de velocidade. A diferença entre os dois algoritmos está apenas na expressão da correção da pressão, sendo que o *SIMPLEC* apresenta resultados mais precisos (FLUENT 6.3 USER'S GUIDE, 2006).

### – Pressão

A interpolação da pressão é feita pela rotina PRESTO (Pressure STaggering Option) aconselhado pelo manual do FLUENT para modelagem de todas as simulações que utiliza o esquema multifásico VOF.

### – Fração de Volume

Dentre os esquemas disponíveis QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics), esquema de segunda ordem (2nd Order Upwind) e HRIC (High-Resolution Interface Capturing). Para evitar a difusão numérica, o método utilizado para a discretização do problema de duas fases é o HRIC, pois foi desenvolvido para ser aplicado com o esquema VOF, apresentando assim, resultados mais precisos na região de interação entre as duas fases (ar e água) (FLUENT 6.3 USER'S GUIDE, 2006).

### – Equação da quantidade de movimento

Neste caso, o termo convectivo da equação de quantidade de movimento é modelado pelo esquema Third Order MUSCL (*Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws*) que permite obter melhores resultados em comparação com a utilização de esquemas de ordem inferior (por exemplo, UDS de 1ª ordem). Segundo Fluent 6.3 User's Guide, (2006), o esquema MUSCL melhora a precisão espacial para todos os tipos de malhas reduzindo a difusão numérica, o que justifica a escolha do método. Vale destacar que as simulações também foram realizadas utilizando o esquema *Power law* (FERREIRA et al., 2011) apresentando bons resultados para fluido newtoniano (solução aquosa de glicerina).

#### 4.3.1 Discretização temporal

Para simular numericamente o problema, o mesmo não é discretizado apenas no espaço. Sendo um problema transiente é necessário a discretização no tempo também, por isso é que se deve escolher o passo de tempo e o número de iterações realizadas. Estes dois parâmetros são importantes, pois podem determinar a precisão dos resultados da simulação numérica e também do tempo de cálculo. O uso de valores não apropriados pode ocasionar perdas de informações e também não levar a convergência das componentes de velocidade, fração de volume e conservação da massa. O intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) deve ser pequeno o suficiente para resolver todas as propriedades dependentes do tempo.

A dimensão dos elementos da malha juntamente com o tamanho do passo de tempo influencia muito na convergência da solução. Malhas muito finas exigem passo de tempo muito pequeno, o que pode acarretar em tempo de cálculo elevado. Isto ocorre porque o fluido não se move mais de uma célula num intervalo de tempo.

Nesta tese, como foi utilizado o VOF implícito, os passos de tempo são fixos. Para os casos newtonianos, inicialmente foi utilizado  $\Delta t = 0,0001s$ , como teste, em seguida utilizou-se  $\Delta t = 0,001s$  para a mesma malha. Em ambos os casos com 8 iterações por passo de tempo. Pôde-se observar que não havia alterações nas soluções, mas sim, uma redução significativa no tempo de cálculo.

Já o caso não-newtoniano, com  $\Delta t = 0.001s$  apresentou problemas de convergência. Por isso, foi utilizado  $\Delta t = 0,0001s$  com 10 iterações por passo de tempo. Contudo vale ressaltar, que para  $\mu_0 > 1000kg/ms$  a simulação apresentou problemas de convergência. Neste caso pôde-se perceber através de testes que o problema de convergência era resolvido

quando  $\Delta t = 0,000001s$ , porém não é conveniente, pois o tempo de cálculo é muito elevado, e os resultados obtidos para  $\mu_0 = 1000kg/ms$  com  $\Delta t = 0.0001s$  se mostram satisfatórios (Capítulo 5).

Este capítulo apresentou, de forma condensada, os principais passos da modelagem numérica utilizada para simular *roll waves* a partir das equações completas (Cauchy), utilizando o software FLUENT tanto para fluido newtoniano quanto para fluido não newtoniano. Procura-se, destacar que o simulador tem capacidade para simular diversas situações físicas, seja em escoamentos confinados ou com superfície livre, de fluidos compressíveis, incompressíveis e multifásicos, 2D ou 3D. Porém na fase de pré-processamento é necessário uma malha adequada, definir os esquemas numéricos ideais a serem utilizados e, sobretudo as condições de contorno. Os resultados obtidos são apresentados no Capítulo 5.

---

## CAPÍTULO 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

---

Neste capítulo, são apresentadas as simulações numéricas efetuadas, através do software Fluent, tanto para fluido newtoniano, quanto não-newtoniano, com o intuito de verificar as condições de geração e propagação de *roll waves* e as propriedades físicas que influenciam no perfil das mesmas.

Com base no modelo numérico estabelecido no capítulo 4, um estudo de caso para fluido de reologia newtoniana é desenvolvido. O problema em questão é um escoamento de glicerina em regime laminar, onde foi possível verificar a formação de *roll waves* experimentalmente com a imposição de uma perturbação (FIOROT, 2012), conforme mostrado no Anexo B.

Para fluido de reologia não-newtoniana foram realizadas simulações numéricas, cujas propriedades reológicas do fluido são aquelas apresentadas no trabalho de (NG; MEI, 1994).

### 5.1 Testes com Resultados Experimentais para fluido newtoniano

Nesta seção serão apresentados resultados baseados nos ensaios realizados por Fiorot (2012), para três casos distintos. O fluido utilizado é a glicerina, de propriedades newtonianas, porém altamente viscoso, cuja viscosidade é aferida após cada ensaio. As aferições para ambos os casos foram feitas fixando uma vazão ( $Q$ ) para o canal inclinado em 8 graus, considerando um domínio favorável para geração de instabilidades na superfície livre, ou seja, para  $Fr > \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

No módulo experimental, espera-se, inicialmente, alguns minutos para que o escoamento estabilize e a aferição da superfície livre com o escoamento em regime uniforme seja feita. Em seguida, uma perturbação de frequência ( $f$ ) é aplicada ao sistema. As amplitudes das instabilidades que aparecem na superfície livre são medidas. Os parâmetros dos ensaios são mostrados na tabela 2.

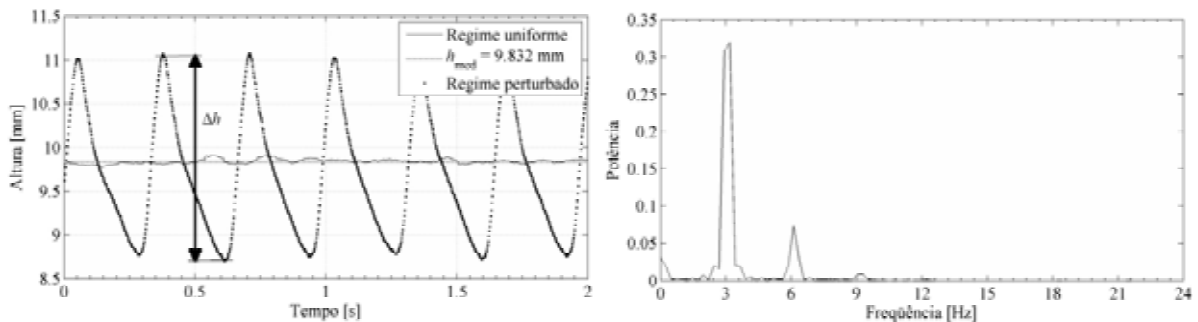
**Tabela 2**– Parâmetros dos ensaios para vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s (Fiorot, 2012).

Vazão ( $Q$ )	Viscosidade dinâmica ( $\mu$ )	Massa específica ( $\rho$ )	Profundidade do escoamento uniforme ( $h_o$ )	Velocidade média experimental ( $u_{oe}$ )	Número de Froude ( $Fr$ )
0,75 l/s	0,212 kg/ms	1237 kg/m <sup>3</sup>	0,009832 m	0,2558 m/s.	0,83
0,96 l/s	0,2173 kg/ms	1237 kg/m <sup>3</sup>	0,010726 m	0,2430 m/s.	0,92
1,14 l/s	0,2117 kg/m	1237 kg/m <sup>3</sup>	0,011566 m	0,2822 m/s.	0,98

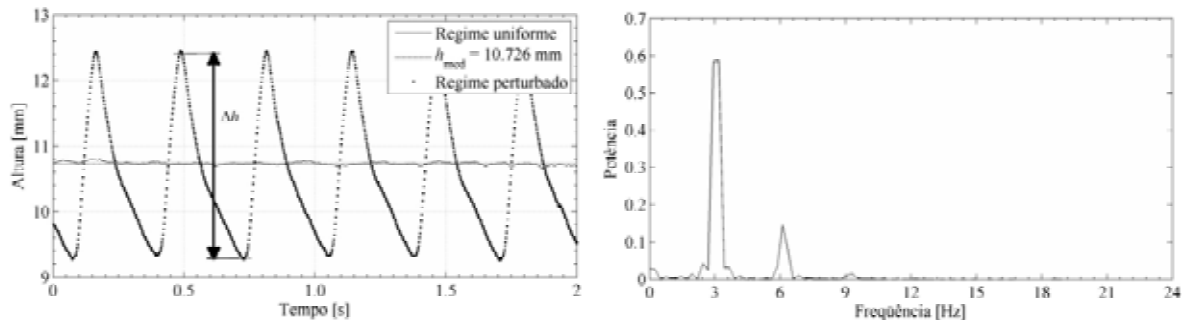
Fonte: Fiorot (2012).

A Figura 29 mostra os resultados dos três ensaios para o escoamento em regime uniforme e para o escoamento com propagação de *roll waves*. O espectro do sinal de perturbação também é apresentado na Figura 30, onde a frequência que possui a maior potência é de 3 Hz, ou seja, é a frequência dominante.

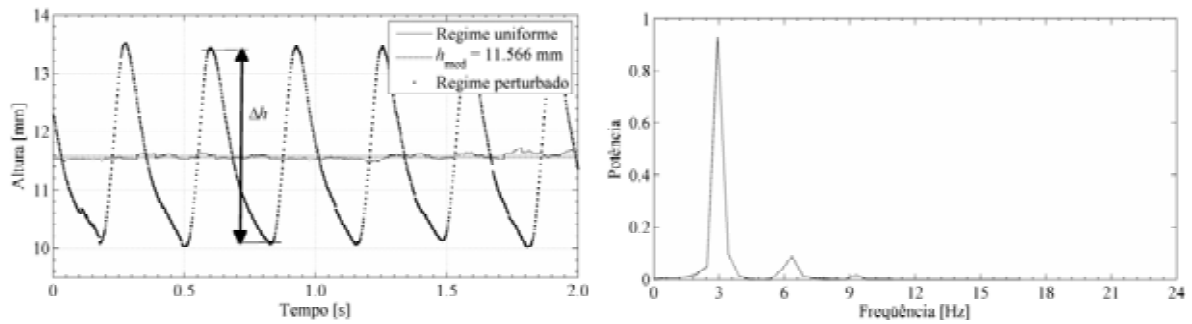
**Figura 29** – Resultado experimental do perfil da superfície livre para o regime uniforme e regime perturbado e o espectro do sinal de perturbação para cada ensaio: a) Ensaio para uma vazão de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s.



(a)



(b)



(c)

Fonte: Fiorot (2012).

Através da Figura 29 pode-se observar que em ambos os casos, o período ( $T$ ) das ondas é de 0,33s, ou seja, é idêntico ao período da perturbação imposta ao sistema.

No que diz respeito à variação da superfície livre, tem-se que para o canal inclinado em 8 graus e vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s, as amplitudes de ondas são de 2,25 mm, 3,16 mm e 3,38 mm, respectivamente. Deve ser salientado também que com o aumento da vazão ocorreu um aumento no número de Froude (Tabela 2), o que comprova que quanto maior o número de Froude, maior deverá ser a amplitude das ondas, conforme mostrado por Maciel (2001).

A partir dos dados destes experimentos, simulações numéricas são realizadas utilizando o FLUENT, com o objetivo de realizar comparações entre os modelos físico e numérico. A seguir, as comparações serão feitas também com o modelo matemático de geração de *roll waves* apresentado nesta tese.

### 5.1.1 Simulação numérica para o 1º caso

Inicialmente, a simulação do escoamento foi feita sem a introdução de perturbação, com o objetivo de verificar suas propriedades, tais como perfil de velocidade e taxa de

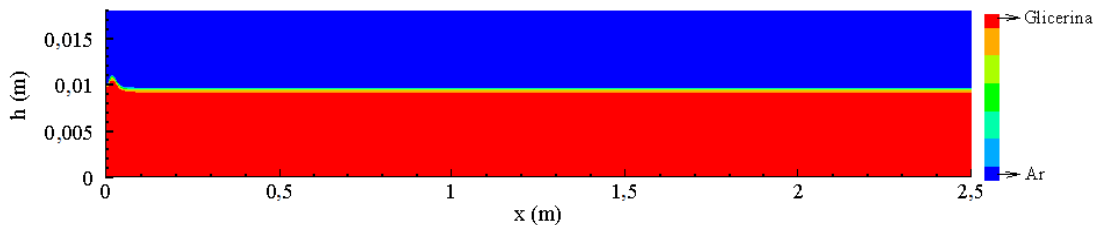
deformação, e assim, verificar se as condições setadas no modelo numérico são adequadas ao problema em questão.

Ressalta-se que a velocidade média do escoamento imposta no modelo numérico é calculada através da Equação (119) e apresenta uma diferença de 0,35% em relação a velocidade média experimental que é de 0,2558 m/s.

A partir da velocidade média do escoamento, estimam-se os valores de dois parâmetros de interesse em escoamentos viscosos com superfície livre: o número de Reynolds e o de Froude. Para este escoamento, tem-se:  $Re \cong 14,72$  e  $Fr \cong 0,83$ .

A Figura 30 mostra o escoamento em regime uniforme após 10s de simulação (tempo físico).

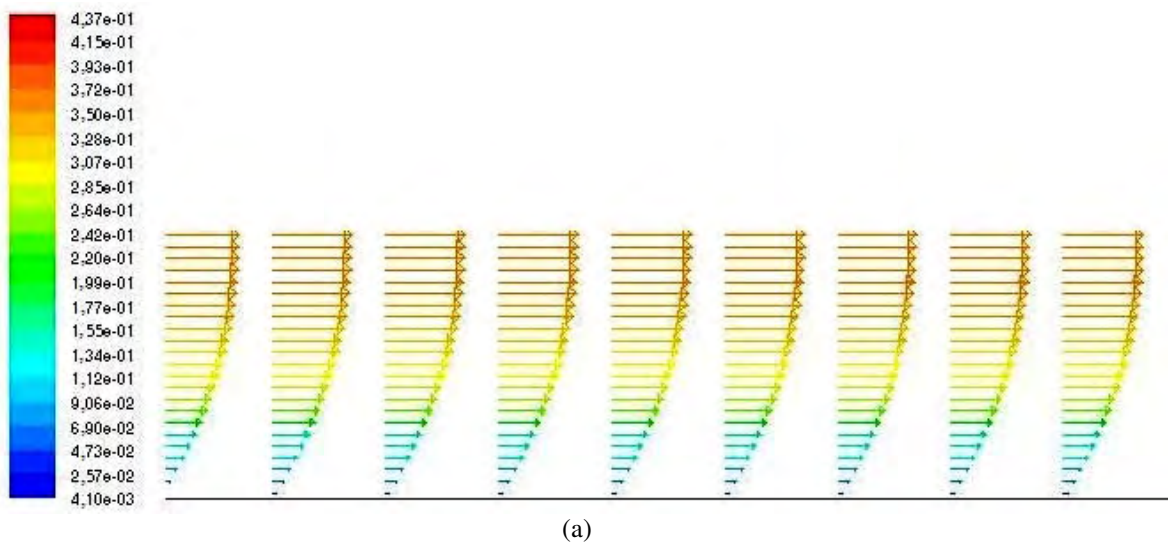
**Figura 30-** Escoamento em regime uniforme



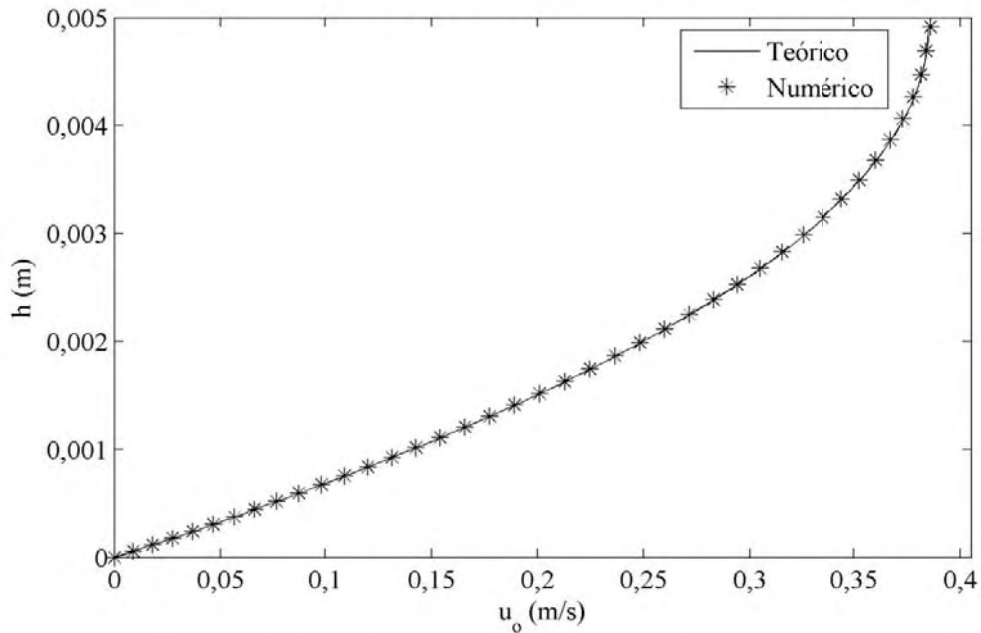
Fonte: Elaborada pela própria autora

Pode-se observar que o escoamento é laminar, o que geralmente ocorre para fluidos muito viscosos. Nesta condição, a primeira análise é feita em relação ao perfil de velocidade. Na Figura 31, é ilustrado o perfil de velocidade através de simulação numérica utilizando o software Fluent e o perfil de velocidade teórico, que é resultado da Equação 18.

**Figura 31** – Perfil de velocidade do escoamento em regime uniforme: (a) Através de simulação numérica utilizando o Fluent, (b) Perfil de velocidade teórico e numérico



(a)



(b)

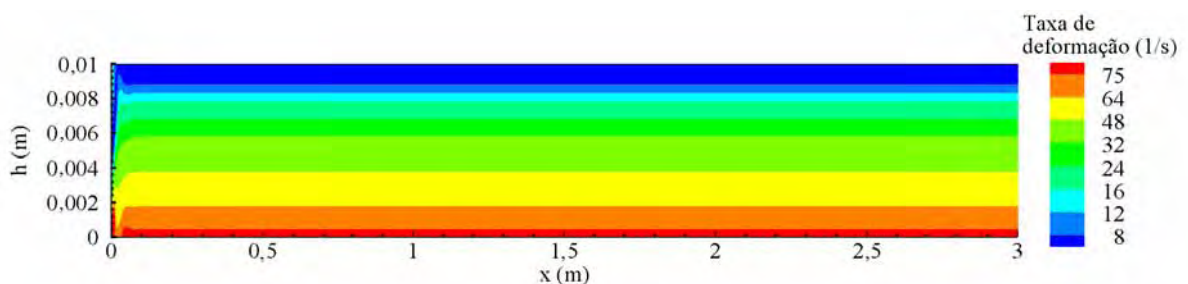
Fonte: Elaborada pela própria autora

Pode-se observar através da Figura 31a, que o escoamento apresenta um perfil de velocidade parabólico e que o vetor velocidade é idêntico em módulo, sentido e direção ao longo do canal, ou seja, o escoamento é uniforme, o que era esperado e está em consonância com a literatura.

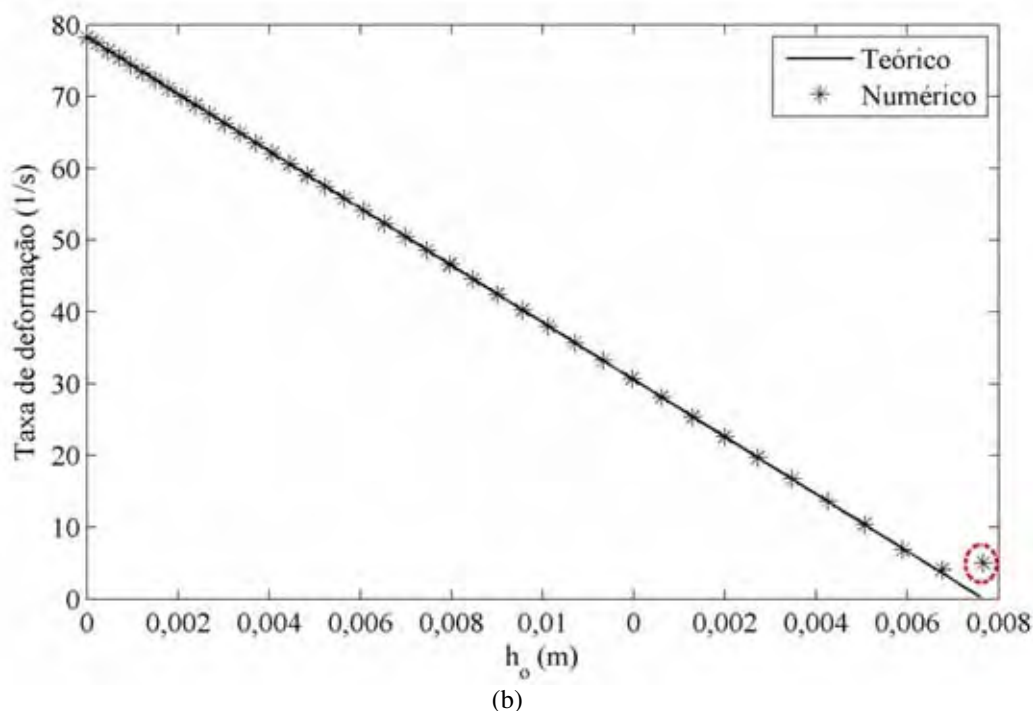
Comparando as Figuras 31a e 31b, observa-se que estão na mesma ordem de grandeza e para  $h_0 = 0,009832$  m, que é a superfície livre do escoamento, a velocidade analítica é de 0,385 m/s, apresentando uma boa concordância com o resultado obtido através da simulação numérica com o Fluent.

Nas mesmas condições, pode-se observar a variação da taxa de deformação em relação a profundidade do escoamento. A Figura 32, mostra a taxa de deformação obtida através da simulação numérica e a taxa de deformação dada pela Equação 29.

**Figura 32** – Taxa de deformação do escoamento: (a) Simulação numérica utilizando o Fluent, (b) Taxa de deformação teórica calculada através da Equação 29 e numérica através do Fluent.



(a)



Fonte: Elaborada pela própria autora

Através da Figura 32a pode-se observar que a taxa de deformação do fluido é constante ao longo do canal e varia somente em relação a profundidade do escoamento e quanto mais próximo do fundo do canal maior deverá ser a taxa de deformação. Além disso, verifica-se através da Figura 32b que existe uma boa concordância entre o resultado da simulação numérica e o resultado teórico para a taxa de deformação. O ponto que aparece fora da curva teórica já está acima da interface entre os dois fluidos (glicerina e ar).

As análises efetuadas possibilitaram verificar que o modelo numérico e as condições de contorno estabelecidas estão adequadas para as simulações de escoamentos laminares de fluido newtoniano altamente viscoso, neste caso representado pela glicerina.

Com estas condições verificadas, é de interesse analisar a geração e propagação de *roll waves* através de uma perturbação imposta no escoamento uniforme.

### 5.1.2 Introdução de uma Perturbação

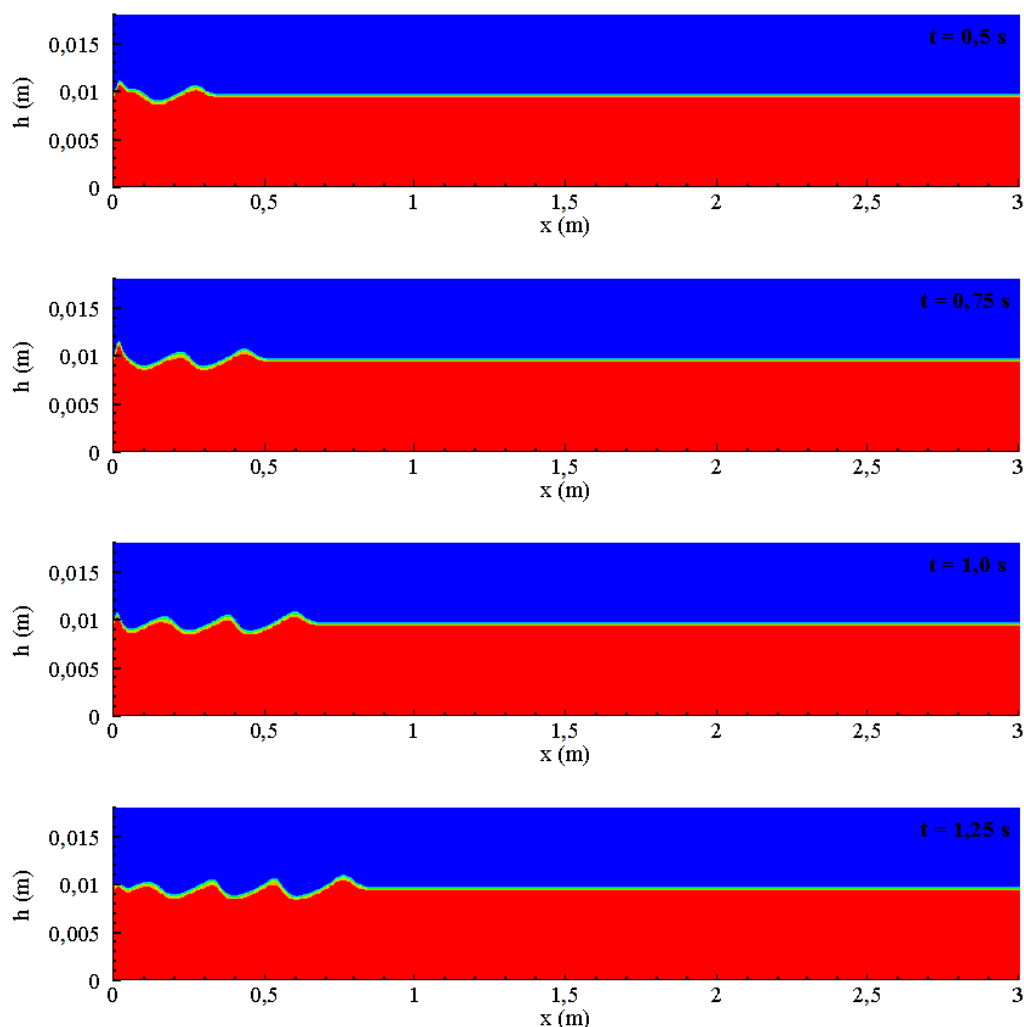
Com os parâmetros setados no Capítulo 4 e condições estabelecidas, sobre a velocidade de entrada foi imposta uma pequena perturbação senoidal de período  $T$ , com o propósito de avaliar qual seria a relação entre as instabilidades geradas e a fonte perturbadora. Assim, a velocidade de entrada é dada pela Equação (129).

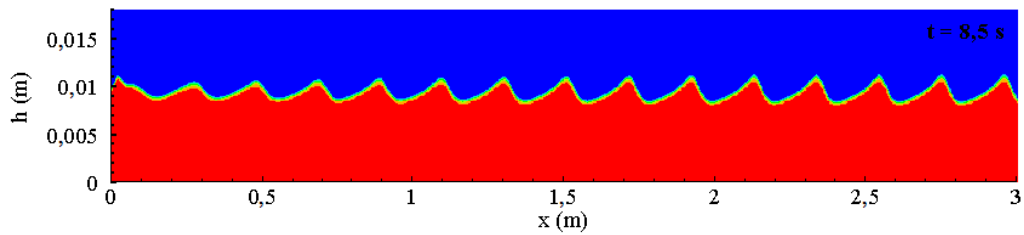
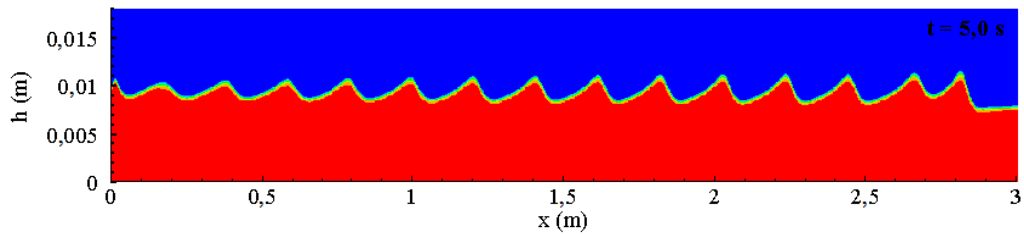
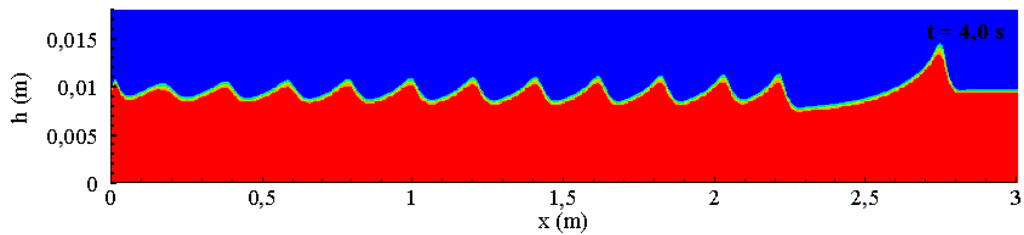
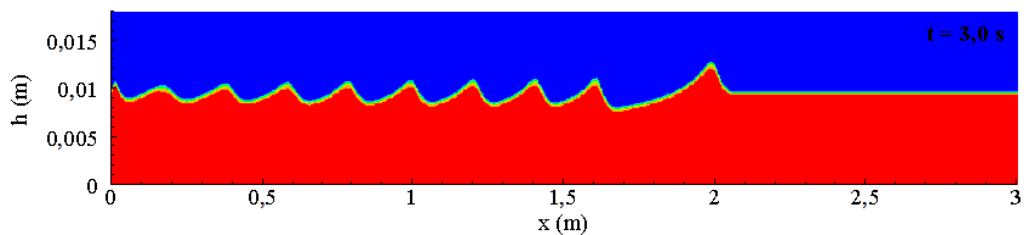
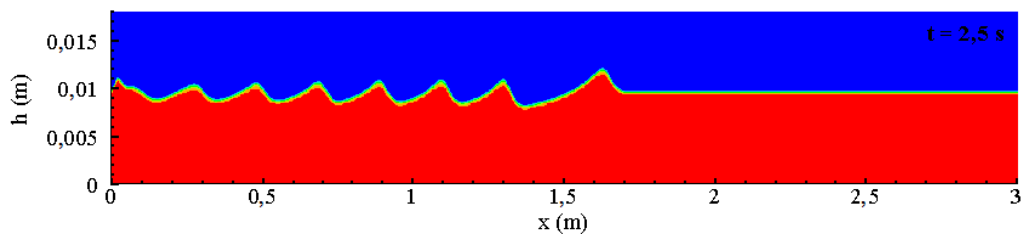
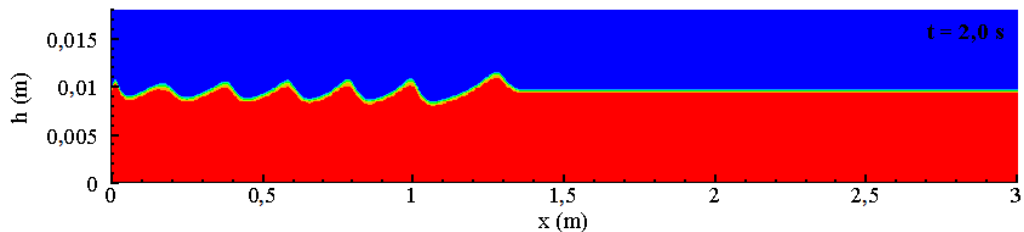
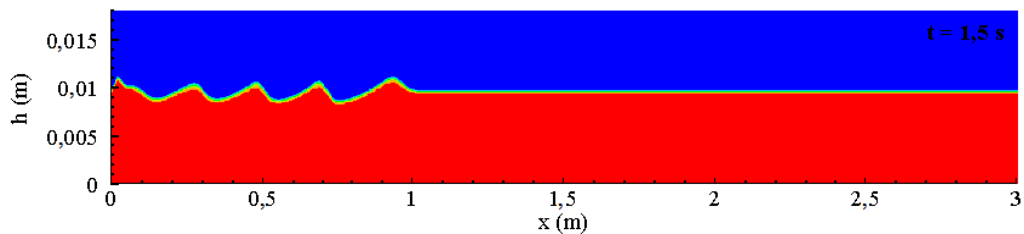
Esse tipo de análise foi explorado por outros autores como, por exemplo, Zannutigh e Lamberti (2002) e Maciel (2001), que verificam a geração de *roll waves* para fluidos de reologia newtoniana e não-newtoniana, respectivamente, utilizando esquemas numéricos de diferenças finitas do tipo Godunov-Van Leer para a resolução das equações de águas rasas.

Com todos os parâmetros setados no programa, o problema é resolvido, com a imposição de uma perturbação com frequência ( $f$ ) de 3 Hz e magnitude ( $B$ ) de 0,15. O tempo de cálculo exigido pelo método foi de aproximadamente 58 horas, para um passo de tempo de 0,0001s e 10 iterações por passo de tempo, utilizando um computador com processador i7 – 2600, CPU 3.40 GHz, memória RAM de 8.0 GB e o sistema operacional de 64 bits.

O tempo de cálculo é grande, pois é necessário um domínio extenso e bem refinado para que *roll waves* possam ser observadas de forma estável. A Figura 33, mostra os resultados para vários instantes da simulação.

Figura 33 – Propagação de *roll waves* ao longo do canal



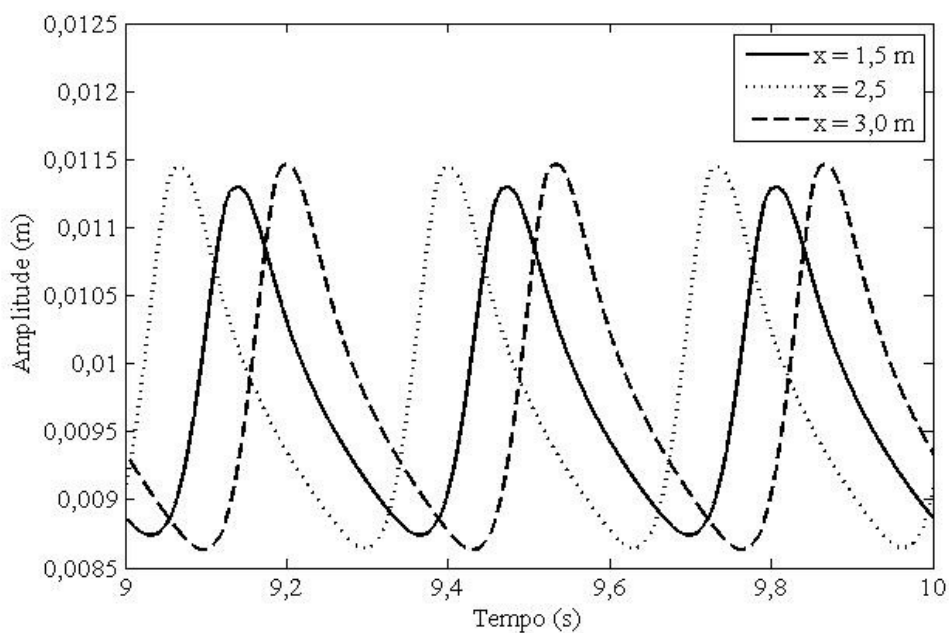


Fonte: Elaborada pelo própria autora

Pode-se observar que a partir do instante  $t = 5$  s, as ondas se encontram estáveis, com comprimento de onda ( $\lambda$ ) e amplitude bem definidos. Neste caso, o comprimento de onda é de aproximadamente 0,208 m, ou seja, são ondas longas, típicas de escoamentos de águas rasas.

O modelo numérico também permite que a visualização temporal do fenômeno seja feita para cada ponto fixo no espaço, de onde é possível perceber que o período da onda é de aproximadamente 0,33 s, o que corresponde ao período da perturbação que foi imposta, independente do ponto de medição, conforme verificado nos resultados experimentais (FIOROT, 2012) e também mostrado numericamente por Maciel (2001). A Figura 34 mostra a amplitude das ondas em função do tempo, em pontos fixos ao longo do canal.

**Figura 34** – Amplitude das ondas em função do tempo nos pontos 1,5 m, 2,5 m e 3,0m.



**Fonte:** Elaborada pela própria autora

Pode-se observar através da Figura 34, que a posição em que é feita a medição das *roll waves* é muito importante em relação à amplitude das mesmas, pois para uma mesma frequência de perturbação, as ondas medidas em pontos diferentes podem apresentar amplitudes diferentes, se medidas em pontos anteriores a sua estabilização. Neste caso, a amplitude das *roll waves* estabiliza a partir do ponto 2,5 m.

Vale ressaltar também que a análise espacial e temporal é importante, pois além da amplitude, permite calcular uma outra variável de interesse na análise de *roll waves*, que é a

velocidade de propagação das ondas ( $U = \lambda/T$ ), Para este caso, a velocidade de propagação das *roll waves* já estabilizadas é de aproximadamente 0,631 m/s.

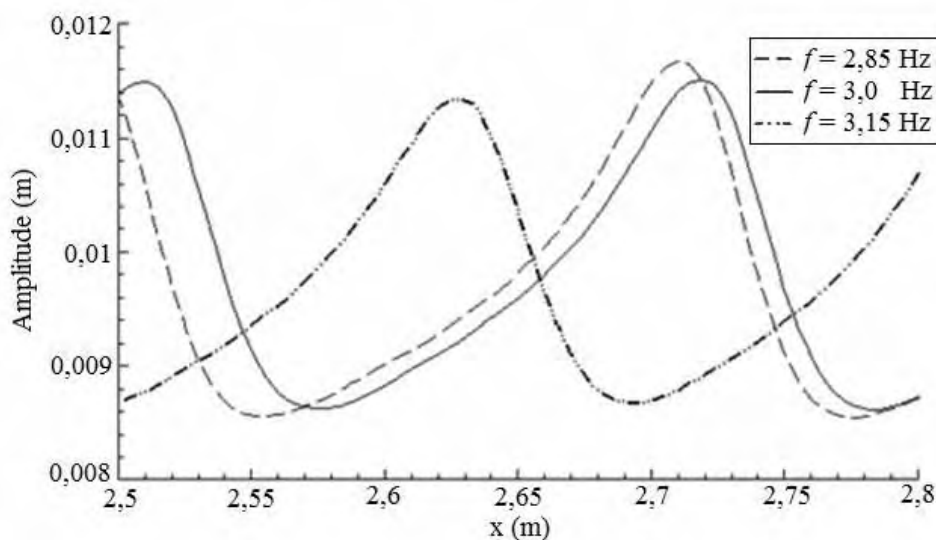
### 5.1.3 Análise dos Efeitos da Perturbação Imposta e do Número de Froude

Este item tem como objetivo verificar alguns elementos norteadores no que diz respeito ao perfil das *roll waves* (amplitude e comprimento) em função de dois importantes parâmetros de controle, ou seja, a perturbação imposta e o número de Froude.

#### – Avaliação da Frequência e Magnitude de Perturbação

Inicialmente foram feitas simulações com variações de apenas 5% das frequências de perturbações impostas, com o intuito de averiguar a sensibilidade do modelo numérico. A Figura 35 mostra a influência da frequência de perturbação ( $f$ ) no comprimento e amplitude das *roll waves* geradas.

Figura 35- Variação da frequência de perturbação ( $f$ )



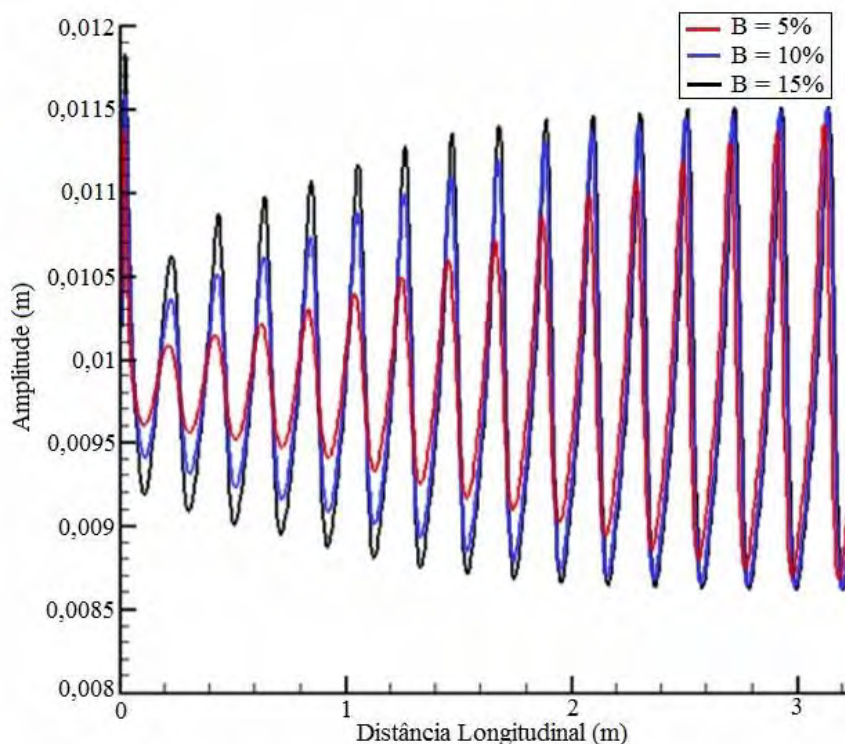
Fonte: Elaborada pela própria autora

Através da Figura 35, pode-se observar que:

- um pequeno aumento na frequência acarreta em uma diminuição da amplitude da onda, o que mostra que o modelo numérico é muito sensível ao parâmetro frequência de perturbação.

Um outro parâmetro analisado é a magnitude de perturbação, conforme apresentado na Figura 36.

**Figura 36** - Variação do efeito da magnitude de perturbação ( $B$ )



**Fonte:** Elaborada pela própria autora

No que diz respeito à magnitude de perturbação imposta, a partir dos resultados conclui-se que:

- para uma dada frequência, a magnitude de perturbação não deve influenciar sobre a amplitude e o comprimento da *roll wave*;
- uma perturbação de maior intensidade deverá apenas antecipar o aparecimento da *roll wave*, ou seja, mesmo perturbando mais o escoamento uniforme, as ondas tendem a estabilizar, sem alterações de amplitude, comprimento e velocidade de propagação, o que está em consonância as análises de (MACIEL, 2001).

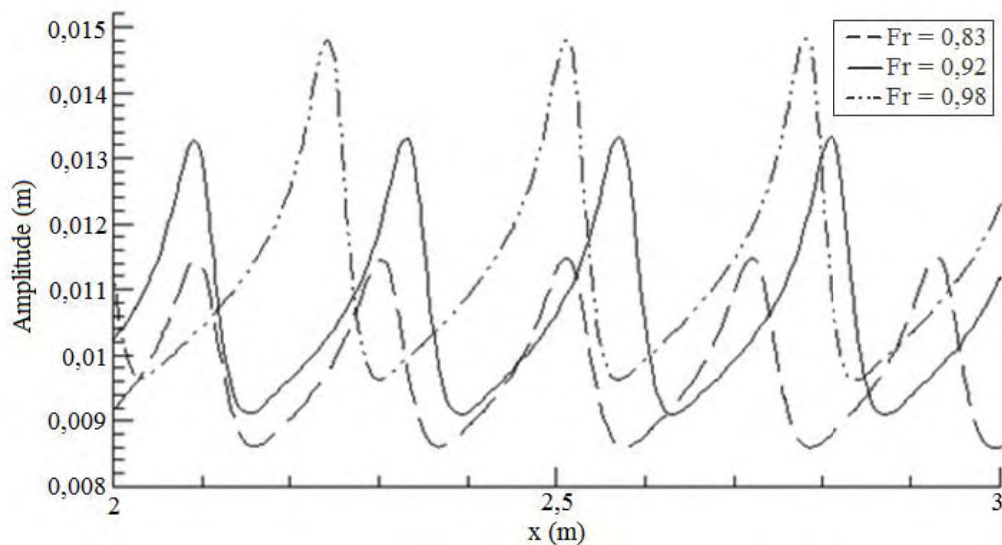
#### – Avaliação do Efeito do Número de Froude

No que diz respeito à avaliação do número de Froude, outros casos foram simulados baseados nos testes experimentais realizados por (FIOROT, 2012). Para uma mesma inclinação de canal ( $8^\circ$ ) as simulações numéricas foram também realizadas para vazões de

0,96 l/s e 1,14 l/s, cujos dados dos ensaios são mostrados na Tabela 2. Primeiro foram verificadas as condições de escoamento em regime uniforme. Deve-se ressaltar que as velocidades médias impostas no modelo numérico foram calculadas através da Equação 119, para manter o escoamento em regime uniforme, apresentando assim, variações em relação à velocidade experimental medida.

As simulações também foram realizadas com a introdução de uma perturbação com frequência de 3 Hz e magnitude  $B = 15\%$ . A Figura 37 apresenta uma comparação entre as *roll waves* geradas para os escoamentos com vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s, cujos números de Froude do escoamento são 0,83, 0,92 e 0,98, respectivamente.

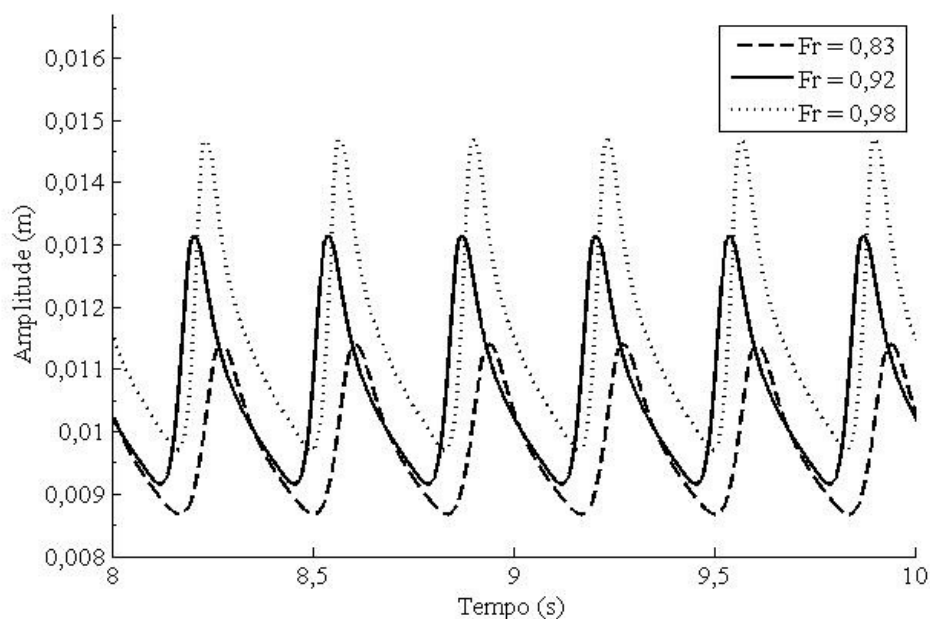
**Figura 37** – Gráfico comparativo entre ondas geradas para vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s, com números de Froude de 0,83, 0,92 e 0,98, respectivamente.



**Fonte:** Elaborada pela própria autora

Através da Figura 37 pode-se comprovar que, quanto maior o número de Froude, maior será amplitude da *roll wave*, conforme verificado experimentalmente por Fiorot (2012) e numericamente por Maciel (2001), conforme já mencionado no Capítulo 2. E, ainda, observa-se que um aumento no número de Froude também acarreta em aumento no comprimento de ondas.

Para verificar o perfil das *roll waves* em função do tempo e também calcular a velocidade de propagação destas ondas, monitores foram colocados em vários pontos ao longo do canal. A Figura 38 mostra uma comparação entre as *roll waves* para diferentes números de Froude medidas no ponto 2,5 m.

**Figura 38** - Gráfico comparativo entre ondas geradas para diferentes números de Froude em função do tempo.

Fonte: Elaborada pela própria autora

Pode-se observar que o período das *roll waves* é o mesmo da perturbação imposta conforme verificado experimentalmente por Fiorot (2012). Para efeito de comparação, a Tabela 3 mostra os resultados numéricos obtidos para amplitude, comprimento e velocidade de propagação das ondas em cada caso simulado.

**Tabela 3** – Propriedades das *roll waves* para vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s

Vazão ( $Q$ )	Velocidade de propagação das <i>roll waves</i> $(U = \lambda/T)$	Comprimento de onda( $\lambda$ )	Varição da superfície livre ( $\Delta h$ )
0,75 l/s	0,63 m/s	0,208 m	0,002708 m
0,96 l/s	0,703 m/s	0,234 m	0,004281 m
1,14 l/s	0,806 m/s	0,268 m	0,005095 m

Fonte: Elaborada pela própria autora

Com as análises apresentadas nesta seção pode-se comprovar numericamente que a frequência de perturbação e o número de Froude são os principais parâmetros de controle do problema *roll waves* em escoamentos de fluido newtoniano. Desta forma, com o intuito de verificar quais são as frequências que provocam a ocorrência de *roll waves*, outras simulações foram realizadas, conforme apresentado na seção 5.1.4.

Salienta-se que as comparações com os resultados experimentais de Fiorot (2012) e com o modelo matemático são apresentadas e discutidas no Capítulo 6.

#### 5.1.4 Avaliação do critério de estabilidade em relação à frequência de perturbação

Neste item, o parâmetro observado é a frequência de perturbação do sistema, com o objetivo de verificar o critério estabelecido para geração de *roll waves* através da análise de estabilidade linear espacial, apresentado na seção 3.4.2. Para a ocorrência de ondas, tem-se o domínio de frequências em valores dimensionais dadas por:

- Frequência de perturbação angular:  $\omega = 2\pi f^*$
- Frequência de perturbação dimensional:  $f = (h_0/\bar{u}_0)f^*$

Desta forma, através da Equação 76, tem-se:

$$f < f_c \quad (130)$$

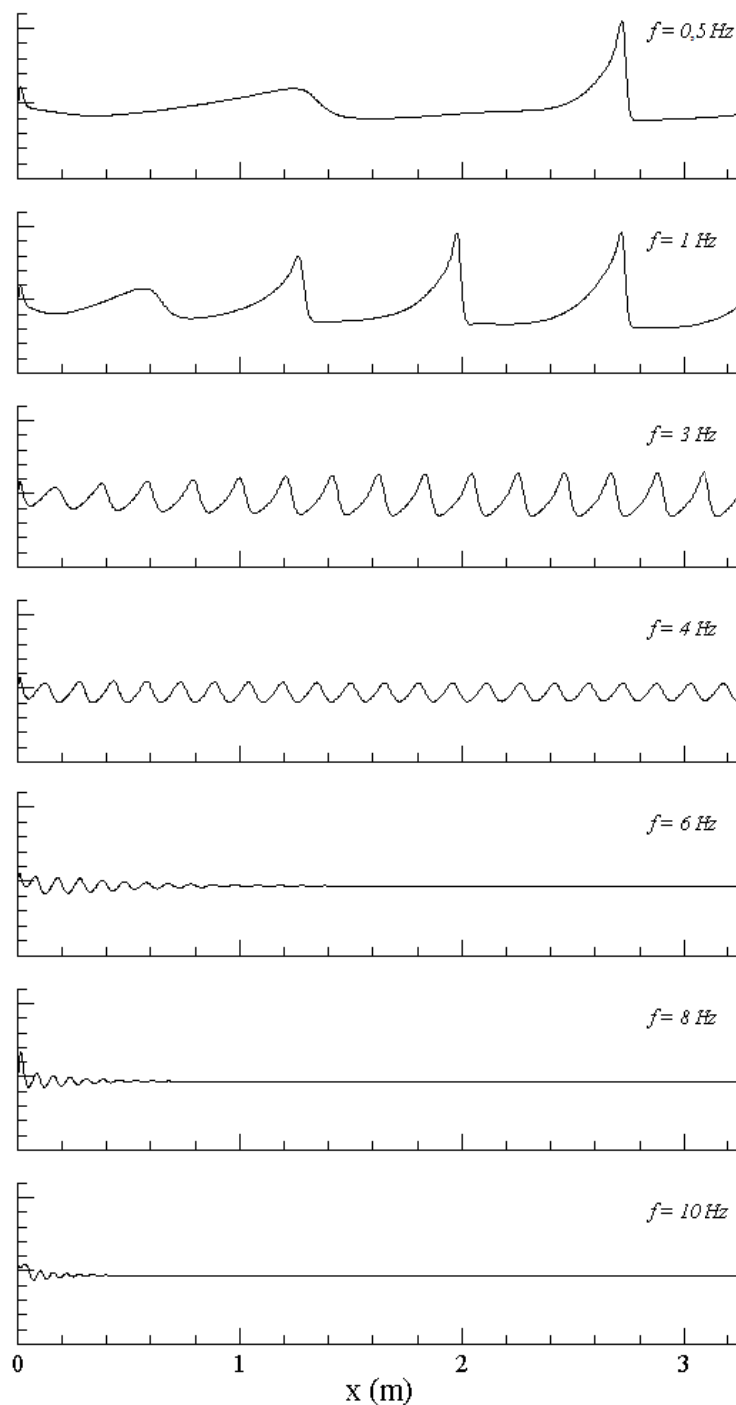
$$f_c = \frac{|\omega_c| \bar{u}}{2\pi h_0} \quad (131)$$

Sendo  $\omega_c$  a frequência crítica apresentada na análise de estabilidade espacial.

O caso em análise é o mesmo verificado experimentalmente por Fiorot (2012) para a avaliação das frequências de perturbação, que em suas observações experimentais concluiu que deveria existir um critério de geração de ondas relacionado à frequência de perturbação.

Os parâmetros de escoamento para esta análise são dados por:  $\theta = 8^\circ$ ,  $\rho = 1237 \text{ kg/m}^3$ ,  $h_0 = 0,009696 \text{ m}$ ,  $\bar{u} = 0,2594 \text{ m/s}$ ,  $\mu = 0,204 \text{ kg/ms}$ . Deve-se ressaltar que neste caso, o número de Froude ( $Fr \cong 0,8453$ ) é maior do que o mínimo necessário para geração de *roll waves* em fluido newtoniano. E, ainda, para este caso tem-se que para geração de ondas a frequência de perturbação deve ser menor do que  $4,82 \text{ Hz}$ . Para verificar este critério, as simulações foram realizadas com perturbações de intensidade constante e frequências de 0,5, 1, 3, 4, 6, 8 e  $10 \text{ Hz}$ , conforme apresentado na Figura 39.

**Figura 39** – Diagrama das simulações para diferentes frequências de perturbação em função da distância longitudinal (m)



**Fonte:** Elaborado pela própria autora

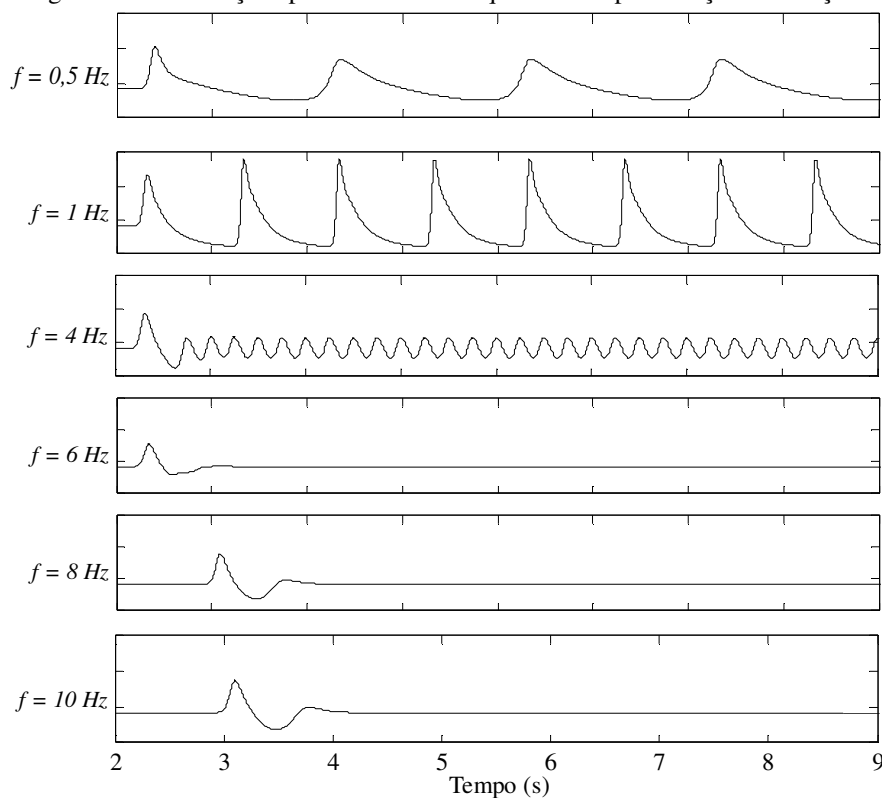
Pode-se comprovar com as simulações mostradas na Figura 39, que de fato para uma frequência de perturbação superior a estabelecida através da análise de estabilidade linear não ocorre à geração de ondas.

É importante ressaltar que para baixas frequências de perturbação não é possível observar a geração de um trem de ondas para este comprimento de canal. Neste caso para

frequência de 0,5 Hz, observa-se o aparecimento de onda solitária, para uma frequência de 1 Hz, ocorre um aumento no número de ondas, mas não se pode garantir que já tenham sido estabilizadas. Já para frequências de 3 Hz e 4 Hz, as ondas se encontram em suas formas estáveis. Ainda, no que diz respeito ao perfil das ondas geradas, tem-se que quanto menor a frequência de perturbação, ondas mais longas e com amplitudes maiores deverão aparecer.

Através de uma análise de propagação de ondas em função do tempo, com um monitor no ponto 2,5 m, pode-se também comprovar que as frequências das ondas geradas são correspondentes à frequência de perturbação imposta, conforme mostrado na Figura 40.

**Figura 40** - Diagrama das simulações para diferentes frequências de perturbação em função do tempo (s).



**Fonte:** Elaborado pela própria autora

Com as análises aqui apresentadas pode-se comprovar que o aparecimento de *roll waves* em escoamentos laminares de fluidos newtonianos, não depende somente do número de Froude, mas também da frequência de perturbação imposta ao escoamento, comprova-se também que o surgimento de tais ondas depende do comprimento do canal, pois para perturbações com baixas frequências, estas ondas são mais longas o que torna necessário um canal mais longo para que as *roll waves* sejam estabelecidas.

Verificadas as propriedades de *roll waves* geradas em fluido newtoniano altamente viscoso (glicerina) e as condições de geração, é de interesse, analisar as propriedades destas

ondas e a validade das condições de geração para escoamentos de fluidos não-newtonianos, o que é apresentado na seção 5.2.

## 5.2 Testes de Validação para Fluidos Não-Newtonianos

Com base no modelo numérico estabelecido no capítulo 5, estudos de casos para escoamentos de reologia não-newtoniana foram desenvolvidos com o propósito de avaliar a representatividade do mesmo em condições de regime uniforme e também as propriedades das *roll waves* que se propagam nestes escoamentos, quando inserido uma perturbação.

Para cada teste, o sistema de Equações (3 e 4) foi discretizado e devidamente aproximado pelo software FLUENT, com a inserção das propriedades reológicas de fluido não-newtoniano sem a presença de tensão crítica de escoamento (*power law*) e para fluidos com tensão crítica de escoamento, que é o caso do fluido de Herschel Bulkley.

### 5.2.1 Testes para fluidos do tipo Power law

O teste aqui apresentado é para um fluido do tipo *power law*, os parâmetros utilizados para a simulação são os mesmos utilizados por (NG; MEI, 1994), que verificou a formação de *roll waves* através de um modelo matemático de primeira ordem para fluido do tipo *power law*. Os parâmetros do escoamento é dado por:

- Fluido não-newtoniano e incompressível com índice de consistência do fluido,  $\mu_n$ , igual a  $0,14\text{kg/ms}$ ;
- Massa específica da solução,  $\rho = 1120\text{kg/m}^3$ ;
- Índice de escoamento do fluido,  $n = 0,4$ ;
- Inclinação do canal,  $\theta = 1,03132^\circ$ ;
- Número de Froude,  $Fr = 1$ ;
- Número de Reynolds,  $Re = 100$ .

Com estes parâmetros fixados, calcula-se a profundidade do escoamento uniforme ( $h_o = 0,0057\text{ m}$ ), e a velocidade média do escoamento. Esta velocidade é, então, imposta ao modelo numérico ( $\bar{u} = 0,2357\text{ m/s}$ ).

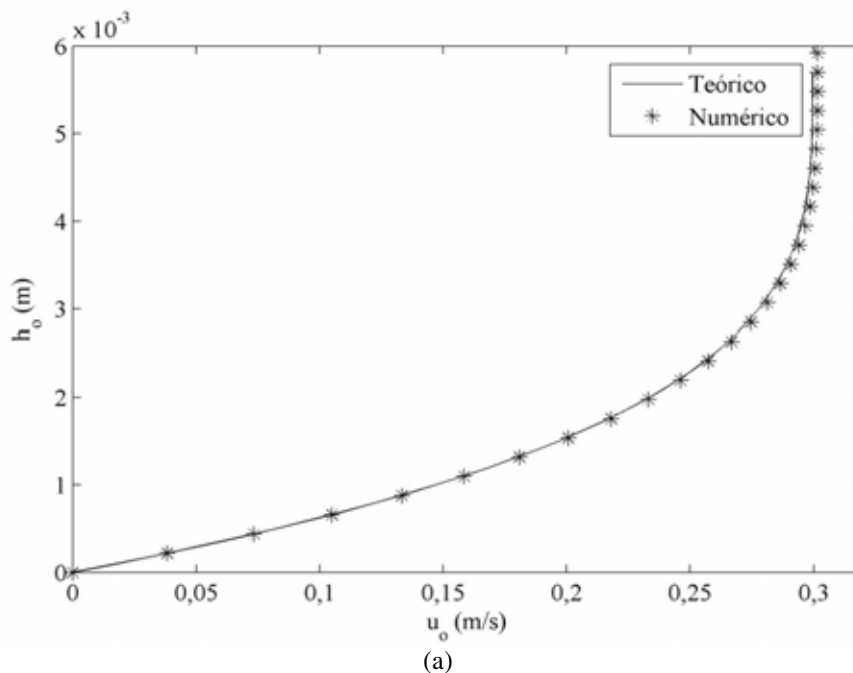
Assim como para o escoamento newtoniano, o primeiro teste realizado foi para o escoamento em regime uniforme, ou seja, sem a introdução de perturbação, com o objetivo de verificar suas propriedades e também verificar se as condições setadas no modelo numérico são adequadas para escoamento não newtoniano.

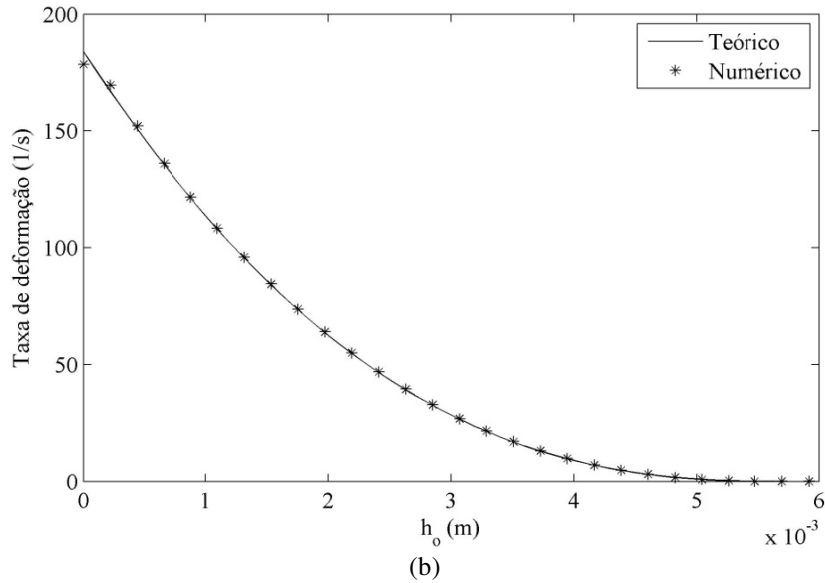
O tempo de cálculo exigido pelo método foi de aproximadamente 144 horas, ou seja, maior do que para o caso newtoniano, para um passo de tempo de 0,0001s e 8 iterações por passo de tempo. Vale destacar que o computador utilizado para realizar as simulações de escoamentos com reologias não-newtonianas (*Power law* e Herschel-Bulkley) apresentava as mesmas configurações das simulações em reologia newtoniana (item 5.1.2).

Para efeito de comparação, a Figura 41, apresenta os resultados numéricos utilizando o software FLUENT e teórico através das Equações (18 e 19), para o perfil de velocidades (Figura 41a) e a taxa de deformação (Figura 41b) do escoamento com propriedades reológicas do tipo *Power law*.

Através da Figura 41, pode-se observar que existe uma boa concordância entre o resultado da simulação numérica e o resultado teórico tanto para o perfil de velocidade quanto para a taxa de deformação, que neste caso não é linear como para o escoamento newtoniano, devido as propriedades reológicas do fluido.

**Figura 41** – Perfil de velocidade e taxa de deformação para o escoamento em regime laminar com propriedades reológicas do tipo *Power law*: (a) Perfil de velocidade numérico e teórico do escoamento, (b) Taxa de deformação teórica e numérica do escoamento





Fonte: Elaborada pela própria autora.

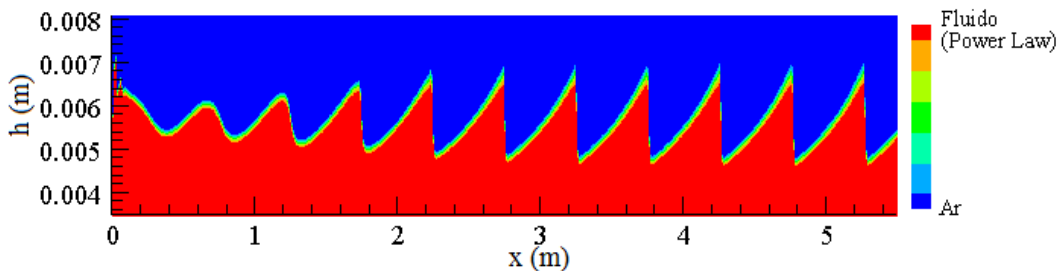
Estas análises possibilitaram verificar que o modelo numérico e as condições de contorno estabelecidas estão adequadas para as simulações de escoamentos laminares, com propriedades reológicas do tipo *power law*. Com estas condições verificadas, foram realizadas simulações de *roll waves* com imposição de uma perturbação no escoamento.

### 5.2.2 Introdução de uma perturbação na busca de roll waves em fluido do tipo Power law

Para verificar se há geração e propagação de *roll waves* para o escoamento de fluido do tipo *power law*, as propriedades reológicas do fluido são setadas no programa, além disso, é introduzido no modelo numérico uma perturbação com frequência ( $f$ ) e magnitude de perturbação ( $B$ ), através da Equação (129).

A simulação do escoamento após 15 segundos (tempo físico) com a presença de *roll waves*, decorrente da introdução de uma perturbação de frequência igual a 1 Hz, com magnitude de 10% é ilustrada na Figura 42.

Figura 42 – Propagação de *roll waves* ao longo do canal para fluido do tipo *power law* com uma frequência de 1 HZ

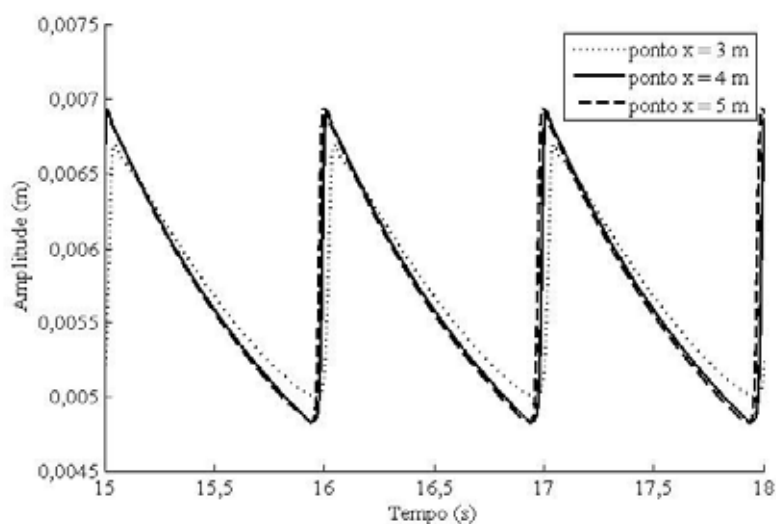


Como se pode observar através da Figura 42, as ondas provenientes de uma perturbação no escoamento não-newtoniano se propagaram e atingiram a estabilidade, apresentando-se como um trem de ondas com formas constantes, o que é típico das *roll waves*.

Vale ressaltar que, por se tratar de fluido não-newtoniano, tais ondas geralmente se propagam com frequências baixas, quando comparadas com a ocorrência em escoamentos de fluido newtoniano, o que exige um canal mais longo. Neste caso, a simulação foi realizada com uma malha de comprimento longitudinal de 6 m.

Para verificar a partir de qual comprimento de canal estas *roll waves* se encontram em sua forma estável, as aferições de suas amplitudes foram feitas ao longo do canal. A Figura 43 mostra a amplitude destas ondas em função do tempo, nos pontos 3m, 4m e 5m.

**Figura 43** – Amplitude das ondas em função do tempo nos pontos 3 m , 4 m e 5 m.



Fonte: Elaborada pela própria autora

Com esta análise pode-se observar que as ondas se propagam com a mesma frequência de perturbação imposta e que a partir 4m (comprimento do canal) as mesmas já se encontravam estabelecidas, com formas e amplitudes constantes, com velocidade de propagação de 0,503 m/s.

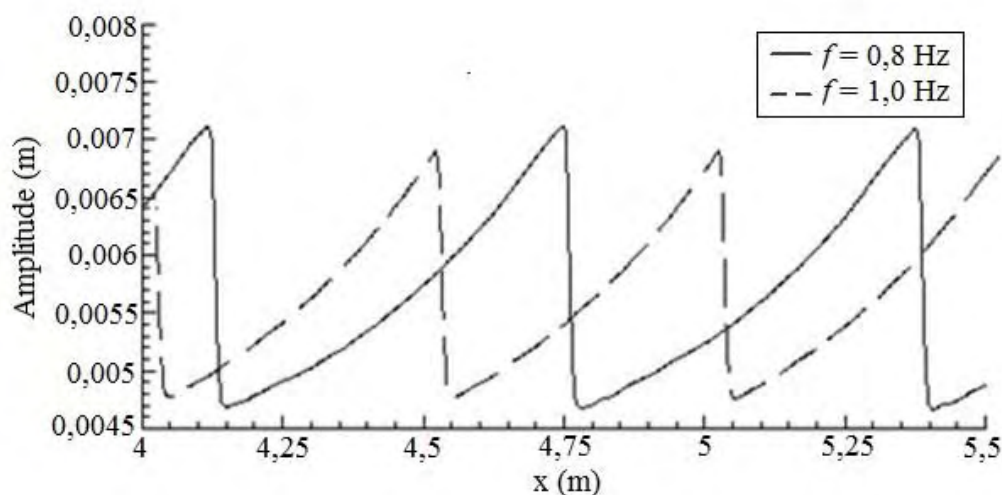
### 5.2.2.1 Avaliação dos efeitos causados pela perturbação

Este item tem como objetivo verificar a influência da perturbação imposta no escoamento de fluido não-newtoniano, cujos parâmetros são a frequência e magnitude de perturbação.

### – Avaliação da Frequência de Perturbação

A Figura 44 mostra o perfil das *roll waves* para frequências de perturbação pequenas (0,8 e 1 Hz), valores estes mais baixos do que nos casos newtonianos.

**Figura 44** - Perfil das *roll waves* para frequências de perturbação de 0,8 e 1 Hz.



**Fonte:** Elaborada pela própria autora

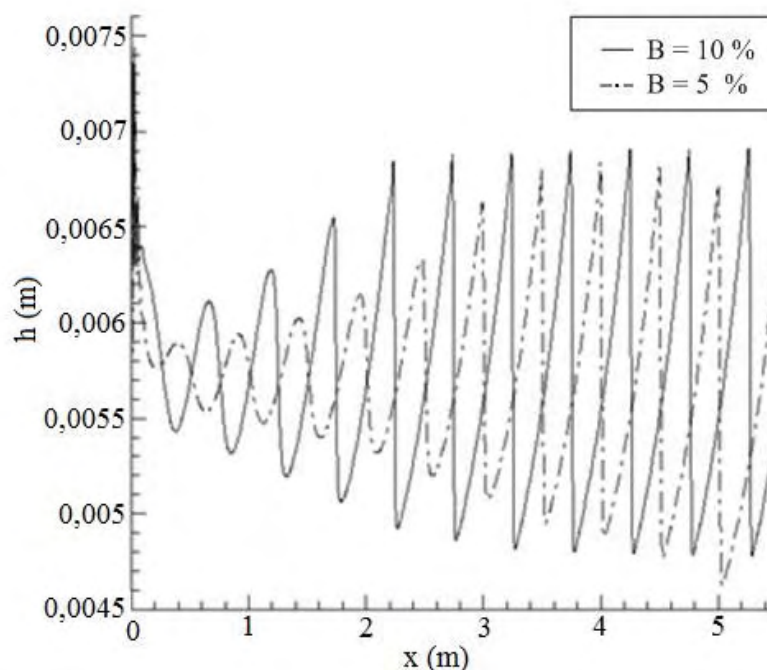
Observa-se que quanto menor a frequência, maior deverá ser a amplitude e o comprimento das *roll waves*, mesmo para uma pequena variação de frequência, o que mostra que o modelo numérico é sensível a pequenas variações de frequências também para escoamentos não-newtonianos. Além disso, uma verificação importante é que a frequência de perturbação influencia na lâmina baixa da onda ( $h_1$ ). Esta análise comprova que a frequência de perturbação é um parâmetro de controle importante no perfil das *roll waves* também em fluido não-newtoniano.

### – Avaliação da Magnitude de Perturbação

A Figura 45 mostra o perfil das *roll waves* para uma frequência de perturbação de 1 Hz, com magnitudes de perturbação de 5% e 10%.

No que diz respeito à magnitude de perturbação, o aumento da intensidade provoca a antecipação das *roll waves*, com relação a 5% de perturbação, o que exigiria um canal maior para se ver ondas estabilizadas.

**Figura 45** - Perfil das *roll waves* para uma frequência de perturbação de 1 Hz com intensidade de 5% e 10%.



Fonte: Elaborada pela própria autora

Com estas análises, pode-se concluir que mesmo com a presença de propriedades não newtonianas, neste caso o índice de escoamento do fluido ( $n < 1$ ), os efeitos da perturbação no escoamento não-newtoniano são os mesmos para o caso newtoniano.

### 5.2.3 Testes para Fluidos de Herschel Bulkley

Neste caso, os experimentos numéricos foram realizados para o fluido com as mesmas propriedades apresentadas na seção 5.2.1, mas com a inserção de uma tensão crítica ou tensão de escoamento.

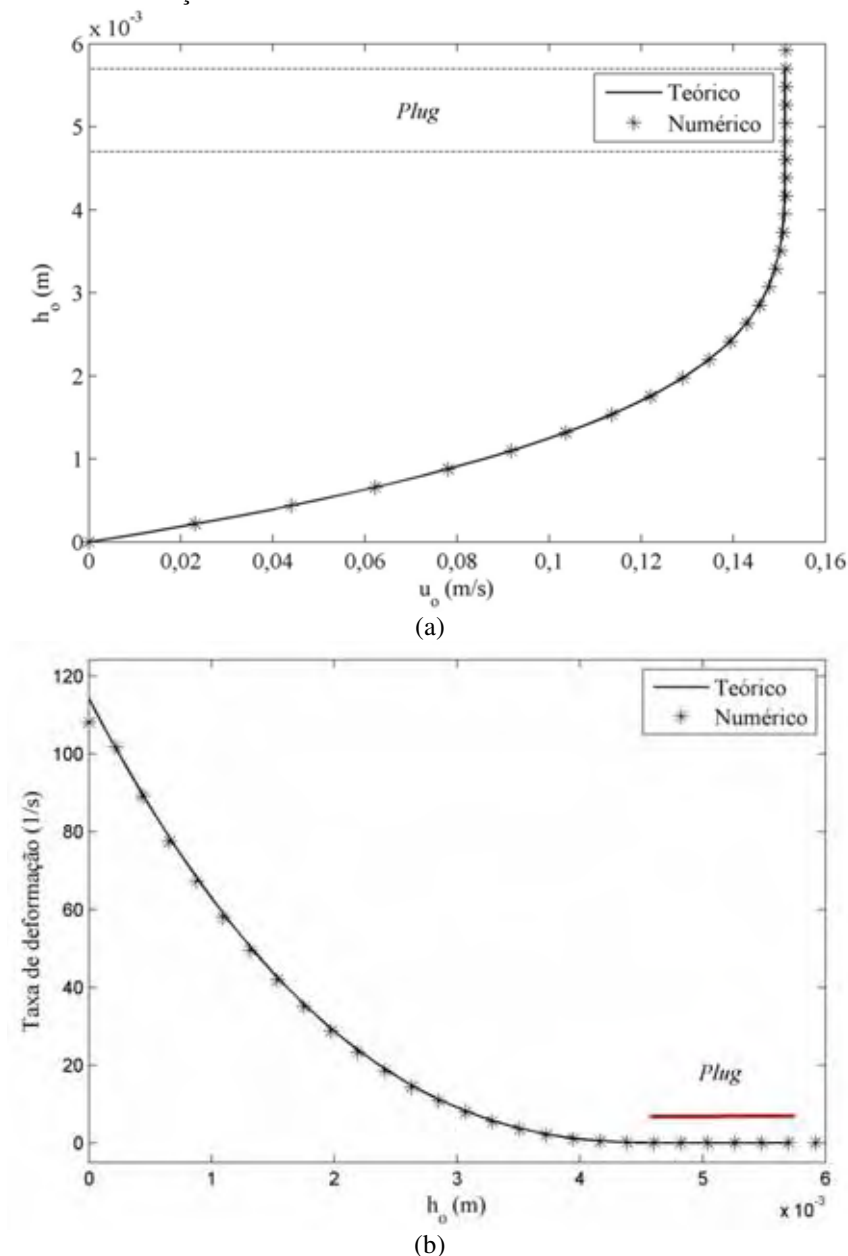
Uma imposição é feita no modelo numérico no que diz respeito à viscosidade aparente ( $\eta$ ). Trata-se da viscosidade numérica ( $\mu_o$ ), conforme mostra a Equação 122, neste caso foi fixada em 1000 Pa.s, por ser a que apresentava resultados similares aos resultados teóricos. No Apêndice D são mostrados resultados de *roll waves* para outros valores de  $\mu_o$ .

O tempo de cálculo exigido foi de aproximadamente 144 horas, para um passo de tempo de 0,0001s e 8 iterações por passo de tempo, pois com a introdução da tensão crítica, foi necessário uma malha mais fina. O computador utilizado foi o mesmo para fluido newtoniano.

Para verificar se as condições de escoamento impostas no modelo estavam apropriadas, as primeiras simulações foram feitas para o escoamento em regime uniforme,

para um fluido com as mesmas propriedades apresentadas no item 5.2.1, com uma tensão de escoamento ( $\tau_c = 0,2 Pa$ ), conforme ilustrado na Figura 46.

**Figura 46** – Perfil e velocidade e taxa de deformação para o escoamento em regime laminar com propriedades reológicas do tipo Herschel Bulkley: (a) Perfil de velocidade numérico e teórico do escoamento, (b) Taxa de deformação teórica e numérica do escoamento.



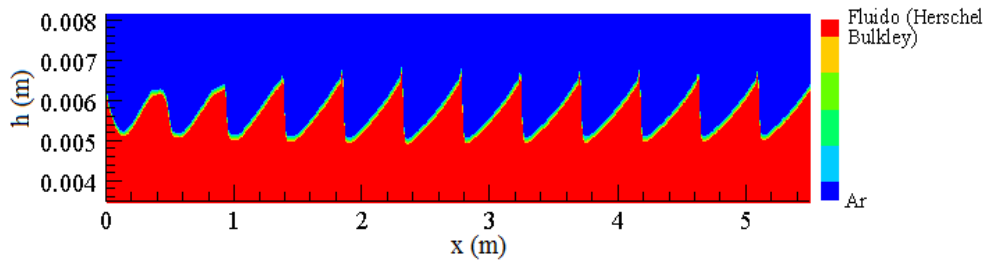
Fonte: Elaborada pela própria autora.

Através da Figura 46, pode-se observar que, mesmo com a presença de uma tensão de escoamento, existe uma boa concordância entre os resultados numérico e teórico para o perfil de velocidade e para taxa de deformação. E, ainda, verifica-se a existência de uma região de *plug*, típico dos escoamentos de fluido com tensão crítica, cuja taxa de deformação é nula a medida que se aproxima da superfície livre.

### 5.2.3.1 Introdução de uma perturbação em busca de roll waves em fluidos de Herschel Bulkley

Na busca de observar a geração de *roll waves* para o fluido do tipo Herschel Bulkley com tensão de escoamento ( $\tau_c = 0,2 Pa$ ), uma perturbação de frequência  $0,8 Hz$  com magnitude  $B = 25\%$  foi imposta no modelo numérico, através da Equação 129, conforme ilustrado na Figura 47.

**Figura 47** – Propagação de *roll waves* ao longo do canal para fluido do tipo *Herschel Bulkley* com uma frequência de  $0,8 Hz$ .



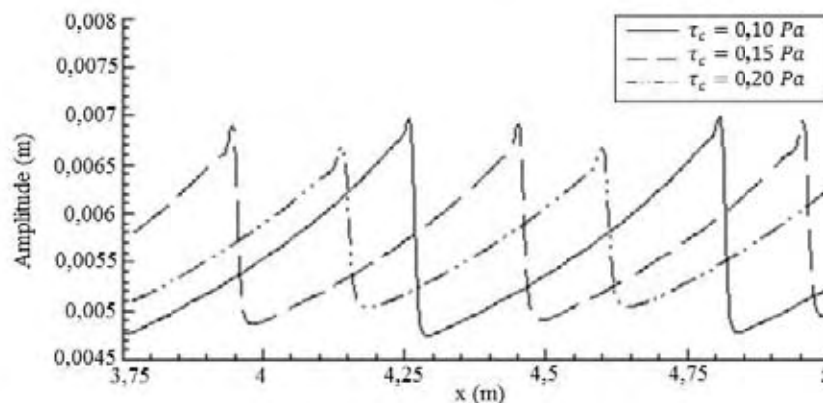
Fonte: Elaborada pela própria autora.

Neste caso, observou-se que as ondas se encontravam em sua forma estável a partir de 3 metros de comprimento de canal. Após a verificação da geração de *roll waves* com frequência de perturbação de  $0,8 Hz$ , o parâmetro de interesse a ser analisado é a tensão crítica.

#### – Avaliação da Influência da Tensão Limite de Escoamento ( $\tau_c$ )

Outras simulações numéricas foram realizadas modificando a tensão crítica com o intuito de verificar se ocorre a geração de ondas com o aumento deste parâmetro e principalmente analisar a influência do mesmo no perfil das *roll waves* (Figura 48)

**Figura 48** – Influência da tensão crítica no perfil das *roll waves* com uma frequência de perturbação de  $0,8 Hz$ .



Fonte: Elaborada pela própria autora.

Através da Figura 48, pode-se observar que a introdução de uma tensão crítica no comportamento do fluido provocou uma deformação na crista da onda. Observa-se também que um pequeno aumento na tensão crítica, acarreta em diminuição na amplitude das *roll waves*, este fato se explica por causa da diminuição da velocidade média do escoamento e consequentemente do número de Froude. A Tabela 4 mostra o número de Froude do escoamento e as propriedades das ondas geradas em fluidos com tensões críticas de 0,1, 0,15 e 0,2 Pa.

**Tabela 4** – Propriedades do escoamento e das ondas em função da tensão crítica do fluido.

Tensão Crítica ( $\tau_c$ )	Comprimento de onda( $\lambda$ )	Velocidade de propagação das <i>roll waves</i> ( $U = \lambda/T$ )	Variação da superfície livre ( $\Delta h$ )	Número de Froude ( $Fr$ )
$\tau_c = 0,1 Pa$	0,534 m	0,427 m/s	0,00221 m	0,7381
$\tau_c = 0,15 Pa$	0,489 m	0,391 m/s	0,00197 m	0,6292
$\tau_c = 0,2 Pa$	0,463 m	0,370 m/s	0,00163 m	0,5315

**Fonte:** Elaborada pela própria autora

Com os resultados apresentados na Tabela 4, pode-se verificar a influência da tensão crítica na dinâmica do escoamento e consequentemente nas propriedades das *roll waves*, pois o aumento da tensão crítica causou uma diminuição no comprimento das *roll waves* e na velocidade de propagação.

Sendo assim, é de interesse verificar se existe geração de ondas para outras frequências de perturbação e qual é a implicação nas propriedades das *roll waves*, caso ocorra a geração das mesmas.

#### 5.2.4 Verificação dos critérios de geração de *roll waves* para fluidos não-newtonianos

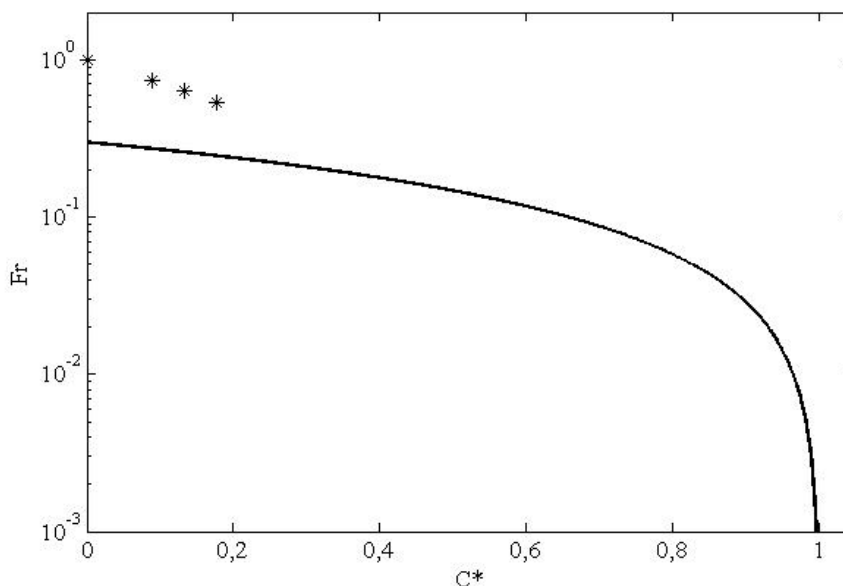
O objetivo deste item é mostrar a validade dos critérios de geração de *roll waves* para fluidos de reologia não-newtoniana estabelecidos neste trabalho através de análise de estabilidade linear.

Inicialmente os critérios são verificados para fluidos do tipo *Power law* e *Herschel Bulkley*, onde as condições de escoamento são as mesmas apontadas no seção 5.2.1, a diferença consiste na inserção da tensão crítica de escoamento ( $\tau_c$ ) para o fluido de *Herschel-Bulkley*.

O primeiro critério verificado é em relação ao número de Froude ( $Fr > Fr_c$ ), conforme indicado na Equação 49, em que, inserindo as propriedades reológicas do fluido,

tem-se o limite teórico. A Figura 50 mostra o limite teórico para geração de *roll waves* e as simulações numéricas realizadas para fluidos não-newtonianos.

**Figura 49** – Limite teórico para geração de *roll waves* do número de Froude em função do parâmetro  $C^*$  e as simulações numéricas realizadas para fluidos não-newtonianos.



Fonte: Elaborada pela própria autora

O segundo critério mostra um domínio de frequências de perturbação favorável à propagação de ondas ( $f < f_c$ ), dependente do número Froude e das propriedades reológicas do fluido. A Tabela 5 mostra o número de Froude do escoamento, o número de Froude mínimo necessário para a formação de ondas e a frequência crítica de perturbação, para fluidos com tensões críticas de 0; 0,1; 0,15 e 0,2 Pa.

**Tabela 5** – Valores críticos ( $Fr_c, f_c$ ) para geração de *roll waves* em função da tensão para fluidos com tensões críticas de 0, 0,1, 0,15 e 0,2 Pa.

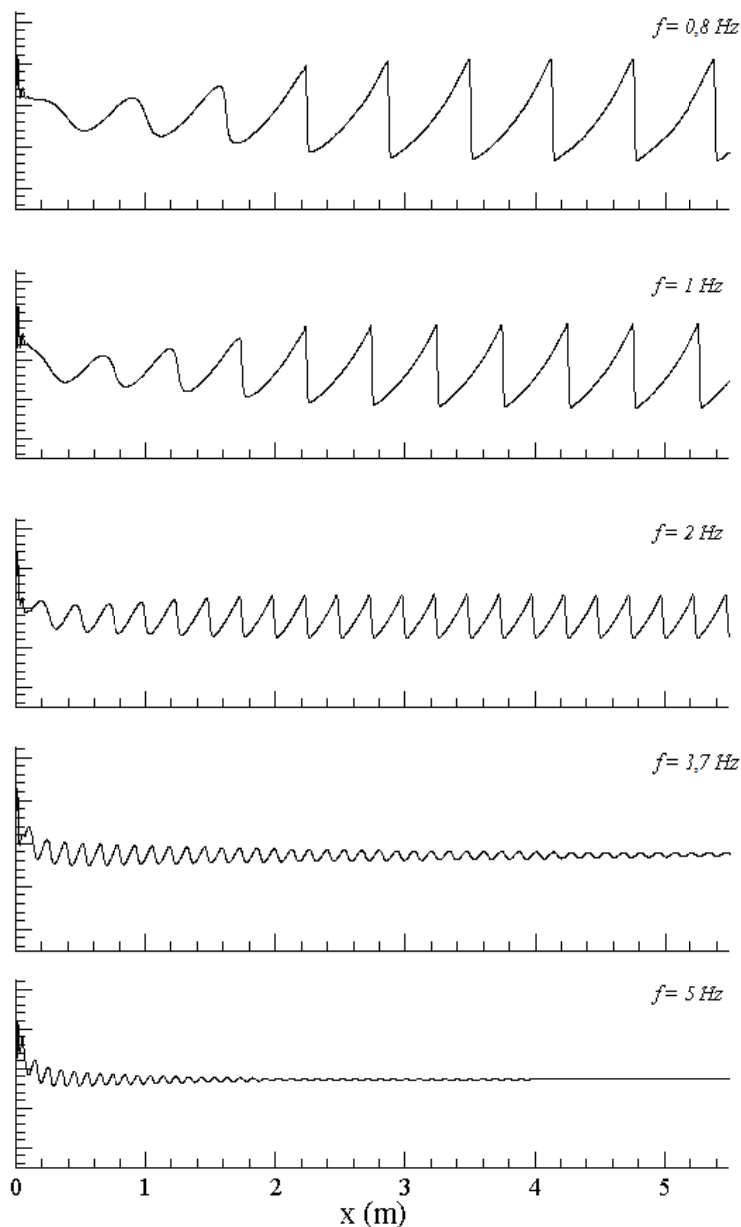
Tipo de Fluido	$\tau_c(Pa)$	$C^* = \tau_c / (h_o \rho g \sin \theta)$	$Fr_c$	$Fr$	$f_c (Hz)$
<i>Power Law</i>	0	0	0,2981	0,9854	3,66
	0,1	0,0887	0,2714	0,7381	2,69
<i>Herschel Bulkley</i>	0,15	0,1331	0,2580	0,6292	2,29
	0,2	0,1774	0,2176	0,5313	1,92

Fonte: Elaborada pela própria autora

Através dos dados apresentados na Tabela 5, pode-se observar que em ambos os casos o número de Froude do escoamento é superior à condição crítica para geração de *roll wave*. Observa-se também que o limite da frequência crítica de perturbação diminui com o aumento

da tensão crítica do fluido. Com o intuito de verificar a validade da frequência crítica de perturbação, outras simulações foram realizadas para fluido do tipo *Power law*, conforme mostrado na Figura 50.

**Figura 50** – Simulações para fluido do tipo *Power law*, com frequências de perturbação de: 0,8; 1; 2; 3,7 e 5 Hz.

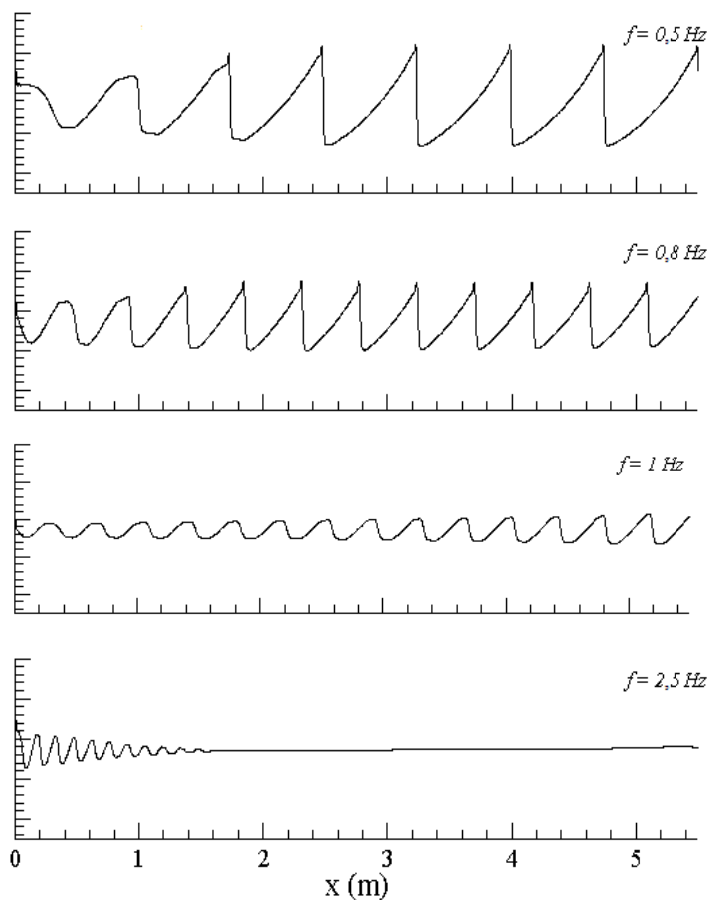


**Fonte:** Elaborada pela própria autora

Pode-se observar que para uma frequência de perturbação de  $3,7 \text{ Hz}$ , as ondas amorteceram, ou seja, acima da frequência crítica (Tabela 5) não há ocorrência de *roll waves*.

As mesmas verificações foram feitas para o fluido de *Herschel-Bulkley* com tensão crítica de escoamento de  $0,2 \text{ Pa}$ , conforme mostrado na Figura 51.

**Figura 51** – Simulações para fluido do tipo Herschel Bulkley com  $\tau_c = 0,2 Pa$ , para frequências de perturbação de: 0,5; 0,8; 1 e 2,5 Hz.



**Fonte:** Elaborada pela própria autora

Com as simulações apresentadas neste item, pode-se concluir que os critérios de geração de *roll waves* são verificados tanto para fluido do tipo *Power law*, quanto para fluido com tensão crítica de escoamento, neste caso, o de Herschel Bulkley.

No que diz respeito ao primeiro critério, cabe salientar, que embora as simulações realizadas estivessem no domínio de geração de *roll waves*, não foi para todas as frequências de perturbação que ocorreu a propagação destas ondas, o que comprova que a condição  $Fr > Fr_{min}$ , é necessária, mas não é suficiente.

Em se tratando das frequências de perturbações impostas, o critério estabelecido na análise de estabilidade linear é comprovado com as simulações numéricas, pois para  $f > f_c$ , não ocorre a geração de *roll waves*. Vale ressaltar também que no domínio de geração, quanto menor a frequência de perturbação maior deverá ser a amplitude das ondas geradas. Para fluidos não-newtonianos (Tabela 5), as frequências críticas são baixas, o que em condições realísticas podem provocar ondas de grandes amplitudes. A Tabela 6, mostra os resultados de

amplitude, comprimento e velocidade de propagação das *roll waves* referentes às Figuras 51 e 52.

**Tabela 6** – Propriedades das *roll waves* referentes às Figuras 51 e 52.

$\tau_c(Pa)$	$f(Hz)$	$\Delta h(m)$	$\lambda(m)$	$U(m/s)$
0	0,8	0,00240	0,629	0,5032
	1	0,00212	0,503	0,503
	2	0,00109	0,2514	0,5028
0,2	0,5	0,00251	0,756	0,378
	0,8	0,00163	0,463	0,370

**Fonte:** Elaborada pela própria autora

Através da Tabela 6 pode-se comprovar que quanto maior a frequência de perturbação menor será a amplitude e o comprimento das *roll waves* para fluidos não-newtonianos mesmo com a presença de uma tensão crítica de escoamento. Outra observação que deve ser ressaltada é que as frequências de perturbação também influenciam na lâmina baixa da onda ( $h_1$ ). Este é um fator importante para a confrontação com os resultados do modelo matemático que será feita no Capítulo 6.

Em linhas gerais, neste capítulo, foram apresentadas, através de simulações numéricas, as propriedades das *roll waves* e a validade dos critérios de geração das mesmas tanto para fluido newtoniano quanto para fluido não newtoniano em escoamentos laminares.

Verificadas numericamente tais propriedades, é de interesse efetuar comparações com dados experimentais (FIOROT, 2012) e resultados do modelo matemático apresentados no âmbito desta tese para geração de *roll waves* em fluidos do tipo Herschel-Bulkley, o qual, pode-se tomar como particularidade o caso newtoniano. No que diz respeito à geração de *roll waves* em fluidos não-newtonianos as comparações serão feitas com os resultados do modelo matemático.

---

## CAPÍTULO 6      CONFRONTAÇÃO      DE      RESULTADOS: EXPERIMENTAIS, TEÓRICOS E NUMÉRICOS

---

Neste capítulo, são confrontados os resultados numéricos obtidos através do software FLUENT para geração de *roll waves* em fluidos newtonianos, com os resultados experimentais obtidos por Fiorot (2012) e com os resultados do modelo matemático apresentado nesta tese. A seguir, as comparações serão feitas entre as simulações de *roll waves* para fluidos não newtonianos com os resultados do modelo matemático. Estas comparações possibilitam mostrar as vantagens e limitações de cada modelo.

Vale ressaltar que o modelo matemático apresentado em sua forma adimensional no capítulo 4, serão retomadas nas variáveis dimensionais.

### 6.1 Comparações para Fluido Newtoniano

Nesta seção serão apresentadas as análises das propriedades de *roll waves* advindas das comparações entre os resultados experimentais (FIOROT, 2012) e numéricos obtidos através do

software FLUENT. A seguir, as comparações são feitas em relação ao modelo matemático exposto neste trabalho. Destaca-se que as comparações serão feitas separadamente, porque o modelo matemático é bastante sensível ao parâmetro de entrada  $h_1$  (lâmina baixa das ondas), valor este que é imposto ao modelo a partir de aferições experimentais. Por outro lado, as simulações diretas obtidas através do FLUENT podem produzir lâminas baixas diferentes que, com o aumento da vazão, fica mais evidente. E novamente, esses resultados são impostos ao modelo matemático.

A comparação entre os modelos físico, numérico e matemático possibilita verificar as limitações e as vantagens de cada um para o caso newtoniano, bem como, as implicações das hipóteses impostas no modelo matemático.

### 6.1.1 Comparação entre os resultados experimentais e Numéricos para Fluido Newtoniano via Fluent

É importante ressaltar que para os resultados experimentais aqui apresentados, as medições das ondas foram feitas a 1,5 m da perturbação imposta. Já para a simulação numérica foram colocados monitores em vários pontos ao longo do canal e pode-se observar que as *roll waves* só estabilizaram em 2,5 m.

Nas Tabelas 7, 8 e 9 são mostrados os resultados experimentais e numéricos, cujos parâmetros dos experimentos utilizados para a implementação numérica são dados por:  $Q = 0,75 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\theta = 8^\circ$ ,  $\mu = 0,212 \text{ kg/ms}$ ,  $h_o = 0,009832 \text{ m}$ ,  $Q = 0,96 \text{ l/s}$ ,  $\theta = 8^\circ$ ,  $\mu = 0,2173 \text{ kg/ms}$ ,  $h_o = 0,010726 \text{ m}$  e  $Q = 1,14 \text{ l/s}$ ,  $\theta = 8^\circ$ ,  $\mu = 0,2117 \text{ kg/ms}$ ,  $h_o = 0,011566 \text{ m}$ , respectivamente.

**Tabela 7** – Comparação entre resultados experimentais (FIOROT, 2012) e numéricos, referentes à Figura 52.

Parâmetros	Resultados Experimentais (FIOROT, 2012)	Resultados Numéricos	Erro dos resultados numéricos em relação aos experimentais (%)
$\bar{u}_o \text{ (m/s)}$	0,2558	0,2567	0,35%
$Fr$	0,83	0,8306	0,07%
$h_1 \text{ (m)}$	0,00875	0,00866	1,03%
$h_2 \text{ (m)}$	0,011	0,01131	0,03%
$\Delta h \text{ (m)}$	0,00225	0,00265	17,70%
$T \text{ (s)}$	0,33	0,33	-

Fonte: Elaborada pela própria autora

**Tabela 8**– Comparação entre resultados experimentais (FIOROT, 2012) e numéricos referentes à Figura 53.

Parâmetros	Resultados Experimentais (FIOROT, 2012)	Resultados Numéricos	Erro dos resultados numéricos em relação aos experimentais (%)
$\bar{u}_o$ (m/s)	0,2971	0,2984	0,44%
$Fr$	0,92	0,9246	0,50%
$h_1$ (m)	0,009299	0,009158	1,50%
$h_2$ (m)	0,012455	0,01313	5,42%
$\Delta h$ (m)	0,003156	0,003972	25,80%
$T$ (s)	0,33	0,33	-

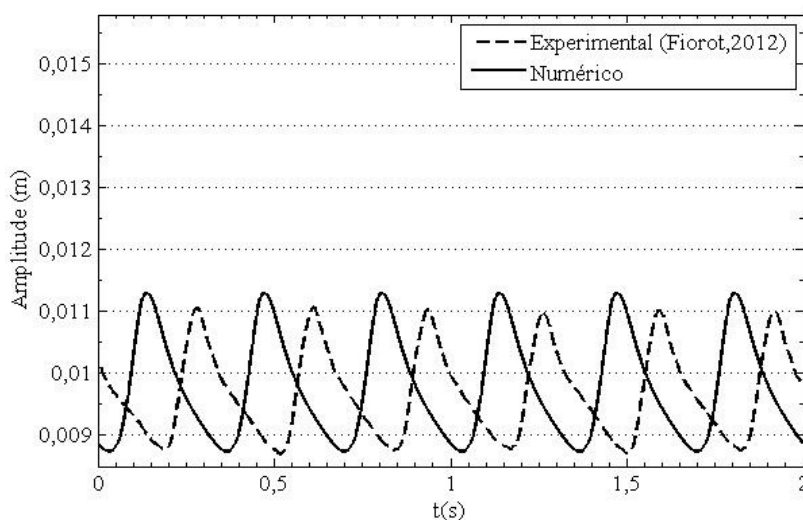
Fonte: Elaborada pela própria autora

**Tabela 9** – Comparação entre resultados experimentais e numéricos (FIOROT, 2012) referente à Figura 54.

Parâmetros	Resultados Experimentais (FIOROT, 2012)	Resultados Numéricos	Erro dos resultados numéricos em relação aos experimentais (%)
$\bar{u}_o$ (m/s)	0,3294	0,3557	7,98%
$Fr$	0,98	1,06	8,16%
$h_1$ (m)	0,01016	0,0097	4,52%
$h_2$ (m)	0,01316	0,01469	11,62%
$\Delta h$ (m)	0,003	0,00499	66,33%
$T$ (s)	0,327	0,33	0,92%

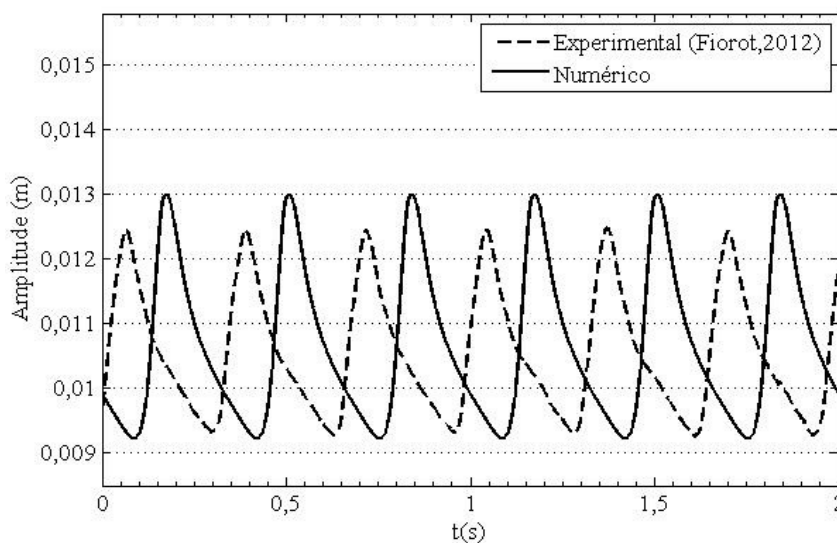
Fonte: Elaborada pela própria autora.

As Figuras 52, 53 e 54 ilustram as comparações entre os resultados experimentais (FIOROT, 2012) e numéricos via FLUENT.

**Figura 52**– Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e numérico para uma vazão de 0,75 l/s.

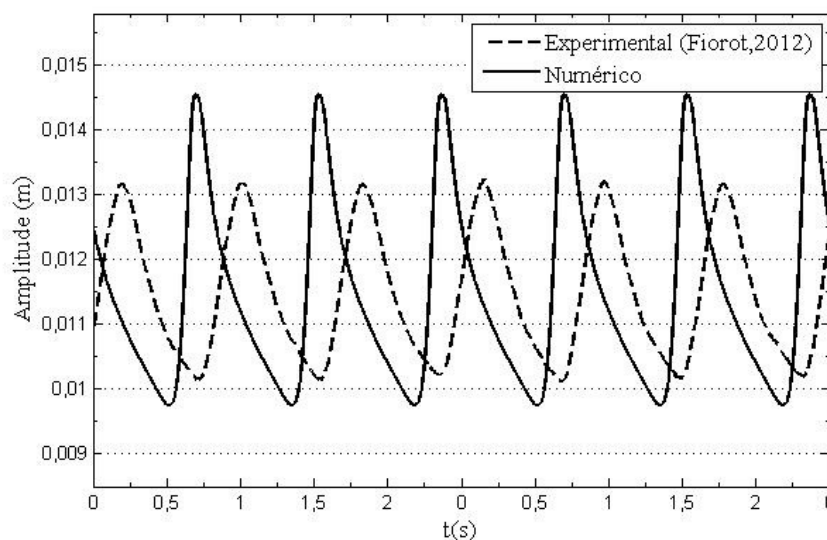
Fonte: Elaborada pela própria autora

**Figura 53** – Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e numérico para uma vazão de 0,96 l/s.



Fonte: Elaborada pela própria autora

**Figura 54** – Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e numérico para uma vazão de 1,14 l/s.



Fonte: Elaborada pela própria autora

Conforme observado através das Figuras 52, 53 e 54, existe uma boa compatibilização entre os modelos quanto à forma e frequência de ondas. Também, na relação vazão e amplitude de ondas, mostrando que o aumento da vazão provoca um aumento na amplitude das ondas geradas.

Pode-se observar, também, que para uma vazão baixa (Figura 52) a discrepância na amplitude das *roll waves* é pequena. No entanto, conforme aumenta a vazão ocorre um aumento significativo do erro. Este fato, pode ser explicado por diversos fatores, como,

medição de vazão, aferição das propriedades do fluido, ponto de medição da *roll waves* e magnitude de perturbação imposta.

De acordo com as Tabelas 7, 8 e 9, observa-se que existe um erro no que diz respeito à velocidade média experimental e numérica do escoamento. Isto se explica ao fato de que a velocidade média imposta no modelo numérico é calculada através da Equação 119, tendo como parâmetros de entrada as condições de escoamento experimental, tais como, inclinação do canal, lâmina do escoamento em regime uniforme e propriedades do fluido (viscosidade dinâmica e massa específica). Qualquer erro nas aferições destes parâmetros, influencia na velocidade média numérica e conseqüentemente no número de Froude, que é um importante parâmetro na definição das *roll waves*.

Outro fato a ser ressaltado, é a técnica utilizada para medir vazão média e calcular a velocidade média do escoamento foram adotados procedimentos rudimentares, que ainda devem ser melhorados (FIOROT, 2012). Eles apontaram uma margem de erro de 3% nas medidas das duas primeiras vazões (0,75 l/s e 0,96 l/s). No entanto, para a vazão de 1,14 l/s, este valor é superado (FIOROT, 2012). Este também pode ser um fator para a discrepância dos resultados conforme aumenta a vazão.

Vale dizer que testes numéricos tendo como parâmetro de entrada a velocidade experimental foram realizados, porém a lâmina do escoamento uniforme ( $h_o$ ) não se mantém. Ocorre um pequeno rebaixamento, o que era esperado. Mas a diferença na amplitude das ondas não chega a ser significativa.

No que diz respeito aos pontos de medição das ondas, experimentalmente as aferições foram feitas em um único ponto, a 1,5 m da perturbação. Numericamente, pode-se observar que para uma perturbação de 3 Hz e com uma intensidade  $B = 15\%$  as ondas atingiram sua amplitude máxima no ponto 2,5 m (Figura 34). Este também é um fator relevante na discrepância das amplitudes das ondas.

Feitas estas observações é de interesse verificar como se comporta o modelo matemático em relação aos resultados experimentais (FIOROT, 2012).

### 6.1.2 Comparação entre os resultados experimentais e o modelo matemático para fluido newtoniano

Neste item é apresentada uma comparação entre os resultados experimentais (FIOROT, 2012) e os resultados do modelo matemático proposto nesta tese.

Nas Tabelas 10, 11 e 12 são mostrados resultados experimentais e do modelo matemático, para vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s, referentes às Figuras 55, 56 e 57.

**Tabela 10** – Comparação entre resultados experimentais para uma vazão de 0,75 l/s e do modelo matemático, referente à Figura 55.

Parâmetros	Resultados Experimentais (Fiorot, 2012)	Modelo Matemático	Erro dos resultados do modelo matemático em relação aos experimentais (%)
$\bar{u}_o (m/s)$	0,2558	0,2567	0,35%
$Fr$	0,83	0,8306	0,07%
$h_1 (m)$	0,00875	0,00875	–
$h_2 (m)$	0,01103	0,01102	0,09%
$\Delta h(m)$	0,00225	0,00225	–
$T(s)$	0,33	0,27	18,10%

Fonte: Elaborada pela própria autora.

**Tabela 11** – Comparação entre resultados experimentais para uma vazão de 0,96 l/s e do modelo matemático, referente à Figura 56.

Parâmetros	Resultados Experimentais (FIOROT, 2012)	Modelo Matemático	Erro dos resultados do modelo matemático em relação aos experimentais (%)
$\bar{u}_o (m/s)$	0,2971	0,3061	3,00%
$Fr$	0,92	0,9246	0,50%
$h_1 (m)$	0,009299	0,009299	–
$h_2 (m)$	0,012455	0,01238	0,60%
$\Delta h(m)$	0,003156	0,00312	1,14%
$T(s)$	0,33	0,289	12,42%

Fonte: Elaborada pela própria autora

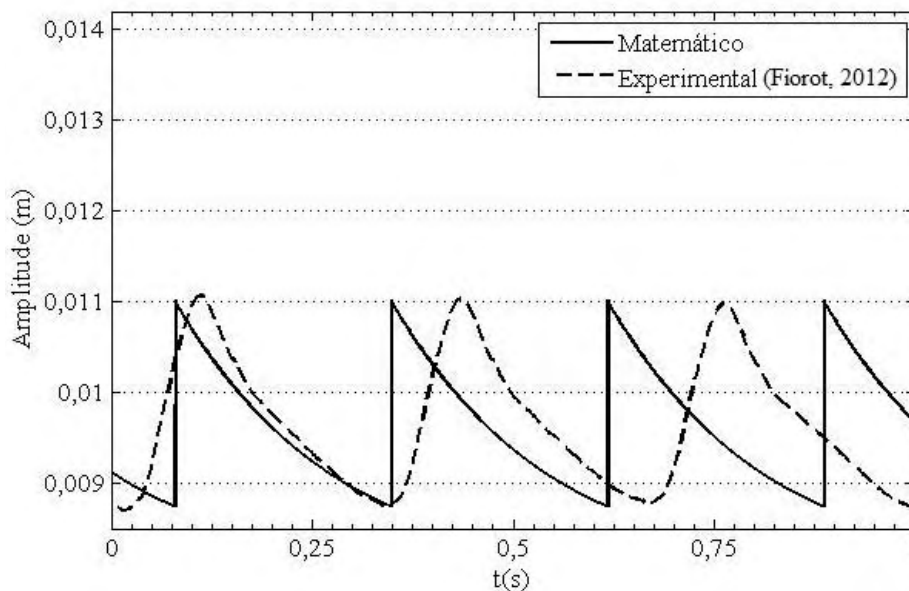
**Tabela 12** – Comparação entre resultados experimentais para uma vazão de 1,14 l/s e do modelo matemático, referente à Figura 57.

Parâmetros	Resultados Experimentais (FIOROT, 2012)	Modelo Matemático	Erro dos resultados do modelo matemático em relação aos experimentais (%)
$\bar{u}_o (m/s)$	0,3294	0,3557	7,98%
$Fr$	0,98	1,06	8,16%
$h_1 (m)$	0,01016	0,01016	–
$h_2 (m)$	0,01316	0,01312	0,30%
$\Delta h(m)$	0,003	0,002965	–
$T(s)$	0,327	0,198	39,44%

Fonte: Elaborada pela própria autora

Na Figura 55 é ilustrada a comparação entre o resultado experimental (FIOROT, 2012) e do modelo matemático proposto nesta tese, para uma vazão de 0,75 l/s.

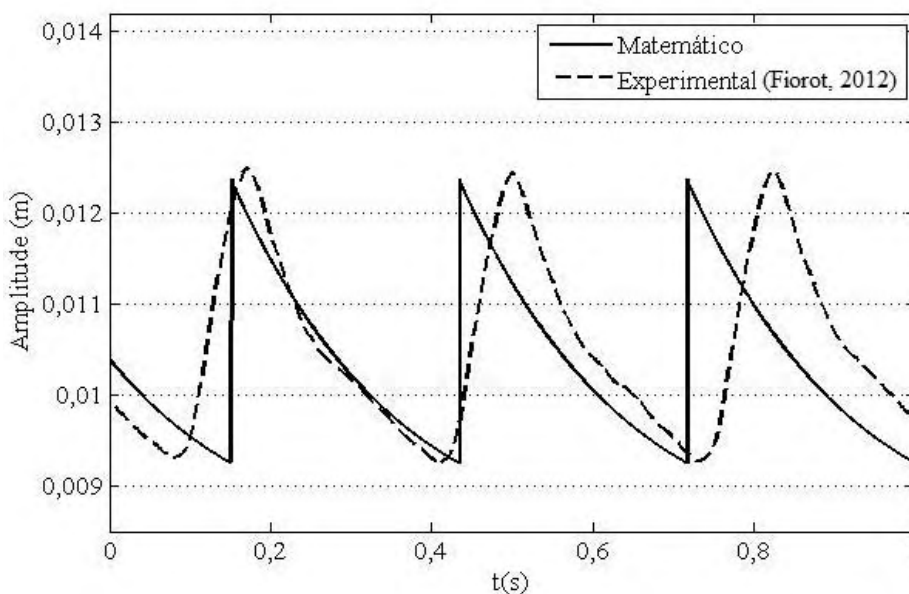
**Figura 55** – Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e matemático para uma vazão de 0,75 l/s.



Fonte: Elaborada pela própria autora

Através da Figura 56 mostra-se a comparação entre o resultado experimental (FIOROT, 2012) e do modelo matemático para uma vazão de 0,96 l/s.

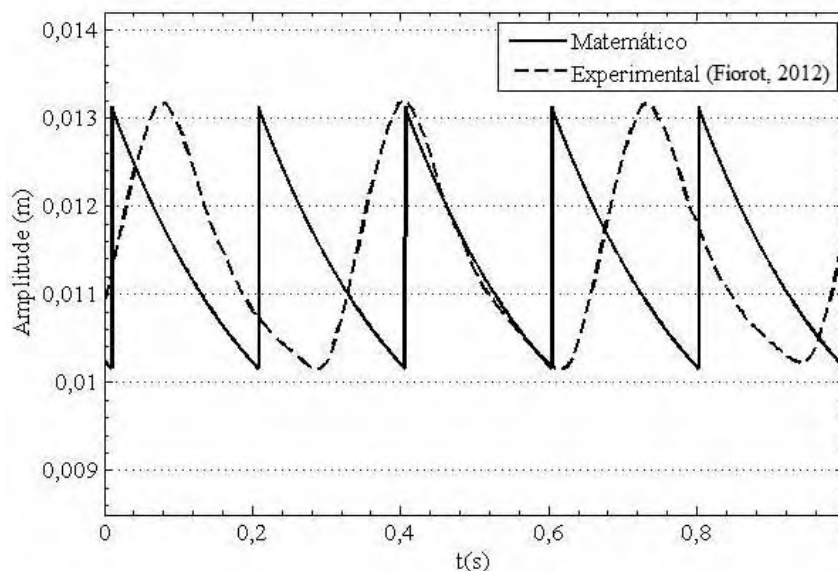
**Figura 56** – Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e matemático para uma vazão de 0,96 l/s.



Fonte: Elaborada pela própria autora

Na Figura 57 é mostrada a comparação entre o resultado experimental (FIOROT, 2012) e do modelo matemático proposto nesta tese, para uma vazão de 1,14 l/s.

**Figura 57** – Comparação entre os resultados experimental (FIOROT, 2012) e matemático para uma vazão de 1,14 l/s.



**Fonte:** Elaborada pela própria autora

Através das Figuras 55, 56 e 57, pode-se observar que o modelo matemático está em consonância com os resultados experimentais em relação a amplitude das ondas, mas no que diz respeito a frequência existe uma discrepância. Isto deve ocorrer porque a amplitude da onda é calculada com a imposição da lâmina baixa ( $h_1$ ) e a lâmina alta ( $h_2$ ) depende muito mais do valor de ( $h_1$ ) do que dos outros parâmetros do escoamento. Quanto ao erro relacionado à frequência das *roll waves*, este pode ser explicado por causa da limitação do modelo matemático em determinar o perfil da onda com a imposição das condições de choque.

Vale ressaltar, que a discrepância maior ocorre para a vazão de 1,14 l/s, ou seja, para o mesmo caso em que ocorre um erro maior em relação à amplitude de onda, quando comparados com os resultados numéricos (seção 6.1.1).

Cabe também salientar, que em ambos os casos as lâminas baixas ( $h_1$ ) não atingiram o valor mínimo ( $h_{min}$ ) que são de 0,00809 m, 0,008366 m e 0,008443 m, para as vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s, respectivamente, o que demonstra que o modelo seria capaz de reproduzir ondas ainda maiores.

Com estas observações, é importante verificar os resultados do modelo matemático com a imposição da lâmina baixa ( $h_1$ ) obtida através do modelo numérico.

### 6.1.3 Comparação entre os modelos numérico e matemático para fluido newtoniano

Nesta seção procura-se avaliar a compatibilidade entre os resultados obtidos através do modelo matemático e os resultados do modelo numérico obtido através do software Fluent.

A Tabela 13 mostra uma comparação entre as propriedades das ondas obtidas com o modelo numérico através do software Fluent e do modelo matemático, para vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s.

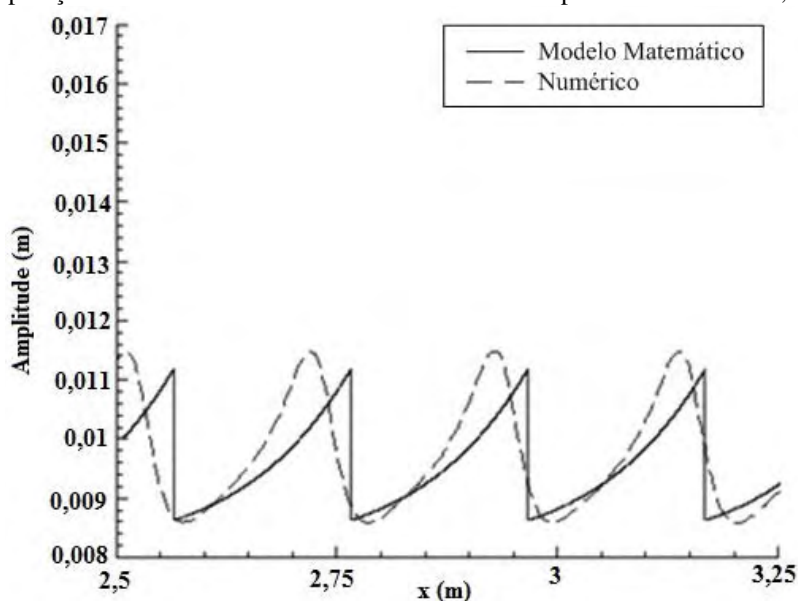
**Tabela 13-** Comparação entre as propriedades das ondas obtidas com o modelo numérico e o modelo matemático, para vazões de 0,75 l/s, 0,96 l/s e 1,14 l/s.

Propriedades (roll waves)	$q = 0,75 \text{ l/s}$		$q = 0,96 \text{ l/s}$		$q = 1,14 \text{ l/s}$	
	Modelo Numérico	Modelo Matemático	Modelo Numérico	Modelo Matemático	Modelo Numérico	Modelo Matemático
$h_1 (m)$	0,008627	0,008627	0,009334	0,009334	0,009653	0,009653
$h_2 (m)$	0,01151	0,01116	0,01284	0,01232	0,01479	0,01377
$\Delta h(m)$	0,002883	0,002538	0,00348	0,00302	0,00513	0,00412
$\lambda(m)$	0,20824	0,2015	0,2348	0,19402	0,267	0,234
$U(m/s)$	0,631	0,639	0,7115	0,7119	0,809	0,804

**Fonte:** Elaborada pela própria autora.

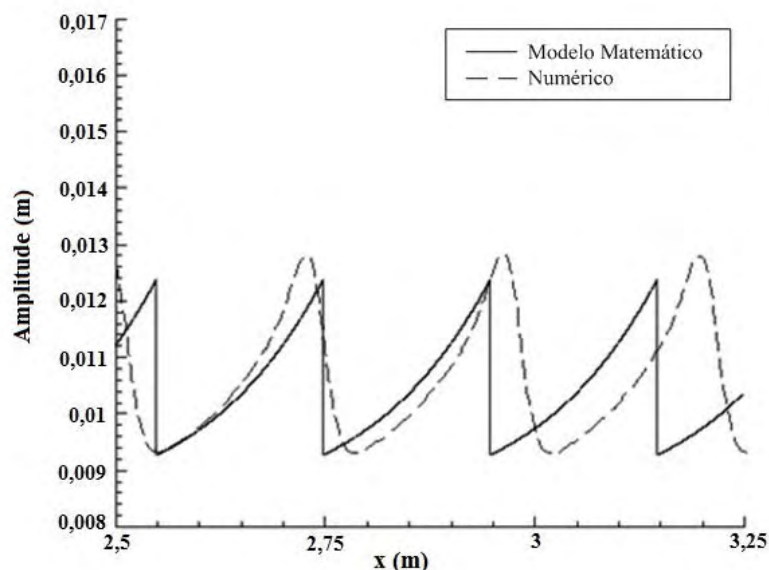
As Figuras 58, 59 e 60 ilustram os resultados apresentados na tabela 29.

**Figura 58** – Comparação entre os resultados numérico e matemático para uma vazão de 0,75 l/s.



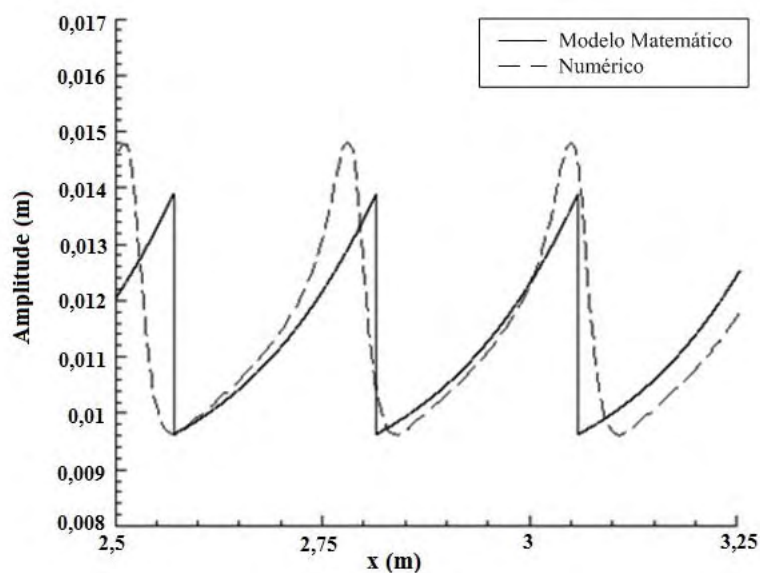
**Fonte:** Elaborada pela própria autora

**Figura 59** – Comparação entre os resultados numérico e matemático para uma vazão de 0,96 l/s.



Fonte: Elaborada pela própria autora

Figura 60 – Comparação entre os resultados numérico e matemático para uma vazão de 1,14 l/s.



Fonte: Elaborada pela própria autora

Através dos resultados ilustrados nas Figuras 58, 59 e 60, pode-se observar que existe uma boa compatibilidade entre os modelos numérico e matemático no que diz respeito à velocidade de propagação das ondas, em que no modelo matemático é dada pela Equação 104, sendo dependente somente do número de Froude e do coeficiente de distribuição de velocidade ( $\alpha$ ).

Quanto à amplitude existe uma pequena discrepância, que se torna mais notável com o aumento da vazão. Isto se explica em consequência da imposição da lâmina baixa ( $h_1$ ). Conforme já mencionado, a amplitude das ondas é muito sensível a ( $h_1$ ) e a entrada deste

parâmetro no modelo matemático é um valor numérico, extraído do software Fluent, ou seja, a imposição de um melhor ( $h_1$ ) pode melhorar os resultados em relação a amplitude destas ondas.

Já no que diz respeito ao comprimento das *roll waves*, para o caso em que a vazão é de 0,75 l/s, existe uma boa compatibilidade, mas com o aumento da vazão existe uma discrepância significativa. Este fato pode ser explicado por causa da configuração do próprio modelo matemático, que está sujeito à imposição das condições de choque, por isso, deve estar perdendo alguns efeitos, tais como, os difusivos. Além disso, é nítido através das Figuras 58, 59 e 60, que o modelo matemático fornece soluções de ondas mais íngremes do que o modelo numérico para o caso newtoniano.

## 6.2 Comparações para Fluidos Não Newtonianos

Nesta seção serão apresentadas comparações entre os resultados do modelo numérico obtido através do software FLUENT e do modelo matemático trabalhado no âmbito desta tese.

As primeiras comparações são realizadas para um fluido do tipo *Power law* ( $\tau_c = 0$ ), cujos parâmetros são os mesmos apresentados na seção 5.2.1.

Cabe ressaltar que para a obtenção dos resultados através do modelo matemático para fluido não newtoniano, também é necessário a imposição da lâmina baixa ( $h_1$ ), que para efeito de comparação deve ser a mesma obtida através modelo numérico via Fluent.

A Tabela 14 apresenta os resultados dos modelos numérico e matemático das *roll waves* geradas com frequências de perturbação de 0,5 Hz e 0,8 Hz.

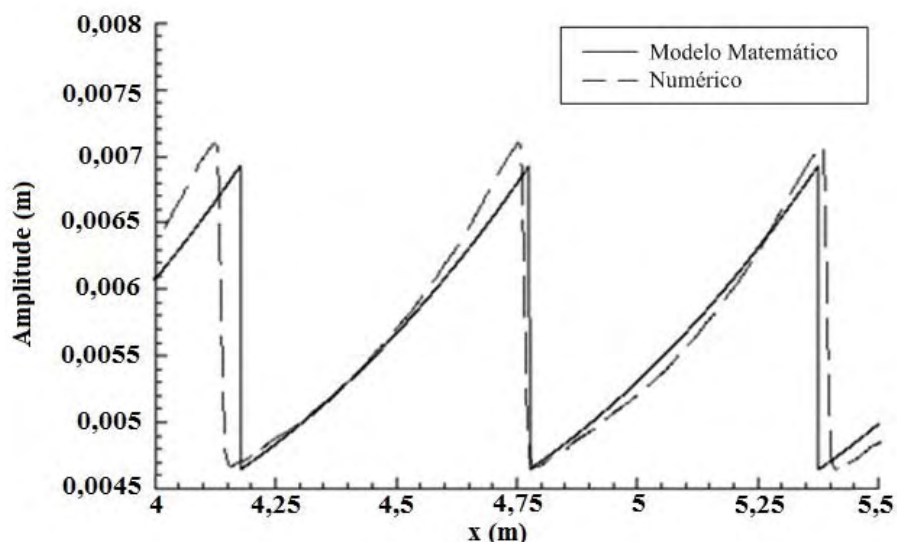
**Tabela 14** - Comparação entre as propriedades das ondas obtidas com o modelo numérico e o modelo matemático com frequências de perturbações de 0,8 e 1 Hz.

Propriedades ( <i>Roll waves</i> )	$f = 0,8 \text{ Hz}$		$f = 1 \text{ Hz}$	
	Numérico (FLUENT)	Modelo Matemático	Numérico (FLUENT)	Modelo Matemático
$h_1 \text{ (m)}$	0,00468	0,00468	0,00478	0,00478
$h_2 \text{ (m)}$	0,00708	0,00693	0,00690	0,00674
$\Delta h \text{ (m)}$	0,00240	0,00225	0,00212	0,00196
$\lambda \text{ (m)}$	0,629	0,597	0,508	0,508
$U \text{ (m/s)}$	0,503	0,514	0,508	0,514

Fonte: Elaborada pela própria autora

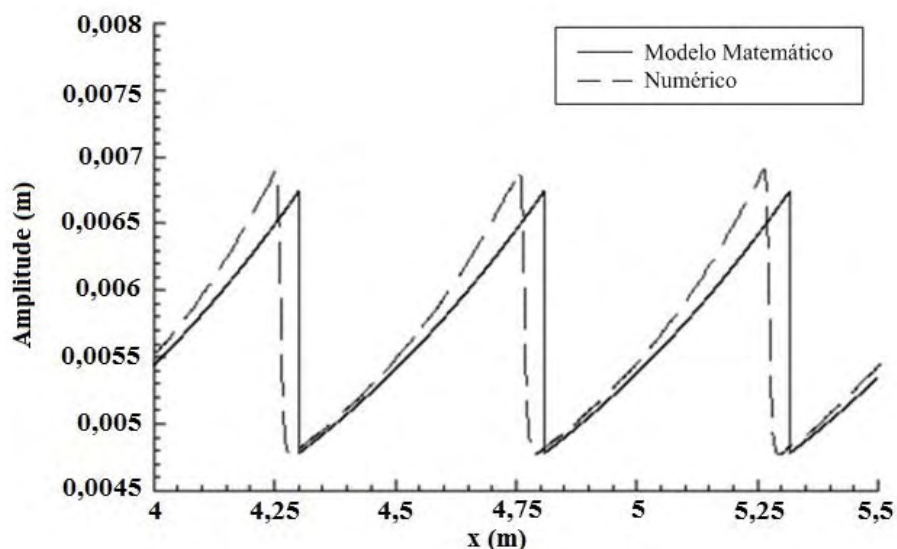
A Figuras 61 e 62 ilustram a comparação entre os resultados numéricos e matemático para fluido do tipo *power law* com frequências de 0,8 e 1 Hz, respectivamente.

**Figura 61** – Comparação entre os resultados teóricos e numéricos para fluido do tipo *Power law* com frequência de perturbação de 0,8 Hz.



Fonte: Elaborada pela própria autora

**Figura 62** – Comparação entre os resultados teóricos e numéricos para fluido do tipo *Power law* com frequência de perturbação de 1 Hz.



Fonte: Elaborada pela própria autora.

Através das ilustrações das Figuras 61 e 62 pode-se observar que existe uma boa compatibilidade entre os resultados matemático e numérico para o fluido do tipo *power law* ( $\tau_c = 0$ ). Neste sentido, é de interesse verificar se o mesmo ocorre com a inserção de uma tensão crítica de escoamento, ou seja, para um fluido do tipo Herschel Bulkley.

Na Tabela 15 são apresentados os resultados numéricos e teóricos para um fluido do tipo Herschel Bulkley com as mesmas condições apresentadas na seção 5.2.1, com a inserção de tensões críticas de 0,1 e 0,2 Pa, para uma frequência de perturbação de 0,8 Hz.

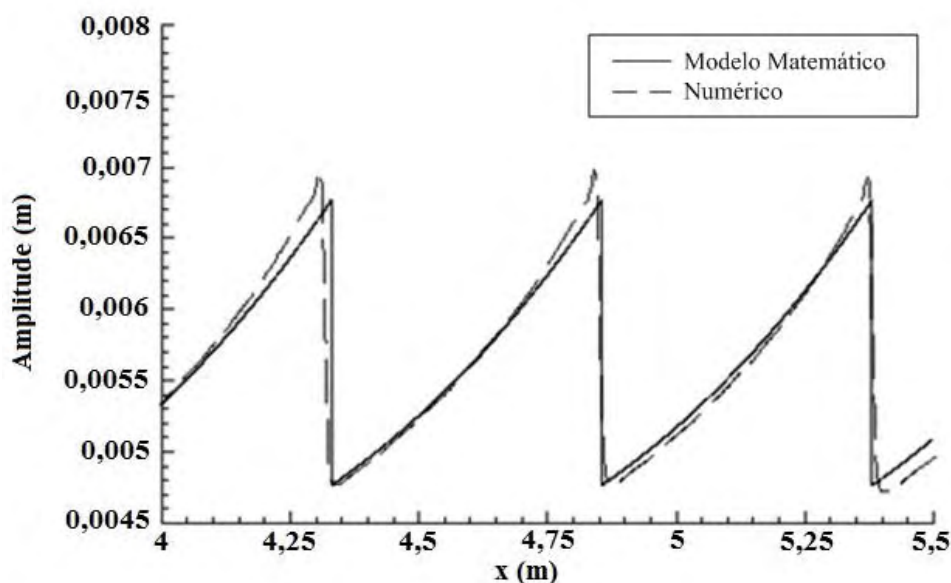
**Tabela 15** - Comparação entre as propriedades das ondas obtidas com o modelo numérico e o modelo matemático com tensões críticas de 0,1 e 0,2 Pa, para uma frequência de 0,8 Hz.

Propriedades ( <i>Roll waves</i> )	$\tau_c = 0,1 Pa$		$\tau_c = 0,2 Pa$	
	Numérico (FLUENT)	Modelo Matemático	Numérico (FLUENT)	Modelo Matemático
$h_1 (m)$	0,00478	0,00478	0,00506	0,00506
$h_2 (m)$	0,00699	0,00677	0,00669	0,00646
$\Delta h (m)$	0,00221	0,00199	0,00163	0,00140
$\lambda (m)$	0,534	0,524	0,463	0,420
$U (m/s)$	0,427	0,430	0,370	0,376

Fonte: Elaborada pela própria autora

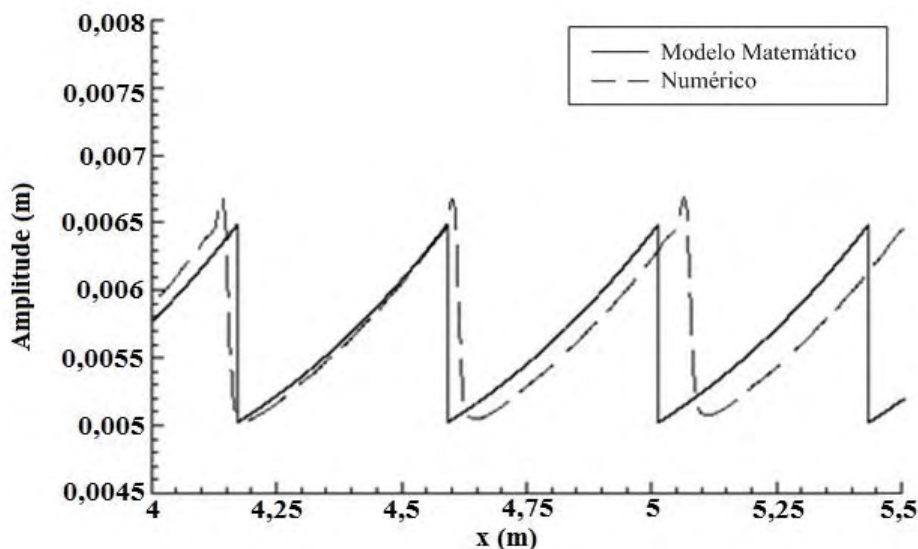
A Figuras 63 e 64 ilustram os resultados apresentados na Tabela 15 para tensões críticas de 0,1 e 0,2 Pa, respectivamente.

**Figura 63**– Comparação entre os resultados teóricos e numéricos para fluido do tipo Herschel Bulkley com frequência de perturbação de 0,8 Hz e tensão crítica de 0,1 Pa.



Fonte: Elaborada pela própria autora

**Figura 64** – Comparação entre os resultados teóricos e numéricos para fluido do tipo Herschel Bulkley com frequência de perturbação de 0,8 Hz e tensão crítica de 0,2 Pa.



Fonte: Elaborada pela própria autora

Através das Figuras 63 e 64 observa-se que existe uma boa concordância em relação à forma de ondas, amplitude e velocidade de propagação, entre os modelos numérico e matemático para fluido não-newtoniano.

No que diz respeito a comprimento de onda, o aumento da tensão crítica provocou um erro, que ainda assim, é menor do que o erro causado para fluido newtoniano. Isto pode ser explicado em função da forma de onda, que para o caso não newtoniano são mais íngremes, como mostra o modelo matemático.

Pode-se observar também, que para o caso não-newtoniano, seja *Power law* ou *Herschel Bulkley*, tanto a amplitude quanto o comprimento de onda é muito sensível à imposição da lâmina baixa  $h_1$ .

Vale salientar que em nenhum dos casos apresentados neste item a lâmina baixa ( $h_1$ ) atingiu o valor mínimo ( $h_{min}$ ). O que significa que o modelo matemático reproduziria *roll waves* com maiores amplitudes.

Deve-se esclarecer que para a lâmina baixa ( $h_1$ ) atingir o valor de mínimo ( $h_{min}$ ) no modelo numérico, é necessário a imposição de uma frequência de perturbação mínima para gerar *roll waves* em sua amplitude máxima, no entanto, com as análises apresentadas nesta tese, ainda não se sabe qual é a frequência mínima e nem qual é a sua relação matemática com o parâmetro ( $h_1$ ).

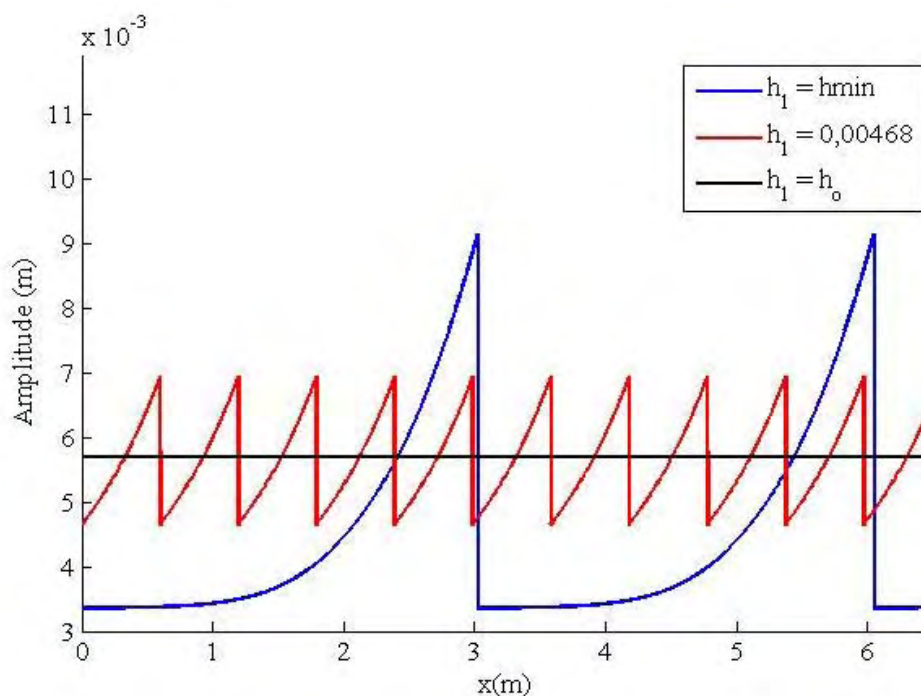
### 6.2.1 Análise do parâmetro ( $h_1$ )

Para o fluido do tipo *Power law*, o valor mínimo ( $h_{min}$ ) é de 0,00335. Já com a inserção da tensão crítica (fluido de Herschel Bulkley) pode-se observar que o valor de mínimo para a lâmina baixa aumenta. Para as tensões críticas de 0,1 e 0,2 Pa, os valores de mínimo são de 0,00373 e 0,00418, respectivamente. Isto, comprova que com o aumento da tensão crítica o domínio de geração de *roll waves* relacionado a imposição de ( $h_1$ ) diminui.

Salienta-se o que o valor de  $h_{min}$  é calculado numericamente através da análise fasorial, conforme apresentado na seção 3.5.3.

A Figura 65 ilustra os resultados do modelo matemático para um fluido do tipo *Power law*, tendo como parâmetro de entrada  $h_1 = h_{min}$ ,  $h_1 = 0,00468$ , que é a lâmina baixa para uma frequência de perturbação de 0,8 Hz e  $h_1 = 0,00569$ , que é próximo a lâmina do escoamento uniforme ( $h_0$ ).

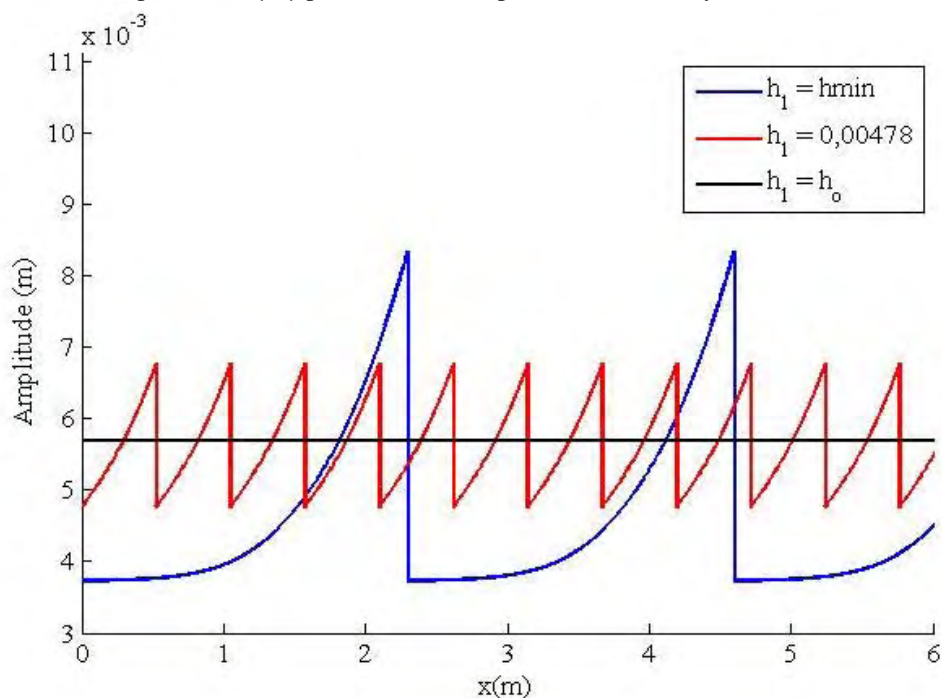
**Figura 65**– Análise do parâmetro ( $h_1$ ) para o fluido do tipo *Power Law*



Fonte: Elaborada pela própria autora

A Figura 65 mostra que à medida que o valor de ( $h_1$ ) se aproxima do escoamento uniforme, as *roll waves* tendem a desaparecer.

As mesmas observações foram feitas para fluido do tipo *Herschel Bulkley* com tensão crítica de 0,1 Pa, conforme mostrado na Figura 66.

**Figura 66**– Análise do parâmetro ( $h_1$ ) para o fluido do tipo Herschel Bulkley com tensão crítica de 0,1 Pa.

Fonte: Elaborada pela própria autora

Na seção 5.2.3, observou-se que a lâmina baixa da onda ( $h_1$ ) está relacionada com a frequência de perturbação e de acordo com o critério para geração de *roll waves*, o domínio de frequências diminui com o aumento da tensão crítica, o que está em consonância com os resultados aqui apresentados em relação à lâmina baixa ( $h_1$ ).

Nesta seção comprova-se a influência do parâmetro ( $h_1$ ) na geração de *roll waves* através do modelo matemático e a necessidade de um estudo na relação existente entre a frequência de perturbação e o parâmetro ( $h_1$ ).

Em linhas gerais, este capítulo trouxe comparações entre resultados experimentais (FIOROT, 2012), numéricos e matemático para fluido newtoniano e também para fluidos não newtonianos (*Power law*) no plano numérico e matemático. Estas comparações possibilitaram verificar as vantagens e limitações de cada modelo (físico, numérico e matemático).

---

## CAPÍTULO 7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

---

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões, as sugestões para trabalhos futuros e as produções bibliográficas no período de pesquisa.

### 7.1 Conclusões

Nesta tese foram propostos dois modelos para geração e propagação de *roll waves*. Um modelo matemático determinado a partir das equações de águas rasas sob a imposição de condições de choque e um modelo numérico através do software FLUENT. Para as simulações com fluido newtoniano, ambos os modelos foram alimentados com dados experimentais obtidos por Fiorot (2012), para o caso não-newtoniano, com dados de um fluido do tipo *Power law* testado por (NG; MEI, 1994). Visando verificar a validade dos respectivos modelos para fluido de Herschel Bulkley, o parâmetro tensão crítica de escoamento é inserido.

O modelo matemático fornece duas condições para geração de *roll waves* e as propriedades das mesmas, tais como: amplitude, comprimento, período e velocidade de propagação, tanto para fluido newtoniano como não-newtoniano. O modelo numérico verifica as condições de geração das *roll waves* e também fornece as propriedades das ondas, as quais são comparadas com as fornecidas pelo modelo matemático. Um estudo comparativo entre os modelos foi desenvolvido, alcançando boa concordância entre os mesmos, em termos de formas, amplitude e velocidade de propagação das ondas, o que contribui com o objetivo principal desta tese: a validação do modelo matemático desenvolvido para geração de *roll waves*.

No que diz respeito ao modelo físico desenvolvido dentro da equipe RMVP (Fiorot, 2012), este permitiu aferições de *roll waves* em fluido newtoniano, que conforme indicado no Capítulo 2, são resultados ainda escassos na literatura. O modelo físico vem validar o que se sabe sobre geração de *roll waves* em fluido newtoniano, suas propriedades e principalmente os critérios de geração de tais ondas, estabelecidos através do modelo matemático.

No que diz respeito às aplicações em problemas de engenharia, pôde-se concluir que cada modelo tem suas especificidades quando da análise das propriedades das *roll waves*, vantagens e desvantagens (limitações).

### 7.1.1 Modelo matemático

O modelo matemático é capaz de reproduzir *roll waves* em sua amplitude máxima tanto para fluido newtoniano quanto para fluido não-newtoniano. Através de análise de estabilidade linear pôde-se observar que o número de Froude e a frequência de perturbação são dois importantes parâmetros de controle das *roll waves*. No que diz respeito aos critérios de geração, verificou-se que para fluidos não-newtonianos, tais ondas, podem ser geradas para número de Froude menor do que para o caso newtoniano. Em contrapartida, para o caso não newtoniano a frequência limite de geração é menor que para o caso newtoniano, o que reduz o domínio de geração.

Quanto às propriedades destas ondas pôde-se observar que:

- quanto menor o valor de entrada no modelo matemático da lâmina baixa da onda ( $h_1$ ), ondas maiores em amplitude e comprimento deverão aparecer, tanto em escoamentos de fluidos newtonianos quanto não newtonianos;

- quanto maior o número de Froude, maior será a amplitude máxima das ondas e menor o comprimento e a velocidade de propagação, tanto para fluido newtoniano quanto para fluido não-newtoniano;
- em casos de fluidos não-newtonianos, pôde-se observar que as propriedades do fluido, influenciam na dinâmica do escoamento, por exemplo, quanto maior a tensão crítica do fluido, menor será o número de Froude, isto explica o aparecimento de ondas com velocidade de propagação baixa em fluidos não newtonianos;

#### – Vantagens e Desvantagens do Modelo Matemático

- a vantagem do modelo matemático com hipóteses simplificativas é que se pode fazer a previsão das principais características das ondas (amplitude, comprimento e velocidade de propagação) com um tempo computacional bem baixo (em torno de 30 segundos);
- uma outra vantagem do modelo matemático se refere a fácil utilização, com apenas a imposição das propriedades reológicas do fluido e a inclinação do canal, pode-se verificar se as condições são favoráveis para geração de *roll waves*, e, se sim, consegue-se prever qual seria a amplitude máxima das ondas;
- a desvantagem é que as hipóteses simplificativas ( $\epsilon \ll 1$ , adaptação para um sistema móvel de coordenadas, imposição de condições de choque) torna o modelo mais sensível em relação às propriedades do escoamento;
- uma outra desvantagem é que o modelo ainda é limitado no que tange à algumas propriedades de escoamento, no caso de lâminas muito finas, o modelo necessitaria de tensão superficial, e ainda, no que diz respeito ao fundo do canal é considerado condição de impermeabilidade, para uma melhor adaptação à realidade seria necessário considerar um fundo poroso.

### 7.1.2 Modelo numérico

Através de simulações numéricas pôde-se verificar a validade dos critérios estabelecidos a partir do modelo matemático e a influência dos parâmetros de controle, como frequência de perturbação e número de Froude, nas propriedades das *roll waves*:

- pôde-se comprovar que existe uma frequência limite ( $f < f_c$ ) para a geração de *roll waves*, que depende das condições do escoamento e das propriedades do fluido;
- observa-se que para fluido não-newtoniano o limite de frequências é menor que para fluido newtoniano, ou seja, para fluido não-newtoniano as ondas são geradas com baixas frequências de perturbação, o que acarreta em ondas longas, comprovando que para verificar *roll waves* em sua forma estável, é necessário comprimento suficiente de canal, conforme verificado por Montuori (1963) em escoamentos de fluido newtoniano, além disso, é necessário uma intensidade de perturbação suficientemente alta, para antecipar a geração do fenômeno;
- verifica-se que o primeiro critério estabelecido, relacionado ao número de Froude crítico ( $Fr > Fr_c$ ), é necessário, mas não é suficiente, conforme verificado experimentalmente por Fiorot (2012), ou seja, a geração de *roll waves* depende também da frequência de perturbação ( $f$ );
- as *roll waves* tem o período definido a partir do período da perturbação imposta, conforme verificado por Needhan e Merkin (1987), Maciel (2001), Zanuttigh e Lamberti (2002);
- um aumento na magnitude de perturbação antecipa a geração de *roll waves*, contudo, não altera a sua amplitude e comprimento, observações que também foram feitas por Maciel (2001);
- um aumento na frequência provoca ondas com menores amplitudes e menores comprimentos, já um aumento do número de Froude acarreta um aumento na amplitude das *roll waves*, conforme verificado no modelo matemático;
- no que diz respeito à tensão crítica de escoamento, observou-se que o aumento desta, acarreta em diminuição do número de Froude crítico, e ainda, em diminuição no limite da frequência de perturbação, o que também provoca alterações na amplitude das ondas e na velocidade de propagação, gerando ondas mais lentas, o que está em consonância com o modelo matemático.

Por fim, confirmou-se que variações nos parâmetros de controle: número de Froude ( $Fr$ ) e frequência de perturbação ( $f$ ) repercutem na amplitude das ondas geradas, seja para escoamentos de fluido newtoniano como não newtoniano.

### – Vantagens e Desvantagens do Modelo Numérico

- a vantagem é que através do modelo numérico pode-se colocar “monitores” ao longo do canal e verificar a evolução das ondas, aferindo, a amplitude e comprimento das mesmas, isto possibilita observar a partir de que comprimento de canal as *roll waves* atingem sua amplitude máxima. Através do modelo matemático não é possível fazer tal análise;
- a desvantagem do modelo numérico a partir de equações completas é o tempo de cálculo elevado (de 48 a 144 horas).

## 7.2 Aplicações

O tema desta tese está inserido na temática de mitigação de riscos e catástrofes naturais, embora esta pesquisa trate em particular o problema de instabilidades (*roll waves*) presentes em corridas de lama através de uma abordagem matemática, numérica e experimental (FIOROT, 2012). Conforme já descrito no Capítulo 1, esta pesquisa foi desenvolvida com uma preocupação de fornecer informações sob uma visão de engenharia, mas que possam ser úteis na prevenção do risco.

Com as análises aqui apresentadas pode-se afirmar que estas ondas em grandes escalas podem potencializar os danos causados em catástrofes do meio ambiente. Quando se trata de fluidos não-newtonianos, as *roll waves* apresentam-se com velocidade de propagação menos acentuada, mas são ondas mais pronunciadas, de amplitudes maiores, e de nível energético elevado. Pode-se também afirmar que o fenômeno é decorrente de uma perturbação, por exemplo, um obstáculo no escoamento ou interferências externas, necessitando de uma fonte de perturbação para desencadear um trem de ondas que ao atingir infraestruturas podem causar sérios prejuízos e inclusive perdas humanas.

Por fim, com os resultados obtidos até aqui, os pesquisadores do Grupo RMVP têm-se envolvido e atraído outros colaboradores mais consoantes com as ciências sociais, no que tange sobretudo à tradução da catástrofe, não focando apenas seu lado destrutivo, mas computando também os aspectos construtivos, quando da definição e implementação, por exemplo, de novas políticas públicas que permitam antever/evitar o desastre ou se este vier a se produzir, que as comunidades eventualmente sinistradas estejam mais adaptadas e por conseguinte, mais resilientes.

### 7.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

A experiência obtida a partir dos levantamentos bibliográficos, a modelagem matemática do fenômeno *roll waves*, as simulações numéricas destas ondas e sua geração e controle em bancada experimental desenvolvido dentro do grupo RMVP por Fiorot (2012), Cunha (2013), com o qual esta pesquisadora teve a oportunidade de acompanhar e participar dos experimentos, permitiram identificar novas frentes que poderão contribuir para o avanço do estado da arte no tema *roll waves*.

Ademais, não podemos deixar de comentar que acontecimentos associados a riscos e catástrofes nesses últimos anos, no mundo, e notadamente no Brasil, estiveram na pauta da mídia e de pesquisadores de diversas formações técnico – científico. O desenvolvimento desta tese esteve, portanto, bem na realidade desses acontecimentos.

#### 7.3.1 Modelo Matemático

Dentro do modelo matemático, várias melhorias e outras abordagens devem ser realizadas. Existem parâmetros que ainda precisam serem melhores investigados matematicamente, para que se possa dar uma interpretação física e até mesmo determinar outras condições em que as *roll waves* podem surgir, que é o caso de  $Fr_s = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$  (número de Froude no ponto de singularidade),  $h_1$  (lâmina baixa da onda) e  $C^*$  (parâmetro adimensional da tensão crítica de escoamento).

Através de análise de estabilidade linear determinaram-se dois critérios para geração de *roll waves*. Porém na análise de estabilidade espacial foi identificado um ponto de singularidade ( $Fr_s$ ) na equação da dispersão, ainda não se sabe o sentido físico deste ponto, o comportamento e as propriedades das *roll waves* quando  $Fr = Fr_s$ .

O modelo matemático é bastante sensível ao parâmetro de entrada  $h_1$ , este deve ser investigado, já que existe um valor mínimo de  $h_1$  para geração de *roll waves* e neste ponto tem-se *roll waves* de amplitude máxima, e numericamente, verificou-se que frequências de perturbação baixas geram *roll waves* de grandes amplitudes, ou seja, se existe um valor de  $h_1 = h_{mim}$ , também deve existir uma frequência de perburbação mínima relacionada ao valor de  $h_1$ .

No que diz respeito às propriedades reológicas do fluido (*Herschel Bulkley*), sabe-se que o escoamento ocorre quando  $C^* < 1$ , mas isto, não é garantia da ocorrência de *roll waves*,

mesmo quando os dois critérios de geração são satisfeitos. Nesta tese, não se conseguiu determinar um critério para geração destas ondas em função da tensão crítica de escoamento e ainda, não se sabe se existem problemas de arrebenção das mesmas em função dos parâmetros reológicos do fluido.

Por fim, outras melhorias podem ser feitas no modelo, tais como inserção do efeito tensão superficial, para casos de lâminas muito finas e também a introdução de uma condição de permeabilidade no fundo canal, ou seja, considerar um fundo poroso, para isto, é necessário a escolha ou determinação de uma condição que possa modelar a porosidade. Pascal (2006) iniciou o tratamento desse problema com *roll waves* para fluido do tipo *Power law*, utilizando a lei de Darcy como condição de permeabilidade.

### 7.3.2 Modelo físico

No que se refere a trabalhos experimentais com *roll waves*, principalmente em reologias não-newtonianas, de fluidos com tensão crítica, ainda existe uma lacuna. Nesse sentido, é de interesse realizar experimentos utilizando o aparato experimental já existente na Unidade tanto para ensaios com reologia newtoniana e sobretudo não newtoniana, utilizando o carbopol como fluido tipo (não-newtoniano) representativo (reologicamente) das corridas de lama (*mudflows*), como solução de água+ argila propriamente dita. Estes ensaios, já foram recentemente iniciados dentro do grupo RMVP (CUNHA, 2013, em andamento) e já se tem a percepção da necessidade de um canal de maior comprimento, para que se possa medir as *roll waves* em sua forma estável, visto que em fluidos não-newtonianos as *roll waves* são geradas com baixas frequências de perturbação, assim, ondas de maiores amplitudes devem aparecer, conforme verificado numericamente nesta tese. Desta forma, sugere-se a realização de uma bateria de ensaios em canal de maior comprimento (pelo menos 6 m).

Outra sugestão, está relacionada aos pontos de medição ao longo do canal, que devem ser em pelo menos três pontos, para que se possa verificar a evolução destas ondas e determinar a partir de que comprimento as *roll waves* atingiriam suas amplitudes máximas.

A realização desses ensaios possibilitaria:

- determinar grupos adimensionais de interesse no problema *mudflows* com a presença de *roll waves*;
- determinar experimentalmente as condições de geração e de propagação de *roll waves* em fluidos não-newtonianos;

- confrontar resultados teóricos-numéricos e experimentais, com base nos “solvers” já existentes na equipe;
- sistematizar um organograma do fenômeno *roll waves* presentes em corridas de lama. Como são geradas? Em que condições? Como controlá-las? Como minimizar os seus efeitos?

### 7.3.3 Perspectivas Futuras deste trabalho em áreas afins

- Implementação eletrônica visando emular os resultados aqui propostos;
- O desenvolvimento de um sistema inteligente (baseado, por exemplo, nas Redes Neurais Artificiais (HAYKIN, 2009), lógica *fuzzy* (CHEN; PHAM, 2006), teoria de evidência (BARNETT, 2008).

## 7.4 Publicações

### - Periódicos

- FREITAS, Maciel; GERALDO, Oliveira Ferreira; FABIANA,; FIOROT, Guilherme Henrique.  
Control of instabilities in non-newtonian free surface fluid flows. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 3, p. 217-229, 2013.
- MACIEL, G. F; SANTOS, H. K; FERREIRA, F. O.  
Rheological analysis of water clay compositions in order to investigate mudflows developing in canals. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v. 31, n. 1, p. 64 - 74, 2009.

### - Trabalhos publicados em anais de eventos (simpósios, congressos e conferências)

FERREIRA, F. O.; MACIEL, G. F; FIOROT, G. H; MINUSSI, C. R; GIL, L. M. C. C.  
Generation and propagation of instabilities in mud flows. In: INTERNATIONAL SHORT COURSE/CONFERENCE ON APPLIED COASTAL RESEARCH - SCACR, 6., 2013, Lisboa. **Anais...** Lisboa: [s.n.], 2013. 1 CD-ROM.

- FERREIRA, F. O.; MACIEL, G. F; FIOROT,G.H.; CUNHA, E. F.; SARDINHA JUNIOR, R.; SILVA, A. E. M.; VIEIRA, A. S. Numerical investigation of roll waves occurring in non-newtonian fluid flow. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON RHEOLOGY, 6., 2013, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: [s.n.], 2013. p. 81 – 84.
- MACIEL, G. F; VIEIRA, A. S; FORTES, C. J. E. M; CUNHA, E. F.; FERREIRA, F. O.; FIOROT,G. H. Aplicação do modelo numérico *swan* à geração e propagação de ondas geradas por vento em recintos fechados. In: CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA, 25., 2012, San José. **Anais...** San José: [s.n.], 2012. 1 CD-ROM.
  - MACIEL, G. F; MINUSSI, C. R; DALLAGLIO SOBRINHO, M.; KITANO, C.; FERREIRA, F. O.; FIOROT,G. H.; CUNHA, E. F. Contribuição *do* grupo de pesquisa RMVP para o entendimento de roll waves em corridas de lama. In: SIMPÓSIO DE RECURSOS HÍDRICOS DO NORDESTE, 11., 2012, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa: [s.n.], 2012. 1 CD-ROM.
  - MACIEL, G. F; FIOROT,G. H; FERREIRA, F. O.; SARDINHA JUNIOR, R. Propositura de modelagem matemática para o estudo de instabilidades em corridas de lama. In: CONGRESSO BRASILEIRO SOBRE DESASTRES NATURAIS, 2012, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: [s.n.], 2012. 1 CD-ROM.
  - MACIEL, G. F; FERREIRA, F. O.; FIOROT,G. H; MINUSSI, C. R.; GIL, L. M. C. C.; VIEIRA, A. S; CUNHA, E. F. Simulação de *roll waves* através do software FLUENT. In: CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA, 25., 2012, San José. **Anais...** San José: [s.n.], 2012. 1 CD-ROM.
  - FERREIRA, F. O.; MACIEL, G. F; FIOROT,G. H; GIL, L. M. C. C.; MINUSSI, C. R.; CUNHA, E. F. Riscos e catástrofes naturais: presença de *roll waves* em corridas de lamas. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 26., 2011, Maceió. **Anais...** Maceió: [s.n.], 2011. 1 CD-ROM.

- MACIEL, G. F.; FERREIRA, F. O.; FIOROT, G. H.; VIEIRA, A. S.; MINUSSI, C. R. Modelos representativos de evolução de ondas em escoamentos de lama – uma abordagem de ordem teórico-numérico-experimental. In: CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA, 24., 2010, Punta del Este. **Anais...** Punta del Este: IARH, 2010. p. 20 – 30.
- FERREIRA, F. O.; MACIEL, G. F.; FIOROT, G. H.; GIL, L. M. C. C. Abordagem matemática de roll waves em escoamentos hiperconcentrados. In: JORNADAS DE ENGENHARIA HIDROGRÁFICA, 1., 2010, Lisboa. **Anais...** Lisboa: [s.n.], 2010. p. 303-306.
- FIOROT, G. H.; MACIEL, G. F.; KITANO, C.; FERREIRA, F. O. Numerical experimental confrontation of roll waves in mud. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON RHEOLOGY, 5., 2010, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: [s.n.], 2010. p. 14 – 16.
- FERREIRA, F. O.; FIOROT, G. H.; MACIEL, G. F. Riscos e catástrofes no meio ambiente: confrontação numérico-experimental de instabilidades presentes em corridas de lama. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 28., 2009, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: [s.n.], 2009. p. 1 – 10.
- FERREIRA, F. O.; FREITAS, GERALDO, M. Generation of roll waves using Herschel-Bulkley rheological model. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FLUVIAL HYDRAULICS RIVER FLOW, 2008, Turkey. **Anais...** Turkey: [s.n.], 2008. p. 1681 – 1691.
- MACIEL, G. F.; FERREIRA, F. O.; SANTOS, F. L. Rheological and dynamical behavior of mud with fine sand flowing in open channels. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FLUVIAL HYDRAULICS RIVER FLOW, 2008, Turkey. **Anais...** Turkey: [s.n.], 2008. p. 1707 – 1717.

---

---

## REFERÊNCIAS

---

---

ALAVIAN, V. Behaviour of density currents on an incline. **Journal of Hydraulic Engineering**, Reston, v. 112, n. 1, p. 27–42, 1986.

ARIS, R. **Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics**. New York: Dover Publications, 1969. 286 p.

ARAÚJO, R. P.; GALDO, R. **Angra planeja construir muros em morros para conter deslizamentos**, O Globo, Rio de Janeiro, 11 de janeiro de 2010. Disponível em: <http://oglobo.globo.com/rio/angra-planeja-construir-muros-em-morros-para-conter-deslizamentos-3070448>. Acesso em: 15 jan. 2010.

BALMFORTH, N. J.; MANDRE, C. Dynamics of *roll waves*. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 514, p. 1-33, 2004.

Balmforth, N. **Roll waves in a concrete channel in Lions**, Vancouver, 2011. Disponível em: <http://www.math.ubc.ca/~njb/Research/rollo.htm>. Acesso em: 20 jun. 2011.

BARNETT, J. A. Computational methods for a mathematical theory of evidence. In: YAGER, R. R.; LIU, L. (Ed.). **Classic works of the Dempster-Shafer theory of belief functions**. Berlin: Springer, 2008. p. 197–216.

- BENJAMIN, T. B. Wave formation in laminar flow down an inclined plane. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 2, p. 554–574, 1957.
- BRITO, M. G. **Simulação numérica de tomadas de água**. 2010. 134 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2010.
- BROCK, R. R. Development of roll-wave trains in open channels. **Journal Hydraulics Division**, New York, v. 95, p. 1401–1427, 1969.
- BROOK, B. S.; FALLE, S. A. E. G.; PEDLEY, T. J. Numerical solutions for unsteady gravity-driven flows in collapsible tubes: evolution an roll wave instability of a steady state. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 396, p. 223 – 256, 1999.
- CENTRO NACIONAL DE MONITORAMENTO E ALERTAS DE DESASTRES NATURAIS- CEMADEN. **Municípios monitorados**. Cachoeira Paulista: [s.n.], 2011. Disponível em: <www.cemaden.gov.br.>. Acesso em: 2 dez. 2012.
- CENEDESE, C.; WHITEHEAD, J. A.; ASCARELLI, T. A.; OHIWA, M. A dense current flowing down a sloping bottom in a rotating fluid. **Journal of Physical Oceanography**, Boston, v. 34, p. 188 - 203, 2004.
- CHEN, C. L. Momentum and energy coefficients based on power-law velocity profile. **Journal of Hydraulic Engineering**, New York, v. 118, p. 1571-1584, 1992.
- Chen, G.; PHAM, T. T. **Introduction to fuzzy systems**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2006.
- CORNISH, V. **Waves of the sea and other waves**. London: Fisher Unwin, 1910. p. 303.
- COUSSOT, P. Steady, laminar, flow of concentrated mud suspensions in open channel. **Journal of Hydraulic Engineering**, New York, v. 32, n. 4, p. 535–559, 1994.
- COUSSOT, P.; PIAU J. M. On the behavior of mud suspensions. **Rheologica Acta**, Darmstadt, v. 33, n. 3, p. 175-184, 1994.
- DI CRISTO, C.; VACCA, A. On the convective nature of *roll waves* instability. **Journal Applied Mathematics**, London, v. 3, p. 259-271, 2005.
- DRESSLER, R. F. Mathematical solution of the problem of *roll waves* in inclined open channels. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, New York, v. 2, p. 149 –194, 1949.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics**. 3rd ed. Berlin: Springer, 2002. 431p.
- FER, I.; LEMMIN, U.; THORPE, S. A. Winter cascading of cold water in lake geneva. **Journal of Geophycs**, Berlim, v. 107, n. 3060, p. 1-13, 2003.
- FERREIRA, F. O.; MACIEL, G. F.; FIOROT, G. H.; GIL, L. M. C. C; MINUSSI, C. R.; CUNHA, E. F. Riscos e catastrofes naturais: presença de *Roll waves* em corridas de lamas. In:

SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 19., 2011, Maceió. **Anais...** Maceió: [s.n.], 2011. p. 98. 1CD-ROM.

FIOROT, G. H. **Mitigação de riscos e catástrofes naturais**: análise numérico-experimental de *Roll waves* evoluindo em canais inclinados. 2012. 187 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista- Unesp, Ilha Solteira, 2012.

FLUENT 6.3. User's Guide. Lebanon: Fluent Incorporated, 2006. 2501 p.

GAO, D.; MORLEY, N. B.; DHIR, V. Numerical simulation of wavy falling film flow using VOF method. **Journal of Computational Physics**, Los Angeles, v. 192, p. 624-642, 2003.

GIBSON, J. **Llyn brianne dam spillway**. Great Britain: [s.n.], 2008. Disponível em: <http://www.geograph.org.uk/photo/925456>. Acesso em: 8 set. 2011.

GLOBAL RISKS - WEF. **A global network report, world economic forum**. Geneva: World Economic Forum, 2010. 49 p.

GONÇALO, G., Região serrana chuva mata 264: Teresópolis e Friburgo arrasadas, **Destak**, Rio de Janeiro, 13 de janeiro de 2011. Disponível em: <http://www.destakjornal.com.br/noticias/rio/regiao-serrana-chuva-mata-264-teresopolis-e-friburgo-arrasadas-84297/>. Acesso em: 20 jan. 2011.

GUIDUGLI, R. B; CANDIDO, M.; CAMARGO, R. S.; SIMONSEN, S.; PERIOLI, C. Manejo de corpos em desastres de massa. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE DESASTRES NATURAIS, 9., 2012, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: [s.n.], 2012. 1CD-ROM.

GUIDICINI, G.; NIEBLE, C. M. Estabilidade de taludes naturais e de escavação. São Paulo: Edgar Blücher, 1984. 142 p.

HAYKIN, S., **Neural networks and learning machines**. Upper Saddle River: Pearson Education, 2009.

HUANG, X.; GARCIA, M. H. A herschel-Bulkley model for mud flow down a slope. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 374, p. 305-333, 1998.

HWANG, S. H.; CHANG, H. C. Turbulent and inertial *roll waves* in inclined film flow. **Physics Fluids**, Houston, v. 30, n. 5, p. 1259-1268, 1987.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN SCIENCES ET TECHNOLOGIES POUR L'ENVIRONNEMENT ET L'AGRICULTURE – IRSTEA. **Connaitre les laves torrentielles**, Grenoble: [s.n.], 2001, Disponível em: <http://www.irstea.fr/lespace-jeunesse/nos-ressources/videos-0>. Acesso em: 5 maio 2008.

ISHIHARA, T.; IWAGAKI, Y.; IWASA, Y. Theory of the roll wave train in laminar water flow on a steep slope surface. **Transactions JSCE**, Japan, v. 19, p. 46-57, 1954.

IVERSON, R. M. The physics of debris flow. **Reviews of Geophysics**, Vancouver, v. 35, n. 3, p. 245 – 296.

- JEFFREYS, H. The flow of water in an inclined channel of rectangular section. **Phil Magazine**, Cambridge, v. 49, n. 293, p. 793-807, 1925.
- JULIAN, B. R. Volcanic tremor: nonlinear excitation by fluid flow. **Journal Geophysics**, Berlin, v. 99, n. B6, p. 11859–11877, 1994.
- KAPITZA, P. L. **Wave flow of thin layers of a viscous fluid**. [S.l.]: Pergamon Press, 1948. p. 662-709.
- KRANENBURG, C. On the evolution of *roll waves*. **Journal of Fluid Mechanics**, Delft, v. 245, p. 249-261, 1992.
- LEITE, L. O. B. **Determinação física e numérica de corridas de lama em escoamentos resultantes de ruptura de barreira retendo material viscoplástico**. 2009. 185 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.
- LACHAMP, P. **Modélisation numérique de l'effet d'un obstacle sur les écoulements de fluides à seuil par la méthode SPH**. 2003. 231 f. Tese (Doutorado) - Université Joseph Fourier-GrenobleI, Grenoble, 2003.
- LIU, K.; MEI, C.C. *Roll waves* on a layer of a muddy fluid flowing down a gentle slope – a bingham model. **Physics of Fluids**, New York, v. 6, n. 8, p. 2577-2590, 1994.
- LIU, J.; GOLLUB, J. P. Solitary wave dynamics of film flows. **Physics of Fluids**, New York, v. 6, n. 5, p. 1702–1712, 1994.
- LIU, J.; PAUL, J. D.; GOLLUB, J. P. Measurement of the primary instabilities of film flows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 250, p. 69–101, 1993.
- MACIEL, G. F.; VILA, J. P.; MARTINET, G. Roll wave formation in the non newtonian flows. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 14., 1997, Bauru. **Anais...** Bauru: ABCM, 1997. p. 98.
- MACIEL, G. F. **Roll waves evoluindo em canais de forte declividade: Uma abordagem matemática com aproximação numérica**. 2001. 184 f. Tese (Livre Docência em *Roll waves*) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2001.
- MACIEL G. F.; SANTOS H. K.; FERREIRA F. O. Rheological analysis of water clay compositions in order to investigate mudflows developing in canals. **J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.**, Rio de Janeiro, v. 31, n. 1, p. 64-74, 2009.
- MACIEL, G. F. **Dá pra mudar**. [S.l.: s.n., 2011]. Disponível em: <<http://www.webartigos.com/articles/57005/1/Da-para-mudar/pagina1.html>>. Acesso em: 20 maio 2011.
- MACIEL G. F.; FERREIRA F. O.; FIOROT, G. H. Control of instabilities in non-newtonian free surface fluid flows. **J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.**, Rio de Janeiro, v. 35, n. 3, p. 217 - 229, 2013.
- MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. Rio de Janeiro: LTC, 2004. 453 p.

- MARCELINO, E. V.; NUNES, L. H.; KOBAYAMA, M. Banco de dados de desastres naturais: análise de dados globais e regionais. **Caminhos de Geografia**, Uberlândia, v. 6, n. 19, p. 130-149, 2006.
- MARCELINO, E. V. **Desastres naturais e geotecnologias: conceitos básicos**. Santa Maria: INPE, 2007. 20 p.
- MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA. **Deslizamentos de terra são a maior causa de mortes por desastres naturais**. Brasília: Portal Brasil, 2011. Disponível em: <<http://www.brasil.gov.br/ciencia-e-tecnologia/2011/03/deslizamentos-de-terra-sao-a-maior-caoa-de-mortes-por-desastres-naturais-diz-secretario>>. Acesso em: 5 jun. 2012.
- MINUSSI, R. B. **Rompimento de barreiras: análise experimental e numérica na previsão de velocidade de propagação de frentes de material hiperconcentrado**. 2007. 128 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista- Unesp, Ilha Solteira, 2007.
- PIAU, J. M. Flow of a yield stress fluid in a long domain, application to flow on an inclined plane. **Journal Rheology**, New York, v. 40, n. 4, p. 711-723, 1996.
- NEEDHAM, D. J.; MERKIN, J. H. An infinite period bifurcation arising in *roll waves* down open inclined channel. **Proceedings of the Royal Society of London. Mathematical and physical sciences. Series A**, London, v. 405, p. 103-116, 1987.
- NG, C. O.; MEI, C. C. *Roll waves* on a layer of fluid mud modelled as a power law fluid. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 263, p. 151-184, 1994.
- NOBLE, P. **Méthodes de variétés invariantes pour les équations de Saint Venant et les systèmes hamiltoniens discrets**. 2003. 182 f. Tese (Doutorado) - Université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse, 2003.
- PAIXÃO CONDE, J. M.; DIDIER E. Simulação numérica de um dispositivo de aproveitamento da energia das ondas do tipo coluna de água oscilante. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE ENGENHARIA MECÂNICA- CIBIM, 9., 2008, Las palmas de Gran Canaria. **Proceedings...** Las palmas de Gran Canaria: [s.n.], 2008. p. 88-95. SBN 978-84-692-8516-9, 5.
- PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. New York: Hemisphere Pub. Corp, 1980. 197 p.
- PEDLEY, T. J. **Fluid mechanics of large blood vessels**. Cambridge: Cambridge University Press. 1980.
- REBELLO, E. R. G.; CARVALHO, B. E. F. C. C.; COSTA, J. A. V.; FREITAS, M. A. S.; CAVALCANTE, O. A. Condições meteorológicas das chuvas fortes que atingiram a Região Serrana Do Rio de Janeiro no dia 12.01.2012. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE DESASTRES NATURAIS, 11., 2012, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: [s.n.], 2012.1 CD-ROM.

TAVARES, A. O. A gestão territorial dos riscos naturais e tecnológicos e o ordenamento do território. a perspectiva a partir do plano regional de ordenamento do território – centro. **RevCEDOUA**, Coimbra, v. 22, n. 2, p. 59-73, 2008.

Toro, E. F. **Shock**: capturing methods for free surface shallow flow. Manchester: Manchester University, 2001. 161p.

Ubbink, O.; Issa, R. I. A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes. **Journal of Computational Physics**, Orlando, v. 153, n. 1, p. 26-50, 1999.

UNITED NATIONS OFFICE FOR DISASTER RISK REDUCTION - UNISDR. **Progress Report for the Disaster Risk Reduction Policy**. Australian Government: Australian, 2012, 8 p. Disponível em: <<http://www.aisaid.gov.au/Publications/Pages/aisaid-unisdr-partnership-framework-2011-13.aspx>>. Acesso em: 9 jan. 2013.

UNITED NATIONS INTER-AGENCY TASK FORCE - UNIATF. **Strategic Directions for the ISDR System to Assist the Implementation of the Hyogo Framework for Action 2005-2015: Building the Resilience of Nations and Communities to Disasters** Geneva: [s.n.], 2005. Disponível em: <<http://www.unisdr.org/we/inform/publications/1040>>. Acesso em: 5 out. 2012.

VEIGA, E. As tragédias de 1967. **Estadão**, São Paulo, 21 de janeiro de 2011, Disponível em: <http://blogs.estadao.com.br/edison-veiga/2011/01/21/as-enchentes-de-1967/>. Acesso em: 8 dez. 2012.

VERTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. An introduction to computational fluid dynamics. In: \_\_\_\_\_. **The finite volume method**. Harlow: [s.n], 1995. 257 p.

YIH, C. S. Stability of liquid film down an inclined plane. **Physics of Fluids**, New York, v. 6, n. 3, p. 321, 1963.

ZANUTTIGH, B.; LAMBERTI, A. *Roll waves* simulation using shallow water equations and weighted average flux method. **Journal of Hydraulic Research**, Delft, v. 40, n. 5, p. 610-622, 2002.

ZANUTTIGH, B.; LAMBERTI, A. Instability and surge development in debris flows. **Reviews of Geophysics**, Washington, v. 45, n. 3, p. 1-45, 2007.

## **APÊNDICE A - DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS**

---

---

Neste apêndice é apresentada a dedução das equações de águas rasas levando-se em consideração um escoamento bidimensional com a reologia de Herschel Bulkley.

### A.1 - Equações Fundamentais e Escalas Adimensionais

Relembrando as equações fundamentais de Cauchy :

#### - Conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (\text{A.1})$$

#### - Quantidade de movimento

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \bar{\bar{T}} \quad (\text{A.2})$$

Sendo que  $\bar{\bar{T}}$  é o tensor dado por:

$$\bar{\bar{T}} = -p \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\tau}} \quad (\text{A.3})$$

em que:

$\vec{u}$ : vetor velocidade

$t$ : tempo

$\rho$ : massa específica do fluido

$\vec{f}$ : força gravitacional

$p$ : pressão

$\bar{\bar{\delta}}$ : matriz identidade

$\bar{\bar{\tau}}$ : tensor viscoso ou de cisalhamento

Levando-se em consideração um escoamento de fluido incompressível, tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Considera-se um modelo bidimensional, onde apenas as coordenadas  $x$  e  $z$  serão levadas em consideração, supondo que não fluxo na variável correspondente à largura do escoamento,  $y$ , tem-se:

- Conservação da massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.5})$$

- Equação da quantidade de movimento na direção  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g \sin(\theta) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (\text{A.6})$$

- Equação da quantidade de movimento na direção  $z$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \cos(\theta) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (\text{A.7})$$

sendo:

$\tau_{xx}$ : tensão normal atuante na direção  $x$

$\tau_{zz}$ : tensão cisalhante atuante no eixo  $x$  na direção  $z$

$\tau_{zx}$ : tensão cisalhante atuante no eixo  $z$  na direção  $x$

Para a dedução das equações de águas rasas, inicialmente, leva-se em consideração as escalas adimensionais de interesse:

- Escala de comprimento:  $(Ox, Oz) = (Lx^*, h_0 z^*)$

- Escala de velocidades:  $(u, w) = \left[ u_0 u^*, \left( \frac{h_0}{L} u_0 \right) w^* \right]$

- Escala de tempo:  $t = \left( \frac{L}{u_0} \right) t^*$

- Pressão:  $P = \rho u_0^2 P^*$

- Tensões:  $(\tau_{xx}, \tau_{zz}) = k_n \left( \frac{u_0}{h_0} \right)^{n-1} \left( \frac{u_0}{L} \right) (\tau_{xx}^*, \tau_{zz}^*)$

$$(\tau_{xz}, \tau_{zx}) = k_n \left( \frac{u_o}{h_o} \right)^n (\tau^*_{xz}, \tau^*_{zx})$$

sendo:

$$\varepsilon = \frac{h_o}{L}$$

$$\text{Número de Froude: } Fr = u_o / \sqrt{(gh_o \cos \theta)}$$

$$\text{Número de Reynolds: } Re = \frac{\rho u_o^{2-n} h_o^n}{k_n}$$

### A.1.1 Hipóteses e dedução

Introduzindo as variáveis adimensionais na equação da conservação da massa, tem-se:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (\text{A.8})$$

#### - Equação da quantidade de movimento

Introduzindo as variáveis adimensionais no primeiro membro da equação da quantidade de movimento na direção  $x$  (A.6), tem-se:

$$u_o \left( \frac{u_o}{L} \right) \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{u_o^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + u_o^2 \left( \frac{h_o}{L} \right) \frac{1}{h_o} w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \quad (\text{A.10})$$

Introduzindo as variáveis adimensionais no segundo membro da equação da quantidade de movimento na direção  $x$  (A.6) e fazendo manipulações algébricas, tem-se:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin(\theta) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \Rightarrow \quad (\text{A.11})$$

$$-\frac{1}{\rho} \rho (u_o)^2 \frac{1}{L} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + g \sin(\theta) + \frac{1}{\rho} \left[ k_n \left( \frac{u_o}{h_o} \right)^{n-1} \left( \frac{u_o}{L} \right) \frac{1}{L} \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + k_n \left( \frac{u_o}{h_o} \right)^n \frac{1}{h_o} \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$-\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{L}{u_o^2} g \operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{\rho} \left[ k_n \left( \frac{L}{u_o^2} \right) \left( \frac{u_o}{h_o} \right)^{n-1} \left( \frac{u_o}{L} \right) \frac{1}{L} \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + k_n \left( \frac{L}{u_o^2} \right) \left( \frac{u_o}{h_o} \right)^n \frac{1}{h_o} \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} \right] \quad (\text{A.13})$$

$$-\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{tg(\theta)}{Fr^2 \varepsilon} + \frac{k_n}{\rho} \left( \frac{1}{u_o^2 u_o^{-n} h_o^n} \right) \left( \frac{h_o}{L} \right) \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{k_n}{\rho} \left( \frac{1}{u_o^2 u_o^{-n} h_o^n} \right) \left( \frac{L}{h_o} \right) \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{A.14})$$

$$-\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\operatorname{tang}(\theta)}{Fr^2 \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re \varepsilon} \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{A.15})$$

Portanto, a equação da quantidade de movimento na direção  $x$  fica da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\operatorname{tang}(\theta)}{Fr^2 \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re \varepsilon} \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{A.16})$$

De forma análoga, introduzindo as variáveis adimensionais na equação da quantidade de movimento na direção  $z$  (A.7), tem-se:

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} - \frac{1}{Fr^2} + \frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x^*} + \frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{A.17})$$

Levando-se em consideração a hipótese de águas rasas ( $h_o \ll L$ ), tem-se que  $\varepsilon \ll 1$ . Assim, o sistema é reescrito como:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\operatorname{tang}(\theta)}{Fr^2 \varepsilon} + \frac{1}{Re \varepsilon} \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{A.19})$$

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} - \frac{1}{Fr^2} \quad (\text{A.20})$$

Retomando as variáveis dimensionais, o sistema de equações fica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + g \operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \operatorname{cos}(\theta) \quad (\text{A.23})$$

sendo que:  $\mathbf{U} = (u, 0, w)$  é o vetor velocidade e  $u$  é a velocidade longitudinal e  $w$  a velocidade vertical,  $P$  é a pressão,  $g$  a aceleração da gravidade,  $\theta$  a inclinação do canal e  $\tau_{xz}$  representa as tensões de cisalhamento e  $t$  é o tempo.

O sistema dado pelas equações (A.21, A.22 e A.23) deverá ainda ser integrado na vertical (em relação a profundidade do escoamento) para a obtenção das equações do tipo Saint Venant.

**APÊNDICE B - PERFIL DE VELOCIDADE DO ESCOAMENTO,  
PROMEDIAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS E  
ADIMENSIONALIZAÇÃO**

---

---

Neste apêndice é mostrado o cálculo do perfil de velocidade do escoamento, a promediação das equações de águas rasas e a adimensionalização das mesmas.

Conforme demonstrado no Apêndice A, o sistema de equações com a imposição das condições de águas rasas é dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + g \text{sen}(\theta) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \text{sen}(\theta) \quad (\text{B.3})$$

sendo que:  $\mathbf{U} = (u, 0, w)$  é o vetor velocidade e  $u$  é a velocidade longitudinal e  $w$  a velocidade vertical,  $P$  é a pressão,  $g$  a aceleração da gravidade,  $\theta$  a inclinação do canal,  $t$  é o tempo e  $\tau_{xz}$  representa as tensões de cisalhamento, dada pelo modelo de Herschel Bulkley:

$$\tau_{xz} = \tau_c + K_n \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \quad (\text{B.4})$$

## B.1 Perfil de Velocidades

Considerando um escoamento laminar, de fluido incompressível e em regime permanente, segue que:

$$\rho g \text{sen} \theta (h - z) = \tau_c + K_n \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (\text{B.5})$$

Efetuando os cálculos:

$$K_n \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^n = \rho g \text{sen} \theta (h - z) - \tau_c \Rightarrow \quad (\text{B.6})$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^n = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta (h - z)}{K_n} - \frac{\tau_c}{K_n} \Rightarrow \quad (\text{B.7})$$

$$u(z) = \int_0^z \left( \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta (h - z)}{K_n} - \frac{\tau_c}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} dz \Rightarrow \quad (\text{B.8})$$

Assim:

$$\left( \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta (h - z)}{K_n} - \frac{\tau_c}{K_n} \right) \geq 0 \Rightarrow \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta) h}{K_n} - \frac{\tau_c}{K_n} \geq \frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta) z}{K_n} \quad (\text{B.10})$$

Multiplicando por  $\frac{K_n}{\rho g \operatorname{sen}(\theta)}$ , tem-se:

$$h - \frac{\tau_c}{\rho g \operatorname{sen}(\theta)} \geq z \quad (\text{B.11})$$

Seja:

$$z_0 = h - \frac{\tau_c}{\rho g \operatorname{sen}(\theta)} \quad (\text{B.12})$$

Sendo que:  $h$  é a profundidade total do escoamento e  $z_0$  é a profundidade da região cisalhada.

Multiplicando a equação (B.12) por  $\frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta)}{K_n}$  e subtraindo por  $\frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta) z}{K_n}$ , tem-se:

$$\frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta)(z - z_0)}{K_n} = \frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta)(h - z)}{K_n} - \frac{\tau_c}{K_n} \quad (\text{B.13})$$

Assim, tem-se:

$$u(z) = \int_0^z \left( \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta (z_0 - z)}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} dz \Rightarrow \quad (\text{B.14})$$

$$u(z) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_n} \right) \left[ -(z_0 - z)^{\frac{n+1}{n}} \right]_0^z \quad (\text{B.15})$$

Na região cisalhada, para  $0 \leq z \leq z_0$ , tem-se:

$$u(z) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_n} z_0^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (\text{B.16})$$

Na região de plug, para  $z_0 \leq z \leq h$ , tem-se:

$$u(z) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_n} z_0^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{B.17})$$

$$\text{Com: } z_0 = h - \frac{\tau_c}{\rho g \operatorname{sen} \theta}$$

### B.1.1 Velocidade média

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \left[ \int_0^{z_0} u(z) dz + \int_{z_0}^h u(z) dz \right] \Rightarrow \quad (\text{B.18})$$

$$\bar{u} = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_n} z_0^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{h} \left[ \int_0^{z_0} \left( 1 - \left( 1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) dz + \int_{z_0}^h dz \right] \Rightarrow \quad (\text{B.19})$$

$$\bar{u} = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{h \rho g \operatorname{sen} \theta - \tau_c}{\rho g \operatorname{sen} \theta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[ 1 - \frac{n}{2n+1} \left( \frac{h \rho g \operatorname{sen} \theta - \tau_c}{h \rho g \operatorname{sen} \theta} \right) \right] \quad (\text{B.20})$$

## B.2 Promediação das Equações

Para obter as equações de Saint Venant, algumas manipulações matemáticas são necessárias. O modelo matemático em questão é derivado da integração na vertical das equações (B.1), (B.2) e (B.3), aplicando as condições de contorno (B.21), (B.22) e (B.23), incluindo o modelo reológico de Herschel-Bulkley no tensor de tensões.

- **Condições de contorno**

As condições de contorno são dadas por:

- condições cinemáticas na superfície livre

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{para } z = h(x, t) \quad (\text{B.21})$$

- condições de impermeabilidade no fundo do canal

$$u = w = 0, \quad \text{para } z = 0 \quad (\text{B.22})$$

As tensões na superfície livre são dadas por:

$$\begin{aligned} P = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad & \text{para } z = h(x, t) \\ \tau_{xz} = \tau_p, \quad & \text{para } z = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Integrando a equação (B.3), tem-se que a distribuição de pressão é hidrostática:

$$P = \rho g(h - z) \cos \theta \quad (\text{B.24})$$

Para efetuar a integração, utiliza-se a regra de Leibniz, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} Q(x, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) dy + Q(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} - Q(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} \quad (\text{B.25})$$

- Integração da equação da conservação da massa de 0 a  $h(x, t)$ .

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.26})$$

**Primeiro termo:**

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(z) dz - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{B.27})$$

Sabe-se que:

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(z) dz \quad (\text{B.28})$$

Daí, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz = \frac{\partial \bar{u} h}{\partial x} \quad (\text{B.29})$$

Portanto:

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial \bar{u} h}{\partial x} - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{B.30})$$

**Segundo termo:**

$$\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = w(h) - w(0) \quad (\text{B.31})$$

Somando o primeiro e segundo termo, e aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u} h}{\partial x} - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + u(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.32})$$

A integração da equação da quantidade de movimento é feita de forma análoga a equação da conservação da massa:

$$\int_0^h \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = -\frac{1}{\rho} \int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} + \int_0^h g \operatorname{sen}(\theta) dz + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h \tau_{xz} dz \quad (\text{B.33})$$

Integração do primeiro membro da equação B.32:

**Primeiro termo:**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u - u(h) \frac{\partial h}{\partial t} \Rightarrow \quad (\text{B.34})$$

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial \bar{u} h}{\partial t} - u(h) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{B.35})$$

**Segundo termo:**

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dz - u^2(h) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{B.36})$$

Seja:

$$\bar{u^2} = \frac{1}{h} \int_0^h u^2 dz \quad (\text{B.37})$$

Portanto:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dz = \frac{\partial \bar{u^2} h}{\partial x} - u^2(h) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{B.38})$$

**Terceiro termo**

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^h uw \, dz = u(h)w(h) - u(0)w(0) \quad (\text{B.39})$$

Somando os resultados das integrais (B.33, B.36 e B.37), tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} - u(h) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} - u^2(h) \frac{\partial h}{\partial x} + u(h)w(h) - u(0)w(0) \Rightarrow \quad (\text{B.40})$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} - u(h) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} - u^2(h) \frac{\partial h}{\partial x} + u(h) \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (\text{B.41})$$

Assim, o primeiro membro da equação da quantidade de movimento na direção  $x$  (B.33), fica:

$$\int_0^h \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} \quad (\text{B.39})$$

Integral do segundo membro da equação (B.32), aplicando as condições de contorno (B.22 e B.23)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz + \int_0^h g \sin(\theta) dz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h \tau_{xz} dz \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) + g \sin(\theta) + \frac{1}{\rho} (-\tau_p) \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Após a realização das integrações, tem-se o sistema do tipo de Saint Venant, dado por:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}h)}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.43})$$

$$\frac{\partial (\bar{u}h)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha \bar{u}^2 h)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -g \cos \theta \frac{h^2}{2} \right) + g \sin \theta + \frac{1}{\rho} (-\tau_p) \quad (\text{B.44})$$

Em que  $\alpha$  é o coeficiente de distribuição de velocidade, e calcula-se da seguinte forma:

$$\alpha = \frac{1}{\bar{u}^2 h} \int_0^h u^2 dz = \left( \frac{2n+1}{3n+2} \right) \frac{[2(n+1)^2 h \rho g \sin\theta + \tau_c n(4n+3)]}{\left[ (n+1)^2 h \rho g \sin\theta + 2(n+1)n\tau_c + \frac{n^2 \tau_c^2}{h \rho g \sin\theta} \right]} \quad (\text{B.45})$$

### B.2.1 Determinação da tensão de cisalhamento (lei de atrito)

Para determinar a tensão de cisalhamento é necessário calcular a derivada da velocidade em relação a  $z$ . Assim:

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{z_0} \left( 1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\rho g \sin\theta}{K_n} z_0^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{B.46})$$

Note que, para  $z = z_0$ , a taxa de deformação do fluido é nula, o que geralmente ocorre na superfície livre (região não cisalhada) de escoamentos de lamas e detritos.

Utilizando o modelo reológico de Herschel-Bulkley dado pela equação (B.4), tem-se:

$$\tau_p = \tau_c + K_n \left\{ \frac{\bar{u}(\rho g \sin\theta)^2 (n+1)(2n+1)h}{(h \rho g \sin\theta - \tau_c)[n(n+1)h \rho g \sin\theta + n^2 \tau_c]} \right\}^n \quad (\text{B.47})$$

Assim, pode-se substituir a equação A.30 na equação de quantidade de movimento (B.41).

## B.3 Adimensionalização das Variáveis

As escalas adotadas para a adimensionalização são dadas por:

- Escala de comprimento:  $x = Lx^*$  e  $(h, z) = h_0(h^*, z^*)$ ,
- Escala de velocidade média:  $\bar{u} = \bar{u}_0 \bar{u}^*$ ,
- Escala de tempo:  $t = (L/\bar{u}_0)t^*$ ,

Lembrando que:

$$\text{Número de Froude: } Fr = \bar{u}_o / \sqrt{(gh_0 \cos \theta)}$$

$$\text{Sendo: } L \text{ o comprimento de onda dado por: } L = (\bar{u}_0^2) / g \sin(\theta)$$

O subíndice ( )<sub>0</sub> indica condições de escoamento uniforme e o asterisco ( )<sup>\*</sup> as variáveis adimensionais.

Introduzindo as variáveis adimensionais nas Equações (B.43), (B.44) e (B.45) e omitindo os termos do sistema de equações para o escoamento de fluido hiperconcentrado, em canal inclinado, a partir da proposta reológica de Herschel-Bulkley.

– Equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (h^* \bar{u}^*)}{\partial x^*} = 0 \quad (\text{B.48})$$

– Equação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{u}^* h)}{\partial t^*} + \frac{\partial (\alpha \bar{u}^{*2} h^*)}{\partial x^*} + \frac{1}{2Fr^2} \frac{\partial h^{*2}}{\partial x^*} = \\ = h^* - C^* - (1 - C^*) \left[ \bar{u}^* h^* \frac{(1 - C^*)(n + 1 + nC^*)}{(h - C^*)((n + 1)h + nC^*)} \right]^n \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Ainda, a Equação 36, pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \alpha \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{h}{Fr^2} \frac{\partial h}{\partial x} + (1 - \alpha) \bar{u} \frac{\partial h}{\partial t} = \\ = h - C^* - (1 - C^*) \left[ \bar{u} h \frac{(1 - C^*)(n + 1 + nC^*)}{(h - C^*)((n + 1)h + nC^*)} \right]^n \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

sendo:

$$\alpha = \frac{(2n + 1)}{(3n + 2)} \frac{[2(n + 1)^2 h^* + C^*(4n + 3)n]}{[(n + 1)^2 h^* + 2(n + 1)nC^* + n^2 (C^*)^2 / h^*]} \quad (\text{B.51})$$

$$C^* = \frac{\tau_c}{\rho g \sin(\theta)} \quad (\text{B.52})$$

**APÊNDICE C - DEMONSTRAÇÃO DO SISTEMA HIPERBÓLICO E  
GENUINAMENTE NÃO-LINEAR**

---

---

Este anexo traz a demonstração de que o sistema de equações de águas rasas é hiperbólico e genuinamente não-linear, daí surge a necessidade da imposição de hipóteses para resolver o sistema.

### C.1 Cálculo dos Autovalores e Autovetores

Conforme apresentado no Apêndice B, o sistema de equação que será analisado é dado por:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\bar{u}^2h)}{\partial x} + \frac{1}{2Fr^2} \frac{\partial h^2}{\partial x} = \\ = h - C^* - (1 - C^*) \left[ \bar{u}h \frac{(1 - C^*)(n + 1 + nC^*)}{(h - C^*)((n + 1)h + nC^*)} \right]^n \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Para calcular os autovalores, o sistema é reescrito na forma matricial, conforme a Equação (C.3).

$$\mathcal{U}_t + F(\mathcal{U})_x = S(\mathcal{U}) \quad (\text{C.3})$$

Na qual:

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ h\bar{u} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$F(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\bar{u} \\ \bar{u}^2\alpha h + \frac{1}{2} \frac{1}{Fr^2} h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} \alpha + \frac{1}{2} \frac{1}{Fr^2} u_1^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$S(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ h - C^* - (1 - C^*) \left[ \bar{u}h \frac{(1 - C^*)(n + 1 + nC^*)}{(h - C^*)((n + 1)h + nC^*)} \right]^n \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Por definição, o sistema representado pela expressão C.3 é dito hiperbólico se para todo valor de  $\mathcal{U}$ , os autovalores da matriz jacobiana  $F'(\mathcal{U})$  são reais e distintos. Assim:

$$F'(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{u_2^2}{u_1^2}\right)\alpha + \frac{1}{Fr^2}u_1 & \frac{2u_2\alpha}{u_1} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{C.7})$$

$$F'(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(\frac{1}{Fr^2}\right)h - \bar{u}^2\alpha & 2\bar{u}\alpha \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

O cálculo dos autovalores ( $\lambda$ ) é dado por:  $|F'(\mathcal{U}) - \lambda I| = 0$ , sendo  $I$  a matriz identidade. Assim, tem-se:

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left(\frac{1}{Fr^2}\right)h - \bar{u}^2\alpha & 2\bar{u}\alpha \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \quad (\text{C.9})$$

Desta forma, tem-se o seguinte polinômio característico:

$$\lambda^2 - 2\lambda\bar{u}\alpha - \left[ \left(\frac{1}{Fr^2}\right)h - \bar{u}^2\alpha \right] = 0 \quad (\text{C.10})$$

Resolvendo o polinômio (C.10), tem-se duas raízes distintas e reais (C.11), o que comprova que o sistema é hiperbólico.

$$\lambda = \alpha\bar{u} \pm \sqrt{\alpha(\alpha - 1)\bar{u}^2 + \frac{1}{Fr^2}h} \quad (\text{C.11})$$

### C.1.1 Natureza dos campos característicos

Considerando um sistema hiperbólico de lei de conservação na forma:

$$\mathcal{U}_t + F(\mathcal{U})_x = 0 \quad (\text{C.12})$$

Com  $\lambda_i$  autovalores reais correspondentes aos autovetores  $R^i(\mathcal{U})$ . A velocidade característica  $\lambda_i(\mathcal{U})$  define a característica do campo (Toro, 2001).

Por definição, um campo  $\lambda_i$  é dito genuinamente não linear se:

$$\nabla \lambda_i(\mathcal{U}) \cdot R^i(\mathcal{U}) \neq 0, \quad \forall \mathcal{U} \in R^m \quad (\text{C.13})$$

Onde  $R^m$  é o conjunto de vetores reais de  $m$  componentes.

A partir dessas definições pode-se mostrar que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , autovalores do sistema, são genuinamente não lineares.

Calculando o autovetor de  $\lambda_1$ , tem-se:

$$R^1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = r_1 \left( \alpha \bar{u} + \sqrt{\frac{1}{\alpha(\alpha-1)\bar{u}^2 + \frac{1}{Fr^2} h}} \right), \quad \forall r_1 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.14})$$

Deve-se mostrar que:

$$\nabla \lambda_1 \cdot R^1(\mathcal{U}) \neq 0, \quad \forall \mathcal{U} \in R^2 \quad (\text{C.15})$$

Para facilitar os cálculos  $\lambda_1$  é reescrito em termos das variáveis  $u_1$  e  $u_2$ :

$$\lambda_1 = \alpha \frac{u_2}{u_1} + \sqrt{\alpha(\alpha-1) \left( \frac{u_2}{u_1} \right)^2 + \frac{1}{Fr^2} u_1} \quad (\text{C.16})$$

$$\nabla \lambda_1 = \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_1}, \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_2} \right] \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial u_1} = \left[ -\alpha \frac{u_2}{u_1^2} + 2 \left( \frac{1}{Fr^2} - 2\alpha(\alpha-1) \frac{u_2^2}{u_1^3} \right) (d)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial u_2} = \frac{\alpha}{u_1} + \alpha(\alpha-1) u_2 u_1^{-2} (d)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{C.19})$$

sendo:

$$d = \alpha(\alpha - 1) \left( \frac{u_2}{u_1} \right)^2 + \frac{1}{Fr^2} u_1 \quad (C.20)$$

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_1 \cdot R^1(\mathcal{U}) = & -\alpha \frac{u_2}{u_1^2} + 2 \left[ \frac{1}{Fr^2} - \frac{2(\alpha - 1)\alpha u_2^2}{u_1^3} \right] (d)^{-\frac{1}{2}} + \alpha^2 \frac{u_2}{u_1^2} \\ & + \alpha^2(\alpha - 1) \frac{u_2^2 u_1^2}{u_1} + (d)^{\frac{1}{2}} + (\alpha - 1)\alpha u_2 u_1^2 \end{aligned} \quad (C.21)$$

Considerando o escoamento uniforme ( $\alpha = 1$ ), tem-se:

$$\nabla \lambda_1 \cdot R^1(\mathcal{U}) = \sqrt{\frac{u_1}{Fr^2}} \left( \frac{2}{Fr^2} + \frac{1}{u_1} \right) \Rightarrow \quad (C.22)$$

Sabe-se que  $Fr > 0$  e  $h > 0$ . Então:

$$\nabla \lambda_1 \cdot R^1(\mathcal{U}) = \sqrt{\frac{h}{Fr^2}} \left( \frac{2}{Fr^2} + \frac{1}{h} \right) \neq 0 \quad (C.23)$$

Logo, o campo característico  $\lambda_1$  é genuinamente não-linear. A demonstração para  $\lambda_2$  é análoga.

**APÊNDICE D – FUNÇÃO DEFINIDA PELO USUÁRIO DA  
PERTURBAÇÃO INSERIDA NA VELOCIDADE MÉDIA DO  
ESCOAMENTO PARA FLUIDO NEWTONIANO E NÃO  
NEWTONIANO**

---

Neste Apêndice é apresentada a função definida pelo usuário que calcula a perturbação inserida na velocidade média do escoamento tanto para fluido newtoniano quanto não newtoniano (*Power law*, *Binghamiano* e *Herschel Bulkley*), o que irá diferenciar o tipo de fluido são as propriedades reológicas, tais como, o índice de escoamento do fluido ( $n$ ), a tensão de escoamento ( $\tau_c$ ) e o índice de consistência ( $k_n$ ). Apresenta também, resultados de simulações numéricas variando o parâmetro  $\mu_o$  do modelo reológico de Herschel Bulkley, conforme mencionado nos Capítulos 4 e 5.

### D.1 Função Definida pelo Usuário da Perturbação Imposta na Velocidade Média do Escoamento

```

/*****
/*
/* User-Defined Function for Newtonian an non Newtonian Fluid
/*
*****/

#include "udf.h"

#define n
#define tauc
#define kn
#define mio
#define ro
#define g
#define h
#define tetha
#define Tperiod
#define vv
#define dpi

DEFINE_PROFILE(velocidade_X, thread, position)
{
    float t, velocity, vo, c, zo, d;
    face_t face;
    real pos[ND_ND];

    begin_f_loop(face, thread)
    {
        F_CENTROID(pos, face, thread);

        t = RP_Get_Real("flow-time");

        c=(kn/(ro*g*sin(tetha*dpi/360.0)))*pow(tauc/mio,n);

        zo=h-(tauc/(ro*g*sin(tetha*dpi/360.0))+c);
    }
}

```

```

d=pow(zo, (n+1)/n) * (1-(n/(2*n+1))) * (zo/h)
vo=(n/n+1) * pow((ro*g*sin(tetha*dpi/360.0))/kn, 1/n) * d
velocity=vo*(1+vv*sin(dpi*t/Tperiod));
F_PROFILE(face, thread, position) = velocity;
}
end_f_loop(face, thread)
}

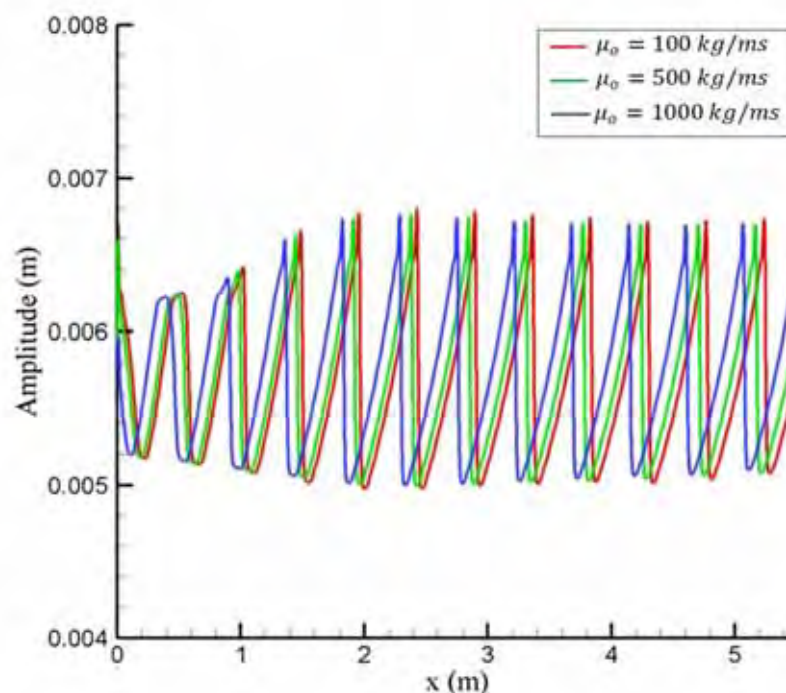
```

### D.1.1 Simulações Numéricas para Diferentes Valores de $\mu_o$

Neste item são apresentadas as simulações numéricas para diferentes valores de  $\mu_o$  (Figuras D1 e D2), com o objetivo de verificar qual é a influência deste parâmetro no perfil das *roll waves*, cujos parâmetros de simulação são dados por:

- Índice de consistência do fluido,  $k_n$ , igual a  $0,14 Pa \cdot s^{0,4}$ ;
- Tensão de escoamento ou tensão crítica,  $\tau_c = 0,2 Pa$
- Massa específica da solução,  $\rho = 1120 kg/m^3$ ;
- Índice de escoamento do fluido,  $n = 0,4$ ;
- Inclinação do canal,  $\theta = 1,03132^\circ$ ;
- Profundidade do escoamento uniforme,  $h_o = 0,0057m$

**Figura D1-** Amplitude das *roll waves* em função do comprimento do canal ( $x$ ), com  $f = 0,8 Hz$ , para  $\mu_o = 100 kg/ms$ ,  $\mu_o = 500 kg/ms$ ,  $\mu_o = 1000 kg/ms$ .

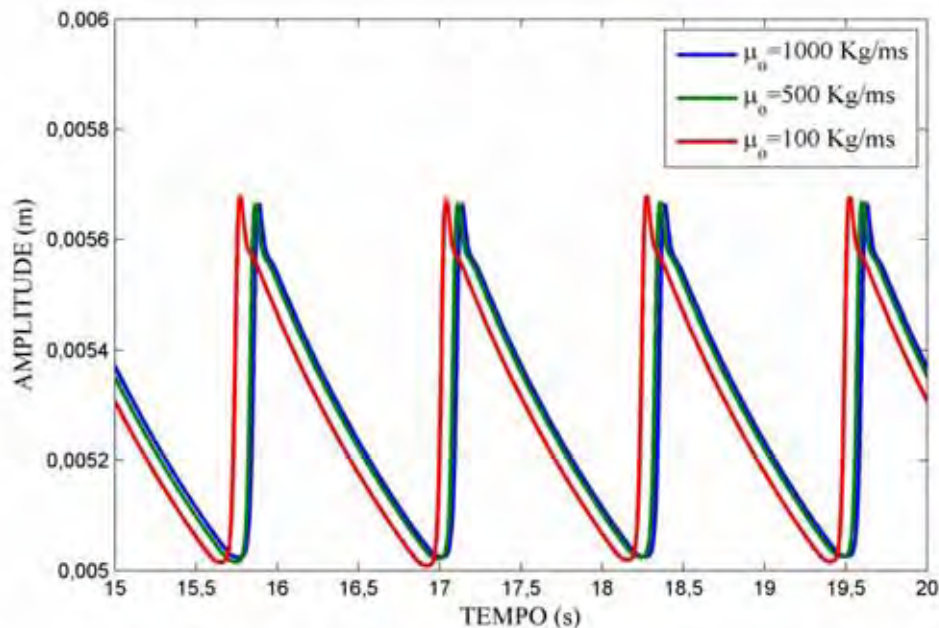


Fonte: Elaborada pela própria autora

Através da Figura D1 pode-se observar que o aumento do parâmetro  $\mu_o$  antecipa a formação das *roll waves* em relação ao comprimento do canal.

Na Figura D2 é mostrado o perfil das *roll waves* em função do tempo no ponto ( $x = 4m$ ).

**Figura D2-** Amplitude das *roll waves* em função do tempo no ponto  $x = 4$  (distância a partir do início do canal), para  $\mu_o = 100 \text{ kg/ms}$ ,  $\mu_o = 500 \text{ kg/ms}$ ,  $\mu_o = 1000 \text{ kg/ms}$ .



**Fonte:** Elaborada pela própria autora

Através da Figura D2 pode-se observar que as ondas apresentam um período de 1,25 s, o que corresponde a frequência de perturbação imposta ( $f = 0,8 \text{ Hz}$ ). Verifica-se também que para  $\mu_o = 500 \text{ kg/ms}$  e  $\mu_o = 1000 \text{ kg/ms}$  a amplitude das *roll waves* é praticamente a mesma.

Estas análises possibilitam a escolha do parâmetro  $\mu_o$ . Deve-se salientar que quanto maior  $\mu_o$ , menor será a relação  $\left(\frac{\tau_c}{\mu_o}\right)^n$  usada para evitar a indeterminação do modelo reológico de Herschel Bulkley, o que é uma maior garantia de manter as propriedades reológicas do fluido.

## **ANEXO A - BREVE REVISÃO DE MODELOS REOLÓGICOS**

---

---

Neste anexo serão abordados alguns conceitos sobre propriedades físicas de fluidos e uma breve revisão de modelos reológicos.

## **A.1 Reologia**

Em linhas gerais, reologia é a ciência que estuda a taxa de deformação e o escoamento da matéria, ou seja, a reologia aborda o comportamento dos materiais, entre os limites idealizados de fluidos e sólidos perfeitos. Portanto, todos os tipos de materiais são objetos de estudo da reologia, o termo foi introduzido por (Bingham, 1920), tendo importância em diversas áreas, tais como a ciência dos materiais, a física e as engenharias.

### **A.1.1 Terminologias básicas**

Os fluidos diferem dos sólidos pelas características das forças de coesão entre suas moléculas. A principal diferença prática que se pode observar entre sólidos e fluidos é que nos sólidos uma força atuante determina a intensidade da deformação e, nos fluidos, determina a velocidade da deformação. Tanto os gases como os líquidos são classificados como fluidos. As características mais notáveis dos gases são a compressibilidade e a fluidez. Os líquidos são incompressíveis e suas propriedades são determinadas pela intensidade das forças intermoleculares.

As propriedades relevantes dos fluidos para o estudo de escoamentos são: a massa específica, tensão de cisalhamento, tensão superficial, taxa de deformação e a viscosidade.

#### **Massa específica**

A massa específica de uma substância define-se como a propriedade da matéria correspondente à razão entre massa de uma quantidade de substância e o volume correspondente.

#### **Tensão superficial**

Tensão superficial é um efeito que ocorre na camada superficial de um líquido que leva a sua superfície a se comportar como uma membrana elástica. Esta tensão superficial ocorre por causa das fortes ligações intermoleculares, as quais dependem das diferenças

elétricas entre as moléculas e pode ser definida como força por unidade de comprimento que duas camadas superficiais exercem uma sobre a outra.

### **Tensão de cisalhamento**

A quantidade de força (tensão) aplicada em uma determinada área de um fluido em contato com um plano estacionário (adjacente) é a tensão de cisalhamento.

### **Taxa de deformação**

É o gradiente de velocidade de cisalhamento por uma determinada distância, caracterizando uma variação temporal contínua, dada por:

$$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dx} = \frac{(m/s)}{m} = s^{-1} \quad (\text{A.1})$$

### **Viscosidade**

Viscosidade é a medida da resistência de um fluido à deformação causada por uma tensão, ou seja, quando um fluido sofre deformação, ocorre uma interação interna entre as partículas, com comportamentos diferentes para cada tipo de fluido, isso ocorre devido à resistência interna (viscosidade) da interação das partículas. Uma definição clássica para a viscosidade, é que a mesma é a razão da tensão de cisalhamento pela taxa de deformação.

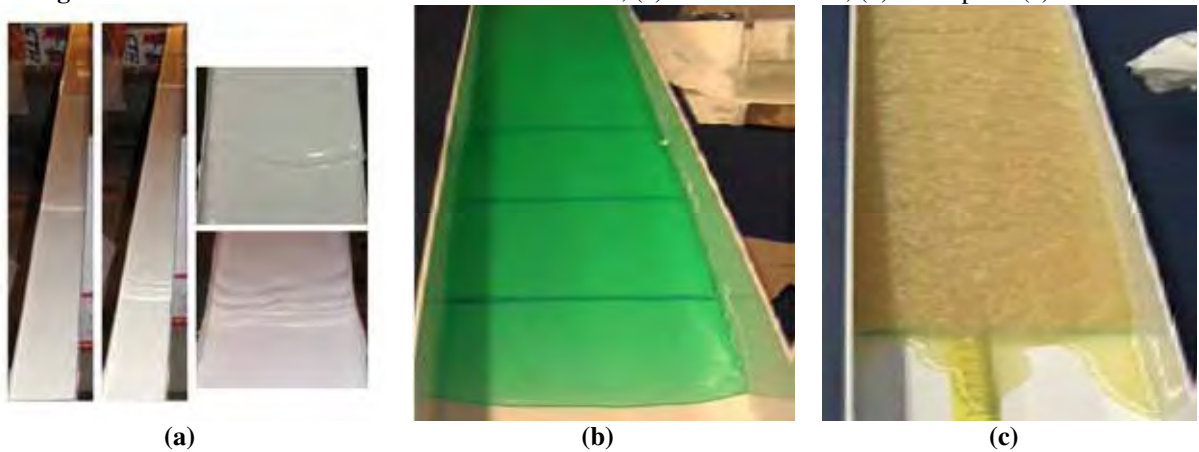
$$\eta = \frac{\text{Tensão de cisalhamento}(N/m^2)}{\text{Taxa de deformação}(s^{-1})} \quad (\text{A.2})$$

Uma maior ou menor viscosidade de um fluido implica na velocidade de deformação do mesmo, quando submetido a uma tensão de cisalhamento, ou seja, quanto maior a viscosidade, menor a velocidade em que o fluido se movimenta.

No entanto, os fluidos podem ser classificados de acordo com a relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de deformação, podendo ser denominados como fluidos Newtonianos e não-newtonianos.

O fluido newtoniano é aquele cuja viscosidade aparente é igual, independente da taxa de cisalhamento a qual é submetido, em uma dada temperatura. Já os materiais quando submetidos a análises de viscosimetria, a curva de escoamento apresenta relações não lineares entre tensão de cisalhamento e taxa de deformação. Esses materiais são caracterizados como fluidos não-newtonianos. A viscosidade aparente não é constante, ou seja, varia com a taxa de deformação. A Figura A.1, mostra escoamentos de fluidos não-newtonianos.

**Figura A.1** - Escoamentos de fluidos não-newtonianos, (a) Amido de milho, (b) Carbopol e (c) Glicose



Fonte: Minussi (2007).

Quando se trata de fluidos não-newtonianos, cabe ressaltar que os mesmos têm tendências a suportar pequenas tensões de cisalhamento sem apresentar deformação alguma. Esta tensão, a qual o fluido pode resistir sem se deformar, é chamada tensão crítica de cisalhamento ou tensão de escoamento.

### A.1.2 Modelos Reológicos

Neste item são apresentados alguns modelos matemáticos que representam diferentes tipos de comportamentos reológicos. O modelo mais simples que se tem é o do fluido newtoniano. A equação que descreve o modelo é dada por:

$$\bar{\tau} = 2\eta(\bar{\gamma}T, C)\bar{\dot{\gamma}} \quad (\text{A.3})$$

sendo que  $C$  representa a concentração,  $T$  a temperatura,  $\eta$  é a viscosidade aparente e  $\bar{\dot{\gamma}}$  é o tensor.

Outra forma de escrever:

$$\bar{\tau} = \tau_c \frac{\bar{\dot{\gamma}}}{\sqrt{-\dot{\gamma}_{II}}} + f(\dot{\gamma}_{II})\bar{\dot{\gamma}} \quad (\text{A.4})$$

Em que,  $\dot{\gamma}_{II}$  é o segundo invariante do tensor  $\bar{\bar{\gamma}}$  e  $f(\dot{\gamma}_{II})$  é uma função positiva contínua de  $\dot{\gamma}_{II}$ . A função  $f(\dot{\gamma}_{II})$  determina qual é o modelo.

Como se sabe, nem todo fluido apresenta um comportamento reológico newtoniano. A concentração de sedimentos pode determinar se um fluido é newtoniano ou não, um fluido com uma pequena concentração de sedimentos permanece com propriedades Newtonianas, podendo apresentar variação na sua viscosidade se a concentração aumentar (Maciel *et al.*, 2009).

Para fluidos não-newtonianos, diversos modelos foram desenvolvidos e numerosas equações empíricas têm sido propostas para descrever as relações entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação.

Para muitas aplicações práticas de engenharia, as relações entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação podem ser adequadamente representadas pelo modelo exponencial, conhecido como lei de potências (*Power law*), determinado por (OSTWALD, 1925):

$$f(\dot{\gamma}_{II}) = \frac{2^n k}{(\sqrt{-\dot{\gamma}_{II}})^{1-n}} \quad \tau_c = 0 \quad (A.5)$$

$$\bar{\tau} = \frac{2^n k}{(\sqrt{-\dot{\gamma}_{II}})^{1-n}} \bar{\bar{\gamma}}$$

sendo que  $n$  representa o índice de escoamento do fluido. Para  $n < 1$  tem-se um fluido pseudoplástico e para  $n > 1$  tem-se um fluido dilatante.

Os fluidos pseudoplásticos são substâncias que, em repouso, apresentam suas moléculas em um estado desordenado, e quando submetidas a uma tensão de cisalhamento, suas moléculas tendem a se orientar na direção da força aplicada. Quanto maior esta força, maior será a ordenação e, conseqüentemente, menor será a viscosidade.

Os dilatantes são fluidos que apresentam um aumento de viscosidade com a tensão de cisalhamento. No caso de suspensões, à medida que se aumenta a tensão de cisalhamento, o líquido intersticial, que lubrifica a fricção entre as partículas, não preenche os espaços, devido a um aumento de volume que acompanha o fenômeno. Ocorre então, o contato direto entre as partículas sólidas e, conseqüentemente, um aumento da viscosidade.

Existem fluidos que se comportam como um sólido até que uma tensão de cisalhamento mínima seja excedida, ou seja, têm tendências a suportar pequenas tensões de cisalhamento aplicadas, sem apresentar deformação. Esta tensão, a qual o fluido pode resistir

sem se deformar, é chamada tensão crítica de cisalhamento ou tensão inicial de escoamento, ou de corte.

Um fluido que apresenta tais características é o fluido plástico de Bingham, ou simplesmente fluido de Bingham, na qual a relação tensão de cisalhamento e taxa de deformação é linear. O modelo apropriado, dado por (BINGHAM; GREEN, 1920), é representado da seguinte forma:

$$f(\dot{\gamma}_{II}) = 2\mu$$

$$\bar{\tau} = \tau_c \frac{\bar{\dot{\gamma}}}{\sqrt{-\dot{\gamma}_{II}}} + 2\mu\bar{\dot{\gamma}} \quad (\text{A.6})$$

sendo que  $\tau_c$  é a tensão crítica de escoamento.

Uma proposta reológica considerada mais generalizada é determinada por (HERSCHEL; BULKLEY, 1926). Esse tipo de fluido também necessita de uma tensão inicial para começar a escoar. Entretanto, a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação não é linear. Esta relação, dependente do expoente adimensional  $n$ , característico para cada fluido, é dada por:

$$f(\dot{\gamma}) = \frac{2^n k}{(\sqrt{-\dot{\gamma}_{II}})^{1-n}}$$

$$\bar{\tau} = \tau_c \frac{\bar{\dot{\gamma}}}{\sqrt{-\dot{\gamma}_{II}}} + \frac{2^n k}{(\sqrt{-\dot{\gamma}_{II}})^{1-n}} \bar{\dot{\gamma}} \quad (\text{A.7})$$

Em condições de cisalhamento simples e regime permanente, ou seja, as propriedades reológicas independem do tempo de aplicação da tensão de cisalhamento, estes modelos se reduzem a:

*Power Law:*

$$\tau = \mu_n \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \quad (\text{A.8})$$

Modelo de Bingham:

$$\tau = \tau_c + \mu_B \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \tau > \tau_c$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \tau < \tau_c \quad (\text{A.9})$$

Modelo de Herschel Bulkley:

$$\tau = \tau_c + k_n \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n, \quad \tau > \tau_c$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \tau < \tau_c$$
(A.10)

sendo:

$\tau$ : tensão de cisalhamento

$\mu$ : viscosidade dinâmica ou absoluta

$\mu_n$ : índice de escoamento para fluido *power law*

$\mu_B$ : viscosidade plástica de Bingham

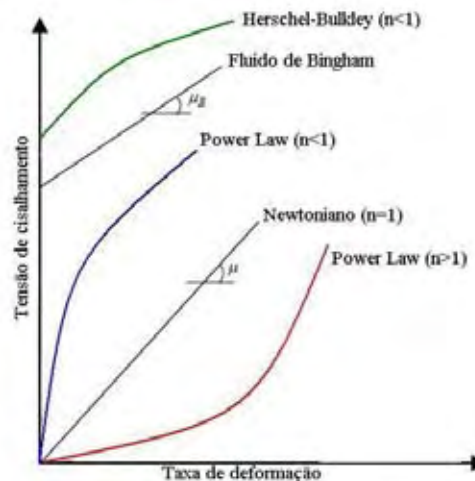
$\partial u / \partial z$ : gradiente de velocidade ou taxa de deformação

$\tau_c$ : tensão crítica ou rigidez inicial

$K_n$ : índice de consistência do fluido

A correta modelagem de um escoamento depende, fundamentalmente, do tipo de fluido que estará em foco e da escolha apropriada do modelo reológico para este. Na Figura A2, tem-se um reograma que exemplifica cada tipo de reologia que pode ser adotada de acordo com o tipo de fluido em tratamento.

**Figura A.2-** Reograma representando os diferentes tipos de modelos reológicos e cisalhamento simples em regime permanente.



Fonte: Ferreira (2007).

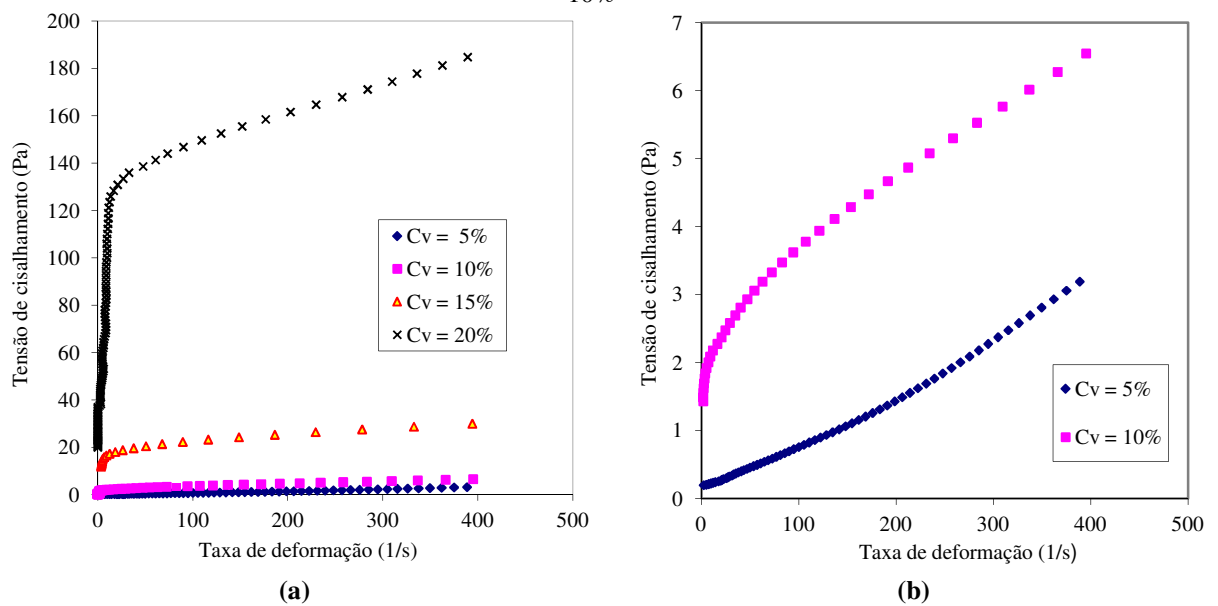
O grupo RMVP tem trabalhado com fluidos newtonianos, como por exemplo, a glicerina pura, utilizado por Fiorot (2012) para a aferição de *roll waves* em escoamentos laminares. Em casos não-newtonianos, trabalhos têm sido desenvolvidos com fluidos que

podem ser representados pelo modelo reológico de Herschel Bulkley. Trabalhos em busca de caracterizar fluidos lamosos foram realizados utilizando concentrações argilosas (MACIEL et al., 2009) para diferentes concentrações em volume ( $C_v$ ). Pode-se observar que dependendo da concentração o fluido é do tipo Herschel Bulkley (Figura A.3). E ainda, utilizando o o gel de carbopol 940 como material representativo de lama em trabalhos experimentais e numéricos de ruptura de barragem, realizados por Minussi (2007) e Leite (2009), a solução foi caracterizada como do tipo Herschel Bulkley.

Com base nestes trabalhos justifica-se a escolha deste modelo reológico a 03 parâmetros (Herschel Bulkley), utilizado nesta tese.

Através da Figura A.3 pode-se observar que para concentração de até 5% a solução apresenta propriedades newtonianas e, ainda, o aumento da concentração provocou um aumento da tensão crítica de escoamento.

**Figura A.3** – Ensaio para soluções argilosas: (a) Concentrações de 5, 10, 15 e 20%, (b) Concentrações de 5 e 10%



Fonte: Maciel et al. (2009).

**ANEXO B - METODOLOGIA DOS EXPERIMENTOS PARA  
SIMULAÇÃO DE *ROLL WAVES***

---

---

Neste anexo é apresentado de forma breve a metodologia utilizada por Fiorot (2012) para a simulação de *roll waves*, o qual, esta pesquisadora teve oportunidade de participar. Procura-se mostrar o aparato experimental, a técnica de medição e aquisição de dados.

### B.1 Aparato Experimental

O aparato experimental é constituído por conjuntos conjuntos que foram construídos separadamente, mas que teve como princípio de projeto uma forma de interação com cada conjunto. Assim, foi construído um suporte para que o laser fosse instalado na mesa e tivesse fácil locomoção sobre o canal; um conjunto de perturbação que tivesse influência apenas sobre o fluido, não tendo contato nem físico e nem do pulso de ar gerado pelo alto-falante com nenhuma parte da mesa e muito menos com o canal; uma mesa inercial que isolasse o canal de qualquer vibração externa; e um sistema hidráulico que mantivesse a vazão do fluido constante. A Figura B.1, mostra o aparato experimental utilizado para geração de *roll waves*.

**Figura B.1-** Aparato experimental



**Fonte:** Fiorot (2012).

### B.1.1 Princípio de funcionamento

O circuito é iniciado na caixa de armazenamento, passa por uma bomba hidráulica que impulsiona o fluido até a caixa de vazão constante. Assim o fluido desce por gravidade até a parte inicial do canal, onde é elevado seu nível até que este transborde e atinja o nível do canal. Ao escoar pelo canal o fluido é perturbado pelo ar pulsado do alto-falante e mais adiante caracterizado pelo sistema de aquisição (laser e fotodiodo). E assim novamente o fluido é despejado na caixa de armazenamento.

### B.1.2 Sistema de perturbação

O sistema de perturbação é composto por: gerador de sinais, amplificador e alto falante. O gerador de sinais é alimentado por uma fonte de tensão e tem a função de controlar a frequência e amplitude do sinal que é amplificado antes de entrar no alto falante. A Figura B.2, mostra o sistema de perturbação.

**Figura 2-** (a) Sistema de perturbação, (b) Detalhes do sistema de perturbação



**Fonte:** Fiorot (2012).

O sinal que entra no alto-falante, faz com que este responda conforme o sinal apresentado pelo gerador de sinais. Assim o alto-falante fará um movimento de compressão e descompressão formando um pulso de ar que será direcionado sobre o escoamento pela caixa em formato de (V) que esta instalada junto do alto-falante (Figura B.2a ).

## B.2 Técnica de Medição de *Roll waves*

A medição de amplitude e comprimento de onda da superfície livre de escoamentos é um trabalho delicado tanto em campo quanto em laboratório e, para tal, existem duas maneiras de fazê-lo: através de equipamentos e sondas intrusivas ao meio, e através de métodos não-intrusivos, que não interagem ou interagem minimamente com o escoamento. Os métodos intrusivos, mesmo sendo mais fáceis de manipular e com resultados de precisão razoável, podem afetar o desenvolvimento do escoamento podendo ser devastador no experimento.

Os métodos não-intrusivos permitem a observação do fenômeno sem interferência física além de possuir uma boa precisão, mas, sua montagem e arranjo exigem operadores especialistas e alto custo o que muitas vezes pode inviabilizar o projeto. A escolha do método a ser utilizado deve ser feita sabendo o tipo do escoamento que se quer visualizar e todas suas características. A opção que se fez dentro do grupo de pesquisa RMVP é pelo sistema de medição por absorção luminosa que constitui um sistema relativamente fácil de ser implementado e com elevada precisão (FIOROT, 2012).

## B.3 Sistema de Aquisição do Sinal

O sistema de aquisição do sinal, é composto por laser, fotodiodo, osciloscópio e computador. A Figura 6, mostra o conjunto do sistema de aquisição.

**Figura B.3:** Conjunto do sistema de aquisição. Da esquerda para a direita: osciloscópio, laser He-Ne 633 nm, computador com software MatLab.



Fonte: Fiorot (2012).

O laser incide sobre o fluido escoando no canal, e tem sua intensidade luminosa atenuada mediante a alteração do fluido onde o laser está incidido, a intensidade luminosa atenuada é captada pelo fotodiodo, que transforma em sinal elétrico, este é visualizado no osciloscópio em tensão pelo tempo. Através de uma interface desenvolvida na plataforma do MatLab, o sinal visto na tela do osciloscópio é transformada em dados, em um vetor, e assim trabalhado em forma de processamento deste sinal (filtragem, janelamento, transformado para o domínio da frequência, correlação, etc.) entre diversas outras técnicas.

### B.3.1 Depuração dos dados

Os resultados são armazenados em um arquivo mat. (FIOROT, 2012), permitindo a visualização do sinal em nível de tensão, de acordo com a resposta do fotodetector. Porém, este dado bruto deve ser tratado para que efeitos não desejados (bolhas, poeira, pequenos insetos) que, eventualmente, aparecem e comprometem na detecção sejam retirados e minimizados.

Os sinais podem ser filtrados e correspondidos para valores de altura. No entanto as interferências ainda estarão contaminando o principal evento que se quer visualizar que é o sinal periódico.

Para minimizar os efeitos indesejados, Fiorot (2012) utilizou um método capaz de fornecer quantidade suficiente de dados experimentais para um determinado período, conhecendo que o sinal observado possui grande repetitividade, ou seja, a periodicidade dos eventos visualizados é constatada. Essa metodologia foi desenvolvida em Matlab e é completamente operada através do arquivo prog.m. Todas as informações sobre os experimentos e códigos utilizados se encontram disponíveis na dissertação de mestrado de (FIOROT, 2012).