

Trabalho de Conclusão de Curso
Curso de Graduação em Física

Caracterização da Dinâmica do Pêndulo Duplo
Uma análise Numérica e Experimental

Autor: *Rodrigo Simile Baroni*

Orientador: *Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro*

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

RODRIGO SIMILE BARONI

CARACTERIZAÇÃO DA DINÂMICA DO PÊNDULO
DUPLO
UMA ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2017

517.39 Baroni, Rodrigo Simile
B266c Caracterização da dinâmica do pêndulo duplo: uma
análise numérica e experimental / Rodrigo Simile Baroni. -
Rio Claro, 2017
54 f. : il., figs., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e
Ciências Exatas
Orientador: Luiz Antonio Barreiro

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Sistemas
dinâmicos. 3. Caos. 4. Pêndulo duplo. 5. Dinâmica não linear.
I. Título.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Maria Sirley Palhares Simile Baroni e Vanderlei Baroni, e à minha avó, Maria Antonia Baroni, por apoiarem minhas decisões e terem tornado possíveis os meus estudos.

Ao Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro pelos anos de orientação, paciência e ensinamentos, meus agradecimentos e admiração. Seu bom humor, otimismo e paixão pela Física, sempre presentes em nossas discussões, foram essenciais em minha formação acadêmica e pessoal. Agradeço também à Ana Laura Boscolo pelas discussões e companhia no Laboratório de Estudo do Movimento via Análise Fotográfica (LEMAF).

Aos docentes do Departamento de Física do IGCE, UNESP de Rio Claro, por todo o valioso conhecimento transmitido e aos técnicos do mesmo departamento, que sempre dispuseram-se a auxiliar na realização deste trabalho, sobretudo em questões experimentais.

Ao CNPq pela bolsa do PIBIC (2015-2016) fornecida ao projeto de Iniciação Científica que posteriormente motivou o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas de sala pelos momentos compartilhados durante a graduação.

À República Beco pelo tempo em que foi meu lar e aos seus moradores: Brinquedo, Chapa, Jedi, Robinho, Tocantins e Tonto; por terem sido e ainda serem uma família, por todos os momentos que compartilhamos e experiências inquestionavelmente valiosas para meu crescimento pessoal.

Ao meu amigo Antônio Vale Lussari, que muitas vezes acreditou em mim mais do que eu mesmo.

Ao meu amigo e *roommate* José Augusto Proença Maia Devienne por todo apoio, valiosas discussões e companheirismo durante este ano.

Por fim, agradeço à todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para minha formação e realização desse trabalho de conclusão de curso.

Resumo

Neste trabalho foi feita uma descrição qualitativa da dinâmica do Pêndulo Duplo, sistema dinâmico que apresenta comportamento sensível às condições iniciais. Após o tratamento analítico, com o objetivo de analisar e evidenciar tanto o comportamento regular (caracterizado por órbitas periódicas e quase-periódicas) quanto o comportamento irregular (caracterizado por órbitas caóticas) exibidos pelo sistema, estudamos resultados numéricos, obtidos através de simulações computacionais, e resultados experimentais, obtidos a partir do tratamento digital de filmagens frontais de um pêndulo duplo. As secções de Poincaré para diferentes valores de energia mostram que o sistema possui espaço de fases misto, em que coexistem órbitas regulares e irregulares, característica típica de Sistemas Hamiltonianos. Para baixas energias existem apenas órbitas regulares. O comportamento caótico surge com o aumento de energia e foi evidenciado pelo cálculo do expoente de Lyapunov a partir de resultados numéricos e experimentais.

Palavras Chave: Sistemas dinâmicos. Caos. Pêndulo duplo.

Abstract

In this work we developed a qualitative description of the dynamics of the Double Pendulum, a dynamical system that presents behavior sensitive to the initial conditions. After the analytical treatment, with the objective of analyzing and evidencing both the regular behavior (characterized by periodic and quasi-periodic orbits) and the irregular behavior (characterized by chaotic orbits) exhibited by the system, we studied numerical results, obtained through computational simulations, and experimental results, obtained from the digital treatment of videos of a double pendulum. The Poincaré sections for different energy values shows that the system has a mixed phase space, in which regular and irregular orbits coexist, a typical characteristic of Hamiltonian Systems. For low energies there are only regular orbits. The chaotic behavior arises with the increase of energy and was evidenced by the calculation of the Lyapunov exponent from numerical and experimental results.

Key words: Dynamical systems. Chaos. Double pendulum.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão de Mecânica Clássica	3
2.1	Formulação Newtoniana	3
2.2	Coordenadas Generalizadas	4
2.3	Princípio de Hamilton e Formulação Lagrangeana	4
2.4	Formulação Hamiltoniana	5
3	Dinâmica Não Linear e Caos em Sistemas Hamiltonianos	7
3.1	Espaço de Fases	8
3.2	Secções de Poincaré	12
3.3	Expoentes de Lyapunov	12
4	Estudo Analítico do Pêndulo Duplo	14
4.1	Formalismo Lagrangeano	14
4.2	Formalismo Hamiltoniano	16
4.3	Pontos de Equilíbrio	17
4.4	Pequenas Oscilações e Modos Normais de Vibração	18
5	Materiais e Métodos	21
5.1	Construção do Pêndulo Duplo e Tratamento Digital de Vídeo	21
5.2	Tratamento de Dados e Simulações Computacionais	25
6	Resultados Numéricos	27
6.1	Espaço de Fases	27
6.2	Seções de Poincaré	28
6.3	Sensibilidade às Condições Iniciais e Expoente de Lyapunov	34
6.4	Modos Normais de Vibração	35
7	Resultados Experimentais	37
7.1	Espaço de Fases	37
7.2	Pequenas Oscilações	40
7.3	Sensibilidade às Condições Iniciais e Expoente de Lyapunov	42

Capítulo 1

Introdução

Sendo a natureza essencialmente não linear, quando descrita a partir de modelos lineares, nosso entendimento se limita a pequenas regiões, nos privando de uma completa compreensão de todos seus aspectos [1]. Sistemas dinâmicos são aqueles sujeitos às mudanças, que evoluem no tempo. De modo geral, os sistemas dinâmicos podem ser subdivididos em sistemas de tempo contínuo e sistemas de tempo discreto. Os sistemas em tempo contínuo são representados por equações diferenciais ordinárias ou parciais, juntamente com condições iniciais e condições de contorno, de tal modo que a função que satisfaz a equação (ou equações), juntamente com as condições iniciais e de contorno, representa o comportamento dinâmico desse sistema ao longo do tempo.

Como exemplo de sistemas dinâmicos de tempo contínuo, temos o Pêndulo Duplo, descrito por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's). Além disso, devido à forma de suas equações, o pêndulo duplo encaixa-se em uma importante subclasse de sistemas dinâmicos, os sistemas Hamiltonianos. A formulação Hamiltoniana encontra aplicações importantes não só na Mecânica Clássica, mas também no Eletromagnetismo e é ponto de partida da Mecânica Quântica e Mecânica Estatística [2].

No caso de sistemas em tempo discreto, normalmente temos uma modelagem através de mapeamentos, nos quais existe uma lei de recorrência relacionando os valores de variáveis dinâmicas (variáveis de estado) no instante posterior com seus valores em instantes anteriores. Como exemplo temos o mapa logístico, utilizado para estudo de dinâmica de populações e investigado amplamente por Robert May na década de 70. Os resultados de May [3], publicados em 1976 na revista *Nature*, chamaram a atenção de pesquisadores do mundo todo para o estudo de dinâmica não linear.

No entanto, também podemos dividir os sistemas dinâmicos em determinísticos (nos quais uma vez conhecidas as variáveis de estado em um dado instante, seu comportamento em qualquer instante posterior é determinado univocamente) e sistemas não determinísticos (ou estocásticos), cuja modelagem de modo geral envolve teorias probabilísticas. Assim, um fato que chama bastante atenção é o de que existem sistemas determinísticos que apresentam comportamento dinâmico irregular. Esse fato foi constatado pelo

matemático francês do século XIX Henri Poincaré, em seu estudo clássico do chamado problema de três corpos. Nesse problema, Poincaré estudava o comportamento dinâmico de três corpos sujeitos à ação de força gravitacional em um plano, segundo a lei universal de Newton do inverso da distância ao quadrado.

Esse comportamento estranho foi observado novamente por Edward Lorenz, na década de 1960, ao estudar problemas de convecção atmosférica em um modelo simplificado. Nesse modelo, soluções que partiam aparentemente das mesmas condições iniciais, ao serem simuladas, levavam a órbitas que divergiam, o que seria uma contradição ao fato do sistema ser determinístico. No entanto, temos que o problema da divergência estava associado à imprecisão na determinação das condições iniciais. Dessa forma, o que de fato ocorria era que órbitas que partiam de condições iniciais suficientemente próximas eram repelidas ao longo do tempo, um fenômeno hoje conhecido como sensibilidade às condições iniciais.

O fato que sistemas determinísticos não implicam necessariamente em presença de comportamento regular tornou-se uma grande descoberta, e o interesse por sistemas com tal comportamento, dito caótico, cresceu de modo vertiginoso, principalmente pelo desenvolvimento de métodos numéricos que passaram a ser implementáveis em computadores com capacidades de processamento cada vez mais elevadas.

Sistemas caóticos são constantemente observados na natureza. Um desses sistemas, o pêndulo duplo, será objeto de estudo desse trabalho, cujo objetivo é a caracterização da dinâmica desse sistema mecânico, governado por equações diferenciais não lineares, evidenciando seu comportamento regular (periódico ou quase periódico) e irregular (caótico). Para esse estudo será feito um tratamento analítico do modelo do pêndulo duplo ideal e posteriormente serão analisados tanto resultados numéricos, obtidos através da integração das equações do movimento, derivadas pelo formalismo Hamiltoniano, quanto resultados experimentais, obtidos através do tratamento digital de filmagens frontais de um pêndulo duplo real.

Capítulo 2

Revisão de Mecânica Clássica

Neste capítulo será desenvolvida uma revisão das formulações Lagrangeana e Hamiltoniana da Mecânica Clássica, que servem de base para o estudo de sistemas dinâmicos como o Pêndulo Duplo. Sistemas dinâmicos [7] são aqueles regidos por um sistema de N equações diferenciais de primeira ordem como:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

onde a variável independente t representa o tempo e, em notação vetorial, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ as variáveis dinâmicas que a cada instante representam um estado do sistema e cuja dependencia temporal é gerada por 2.1. As $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$ são funções não lineares de $\mathbf{x}$.

2.1 Formulação Newtoniana

Pela formulação Newtoniana da Mecânica Clássica sabe-se que a equação do movimento da partícula i de um sistema composto por N partículas é dada pela superposição das forças que atuam sobre ela e segunda lei de Newton fornece [8]:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{p}_i$ é o momento linear da partícula i , definido pelo produto de sua massa pelo seu vetor velocidade, ou seja:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt},$$

$$\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad (2.3)$$

sendo $\mathbf{r}_i$ vetor posição da partícula i . No caso em que as massas são constantes, a força resultante sobre uma partícula é dada pelo produto de sua massa pela aceleração,

reduzindo a Equação 2.2 à:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i. \quad (2.4)$$

Nota-se que 2.4 é um sistema de $3N$ equações diferenciais de segunda ordem em $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z, t)$, pois a posição de cada partícula em dado instante é definida por três coordenadas espaciais. Vale ressaltar que as forças envolvidas podem depender do tempo, da posição das partículas e eventualmente das velocidades. Para efetuar a integração desse sistema é necessário o conhecimento das formas de cada uma das forças, o que nem sempre é trivial.

2.2 Coordenadas Generalizadas

Em certos problemas, é possível aproveitar-se da simetria do sistema em estudo de forma a reduzir o número de coordenadas necessárias para a descrição das posições $\mathbf{r}$ e forças $\mathbf{F}$. Por exemplo, um pêndulo movendo-se no plano pode ser descrito apenas a partir do ângulo que o pêndulo faz com o eixo vertical, como nas coordenadas polares com o raio fixo, ao invés das coordenadas cartesianas. Definem-se, então, para um sistema de N partículas, as coordenadas generalizadas [8] da i -ésima componente:

$$q_i = q_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N). \quad (2.5)$$

2.3 Princípio de Hamilton e Formulação Lagrangeana

A ideia de que a natureza sempre minimiza certas quantidades quando ocorre um processo físico foi aplicado durante o desenvolvimento da ciência em diversos momentos [9], esse é o Princípio da Mínima Ação. Sua formulação na física é também conhecido como Princípio de Hamilton, enunciado como segue:

“Para todas as possíveis trajetórias ao longo das quais o sistema dinâmico pode se mover de um ponto para outro dentro de um intervalo de tempo específico, a real trajetória seguida é a que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinética e potencial.”

Em termos do cálculo variacional, tem-se:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt, \quad (2.6)$$

onde S é a ação, $T = T(\dot{\mathbf{q}})$ é a energia cinética e $V = V(\mathbf{q})$ a energia potencial, sendo $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$ e $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$. Define-se, então, a função Lagrangeana:

$$L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \equiv T - V. \quad (2.7)$$

A condição de minimização da ação conduz às Equações de Euler-Lagrange [8]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (2.8)$$

Definem-se os momenta generalizados $\mathbf{p}$ em termos das coordenadas generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ através da relação:

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad (2.9)$$

em que $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$, de modo que as Equações de Euler-Lagrange mostram-se equivalentes à segunda lei de Newton, já que

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}.$$

Para um sistema composto por N partículas obtém-se, a partir das respectivas equações de Euler-Lagrange, um conjunto de N equações diferenciais de segunda ordem. Dessa forma, o formalismo Lagrangeano permite o estudo de sistemas mecânicos sem o conhecimento das forças envolvidas, que são grandezas vetoriais. Por outro lado, são necessárias expressões para a energia cinética e energia potencial, grandezas escalares.

2.4 Formulação Hamiltoniana

Na formulação Lagrangeana, um sistema composto por N partículas é descrito por N equações diferenciais de segunda ordem nas variáveis dependentes q_i , as velocidades $\dot{q}_i$ são apenas as derivadas temporais das posições. Através da formulação Hamiltoniana, a descrição do movimento pode ser feita por $2N$ equações diferenciais de primeira ordem expressas em termos de $2N$ variáveis independentes. É conveniente a escolha das variáveis independentes q_i e p_i , conhecidas como variáveis canônicas. A função Hamiltoniana é definida como a transformada de Legendre [8] da Lagrangeana:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}), \quad (2.10)$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T + V = E(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \quad (2.11)$$

Diferenciando a Equação 2.10 e comparando com a Equação 2.8, obtém-se as Equações Canônicas de Hamilton:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad (2.12)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.13)$$

Em casos conservativos a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo e representa uma constante do movimento, a energia total do sistema, E , como evidenciado pela equação 2.11. Sistemas dinâmicos conservativos regidos pelas equações canônicas de Hamilton 2.12 e 2.13 são chamados de Sistemas Hamiltonianos [1, 2, 7]. Essa formulação é equivalente à Newtoniana, porém mais geométrica [10], como será constatado no capítulo seguinte.

Capítulo 3

Dinâmica Não Linear e Caos em Sistemas Hamiltonianos

Ao final do século XIX, o físico e matemático Henri Poincaré, ao estudar o clássico problema de três corpos, descobriu que o movimento de um corpo sob influência gravitacional de outros dois corpos é irregular e em sua essência imprevisível, pois órbitas com condições iniciais arbitrariamente próximas podiam afastar-se rapidamente. Segundo ele:

“...pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes diferenças no fenômeno final. Um erro pequeno na entrada produzirá um erro enorme na saída. Previsão torna-se impossível...” (Poincaré, 1890). [11]

A sensibilidade às condições iniciais observadas por Poincaré é uma característica marcante do que veio a ser identificado como dinâmica caótica.

Em 1963, o matemático e meteorologista Edward Lorenz notou que as soluções de seu modelo para convecção atmosférica não atingiam um estado de equilíbrio ou periódico, ao invés disso, oscilavam irregularmente. Além disso, observou que começando as simulações em condições iniciais muito pouco diferentes, as soluções obtidas rapidamente tornavam-se muito diferentes, o mesmo fenômeno constatado por Poincaré no problema dos três corpos.

A figura 3.1 mostra um resultado obtido por Lorenz para a evolução temporal de uma das variáveis do sistema, partindo de duas condições iniciais próximas [12]. Neste contexto, a sensível dependência às condições iniciais deu origem à metáfora do efeito borboleta: “o bater das asas de uma borboleta no Brasil pode provocar uma tempestade no Japão”.

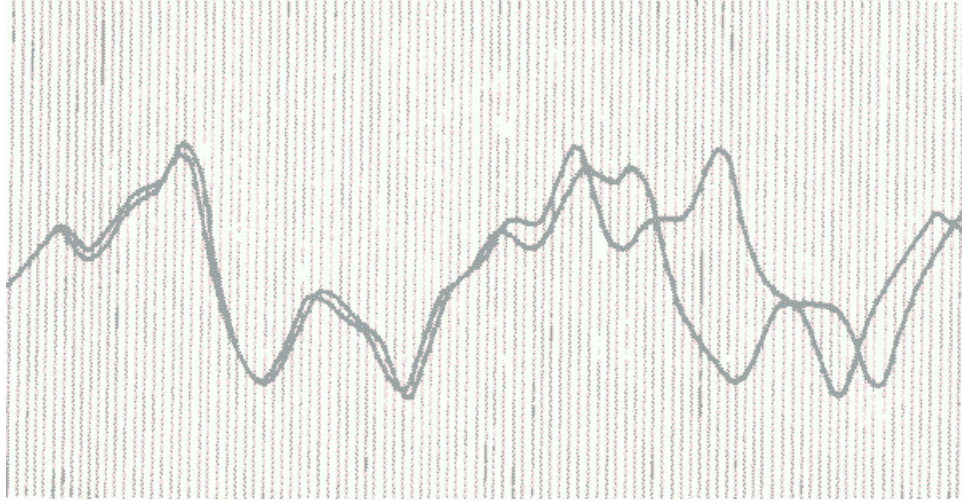


Figura 3.1: Partindo de quase o mesmo ponto, dois padrões de tempo distanciam-se na solução das Equações de Lorenz.

Strogatz [10] define caos como o *comportamento aperiódico* de um sistema *determinístico* que apresenta *sensibilidade às condições iniciais*. Essa definição se baseia em três ingredientes chave:

1. *Comportamento aperiódico* significa que o sistema possui órbitas que não exibem comportamento periódico ou quase periódico conforme o tempo passa;
2. O sistema ser *determinístico* significa que não existem termos aleatórios ou ruídos nas equações que o regem. O comportamento irregular surge das não linearidades do sistema;
3. Por fim, *sensibilidade às condições iniciais* significa que órbitas próximas podem separar-se exponencialmente.

Nas próximas seções serão discutidos os conceitos fundamentais a respeito de sistemas dinâmicos, de modo a esclarecer a definição de caos apresentada.

3.1 Espaço de Fases

Como visto anteriormente, no formalismo Hamiltoniano as coordenadas q_i e momenta p_i são tratadas como variáveis independentes, sendo que o número de coordenadas N é sempre igual ao número de momenta conjugados. Cada par de variáveis canônicas, (q_i, p_i) , confere ao sistema um grau de liberdade, de forma que para N graus de liberdade as Equações Canônicas de Hamilton formam um conjunto de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem que descrevem o movimento, conforme 2.12 e 2.13. Define-se agora um espaço $2N$ -dimensional gerado pelas coordenadas e momenta $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, o espaço de fases [2]. A evolução temporal do sistema para dada condição inicial

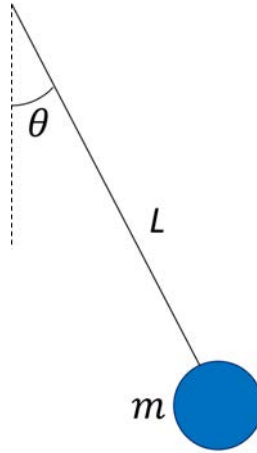


Figura 3.2: Representação esquemática do Pêndulo Simples.

$(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = ((q_1(0), \dots, q_N(0)), (p_1(0), \dots, p_N(0)))$ pode ser representada por uma curva neste espaço, chamada de órbita.

De maneira geral, considerando cada ponto do espaço de fases como uma condição inicial, diz-se que a Hamiltoniana gera um fluxo no espaço de fases, formado pelas condições iniciais ao longo de suas órbitas únicas [7]. Um importante corolário do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais garante que órbitas diferentes nunca se intersectam [2, 10]. Um conjunto de condições iniciais define uma região no espaço de fases cujo volume é conservado durante a evolução do sistema, segundo o Teorema de Liouville [2, 8].

Para exemplificar, trataremos brevemente o pêndulo simples sujeito à aceleração gravitacional g , ilustrado na figura 3.2.

Naturalmente, o sistema de coordenadas polares é escolhido como as coordenadas generalizadas desse problema. A Hamiltoniana do sistema é dada por:

$$H = \frac{p^2}{2mL^2} - mgL \cos \theta \quad (3.1)$$

e a dinâmica é descrita pelas equações de Hamilton:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{mL^2}, \quad (3.2)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgL \sin \theta. \quad (3.3)$$

O sistema possui um grau de liberdade, já que é totalmente descrito pelo par de coordenada e momentum conjugado (θ, p) . Como a Hamiltoniana 3.1 não depende do tempo a energia total é uma constante do movimento, de modo que o sistema possui um número igual de graus de liberdade e constantes do movimento, classificando-o como integrável [7, 13]. De fato, o sistema formado pelas equações 3.2 e 3.3 possui solução analítica, dada em termos das funções elípticas de Jacobi [13].

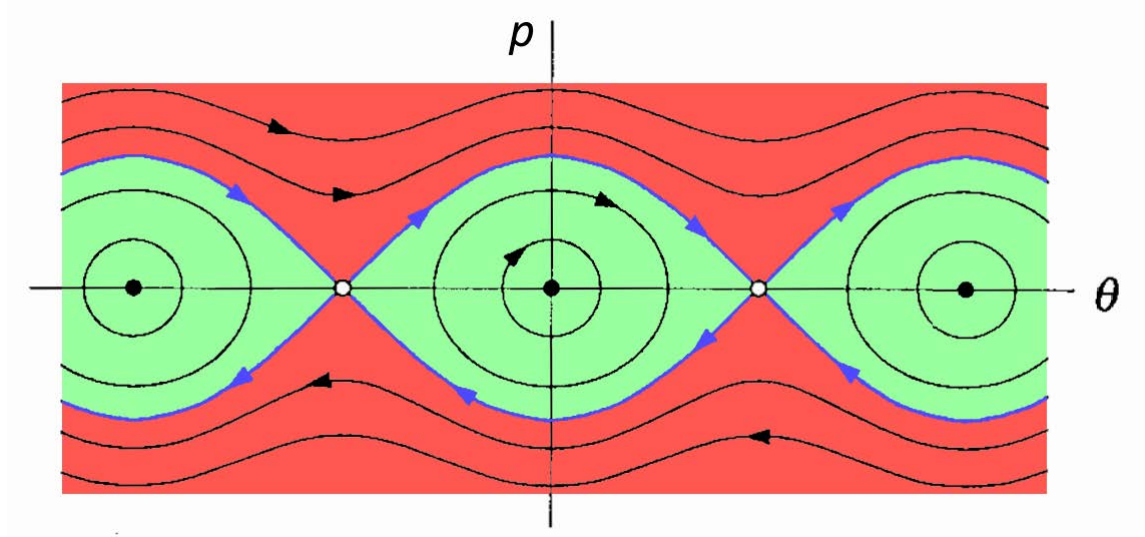


Figura 3.3: Espaço de fases do pêndulo simples. Adaptado de [10].

Entretanto, analisaremos o espaço de fases do sistema para obter uma descrição qualitativa global da dinâmica apresentada pelo pêndulo simples. Seu espaço de fases bidimensional, definido por (θ, p) , é apresentado na figura 3.3.

Observam-se dois regimes qualitativamente diferentes dependendo da energia total associada às condições iniciais escolhidas. As órbitas na região verde correspondem ao movimento de oscilação em torno na posição de equilíbrio estável $\theta = 0$. O momentum p passa por valores extremos em $\theta = 0$ e anula-se quando θ é máximo ou mínimo, ou seja, nos extremos da amplitude de oscilação. Esse tipo de dinâmica é chamada de libração. Já as curvas na região vermelha correspondem às condições iniciais em que o pêndulo possui energia suficiente para dar voltas completas em torno do eixo de fixação, caracterizando curvas de rotação, em que o momentum nunca se anula. A curva em azul é chamada separatriz e representa a fronteira entre os dois regimes apresentados.

Sistemas Hamiltonianos com dois ou mais graus de liberdade podem ser difíceis de serem analisados devido à alta dimensionalidade do espaço de fases, porém, esses sistemas são extremamente interessantes já que podem apresentar dinâmica caótica, característica não observada em sistemas com um grau de liberdade. Consideraremos agora um sistema Hamiltoniano genérico com dois graus de liberdade, cuja Hamiltoniana tem a forma:

$$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

Neste caso o espaço de fases é quadridimensional, tornando impossível a visualização das órbitas nesse espaço. Entretanto, como a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, ela representa a energia total do sistema segundo a equação 2.11. Sendo assim, podemos escrever a energia total como uma função das coordenadas e momenta:

$$E = E(q_1, q_2, p_1, p_2),$$

de modo que é possível escrever uma das variáveis como função das outras três e da energia, uma constante do movimento:

$$p_2 = p_2(q_1, q_2, p_1, E).$$

Levando este resultado na Hamiltoniana, pode-se reescrevê-la como:

$$H = H(q_1, q_2, p_1, E).$$

Dessa forma, sendo a energia total E uma constante conhecida, o espaço de fases quadridimensional é reduzido a um espaço tridimensional definido por (q_1, q_2, p_1) , em que as órbitas formam uma superfície de energia Σ_E . As órbitas periódicas e quase-periódicas são confinadas à superfícies tridimensionais de topologia toroidal [2, 7, 14], chamadas toros invariantes¹. A figura 3.4 ilustra essa geometria.

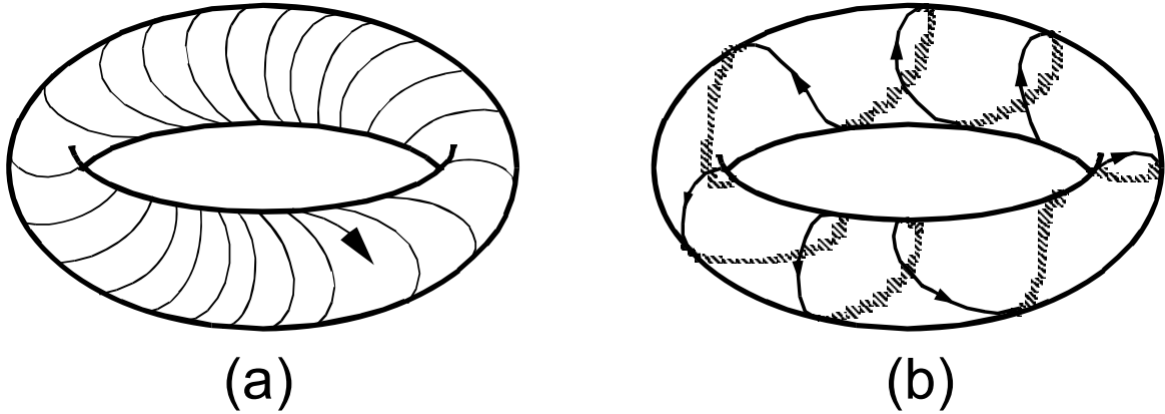


Figura 3.4: Órbita (a) quase periódica e (b) periódica confinadas à toros tridimensionais. [7]

Caso a órbita retorne precisamente ao ponto de partida, ela é dita periódica, conforme ilustrado na figura 3.4 (b). No caso em que a órbita não retorna ao ponto de partida, para tempos suficientemente longos, o toro será preenchido densamente, caracterizando uma órbita quase periódica, exibida na figura 3.4 (a). Vale ressaltar que a figura 3.4 se trata apenas de uma representação esquemática. Os toros podem se dobrar de maneiras complicadas [7], como será mostrado posteriormente no capítulo 6.

Diferentemente das órbitas periódicas e quase periódicas, as órbitas caóticas não são confinadas em toros, mas sim visitam toda a parte acessível da superfície de energia Σ_E . Tipicamente, o espaço de fases de sistemas Hamiltonianos exibe regime regular (caracterizado por toros invariantes correspondentes às órbitas periódicas e quase periódicas) e regime caótico, em que existe sensibilidade às condições iniciais.

¹São ditos toros *invariantes* pois uma órbita iniciada em um toro, nele permanece.

3.2 Secções de Poincaré

Como discutido na seção anterior, em sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, a existência da constante do movimento $E = H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ permite reduzir o espaço de fases quadridimensional a um espaço de fases tridimensional, em que a dinâmica ocorre sobre a superfície de energia Σ_E . O método das secções de Poincaré permite visualizar e estudar a dinâmica desse tipo de sistema de maneira mais conveniente, reduzindo-a a um plano, assim como sistemas com um grau de liberdade.

O procedimento, ilustrado na figura 3.5, consiste na escolha de uma superfície bidimensional Σ no espaço de fases em que são marcadas as sucessivas intersecções das órbitas com essa superfície, sempre no mesmo sentido.

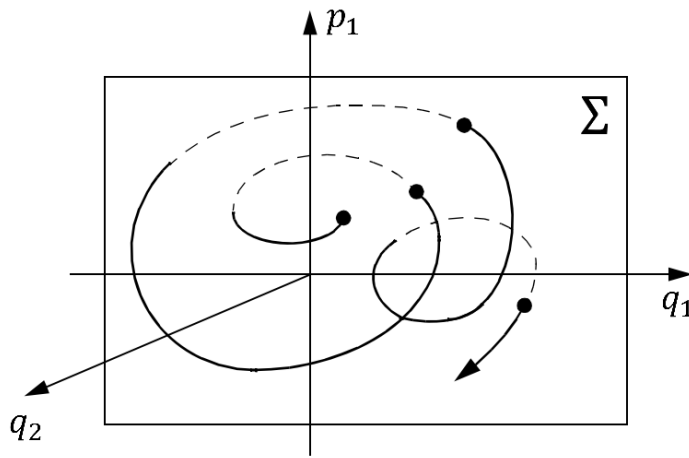


Figura 3.5: Ilustração do método das secções de Poincaré. Os sucessivos cruzamentos de uma órbita com a superfície Σ são marcados por pontos nesse plano, sempre que a órbita estiver “saindo”. Figura adaptada de [7].

Dessa forma, caso a órbita seja caótica, serão marcados na secção de Poincaré pontos aparentemente aleatórios. Já uma órbita periódica, como a da figura 3.4 (b), cruzará o plano Σ sempre em um mesmo ponto. Uma órbita quase periódica, como na figura 3.4 (a), intersecta Σ um número infinito de vezes, sendo que os pontos na secção de Poincaré aproximam-se arbitrariamente, sem nunca, de fato, cruzarem-se.

Assim, a construção da secção de Poincaré de um sistema, a partir de um conjunto de condições iniciais, fornece imediatamente uma visão global de sua dinâmica para determinada energia. Discutiremos a construção das secções de Poincaré para o pêndulo duplo na seção 6.2.

3.3 Expoentes de Lyapunov

A sensibilidade às condições iniciais, condição necessária para que um sistema determinístico seja considerado caótico [10], implica na existencia de órbitas no espaço de fases,

com pontos de partida abstratamente próximos, que distanciam-se rapidamente, de maneira exponencial. Sejam $\mathbf{x}(0)$ e $(\mathbf{x}(0) + \mathbf{d}(0))$ duas condições iniciais vizinhas no espaço de fases, separadas inicialmente por uma pequena distância $\mathbf{d}(0)$, conforme ilustrado na figura 3.6.

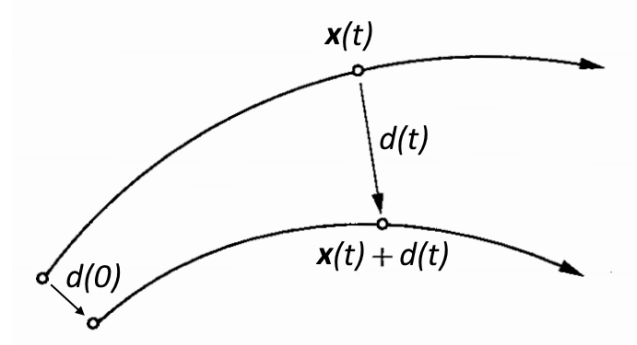


Figura 3.6: Órbitas inicialmente separadas pela distância d_0 . Figura adaptada de [10].

Assumindo que a distância entre as órbitas tenha variado exponencialmente no tempo é válida a relação:

$$d(t) = d(0) e^{\Lambda t}, \quad (3.4)$$

onde o número Λ é o maior expoente de Lyapunov local [2]. Se esse valor for negativo ou nulo, as órbitas não divergem. Por outro lado, caso Λ for positivo, as órbitas divergem exponencialmente, caracterizando o caos.

A expressão 3.4 pode ser reescrita como:

$$\Lambda = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d(0)} \right). \quad (3.5)$$

Com a equação 3.5, pode-se calcular a cada instante o valor de Λ a partir de dados experimentais ou numéricos. Uma média dos valores fornece o maior expoente de Lyapunov local [2].

Capítulo 4

Estudo Analítico do Pêndulo Duplo

O pêndulo duplo consiste em um sistema formado por dois pêndulos, de forma que o ponto de fixação do segundo pêndulo é a massa do primeiro, sendo que ambos os pêndulos oscilam no mesmo plano vertical, conforme ilustrado na Figura 4.1. Os primeiros estudos sobre esse sistema foram feitos por Euler e Daniel Bernoulli por volta de 1740 [2, 15] .

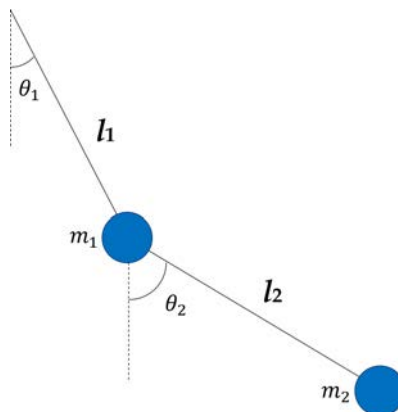


Figura 4.1: Ilustração Esquemática do Pêndulo Duplo.

Neste capítulo será apresentado um estudo analítico do modelo do pêndulo duplo. Serão deduzidas as equações do movimento pelo formalismo Lagrangeano, na seção 4.1, e pelo formalismo Hamiltoniano, na seção 4.2. Na seção 4.3, serão apresentados os pontos de equilíbrio desse sistema e suas estabilidades, ou seja, posições em que o sistema permanece estacionário conforme o tempo evolui e o efeito de pequenas perturbações nesses pontos. Serão encontradas soluções periódicas para as equações do movimento para pequenas perturbações do ponto de equilíbrio estável, culminando no estudo dos Modos Normais de oscilação, na seção 4.4.

4.1 Formalismo Lagrangeano

Definindo a origem do sistema cartesiano de coordenadas no eixo de suspensão do primeiro pêndulo, as posições das massas m_1 e m_2 são, respectivamente, dadas pelos vetores $\mathbf{r}_1$ e

$\mathbf{r}_2$:

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j},$$

onde $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ são os versores cartesianos. As componentes podem ser escritas como:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad (4.1)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1, \quad (4.2)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, \quad (4.3)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2. \quad (4.4)$$

Derivando, obtêm-se as velocidades por componente:

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, \quad (4.5)$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, \quad (4.6)$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \quad (4.7)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2. \quad (4.8)$$

Utilizando as equações de 4.1 a 4.4, pode-se obter a energia potencial V :

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2,$$

$$V = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2, \quad (4.9)$$

onde g é a aceleração gravitacional.

A energia cinética T é obtida a partir das equações de 4.5 a 4.8:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)). \quad (4.10)$$

Dessa forma, a partir da energia potencial 4.9 e da energia cinética 4.10, a função Lagrangeana do sistema pode ser obtida a partir da equação 2.7, ou seja:

$$L = \frac{1}{2}m_1(l_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(l_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2. \quad (4.11)$$

Utilizando as equação de Euler-Lagrange 2.8, obtêm-se as equações do movimento, um sistema de equações diferenciais de segunda ordem acopladas:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + m_2l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 = 0 \\ m_2l_2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 - m_2l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 + m_2g \sin \theta_2 = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

A não linearidade das equações é evidenciada pelos termos quadráticos em $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ e pelas funções trigonométricas envolvendo θ_1 e θ_2 que multiplicam as derivadas de primeira e segunda ordem.

4.2 Formalismo Hamiltoniano

Para obtenção das equações do movimento a partir do formalismo Hamiltoniano, primeiramente calculamos com a equação 2.9 os momenta generalizados, p_1 e p_2 , derivando a função Lagrangeana do sistema 4.11 com respeito à θ_1 e θ_2 , respectivamente:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (4.13)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (4.14)$$

Dessa forma, a transformada de Legendre dada pela equação 2.10 fornece a Hamiltoniana do sistema:

$$H(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2) = \dot{\theta}_1 p_1 + \dot{\theta}_2 p_2 - L,$$

$$H(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2) = \frac{(m_1 + m_2)l_1^2 p_2^2 + m_2 l_2^2 p_1^2 - 2m_2 l_1 l_2 p_1 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1^2 l_2^2 m_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} - g(l_1(m_1 + m_2) \cos(\theta_1) + l_2 m_2 \cos(\theta_2)). \quad (4.15)$$

Assim, as equações de Hamilton do pêndulo duplo são:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{l_2 p_1 - l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_2}{l_1^2 l_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))}, \quad (4.16)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{-m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_1 + (m_1 + m_2) l_1 p_2}{l_1 l_2^2 m_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))}, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\sin(2(\theta_1 - \theta_2)) [m_2 l_2^2 p_1^2 - 2m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_1 p_2 + (m_1 + m_2) l_1^2 p_2^2]}{2l_1^2 l_2^2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))^2} \\ &\quad - \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) p_1 p_2}{l_1 l_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) [m_2 l_2^2 p_1^2 - 2m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_1 p_2 + (m_1 + m_2) l_1^2 p_2^2]}{l_1^2 l_2^2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))^2} \\ &\quad + \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) p_1 p_2}{l_1 l_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} - m_2 g l_2 \sin \theta_2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.3 Pontos de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio (ou pontos fixos) do pêndulo duplo são aqueles descritos pelos valores de $(\theta_1, p_1, \theta_2, p_2)$ tais que as derivadas temporais $(\dot{\theta}_1, \dot{p}_1, \dot{\theta}_2, \dot{p}_2)$ anulam-se, fornecendo soluções estacionárias. A importância dos pontos de equilíbrio se dá pela estrutura que estes impõe ao espaço de fases do sistema em suas proximidades [13] dependendo de sua natureza: instável ou estável. Para obter os pontos de equilíbrio, basta igualar as equações de Hamilton 4.16, 4.17, 4.18, 4.19 a zero e resolver para $(\theta_1, p_1, \theta_2, p_2)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtêm-se então quatro pontos de equilíbrio para o pêndulo duplo:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O ponto P_1 corresponde a ambos os braços para baixo. Intuitivamente esta configuração é estável, uma pequena perturbação faria com que o sistema oscilasse em torno da posição de equilíbrio. Já os pontos P_2 , P_3 e P_4 são referentes a pontos de equilíbrios intuitivamente instáveis, em que um ou ambos os braços do pêndulo duplo estão para cima e pequenas perturbações fariam com que o sistema se afastasse desse pontos.

Analiticamente, é possível inferir sobre a natureza de um ponto de equilíbrio ao analisar os autovalores da matriz jacobiana do sistema formado pelas equações de Hamilton linearizadas em torno do ponto de interesse. Um estudo detalhado da natureza dos pontos de equilíbrio do pêndulo duplo pode ser encontrado na referência [13].

4.4 Pequenas Oscilações e Modos Normais de Vibração

O comportamento do sistema após uma pequena perturbação nas proximidades do seu ponto de equilíbrio estável é uma combinação linear de seus modos normais de vibração. Um modo normal consiste em ambas as massas do pêndulo duplo oscilando com a mesma frequência, chamada frequência normal, porém amplitudes de oscilação diferentes.

Para obter os modos normais de oscilação é conveniente trabalhar com o formalismo Lagrangeano. Linearizando as equações do movimento 4.12 ao redor do ponto de equilíbrio, ou seja, expandindo-as em série de Taylor em torno de P_1 , obtêm-se o sistema:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 = -(m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 = -m_2 g l_2 \theta_2. \end{cases} \quad (4.20)$$

Definindo agora:

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{pmatrix},$$

o sistema 4.20 pode ser reescrito na forma matricial:

$$\mathbb{M}\ddot{\Theta} = -\mathbb{K}\Theta, \quad (4.21)$$

Onde $\ddot{\Theta} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix}$ e $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$.

Nota-se que o sistema matricial de equações diferenciais 4.21 tem forma análoga à equação do movimento de um oscilador harmônico. Supõe-se que esse sistema possua soluções do tipo:

$$\mathbb{Z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \mathbb{A}e^{i\omega t}, \quad (4.22)$$

onde ω é a frequência natural de oscilação e $\mathbb{A}$ constantes determinadas pelas condições iniciais. Assim, a parte real de $\mathbb{Z}(t)$ corresponde às soluções físicas para a dinâmica do pêndulo duplo no regime de pequenas oscilações.

Substituindo a proposta de solução 4.22 no sistema 4.21, obtém-se:

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) \mathbb{A} = 0, \quad (4.23)$$

cujas soluções não triviais são obtidas quando:

$$\det(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) = 0. \quad (4.24)$$

Adotando $m_1 = m_2 = m$ e $l_1 = l_2 = l$, pode-se escrever:

$$\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M} = \begin{pmatrix} 2mgl - 2ml^2\omega^2 & -ml^2\omega^2 \\ -ml^2\omega^2 & mgl - ml^2\omega^2 \end{pmatrix} = ml^2 \begin{pmatrix} 2(\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix},$$

em que $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Dessa forma, a condição 4.24 implica na existência de duas frequências normais de oscilação:

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \omega_0^2, \quad (4.25)$$

$$\omega_2^2 = (2 + \sqrt{2}) \omega_0^2. \quad (4.26)$$

De posse das expressões para as frequências normais, os dois modos normais podem ser obtidos. Substituindo a equação 4.25 em 4.23:

$$(\mathbb{K} - \omega_1^2 \mathbb{M}) \mathbb{A} = ml\omega_0^2 (\sqrt{2} - 1) \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0,$$

o que implica no sistema:

$$\begin{cases} 2a_1 - \sqrt{2}a_2 = 0 \\ -\sqrt{2}a_1 + a_2 = 0, \end{cases}$$

de modo que $a_2 = a_1\sqrt{2}$. Levando isso em consideração, o primeiro modo normal será obtido tomando a parte real de 4.22:

$$\Theta(t) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t). \quad (4.27)$$

Nesta configuração, o pêndulo de baixo oscila com amplitude um pouco maior que o de cima, porém com mesma frequência e em fase, ou seja, ambas as massas movem-se sempre ao mesmo tempo para a direita ou para a esquerda, conforme ilustrado na figura 4.2 (a). De forma análoga, temos para a segunda frequência normal de oscilação $a_2 = -a_1\sqrt{2}$ e o segundo modo normal obtido é:

$$\Theta(t) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t). \quad (4.28)$$

Neste caso, ambos os braços do pêndulo duplo oscilam com mesma frequência sendo que o de baixo possui amplitude de oscilação um pouco maior. Entretanto, agora o movimento ocorre fora de fase, quando uma massa move-se para a esquerda a outra move-se para a direita, e vice-versa. Esta configuração está representada na figura 4.2 (b).

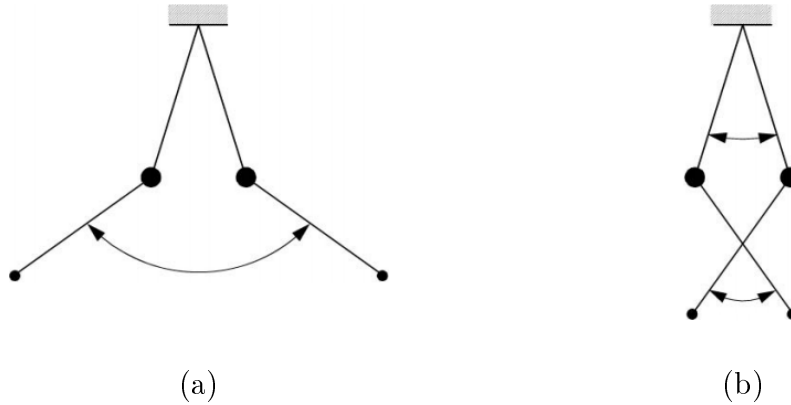


Figura 4.2: Representação dos modos normais de oscilação do pêndulo duplo. Em (a) os braços oscilam em fase enquanto em (b) oscilam fora de fase. Figura adaptada de [7].

A solução geral para a dinâmica do sistema na condição de pequenas oscilações é uma combinação linear dos modos normais dados por 4.27 e 4.28. Essas soluções correspondem às únicas órbitas periódicas do pêndulo duplo a baixas energias e voltaremos a explorá-las em simulações numéricas na seção 6.4.

Capítulo 5

Materiais e Métodos

Neste capítulo serão apresentados os materiais e métodos utilizados para a obtenção dos resultados numéricos e experimentais. Na seção 5.1, são discutidos alguns detalhes a respeito da construção do pêndulo duplo e o método de tratamento digital de vídeo, a partir do qual os dados experimentais são obtidos. Informações a respeito do tratamento de dados e simulações computacionais estão presentes na seção 5.2.

5.1 Construção do Pêndulo Duplo e Tratamento Digital de Vídeo

O pêndulo duplo foi construído a partir de materiais de fácil aquisição, conforme mostrado na figura 5.1. Para o suporte e braços do pêndulo foram utilizadas hastes de alumínio. Para as massas, fixaram-se tampas de alumínio nas extremidades dos braços e essas tampas foram preenchidas com chumbo derretido. O acoplamento dos braços foi feito com rolamentos. As dimensões do pêndulo duplo são: $m_1 = 0,958$ kg, $m_2 = 0,343$ kg, $l_1 = 0,245$ m, $l_2 = 0,180$ m.



Figura 5.1: Haste de alumínio para suporte do pêndulo (esquerda), tampas de alumínio e chumbo para construção das massas (centro) e braços prontos para serem acoplados (direita).

Com o pêndulo duplo construído, figura 5.2, abandonamos as massas de determinada altura e utilizamos uma filmadora para obter vídeos frontais de alguns segundos do experimento. Para obtenção dos dados experimentais a partir das filmagens, foi utilizado o

software gratuito *Tracker* [4], que acompanha o movimento das massas do pêndulo quadro a quadro, registrando as suas posições em relação ao eixo de coordenadas definido e escala escolhida.



Figura 5.2: Pêndulo duplo utilizado nos experimentos.

Primeiramente, para fazer o mapeamento automático das posições do pêndulo, é necessário importar o arquivo de vídeo para o *Tracker*. Para isso basta acessar a opção “Ficheiro” no menu principal, selecionar “Abrir” e então informar o caminho do arquivo de vídeo. Este procedimento é mostrado na figura 5.3.

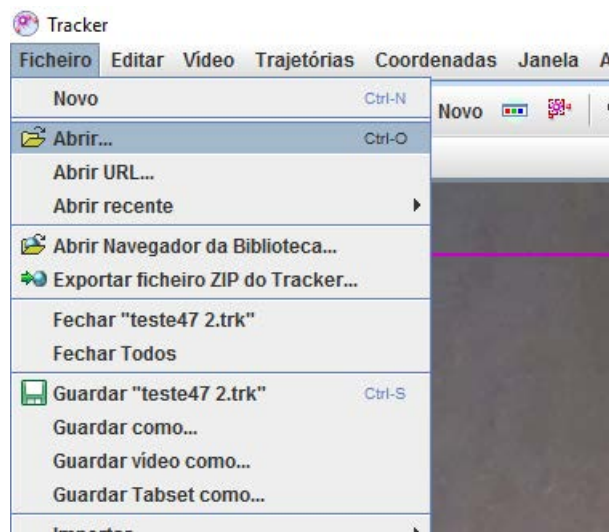


Figura 5.3: Importando um arquivo de vídeo com o software *Tracker*.

Após importado, o vídeo é incorporado à interface do *software*. Agora é possível definir a origem do eixo de coordenadas, a posição inicial das massas e utilizar o recurso “Bastão de calibração” para definir uma escala.

Para posicionar a origem do eixo de coordenadas no eixo de suspensão do pêndulo duplo, basta seguir o caminho “Trajetórias → eixos”, marcar a opção para deixar o eixo visível e move-lo com o mouse. A figura 5.4 ilustra esse procedimento.

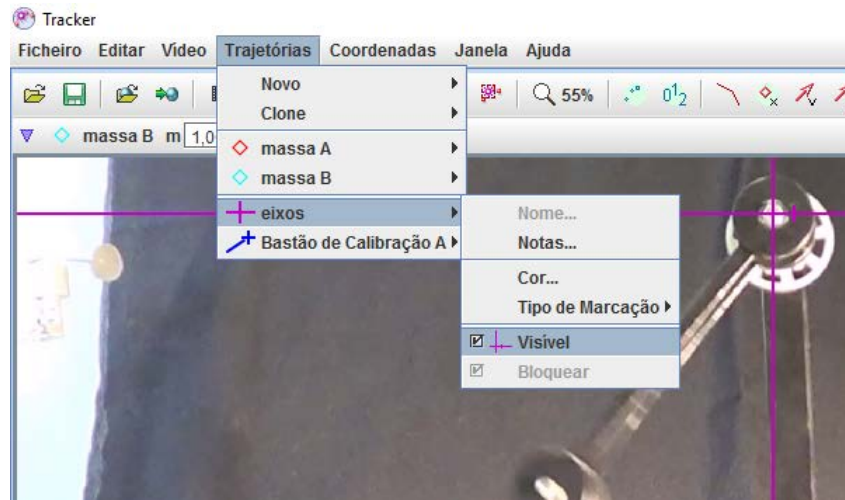


Figura 5.4: Configurando o eixo de coordenadas no *Tracker*.

O caminho para criar o bastão de calibração e definir a escala é mostrado na figura 5.5. Após criar o bastão de calibração, basta posicioná-lo com uma extremidade na origem e a outra aproximadamente no centro da massa superior, definindo $l_1 = 0,245$ m.

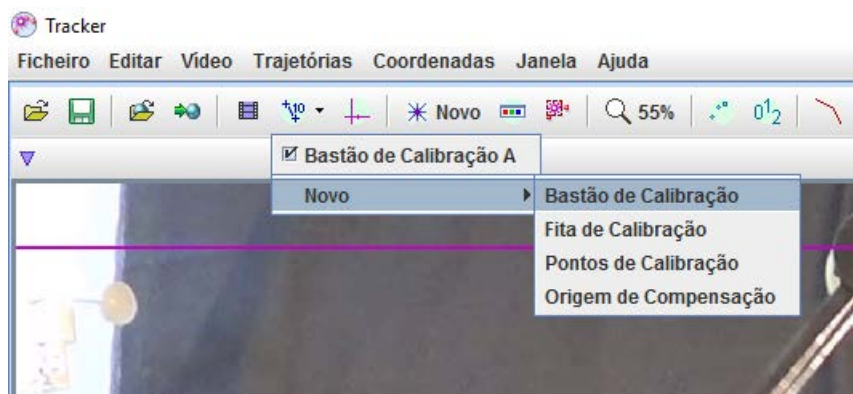


Figura 5.5: Criando o bastão de calibração no *Tracker*.

Para criar as duas massas do pêndulo duplo, o caminho a ser seguido é “Trajetórias → Novo → Massa Pontual”, mostrado na figura 5.6, então apertar a tecla Shift do teclado e clicar na posição da primeira massa. Repetir o mesmo procedimento para a segunda massa.

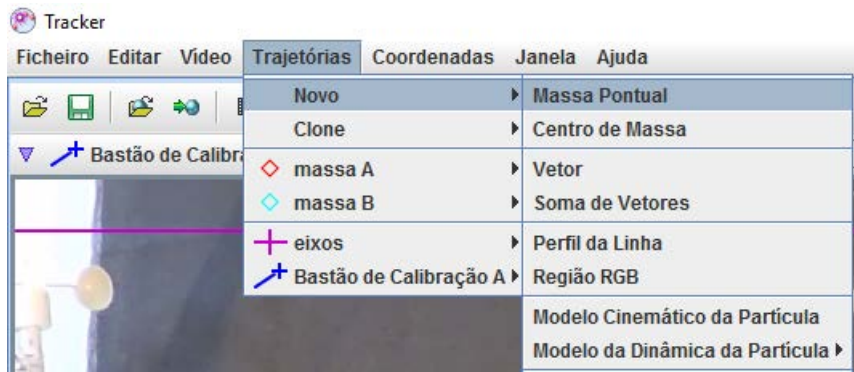


Figura 5.6: Criando uma massa pontual no *Tracker*.

Após essas configurações, podemos marcar automaticamente a trajetória das massas. Para isso, deve-se segurar as teclas Shift e Control do teclado e clicar na massa que será mapeada. A janela mostrada na figura 5.7 será exibida.

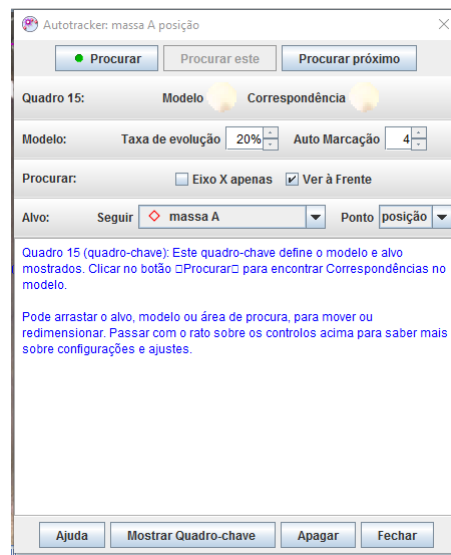


Figura 5.7: Interface de mapeamento automático.

Na opção “Seguir”, deve-se informar a massa que será mapeada e então basta clicar em “Procurar”. Repetir para a outra massa. A figura 5.8 exibe a interface do Tracker em funcionamento.

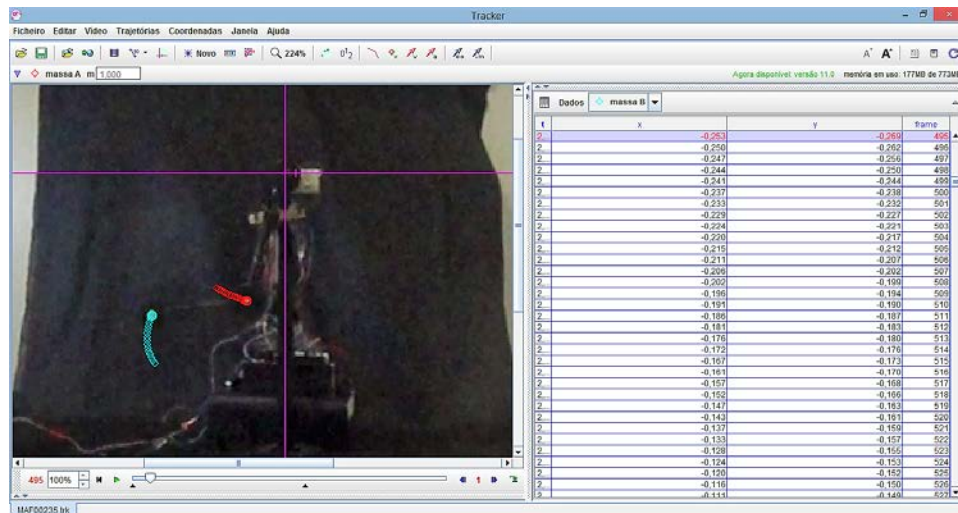


Figura 5.8: *Tracker* marcando automaticamente as posições das massas em cada instante do vídeo.

5.2 Tratamento de Dados e Simulações Computacionais

Os dados experimentais obtidos através do *Tracker* correspondem a duas tabelas, uma para cada massa do pêndulo. Cada tabela fornece as coordenadas cartesianas x e y da massa correspondente, a cada quadro do vídeo. Então, esses dados são exportados para o *software Wolfram Mathematica* [5], onde as posições em coordenadas cartesianas são convertidas em coordenadas angulares através de relações geométricas, resultando em tabelas que fornecem valores de θ_1 e θ_2 quadro a quadro.

Sabendo que a câmera utilizada fornece filmagens à 60 quadros por segundo, calculam-se as velocidades angulares médias e posições angulares médias entre cada quadro e o posterior. Como o intervalo de tempo entre dois quadros é de apenas $1/60$ segundos (aproximadamente 0,0017 segundos) os valores médios podem ser tratados como instantâneos, conforme verificado na figura 5.9. Dessa forma, obtemos as tabelas com posições e velocidades em cada instante para cada uma das massas.

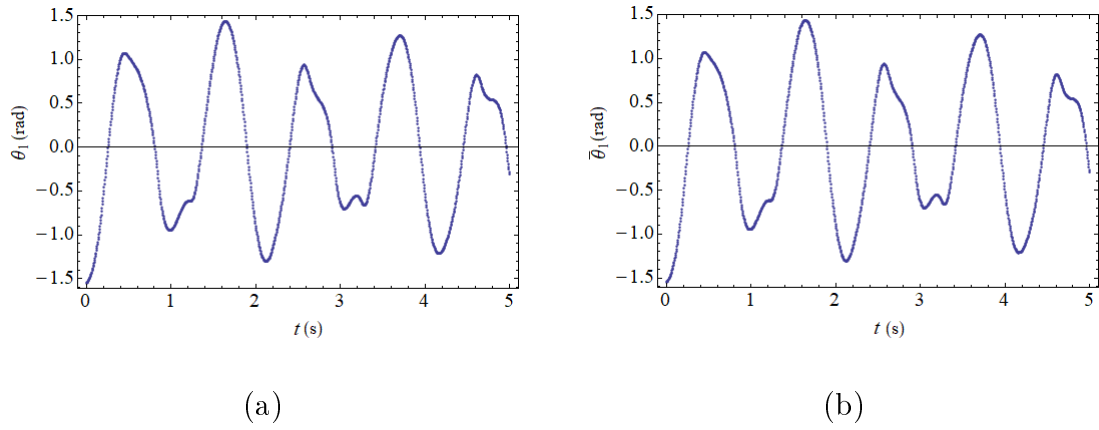


Figura 5.9: Comparação entre (a) evolução temporal de θ_1 e (b) evolução temporal de $\bar{\theta}_1$, valor médio de θ_1 . Dados obtidos a partir de 5 segundos de filmagem.

O *Mathematica* também foi utilizado para as simulações computacionais teóricas, bem como para gerar os gráficos e realização de cálculos analíticos. As equações do movimento foram resolvidas com o método de Runge Kutta [6].

Capítulo 6

Resultados Numéricos

Nesste capítulo exploraremos numericamente os resultados obtidos a partir do estudo analítico do pêndulo duplo, desenvolvido no capítulo 4, de modo a caracterizar a dinâmica do sistema de acordo com os conceitos apresentados no capítulo 3. Por simplicidade foram adotados nas simulações $l_1 = l_2 = 1$ m e $m_1 = m_2 = 1$ kg.

6.1 Espaço de Fases

Dada a hamiltoniana 4.15, que descreve a dinâmica do pêndulo duplo, nota-se a dependência em dois pares canônicos, (θ_1, p_1) e (θ_2, p_2) . Dessa forma, trata-se de um sistema com dois grau de liberdade e consequentemente seu espaço de fases será quadridimensional. O procedimento discutido na seção 3.1 pode ser utilizado para a redução da dimensionalidade do espaço fases para três.

Para que a energia total E do sistema seja nula na posição de equilíbrio estável, é necessária a adição de um termo contante na hamiltoniana para correção da energia potencial. Define-se então:

$$E(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2) = H(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2) + (m_1 + m_2)gl_1 + m_2gl_2$$

$$E(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2) = \frac{(m_1 + m_2)l_1^2p_2^2 + m_2l_2^2p_1^2 - 2m_2l_1l_2p_1p_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1^2l_2^2m_2(m_1 + m_2\sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \quad (6.1)$$

$$-g(l_1(m_1 + m_2)\cos(\theta_1) + l_2m_2\cos(\theta_2)) + (m_1 + m_2)gl_1 + m_2gl_2$$

Assim, para determinado valor de energia, pode-se reescrever uma das coordenadas ou momenta em função das outras três, confinando a dinâmica na superfície de energia tridimensional Σ_E .

Escolhendo um valor de energia E e condições iniciais variando os valores de θ_1 , θ_2 e p_1 , a equação 6.1 fornece as soluções de p_2 tais que a energia se mantenha constante. Na maioria dos casos dois valores de p_2 são obtidos, um deles corresponde ao braço inferior

do pêndulo movendo-se da esquerda para a direita ($\dot{\theta}_2 > 0$) e o outro corresponde ao movimento contrário ($\dot{\theta}_2 < 0$). Para obtermos uma solução única, consideraremos apenas o caso em que $\dot{\theta}_2 \geq 0$. Em posse de conjuntos de valores iniciais para as quatro coordenadas, as equações de Hamilton 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19 podem ser resolvidas numericamente. O espaço de fases é obtido plotando as soluções no espaço definido por θ_1 , θ_2 e p_1 .

Esse procedimento foi realizado para $E = 2$ J e oito condições iniciais distintas. A figura 6.1 mostra o espaço de fases obtido, que exibe a geometria esférica da superfície de energia Σ_E em que todas as órbitas são confinadas.

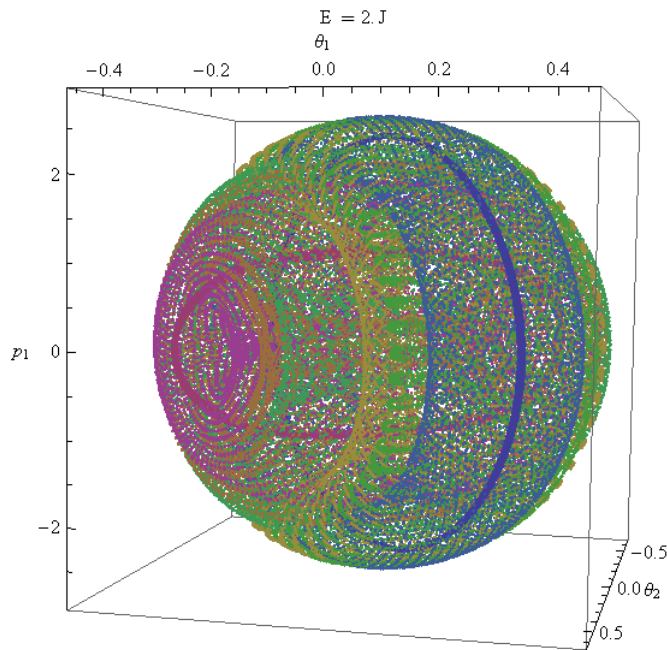


Figura 6.1: Espaço de fases tridimensional do pêndulo duplo para $E = 2.0$ J.

6.2 Seções de Poincaré

Evidentemente, poucas órbitas são suficientes para dificultar a visualização individual de cada uma delas no espaço de fases, como observado na figura 6.1. O método da secção de Poincaré permite uma visualização mais clara da dinâmica global do sistema.

Para a construção da secção de Poincaré para o pêndulo duplo, primeiramente é necessário escolher de forma adequada o plano Σ de intersecção, de modo que as órbitas de fato cruzem o plano escolhido. Na condição de baixas energias, os braços oscilam em torno da posição de equilíbrio, $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 0$. Quando o pêndulo duplo possui energia suficiente para que os braços deem voltas completas, frequentemente a condição de um dos ângulos seja zero também será satisfeita. Assim, é conveniente a escolha de Σ como plano em que $\theta_2 = 0$. Definimos também a condição $\dot{\theta}_2 \geq 0$, de modo a considerarmos apenas as intersecções em um sentido.

Considerando apenas duas condições iniciais utilizadas na construção do espaço de

fases da figura 6.1, é possível visualizar com mais clareza cada uma delas e suas intersecções com o plano Σ , conforme a figura 6.2. A secção de Poincaré correspondente à essas órbitas é exibida na figura 6.3. Nota-se que ambas as órbitas estão confinadas em superfícies toroidais e são quase periódicas.

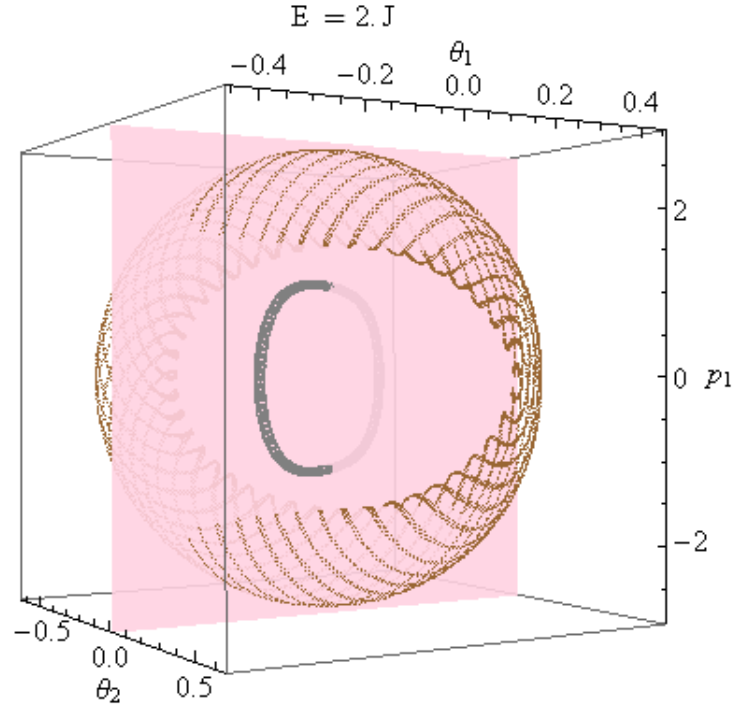


Figura 6.2: Duas órbitas no espaço de fases para $E = 2 \text{ J}$. Em destaque, o plano Σ utilizado para construção das secções de Poincaré.

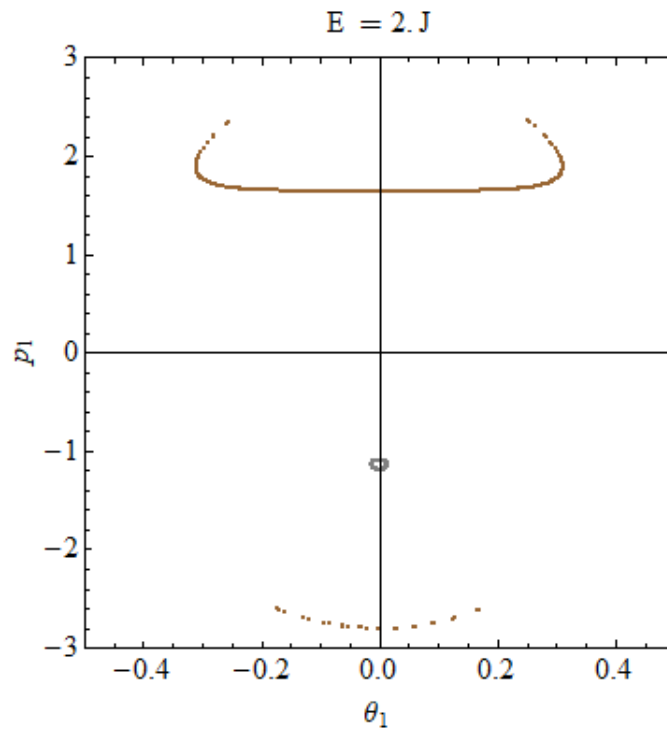


Figura 6.3: Secção de Poincaré das órbitas exibidas na figura 6.2.

Nem sempre as órbitas quase periódicas são confinadas em superfícies toroidais regulares como as da figura 6.2. A figura 6.4 mostra uma órbita quase periódica no espaço de fases, em diferentes ângulos de visão, para $E = 15$ J.

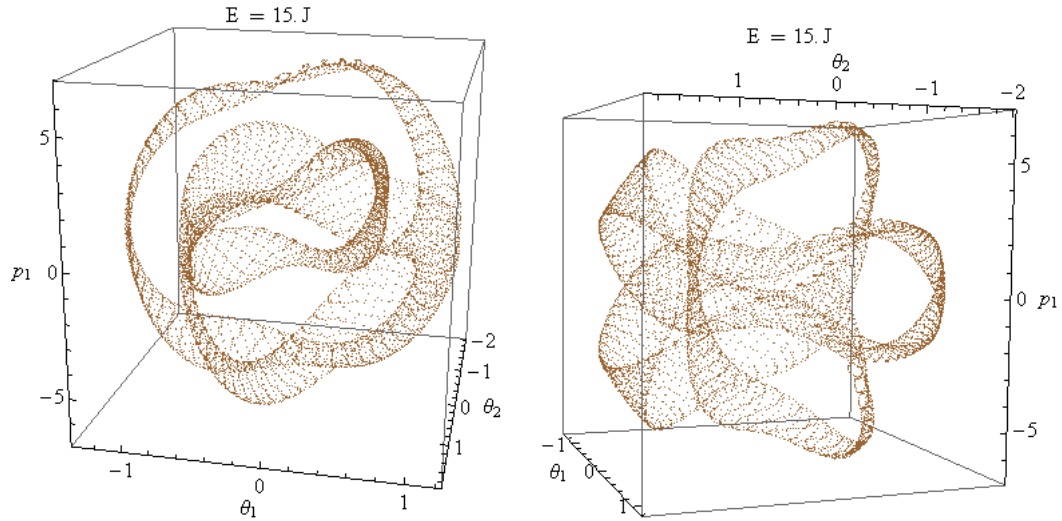


Figura 6.4: Órbita quase periódica com $E = 15$ J.

Órbitas caóticas não são confinadas em superfícies toroidais. Esse tipo de órbita visita livremente toda região acessível da superfície de energia Σ_E , ou seja, para tempos suficientemente longos, visita toda parte do espaço de fases não ocupada por toros. A figura 6.5 (a) mostra a órbita quase periódica da figura 6.4 e uma órbita caótica, e 6.5 (b) a secção de Poincaré correspondente. A região preenchida pela órbita caótica é chamada de mar de caos.

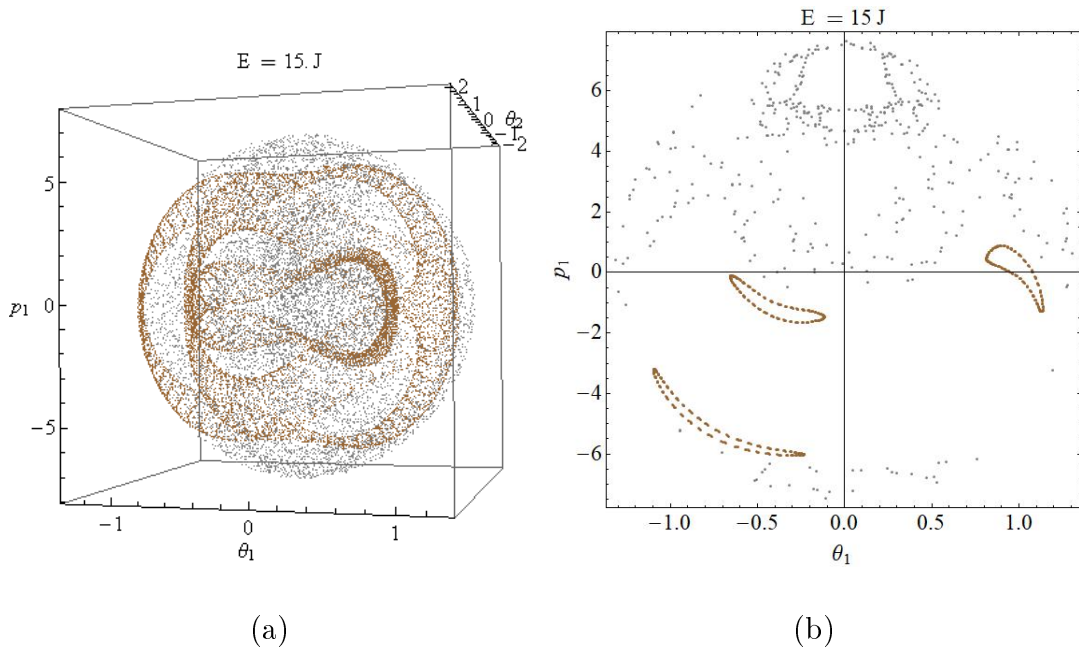


Figura 6.5: Em (a), órbita quase periódica e órbita caótica no espaço de fases e (b) secção de Poincaré correspondente.

Analisaremos agora a evolução das secção de Poincaré do pêndulo duplo conforme o aumento da energia. As figuras 6.6 a 6.9 são as secções de Poincaré obtidas para diferentes energias. Nessas secções, cada cor corresponde a uma condição inicial distinta.

Em um regime de baixas energias, com $E = 2$ J, observam-se apenas órbitas quase periódicas e periódicas. Condições iniciais escolhidas dentro das curvas fechadas devem permanecer dentro delas, de modo que ao se aproximar do centro de uma dessas curvas, a secção de Poincaré correspondente será apenas um ponto, caracterizando uma órbita periódica. As duas órbitas periódicas observadas para essa energia correspondem aos modos normais de vibração, como verificaremos na seção 6.4.

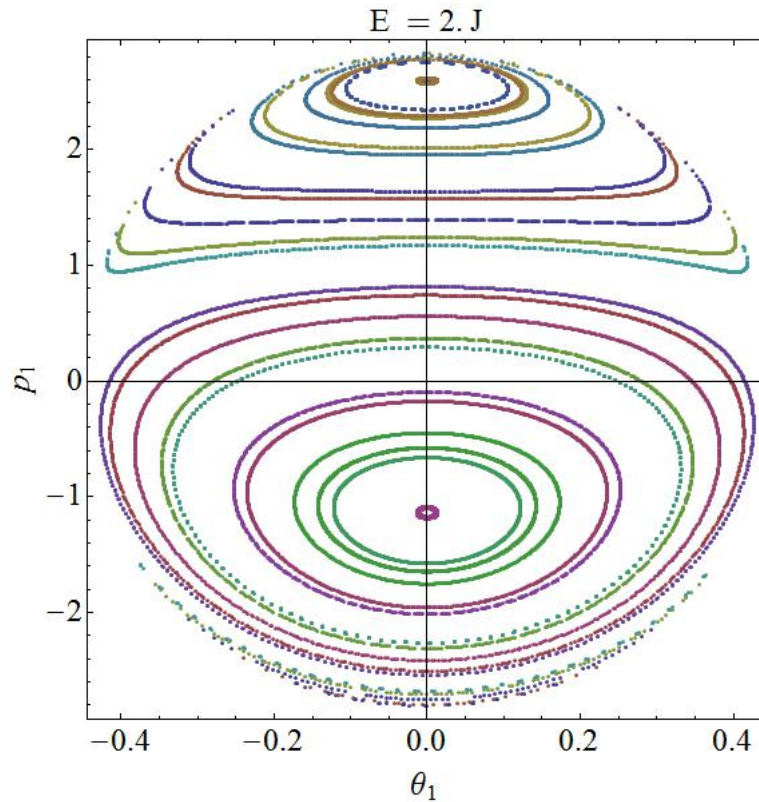


Figura 6.6: Secção de Poincaré para $E = 2.0$ J.

Aumentando a energia para $E = 5$ J, alguns toros são deformados e o surgimento de novas órbitas periódicas é evidenciado pela aparição de novas curvas fechadas. O aumento da energia proporciona novos comportamentos, já que um número maior de condições iniciais pode existir. Comparando a escala dos gráficos é evidente a expansão da superfície de energia Σ_E . Entretanto, toda dinâmica ainda é composta por órbitas quase periódicas e periódicas.

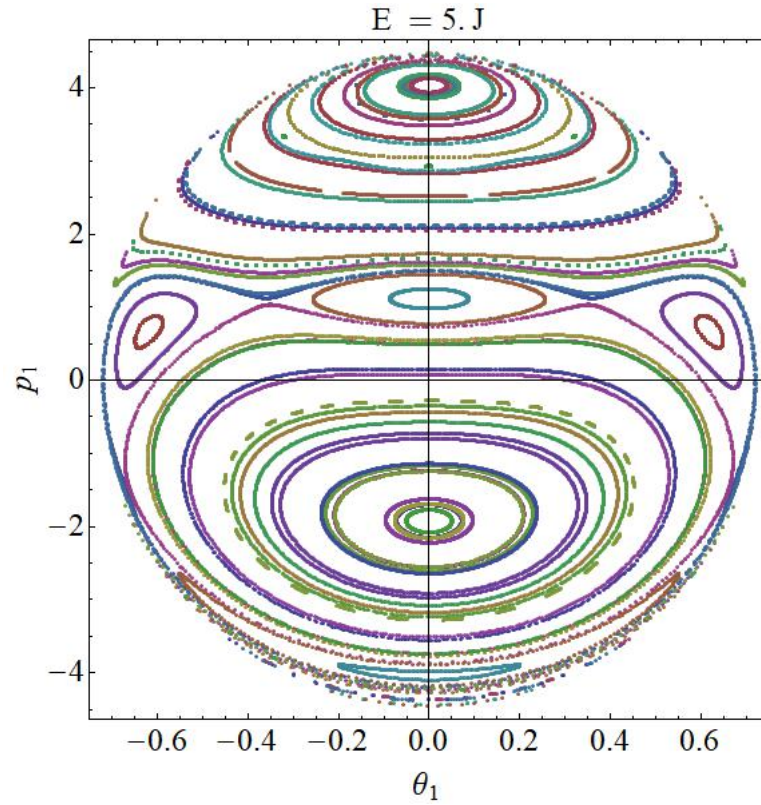


Figura 6.7: Seção de Poincaré para $E = 5.0$ J.

Com $E = 10$ J os toros continuam a ser deformados e mais uma vez surgem novas órbitas periódicas. Porém, alguns toros são destruídos e começa a surgir o mar de caos, confinado entre as órbitas quase periódicas e preenchendo densamente a região que lhe é acessível. Condições iniciais próximas escolhidas nessa região apresentarão órbitas que divergem.

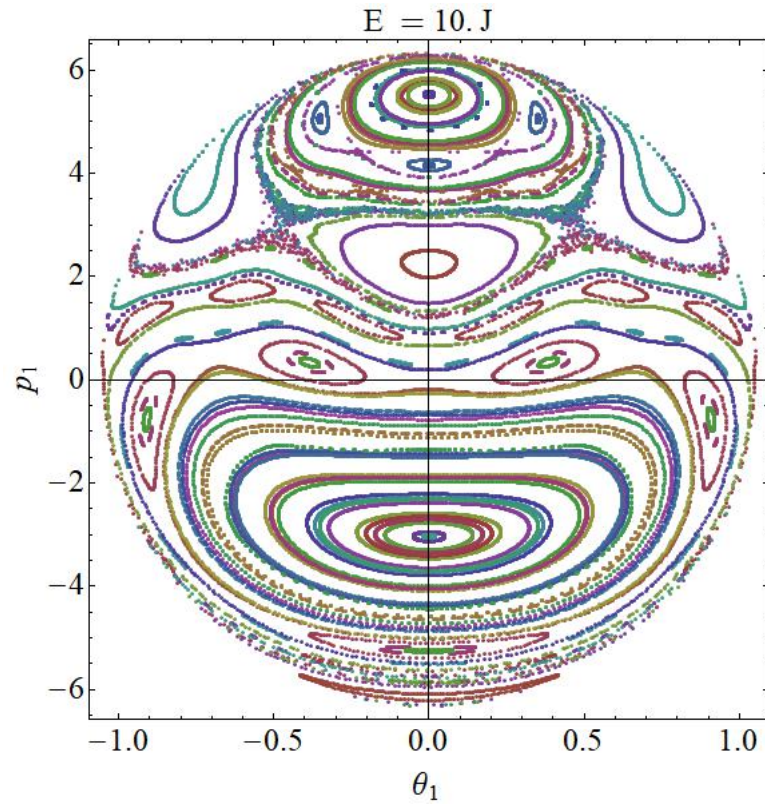


Figura 6.8: Seção de Poincaré para $E = 10.0 \text{ J}$.

Para $E = 15 \text{ J}$ o mar de caos avança, de forma que o sistema apresenta comportamento predominantemente caótico.

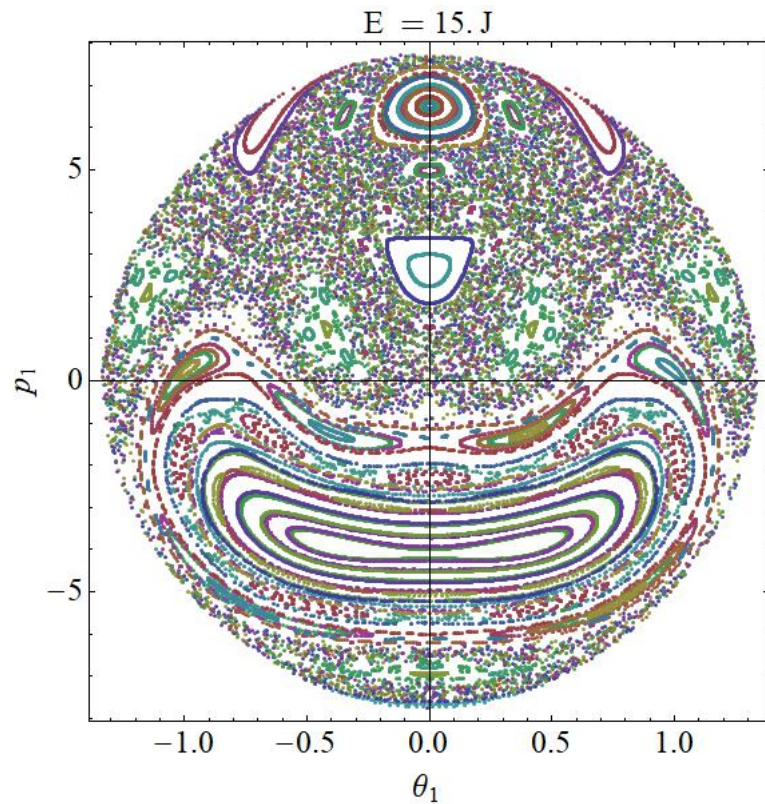


Figura 6.9: Seção de Poincaré para $E = 15.0 \text{ J}$.

6.3 Sensibilidade às Condições Iniciais e Expoente de Lyapunov

Para analisarmos a divergência de órbitas próximas, consideremos as seguintes condições iniciais:

C.I.	θ_1	θ_2	p_1	p_2
1	$\frac{\pi}{2}$	0	0	0
2	$\frac{\pi}{2} + 0.04$	0	0	0
3	$\frac{\pi}{2} + 0.08$	0	0	0

Tabela 6.1: Condições iniciais utilizadas para observar a divergência de órbitas próximas.

A evolução temporal dos ângulos θ_1 e θ_2 são exibidas nas figuras 6.10 e 6.11, respectivamente.

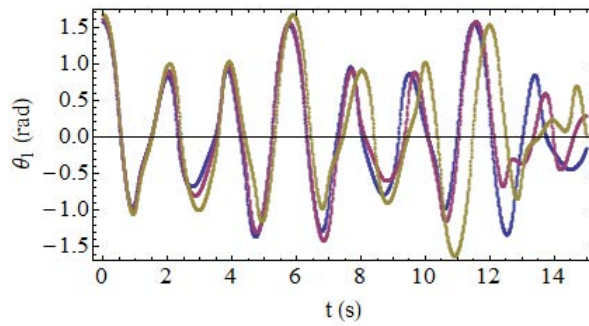


Figura 6.10: Evolução temporal de θ_1 para as condições iniciais da tabela 6.1. As cores azul, roxo e amarelo correspondem às C.I.s 1, 2 e 3, respectivamente.

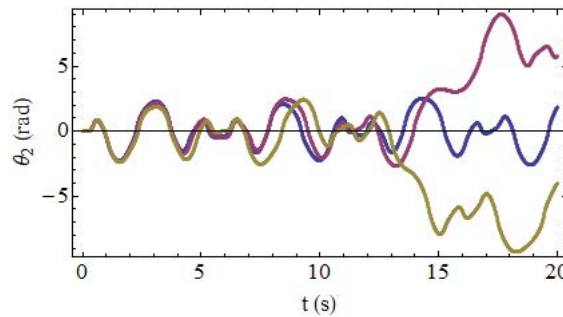


Figura 6.11: Evolução temporal de θ_2 para as condições iniciais da tabela 6.1. As cores azul, roxo e amarelo correspondem às C.I.s 1, 2 e 3, respectivamente.

Em ambos os gráficos fica evidente o distanciamento dos pontos com o tempo, de maneira análoga ao observado por Lorenz, conforme a figura 3.1. O afastamento é ainda

mais expressivo na figura 6.11, pois a massa inferior do pêndulo duplo possuiu energia suficiente para dar voltas completas em torno do seu eixo de rotação.

Consideraremos agora as condições iniciais da tabela 6.1 para o cálculo do maior expoente de Lyapunov local, Λ . Primeiramente, foi calculada a distância entre as órbitas no espaço de fases quadridimensional, aos pares i, j e em cada instante, através da equação:

$$d_{i,j} = \sqrt{(q_{1,j} - q_{1,i})^2 + (p_{1,j} - p_{1,i})^2 + (q_{2,j} - q_{2,i})^2 + (p_{2,j} - p_{2,i})^2}$$

Com as distâncias, foram calculados valores de Λ a partir da equação 3.5 em cada instante. A média dos valores obtidos para cada par de condições iniciais está apresentada na tabela 6.2.

C.I.s consideradas	Λ
1 e 2	0,136
1 e 3	0,170
3 e 2	0,184

Tabela 6.2: Valores do maior expoente de Lyapunov local (Λ) obtidos para as órbitas simuladas.

Os valores positivos obtidos para Λ constataam a divergência exponencial das órbitas inicialmente próximas.

6.4 Modos Normais de Vibração

Conforme discutido na seção 4.4, existem duas soluções periódicas para as equações do movimento do pêndulo duplo na condição de pequenas oscilações.

A primeira delas, dada pela equação 4.27, corresponde a oscilações com mesma frequência, dada por 4.25, e em fase das duas massas. Essa configuração foi simulada integrando as equações de Hamilton com a condição inicial $\theta_1 = 0.1$ rad, $\theta_2 = 0.1\sqrt{2}$ rad e $p_1 = p_2 = 0$. A evolução temporal de θ_1 e θ_2 é apresentada na figura 6.12. Conforme esperado, ambas as massas oscilam em fase e com a mesma frequência sendo que a amplitude de oscilação da massa de baixo é ligeiramente maior.

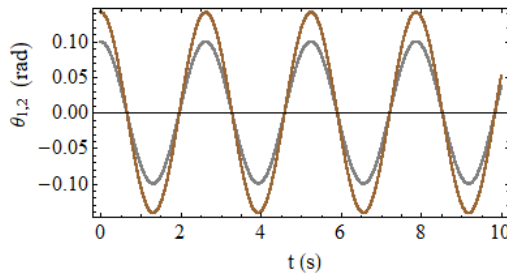


Figura 6.12: Evolução temporal de θ_1 (em cinza) e θ_2 (em marrom) para o modo normal em fase.

O segundo modo normal, dado pela equação 4.28, corresponde a oscilações das massas do pêndulo duplo com a mesma frequência, dada por 4.26, e fora de fase. A simulação dessa configuração foi feita com a condição inicial $\theta_1 = 0.1$ rad, $\theta_2 = -0.1\sqrt{2}$ rad e $p_1 = p_2 = 0$ e a evolução temporal de θ_1 e θ_2 é apresentada na figura 6.13.

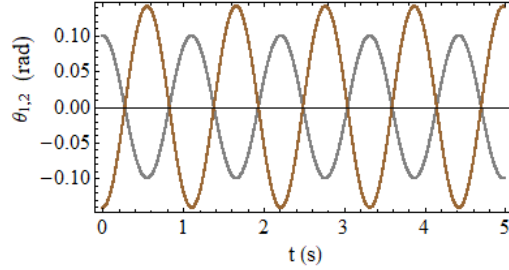


Figura 6.13: Evolução temporal de θ_1 (em cinza) e θ_2 (em marrom) para o modo normal fora de fase.

Nota-se que a frequência de oscilação do modo normal fora de fase é maior do que a frequência de oscilação do modo normal em fase, conforme esperado segundo as equações 4.25 e 4.26.

As órbitas dos modos normais no espaço de fases estão representadas na figura 6.14 juntamente com o plano Σ da secção de Poincaré.

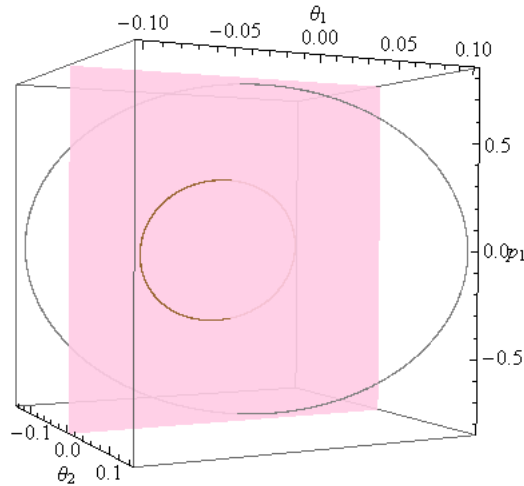


Figura 6.14: Órbitas no espaço de fases do modo normal em fase (cinza) e fora de fase (marrom). Em destaque, o plano de intersecção para construção da secção de Poincaré.

Lembrando que na construção das secções de Poincaré considera-se apenas o movimento em um sentido, entrando ou saindo do plano Σ , verifica-se que, de fato, cada modo normal corresponde a um ponto na secção de Poincaré.

Capítulo 7

Resultados Experimentais

Os dados experimentais foram obtidos a partir de filmagens frontais do pêndulo duplo real. Foram considerados trechos curtos, de aproximadamente 10 segundos, para que o efeito da dissipação, causada pelo atrito interno dos rolamentos e pela resistência do ar, pudesse ser desconsiderado. Como foram utilizadas filmagens feitas a 60 quadros por segundo, cada conjunto de dados experimentais corresponde a aproximadamente 600 pontos.

Evidentemente, existe uma limitação da quantidade de dados possível de ser obtida em um intervalo com pouca variação de energia, dificultando a comparação dos resultados experimentais com os resultados obtidos numericamente. As secções de Poincaré exibidas na seção 6.2 foram obtidas com simulações de 1000 segundos e um passo de 0,01 segundo, resultando em 100.000 pontos por órbita, tornando esse tipo de resultado impossível de se reproduzir experimentalmente com o aparato disponível.

Nesse capítulo serão apresentados resultados experimentais que evidenciam a existência de tanto o comportamento regular (quase periódico) quanto caótico do pêndulo duplo. Em alguns momentos serão exibidos resultados de simulações numéricas em condições semelhantes às experimentais para efeito de comparação.

7.1 Espaço de Fases

A partir dos valores dos ângulos, θ_1 e θ_2 , e das velocidades angulares, $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$, obtidos experimentalmente, as equações 4.13 e 4.14 fornecem os momenta p_1 e p_2 , respectivamente.

Dessa forma, é possível visualizar as órbitas experimentais no espaço de fases plotando os valores de θ_1 , p_1 e θ_2 a cada instante. As figuras 7.1 e 7.2 são resultados desse procedimento. A coloração dos pontos, conectados por uma curva de Bézier¹, e o plano destacado ao fundo foram escolhidos com o intuito de facilitar a visualização das figuras tridimensionais.

¹A curva de Bézier é uma curva polinomial expressa como a interpolação linear entre alguns pontos representativos, chamados de pontos de controle.

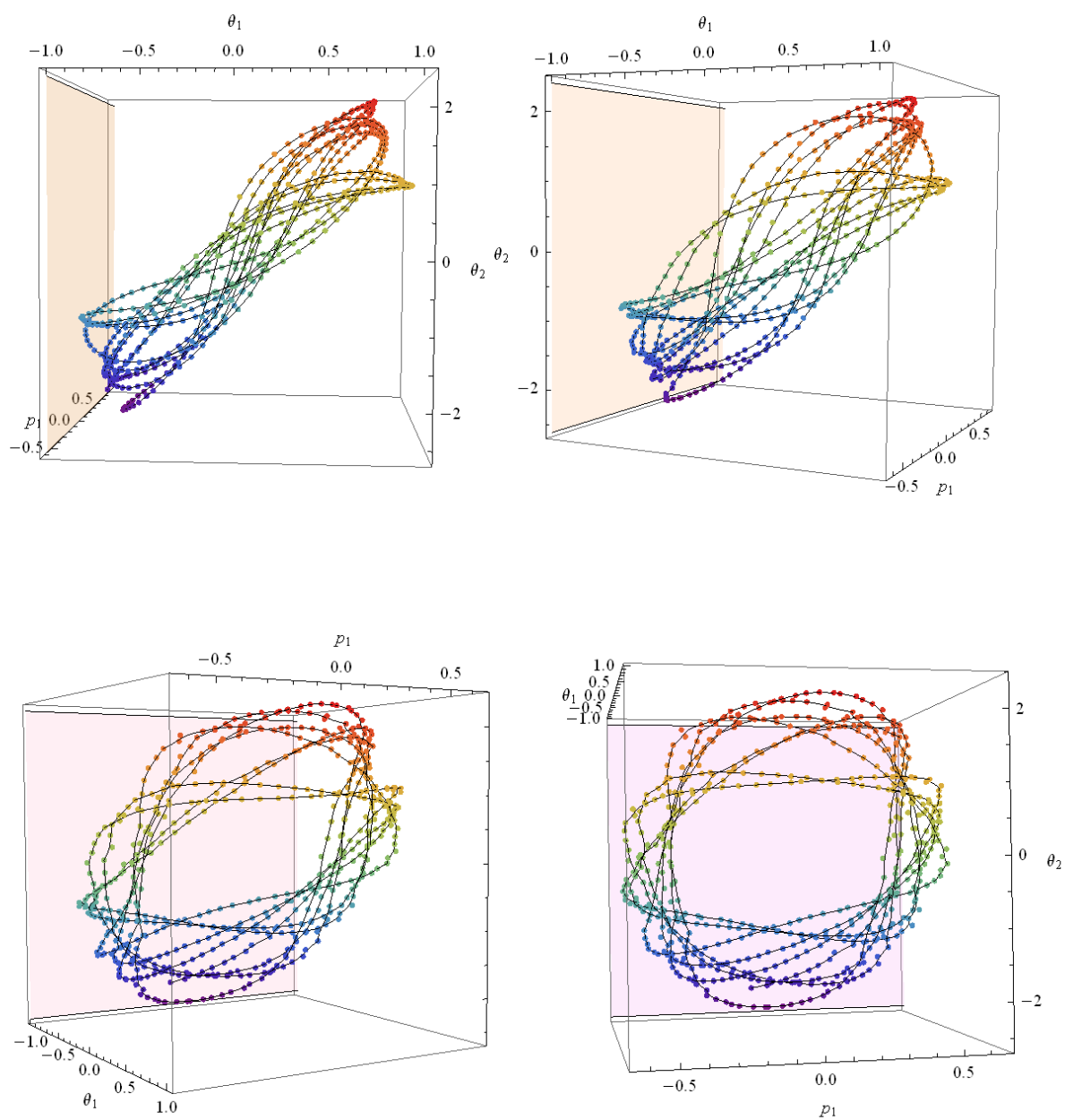


Figura 7.1: Órbita no espaço de fases construída a partir de dados experimentais em diferentes pontos de vista.

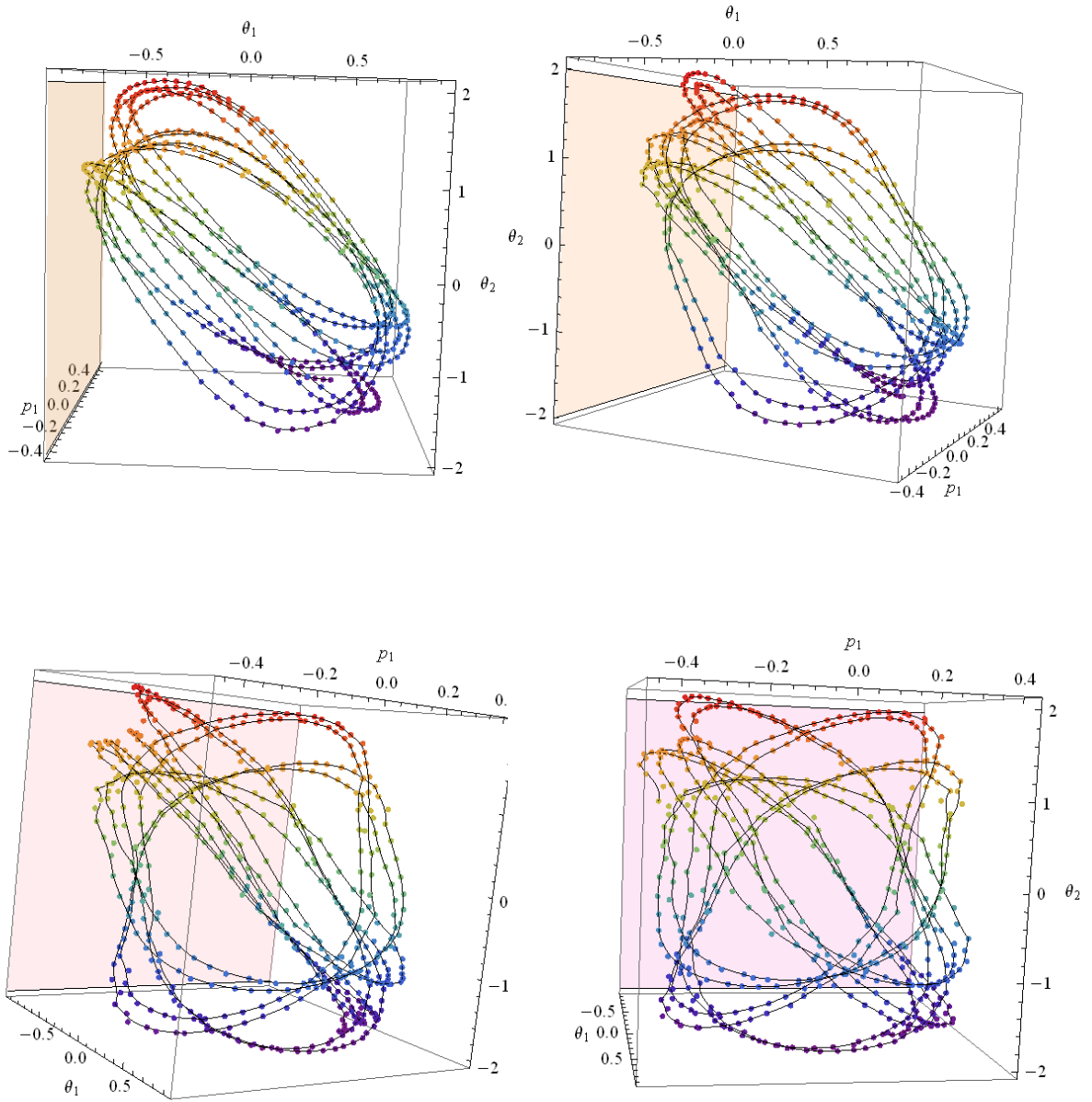


Figura 7.2: Órbita no espaço de fases construída a partir de dados experimentais em diferentes pontos de vista.

Ambas as órbitas das figuras 7.1 e 7.2 foram obtidas a partir de filmagens do pêndulo duplo lançado com condições iniciais correspondentes a baixas energias, para que o movimento fosse quase periódico e a dinâmica confinada a superfícies toroidais. Uma situação análoga foi simulada para comparação, conforme a figura 7.3 (a). A figura 7.3 (b) exibe a mesma órbita com um tempo maior de simulação, evidenciando a geometria toroidal.

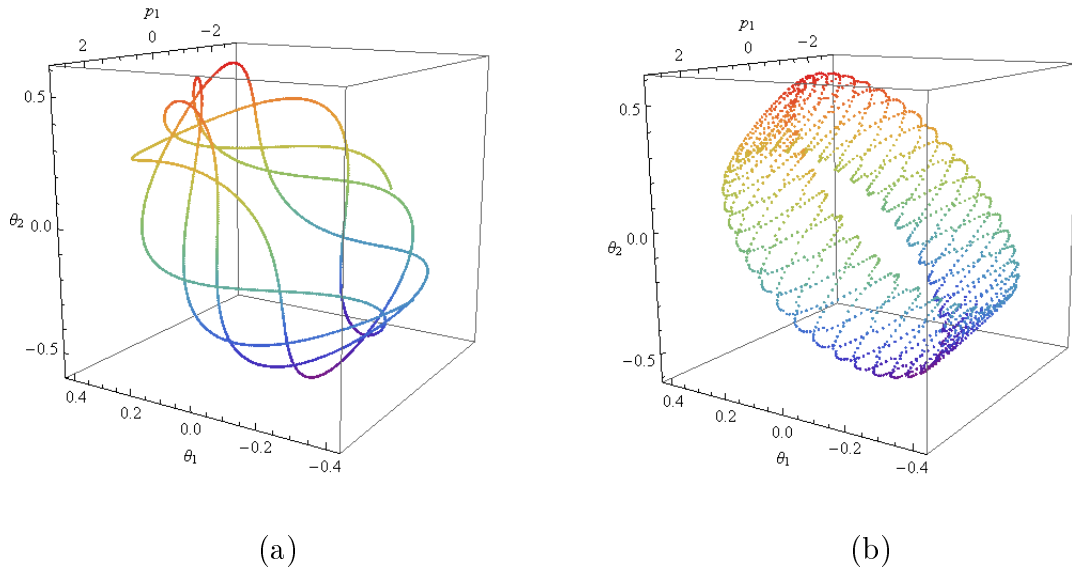


Figura 7.3: Em (a), 10 segundos de uma órbita quase periódica no espaço de fases. Em (b), a mesma órbita com 1000 segundos de simulação.

7.2 Pequenas Oscilações

Para pequenas oscilações, a solução geral das equações do movimento do pêndulo duplo é uma combinação linear dos modos normais de vibração, dados pelas equações 4.27 e 4.28, com diferentes amplitudes.

Encontramos dificuldades para fazer com que o pêndulo duplo real oscile com apenas uma de suas frequências normais, já que seria necessário uma precisão muito grande nas condições iniciais. Entretanto, observamos comportamentos semelhantes aos modos normais puros. Nesses casos, a amplitude de oscilação referente a uma das frequências normais é muito maior do que a outra na solução geral para o movimento.

As figuras 7.4 e 7.5 mostram a evolução temporal das posições angulares em órbitas semelhantes aos modos normais, a primeira delas remete ao caso em que ambas as massas oscilam em fase e a segunda ao caso em que as oscilações ocorrem fora de fase.

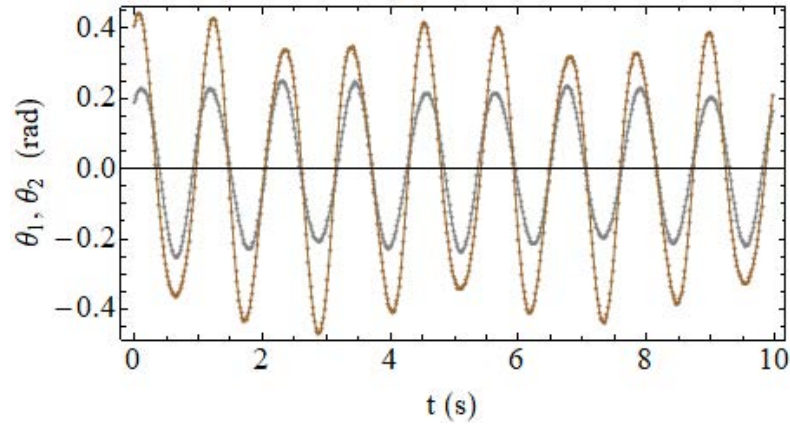


Figura 7.4: Evolução temporal de θ_1 (em cinza) e θ_2 (em marrom) para pequenas oscilação, configuração semelhante ao modo normal em fase.

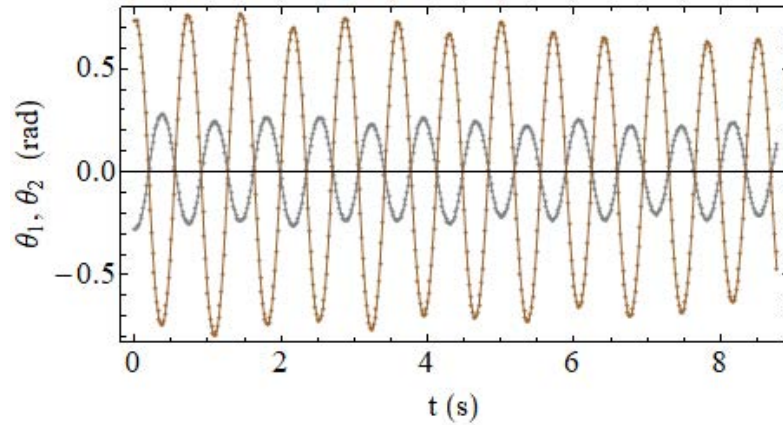


Figura 7.5: Evolução temporal de θ_1 (em cinza) e θ_2 (em marrom) para pequenas oscilação, configuração semelhante ao modo normal fora de fase.

Em ambos os casos são observadas variações nas amplitudes extremas de oscilação e nota-se também que as massas não oscilam com a mesma frequência, evidenciando que os movimentos não correspondem a modos normais puros. Porém, algumas características dos modos normais, evidenciadas nas seções 4.4 e 6.4, também foram observadas: a amplitude de oscilação da massa de baixo é maior do que a da massa de cima; e a frequência de oscilação na configuração fora de fase é maior do que a frequência de oscilação para a configuração em fase.

Na figura 7.6 são exibidas as duas órbitas no espaço de fases. Diferente do observado na figura 6.14, em que os modos normais foram simulados numericamente, as órbitas não formam elipses fechadas. A dispersão dos pontos é justificada pelo fato de não se tratarem de modos normais puros e também por conta de erros experimentais.

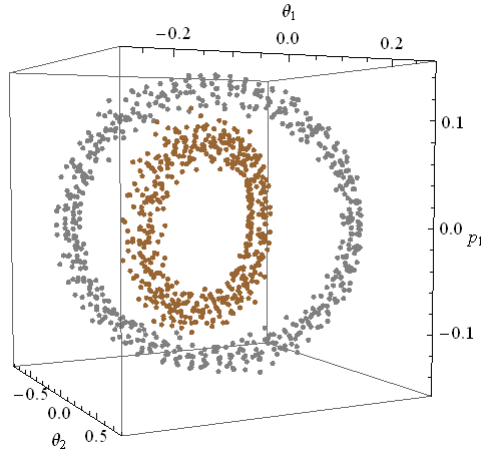


Figura 7.6: Órbitas no espaço de fases para configurações semelhantes ao modo normal em fase (cinza) e fora de fase (marrom).

7.3 Sensibilidade às Condições Iniciais e Expoente de Lyapunov

De forma análoga ao realizado na seção 6.3, para analisarmos a divergência de órbitas caóticas próximas estudaremos um conjunto de três condições iniciais praticamente indistinguíveis do pêndulo duplo real. Foram realizadas filmagens de aproximadamente 10 segundos, abandonando o pêndulo duplo com $\theta_1 \simeq -\frac{\pi}{2}$ rad, $\theta_2 \simeq -\frac{\pi}{2}$ e $p_1 = p_2 = 0$.

A evolução temporal dos ângulos θ_1 e θ_2 são exibidas nas figuras 7.7 e 7.8, respectivamente. Novamente, é evidenciada a divergência das órbitas inicialmente próximas, agora a partir de resultados experimentais.

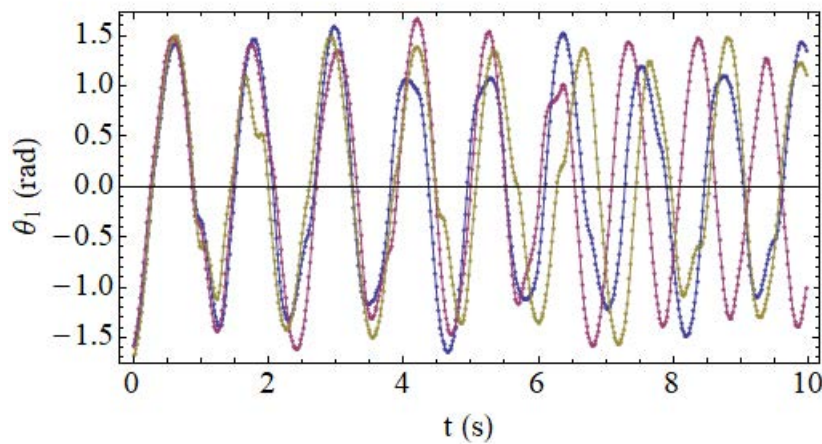


Figura 7.7: Evolução temporal de θ_1 para órbitas inicialmente próximas.

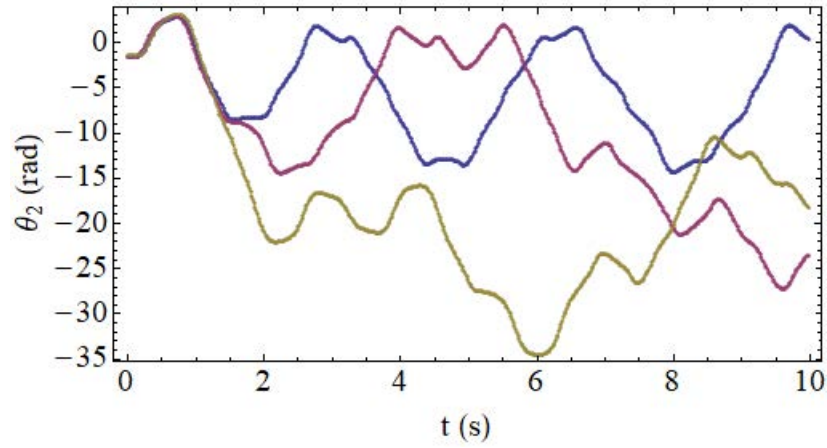


Figura 7.8: Evolução temporal de θ_2 para órbitas inicialmente próximas.

Identificando como O_1 a órbita em azul, O_2 a órbita em amarelo e O_3 a órbita em roxo, a tabela 7.1 exibe o maior expoente de Lyapunov local obtido tomando as distâncias no espaço de fases quadridimensional, em cada instante, entre pares de órbitas.

Órbitas consideradas	Λ
O_1 e O_2	0,920
O_1 e O_3	0,722
O_3 e O_2	0,924

Tabela 7.1: Valores do maior expoente de Lyapunov local (Λ) obtidos para as órbitas experimentais.

Todos os valores de Λ obtidos foram positivos, o que confirma a divergência exponencial das órbitas inicialmente próximas.

Capítulo 8

Conclusões

A partir dos resultados do tratamento analítico do modelo do pêndulo duplo ideal, segundo o formalismo Hamiltoniano da mecânica clássica, foi possível explorar numericamente o sistema. A geometria apresentada no espaço de fases tridimensional permite a visualização clara do comportamento regular, com órbitas confinadas em toros, e irregular, com órbitas que cobrem densamente a região disponível do espaço de fases. Através do método das Seções de Poincaré visualizamos em duas dimensões o comportamento do sistema com diversas condições iniciais, para dada energia. Dessa forma, notamos um comportamento totalmente regular para baixas energias e o surgimento gradual do caos conforme a energia era aumentada.

Foram obtidos analiticamente os modos normais de vibração, cuja combinação linear é a solução geral para pequenas oscilações. Os modos normais correspondem a órbitas periódicas em que ambos os braços do pêndulo oscilam com a mesma frequência, em fase ou fora de fase. Esse comportamento foi verificado através de simulações, observando a evolução angular dos ângulos e também as órbitas no espaço de fases.

Mostrarou-se satisfatório o pêndulo duplo real, utilizado para a parte experimental desse trabalho, assim como o tratamento digital de vídeo, método escolhido para a coleta dos dados experimentais. Evidentemente, o experimento esteve sujeito à ação de forças dissipativas, como o atrito com o ar e a resistência interna dos próprios rolamentos que acoplam os braços do pêndulo. Além disso, também existem erros intrínsecos à coleta dos dados experimentais. Entretanto, dentro das aproximações consideradas, como filmagens curtas para que a energia se mantivesse aproximadamente constante e a utilização de um modelo de massas pontuais, foram obtidos resultados análogos aos observados através de simulações. Para pequenas oscilações, mostramos experimentalmente órbitas semelhantes aos modos normais.

O cálculo do maior expoente de Lyapunov, grandeza que indica a divergência de órbitas no espaço de fases, foi feito tanto para órbitas simuladas numericamente quanto para órbitas do pêndulo duplo real. Em ambos os casos, foram obtidos valores positivos, evidenciando a existência do comportamento caótico.

Dessa forma, foi realizada uma caracterização qualitativa da dinâmica apresentada pelo pêndulo duplo, evidenciando a existência de comportamento regular (periódico ou quase periódico) e irregular (caótico, ou seja, com grande sensibilidade às condições iniciais).

Referências Bibliográficas

- [1] SAVI, Marcelo. *Dinâmica Não-Linear e Caos*. 1. ed. Rio de Janeiro: e-papers, 2006.
- [2] MONTEIRO, Luiz. *Sistemas Dinâmicos*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [3] MAY, Robert. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, 261, 1976.
- [4] Tracker: Video Analysis and Modeling Tool. Disponível em: <<https://physlets.org/tracker/>>. Acesso em 01 de outubro de 2017.
- [5] Wolfram Mathematica. Disponível em <<https://www.wolfram.com/mathematica/>>. Acesso em 01 de outubro de 2017.
- [6] RUGGIERO, M. A. G. et al. *Cálculo Numérico*, aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996.
- [7] KORSCH, Hans. *CHAOS*, A Program Collection for the PC. 3. ed. Nova York: Springer, 2007.
- [8] GOLDSTEIN, Herbert et al. *Classical Mechanics*. 3. ed. Boston: Addison Wesley, 2000.
- [9] FITAS, Augusto. *O Princípio da Menor Ação*: uma história de Fermat e Lagrange. 1. ed. Lisboa: Caleidoscópio, 2012.
- [10] STROGATZ, Steven. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 1. ed. Boulder: Westview Press, 2001.
- [11] SILVEIRA, Fernando. *Determinismo, previsibilidade e caos*. Caderno Catarinense de Ensino de Física, v. 10, 1993.
- [12] GLEICK, James. *Caos*: a criação de uma nova ciência. 12. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1990.
- [13] MONERAT, G.A. et al.. *Explorando sistemas hamiltonianos: Estudo analítico*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 28, 2006.

-
- [14] LICHTENBERG, A.J.; LIEBERMAN, M.A. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2. ed. Nova York: Springer-Verlag, 1992.
- [15] ACHESON, David. *From Calculus to Chaos: An Introduction do Dynamics*. 1. ed. Nova York: Oxford Univerisity Press, 1997.
- [16] VADAI, Gergely et al. *Real-time demonstration of the main characteristics of chaos in the motion of a real double pendulum*. European Journal of Physics, v. 33, 2012.